



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**HELLEN DE ANDRADE MOURA**

**ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE OBSTRUÇÃO: INFLUÊNCIA DA MALHA**  
**NA ANÁLISE ESPECTRAL E ESTRUTURAL**

**FORTALEZA**

**2025**

HELLEN DE ANDRADE MOURA

ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE OBSTRUÇÃO: INFLUÊNCIA DA MALHA NA  
ANÁLISE ESPECTRAL E ESTRUTURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física do Centro  
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Murilo Pereira de  
Almeida

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- M886e    Moura, Hellen de Andrade.  
          Escoamento Turbulento sobre Obstrução: Influência da Malha na Análise Espectral e Estrutural /  
          Hellen de Andrade Moura. – 2025.  
          63 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
          Curso de Física, Fortaleza, 2025.  
          Orientação: Prof. Dr. Murilo Pereira de Almeida.
1. Dinâmica dos Fluidos Computacional. 2. OpenFOAM. 3. Método dos Volumes Finitos. 4.  
          Turbulência. 5. Simulação de Grandes Vórtices. I. Título.

CDD 530

---

HELLEN DE ANDRADE MOURA

ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE OBSTRUÇÃO: INFLUÊNCIA DA MALHA NA  
ANÁLISE ESPECTRAL E ESTRUTURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física do Centro  
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
bacharel em Física.

Aprovada em: 28 de Julho de 2025

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Murilo Pereira de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Me. Igor Pereira Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos amigos que conheci no curso de física que  
seguiram outros caminhos.

## AGRADECIMENTOS

Expresso aqui minha mais sincera gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e para minha formação. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Murilo Pereira de Almeida, por acreditar neste projeto, por disponibilizar seu tempo e conhecimento, e por me guiar com tanta competência e dedicação.

Aos meus pais, Ana Cláudia de Andrade e Arilton Moura, que me ensinaram a sonhar e lutar pelo meu espaço, e que trabalharam duro para que eu pudesse ter o privilégio de seguir meus sonhos e minha irmã Emilly Moura que foi a primeira a desbravar o mundo acadêmico e a me mostrar que o TCC em suas palavras "É babado viu!".

E a todos do Laboratório de Simulações Numéricas (LSN), que fizeram meus dias mais leves e que me deram suporte em cada passo nesta reta final, principalmente ao Me. Igor Cavalcante, Me. Robert Tavares, Me. Carlos Miguel, Márcio Vaz jr e Alessandro Magalhães. E também gostaria de destacar os amigos que conheci pelos corredores do Departamento de Física, Gabriel Martins e à Roberta Costa pelas conversas —profundas ou nem tanto e por me mostrarem que a UFC vai muito além dos estudos, sendo um lugar onde se pode criar laços reais em meio às incertezas e ao caos de nossas vidas.

Aos amigos que me acompanham para além dos muros da universidade, particularmente a Isaías de Araújo, Jennifer Lima, Thaissa Nascimento e Saulo Cavalcante, obrigada por testemunharem esta jornada desde o início e por oferecerem apoio constante, mesmo diante das minhas dúvidas e inseguranças.

E aos meus gatos amados, que me fizeram companhia madrugadas adentro e foram os primeiros a ver minhas comemorações ao resolver questões e quando os códigos compilavam: Shiro e Príncipe Encantado, que se foram, e à Pudim, que continua nesta árdua tarefa de me acompanhar em minhas madrugadas e maratonas de estudos.

E agradeço aos membros do GTMC, Célio Neto e Lucas Bezerra —menos o Thiago Sales e Gabriel Velho.

Grandes redemoinhos têm pequenos redemoinhos, que se nutrem de sua velocidade; e pequenos redemoinhos têm outros pequeninos, e assim se segue, até a viscosidade.

(RICHARDSON, 1922, p. 66)

## RESUMO

A fidedignidade de simulações numéricas de escoamentos turbulentos, realizadas sob a metodologia do Método dos Volumes Finitos (MVF), é diretamente dependente da qualidade da malha computacional. Uma discretização espacial inadequada pode levar a previsões imprecisas de fenômenos físicos críticos. Este trabalho apresenta uma análise sistemática e quantitativa da influência do refinamento da malha sobre as características espectrais e estruturais do escoamento turbulento e incompressível sobre um obstáculo retangular, configurado a um número de Reynolds de  $Re \approx 5 \times 10^5$ . As simulações foram realizadas utilizando o software de código aberto OpenFOAM, com o algoritmo PISO e o modelo de turbulência de Simulação de Grandes Vórtices (LES) com o modelo de submalha WALE. A investigação de independência de malha foi conduzida comparando-se quatro níveis de refinamento. A convergência foi avaliada por meio da análise de autocorrelação temporal e da densidade espectral de potência (PSD) das flutuações de velocidade. Os resultados demonstram que malhas grosseiras introduzem dissipação numérica excessiva, suprimindo estruturas de pequena escala. Em contrapartida, a malha de referência (Média) e a Refinada alcançaram uma solução convergente, evidenciada pela sobreposição das funções de autocorrelação. A análise espectral, baseada na Transformada Rápida de Fourier, revelou que apenas a malha refinada foi capaz de capturar uma sub-faixa inercial extensa, com decaimento de energia compatível com a lei teórica de  $-5/3$  de Kolmogorov, validando a capacidade da simulação em reproduzir a cascata de energia. Conclui-se que a resolução da malha é um parâmetro de primeira ordem que governa a capacidade da simulação em capturar corretamente a dinâmica dos vórtices e a física da turbulência, sendo sua verificação sistemática um passo essencial para a validação do modelo numérico.

**Palavras-chave:** dinâmica dos fluidos computacional; malha computacional; método dos volumes finitos; OpenFOAM; simulação de grandes vórtices (LES); turbulência; análise espectral.



## ABSTRACT

The fidelity of numerical simulations of turbulent flows, conducted under the Finite Volume Method (FVM) methodology, is directly dependent on the quality of the computational mesh. An inadequate spatial discretization can lead to inaccurate predictions of critical physical phenomena. This work presents a systematic and quantitative analysis of the influence of mesh refinement on the spectral and structural characteristics of the incompressible turbulent flow over a rectangular obstacle, configured at a Reynolds number of  $Re \approx 5 \times 10^5$ . The simulations were performed using the open-source software OpenFOAM, with the PISO algorithm and the Large Eddy Simulation (LES) turbulence model featuring the WALE subgrid-scale model. The mesh independence study was conducted by comparing four refinement levels. Convergence was assessed through the analysis of temporal autocorrelation and the power spectral density (PSD) of velocity fluctuations. The results demonstrate that coarse meshes introduce excessive numerical dissipation, suppressing small-scale structures. Conversely, the reference (Medium) and Refined meshes achieved a converged solution, evidenced by the overlap of their autocorrelation functions. The spectral analysis, based on the Fast Fourier Transform, revealed that only the refined mesh was able to capture an extensive inertial subrange with an energy decay consistent with Kolmogorov's theoretical  $-5/3$  power law, thereby validating the simulation's ability to reproduce the energy cascade. It is concluded that mesh resolution is a first-order parameter that governs the simulation's ability to correctly capture vortex dynamics and the physics of turbulence, making its systematic verification an essential step for the validation of the numerical model.

**Keywords:** computational fluid dynamics; computational mesh; finite volume method; OpenFOAM; large eddy simulation (LES); turbulence; spectral analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Visualização das estruturas turbulentas na esteira de um corpo com obstrução. As linhas de corrente, coloridas pela magnitude da velocidade, destacam a formação e o desprendimento de vórtices. . . . .	18
Figura 2 – Ilustração do escoamento de Couette. A aplicação de uma força ( $\mathbf{F}$ ) na placa superior de área ( $A$ ) gera uma tensão $\tau = F/A$ e uma velocidade $\mathbf{v}$ . O fluido entre as placas exibe um perfil de velocidade linear, resultando em um gradiente de velocidade constante $du/dy$ . . . . .	21
Figura 3 – Representação de um escoamento laminar em um duto, exibindo o perfil de velocidade parabólico característico. . . . .	21
Figura 4 – Ilustração do desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana. Mostra a região laminar inicial, a transição para turbulência a partir da distância crítica ( $x_{cr}$ ), e a subsequente camada limite turbulenta. . . . .	22
Figura 5 – Comparação do escoamento em torno de um cilindro. . . . .	22
Figura 6 – Ilustração de um Vórtice de Rankine, com um núcleo em rotação de corpo rígido ( $r \leq R, \omega > 0$ ) e uma região externa irrotacional ( $r > R, \omega = 0$ ). . . .	28
Figura 7 – Ilustração da Esteira de Vórtices de von Kármán formada a jusante de um cilindro. O desprendimento alternado de vórtices com rotações opostas caracteriza este fenômeno. . . . .	29
Figura 8 – Representação esquemática da cascata de energia de Kolmogorov, ilustrando a transferência de energia de grandes escalas ( $L$ ) para pequenas escalas através da sub-faixa inercial. . . . .	30
Figura 9 – Esquemático do domínio computacional do canal bidimensional fora de escala.	32
Figura 10 – Esquema do domínio computacional e da topologia da malha de referência. .	33
Figura 11 – Conjunto de malhas computacionais utilizadas para a análise de independência.	37
Figura 12 – Esquemático do domínio computacional, ilustrando a posição do obstáculo e a localização dos instrumentos de medição virtuais (Sondas). Destacando a região de injeção do fluido. . . . .	41
Figura 13 – Comparação do campo de vorticidade na componente $Z$ ( $\omega_z$ ) em uma seção do escoamento para a malha grosseira e refinada, com as cores cool to warm (extend) variando de $-9 \times 10^4$ a $9 \times 10^4$ , com tons azuis representando as faixas mais baixas e as vermelhas as mais altas. . . . .	43

Figura 14 – Visualização da topologia do campo de velocidades instantâneo através da técnica de Convolução Integral de Linha (LIC), no instante $t = 10s$ , para as quatro malhas: (a) malha muito grosseira, (b) malha grosseira, (c) malha média e (d) malha refinada. . . . .	45
Figura 15 – Densidade Espectral de Potência (PSD) das flutuações da velocidade longitudinal ( $u'$ ) em um ponto de prova na esteira, comparando os quatro níveis de refinamento de malha. A linha tracejada representa a inclinação teórica de $-5/3$ , característica da sub-faixa inercial de acordo com a teoria de Kolmogorov. . . . .	46
Figura 16 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 0 ( $x = 0.41$ m), ilustrando a progressão da solução desde um comportamento não-físico (Malha Muito Grosseira) até a convergência entre as malhas Média e Refinada.	48
Figura 17 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 1 ( $x = 0.81$ m).	49
Figura 18 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 2 ( $x = 1.21$ m).	49
Figura 19 – Médias Temporais da velocidade do fluxo ao longo da direção $x$ , para a representação da Malha Refinada. Destacando as regiões transientes e estacionárias em cada sonda. . . . .	51
Figura 20 – Distribuição da velocidade de fluxo ao longo do eixo- $x$ para a representação do escoamento utilizando a Malha Refinada . . . . .	52
Figura 21 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 3 ( $x = 1.61$ m).	61
Figura 22 – Comparação da autocorrelação na Sonda 4 ( $x = 0.41$ m, $y = 0.05$ m). . . . .	62
Figura 23 – Comparação da autocorrelação na Sonda 5 ( $x = 0.81$ m, $y = 0.05$ m). . . . .	62
Figura 24 – Comparação da autocorrelação na Sonda 6 ( $x = 1.21$ m, $y = 0.05$ m). . . . .	63
Figura 25 – Comparação da autocorrelação na Sonda 7 ( $x = 1.61$ m, $y = 0.05$ m). . . . .	63

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de refinamento para as quatro malhas computacionais utilizadas no estudo. . . . .	36
Tabela 2 – Coordenadas dos pontos de amostragem (probes) utilizados para a extração de dados temporais. . . . .	40

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CFD	Computational Fluid Dynamics
DIC	pré-condicionador de Cholesky Incompleto Diagonal
DILU	Decomposição LU Incompleta Diagonal
DNS	Simulação Numérica Direta
FFT	Fast Fourier Transform
LES	Large Eddy Simulation
LIC	Convolução Integral de Linha
MVF	Método dos Volumes Finitos
OpenFOAM	Open-source Field Operation and Manipulation
PBiCGStab	Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado Pré- condicionado
PCG	Gradiente Conjugado Pré-condicionado
PDF	Função de Densidade de Probabilidade
PISO	Pressure Implicit with Splitting of Operators
PSD	Power Spectral Density
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
SC	superfície de controle
VC	Volume de Controle
WALE	Wall-Adapting Local Eddy-viscosity

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho$	Densidade do fluido
$t$	Tempo
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade do escoamento
$U$	Velocidade característica do escoamento
$p$	Pressão cinemática (definida como $p_{\text{abs}}/\rho$ )
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\nu$	Viscosidade cinemática ( $\nu = \mu/\rho$ )
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração da gravidade
$\mathbf{f}$	Vetor de forças de corpo por unidade de massa
$\bar{X}$	Média temporal da grandeza $X$
$X'$	Flutuação da grandeza $X$ em torno da média ( $X' = X - \bar{X}$ )
$\nabla$	Operador vetorial Nabla (Del)
$\nabla \cdot$	Operador Divergente
$\nabla \times$	Operador Rotacional
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\mathbf{T}$	Tensor de tensões de Cauchy
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensões viscosas
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal a uma superfície
$V, dV$	Volume e elemento infinitesimal de volume
$S, dA$	Superfície e elemento infinitesimal de área
$L$	Escala de comprimento característica global

$D$	Altura do duto na seção de entrada
$l$	Comprimento da obstrução
$d$	Altura da garganta na obstrução
$Re$	Número de Reynolds ( $Re = UD/\nu$ )
$Co$	Número de Courant ( $Co =  \mathbf{u} \Delta t/\Delta x$ )
$\Delta t$	Passo de tempo da simulação
$\Delta x$	Comprimento característico da célula da malha
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor vorticidade ( $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ )
$k$	Número de onda espacial
$E(k)$	Densidade espectral de energia cinética
$\varepsilon$	Taxa média de dissipação de energia cinética por unidade de massa
$C$	Constante universal de Kolmogorov
$\Delta$	Comprimento característico do filtro da malha (LES)
$\nu_t$	Viscosidade cinemática turbulenta de submalha (LES)
$C_w$	Coefficiente do modelo de submalha WALE

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	20
2.1	Fundamentos de Fluidodinâmica e Turbulência . . . . .	20
2.2	Equações Fundamentais . . . . .	23
2.2.1	<i>Equação da Continuidade (Conservação de Massa)</i> . . . . .	23
2.2.2	<i>Equação de Navier-Stokes (Conservação da Quantidade de Movimento)</i> . .	25
2.3	Características da Turbulência . . . . .	27
2.3.1	<i>Vorticidade</i> . . . . .	27
2.3.2	<i>Cascata de Energia e o Espectro de Kolmogorov</i> . . . . .	29
3	METODOLOGIA . . . . .	32
3.1	O Método Numérico . . . . .	33
3.1.1	<i>O Método dos Volumes Finitos (MVF)</i> . . . . .	34
3.1.2	<i>O OpenFOAM</i> . . . . .	34
3.1.3	<i>Modelagem da Turbulência: LES</i> . . . . .	35
3.2	Estratégia de Geração e Verificação da Malha . . . . .	35
3.3	Configuração do Modelo Físico e Numérico . . . . .	37
3.3.1	<i>Modelo de Turbulência e Condições de Contorno</i> . . . . .	37
3.3.2	<i>Configuração do Solucionador e Esquemas Numéricos</i> . . . . .	39
3.4	Estratégia de Pós-processamento e Análise . . . . .	40
3.4.1	<i>Critérios para o Estudo de Independência de Malha</i> . . . . .	41
4	RESULTADOS . . . . .	43
4.1	Captura dos Vórtices . . . . .	43
4.1.1	<i>Análise da Topologia do Escoamento com Surface LIC</i> . . . . .	44
4.2	Estudo de Independência de Malha . . . . .	46
4.2.1	<i>Espectro de Energia</i> . . . . .	46
4.2.2	<i>Análise de autocorrelação entre as velocidades</i> . . . . .	47
4.3	Análise Estatística da Simulação . . . . .	50
5	CONCLUSÃO . . . . .	54
	REFERÊNCIAS . . . . .	55
	APÊNDICES . . . . .	56



<b>APÊNDICE A</b> – Códigos-Fonte Relevantes para a Análise . . . . .	56
<b>APÊNDICE B</b> – Resultados Suplementares da Análise de Autocorrelação	61

## 1 INTRODUÇÃO

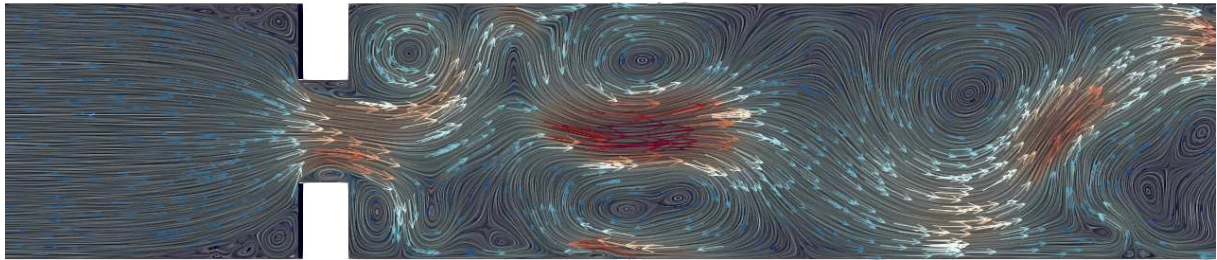
A turbulência é um regime de escoamento de fluidos caracterizado por movimentos irregulares, intrinsecamente transientes e com flutuações que não seguem um padrão nos campos de velocidade e pressão (Mathieu e Scott, 2000). Este regime, contudo, não é puramente estocástico; ele exhibe estruturas espaço-temporais coerentes, denominadas vórtices, que se formam, interagem e se desfazem num processo dinâmico conhecido como cascata de energia. Neste processo, a energia cinética é transferida das grandes escalas do escoamento para as escalas progressivamente menores, até ser finalmente convertida em calor pela ação da viscosidade molecular (Mathieu e Scott, 2000).

A compreensão e a previsão do comportamento dos fluidos em movimento são de extrema importância para o desenvolvimento tecnológico e a otimização de inúmeros processos, desde a previsão climatológica até o transporte de fluidos em dutos industriais (White, 2018). No âmbito da engenharia, esta relevância materializa-se em desafios de otimização, com impactos diretos na economia e segurança. Em sistemas de tubulações industriais, por exemplo, a análise detalhada do escoamento permite quantificar e minimizar a perda de carga, um fenômeno que impõe um custo energético significativo devido à necessidade de bombeamento contínuo para superar os efeitos do atrito viscoso e da turbulência (Lima *et al.*, 2017). Em escalas ainda maiores, como nos estudos ambientais e meteorológicos, a capacidade de simular a dispersão de poluentes na atmosfera ou prever a evolução de eventos climáticos extremos depende criticamente da solução das equações governantes do escoamento. Portanto, o domínio sobre a dinâmica dos fluidos ultrapassa o interesse puramente acadêmico, mas se consagra como uma ferramenta indispensável para a redução de custos operacionais e a gestão de riscos tecnológicos e ambientais.

Nesse contexto, a Computational Fluid Dynamics (CFD) estabelece-se como uma ferramenta essencial para a análise de escoamentos complexos, permitindo a investigação numérica de fenômenos cuja observação experimental seria impraticável ou extremamente cara. Dentre as ferramentas disponíveis, o Open-source Field Operation and Manipulation (OpenFOAM) destaca-se com uma vasta biblioteca de classes em C++, de código aberto, que permite a criação de solucionadores para uma vasta gama de problemas físicos. Sua aplicação vai desde de escoamentos multifásicos e turbulentos com reações químicas e transferência de calor até problemas de mecânica dos sólidos e eletromagnetismo (Greenshields e Weller, 2022).

A precisão de qualquer simulação em CFD é, no entanto, criticamente dependente

Figura 1 – Visualização das estruturas turbulentas na esteira de um corpo com obstrução. As linhas de corrente, coloridas pela magnitude da velocidade, destacam a formação e o desprendimento de vórtices.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via ParaView.

da qualidade da malha computacional que discretiza o domínio físico. Uma malha de baixa qualidade pode introduzir erros numéricos, comprometer a estabilidade da solução e, em última análise, impedir a sua convergência. Apesar da sua importância, frequentemente os estudos focam-se nos resultados físicos sem uma análise metodológica aprofundada do impacto da malha (Moukalled *et al.*, 2016). O presente trabalho tem como objetivo principal preencher esta lacuna, investigando sistematicamente o impacto do refinamento e da qualidade da malha na captura de características fundamentais de um escoamento turbulento. Para isolar o efeito da malha, será utilizado um caso de estudo com geometria bem definida, o escoamento através de uma obstrução simétrica, usando como base as configurações de Lima *et al.* (2017) e Santos *et al.* (2017). O foco, no entanto, será estritamente metodológico: analisar como a discretização do domínio influencia a representação da dinâmica dos vórtices, das correlações espaço-temporais e da distribuição de energia no espectro de frequências (Maruna, 2013).

A análise será conduzida em uma simulação com água (Santos *et al.*, 2017) em um regime de escoamento com número de Reynolds característico de turbulência ( $Re > 4000$ ). Uma obstrução geométrica no duto atuará como um catalisador de turbulência (Figura 1), intensificando sua instabilidade e permitindo o estudo do seu desenvolvimento (Lima *et al.*, 2017). Para demonstrar quantitativamente o impacto da discretização, serão geradas e avaliadas

diferentes configurações de malha com resoluções variando de baixa a alta, denominadas, respectivamente, grosseira e refinada. O objetivo é evidenciar como uma malha inadequada pode distorcer ou até mesmo suprimir fenômenos cruciais do escoamento. A análise buscará evidenciar os efeitos da malha na representação da cascata de energia de Kolmogorov e na correta localização dos picos espectrais. Este estudo visa, portanto, reforçar a importância crítica da etapa de geração de malha para a obtenção de resultados com validade e rigor físico em CFD.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica sobre a física da turbulência e os princípios da modelagem computacional, incluindo as equações de Navier-Stokes, a abordagem Large Eddy Simulation (LES) e as métricas de qualidade de malha. O Capítulo 3 detalha a metodologia empregada, descrevendo a configuração do domínio no OpenFOAM, os parâmetros da simulação e o procedimento para a geração das malhas. No Capítulo 4, são apresentados e discutidos os resultados, com ênfase na comparação dos espectros de energia, campos de vorticidade e funções de correlação entre as diferentes malhas. Por fim, o Capítulo 5 sintetiza as conclusões do trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo estabelece a base teórica sobre a qual este trabalho foi desenvolvido. Inicialmente, são abordados os conceitos fundamentais da fluidodinâmica, com foco na distinção entre os regimes de escoamento laminar e turbulento e no papel do número de Reynolds. Em seguida, são apresentadas as equações principais do movimento dos fluidos, as equações de continuidade e de Navier- Stokes. São detalhadas as características intrínsecas da turbulência, como a vorticidade, a cascata de energia e o espectro de Kolmogorov. Por fim, discute-se a metodologia numérica empregada: Método dos Volumes Finitos (MVF), a sua implementação no software OpenFOAM e a abordagem LES para a modelagem da turbulência.

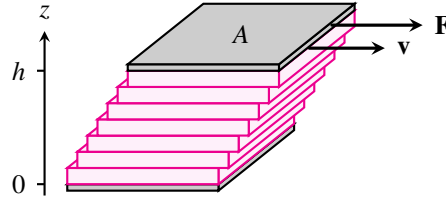
### 2.1 Fundamentos de Fluidodinâmica e Turbulência

Em mecânica dos meios contínuos, um fluido é definido como uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento, por menor que seja a sua magnitude (White, 2018). Esta característica fundamental distingue os fluidos dos sólidos, que exibem uma deformação finita e elástica sob a mesma perturbação. A propriedade que quantifica esta resistência de um fluido à taxa de deformação é a viscosidade ( $\mu$ ) que está intrinsecamente ligada ao atrito interno e a troca de momento linear entre as camadas moleculares adjacentes. A viscosidade determina a magnitude da tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) necessária para manter um determinado gradiente de velocidade no escoamento (Schlichting e Gersten, 2017). Para fluidos Newtonianos essa relação é linear e definida pela Lei da Viscosidade de Newton:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

Sendo  $\tau_{xy}$  a tensão de cisalhamento no plano  $xy$  e  $\frac{du}{dy}$ , o gradiente de velocidade perpendicular à direção do escoamento, ou seja, a taxa de deformação angular. A Figura 2 ilustra este princípio para um escoamento entre duas placas paralelas, onde a placa superior se move com velocidade constante  $v$ , induzindo um perfil de velocidade linear no fluido (Araújo *et al.*, 2017).

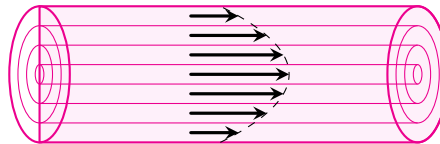
Figura 2 – Ilustração do escoamento de Couette. A aplicação de uma força ( $\mathbf{F}$ ) na placa superior de área ( $A$ ) gera uma tensão  $\tau = F/A$  e uma velocidade  $\mathbf{v}$ . O fluido entre as placas exibe um perfil de velocidade linear, resultando em um gradiente de velocidade constante  $du/dy$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O movimento de um fluido pode ser classificado em dois regimes distintos: laminar e turbulento, sendo governados pela interação entre forças inerciais e viscosas. O escoamento laminar é caracterizado por um movimento ordenado (Figura 3), no qual as linhas de corrente permanecem distintas e o fluido se move em camadas (lâminas) que não se misturam de forma significativa (Pope, 2000). Por outro lado, a turbulência é um regime de escoamento, intrinsecamente transiente e caótico, caracterizado por flutuações aperiódicas de velocidade e pressão superpostas a um fluxo médio. Estas flutuações resultam na formação e interação de estruturas de vórtices, que intensificam drasticamente a mistura e a dissipação de energia no escoamento (Pope, 2000).

Figura 3 – Representação de um escoamento laminar em um duto, exibindo o perfil de velocidade parabólico característico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

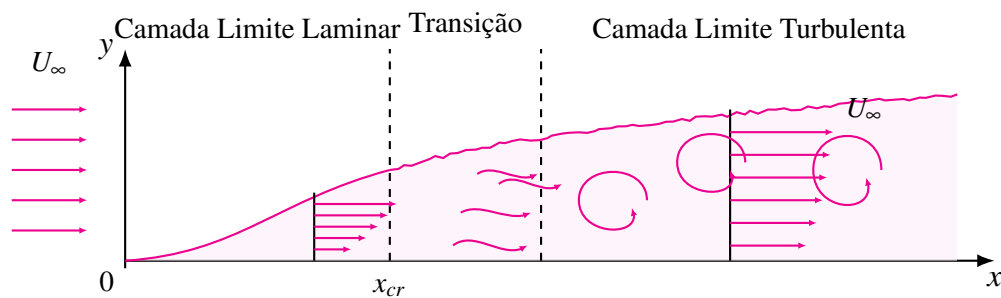
Considerando que gases e líquidos sejam fluidos, a principal distinção entre eles reside na intensidade das forças de coesão intermolecular: nos líquidos, estas forças são suficientemente fortes para manter um volume definido, enquanto nos gases, as forças são fracas, permitindo que as moléculas se expandam para ocupar todo o volume disponível (White, 2018).

A transição entre os regimes laminar e turbulento é governada pela razão entre as forças de inércia e as viscosas no escoamento. Esta razão é quantificada pelo número de Reynolds ( $Re$ ), um número adimensional definido como (Schlichting e Gersten, 2017):

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (2.2)$$

onde  $U$  e  $L$  são, respectivamente, uma velocidade e um comprimento característicos do escoamento,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\mu$  é a sua viscosidade dinâmica e  $\nu = \mu/\rho$ , a viscosidade cinemática. O valor crítico de  $Re$  para a transição depende da geometria do escoamento. Para escoamentos internos em dutos, a transição geralmente ocorre na faixa de  $2300 < Re < 4000$ . Abaixo deste limiar, o escoamento é tipicamente laminar; acima, tende a ser turbulento (Mathieu e Scott, 2000). O presente trabalho foca em um escoamento interno turbulento.

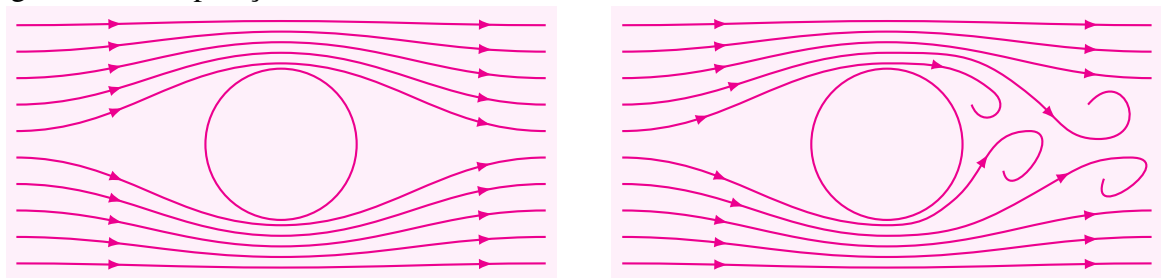
Figura 4 – Ilustração do desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana. Mostra a região laminar inicial, a transição para turbulência a partir da distância crítica ( $x_{cr}$ ), e a subsequente camada limite turbulenta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), adaptado de (White, 2018).

Embora a transição para a turbulência em um duto possa ocorrer espontaneamente a partir de perturbações naturais para  $Re$  suficientemente alto, como na Figura 4, ela pode ser significativamente intensificada pela presença de obstruções, que atuam como um catalisador, perturbando o escoamento e induzindo uma transição forçada para a turbulência (Mathieu e Scott, 2000). O fenômeno resultante pode ser interpretado como a mistura de um jato, formado no estreitamento da obstrução com o escoamento principal do canal ou por algum obstáculo, como na Figura 5.

Figura 5 – Comparação do escoamento em torno de um cilindro.



(a) Escoamento sem separação da camada limite.

(b) Escoamento com separação e esteira de vórtices.

## 2.2 Equações Fundamentais

A descrição matemática do movimento dos fluidos baseia-se nos princípios de conservação de massa e momento. Para um fluido newtoniano, incompressível e isotérmico, estas leis de conservação são expressas pelas equações de continuidade e de Navier-Stokes, respectivamente.

### 2.2.1 Equação da Continuidade (Conservação de Massa)

Quando se trata de um fluido em escoamento, o definimos pelo Volume de Controle (VC) fixo no espaço. Sendo assim, o princípio da conservação de massa estabelece que dentro de um sistema fechado a massa total deve permanecer constante (McComb, 1990). Para um volume de controle, isso implica que a taxa de variação da massa em seu interior é igual à taxa líquida de massa que flui através de suas fronteiras (McComb, 1990). Descrevendo isso matematicamente, podemos definir que a massa total  $M$  dentro do volume de controle será a integral da densidade  $\rho$  sobre o volume, com a taxa de variação temporal da massa igual a:

$$M_{VC} = \int_{VC} \rho dV \Rightarrow \frac{dM_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.3)$$

Com isso, a taxa líquida de massa que flui para fora através da superfície de controle (SC) é descrita como a integral do fluxo de massa sobre a área da superfície (White, 2018). O fluxo de massa local através de um elemento de área  $d\mathbf{A}$  com o vetor normal  $\mathbf{n}$  é  $\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ , onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade do fluido. Ou seja, temos que a taxa líquida total  $\dot{m}_{total}$  será de:

$$\dot{m}_{total} = \oint_{SC} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2.4)$$

Agora aplicando o princípio da conservação, chegaremos na forma integral da equação de continuidade (2.5), que é a base do MVF, utilizado no OpenFOAM (Moukalled *et al.*, 2016):

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{SC} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (2.5)$$

Para obtermos a forma diferencial que se aplique em cada ponto do escoamento, ao invés do volume inteiro, converte-se a forma integral para diferencial, utilizando o Teorema da Divergência de Gauss, que relaciona a integral de superfície a uma de volume, da forma:

$$\oint_{SC} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV \quad (2.6)$$



Substituindo a Equação 2.6 na Equação 2.5, temos que:

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (2.7)$$

Analisando esta relação, chegamos a conclusão que, para que ela seja válida em qualquer volume, a única forma dela ser igual a zero é que seu integrando seja nulo em todos os pontos. Isso implica que, para um escoamento compressível, a equação da continuidade é (White, 2018):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.8)$$

A equação é formada por um termo de acumulação local, que é a taxa de variação da densidade em um ponto, e um termo convectivo, associado ao transporte de massa. A relação indica que a variação da densidade em um ponto é igual ao negativo da divergência do fluxo de massa. Assim, se a densidade em um ponto diminui, deve haver um fluxo líquido de massa para fora dessa região, e vice-versa (Schlichting e Gersten, 2017).

No caso de um fluido incompressível, como a água sob condições normais, a densidade  $\rho$  é considerada constante no tempo ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) e espaço ( $\nabla \rho = 0$ ), com valor não nulo. Sabendo disso, para simplificar o termo convectivo, aplicamos a identidade vetorial da regra do produto:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.9)$$

A Equação 2.8 torna-se:

$$0 + \mathbf{u} \cdot (0) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.10)$$

Como dito anteriormente, a densidade  $\rho$  não pode ser nula, a única possibilidade é que o campo de velocidades tenha divergência igual zero. A equação da continuidade para um fluido incompressível é portanto (Lima *et al.*, 2017):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

Nota-se que essa equação 2.11 impõe uma restrição cinemática rigorosa ao campo de velocidades. O volume não pode ser mudado a medida que ele se move, e como não existem sumidouros de fluido no domínio; o que entra em um volume infinitesimal deve sair (Lima *et al.*, 2017). Com isso vemos que *solvers*, como *simpleFoam* e *pisoFoam*, que entenderemos mais a frente o que realmente significam, asseguram que parte de seu algoritmo irá garantir que o campo de velocidade resultante satisfaça essa condição.

### 2.2.2 Equação de Navier-Stokes (Conservação da Quantidade de Movimento)

A equação de Navier-Stokes representa a aplicação da Segunda Lei de Newton a um fluido, descrevendo a relação entre a sua aceleração e as forças que atuam sobre ele (Bird *et al.*, 2002). Sendo assim, para descrevermos um VC fixo no espaço, onde o fluido escoar, a lei de conservação da quantidade de movimento é formulada com o auxílio do Teorema de Transporte de Reynolds para a propriedade  $\rho \mathbf{u}$  (Bird *et al.*, 2002), da forma:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \mathbf{u} dV \quad (2.12)$$

Onde  $\sum \mathbf{F}$  é a soma de todas as forças externas que agem sobre o fluido no VC. Com isso o lado direito da equação 2.12, pelo teorema, se expande na taxa de variação local e no fluxo líquido de quantidade de movimento através da SC:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \mathbf{u} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \oint_{SC} (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2.13)$$

Haja vista que, a soma das forças  $\mathbf{F}$  pode ser decomposta em dois tipos de forças, sendo a primeira  $\mathbf{F}_{corpo}$ , que atua sobre o volume do fluido, como a gravidade, e a segunda  $\mathbf{F}_{superfície}$  que atua na fronteira do VC, como pressão e tensões viscosas. Suas formas integrais são:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{corpo} + \mathbf{F}_{superfície} = \int_{VC} \rho \mathbf{g} dV + \oint_{SC} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração da gravidade e  $\mathbf{T}$  é o tensor de tensões de Cauchy. Para um fluido isotrópico,  $\mathbf{T}$  é decomposto em um termo de pressão isotrópica, que é compressivo, e um termo de tensões viscosas  $\boldsymbol{\tau}$  (Flügge, 1972):

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.15)$$

Aqui,  $p$  é a pressão escalar,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade, e o sinal negativo no termo de pressão representar sua natureza compressiva. O tensor  $\boldsymbol{\tau}$  representa as tensões de cisalhamento e as tensões normais que surgem devido à taxa de deformação do fluido (Flügge, 1972).

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \oint_{SC} (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{VC} \rho \mathbf{g} dV + \oint_{SC} (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.16)$$

Sendo assim, para derivarmos a forma diferencial, utilizamos o Teorema de Divergência de Gauss, que converte as integrais de superfície em integrais de volume:

**Teorema 2.2.1 (Divergência de Gauss)** *Para um campo vetorial ou tensorial, a integral de fluxo através de uma superfície fechada é igual à integral da divergência do campo sobre o volume encerrado (Schlichting e Gersten, 2017).*

$$\oint_{SC} (\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{VC} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (2.17)$$

Aplicando o teorema 2.2.1, a equação 2.16 se torna:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dV = \int_{VC} \rho \mathbf{g} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dV \quad (2.18)$$

Agrupando as integrais em uma única integral de volume, temos que:

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \right] dV = 0 \quad (2.19)$$

Com isso, esta relação deve ser válida para qualquer volume de controle, onde o integrando deve ser nulo, resultando na forma diferencial conservativa da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.20)$$

Simplificando em sua forma convectiva (ou não-conservativa) utilizando a regra do produto e a equação da continuidade.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.21)$$

O lado esquerdo é equivalente a  $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ , onde  $\frac{D}{Dt}$  é a derivada material:

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{Parte Local}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla}_{\text{Parte Convectiva}} \quad (2.22)$$

Por fim expandindo o termo da divergência do tensor de tensões ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ ), substituímos a relação constitutiva para o tensor de tensões viscosas  $\boldsymbol{\tau}$  (2.23) de um fluido Newtoniano linearmente proporcional à taxa de deformação do fluido, com  $\mu$  e  $\lambda$  constantes:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (2.23)$$

A divergência de  $\boldsymbol{\tau}$  resulta em:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.24)$$

Adotando a hipótese de Stokes para gases monoatômicos e algumas outras condições, aproxima-se a segunda viscosidade por  $\lambda = -2/3\mu$ , o termo  $(\mu + \lambda)$  torna-se  $1/3\mu$ . Substituindo esse

resultado, chegamos à equação de Navier-Stokes para um fluido Newtoniano compressível (Schlichting e Gersten, 2017):

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.25)$$

Para o caso de um fluido incompressível, que é o foco deste trabalho, a equação se simplifica, com a densidade  $\rho$  constante e a divergência da velocidade nula,  $(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ . O último termo da equação desaparece, logo:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (2.26)$$

O termo à esquerda representam a aceleração local (transiente) e aceleração convectiva, respectivamente. No lado direito, estão as forças por unidade de volume: a força devido ao gradiente de pressão ( $-\nabla p$ ), a força viscosa de atrito ( $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ ) e as forças de corpo ( $\rho \mathbf{g}$ ). Estas equações, acopladas e não-lineares, formam o núcleo da dinâmica dos fluidos e a sua solução numérica é o objetivo central da CFD.

## 2.3 Características da Turbulência

### 2.3.1 Vorticidade

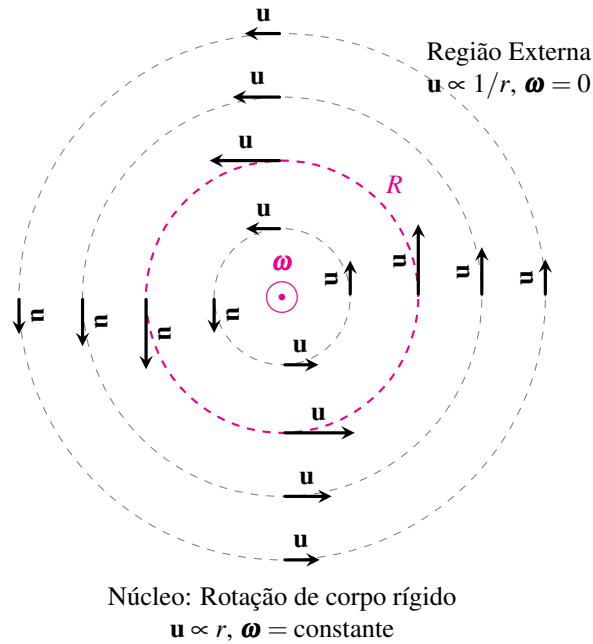
A vorticidade ( $\boldsymbol{\omega}$ ) é um campo vetorial que descreve a rotação local de um elemento de fluido em um ponto do escoamento (Araújo *et al.*, 2017), como ilustrado na Figura 6. É definida matematicamente como o operador rotacional aplicado ao campo de velocidades  $\mathbf{u}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.27)$$

A direção do vetor  $\boldsymbol{\omega}$  indica o eixo de rotação instantâneo sobre o elemento de fluido que está girando, seguindo a regra da mão direita. A taxa de rotação  $|\boldsymbol{\omega}|$  corresponde ao dobro da taxa de rotação angular. No contexto deste trabalho, os escoamentos em torno de um obstáculo são inerentemente rotacionais. Sendo assim, a obstrução atua como um “injetor de vorticidade”, gerando camadas de cisalhamento que se formam na superfície do corpo e atuam como fontes contínuas de vorticidade, que é subsequentemente transportada e evolui na esteira, formando as estruturas coerentes (vórtices) que caracterizam a turbulência (Araújo *et al.*, 2017).

A dinâmica da vorticidade é descrita pela equação de transporte de vorticidade (2.28). Esta equação não é um postulado, mas uma consequência direta da simplificada de equação

Figura 6 – Ilustração de um Vórtice de Rankine, com um núcleo em rotação de corpo rígido ( $r \leq R, \omega > 0$ ) e uma região externa irrotacional ( $r > R, \omega = 0$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

de Navier-Stokes (2.25). Ela é derivada aplicando o operador rotacional ( $\nabla \times$ ) à equação de conservação da quantidade de movimento (2.26) (Schlichting e Gersten, 2017). Para um fluido incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), após a aplicação das identidades vetoriais, a equação resultante é:

$$\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}}_{\text{Derivada Material: } \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}} = \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Estiramento e Inclinação do Vórtice}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}_{\text{Difusão Viscosa}} \quad (2.28)$$

O lado esquerdo da Equação 2.28 representa a derivada material da vorticidade,  $\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}$ . Este termo descreve a taxa de variação da vorticidade de uma partícula de fluido específica, enquanto ela se move com o escoamento. Ele é composto pela taxa de variação local ( $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$ ) em um ponto fixo no espaço e pelo termo de advecção  $((\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega})$ , que descreve o transporte da vorticidade pelo próprio campo de velocidades. Sendo assim, podemos afirmar que a advecção não cria nem destrói vorticidade, apenas a transporta.

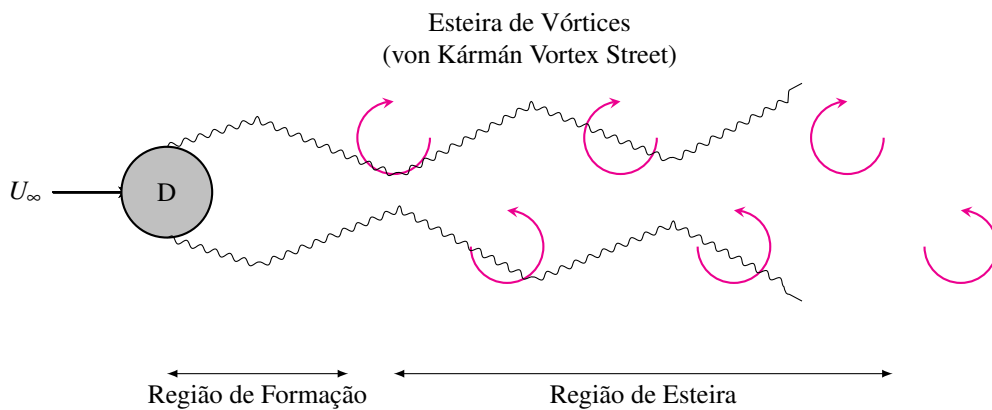
Dos termos principais da Equação 2.28, podemos destacar:

- **Estiramento e Inclinação do Vórtice,  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ :** Este termo é o principal mecanismo de produção de vorticidade em escoamentos tridimensionais. Ele descreve como os filamentos de vórtice são estirados, inclinados e reorientados pelos gradientes de velocidade. Quando um filamento de vórtice é estirado na direção de seu próprio eixo, sua intensidade rotacional aumenta, em um processo

análogo à conservação do momento angular de uma patinadora que encolhe os braços. Este mecanismo é a principal causa da cascata de energia na turbulência 3D, transferindo energia de grandes para pequenas escalas. Em escoamentos puramente bidimensionais, este termo é identicamente nulo.

- **Difusão Viscosa de Vorticidade,  $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ :** Este termo representa o efeito do atrito interno do fluido (viscosidade). A viscosidade atua para dissipar os gradientes de vorticidade, “espalhando” a rotação para regiões adjacentes (Figura 7), de forma análoga à difusão de calor. Em última análise, a viscosidade é o mecanismo que destrói a vorticidade e dissipa a energia cinética do escoamento em calor nas menores escalas.

Figura 7 – Ilustração da Esteira de Vórtices de von Kármán formada a jusante de um cilindro. O desprendimento alternado de vórtices com rotações opostas caracteriza este fenômeno.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Portanto, a equação 2.28 revela que a dinâmica da vorticidade é governada por um balanço entre a inércia (transporte e estiramento) e os efeitos viscosos (difusão), com a pressão sendo eliminada da formulação explícita.

### 2.3.2 Cascata de Energia e o Espectro de Kolmogorov

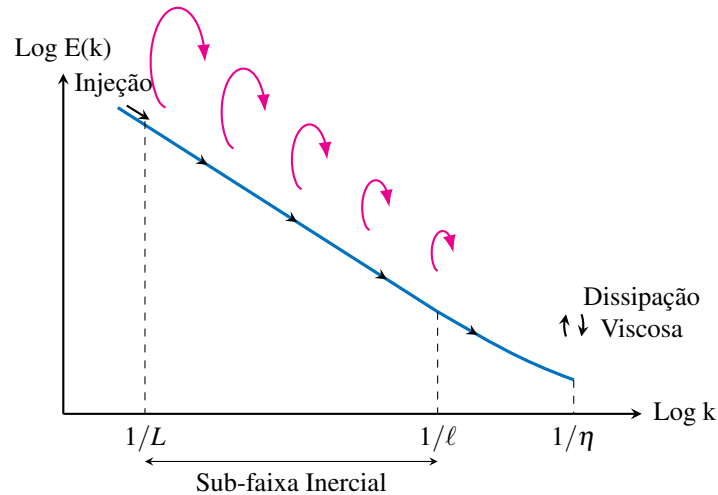
A cascata de energia é o processo central da dinâmica turbulenta, descrevendo como a energia cinética é transferida através das diferentes escalas de movimento (McComb, 1990). A energia é tipicamente injetada no escoamento em grandes escalas ( $L$ ), comparáveis à geometria do problema, ou seja, diâmetro do duto. Estes grandes vórtices são instáveis e, através de interações não-lineares e do processo de estiramento de vórtices (McComb, 1990), eles se quebram, transferindo sua energia para vórtices progressivamente menores (Figura 8).

Este processo em cascata continua até que as escalas se tornem tão pequenas que os gradientes de velocidade locais sejam suficientemente grandes para que os efeitos viscosos se tornem dominantes. Nessas pequenas escalas, a energia cinética é dissipada como calor (Tennekes e Lumley, 1972).

Em 1941, Andrey Kolmogorov propôs uma teoria estatística para descrever a estrutura da turbulência em pequenas escalas, baseando-se em duas hipóteses de similaridade para o número de Reynolds suficientemente alto (Frisch, 1995).

1. Postula que as estatísticas dos movimentos em pequena escala (escalas muito menores que  $L$ ) são universalmente determinadas apenas pela taxa média de dissipação de energia por unidade de massa ( $\epsilon$ ), e pela viscosidade cinemática ( $\nu$ ).
2. Define-se uma sub-faixa inercial, correspondente as escalas que são pequenas em comparação com  $L$ , mas grandes em comparação com as escalas de dissipação. Nesta faixa, a viscosidade é irrelevante, e as propriedades estatísticas da turbulência dependem unicamente de  $\epsilon$ .

Figura 8 – Representação esquemática da cascata de energia de Kolmogorov, ilustrando a transferência de energia de grandes escalas ( $L$ ) para pequenas escalas através da sub-faixa inercial.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A partir da segunda hipótese e da análise dimensional, Kolmogorov previu a forma do espectro de energia  $E(k)$  na sub-faixa inercial. O espectro de energia descreve como a energia cinética da turbulência está distribuída entre os diferentes tamanhos de vórtices (representados pelo número de onda  $k \sim 1/l$ , onde  $l$  é a escala espacial) (Frisch, 1995). A lei de potência de

Kolmogorov é:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (2.29)$$

Onde  $C$  é a constante universal de Kolmogorov. Esta equação é um dos resultados mais importantes da teoria da turbulência. Embora derivada para turbulência homogênea e isotrópica, o conceito de isotropia local sugere que esta lei é válida para as pequenas escalas de uma vasta gama de escoamentos (Frisch, 1995), incluindo o escoamento em duto analisado neste trabalho.



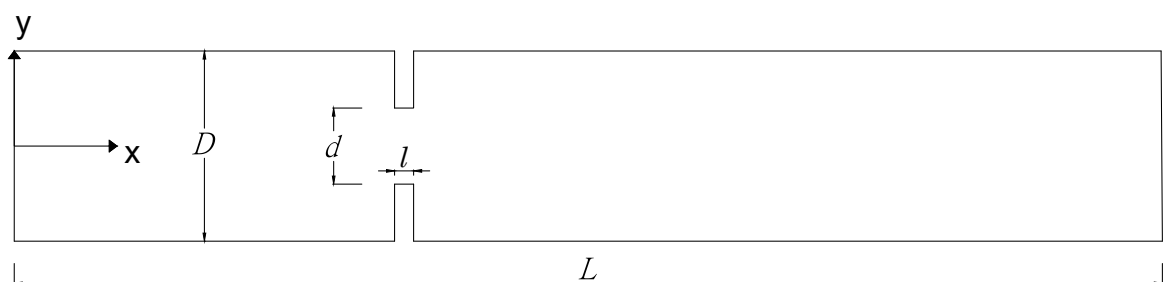
### 3 METODOLOGIA

Este capítulo detalha os procedimentos metodológicos empregados para investigar a influência da discretização espacial na simulação de um escoamento turbulento. Em seu desenvolvimento, descreveremos as estratégias para a geração das malhas computacionais, a configuração do modelo físico e numérico no ambiente OpenFOAM e os critérios quantitativos para a análise da convergência de malha, ressaltando como a validade da solução numérica da equação de Navier-Stokes depende diretamente da qualidade da malha.

As simulações numéricas foram realizadas utilizando o software de código aberto OpenFOAM, versão 2506 (ESI-OpenCFD). A geometria do domínio computacional reproduz a configuração utilizada nos estudos apresentado por Lima *et al.* (2017) e Santos *et al.* (2017). O domínio consiste em um canal bidimensional com as seguintes dimensões principais:

- **Comprimento total do canal ( $L$ ):** 2,21 m.
- **Altura do canal ( $D$ ):** 0,10 m.
- **Comprimento da obstrução ( $l$ ):** 0,01 m.
- **Altura da passagem do obstrução ( $d$ ):** 0,04 m.
- **Posição da obstrução:** Início em  $x = 0,20$  m a partir da entrada.

Figura 9 – Esquemático do domínio computacional do canal bidimensional fora de escala.

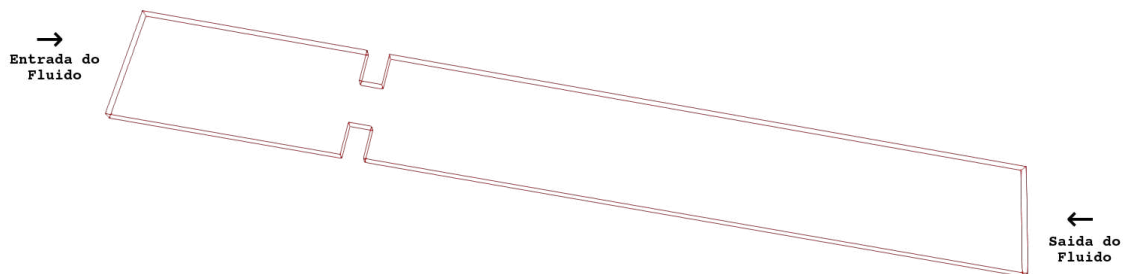


Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Autocad.

Para a modelagem da turbulência, será empregada a abordagem de LES, com o modelo de submalha Wall-Adapting Local Eddy-viscosity (WALE). Este modelo é precisamente feito para escoamentos limitados por paredes, pois a sua formulação, baseada no quadrado

do tensor de gradiente de velocidade, garante que a viscosidade da submalha tenda a zero de forma assintoticamente correta nas proximidades das paredes, sem a necessidade de funções de amortecimento, ou seja, sem necessidade de uma correção ou um "remendo" matemático (Greenshields e Weller, 2022). A análise dos resultados será realizada no domínio da frequência, aplicando-se o algoritmo da Fast Fourier Transform (FFT) às séries temporais das flutuações de velocidade para obter a densidade espectral de potência. Esta técnica permitirá quantificar como a energia contida nas diferentes escalas do escoamento é representada em cada malha.

Figura 10 – Esquema do domínio computacional e da topologia da malha de referência.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via ParaView.

A obstrução é simétrica em relação à linha central do canal e sua geometria foi projetada para atuar como o principal mecanismo gerador de turbulência no escoamento (Figura 10).

### 3.1 O Método Numérico

A solução analítica das equações de Navier-Stokes é inviável para a maioria dos escoamentos turbulentos e, portanto, usam-se métodos numéricos aproximados. Dentre as abordagens de CFD, o Método dos volumes finitos (MVF) destaca-se pela sua capacidade e fundamentação física, sendo o método implementado na biblioteca OpenFOAM e amplamente utilizado (Greenshields e Weller, 2022).

### 3.1.1 O Método dos Volumes Finitos (MVF)

O MVF baseia-se na aplicação direta das leis de conservação em sua forma integral a pequenas regiões do domínio, chamadas de volumes de controle ou células (Ossés, 2016). O domínio computacional é dividido (discretizado) em uma malha de volumes finitos. A equação de conservação para uma propriedade genérica é integrada sobre cada um desses volumes. Utilizando o Teorema da Divergência de Gauss, as integrais de volume dos termos de divergência são convertidas em integrais de superfície, que representam os fluxos através das faces do volume de controle.

A característica principal do método é que a conservação da propriedade é garantida em cada célula e, por extensão, em todo o domínio. O fluxo que sai de uma célula é exatamente o fluxo que entra na célula adjacente, o que garante que nenhuma massa, momento ou energia seja criada ou destruída numericamente no interior do domínio. Esta propriedade de conservação local torna o método particularmente robusto e estável para problemas de fluidodinâmica.

O MVF é extremamente flexível em relação à topologia da malha, operando eficientemente tanto em malhas estruturadas quanto em não-estruturadas (Maruna, 2013). Isso permite a discretização de geometrias complexas e o uso de refinamento de malha localizado em regiões de alto gradiente, otimizando a precisão e o custo computacional (Ossés, 2016).

### 3.1.2 O OpenFOAM

A malha foi gerada com o utilitário blockMesh, uma ferramenta do OpenFOAM para criar malhas estruturadas hexaédricas de alta qualidade, permitindo controle preciso da resolução.

O OpenFOAM emprega o MVF e disponibiliza diversos solucionadores. Para este trabalho, o solucionador relevante é o Pressure Implicit with Splitting of Operators (PISO), projetado para escoamentos transientes e incompressíveis. O algoritmo PISO desacopla as equações de momento e pressão, resolvendo-as de forma sequencial dentro de cada passo de tempo através de etapas de predição e correção para garantir o acoplamento velocidade-pressão e a conservação de massa:

1. **Etapa de Predição:** A equação do momento é resolvida utilizando a pressão do passo de tempo anterior, resultando em um campo de velocidades preliminar que não satisfaz a restrição de incompressibilidade (Eq. 2.11).

2. **Etapa de Correção:** Uma equação de Poisson para a correção da pressão é formulada e resolvida. A solução é usada para corrigir tanto o campo de pressão quanto o campo de velocidades, garantindo que este último satisfaça a equação da continuidade. Este ciclo é repetido para maior precisão.

A eficácia da etapa de correção é altamente sensível à qualidade da malha, especialmente à sua ortogonalidade. O uso do `blockMesh` para gerar malhas estruturadas é, portanto, uma decisão para minimizar erros de discretização e garantir que o algoritmo PISO opere de forma eficiente, permitindo que a simulação capture a física do escoamento com alta fidelidade.

### 3.1.3 Modelagem da Turbulência: LES

Para simular a turbulência, existem diferentes níveis de aproximação. A Simulação Numérica Direta (DNS) resolve todas as escalas do escoamento, tendo maior precisão, porém é computacionalmente custosa para a maioria dos problemas práticos (Greenshields e Weller, 2022). No outro extremo, a abordagem de Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) resolve apenas o escoamento médio no tempo, modelando o efeito de todas as flutuações turbulentas. Ao fazer isso, a RANS perde toda a informação sobre a natureza transiente e a estrutura dos vórtices, o que a torna inadequada para o nosso problema, cujo objetivo é analisar esses fenômenos.

A Simulação de Grandes Vórtices (LES) surge como o equilíbrio ideal entre precisão e custo computacional. A base da LES é resolver numericamente as escalas maiores e mais energéticas do escoamento, correspondentes aos grandes vórtices, que são anisotrópicos e ditados pela geometria, enquanto modela o efeito das escalas menores (escalas de sub-malha), que são mais universais e isotrópicas. A separação é feita aplicando um filtro espacial às equações de Navier-Stokes. Ao resolver diretamente as grandes estruturas, responsáveis pela maior parte do transporte de momento e energia, a LES fornece uma representação física mais fiel da dinâmica turbulenta transiente, quando comparado ao modelo RANS, sem incorrer o alto custo computacional da DNS.

## 3.2 Estratégia de Geração e Verificação da Malha

Para conduzir o estudo, foram gerados quatro níveis de refinamento, designados como malha extramente grosseira, grosseira, média e refinada. A geração foi realizada com o utilitário `blockMesh`, que permite a criação de malhas estruturadas hexaédricas. Foi adotada

uma estratégia de múltiplos blocos, dividindo o domínio em sete blocos topológicos para permitir um controle preciso da resolução em regiões de interesse. Esta abordagem otimiza o custo computacional ao concentrar o refinamento onde os gradientes das variáveis de escoamento são mais acentuados (Santos *et al.*, 2017). Sendo assim para geração da malha estruturada, adotou-se uma abordagem estratégica para equilibrar precisão e custo computacional. O refinamento foi aplicado de forma localizada, concentrando um maior número de células nas regiões de maior interesse físico. Especificamente, as células foram adensadas próximo às paredes para resolver adequadamente a camada limite e em torno da obstrução, pois são nessas áreas que ocorrem os gradientes de velocidade mais acentuados e, consequentemente, a mais intensa atividade de vorticidade. Essa estratégia evita o alto custo computacional de uma malha uniformemente refinada em todo o domínio.

A topologia dos blocos foi projetada para isolar as seções de entrada, obstrução e saída, bem como para diferenciar as regiões próximas às paredes do núcleo do escoamento. A estratégia de refinamento empregada foi a seguinte:

- **Refinamento na Camada Limite:** Nos blocos adjacentes às paredes superior e inferior do duto, foi aplicado um fator de graduação (*simpleGrading*). Este procedimento gera células com menor altura na direção normal à parede, aumentando a resolução na camada limite, onde os gradientes de velocidade são mais elevados (Figura 11).
- **Controle de Densidade Global:** Para garantir uma transição sistemática entre os níveis de refinamento, foi utilizado um parâmetro de controle de densidade. Partindo de uma malha de referência (Média), as outras malhas foram geradas aplicando um fator de refinamento  $r = 2$  nas direções  $x$  e  $y$ , resultando em uma quadruplicação do número de células a cada nível. Os detalhes de cada malha estão na Tabela 1.

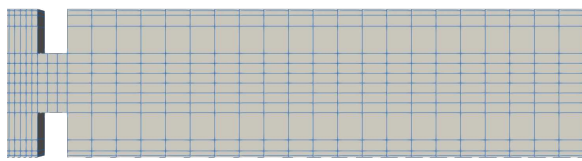
Tabela 1 – Parâmetros de refinamento para as quatro malhas computacionais utilizadas no estudo.

Nível da Malha	Fator de Refinamento	Número Total de Células
Muito Grosseira	0.2	10.304
Grosseira	0.5	64.400
Média (Referência)	1.0	257.600
Refinada	2.0	1.030.400

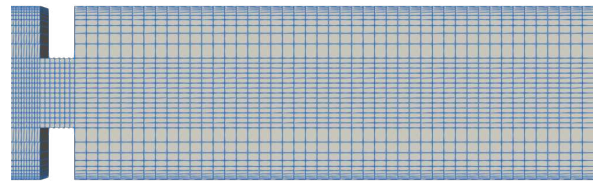
Nota: Fator de Refinamento de cada uma das malhas

A qualidade de cada malha gerada foi avaliada com o utilitário checkMesh. Foi verificado se os parâmetros críticos, como a assimetria máxima (*max skewness*) e a não-ortogonalidade máxima (*max non-orthogonality*), estavam dentro dos limites recomendados para simulações LES, assegurando assim a integridade numérica da solução. As simulações foram então conduzidas por um tempo total de 10s, com um passo de tempo de  $\Delta t = 10^{-4}$ s (totalizando 100.000 iterações), período considerado suficiente para que o escoamento ultrapassasse seu regime transiente.

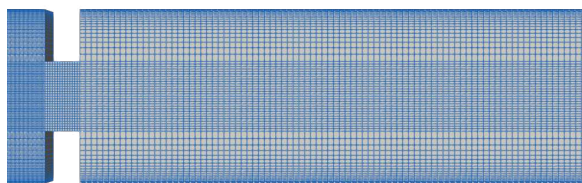
Figura 11 – Conjunto de malhas computacionais utilizadas para a análise de independência.



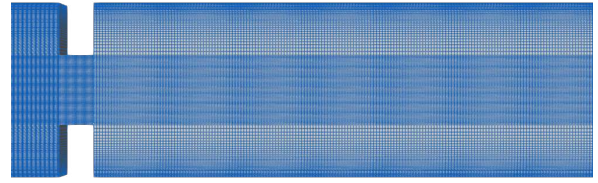
(a) Malha muito grosseira.



(b) Malha grosseira.



(c) Malha média.



(d) Malha refinada.

### 3.3 Configuração do Modelo Físico e Numérico

#### 3.3.1 Modelo de Turbulência e Condições de Contorno

Para resolver as flutuações transientes do escoamento, foi empregada a abordagem de Simulação de Grandes Redemoinhos (LES) com o modelo de sub-malha WALE. Conforme explicado no Capítulo 2, este modelo é apropriado para escoamentos limitados por paredes, pois sua formulação calcula corretamente uma viscosidade de sub-malha nula nas paredes sem a necessidade de funções de amortecimento (Moukalled *et al.*, 2016).

As condições de contorno, definidas no diretório 0/, foram especificadas para as

variáveis: velocidade ( $U$ ), pressão cinemática ( $p$ ) e viscosidade de sub-malha ( $\nu_t$ ), da seguinte forma:

- **Entrada (inlet):**

- $U$ : Velocidade uniforme e constante, normal à fronteira, com valor de  $(5, 0, 0)$  m/s (type `fixedValue`) (Santos *et al.*, 2017).
- $p$ : Gradiente nulo (type `zeroGradient`), permitindo que a pressão se ajuste na entrada conforme o desenvolvimento do escoamento a jusante.
- $\nu_t$ : Condição de valor extrapolado a partir do interior do domínio (type `calculated`).

- **Saída (outlet):**

- $U$ : Gradiente nulo (type `zeroGradient`), para minimizar a influência da fronteira de saída sobre o escoamento desenvolvido.
- $p$ : Valor fixo e uniforme de 0 (type `fixedValue`). Esta condição estabelece um nível de referência para o campo de pressão, sendo assim "ancorando" a solução.
- $\nu_t$ : Condição de valor extrapolado (type `calculated`).

- **Paredes (walls):**

- $U$ : Condição de não-escorregamento (type `noSlip`), que impõe velocidade nula na interface fluido-sólido.
- $p$ : Gradiente nulo (type `zeroGradient`), condição padrão para paredes em escoamentos incompressíveis.
- $\nu_t$ : Gradiente nulo (type `zeroGradient`), condição específica que permite ao modelo WALE calcular corretamente o decaimento da viscosidade turbulenta em direção à parede.

- **Frente e Trás (frontAndBack):**

- A condição `empty` foi utilizada para as fronteiras na direção  $z$ . Esta escolha impõe uma solução bidimensional ao problema. É importante notar que esta é uma simplificação forte que contradiz a natureza tridimensional da turbulência que a LES se propõe a resolver, ou seja, estamos vendo um caso quasi-bidimensional.

### 3.3.2 Configuração do Solucionador e Esquemas Numéricos

As configurações para a solução do sistema de equações foram definidas nos dicionários `system/fvSchemes` e `system/fvSolution` para garantir a precisão e estabilidade da simulação LES.

- **Controle da Simulação (`controlDict`):**
  - O passo de tempo ( $\Delta t$ ) foi ajustado dinamicamente (`adjustTimeStep yes`) para manter o Número de Courant máximo em todo o domínio abaixo de 0.5, um requisito para a estabilidade e precisão de simulações LES.
  - O tempo total de simulação foi de  $T$  definido em 10 segundos, permitindo o desenvolvimento completo do escoamento e a coleta de dados para análise estatística.
- **Esquemas de Discretização (`fvSchemes`):**
  - **Temporal (`ddtSchemes`):** Foi utilizado o esquema `backward` (implícito, segunda ordem) para a discretização temporal. A escolha de um esquema de segunda ordem é crucial em LES para minimizar a dissipação numérica e resolver com precisão a evolução temporal dos vórtices.
  - **Convecção (`divSchemes`):** Para o termo de convecção da velocidade, `div(phi,U)`, adotou-se o esquema `Gauss linearUpwindV grad(U)`, um esquema de segunda ordem que oferece um bom balanço entre a baixa dissipação de esquemas centrais e a estabilidade de esquemas *upwind*.
  - **Gradiente e Laplaciano:** Para os demais termos diferenciais, foram utilizados esquemas centrais padrão baseados em `Gauss linear`.
- **Solução do Sistema Linear (`fvSolution`):**
  - **Algoritmo de Acoplamento:** O algoritmo PISO foi utilizado para o acoplamento pressão-velocidade, com duas correções de pressão por passo de tempo (`nCorrectors 2`) para assegurar o cumprimento da equação da continuidade a cada iteração.
  - **Solucionadores de Matrizes:** O sistema linear para a pressão foi resolvido com o solver Gradiente Conjugado Pré-condicionado (PCG) e pré-condicionador de Cholesky Incompleto Diagonal (DIC), adequados para matrizes simétricas. O sistema para a velocidade foi resolvido com o solver Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado Pré- condicionado (PBiCGStab) e o



pré-condicionador Decomposição LU Incompleta Diagonal (DILU), adequado para matrizes assimétricas (Saad, 2003).

### 3.4 Estratégia de Pós-processamento e Análise

A extração de dados quantitativos para análise foi realizada de forma co-processada, ou seja, concorrente à execução das simulações. Esta abordagem foi implementada através da diretiva `functions`, localizada no dicionário de controle `system/controlDict`. Foram configurados objetos específicos para amostrar séries temporais de variáveis em pontos discretos e para extrair perfis de campo ao longo de linhas predefinidas, permitindo uma análise detalhada da estrutura e evolução do escoamento turbulento.

Para a análise das flutuações de velocidade e dos espectros de energia da turbulência, séries temporais dos campos de velocidade e pressão foram registradas utilizando o objeto `probes` do OpenFOAM. Em conformidade com a metodologia do trabalho de referência (Lima *et al.*, 2017), foram definidos oito pontos de amostragem. Estes pontos estão distribuídos em uma grade que combina quatro seções transversais ao longo do eixo do duto com duas alturas distintas, conforme detalhado na Tabela 2.

Tabela 2 – Coordenadas dos pontos de amostragem (`probes`) utilizados para a extração de dados temporais.

Parâmetro	Descrição	Valores [m]
Coordenada $x$	Seções transversais axiais	0.41, 0.81, 1.21, 1.61
Coordenada $y$	Alturas de medição	0.02 (linha de centro) 0.05 (próximo à parede)

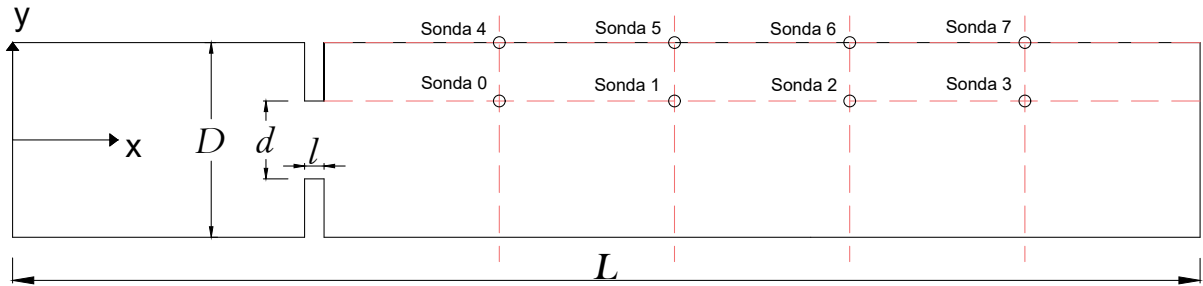
Nota: A combinação das coordenadas resulta em um total de oito pontos de amostragem. Para todos os pontos, a coordenada  $z$  foi mantida constante em 0.005 m, posicionando-os no plano central do domínio quasi-bidimensional.

A seleção destas coordenadas foi estratégica. As diferentes posições axiais ( $x$ ) permitem acompanhar a evolução da esteira turbulenta e a sua eventual dissipação ao longo do duto. As duas alturas ( $y$ ) contrastam a região de maior velocidade na linha de centro com a região de altos gradientes de velocidade e produção de turbulência próxima à parede (Figura 10).

Adicionalmente, para a análise dos perfis médios de escoamento, amostrados no último instante de tempo da simulação, o objeto `sets` foi utilizado para extrair os campos de velocidade e pressão ao longo de linhas predefinidas:

- **Perfil de Velocidade:** Uma linha vertical foi utilizada para obter o perfil de

Figura 12 – Esquemático do domínio computacional, ilustrando a posição do obstáculo e a localização dos instrumentos de medição virtuais (Sondas). Destacando a região de injeção do fluido.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Autocad.

velocidades na direção transversal ao escoamento.

- **Queda de Pressão:** Uma linha horizontal na linha de centro do duto foi empregada para analisar a variação da pressão ao longo do comprimento do domínio.

### 3.4.1 Critérios para o Estudo de Independência de Malha

A convergência de malha será avaliada quantitativamente, com o objetivo de determinar o ponto em que o refinamento adicional não altera significativamente a solução numérica.

- **Análise Espectral:** As séries temporais de velocidade foram processadas com um script Python utilizando as bibliotecas NumPy e SciPy para calcular a Power Spectral Density (PSD) via FFT. Os gráficos de PSD para as quatro malhas foram sobrepostos em escala log-log. O critério de análise será identificar a frequência de corte na qual o espectro da malha grosseira exibe um decaimento não-físico em comparação com as malhas mais refinadas, indicando a menor escala de vórtice que a malha consegue resolver energeticamente.

- **Análise de Perfis Médios:** Os perfis de velocidade e queda de pressão foram comparados. A independência de malha para estas quantidades de larga escala será considerada atingida quando a diferença  $L2 - norm$  entre os perfis da malha média e refinada for inferior a um limiar pré-definido.
- **Conclusão sobre Independência:** A malha média será considerada adequada para a análise se (1) os seus perfis médios convergirem para os da malha refinada e (2) o seu espectro de energia capturar uma faixa maior do que a malha grosseira, sendo assim um balanço perfeito entre precisão e custo computacional.

## 4 RESULTADOS

Os resultados a seguir procedem da investigação sistemática da influência da discretização espacial na simulação de um escoamento turbulento utilizando a abordagem LES, no software OpenFOAM. Através de quatro níveis de refinamento de malha em um caso de escoamento do fluido por uma obstrução, é possível estudar e analisar quantitativamente como a resolução da malha impacta na capacidade da simulação em reproduzir características fundamentais da física da turbulência, como a vorticidade e as cascatas de energia.

### 4.1 Captura dos Vórtices

A Figura 13 apresenta o campo da componente Z da vorticidade ( $\omega_z$ ) para dois níveis de refinamento estudados. A análise revela uma dependência direta entre a qualidade dos resultados e a resolução da malha. Na malha de menor resolução (Figura 13.a), as estruturas de vórtices são altamente difusas, um efeito direto da dissipação numérica. Os erros de truncamento dos esquemas de discretização do MVF atuam como uma viscosidade artificial, amortecendo os gradientes de velocidade e dissipando a energia das estruturas de pequena escala.

Figura 13 – Comparação do campo de vorticidade na componente Z ( $\omega_z$ ) em uma seção do escoamento para a malha grosseira e refinada, com as cores cool to warm (extend) variando de  $-9 \times 10^4$  a  $9 \times 10^4$ , com tons azuis representando as faixas mais baixas e as vermelhas as mais altas.

(a) Malha grosseira.



(b) Malha refinada.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Sendo assim, quando comparamos a malha grosseira e a refinada vemos que a primeira não apresenta vorticidades, justamente pelo LES não conseguir modelar e simular nesses pontos, visto que a condição para resolver uma estrutura é que o tamanho da célula seja significativamente menor que a escala da estrutura. Em uma malha grosseira, as células são grandes demais e, portanto, não se resolve os vórtices pequenos. Para malha refinada (Figura 13.b), podemos ver com mais clareza os pontos com maior atividade de vorticidade, ela demonstra a capacidade de resolver a instabilidade primária do escoamento. Pequenos vórtices secundários são nitidamente formados ao longo desta camada. Em contraste, estas estruturas são completamente ausentes nas malhas mais grosseiras, onde há excessiva difusão numérica que impede a formação de gradientes de velocidade tão intensos.

A capacidade de capturar a formação destes vórtices secundários não é apenas um detalhe visual; é uma constatação de que a simulação está resolvendo a física de transição para a turbulência na esteira, em vez de simplesmente representar o desprendimento de vórtices em larga escala de forma homogênea. Dito isso, as malhas mais refinadas possuem resultados bem melhores e fisicamente corretos em comparação com as mais grosseiras.

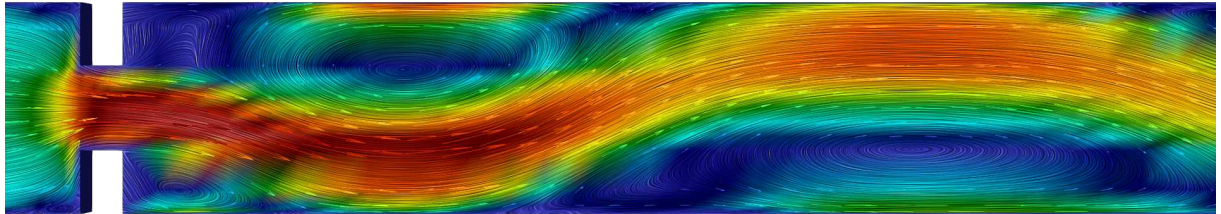
#### ***4.1.1 Análise da Topologia do Escoamento com Surface LIC***

Para complementar a análise de vorticidade, a técnica de LIC foi aplicada ao plano central do domínio, como mostra a Figura 14. Esta visualização texturiza o campo de acordo com a direção do vetor velocidade, tornando a estrutura dos vórtices e as zonas de recirculação e separação do escoamento bem definidas.

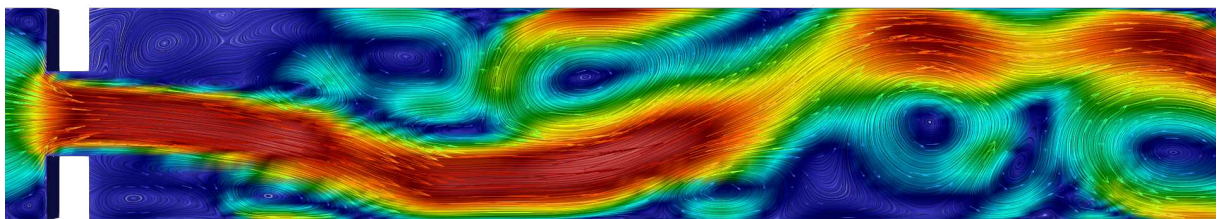
Podemos assim afirmar que malhas mais discretizadas possuem maior resolução dos fenômenos físicos emergentes de um escoamento turbulento. Enquanto as malhas (a) e (b) apresentam uma textura grosseira e com pouca definição, as malhas (c) e, especialmente, a (d) revelam com grande detalhe a complexa topologia do escoamento na esteira, incluindo a formação e interação dos vórtices secundários discutidos anteriormente.

Figura 14 – Visualização da topologia do campo de velocidades instantâneo através da técnica de LIC, no instante  $t = 10s$ , para as quatro malhas: (a) malha muito grosseira, (b) malha grosseira, (c) malha média e (d) malha refinada.

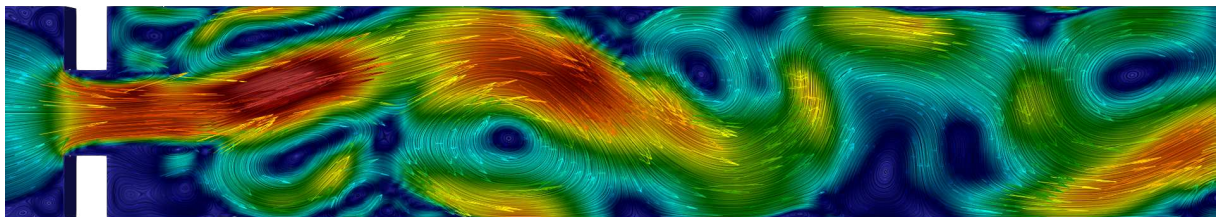
(a) Malha muito grosseira.



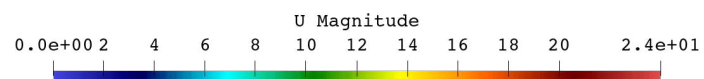
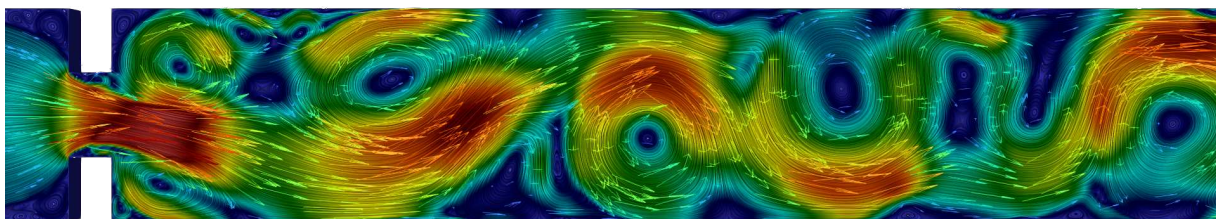
(b) Malha grosseira.



(c) Malha média.



(d) Malha refinada.



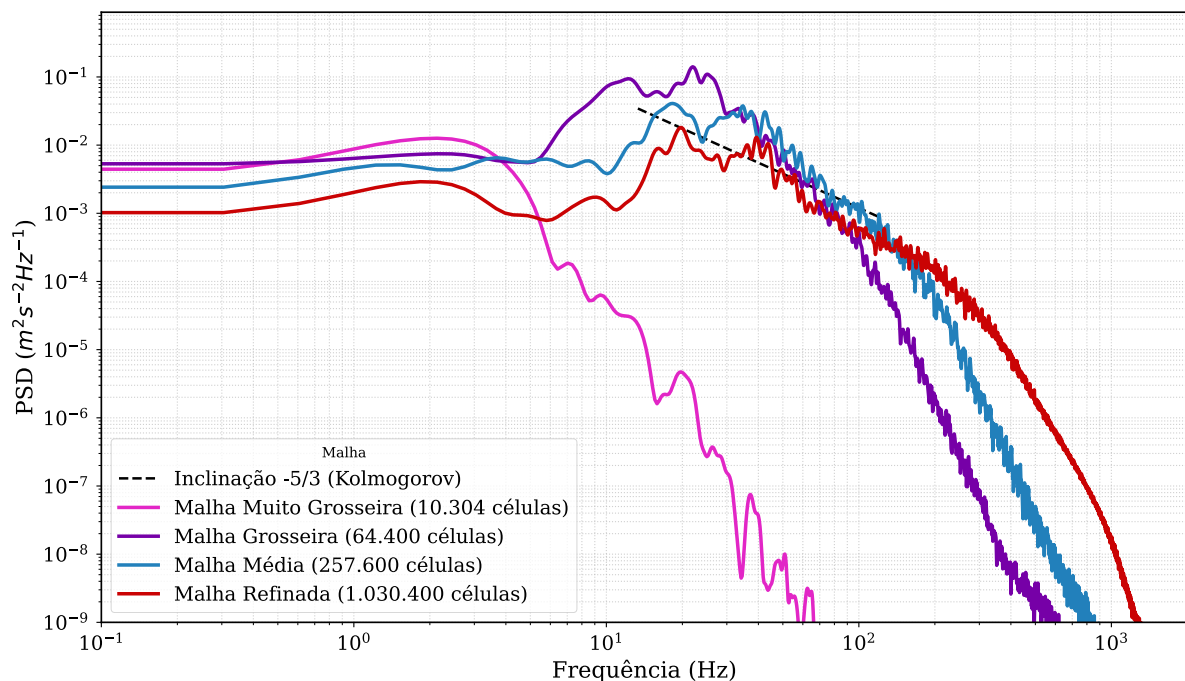
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

## 4.2 Estudo de Independência de Malha

### 4.2.1 Espectro de Energia

A análise do espectro de energia, apresentada na Figura 15, se baseia em um teste rigoroso da capacidade da simulação em capturar a física da turbulência, apresentado no Apêndice A. Os resultados revelam um comportamento convergente à medida que a malha é refinada.

Figura 15 – Densidade Espectral de Potência (PSD) das flutuações da velocidade longitudinal ( $u'$ ) em um ponto de prova na esteira, comparando os quatro níveis de refinamento de malha. A linha tracejada representa a inclinação teórica de  $-5/3$ , característica da sub-faixa inercial de acordo com a teoria de Kolmogorov.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Analisando a figura 15, podemos dividi-la em três zonas de frequência, a de baixas frequências ( $f < 20Hz$ ), intermediárias ( $20Hz < f < 80Hz$ ) e a de altas ( $f > 80Hz$ ). Sendo assim, a primeira região, tem-se as quatro curvas bastante diferentes umas das outras. Elas têm picos de energia em locais ligeiramente diferentes e com magnitudes distintas. A Malha Refinada (vermelha) e a Malha Média (azul) mostram um comportamento mais complexo, com diversos picos. Pode-se dizer que esta é a faixa das grandes estruturas turbulentas, os vórtices maiores que são gerados diretamente pela garganta, obstrução do duto. A energia é inserida no sistema nesta faixa de frequências. É de se esperar que as malhas mais grosseiras não capturem a magnitude exata dessa energia, pois elas podem suavizar a dinâmica desses grandes vórtices.

Para a zona intermediária (  $20Hz$  a  $80Hz$  ), podemos dizer que esta região é crucial para a validação da malha. Nela podemos ver a curva da Malha Refinada (vermelha) se alinhar próximo com a linha tracejada da inclinação de Kolmogorov ( $-5/3$ ). A curva da Malha Média (azul) também segue a inclinação razoavelmente bem, embora comece a decair um pouco antes da curva vermelha. Por fim as curvas das malhas Grosseira (roxa) e Muito Grosseira (rosa) não conseguem manter a inclinação de ( $-5/3$ ). Elas decaem rápido, confirmando a ausência de detecção de vórtices.

Haja vista que a teoria de Kolmogorov diz que, nesta faixa (  $20Hz < f < 80Hz$  ), a energia é transferida de vórtices grandes para pequenos sem perdas significativas. A malha refinada se aproxima bastante da inclinação teórica de ( $-5/3$ ) e é uma evidência de que a Malha Refinada (vermelha) é a mais verossímil, as malhas mais grosseiras não têm resolução suficiente para permitir essa transferência de energia; em vez disso, elas dissipam a energia numericamente, o que é considerado um erro da simulação, fazendo a curva decair em outra faixa de frequência.

Por fim, a zona de Alta Frequência (  $f > 80Hz$  ) mostra a dissipação, onde todas as curvas caem abruptamente. A frequência em que essa queda acontece é diferente para cada malha: a roxa cai primeiro, depois a azul e, por último, a vermelha. Esta é a faixa dos vórtices muito pequenos, sendo assim a menor estrutura que pode ser resolvida é limitada pelo tamanho da célula da malha, vórtices menores que isso são dissipados e indetectados. A Malha Muito Grosseira (rosa) só consegue resolver vórtices até  $50Hz$ , não apresenta estruturas nessa faixa. Toda a energia em frequências mais altas é perdida por dissipação numérica. A Malha Refinada (vermelha) consegue resolver a turbulência até frequências altas,  $f_{mx} = 500Hz$ , capturando uma gama muito maior de estruturas turbulentas antes que a dissipação numérica domine.

Assim afirmamos que a Malha Refinada não apenas converge, mais é a solução que mais se aproxima da teoria física fundamental de Kolmogorov, tornando-a adequada para capturar cascatas de energia da turbulência.

#### **4.2.2 *Análise de autocorrelação entre as velocidades***

A análise de independência de malha para a dinâmica temporal do escoamento é realizada através da comparação da função de autocorrelação da velocidade longitudinal do escoamento, calculada para cada uma das quatro malhas em pontos específicos do domínio (sondas). Esta metodologia quantifica a memória temporal de um sinal, medindo o quão semelhante o valor da velocidade em um determinado ponto,  $u(t)$ , é a uma versão de si mesmo

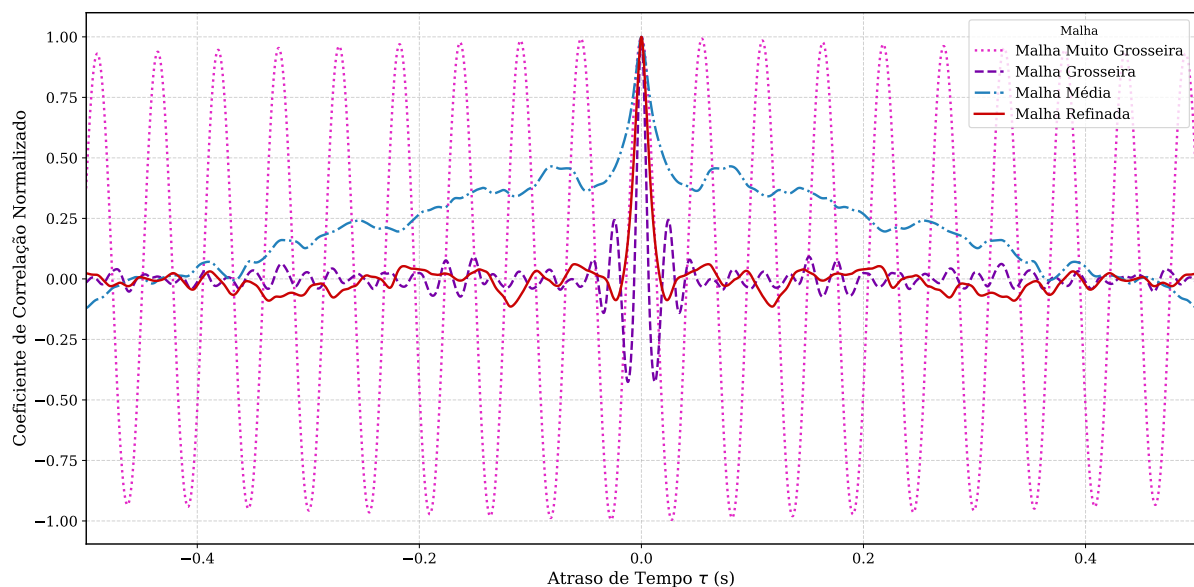


deslocada por um atraso de tempo,  $u(t \pm \tau)$ . O resultado, quando normalizado, é o coeficiente de autocorrelação, que varia no intervalo de  $[-1, +1]$ . Um valor de  $+1$  indica correlação perfeita, o sinal no presente é idêntico ao que era  $\tau$  segundos no passado. Um valor de  $0$  denota ausência de correlação linear, enquanto  $-1$ , o sinal atual é o exato oposto do seu valor anterior.

Para a análise detalhada da estrutura temporal do escoamento, foram selecionadas as sondas localizadas ao longo da linha próximo ao centro do duto, em  $y = 0.02\text{m}$ , correspondente as sondas 0, 1, 2 e 3 (Figura 12). Esta escolha visa focar a análise na região de menor influência dos efeitos viscosos da camada limite que se desenvolve nas paredes do duto. Ao analisar o escoamento próximo ao núcleo do canal, é possível isolar e caracterizar de forma mais clara a dinâmica das estruturas de vórtices que se desprendem da obstrução e são advectadas pelo fluxo principal, minimizando a complexidade adicional imposta pela interação parede-escoamento.

A Figura 16 apresenta a comparação entre as velocidades detectada na Sonda 0, localizada no eixo longitudinal em  $x = 0.41\text{ m}$ . Esse região, próxima ao obstaculo, apresenta alta complexidade fluidodinâmica, com um alto índice de turbulência.

Figura 16 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 0 ( $x = 0.41\text{ m}$ ), ilustrando a progressão da solução desde um comportamento não-físico (Malha Muito Grosseira) até a convergência entre as malhas Média e Refinada.

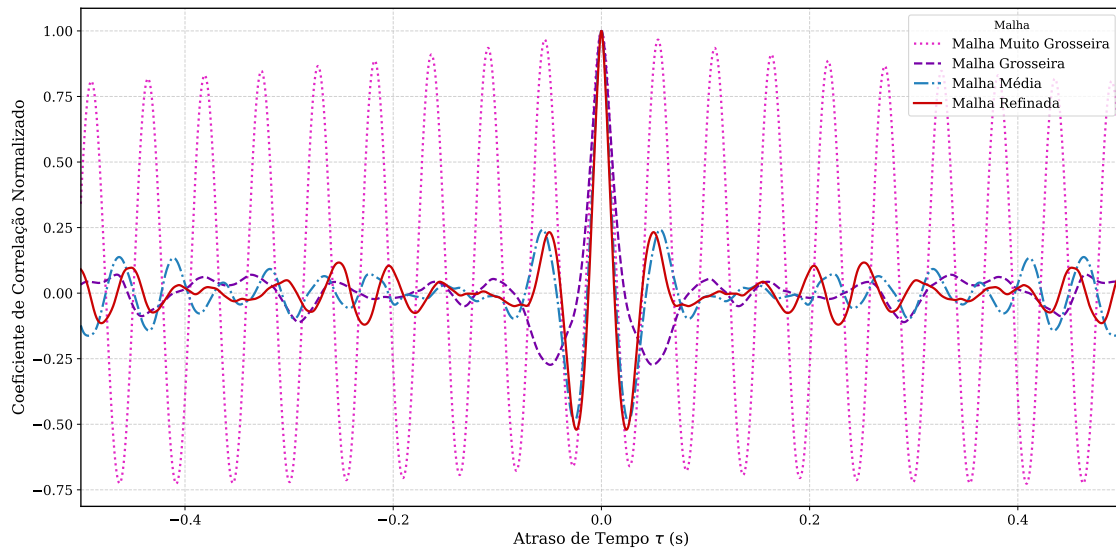


Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

A análise da Figura 16 revela uma progressão dos resultados com o refinamento da malha. A Malha Muito Grosseira (linha rosa), tem um comportamento totalmente não-físico. A função de autocorrelação oscila com uma amplitude quase constante entre  $+1$  e  $-1$ , sem

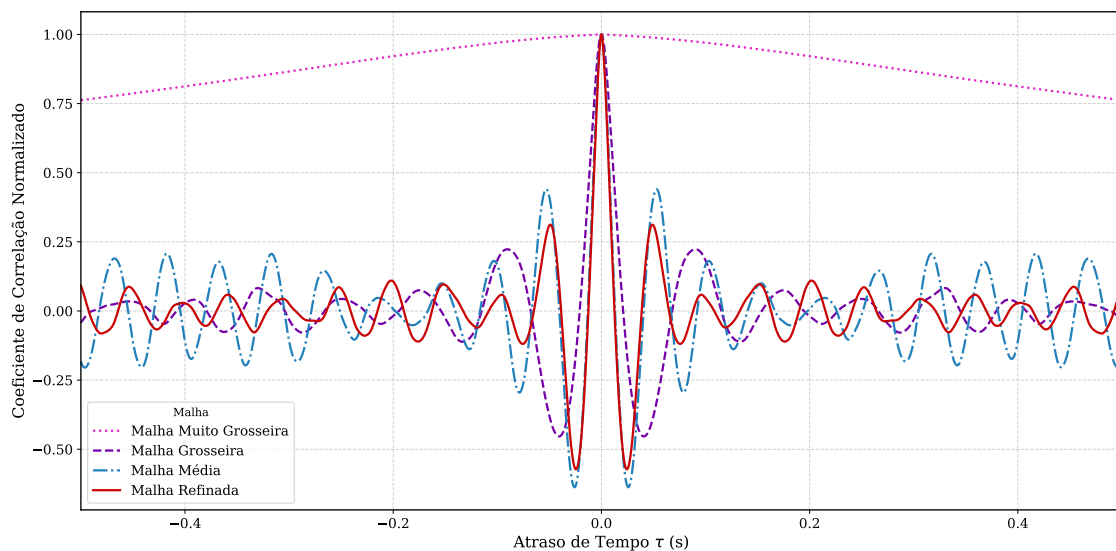
apresentar o decaimento esperado com o aumento do atraso de tempo  $\tau$ . Isso demonstra um erro numérico, no qual a malha é tão grosseira que a simulação ficou em um único modo oscilatório, não resolvendo a complexidade e a dissipação inerentes da turbulência. Assim elas apresentam uma periodicidade exagerada, como explicado anteriormente.

Figura 17 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 1 ( $x = 0.81$  m).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 18 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 2 ( $x = 1.21$  m).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

A transição para a Malha Média (linha azul) representa um ponto crítico: a malha

possui resolução suficiente para capturar o início das instabilidades que quebram a periodicidade, mas ainda carece de resolução para resolver completamente a cascata de energia resultante. Isso a coloca em um regime intermediário, resultando em oscilações menos regulares. No entanto, é apenas com a Malha Refinada (linha vermelha) que se observa o comportamento físico esperado de um escoamento turbulento: um pico agudo em  $\tau = 0$ , seguido por um decaimento muito rápido da correlação, indicando que a "memória" do escoamento é eficientemente dissipada pela natureza caótica da turbulência resolvida. Entretanto, notamos que nas outras sondas a Malha Média (linha azul), começa a entrar em estabilidade e que sua oscilação fica quase próxima a malha Refinada (linha vermelha).

As Figuras 17 e 18, apresentam as autocorrelações das velocidade para as demais sondas no eixo longitudinal. Elas mantêm e reforçam os argumentos anteriores em relação as velocidade detectadas na sonda 0. Destaca-se o comportamento da malha muito grosseira (linha rosa) para a sonda 2 e 3, onde o seu comportamento oscilatório desaparece e passa a apresentar um comportamento suave e decrescente, indicando uma autocorrelação entre as velocidades características de um regime estacionário, enquanto na Malha Média (linha azul), começa a ter mais estabilidade em relação a sonda 0. As demais correlações das sondas estão no Apêndice B.

Finalmente, o critério de independência de malha é alcançado ao comparar a Malha Média com a Malha Refinada (linha vermelha). As duas curvas apresentam uma sobreposição quase perfeita. A pequena diferença entre elas indica que o refinamento adicional da malha não altera significativamente as escalas temporais resolvidas do escoamento. Esta convergência demonstra que a Malha Média já possui resolução suficiente para capturar a dinâmica temporal dominante do escoamento neste ponto, representando, portanto, um balanço ótimo entre precisão e custo computacional.

A partir desta análise, prosseguiremos com a Malha refinada para as demais investigações, com a confiança de que os resultados são independentes da discretização espacial.

### 4.3 Análise Estatística da Simulação

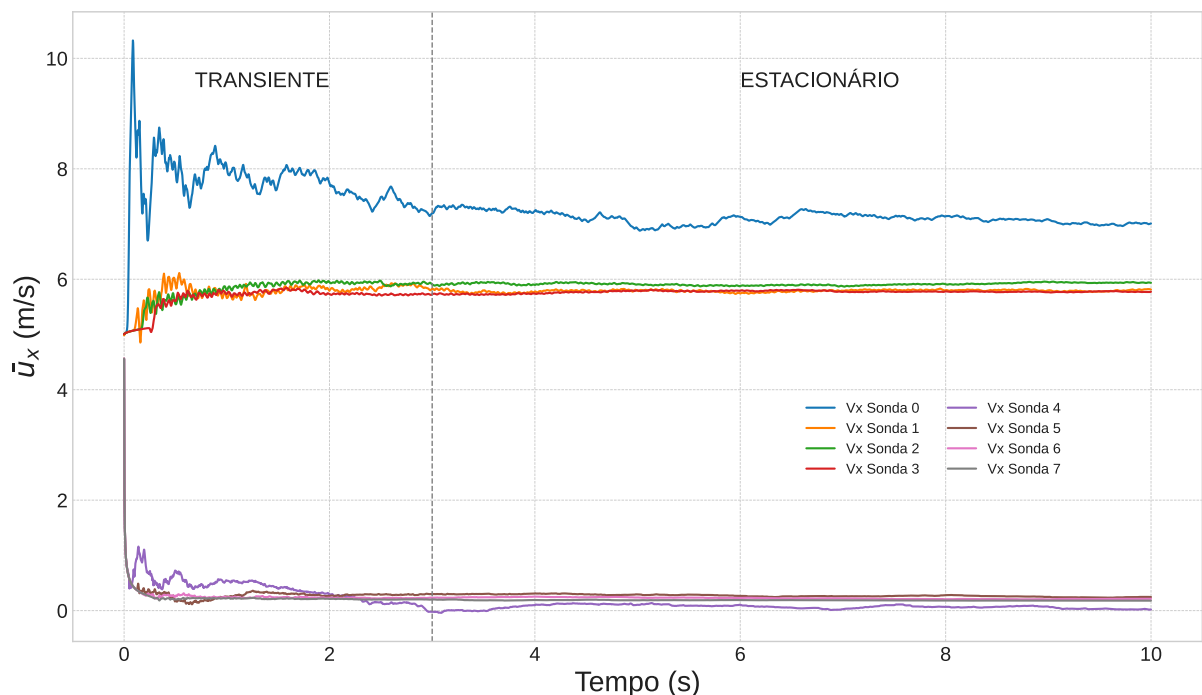
A análise visual foi utilizada como uma primeira validação da simulação (Figura 14). Posteriormente, o espectro de energia e as autocorrelações de velocidades, evidenciaram uma convergência para um melhor representação do fenômeno utilizando a malha Refinada. Busca-se agora uma análise estatística das velocidades médias ( $\bar{u}_x$ ) e da distribuição destas ao longo do eixo-x, como apresentado por Santos *et al.* (2017).

Após um grande número de interações foi observado que, apesar de ter sido colocado uma obstrução simétrica na entrada, o processo de escoamento apresenta uma instabilidade no jato de injeção, deslocando-o para baixo, quebrando a simetria inicial (Figura 14.d). Essa instabilidade cria uma região próxima a parede superior cujo fluxo move-se lentamente contrária a direção da entrada do fluido. Este fato torna necessário uma análise da estabilidade de entrada do fluido para diferentes distâncias a jusante do obstáculo. Para este propósito medias temporais foram realizadas no intervalo de tempo  $T$ , começando em interações sucessivas no instante  $t_0$ , pela equação:

$$\overline{u(x,t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x,t) dt \quad (4.1)$$

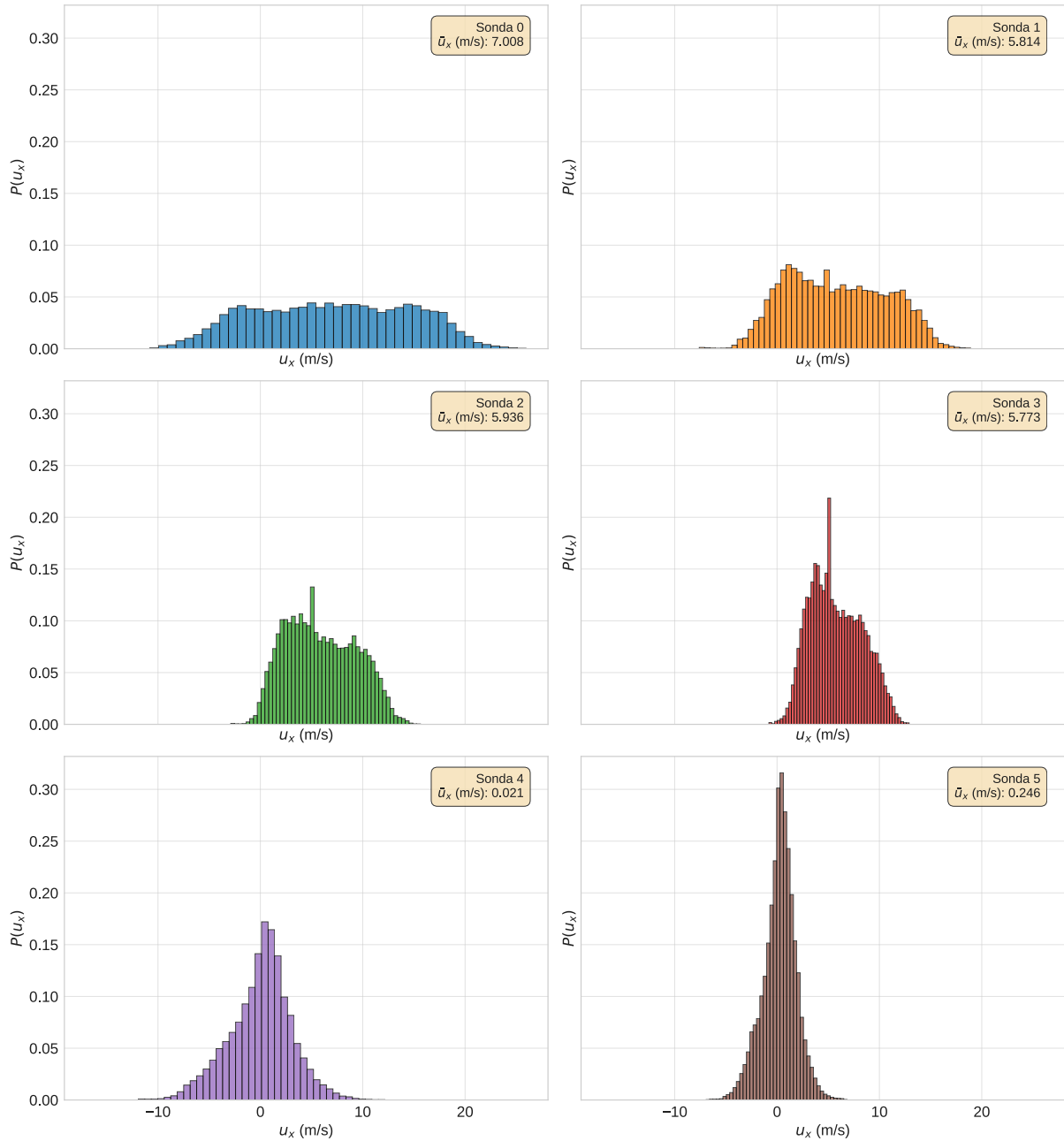
As médias temporais da velocidade do fluxo ao longo do eixo-x são mostradas na Figura 19. Estas foram obtidas das 100.000 interações da simulação, correspondentes a 10s com passo de  $\Delta t = 10^{-4}s$ . No gráfico cada linha corresponde as velocidades detectadas em cada sonda. O fluxo é considerado estacionário se no tempo limite  $T \rightarrow \infty$ , a média temporal se torna independente de  $t_0$ . Nota-se portanto, que para todas as sondas com exceção da sonda 0, os regimes de escoamento logo se tornam estacionários. Entretanto apenas em  $t > 3s$  este regime é alcançado na sonda 0, apresentando um alto período transiente,

Figura 19 – Médias Temporais da velocidade do fluxo ao longo da direção x, para a representação da Malha Refinada. Destacando as regiões transientes e estacionárias em cada sonda.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 20 – Distribuição da velocidade de fluxo ao longo do eixo-x para a representação do escoamento utilizando a Malha Refinada



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Para complementar a análise das médias temporais, a Figura 20 apresenta a Função de Densidade de Probabilidade (PDF), representando as distribuições das velocidades longitudinal ( $u_x$ ) para cada uma das sondas na Malha Refinada. Esta análise estatística revela como a turbulência modifica a distribuição de velocidades à medida que o escoamento evolui a jusante da obstrução.

Para as sondas localizadas mais próximas da obstrução (sonda 0 (azul) e 4 (roxa)), a linhas de centro e a perto da parede apresentam distinções, a primeira (distribuição azul) exibem

um distribuição mais largas e assimétricas, enquanto a outra (distribuição roxa), apresenta um comportamento próximo de uma normal. O alargamento da distribuição é uma assinatura direta da alta intensidade de turbulência nesta região, onde as flutuações de velocidade são amplas e cobrem uma grande faixa de valores. A assimetria, por sua vez, reflete a complexidade do escoamento imediatamente após a obstrução, com a presença de zonas de aceleração e recirculação que "puxam" a distribuição para um dos lados.

À medida que se avança ao longo do duto (distribuição laranja, verde e marrom), observa-se uma tendência clara: as distribuições tornam-se progressivamente mais estreitas e mais simétricas, aproximando-se de uma distribuição Gaussiana. Este comportamento é consistente com a física da dissipação turbulenta e da homogeneização do escoamento (Santos *et al.*, 2017). O estreitamento da PDF indica que a intensidade das flutuações de velocidade está diminuindo; a energia dos grandes vórtices gerados na obstrução está sendo dissipada e redistribuída. A crescente simetria sugere que o escoamento está se tornando mais homogêneo e se aproximando de um estado de turbulência mais desenvolvido e estatisticamente estável, onde eventos de velocidade extremamente alta ou baixa tornam-se menos prováveis.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma investigação sistemática sobre a influência da discretização espacial na simulação numérica de um escoamento turbulento sobre uma obstrução retangular. Utilizando o software de código aberto OpenFOAM, a análise focou na verificação da malha e na validação física dos resultados através de análises estatísticas e espectrais. As conclusões fundamentais extraídas desta investigação são apresentadas a seguir:

Primeiramente, demonstrou-se que a realização de um estudo de independência de malha é um pré-requisito mandatório e não-negociável para a fidedignidade de simulações em Dinâmica dos Fluidos Computacional. A análise comparativa revelou que malhas insuficientemente refinadas ("Muito Grosseira" e "Grosseira") são dominadas por dissipação numérica excessiva. Este artefato suprime as estruturas turbulentas de pequena escala, o que foi quantitativamente evidenciado pela falha em reproduzir uma função de autocorrelação temporal fisicamente coerente e pela incapacidade de capturar a sub-faixa inercial no espectro de energia.

Em segundo lugar, uma vez estabelecida uma malha computacionalmente adequada ("Média" ou "Refinada") através da convergência das estatísticas temporais, a simulação foi capaz de reproduzir com alta fidelidade as características canônicas do escoamento. Foram capturados e quantificados o ponto de estagnação a montante, a aceleração do fluxo sobre o obstáculo e a zona de recirculação a jusante. A principal validação física do arcabouço numérico veio da análise espectral: a simulação não só identificou a frequência dominante associada ao desprendimento de vórtices de Von Kármán, mas também demonstrou que a Malha Refinada reproduz uma extensa sub-faixa inercial com decaimento de energia compatível com a lei teórica de  $-5/3$  de Kolmogorov. Este achado confirma que a resolução foi suficiente para representar a cascata de energia, que é a assinatura da física da turbulência. A Malha Média, embora represente uma aproximação aceitável com menor custo computacional, demonstrou uma capacidade limitada de resolver as frequências mais altas do espectro.

Em suma, o presente trabalho valida e responde à questão de investigação central que se propõem: a qualidade da malha não é um mero detalhe técnico, mas sim o fator determinante que governa a capacidade de uma simulação CFD em prever corretamente tanto as estruturas macroscópicas do escoamento quanto as estatísticas fundamentais da turbulência.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, H. R. d.; SOUSA, J. T. d.; SILVA, W. M. R. d.; SILVA, V. M. d. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2017. ISBN 978-85-365-1854-9.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport phenomena**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002. ISBN 0-471-41077-2.
- FLÜGGE, W. **Tensor analysis and continuum mechanics**. Berlin: Springer-Verlag, 1972. ISBN 978-3-642-80644-6.
- FRISCH, U. **Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521457132.
- GREENSHIELDS, C.; WELLER, H. **Notes on Computational Fluid Dynamics: general principles**. Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022.
- LIMA, A. T. d. C.; LIMA, I. C. d. C.; ALMEIDA, M. P. d. Analysis of turbulence power spectra and velocity correlations in a pipeline with obstructions. **International Journal of Modern Physics C**, v. 28, n. 01, p. 1750019, 2017.
- MARUNA, T. **Dynamic mesh handling in OpenFOAM**. Dissertação (Master's thesis) — Czech Technical University in Prague, Prague, 2013.
- MATHIEU, J.; SCOTT, J. **An introduction to turbulent flow**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- MCCOMB, W. D. **The physics of fluid turbulence**. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM® and Matlab®**. Cham: Springer, 2016. v. 113. (Fluid Mechanics and Its Applications, v. 113). ISBN 978-3-319-16873-9.
- OSSÉS, J. **O método de volumes finitos**. 2016. ESSS Blog. Disponível em: <https://www.esss.com/blog/o-metodo-de-volumes-finitos/>. Acesso em: 26 de abril de 2025.
- POPE, S. B. **Turbulent flows**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521598866.
- SAAD, Y. **Iterative methods for sparse linear systems**. 2nd. ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 2003.
- SANTOS, F. R.; COSTA, G. d. S.; LIMA, A. T. d. C.; ALMEIDA, M. P. d.; LIMA, I. C. d. C. Detection of memory loss of symmetry in the turbulent flow blockage in a duct. **International Journal of Modern Physics C**, v. 28, n. 06, p. 1750079, 2017.
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-layer theory**. 9. ed. Berlin: Springer, 2017. ISBN 978-3-662-52917-1.
- TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A first course in turbulence**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1972. ISBN 0-262-20019-8.
- WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2018.



## APÊNDICE A – CÓDIGOS-FONTE RELEVANTES PARA A ANÁLISE

Este apêndice contém os principais trechos do código-fonte em Python utilizados para o pós-processamento dos dados e geração das figuras apresentadas neste trabalho. A inclusão destes códigos visa garantir a transparência da metodologia e permitir a reprodutibilidade dos resultados. O código foi desenvolvido utilizando as bibliotecas Pandas para manipulação de dados, NumPy e SciPy para cálculos numéricos, e Matplotlib para a visualização.

Código-fonte 1 – Estrutura da classe de configuração AnalysisConfig, utilizada para centralizar todos os parâmetros da análise.

```

1 class AnalysisConfig:
2
3     BASE_PROJECT_DIR = '.'
4     OUTPUT_DIR = 'figuras_finais'
5
6     MESH_STUDY_CONFIG = {
7         'Malha Muito Grosseira': {'case_dir': 'p0.1', '
8             cells': 10304},
9         'Malha Grosseira': {'case_dir': 'p1', 'cells'
10             : 64400},
11         'Malha M dia': {'case_dir': 'p2', 'cells'
12             ': 257600},
13         'Malha Refinada': {'case_dir': 'p3', 'cells'
14             : 1030400},
15     }
16
17     MESH_COMPARE = 'Malha Media'
18     MESH_REFERENCE = 'Malha Refinada'
19
20     # Parametros para a analise de PSD
21     PSD_CONFIG = {'nperseg': 8192, 'nfft': 32768, 'window':
22         'hann'}
23
24     KOLMOGOROV_ANCHOR_RANGE = (20, 80) % Faixa para alinhar

```

```

19     # Pares de sondas para analise de correlacao
20     CORRELATION_PAIRS_TO_COMPARE = [
21         (7, 7),
22     ]
23     TIME_TRANSIENT_CUTOFF = 3.0

```

Código-fonte 2 – Trecho da função de plotagem da PSD, demonstrando o cálculo da densidade espectral de potência e o alinhamento da linha de referência de Kolmogorov. A função `welch` da biblioteca SciPy é utilizada para obter um espectro de potência suavizado a partir do sinal de flutuação da velocidade.

```

1  # Para uma dada malha...
2  df_steady = df[df['Time'] >= cfg.TIME_TRANSIENT_CUTOFF]
3  ux_col = f'Probe{cfg.PROBE_INDEX_FOR_COMPARISON}_Ux'
4
5  # Calculo da Densidade Espectral de Potencia (PSD)
6  # 1. Obter o sinal de flutua ao
7  ux_fluctuation = df_steady[ux_col].values - df_steady[
    ux_col].mean()
8  fs = 1 / np.mean(np.diff(df_steady['Time'].values))
9
10 # 2. Calcular a PSD usando o metodo de Welch
11 freq, psd = welch(ux_fluctuation, fs=fs, **cfg.PSD_CONFIG)
12
13 # 3. Alinhar a linha de referencia de Kolmogorov
14 # (Este trecho executado apenas para a malha de
    referencia)
15 ref_data = psd_results[cfg.MESH_REFERENCE]
16 f_min, f_max = cfg.KOLMOGOROV_ANCHOR_RANGE
17 inertial_mask = (ref_data['freq'] > f_min) & (ref_data['
    freq'] < f_max)
18

```

```

19 if np.any(inertial_mask):
20     # Encontrar o ponto de dados real para ancorar a linha
21     anchor_idx = np.where(inertial_mask)[0][0]
22     f_anchor = ref_data['freq'][anchor_idx]
23     psd_anchor = ref_data['psd'][anchor_idx]
24
25     # Calcular a constante C dinamicamente
26     C_kolmogorov = psd_anchor * (f_anchor ** (5/3))
27
28     # Gerar a linha de referencia que passa pelo ponto de
29     # ancora
30     freq_range = np.logspace(np.log10(f_min/2), np.log10(
31         f_max*2), 50)
32     psd_kolmogorov = C_kolmogorov * (freq_range ** (-5/3))
33
34     ax.plot(freq_range, psd_kolmogorov, 'k--')

```

Código-fonte 3 – Trecho do laço principal da funcao de analise de correlação. O processo é idêntico para a autocorrelação (onde `idx1 == idx2`) e para a correlação cruzada. A função `signal.correlate` da biblioteca SciPy calcula a correlação no dominio da frequência (via FFT), e o resultado e normalizado para produzir o coeficiente de correlação.

```

1 # Para uma dada malha e um par de sondas (idx1, idx2)...
2 df_steady = df[df['Time'] >= cfg.TIME_TRANSIENT_CUTOFF].
3     copy()
4
5 dt = np.mean(np.diff(df_steady['Time']))
6
7 col1, col2 = f'Probe{idx1}_Ux', f'Probe{idx2}_Ux'
8
9 # 1. Obter flutuacoes (subtrair a media)
10 s1_fluc = df_steady[col1].values - np.mean(df_steady[col1])

```

```

9 s2_fluc = df_steady[col2].values - np.mean(df_steady[col2])
10
11 # 2. Calcular a correlacao cruzada com o metodo FFT
12 corr = signal.correlate(s1_fluc, s2_fluc, mode='full',
13     method='fft')
14
15 # 3. Normalizar para obter o coeficiente de correlacao
16 # A normalizacao correta considera os desvios padrao e o
17 # numero de pontos.
18 norm_factor = np.std(s1_fluc) * np.std(s2_fluc) * len(
19     s1_fluc)
20 normalized_corr = corr / norm_factor
21
22 # 4. calcula o atraso de tempo (lag) em segundos
23 lags = signal.correlation_lags(len(s1_fluc), len(s2_fluc),
24     mode='full') * dt

```

Código-fonte 4 – Função `calculate_l2_error`, responsável por calcular o erro relativo percentual da norma L2 entre os perfis de velocidade de duas malhas. A função inclui a interpolação do perfil da malha mais grosseira sobre a grade de pontos da malha de referencia para permitir a subtração vetorial.

```

1 def calculate_l2_error(df_compare, df_ref):
2
3     # vetores de coordenadas e velocidades originais
4     y_ref = df_ref['y'].values
5     u_ref = df_ref['Ux'].values
6
7     y_compare = df_compare['y'].values
8     u_compare = df_compare['Ux'].values
9
10    # interpola os dados da malha a ser comparada para a

```

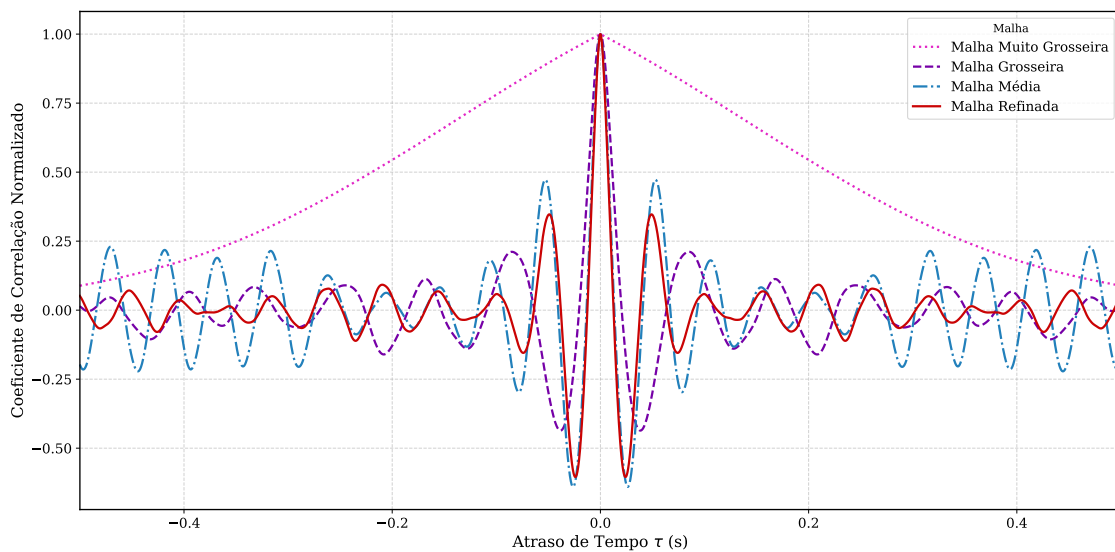
```
    grade de coordenadas da malha de referencia.  
11 u_compare_interp = np.interp(y_ref, y_compare,  
    u_compare)  
12  
13 numerator = np.linalg.norm(u_compare_interp - u_ref)  
14 denominator = np.linalg.norm(u_ref)  
15  
16 if denominator == 0:  
17     return None  
18  
19 relative_error_percent = (numerator / denominator) *  
    100  
20  
21 return relative_error_percent
```

## APÊNDICE B – RESULTADOS SUPLEMENTARES DA ANÁLISE DE AUTOCORRELAÇÃO

Este apêndice apresenta os resultados suplementares da análise de independência de malha para a função de autocorrelação temporal, conforme mencionado na Seção 4.2.2. As Figuras a seguir exibem a comparação entre as quatro malhas para as sondas localizadas na linha de centro do duto, em posições axiais progressivamente mais distantes da obstrução.

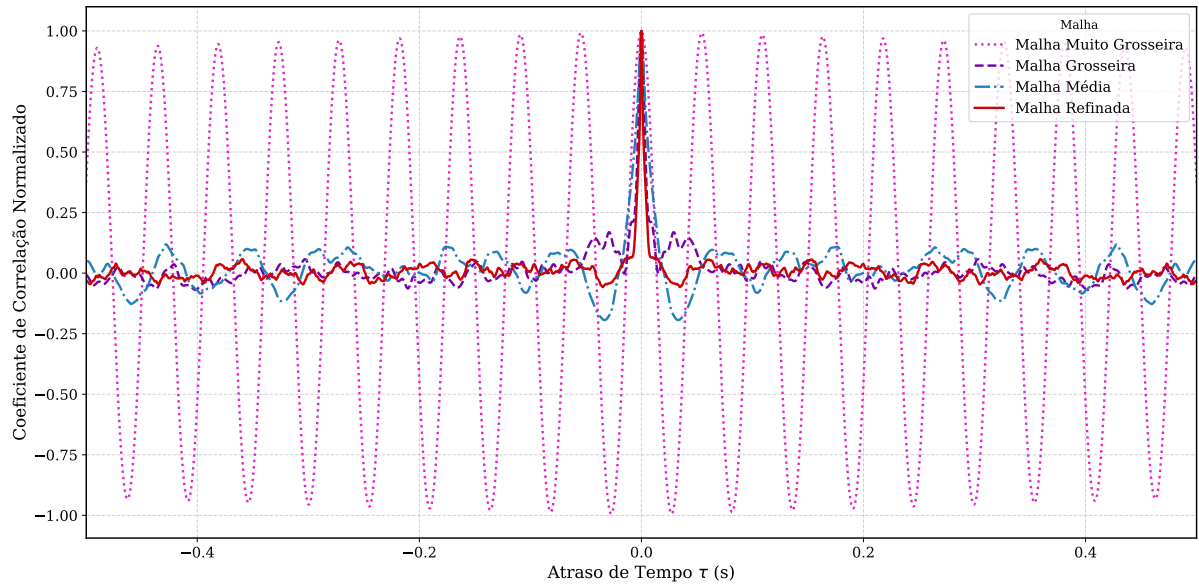
Em todos os casos, é possível observar o mesmo comportamento convergente. As malhas Muito Grosseira e Grosseira falham em capturar adequadamente a física do escoamento, enquanto as curvas para as malhas Média e Refinada demonstram uma excelente sobreposição. Esta consistência ao longo do duto confere robustez à conclusão de que a Malha Média oferece um balanço ótimo entre custo computacional e precisão física para este problema.

Figura 21 – Comparação da função de autocorrelação normalizada na Sonda 3 ( $x = 1.61$  m).



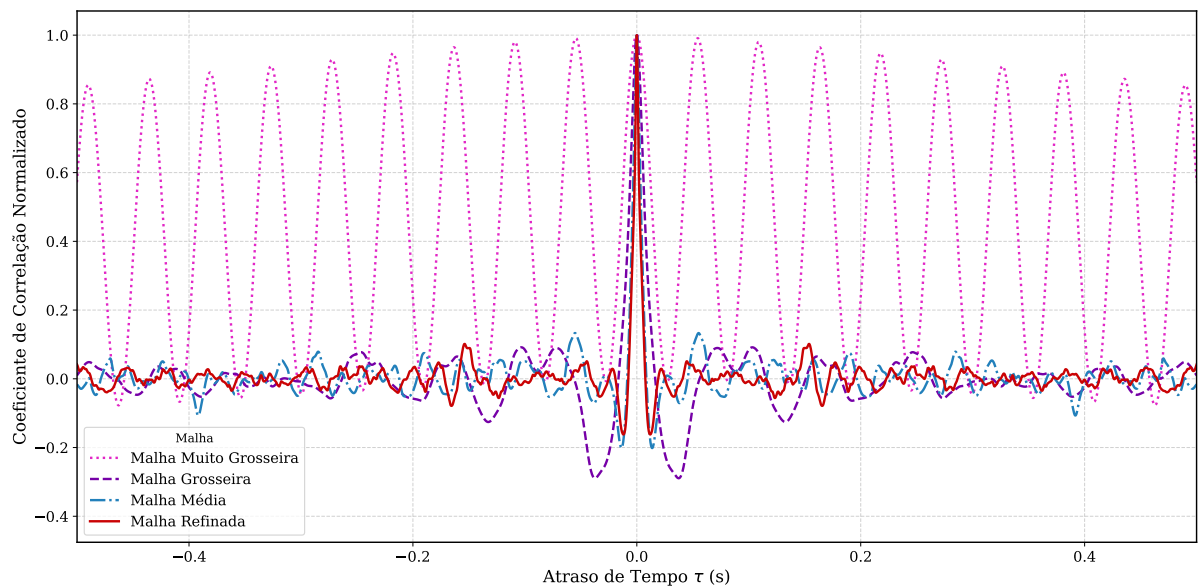
Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 22 – Comparação da autocorrelação na Sonda 4 ( $x = 0.41$  m,  $y = 0.05$  m).



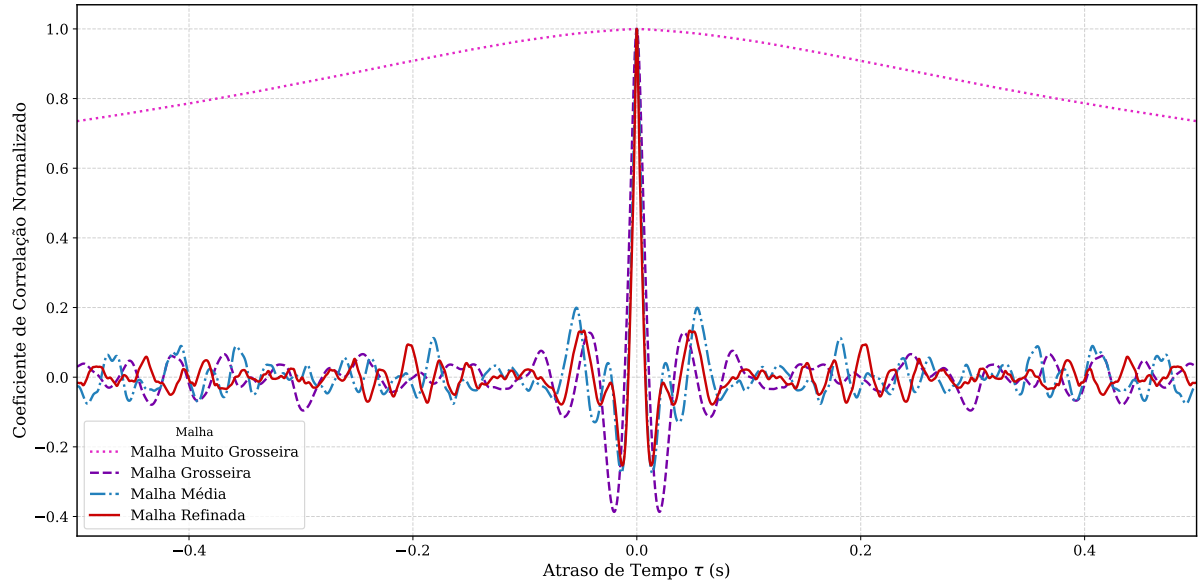
Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 23 – Comparação da autocorrelação na Sonda 5 ( $x = 0.81$  m,  $y = 0.05$  m).



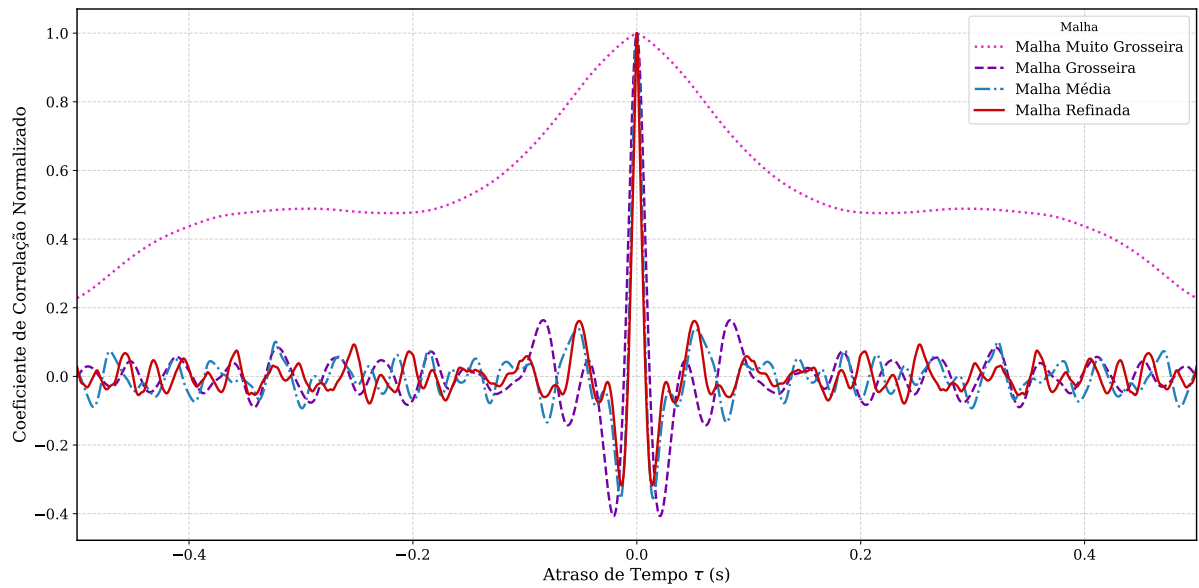
Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 24 – Comparação da autocorrelação na Sonda 6 ( $x = 1.21$  m,  $y = 0.05$  m).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.

Figura 25 – Comparação da autocorrelação na Sonda 7 ( $x = 1.61$  m,  $y = 0.05$  m).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), via Matplotlib.