



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA**

VITÓRIA MARTINS GUITTI

**DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ISOTRÓPICOS E
ANISOTRÓPICOS**

**FORTALEZA
2025**

VITÓRIA MARTINS GUITTI

DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ISOTRÓPICOS E
ANISOTRÓPICOS

Monografia apresentada ao Curso de Física do
Centro de Ciências da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diego Rabelo da
Costa

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G971d Guitti, Vitória Martins.

Difração de elétrons em meios bidimensionais isotrópicos e anisotrópicos / Vitória Martins Guitti. – 2025.
40 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa.

1. Materiais bidimensionais. 2. Difração de elétrons. 3. Difração de Fraunhofer. 4. Única fenda e
multifendas. 5. Isotropia e anisotropia. I. Título.

CDD 530

VITÓRIA MARTINS GUITTI

DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ISOTRÓPICOS E
ANISOTRÓPICOS

Monografia apresentada ao Curso de Física do
Centro de Ciências da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
título de Bacharel em Física.

Aprovada em: 25 de Julho de 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. João Milton Pereira Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. João Pedro Gomes do Nascimento
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Para mim, que por vezes tive dúvida e medo,
mas no fim eu consegui.

AGRADECIMENTOS

Durante uma vida acadêmica, muitas pessoas acabam por contribuir para o seu enriquecimento. Dessa forma, gostaria de agradecer a todos que fizeram parte dessa jornada. Primeiramente, gostaria de agradecer à minha avó Marisa, que me criou. Aos meus pais, Jordânia e Salviano, que me amam profundamente. Ao meu tio Bêthega, que me ajudou na escolha do curso. A minha querida avó, Thereza, a quem sinto imensa saudade. E a minha irmã, Yasmin, a quem amo e admiro profundamente.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que fiz durante o meu tempo na UFC. Obrigada pelos nossos papos com cafés na cantina da física e pelas caminhadas ao redor do campus. Por todas as risadas e momentos maravilhosos que passamos juntos. Obrigada pelo carinho e pelo acolhimento. Também quero agradecer aos amigos que já possuía e que são muito importantes para mim. Vocês tornaram essa caminhada mais leve.

Quero agradecer ao meu orientador e professor, Diego Rabelo, a quem admiro muito. Sou grata por sua paciência, atenção, respeito e preocupação. Acho inspirador o seu amor pela educação e conhecimento. Uma das pessoas mais humanas e gentis que encontrei durante minha trajetória. Agradecer ao João Pedro Gomes do Nascimento, que esteve comigo nessa jornada e sempre me ajudou quando pedi. Obrigada pela orientação e amizade. Quero agradecer também aos professores que contribuíram para a minha formação, com destaque ao professor Saulo Davi, que além de um professor sensacional, tornou-se um grande amigo.

Agradeço a mim mesma, que, apesar das dificuldades e de todos os obstáculos, persisti. Obrigada por não desistir. Agradeço a Deus, que acalenta meu coração e me traz conforto.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao Departamento de Física da UFC, do qual fiz parte por esses longos anos e que foi uma segunda casa para mim. Agradeço também ao CNpq pelo apoio financeiro que possibilitou minha pesquisa e contribuiu para meu desenvolvimento como futura pesquisadora.

“Oh, take your time, don’t live too fast,
Troubles will come and they will pass.”

(Lynyrd Skynyrd)

RESUMO

A difração é um fenômeno ondulatório que acontece quando uma onda passa por um obstáculo ou fenda e espalha-se em várias direções. A situação em que tanto o anteparo quanto a fonte se encontram a uma grande distância em relação ao obstáculo chama-se difração de Fraunhofer. Motivados pela (i) grande variedade de materiais bidimensionais que apresentam propriedades eletrônicas e de transporte anisotrópicas, tal como o fósforo negro, e pela (ii) influência da anisotropia no transporte balístico nestes sistemas e em fenômenos ondulatórios como a difração e a interferência, investigaremos a difração de Fraunhofer para elétrons em meios bidimensionais anisotrópicos, comparando os resultados obtidos com aqueles usuais do caso isotrópico, avaliando o sistema composto por fenda única e múltiplas fendas. Uma abordagem semiclássica será empregada com a anisotropia sendo introduzida através das massas efetivas diferentes nas direções x e y . Resultados para a densidade de probabilidade para diferentes ângulos de rotação entre os sistemas de coordenadas e os eixos cristalográficos do sistema anisotrópico bidimensional serão investigados e comparados com os recém-reportados resultados publicados por F. R. V. Araújo *et al.* no artigo “*Single- and double-slit electron diffraction in an anisotropic two-dimensional medium*”. (Araújo *et al.*, 2024)

Palavras-chave: materiais bidimensionais; difração de elétrons; difração de Fraunhofer; única fenda e multifendas; isotropia e anisotropia.

RESUMO

Diffraction is a wave phenomenon that occurs when a wave passes through an obstacle or slit and spreads out in multiple directions. The scenario where both the screen and the source are at a large distance relative to the obstacle is called Fraunhofer diffraction. Motivated by (i) the wide variety of two-dimensional materials that exhibit anisotropic electronic and transport properties, such as black phosphorus, and (ii) the influence of anisotropy on ballistic transport in these systems and on wave phenomena, like diffraction and interference, we will investigate Fraunhofer diffraction for electrons in anisotropic two-dimensional media, comparing the results with those obtained in the usual isotropic case. The study will evaluate systems composed of single and multiple slits. A semiclassical approach will be employed, with anisotropy introduced through different effective masses along the x and y directions. Results for the probability density at different rotation angles between the coordinate systems and the crystallographic axes of the two-dimensional anisotropic system will be investigated and compared with the recently reported findings published by F. R. V. Araújo *et al.* in the paper “Single- and double-slit electron diffraction in an anisotropic two-dimensional medium”. (Araújo *et al.*, 2024)

Keywords: two-dimensional materials; electron diffraction; Fraunhofer diffraction; single slit and multiple slits; isotropy and anisotropy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração esquemática da difração em uma única fenda. Uma onda plana ao incidir sobre uma fenda de tamanho a , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .	17
Figura 2 – Ilustração esquemática da difração em duas fendas. Uma onda plana ao incidir sobre duas fendas de tamanho a , separadas por uma distância d forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .	19
Figura 3 – Ilustração esquemática da difração em multiplas fendas com número N par de fendas. Uma onda plana ao incidir sobre N fendas de tamanho a , separadas uma da outra por uma distância d , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .	20
Figura 4 – Ilustração esquemática da difração em múltiplas fendas para o caso de N ímpar. Uma onda plana ao incidir sobre N fendas de tamanho a , separadas uma da outra por uma distância d , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .	23
Figura 5 – Sistema de coordenadas no espaço dos momentos. A figura apresenta, em preto, os eixos dos momentos no sistema de coordenadas \bar{S} e em laranja os eixos dos momentos no sistema de coordenadas S , rotacionado por um ângulo θ em relação a \bar{S} .	26
Figura 6 – Ilustração esquemática da difração em uma única fenda. Uma onda plana ao incidir sobre a fenda de tamanho a , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} e encontra um anteparo no ponto P , a uma distância D da tela.	28
Figura 7 – Ilustração esquemática da difração em duas fendas. Uma onda plana ao incidir sobre as fendas de tamanho a e distância entre as fendas d , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} e encontra um anteparo no ponto P , a uma distância D da tela.	29
Figura 8 – Intensidade como função da diferença de fase para diferentes números de fendas. Esses resultados foram obtidos definindo os seguintes parâmetros: $a/2 = 2$, $d = a$ e $k = 10$, onde $a/2$ é o tamanho da fenda dividido por dois, b é a distância entre as fendas, e k é o vetor de onda.	33

Figura 9 – Dependência do padrão de difração para uma fenda com o ângulo da difração α , obtido pela densidade de probabilidade. Fixou-se os seguintes valores de θ : (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Também foram definidos os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$ e $m_x = 1$. As curvas ciano pontilhada, magenta tracejada e amarela sólida representam, respectivamente, $m_y = m_x$, $m_y = 2m_x$ e $m_y = 10m_x$ 34

Figura 10 – Dependência do padrão de interferência para dupla fenda, obtido pela densidade de probabilidade, em função do ângulo α para: (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Definiu-se os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$, $A = 1$, $D = 20$, $y = 10$, $d = 12$ e $m_x = 1$ 36

Figura 11 – Dependência do padrão de interferência e difração, obtido pela densidade de probabilidade, em função do ângulo α para: (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Definiu-se os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$, $A = 1$, $D = 20$, $y = 10$, $d = 12$ e $m_x = 1$ 36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ISOTRÓPICOS	17
2.1	Difração em uma fenda	17
2.2	Difração em Duas Fendas	18
2.3	Difração em Múltiplas Fendas	20
2.3.1	<i>Número Par de Fendas</i>	20
2.3.2	<i>Número Ímpar de Fendas</i>	23
3	DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ANISOTRÓPICOS	25
3.1	Modelo da Massa Efetiva	25
3.2	Difração em Uma Fenda	27
3.3	Difração em Duas Fendas	29
4	RESULTADOS	32
4.1	Isotropia	32
4.1.1	<i>Análise do parâmetro β</i>	32
4.2	Anisotropia	34
4.2.1	<i>Uma fenda</i>	34
4.2.2	<i>Dupla fenda</i>	35
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

Os materiais bidimensionais (2D) têm ganhado grande destaque devido às suas propriedades e aplicações em diversas áreas de desenvolvimento, por exemplo, na área de nanotecnologia. Esses materiais, essencialmente cristalinos, são ditos 2D devido à disposição de seus átomos, que estão arranjados em camadas únicas, de forma que se faz relevante apenas duas dimensões. O estudo acerca desses recursos, ganhou destaque em 2004, quando o grafeno foi isolado pela primeira vez, resultando no prêmio Nobel de Física, para os cientistas Andre Geim e Konstantin Novoselov, em 2010 (FAPEMIG, 2024).

O grafeno é um material cristalino constituído por uma monocamada de grafite, cujos átomos de carbono estão arranjados em uma estrutura do tipo favo de mel. O tipo de ligação química e o arranjo dos átomos de carbono nesse material fazem com que ele seja extremamente forte, superando o aço. Além disso, o grafeno possui diversas outras propriedades, tais como excelência em condução de calor e eletricidade, além de ser um material leve e aproximadamente um milhão de vezes mais fino que um fio de cabelo humano (FAPEMIG, 2024). O grafeno é um material de *gap* nulo, onde seus portadores de carga, a baixas energias, se comportam como partículas relativísticas sem massa e com uma velocidade característica de 10^6 m/s. Dessa forma, sua estrutura de bandas é composta por uma banda de valência e outra de condução, que se tocam formando o que chamamos de pontos de Dirac (Novoselov *et al.*, 2005). Uma característica interessante do grafeno é que, à baixas energias, suas isoenergias são circulares. Consequentemente, suas propriedades eletrônicas e de transporte são isotrópicas, isto é, independem da direção.

Os materiais 2D têm ficado famosos graças às propriedades que eles possuem. Um desses materiais que tem ganhado relevância no meio científico é o fosforeno. Isolado pela primeira vez em 2014, o fosforeno é um material 2D constituído por uma monocamada de fósforo negro (Liu *et al.*, 2014; Chaudhary *et al.*, 2022). Diferentemente do grafeno, à baixa energia, as isoenergias do fosforeno possuem formato elíptico. Como consequência, as propriedades eletrônicas e de transporte do fosforeno dependem da direção e, por tanto, são anisotrópicas (de Sousa *et al.*, 2017; Pereira; Katsnelson, 2015).

Como mencionado anteriormente, alguns materiais, como o grafeno, possuem as mesmas propriedades em todas as direções. Isso é uma característica de sistemas isotrópicos. Há também materiais cujas propriedades dependem da direção, como o fosforeno. Esses tipos de materiais são chamados de anisotrópicos. A anisotropia é bastante interessante e seu estudo se faz

muito importante em diversas áreas. Na óptica, por exemplo, faz-se o uso de cristais anisotrópicos em dispositivos ópticos devido às suas propriedades de absorção de luz e por apresentarem índices de refração diferentes dependendo da direção de propagação da luz. (Ignatovich; Ignatovich, 2012; Liu; Li, 2015; Balakin; Zimdahl, 2005; Ranganath, 1994). No que diz respeito à difração de elétrons, a anisotropia pode afetar o direcionamento do feixe e levar a variações na intensidade de picos e nos padrões de difração, além de autocolimação do feixe (Daloj *et al.*, 2022; Eritsyan, 2005; Sluijter *et al.*, 2009; Fleck; Feit, 1983; Martinez. Herrero *et al.*, 2001). Ademais, estuda-se sua possível influência no transporte balístico em materiais 2D, levando em consideração que o livre caminho médio dos portadores nesses materiais pode atingir proporções maiores que a dimensão do meio, na ordem de micrômetro, (10^{-6}) m(Rudenko; Katsnelson, 2024; Zhao *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2019; Yang *et al.*, 2023; Araújo *et al.*, 2024).

O fenômeno da difração consiste na capacidade das ondas de contornar obstáculos e se espalhar ao passar por fendas. Essas fendas se comportam como novas fontes de propagação da onda, seguindo o princípio de Huygens, segundo o qual cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma fonte pontual de ondas secundárias. Esse fenômeno é caracterizado pela teoria ondulatória e seus efeitos são mais fortes quando o comprimento de onda (λ) é muito maior em comparação ao tamanho da fenda ou obstáculo (Nussenzveig, 2014).

O físico neerlandês Christiaan Huygens propôs a teoria ondulatória da luz como contraponto à teoria corpuscular proposta por Isaac Newton. Newton acreditava que a luz se propagava como um fluxo de partículas, as quais ele chamava de corpúsculos. A teoria corpuscular da luz foi desenvolvida para explicar fenômenos como refração e reflexão, porém, falhava ao tentar explicar o fenômeno da difração. Dessa forma, surgiu a teoria ondulatória da luz, que explica alguns fenômenos como a difração e interferência, indicando que esses fenômenos resultam da perturbação ou propagação de ondas, e não pelo deslocamento de partículas de um ponto a outro. Essa teoria foi, posteriormente, comprovada pelos experimentos de dupla fenda realizados por Thomas Young e pela teoria de difração de Fresnel, submetida em 1819 a uma competição patrocinada pela Academia Francesa de Ciências. Inicialmente a teoria de Fresnel foi ridicularizada, uma vez que previa um ponto brilhante no centro da sombra de um objeto opaco. Porém, logo foi comprovada experimentalmente (Halliday *et al.*, 2016).

A difração é classificada de duas maneiras: difração de Fresnel, onde a distância **Z** entre a fenda e o anteparo não é muito grande, e difração de Fraunhofer, onde o anteparo está muito distante da fenda, de forma que **Z** é muito maior que o tamanho da fenda. Nesse segundo

caso, os raios podem ser considerados aproximadamente paralelos, de forma que podemos considerar uma onda plana (Halliday *et al.*, 2016). Quando uma onda passa pela fenda, ela se propaga até encontrar um anteparo e criará, por meio do princípio da superposição das ondas, um padrão de difração marcado por regiões mais escuras intercaladas por regiões mais claras, indicando áreas com maior incidência e áreas com menor incidência. Essas franjas são o que chamamos de padrões de interferência. Esses padrões modificam-se dependendo do tipo de meio onde ocorre a difração.

Interferência é o fenômeno onde ondas distintas e de mesmas características, provenientes de fontes diferentes, se sobrepõem em um determinado ponto no espaço, de forma que a intensidade da onda resultante pode ser maior (interferência construtiva) ou menor (interferência destrutiva) que as intensidades individuais das ondas anteriores. O fator que determinará se a interferência é construtiva ou destrutiva é a fase relativa entre as ondas. Se a diferença de fase é dada por $n\pi$, com $n = 0, 2, 4, \dots$, com n par, então temos interferência construtiva. Se for dada por $n\pi$, com $n = 1, 3, 5, \dots$, com n ímpar, então temos interferência destrutiva (Halliday *et al.*, 2016).

Quando ocorre interferência, o que se vê na tela, onde as ondas se combinam em um ponto P, é um conjunto de bandas claras e escuras alternadamente, as quais chamamos de franjas de interferência. As franjas claras correspondem à intensidade máxima e as escuras à intensidade mínima. Os máximos e mínimos de intensidade ocorrem, respectivamente, quando:

$$\phi = 2n\pi, \text{ com } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.1)$$

e

$$\phi = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ com } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

As figuras de interferência são uma característica dos fenômenos ondulatórios. Em 1924, Louis de Broglie, físico francês, propôs que o dualismo onda-partícula também era uma propriedade da matéria e isso foi demonstrado pelas figuras de interferência de um experimento de difração de feixes de elétrons (Tipler; Llewellyn, 2014). Sua hipótese foi matematicamente representada pelo que hoje conhecemos como relações de de Broglie, dadas por:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1.3)$$

e

$$f = \frac{E}{h}, \quad (1.4)$$

onde λ corresponde ao comprimento de onda das ondas de matéria, conhecido como comprimento de onda de *de Broglie*, f corresponde à frequência, p o momento, E é a energia total, e h a constante de Planck. Esses conceitos propostos por de Broglie foram, posteriormente, desenvolvidos pelo físico austríaco, Erwin Schrödinger.

Na mecânica clássica aprendemos a determinar a posição $x(t)$ de uma partícula assim como sua velocidade, momento, energia cinética, entre outras variáveis dinâmicas. Na mecânica quântica, em princípio, também pretende-se determinar essas mesmas variáveis, mas a forma como se aborda esse problema é diferente do que já se conhece da mecânica clássica. Por sua vez, o que se determina é o que se chama de função de onda, $\Psi(x, t)$, da partícula. Por meio dela, que conseguiremos entender mais sobre o sistema de estudo. (Griffiths, 2011).

A solução da função de onda é encontrada através da equação diferencial parcial dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t), \quad (1.5)$$

chamada de equação de Schrödinger. Ela recebe esse nome devido a Erwin Schrödinger, que a propôs no ano de 1925. Essa equação é análoga à equação de onda clássica; ela relaciona as derivadas parciais da função de onda em relação ao tempo e ao espaço. Diferentemente da equação de onda clássica, a equação de Schrödinger apresenta explicitamente o número complexo (i). Isso quer dizer que as funções de onda que satisfazem a equação de Schrödinger não são necessariamente reais, de forma que a torna uma função difícil de mensurar diretamente (Tipler; Llewellyn, 2014).

A função de onda está distribuída pelo espaço, diferente do que estamos acostumados na mecânica clássica, onde a partícula está bem localizada em um ponto do espaço. Dessa forma, no âmbito da mecânica quântica, o que temos é uma interpretação estatística sobre essa função de onda. Essa interpretação probabilística foi proposta por Max Born (Griffiths, 2011):

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \text{probabilidade de encontrar a partícula entre } a \text{ e } b \text{ em um instante } t, \quad (1.6)$$

onde $|\Psi(x, t)|^2$ é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em determinada posição. Esse conceito será utilizado neste trabalho ao tratarmos da difração em meios anisotrópicos.

Este trabalho baseia-se no artigo de (Araújo *et al.*, 2024), intitulado *Single- and double-slit electron diffraction in an anisotropic two-dimensional medium*. O autor realiza um estudo sobre os efeitos da anisotropia na difração de elétrons, analisando as condições para interferências construtivas e destrutivas em um sistema de dupla fenda. A investigação foi

desenvolvida por meio de duas abordagens: (i) abordagem semiclássica, utilizando um modelo de massa efetiva para introduzir a anisotropia ao sistema; (ii) abordagem em nível atômico, utilizando o modelo *tight-binding*. O estudo da isotropia baseou-se no desenvolvimento, tomando o caso da difração de Fraunhofer, presente no Capítulo 27 do livro “Teoria do Eletromagnetismo” de Kleber Daum Machado (Machado, 2004). Nesse capítulo, o autor apresenta expressões para difração em uma, duas e N fendas para o caso de meios isotrópicos.

Este trabalho foi organizado de forma a desenvolver progressivamente o raciocínio acerca do tema em estudo. Inicialmente, no Capítulo 2, realizou-se um estudo sobre difração em sistemas isotrópicos, tomando os casos de fenda única, dupla e multifendas. Ao final deste capítulo, obteve-se uma expressão geral para a difração em N fendas. No Capítulo 3, adotou-se a abordagem semiclássica apresentada no referido artigo (Araújo *et al.*, 2024), utilizando um modelo de massa efetiva para introduzir anisotropia ao sistema. Nessa etapa, foram desenvolvidas expressões para (i) a difração em uma fenda; (ii) interferência; e (iii) a combinação dos efeitos de interferência e difração para sistema de duas fendas. No Capítulo 4, apresentam-se resultados observados através da plotagem de gráficos para ambos os casos: isotrópico e anisotrópico. No Capítulo 5, algumas discussões finais e perspectivas para pesquisas futuras foram apresentadas.

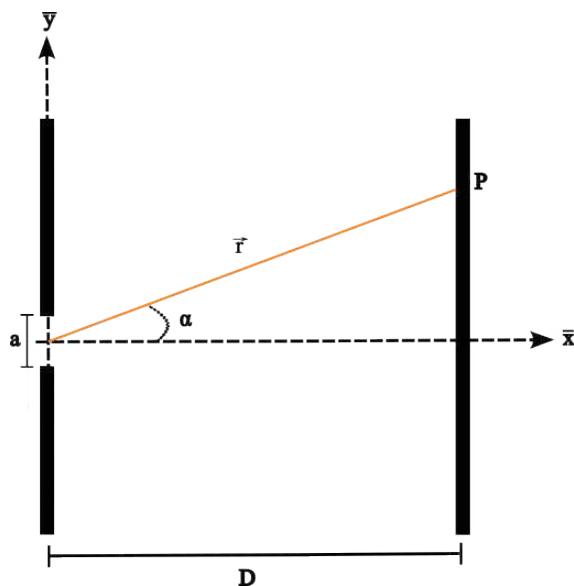
2 DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ISOTRÓPICOS

Neste capítulo, vamos estudar a difração em uma, duas e N fendas. Este estudo foi baseado na linha de raciocínio desenvolvida no livro “Teoria do Eletromagnetismo”, de Kleber Daum Machado. (Machado, 2004). Ao longo do capítulo, foram detalhadamente desenvolvidas expressões para amplitude e intensidade de difração, tomando a condição de Fraunhofer para a difração.

2.1 Difração em uma fenda

Tome um feixe de luz que incide sobre uma fenda de tamanho a e que encontra um anteparo a uma distância D da fenda. Observe o esquema ilustrado na Fig. 1.

Figura 1 – Ilustração esquemática da difração em uma única fenda. Uma onda plana ao incidir sobre uma fenda de tamanho a , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Imagine, agora, uma onda plana que incide sobre essa fenda e se espalha formando, de acordo com o princípio de Huygens, várias faixas, frentes de ondas secundárias, que se encontram no ponto P do anteparo. Para sabermos as contribuições de todas essas faixas, devemos sobrepor-las utilizando o método de fasores. Tomando um fator, que representa algum dos campos (elétrico \vec{E} ou magnético \vec{B}), de forma que o módulo da soma desses fasores em cada ponto P corresponde a amplitude. Essa amplitude, para o caso da fenda única, pode ser

obtida a partir da seguinte expressão

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-ikby} dy, \quad (2.1)$$

onde $b = \sin \alpha$ e y descreve a direção em que a fenda está limitada. Resolvendo-a, obtemos

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -A \frac{e^{-ikby}}{ikb} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{-A}{ikb} \left[e^{-ikb\frac{a}{2}} - e^{ikb\frac{a}{2}} \right]. \quad (2.2)$$

Sabendo que a fórmula de Euler para $\sin(x)$ é

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (2.3)$$

podemos reescrever a Eq. (2.2), como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \frac{A}{ikb} \left[2i \sin \left(kb\frac{a}{2} \right) \right] = 2A \frac{a \sin \left(kb\frac{a}{2} \right)}{kb\frac{a}{2}}. \quad (2.4)$$

Tomando $\beta = kb\frac{a}{2}$ na Eq. (2.4), temos que

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 2A \frac{a \sin(\beta)}{\beta}. \quad (2.5)$$

A intensidade em cada ponto do anteparo é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude (\mathcal{N}), de forma que temos

$$I = B |\mathcal{N}|^2 = |A|^2 a^2 B \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2, \quad (2.6)$$

onde B é uma constante de proporcionalidade I é a intensidade da radiação. Quando tomamos o limite de β tendendo a zero, temos que a expressão para a intensidade se reduz a

$$I(0) = I_0 = |A|^2 a^2 B. \quad (2.7)$$

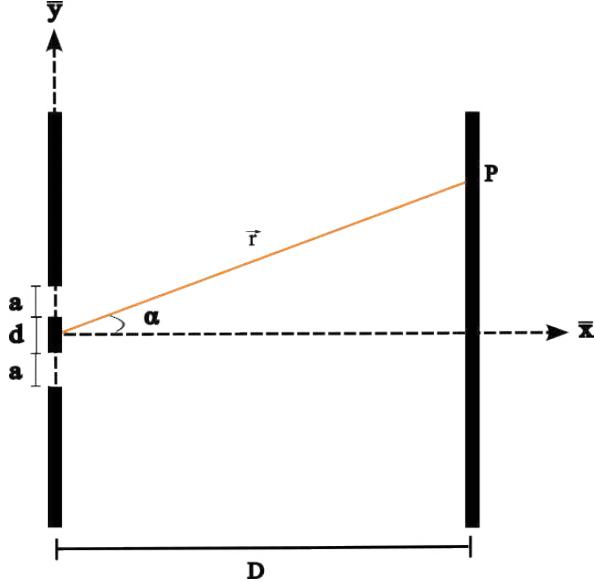
De forma, podemos reescrever a Eq. (2.6) da intensidade para o caso da difração em uma única fenda em termos de I_0 , resultando em

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2. \quad (2.8)$$

2.2 Difração em Duas Fendas

Imagine, agora, uma onda plana que incide sobre duas fendas de tamanho a e se espalha formando frentes de ondas secundárias, que se encontram no ponto P em um anteparo

Figura 2 – Ilustração esquemática da difração em duas fendas. Uma onda plana ao incidir sobre duas fendas de tamanho a , separadas por uma distância d forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

a uma distância D das fendas. A distância entre as duas fendas é igual a d , como mostra a ilustração deste experimento na Fig. 2.

A amplitude para o caso da fenda dupla pode ser obtida a partir da expressão

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \int_{-\frac{d}{2}-a}^{-\frac{d}{2}} e^{-ikby} dy + A \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} e^{-ikby} dy. \quad (2.9)$$

Resolvendo as duas integrais da Eq. (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) &= -A \left[\frac{e^{-ikby}}{ikb} \Big|_{-\frac{d}{2}-a}^{-\frac{d}{2}} + \frac{e^{-ikby}}{ikb} \Big|_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} \right] \\ &= \frac{-A}{ikb} \left[e^{ikb\frac{d}{2}} - e^{ikb(\frac{d}{2}+a)} + e^{-ikb(\frac{d}{2}+a)} - e^{-ikb\frac{d}{2}} \right] \\ &= \frac{-A}{ikb} \left[e^{ikb\frac{d}{2}} e^{ikb\frac{a}{2}} \left(e^{-ikb\frac{a}{2}} - e^{ikb\frac{a}{2}} \right) + e^{-ikb\frac{d}{2}} e^{-ikb\frac{a}{2}} \left(-e^{ikb\frac{a}{2}} + e^{-ikb\frac{a}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Utilizando a fórmula de Euler, a expressão de $\mathcal{N}(\vec{r})$ se reduz à

$$\mathcal{N} = \frac{4A}{kb} \sin \left[kb \frac{a}{2} \right] \cos \left[kb \left(\frac{d}{2} + \frac{a}{2} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Tomando $\beta = kb\frac{a}{2}$ e $S = kb\left(\frac{d}{2} + \frac{a}{2}\right)$, a expressão acima torna-se

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 2Aa \frac{\sin(\beta)}{\beta} \cos(S). \quad (2.12)$$

Como visto anteriormente, a intensidade em cada ponto do anteparo (I) é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude (\mathcal{N}). Dessa maneira, temos que

$$I = B|\mathcal{N}|^2 = 4|A|^2 a^2 B \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 \cos^2(S). \quad (2.13)$$

Tomando o limite de β e S tendendo a zero, teremos que a expressão para a intensidade se reduz à

$$I(0) = I_0 = 4|A|^2 a^2 B. \quad (2.14)$$

Reescrevendo a Eq. (2.13) para a intensidade para o caso da difração em dupla fenda em termo de I_0 , obtemos

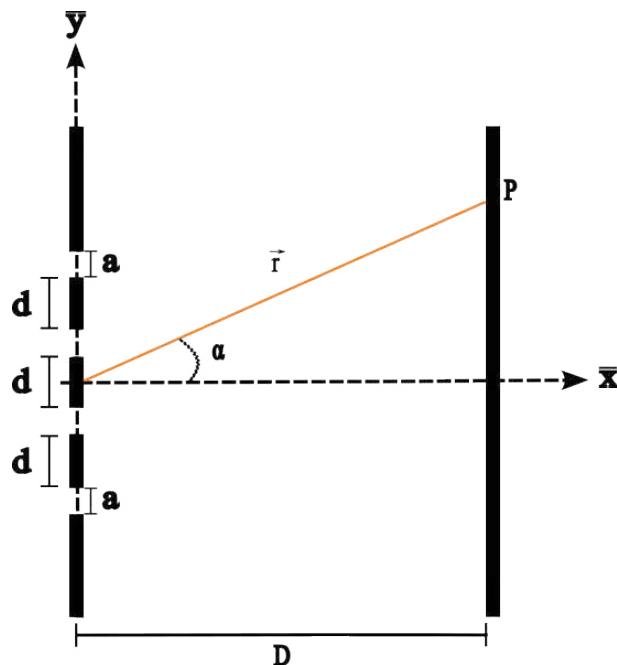
$$I = I_0 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 \cos^2(S). \quad (2.15)$$

2.3 Difração em Múltiplas Fendas

2.3.1 Número Par de Fendas

Agora vamos estender o caso da difração para múltiplas fendas. Tome uma tela com N fendas de tamanho a e igualmente espaçadas, como apresentado na Fig. 3.

Figura 3 – Ilustração esquemática da difração em múltiplas fendas com número N par de fendas. Uma onda plana ao incidir sobre N fendas de tamanho a , separadas uma da outra por uma distância d , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} .



Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Para calcular a amplitude, usaremos o método utilizado nas seções anteriores, mas antes devemos atentar-nos aos limites corretos a serem utilizados. Observe que, para N igual a um número par, a origem estará no meio da tela, como é possível ver na Fig. 3. Porém, se N for

ímpar, a origem estará no meio de uma fenda. Tomando como referência um sistema com N pares de fendas, o intervalo para a j -ésima fenda situada no lado positivo da tela, levando em conta o sistema de coordenadas, é

$$\left[\frac{d}{2} + (d+a)j, \frac{d}{2} + dj + a(j+1) \right], \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.16)$$

Para a l -ésima fenda situada no lado negativo, temos que

$$\left[-\left(\frac{d}{2} + dl + a(l+1) \right), -\left(\frac{d}{2} + (d+a)l \right) \right], \quad \text{para } l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.17)$$

Dessa forma, a expressão para a amplitude é expressa como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \int_{\frac{d}{2} + (d+a)j}^{\frac{d}{2} + dj + a(j+1)} e^{-ikby} dy + A \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} \int_{-(\frac{d}{2} + dl + a(l+1))}^{-\left(\frac{d}{2} + (d+a)l \right)} e^{-ikby} dy. \quad (2.18)$$

Resenvolvendo as integrais na Eq. (2.18), chegamos ao seguinte resultado

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \left[1 - e^{-2ikb\frac{a}{2}} \right] \frac{Ae^{-ikb\frac{d}{2}}}{ikb} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ikb(d+a)j} + \left[e^{2ikb\frac{a}{2}} - 1 \right] \frac{Ae^{ikb\frac{d}{2}}}{ikb} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{ikb(d+a)l}. \quad (2.19)$$

Note que os termos na Eq. (2.19) são séries geométricas, cuja as somas são dada por

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (2.20)$$

onde n corresponde ao número de termos.

Para ambas as séries na Eq. (2.19), o a_0 é 1 e o número de termos é $N/2$, de forma que podemos escrever as somas como:

– Para o primeiro termo

$$\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ikb(d+a)j} = \frac{1 - \left[e^{-ikb(d+a)} \right]^{\frac{N}{2}}}{1 - e^{-ikb(d+a)}} = \frac{1 - e^{-ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{1 - e^{-ikb(d+a)}}. \quad (2.21)$$

– Para o segundo termo

$$\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{ikb(d+a)l} = \frac{1 - \left[e^{ikb(d+a)} \right]^{\frac{N}{2}}}{1 - e^{ikb(d+a)}} = \frac{1 - e^{ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{1 - e^{ikb(d+a)}}. \quad (2.22)$$

Dessa forma, a Eq. (2.19) pode ser reescrita como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \left[1 - e^{-2ikb\frac{a}{2}} \right] \frac{Ae^{-ikb\frac{d}{2}}}{ikb} \left[\frac{1 - e^{-ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{1 - e^{-ikb(d+a)}} \right] + \left[e^{2ikb\frac{a}{2}} - 1 \right] \frac{Ae^{ikb\frac{d}{2}}}{ikb} \left[\frac{1 - e^{ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{1 - e^{ikb(d+a)}} \right]. \quad (2.23)$$

Desenvolvendo a expressão acima, chegamos a seguinte equação:

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 2A \frac{a}{2} \left[\frac{\sin(kb\frac{a}{2})}{kb\frac{a}{2}} \right] \left[\frac{\sin[kbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]}{\sin[kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]} \right]. \quad (2.24)$$

Tomando $\beta = kb\frac{a}{2}$ e $S = kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})$, a expressão acima torna-se

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = Aa \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right] \left[\frac{\sin(NS)}{\sin(S)} \right]. \quad (2.25)$$

Multiplicando em cima e embaixo por N , temos que

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = NAa \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right] \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]. \quad (2.26)$$

Sabemos que a intensidade em cada ponto do anteparo é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude (\mathcal{N}), isto é, $I \propto |\mathcal{N}|^2$, logo, em posse de \mathcal{N} pela Eq. (2.26), temos que

$$I = N^2 |A|^2 a^2 B \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]^2. \quad (2.27)$$

Vamos analisar agora a situação de pequenas aberturas na intensidade I , isto é, o caso limite de I para α pequeno. Para tal, vamos verificar o limite de α tendendo a zero nos dois termos, $\sin(\beta)/\beta$ e $\sin(NS)/[N \sin(S)]$, da Eq. (2.27). É importante notar que $S \equiv S(\alpha)$ e $\beta \equiv \beta(\alpha)$, tal como

$$\beta = kb\frac{a}{2} = \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta \approx \frac{\pi a \bar{x}}{\lambda D}, \quad (2.28a)$$

$$S = kb \left(\frac{d}{2} + \frac{a}{2} \right) = k \left(\frac{d}{2} + \frac{a}{2} \right) \sin \alpha. \quad (2.28b)$$

Daí, para α pequeno, temos que β e S podem ser aproximados. Assim, para S muito pequeno temos que $\sin(NS) \approx NS$ e $\sin(S) \approx S$. Dessa forma, os dois termos mencionados da Eq. (2.26) no limite de $S \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 0$, tornam-se respectivamente

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sin(NS)}{\sin(S)} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{NS}{S} = N, \quad (2.29a)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta)}{\beta} = 1. \quad (2.29b)$$

Portanto, a intensidade para $\alpha = 0$ é

$$I(0) = I_0 = N^2 |A|^2 a^2 B. \quad (2.30)$$

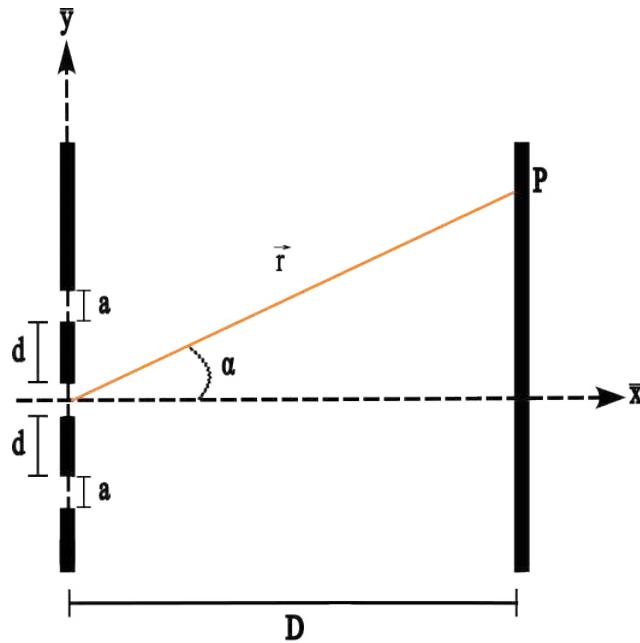
Podemos assim reescrever a intensidade [Eq. (2.27)] para o caso da difração em N fendas em termo de I_0 da seguinte forma:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]^2. \quad (2.31)$$

2.3.2 Número Ímpar de Fendas

Vamos considerar agora como referência um sistema com um número ímpar de fendas, como ilustra a Fig. 4.

Figura 4 – Ilustração esquemática da difração em múltiplas fendas para o caso de N ímpar. Uma onda plana ao incidir sobre N fendas de tamanho a , separadas uma da outra por uma distância d , forma um ângulo α com o eixo x .



Fonte: Elaborada pela autora, 2024

O intervalo para a j -ésima fenda situada no lado positivo da tela, levando em conta o sistema de coordenadas, é

$$\left[(d+a)j - \frac{a}{2}, (d+a)j + \frac{a}{2} \right], \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (2.32)$$

Para a l -ésima fenda situada no lado negativo, temos que

$$\left[-\left((d+a)l + \frac{a}{2} \right), -\left((d+a)l - \frac{a}{2} \right) \right], \quad \text{para } l = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (2.33)$$

Dessa forma, a expressão para a amplitude é expressa como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikby} dy + A \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \int_{(d+a)j - \frac{a}{2}}^{(d+a)j + \frac{a}{2}} e^{-ikby} dy + A \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \int_{-(d+a)l - \frac{a}{2}}^{-(d+a)l + \frac{a}{2}} e^{-ikby} dy. \quad (2.34)$$

Resolvendo as integrais da Eq. (2.34), obtém-se o seguinte resultado

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \frac{2A}{kb} \sin \left(kb \frac{a}{2} \right) + \frac{2A}{kb} \sin \left(kb \frac{a}{2} \right) \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ikb(d+a)j} + \frac{2A}{kb} \sin \left(kb \frac{a}{2} \right) \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ikb(d+a)l}. \quad (2.35)$$

Note na Eq. (2.35) as séries geométricas, cuja soma é dada pela Eq. (2.20), onde o número de termos é $N - 1/2$. Dessa forma, podemos escrever as somas como:

- Para a primeira soma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ikb(d+a)j} &= \frac{e^{-ikb(d+a)} \left\{ 1 - \left[e^{-ikb(d+a)} \right]^{\frac{N-1}{2}} \right\}}{1 - e^{-ikb(d+a)}}, \\ &= \frac{e^{-ikb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})} - e^{-ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{2i \sin [kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

- Para a segunda soma

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ikb(d+a)l} &= \frac{e^{ikb(d+a)} \left\{ 1 - \left[e^{ikb(d+a)} \right]^{\frac{N-1}{2}} \right\}}{1 - e^{ikb(d+a)}}, \\ &= \frac{e^{ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})} - e^{ikb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{2i \sin [kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dessa forma, a Eq. (2.35) pode ser reescrita como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \frac{2A}{kb} \sin \left(kb \frac{a}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{e^{-ikb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})} - e^{-ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{2i \sin [kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]} + \frac{e^{ikbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})} - e^{ikb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})}}{2i \sin [kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]} \right\}. \quad (2.38)$$

Simplificando a expressão acima, chegamos a

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 2NA \frac{a}{2} \left[\frac{\sin(kb \frac{a}{2})}{kb \frac{a}{2}} \right] \left[\frac{\sin[kbN(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]}{N \sin[kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})]} \right]. \quad (2.39)$$

Substituindo as definições $\beta = kb \frac{a}{2}$ e $S = kb(\frac{d}{2} + \frac{a}{2})$, a expressão acima fica

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = NAA \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right] \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]. \quad (2.40)$$

Sabemos que a intensidade em cada ponto do anteparo é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude, isto é, $I \propto |\mathcal{N}|^2$. Substituindo \mathcal{N} , encontramos que

$$I = N^2 |A|^2 a^2 B \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]^2. \quad (2.41)$$

Escrevendo a equação acima em termos de I_0 , repetindo passos similares aqueles feitos na seção anterior, chegamos na seguinte expressão para a intensidade

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[\frac{\sin(NS)}{N \sin(S)} \right]^2. \quad (2.42)$$

Note que a expressão para a intensidade para o caso da difração em múltiplas fendas é a mesma quando se considera um número par ou ímpar de fendas. Dessa forma, a expressão (2.41) é uma expressão geral. Além disso, observe que o termo $[(\sin \beta)/\beta]^2$ refere-se à difração em uma fenda e o termo $[(\sin(NS))/(N \sin(S))]^2$ está relacionado a interferência para N fendas.

3 DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS EM MEIOS BIDIMENSIONAIS ANISOTRÓPICOS

3.1 Modelo da Massa Efetiva

Como já discutido neste trabalho, a anisotropia em um sistema implica propriedades diferentes para direções diferentes. Nos fenômenos ópticos (Ignatovich; Ignatovich, 2012; Liu; Li, 2015; Balakin; Zimdahl, 2005; Ranganath, 1994; Daloi *et al.*, 2022; Ertsyan, 2005; Sluijter *et al.*, 2009; Fleck; Feit, 1983; Martinez. Herrero *et al.*, 2001) e quânticos (Rudenko; Katsnelson, 2024; Zhao *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2019; Yang *et al.*, 2023; Araújo *et al.*, 2024), salientamos no Cap. 1 brevemente algumas das influências na propagação de feixes e nos padrões de difração. No Cap. 2, fizemos o estudo clássico do padrão de difração, tendo em vista as diferenças de posição das fendas e do número de fendas. Agora iremos abordar, dentro de um modelo analítico semi-clássico, a anisotropia no sistema de múltiplas fendas. Introduziremos a anisotropia ao sistema através do modelo de massa efetiva. Assim, podemos escrever energia total (Hamiltoniana) como

$$\mathcal{H} = \frac{\bar{p}_x^2}{2m_x} + \frac{\bar{p}_y^2}{2m_y}, \quad (3.1)$$

onde m_x e m_y são massas efetivas ao longo das direções x e y , respectivamente, e \bar{p}_x e \bar{p}_y são as componentes do momento referentes ao sistema de coordenadas \bar{S} , não-rotacionado, como mostrado na Fig. 5. Se rotacionarmos os eixos dos momentos em um sentido anti-horário, formando um ângulo θ em relação ao sistema de coordenadas anterior, obteremos um novo sistema de coordenadas, que chamaremos de S . Ao fazer isso, conseguimos escrever \bar{p}_x e \bar{p}_y em termos das novas componentes obtidas através da rotação (p_x e p_y), dadas por

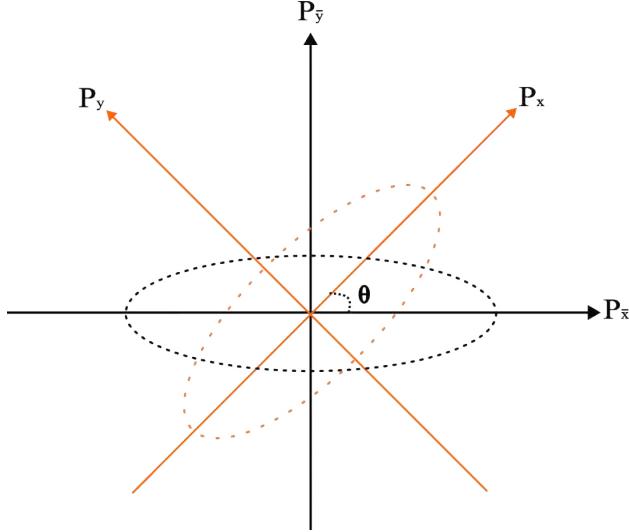
$$\bar{p}_x = p_x \cos \theta - p_y \sin \theta, \quad (3.2a)$$

$$\bar{p}_y = p_x \sin \theta + p_y \cos \theta. \quad (3.2b)$$

De tal forma que, podemos reescrever o Hamiltoniano (3.1) no novo sistema de coordenadas rotacionados, substituindo \bar{p}_x e \bar{p}_y pelas expressões (3.2a) e (3.2b), resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m_x} [p_x \cos \theta - p_y \sin \theta]^2 + \frac{1}{2m_y} [p_x \sin \theta + p_y \cos \theta]^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_x} + \frac{\sin^2 \theta}{m_y} \right) + \frac{p_y^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_x} + \frac{\cos^2 \theta}{m_y} \right) + p_x p_y \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{m_y} - \frac{1}{m_x} \right) \\ &= \frac{p_x^2}{2\mu_x} + \frac{p_y^2}{2\mu_y} + \frac{p_x p_y}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Figura 5 – Sistema de coordenadas no espaço dos momentos. A figura apresenta, em preto, os eixos dos momentos no sistema de coordenadas \bar{S} e em laranja os eixos dos momentos no sistema de coordenadas S , rotacionado por um ângulo θ em relação a \bar{S} .



Fonte: Elaborada pela autora 2024

onde

$$\frac{1}{\mu_x} = \frac{\cos^2 \theta}{m_x} + \frac{\sin^2 \theta}{m_y}, \quad (3.4a)$$

$$\frac{1}{\mu_y} = \frac{\sin^2 \theta}{m_x} + \frac{\cos^2 \theta}{m_y}, \quad (3.4b)$$

$$\frac{1}{\mu} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{m_y} - \frac{1}{m_x} \right). \quad (3.4c)$$

Partindo da nova expressão (3.3) para o Hamiltoniano, vamos encontrar uma relação entre as componentes do momento e da velocidade. Para isso, lembre que a velocidade é

$$v_{(x,y)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{(x,y)}}. \quad (3.5)$$

Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.5), obtemos que as componentes da velocidade são

$$v_x = \frac{p_x}{\mu_x} + \frac{p_y}{\mu}, \quad (3.6a)$$

$$v_y = \frac{p_x}{\mu} + \frac{p_y}{\mu_y}. \quad (3.6b)$$

O vetor velocidade $\mathbf{v} = v(\cos \alpha, \sin \alpha)$ é perpendicular a isoenergia, com componentes $v_q = \frac{\partial H}{\partial p_q}$. Dessa forma, temos uma relação entre a velocidade e os momentos da seguinte maneira

$$p_x = \frac{v}{\rho} \left[\mu_x \cos \alpha - \frac{\mu_x \mu_y \sin \alpha}{\mu} \right], \quad (3.7a)$$

$$p_y = \frac{v}{\rho} \left[\mu_y \sin \alpha - \frac{\mu_x \mu_y \cos \alpha}{\mu} \right], \quad (3.7b)$$

onde $\rho = 1 - \mu_x\mu_y/\mu^2$. Os termos entre colchetes nas Eqs. (3.7a) e (3.7b) correspondem a funções dependentes do ângulo α , dadas por

$$f_x(\alpha) = \mu_x \cos \alpha - \frac{\mu_x \mu_y}{\mu} \sin \alpha, \quad (3.8a)$$

$$f_y(\alpha) = \mu_y \sin \alpha - \frac{\mu_x \mu_y}{\mu} \cos \alpha. \quad (3.8b)$$

Assim, podemos reescrever os momentos como

$$p_{x(y)} = \frac{v}{\rho} f_{x(y)}(\alpha). \quad (3.9)$$

Perceba que o Hamiltoniano, Eq. (3.1), ou equivalentemente Eq. (3.3), envolve apenas o termo de energia cinética. Assim, comparando a Eq. (3.3), após substituir os termos das Eqs. (3.7a) e (3.7b), com o termo de energia cinética $E = mv^2/2$, temos que

$$\begin{aligned} E &= \frac{v^2}{2} \left[\frac{\mu_x \cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\mu_y \sin^2 \alpha}{\rho} - \frac{2\mu_x \mu_y}{\rho \mu} \sin \alpha \cos \alpha \right], \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$M_\alpha = \frac{\mu_x \cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\mu_y \sin^2 \alpha}{\rho} - \frac{2\mu_x \mu_y}{\rho \mu} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Dessa forma, vemos que a Eq. (3.10) descreve o termo de energia cinética com uma massa diferente M_α , carregando a anisotropia e rotação do sistema em relação ao sistema cristalino, isto é, $M_\alpha \equiv M_\alpha(\alpha, \theta)$. Daí, vemos que a velocidade pode ser expressa em função dessa nova massa e da energia, tal como

$$v = \sqrt{\frac{2E}{M_\alpha}}. \quad (3.12)$$

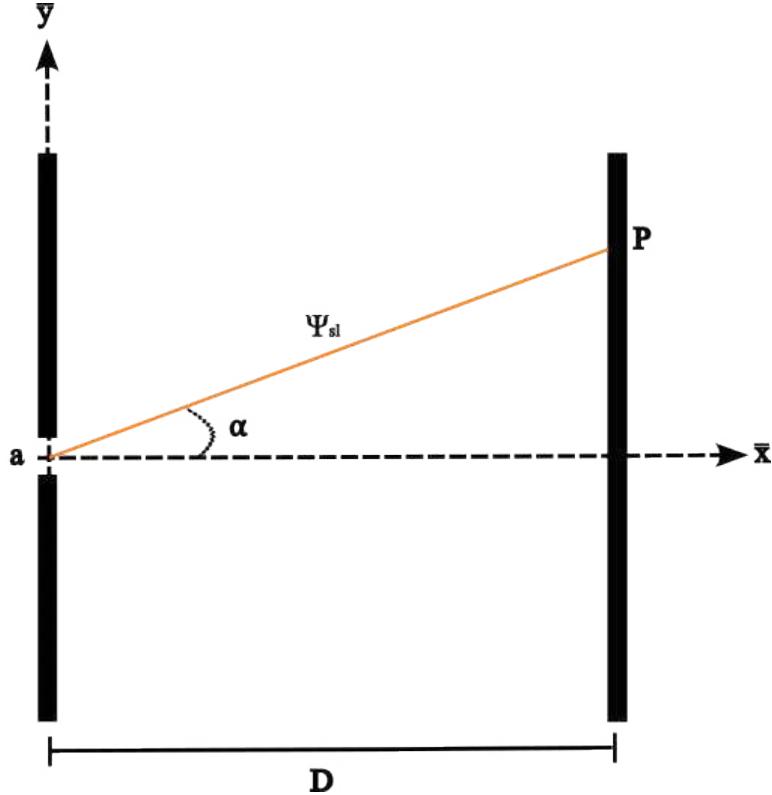
Substituindo a expressão da velocidade [Eq. (3.12)] na Eq. (3.9), obtemos os momentos em termos dessa massa modificada, tal como

$$p_{x(y)} = \sqrt{\frac{2E}{M_\alpha}} \frac{f_{x(y)}(\alpha)}{\rho}. \quad (3.13)$$

3.2 Difração em Uma Fenda

Para o estudo da difração em uma fenda no caso anisotrópico, adotaremos a condição de Fraunhofer, de forma que a distância entre a fenda e o anteparo D é muito maior que o tamanho da fenda a , isto é, $D \gg a$. A Figura 6 apresenta um sistema de uma fenda.

Figura 6 – Ilustração esquemática da difração em uma única fenda. Uma onda plana ao incidir sobre a fenda de tamanho a , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} e encontra um anteparo no ponto P , a uma distância D da tela.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Podemos escrever a função de onda como

$$\Psi_{sl} = \int_{-a/2}^{+a/2} C e^{iK_x D} e^{iK_y(y-y')} dy', \quad (3.14)$$

onde C é a amplitude da onda incidente e y é a direção na qual a fenda está limitada no sistema de coordenadas S. Resolvendo a integral da Eq. (3.14), temos que a função de onda passa a ser descrita como

$$\Psi_{sl} = C e^{iK_x D} e^{iK_y y} \frac{2}{K_y} \sin\left(\frac{a}{2} K_y\right). \quad (3.15)$$

Assim, a densidade de probabilidade para o caso de uma única fenda é

$$\begin{aligned} |\Psi_{sl}|^2 &= C^2 e^{-iK_x D} e^{-iK_y y} \frac{2}{K_y} \sin\left(\frac{a}{2} K_y\right) e^{+iK_x D} e^{+iK_y y} \frac{2}{K_y} \sin\left(\frac{a}{2} K_y\right), \\ &= C^2 \frac{4}{K_y^2} \sin^2\left(\frac{a}{2} K_y\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

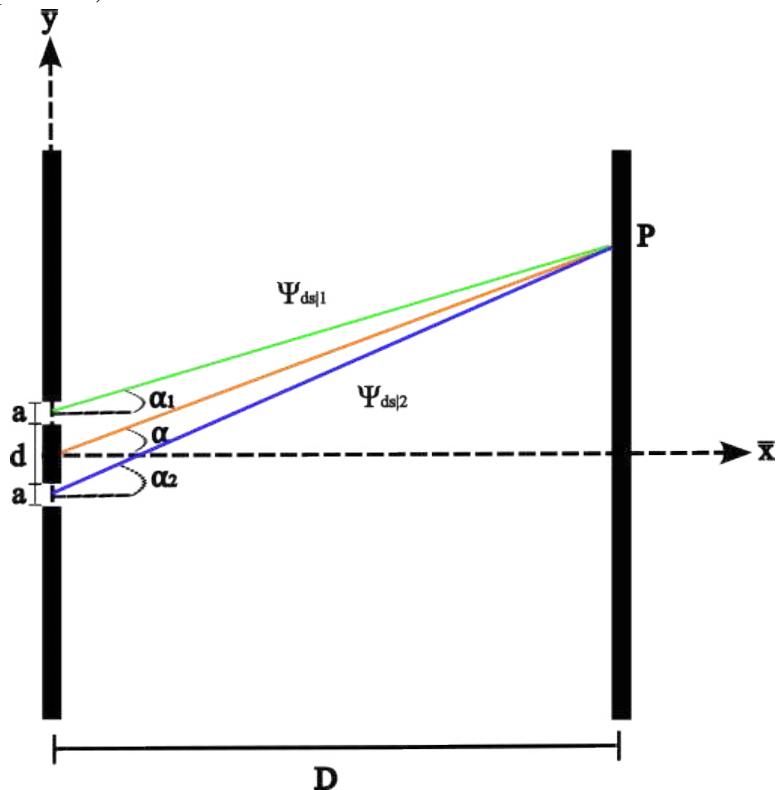
Definindo $\gamma = aK_y/2$, temos que a densidade de probabilidade fica

$$|\Psi_{sl}|^2 = C^2 a^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2}. \quad (3.17)$$

3.3 Difração em Duas Fendas

O esquemático apresentado na Figura 7 ilustra o sistema para duas fendas. A tela apresenta duas fendas de tamanho a , que distam uma da outra em um valor d . Ainda utilizando a condição de Fraunhofer, a tela onde as fendas estão posicionadas está a uma distância muito grande, D , do anteparo.

Figura 7 – Ilustração esquemática da difração em duas fendas. Uma onda plana ao incidir sobre as fendas de tamanho a e distância entre as fendas d , forma um ângulo α com o eixo \bar{x} e encontra um anteparo no ponto P , a uma distância D da tela.



Fonte: Elaborada pela autora, 2024

A função de onda pode ser escrita como a soma das ondas planas originadas de cada fenda, tal como

$$\Psi_{ds|1}^{in} = A e^{iK_{1x}D} e^{iK_{1y}(y-d/2)}, \quad (3.18a)$$

$$\Psi_{ds|2}^{in} = A e^{iK_{2x}D} e^{iK_{2y}(y+d/2)}. \quad (3.18b)$$

Logo, a função de onda do sistema é

$$\Psi_{ds}^{in} = A e^{iK_{1x}D} e^{iK_{1y}(y-d/2)} + A e^{iK_{2x}D} e^{iK_{2y}(y+d/2)}, \quad (3.19)$$

onde (K_{1x}, K_{1y}) e (K_{2x}, K_{2y}) são os vetores de momento para as fendas 1 e 2, A é uma constante e representa a amplitude das ondas incidentes, d é a distância entre as fendas e y é a direção, no

sistema de coordenadas S , onde as fendas estão limitadas. Cada uma das ondas planas, $\Psi_{ds|1}^{in}$ e $\Psi_{ds|2}^{in}$, formam um ângulo, α_1 e α_2 , respectivamente, com o eixo \bar{x} , dados por

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y - d/2}{D} \right), \quad (3.20a)$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y + d/2}{D} \right). \quad (3.20b)$$

Partindo da expressão encontrada para a função de onda, obtem-se a densidade de probabilidade, dada por

$$\begin{aligned} |\Psi_{ds}^{in}|^2 &= A^2 \left(e^{iK_{1x}D} e^{iK_{1y}(y-d/2)} + e^{iK_{2x}D} e^{iK_{2y}(y+d/2)} \right) \left(e^{-iK_{1x}D} e^{-iK_{1y}(y-d/2)} + e^{-iK_{2x}D} e^{-iK_{2y}(y+d/2)} \right) \\ &= 2A^2 \left\{ 1 + \cos \left[(K_{1x} - K_{2x})D + (K_{1y} - K_{2y})y - (K_{1y} + K_{2y})\frac{d}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Os máximos de interferência ocorrem quando o cosseno é igual a 1, indicando uma interferência construtiva. Dessa forma, o argumento dentro do cosseno da Eq. (3.21) deve ser

$$(K_{1x} - K_{2x})D + (K_{1y} - K_{2y})y - (K_{1y} + K_{2y})\frac{d}{2} = 2n\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (3.22)$$

Já os mínimos de interferência ocorrem quando o cosseno é igual a -1 , indicando uma interferência destrutiva. Dessa forma, o argumento dentro do cosseno da Eq. (3.21) deve ser

$$(K_{1x} - K_{2x})D + (K_{1y} - K_{2y})y - (K_{1y} + K_{2y})\frac{d}{2} = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (3.23)$$

Como dito anteriormente, (K_{1x}, K_{1y}) e (K_{2x}, K_{2y}) são os vetores de momento para as fendas 1 e 2, respectivamente. Pela relação de *de Broglie*, $p_i = \hbar k_i$, então $\hbar(K_{1x} - K_{2x}) = p_{1x} - p_{2x}$, $\hbar(K_{1y} - K_{2y}) = p_{1y} - p_{2y}$ e $\hbar(K_{1y} + K_{2y}) = p_{1y} + p_{2y}$. Substituindo a Eq. (3.13) nas Eqs. (3.22) e (3.23), obtemos expressões generalizadas para as condições de ocorrência da interferência em sistemas anisotrópicos, dadas por:

$$\left[\frac{f_{1x}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} - \frac{f_{2x}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] D + \left[\frac{f_{1y}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} - \frac{f_{2y}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] y - \left[\frac{f_{1y}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} + \frac{f_{2y}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] \frac{d}{2} = \frac{2n\pi\hbar\rho}{\sqrt{2E}}, \quad (3.24a)$$

$$\left[\frac{f_{1x}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} - \frac{f_{2x}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] D + \left[\frac{f_{1y}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} - \frac{f_{2y}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] y - \left[\frac{f_{1y}(\alpha_1)}{\sqrt{M_{\alpha 1}}} + \frac{f_{2y}(\alpha_2)}{\sqrt{M_{\alpha 2}}} \right] \frac{d}{2} = \frac{2(n + 1/2)\pi\hbar\rho}{\sqrt{2E}}. \quad (3.24b)$$

A densidade de probabilidade resultante da combinação dos efeitos de interferência e difração em um sistema de dupla fenda anisotrópico é dada pelo produto das densidades de

probabilidade de difração para o caso de uma fenda e de interferência para o caso de dupla fenda, isto é:

$$|\Psi_{ds}^{in,di}|^2 = |\Psi_{sl}|^2 |\Psi_{ds}^{in}|^2, \quad (3.25)$$

onde $|\Psi_{sl}|^2$ e $|\Psi_{ds}^{in}|^2$ são dados nas Eqs. (3.17) e (3.21), respectivamente. Substituindo cada uma das contribuições, obtemos

$$|\Psi_{ds}^{in,di}|^2 = C^2 a^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} 2A^2 [1 + \cos(\phi)], \quad (3.26)$$

onde $\phi = (K_{1x} - K_{2x})D + (K_{1y} - K_{2y})y - (K_{1y} - K_{2y})\frac{d}{2}$ corresponde à diferença de fase. Da relação trigonométrica

$$1 + \cos(\phi) = 2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right), \quad (3.27)$$

e chamando $\beta = \frac{\phi}{2}$ e $I_0 = 4A^2 C^2 a^2$, temos que a Eq. (3.26) pode ser reescrita como

$$|\Psi_{ds}^{in,di}|^2 = I_0 \cos^2 \beta \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2}. \quad (3.28)$$

O resultado da Eq. (3.28) corresponde à intensidade de difração para o caso da dupla fenda. Note que toda a anisotropia do sistema se encontra no parâmetro γ , que por sua vez depende de k_y , e este por fim, dependem de θ e α .

4 RESULTADOS

4.1 Isotropia

Ao estudar a difração em múltiplas fendas para um sistema isotrópico, vimos que a expressão para a intensidade no caso de múltiplas fendas é a mesma para um número par ou ímpar de fendas. Se o número de fendas N for igual a 1, a Eq. (2.41) se reduz a

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2. \quad (4.1)$$

Se tomarmos $N = 2$, veremos que o resultado será o mesmo obtido para a difração em dupla fenda, isto é:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \cos^2(S). \quad (4.2)$$

Esses resultados demonstram que a Eq. (2.42) é a expressão geral para a intensidade de difração em um meio isotrópico.

É interessante observar o que acontece com a intensidade e a amplitude quando saímos de um sistema com uma única fenda para um sistema com duas fendas. Observe as Eqs. (2.7) e (2.14). Note que a intensidade para a difração em dupla fenda é quatro vezes a intensidade para uma única fenda. Isso ocorre porque as novas frentes de ondas formadas após a onda inicial passar pelas fendas são irradiadas em fase. Dessa forma, a amplitude total será a soma das amplitudes correspondentes a cada fenda, que será o dobro em relação ao sistema de uma fenda. Já a intensidade, que corresponde ao módulo quadrado da amplitude, equivalerá ao quádruplo da intensidade do sistema de uma fenda. Observe que a expressão Eq. (2.30) prevê essa relação de proporcionalidade das intensidades com o número de fendas N através da relação N^2 .

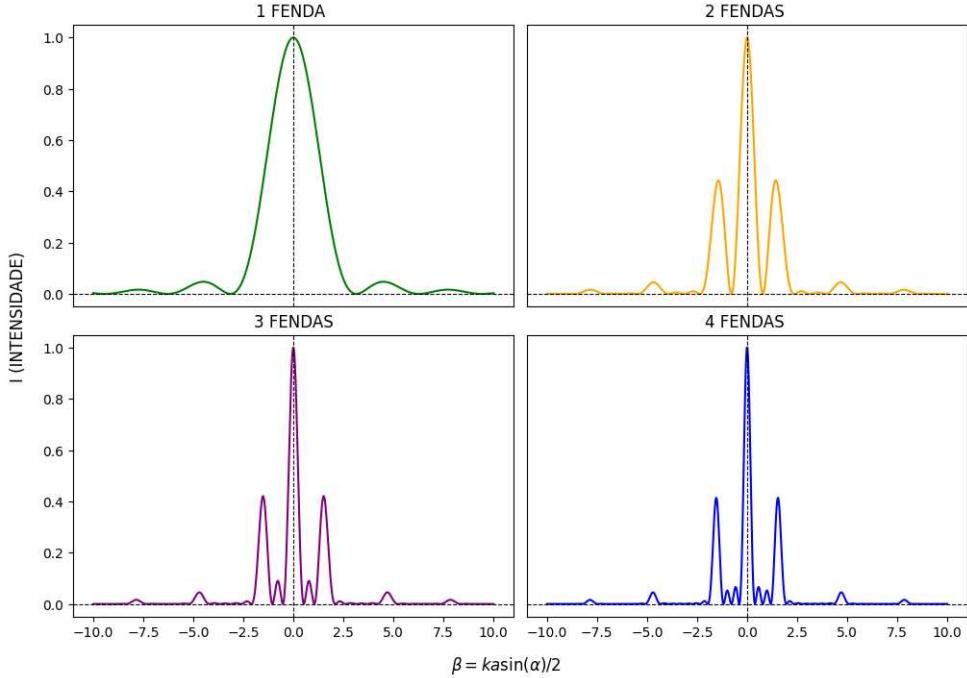
4.1.1 Análise do parâmetro β

As intensidades de difração para um sistema isotrópico para os casos de $N = 1, 2, 3, 4$ fendas estão ilustradas na Fig. 8. Vimos que a intensidade é dada por

$$I = 4N^2|A|^2D^2B \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2. \quad (4.3)$$

Nota-se pela Fig. 8 que os pontos máximos de intensidade ocorrem em $\beta = 0$. Para entender esta questão, vamos analisar o caso limite de $\beta \rightarrow 0$. Já discutimos anteriormente que no limite de

Figura 8 – Intensidade como função da diferença de fase para diferentes números de fendas. Esses resultados foram obtidos definindo os seguintes parâmetros: $a/2 = 2$, $d = a$ e $k = 10$, onde $a/2$ é o tamanho da fenda dividido por dois, b é a distância entre as fendas, e k é o vetor de onda.



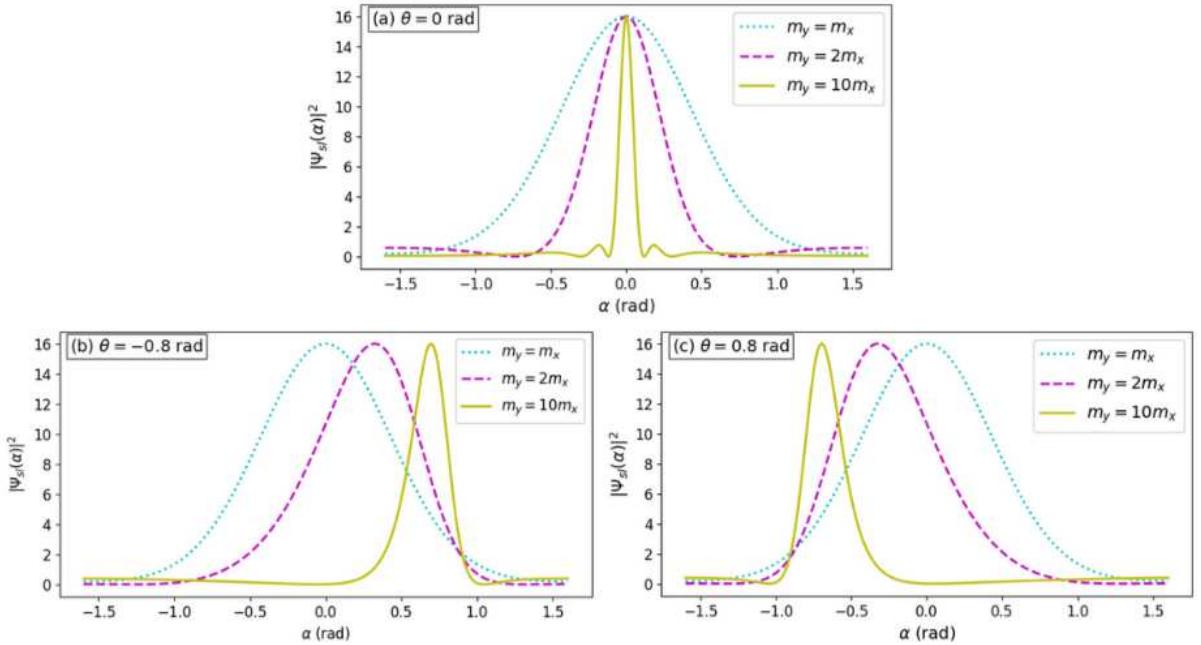
Fonte: Elaborada pela autora, 2024

β tendendo a zero, temos que $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1$. Tomando as constantes $A = B = a/2 = N = 1$ apenas como um exemplo simples para uma rápida compreensão, vemos que o máximo de intensidade é $I = 4$ em $\beta = 0$. Além disso, da definição de $\beta = k \sin(\alpha)/2$, temos que para que β seja igual a zero, sendo k e a diferentes de zero, então o próprio seno deve ser igual a zero. Portanto:

$$\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Ao fazer a análise do sistema, tomamos o limite paraxial, com $\alpha \rightarrow 0$, de forma a limitar a intensidade a essa região. Dessa forma, como estamos lidando com ângulos muito pequenos, podemos assumir que $\sin(\alpha) \approx \alpha$. O que se pode observar através da Fig. 8 é que, dentro dessa região de α pequeno, a intensidade é mais proeminente e, à medida que nos afastamos desse limite, a intensidade se dispersa. Observa-se que, com o aumento do módulo de β , os picos secundários diminuem rapidamente tanto à esquerda quanto à direita do pico central. Os mínimos de intensidade são, portanto, obtidos para $\beta = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$, de forma que $I = 0$.

Figura 9 – Dependência do padrão de difração para uma fenda com o ângulo da difração α , obtido pela densidade de probabilidade. Fixou-se os seguintes valores de θ : (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Também foram definidos os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$ e $m_x = 1$. As curvas ciano pontilhada, magenta tracejada e amarela sólida representam, respectivamente, $m_y = m_x$, $m_y = 2m_x$ e $m_y = 10m_x$.



Fonte: Elaborada pela autora, 2025.

4.2 Anisotropia

4.2.1 Uma fenda

A Fig. 9 apresenta a dependência da densidade de probabilidade em relação ao ângulo α para diferentes valores θ . As curvas ciano pontilhada, magenta tracejada e amarela sólida representam, respectivamente, $m_y = m_x$, $m_y = 2m_x$ e $m_y = 10m_x$. Para $m_y = m_x$, temos um sistema isotrópico. Assim, as curvas em ciano pontilhada associadas aos resultados para $m_y = m_x$ não são afetadas pela escolha de θ , como era de se esperar, apresentando assim o mesmo comportamento nos painéis (a) a (c) da Fig. 9.

Para $\theta = 0$ [Fig. 9(a)], todas as curvas possuem máximo central em $\alpha = 0$. Para $\theta = -0.8$ e $\theta = 0.8$, os máximos centrais para as curvas magenta e amarela são deslocados à direita em $\theta = -0.8$ e à esquerda em $\theta = 0.8$, apresentando a dependência desses sistemas com a escolha do θ , mostrando assim que θ dita a direção da difração.

As curvas apresentadas nesses gráficos exibem comportamento típico do padrão de difração em fenda única. Ao introduzir a anisotropia ao sistema, observamos mudanças na largura do pico central, uma vez que a densidade de probabilidade se concentra em uma direção

específica. Veja que quanto mais aumentamos a anisotropia do sistema, mais estreito fica o pico central. Além disso, observamos, também, o deslocamento desses picos, que ocorre devido a rotação do eixo de anisotropia em relação ao eixo do sistema.

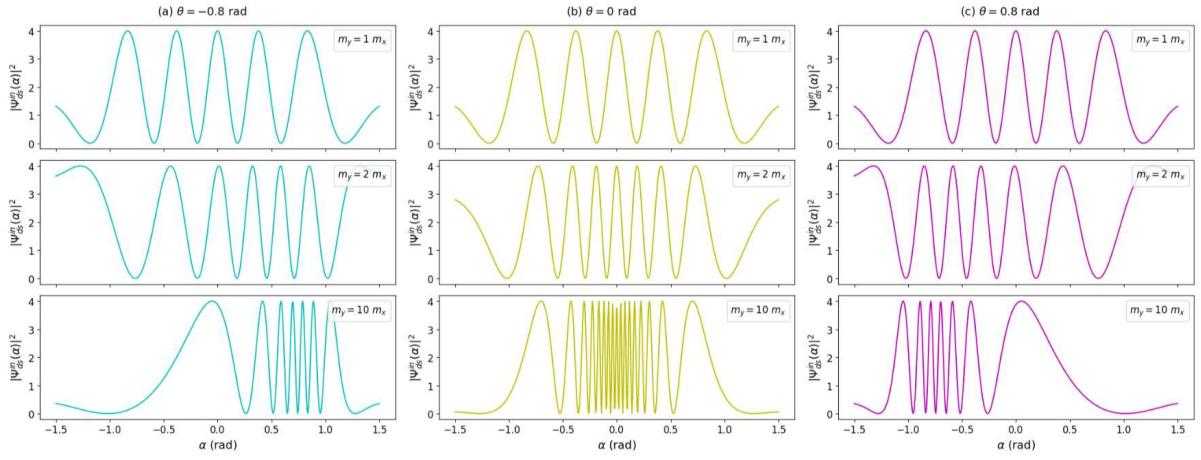
4.2.2 Dupla fenda

A Fig. 10 apresenta gráficos que ilustram o padrão de interferência para dupla fenda em função de α para vários valores de θ e razões m_y/m_x . As curvas em ciano representam os resultados para o valor fixo $\theta = -0.8$, curvas em amarelo representam os resultados para o valor fixo $\theta = 0$ e curvas em magenta representam os resultados para o valor fixo $\theta = 0.8$. Os pontos de máximos correspondem às franjas claras do padrão de interferência. Para $\theta = 0$, tem-se 5 franjas claras para $m_y = m_x$, 7 franjas claras para $m_y = 2m_x$ e 17 franjas claras para $m_y = 10m_x$. Para $\theta = -0.8$, tem-se 5 franjas claras para $m_y = m_x$, 7 franjas claras para $m_y = 2m_x$ e 7 franjas claras para $m_y = 10m_x$. Para $\theta = 0.8$, tem-se 5 franjas claras para $m_y = m_x$, 7 franjas claras para $m_y = 2m_x$ e 7 franjas claras para $m_y = 10m_x$.

Assim como observado para o caso de uma única fenda, o ângulo θ influencia na direção da intensidade da interferência no caso da anisotropia, porém, para o sistema isotrópico, não há influência alguma, de forma que os máximos permanecem igualmente espaçados. Quando $\theta = 0$, os máximos, franjas claras, ficam concentrados no centro do gráfico, dentro do intervalo $[-0.5, +0.5]$ de α . Isso fica mais evidente no caso em que a anisotropia é mais intensa, $m_y = 10m_x$. Quando $\theta = -0.8$, há um deslocamento à direita dessa concentração de máximos e quando $\theta = 0.8$, há um deslocamento à esquerda.

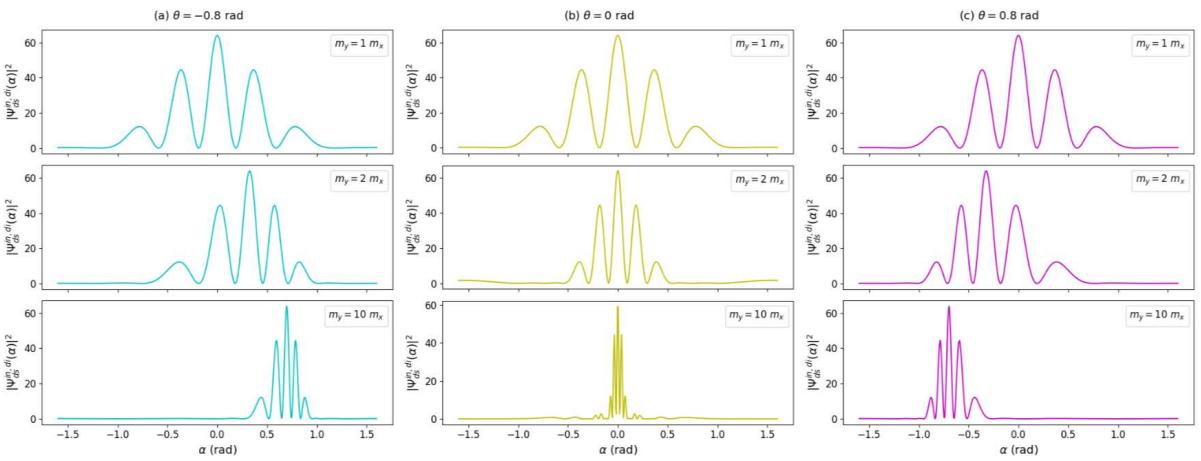
A Fig. 11 apresenta gráficos que mostram os padrões de interferência e difração para dupla fenda em função de α para vários valores de θ e razões m_y/m_x . Como visto nos outros gráficos, para o efeito combinado de interferência e difração em um sistema de dupla fenda, o ângulo θ influencia na direção dos picos, para o caso anisotrópico. Quanto maior a anisotropia do sistema, isto é, a razão m_y/m_x , mais estreitos se tornam os picos e maior é a concentração desse picos em um determinado ponto do gráfico.

Figura 10 – Dependência do padrão de interferência para dupla fenda, obtido pela densidade de probabilidade, em função do ângulo α para: (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Definiu-se os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$, $A = 1$, $D = 20$, $y = 10$, $d = 12$ e $m_x = 1$.



Fonte: Elaborada pela autora, 2025.

Figura 11 – Dependência do padrão de interferência e difração, obtido pela densidade de probabilidade, em função do ângulo α para: (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = -0.8$ e (c) $\theta = 0.8$. Definiu-se os seguintes valores para as constantes: $\hbar = 1$, $a = 4$, $\rho = 1$, $C = 1$, $E = 1$, $A = 1$, $D = 20$, $y = 10$, $d = 12$ e $m_x = 1$.



Fonte: Elaborada pela autora, 2025.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho estudamos a difração em sistemas isotrópicos e os efeitos da anisotropia na difração. No primeiro caso, derivamos matematicamente expressões para amplitude e intensidade de difração, tomando os casos particulares de uma e duas fendas. Posteriormente, estendemos o caso para multifendas e chegamos a uma expressão geral para a intensidade de difração. No segundo caso, o estudo foi feito para uma e duas fendas, utilizando o modelo semiclássico de massa efetiva, introduzindo a anisotropia do sistema nas suas massas efetivas dependentes das direções. As expressões obtidas foram fundamentadas pelas definições de função de onda e densidade de probabilidade.

Além da derivação matemática das expressões, foram também produzidos gráficos que (i) relacionam a intensidade com a diferença de fase sobre dois ($\beta = \phi/2$) para o caso isotrópico; (ii) relacionam a densidade de probabilidade com o ângulo de rotação dos eixos dos momentos e o ângulo da difração, para o caso anisotrópico, tomando os seguintes graus de anisotropia: $m_y/m_x = 1$, $m_y/m_x = 2$ e $m_y/m_x = 10$. A análise do comportamento da difração através da plotagem de gráficos permitiu observar como a anisotropia afeta o padrão de interferência e difração do sistema. O aumento da anisotropia ocasionou no estreitamento e concentração de máximos e mínimos em determinadas regiões, tendo sua direção e deslocamento influenciados pelo ângulo de rotação θ .

Este estudo se faz importante devido à sua aplicação em áreas da física no que diz respeito à física da matéria condensada e à física de semicondutores. O controle da anisotropia através desses parâmetros, θ e m_y/m_x , permite a manipulação das propriedades de transporte das partículas em sistemas semicondutores anisotrópicos, como, por exemplo, materiais 2D e gás de elétrons 2D.

Como continuidade deste trabalho, pretendemos: (i) explorar os resultados do sistema anisotrópico para o caso de multifendas; (ii) investigar os efeitos da difração em meios anisotrópicos sob a influência de um campo externo, analisando as implicações físicas e as possíveis modificações nos padrões de difração; (iii) aprofundar o estudo de análogos ópticos em materiais 2D anisotrópicos, utilizando por exemplo os parâmetros do fosforeno.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, F. R. V.; COSTA, D. R. da; SILVA, F. S. L. da; SOUSA, I. V. de; PEREIRA, J. M. Single- and double-slit electron diffraction in an anisotropic two-dimensional medium. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 110, p. 085424, Aug 2024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.110.085424>. Acesso em: 20 jun. 2025.
- BALAKIN, A. B.; ZIMDAHL, W. Optical metrics and birefringence of anisotropic media. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 37, n. 10, p. 1731–1751, 2005. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10582-006-0128-0>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- CHAUDHARY, V.; NEUGEBAUER, P.; MOUNKACHI, O.; LAHBABI, S.; FATIMY, A. E. Phosphorene—an emerging two-dimensional material: Recent advances in synthesis, functionalization, and applications. **2D Materials**, IOP Publishing, v. 9, n. 3, p. 032001, 2022. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1583/ac6dc2>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- DALOI, N.; KUMAR, P.; DEY, T. N. Guiding and polarization shaping of vector beams in anisotropic media. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 105, p. 063714, Jun 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.105.063714>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- ERITSYAN, O. On the optical properties of anisotropic media in the presence of negative components of dielectric and (or) magnetic tensors. **Crystallography Reports**, Springer, v. 50, n. 3, p. 465–470, 2005. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1134/1.1927611>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- FAPEMIG, R. D. **O que é um material 2D?** 2024. Disponível em: <https://rede2d.ufop.br/news/o-que-%C3%A9-um-material-2d>. Acesso em: 15 jul. 2025. Disponível em: <https://rede2d.ufop.br/news/o-que-%C3%A9-um-material-2d>.
- FLECK, J.; FEIT, M. Beam propagation in uniaxial anisotropic media. **Journal of the Optical Society of America**, OSA, v. 73, n. 7, p. 920–926, 1983. Disponível em: <https://opg.optica.org/josa/abstract.cfm?uri=josa-73-7-920>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física:** óptica e física moderna. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HERRERO, R. M.; MOVILLA, J. M.; MEJIAS, P. M. Beam propagation through uniaxial anisotropic media: global changes in the spatial profile. **Journal of the Optical Society of America A**, Optical Society of America, v. 18, n. 8, p. 2009–2014, 2001. Disponível em: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?uri=josaa-18-8-2009>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- IGNATOVICH, F. V.; IGNATOVICH, V. K. Optics of anisotropic media. **Physics-Uspekhi**, IOP Publishing, v. 55, n. 7, p. 709, 2012. Disponível em: https://iopscience.iop.org/article/10.3367/UFNe.0182.201207f.0759/meta?casa_token=bE72k1j9KjIAAAAAA:qQde96UvNsKsA_Iri39LnjeDPsyhjshNz2lpTh6v2eldAWBr1o2kIBltC1BESbIBov_3C-LKozOBdm2HWdIzM4t9KM1F. Acesso em: 16 jul. 2025.

- LI, L.; HAN, W.; PI, L.; NIU, P.; HAN, J.; WANG, C.; SU, B.; LI, H.; XIONG, J.; BANDO, Y.; ZHAI, T. Emerging in-plane anisotropic two-dimensional materials. **InfoMat**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 54–73, 2019. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/inf2.12005>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- LIU, F.; LI, J. Gauge field optics with anisotropic media. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 114, p. 103902, Mar 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.103902>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- LIU, H.; NEAL, A. T.; ZHU, Z.; LUO, Z.; XU, X.; TOMÁNEK, D.; YE, P. D. Phosphorene: an unexplored 2d semiconductor with a high hole mobility. **ACS nano**, ACS Publications, v. 8, n. 4, p. 4033–4041, 2014. Disponível em: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/nn501226z>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. Ponta Grossa-Paraná: Editora UEPG, 2004. v. 3. ISBN 85-86941-77-8.
- NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K.; MOROZOV, S. V.; JIANG, D.; KATSNELSON, M. I.; GRIGORIEVA, I. V.; DUBONOS, S. V.; FIRSOV, A. A. Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 438, n. 7065, p. 197–200, 2005. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nature04233>. Acesso em: 26 mar. 2025.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**: ótica, relatividade, física quântica. [S. l.]: Editora Blucher, 2014. v. 4.
- PEREIRA, J. M.; KATSNELSON, M. I. Landau levels of single-layer and bilayer phosphorene. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 92, p. 075437, Aug 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.075437>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- RANGANATH, G. S. Optics of absorbing anisotropic media. **Current Science**, JSTOR, v. 67, n. 4, p. 231–237, 1994. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/24095731>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- RUDENKO, A. N.; KATSNELSON, M. I. Anisotropic effects in two-dimensional materials. **2D Materials**, IOP Publishing, v. 11, n. 4, p. 042002, 2024. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1583/ad64e1>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- SLUIJTER, M.; BOER, D. K. de; URBACH, H. P. Ray-optics analysis of inhomogeneous biaxially anisotropic media. **Journal of the Optical Society of America A**, Optical Society of America, v. 26, n. 2, p. 317–329, 2009. Disponível em: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?uri=josaa-26-2-317>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- SOUZA, D. J. P. de; CASTRO, L. V. de; COSTA, D. R. da; PEREIRA, J. M.; LOW, T. Multilayered black phosphorus: From a tight-binding to a continuum description. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 96, p. 155427, Oct 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.155427>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. **Física Moderna**. 6. ed. [S. l.]: LTC, 2014. ISBN 978-8521626864.

YANG, Z.; YANG, Z.; LIU, L.; LI, X.; LI, J.; XIONG, C.; MAI, X.; TONG, H.; LI, Y.; XUE, K.-H.; XUE, X.; XU, M.; LI, D.; ZHOU, P.; MIAO, X. Anisotropic mass transport enables distinct synaptic behaviors on 2d material surface. **Materials Today Electronics**, Elsevier, v. 5, p. 100047, 2023. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772949423000232>. Acesso em: 16 jul. 2025.

ZHAO, S.; DONG, B.; WANG, H.; WANG, H.; ZHANG, Y.; HAN, Z. V.; ZHANG, H. In-plane anisotropic electronics based on low-symmetry 2d materials: progress and prospects. **Nanoscale Advances**, Royal Society of Chemistry, v. 2, n. 1, p. 109–139, 2020. Disponível em: <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/2020/na/c9na00623k>. Acesso em: 17 jul. 2025.