



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LETÍCIA DE CARVALHO PONTES MARANHÃO

**INFLAÇÃO E REAQUECIMENTO: UMA REVISÃO COMPRENSIVA E ANÁLISE DE
MODELOS DE CAMPO ÚNICO À LUZ DE OBSERVAÇÕES**

**FORTALEZA
2025**

LETÍCIA DE CARVALHO PONTES MARANHÃO

**INFLAÇÃO E REAQUECIMENTO: UMA REVISÃO COMPREENSIVA E ANÁLISE DE
MODELOS DE CAMPO ÚNICO À LUZ DE OBSERVAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física do Centro de
Ciências da Universidade Federal como requi-
sito parcial à obtenção do grau de Bacharel em
Física.

Orientador: Prof. Geová Maciel de Alencar Fi-
lho

FORTALEZA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M26i Maranhão, Letícia de Carvalho Pontes.

Inflação e Reaquecimento : uma revisão compreensiva e análise de modelos de campo único à luz de observações. / Letícia de Carvalho Pontes Maranhão. – 2025.

74 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Inflação cósmica. 2. Reaquecimento. 3. Modelos inflacionários. 4. Inflação de campo único. I. Título.
CDD 530

LETÍCIA DE CARVALHO PONTES MARANHÃO

**INFLAÇÃO E REAQUECIMENTO: UMA REVISÃO COMPREENSIVA E ANÁLISE DE
MODELOS DE CAMPO ÚNICO À LUZ DE OBSERVAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física do Centro de Ci-
ências da Universidade Federal como requisito
parcial à obtenção do grau de Bacharel em Fí-
sica.

Aprovada em 17/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Carlos Alberto de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Andrey Chaves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. João Milton Pereira Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha mãe e eterna heroína, Gerda.
Ao meu pai, René, e minha segunda mãe,
Greyce.
Aos meus amigos, felizmente numerosos de-
mais para listar.
Ao meu tesouro, Guilherme.

RESUMO

O lançamento de projetos como *Planck* (ESA), *BICEP/Keck* (ESA) e SPT (NSF) fomentou, na última década, o rápido avanço da cosmologia observacional. Tendo em vista a forte influência do período inflacionário sobre o desenvolvimento do espectro atual da radiação cósmica de fundo (CMB, do inglês *Cosmic Background Radiation*), constata-se a demanda por uma revisão atualizada da literatura existente acerca do assunto. Este trabalho visa a agregar detalhadamente todos os resultados relevantes relativos à inflação cósmica e à fase subsequente de reaquecimento, funcionando como ferramenta pedagógica para estudantes e docentes. A análise é restrita à inflação de campo único. É fornecida inicialmente uma introdução geral da cosmologia inflacionária, e são derivadas as perturbações do inflaton φ e da métrica $g_{\mu\nu}$. Em seguida, são discutidas as fases de pré-aquecimento, desintegração final do inflaton e transição para o equilíbrio térmico. Simulações de rede são empregadas para análise numérica. Ao final, foram estudados seis modelos inflacionários selecionados dentre os disponíveis na biblioteca compartilhada ASPIC, comparando suas previsões com as observações do espectro de anisotropias da CMB. Os modelos de Starobinsky e Higgs (SI-HI, RCHI) foram favorecidos, seguidos pela inflação de colina nas versões modulada e à quarta potência (MHI, SFI₄). Os dados são provenientes de Planck-2018+BAO+BK18.

Palavras-chave: inflação cósmica; reaquecimento; modelos inflacionários; inflação de campo único.

ABSTRACT

The launch of projects such as *Planck* (ESA), *BICEP/Keck* (ESA) e SPT (NSF) has fostered, within the last decade, significant breakthroughs in observational cosmology. Given the crucial influence of the inflationary period over the development of the current spectrum of cosmic background radiation (CMB), a demand for an updated review of the existing literature on this subject is noticed. This work aims to extensively aggregate all previous results relevant to cosmic inflation and the ensuing reheating phase, acting as a pedagogical tool for students and professors. The analysis is restricted to single-field inflation. A general introduction to inflationary cosmology is initially provided, and perturbations of the inflaton φ and its metric $g_{\mu\nu}$ are derived. Subsequently, the phases of pre-heating, inflaton disintegration and transition to thermal equilibrium are discussed. Lattice simulations are employed for numerical analysis. Finally, six inflationary models are studied, selected among the available in the ASPIC shared library, and their predictions are compared with the observed CMB anisotropy spectrum. The Starobinsky and Higgs models (SI-HI, RCHI) were favored, followed by hilltop inflation in its mutated and quartic versions (MHI, SFI₄). The data is sourced from Planck-2018+BAO+BK18..

Keywords: cosmic inflation; reheating; inflationary models; single-field inflation.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Fator de escala
c	Velocidade da luz
\hbar	Constante de Planck reduzida
G	Constante gravitacional, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}$.
m_{pl}	Massa de Planck reduzida, $m_{\text{pl}} = (c\hbar/8\pi G)^{1/2} = 2,43 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$
k	Momento co-movente
$k_{\text{fís}}$	Momento físico, $k_{\text{fís}} = k/a$
τ	Tempo conforme
H	Fator de Hubble
\mathcal{H}	Fator de Hubble no tempo conforme
N	Número de <i>e-foldings</i>
w	Equação de estado
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
R	Escalar de Ricci
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
T_{re}	Temperatura ao final do reaquecimento
T_{pl}	Temperatura de Planck, $T_{\text{pl}} = m_{\text{pl}}c^2/k_B = 1,42 \cdot 10^{32} \text{ K}$
g_S	Graus de liberdade relativísticos
\mathcal{R}	Perturação de curvatura co-movente
ζ	Perturação de curvatura em densidade uniforme

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	A TEORIA INFLACIONÁRIA	12
2.1	Limitações do Big Bang clássico.....	12
2.1.1	<i>Problema da planicidade</i>	12
2.1.2	<i>Problema do horizonte</i>	12
2.1.3	<i>Problema dos monopolos</i>	13
2.2	A cosmologia inflacionária	14
2.2.1	<i>Fundamentos gerais</i>	14
2.2.2	<i>Solução dos problemas observacionais</i>	16
3	PERTURBAÇÕES.....	18
3.1	Introdução e classes de perturbação	18
3.2	Perturbações de um campo sob expansão	19
3.3	Perturbações métricas.....	20
3.3.1	<i>Perturbações de curvatura</i>	22
3.3.2	<i>Ondas gravitacionais primordiais</i>	25
4	REAQUECIMENTO.....	28
4.1	Abordagem perturbativa.....	28
4.2	Pré-aquecimento: abordagem quântica.....	30
4.2.1	<i>Análise de Floquet e equação de Mathieu.....</i>	30
4.2.2	<i>Ressonâncias estreita e larga</i>	33
4.2.3	<i>Expansão e ressonância estocástica.....</i>	35
4.3	Transição para a termalização	36
4.3.1	<i>Reaquecimento não linear: fase transiente.....</i>	36
4.3.2	<i>Fase de turbulência e equilíbrio térmico</i>	39
5	MODELOS INFLACIONÁRIOS	44
5.1	Inflação de Campo Grande (LFI).....	45

5.2	Inflação de Campo Pequeno (SFI)	46
5.3	Inflação Natural (NI).....	48
5.4	Inflação de Colina Modulada (MHI)	50
5.5	Inflação de Starobinsky-Higgs (SI, HI)	51
5.5.1	<i>Modelo original de Starobinsky</i>	51
5.5.2	<i>Modelo de Higgs</i>	53
5.6	Inflação de Higgs com Correção Radiativa (RCHI).....	54
5.7	Análise sob observação	55
6	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS.....	59
	APÊNDICE A — DERIVAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES MÉTRICAS	69
	APÊNDICE B — EXPOENTE DE FLOQUET	71

1 INTRODUÇÃO

Introduzida em 1979 por Alan Guth [1], a teoria da inflação cósmica tem como principal objetivo explicar a dissonância entre o espectro atual da CMB e a cosmologia clássica. Esta é baseada no princípio cosmológico, que descreve um universo homogêneo e isotrópico — isto é, invariante sob translação e rotação. Isso é expresso pela métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} r^2 (d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1)$$

A curvatura $\kappa = 0, -1$ ou $+1$ resulta em um universo plano, hiperbólico (aberto) ou esférico (fechado), respectivamente. O fator de escala $a(t)$ é adimensional e representa, em termos simples, um "raio" ou "tamanho" do universo, cuja evolução é determinada pelas equações de campo de Einstein. Devido às simetrias da métrica, é possível tratar o espaço-tempo FLRW como um fluido ideal, descrito unicamente por uma pressão P e uma densidade ρ , definidas em função do tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$:

$$\rho(t) = T^{00}, \quad p(t) = -\delta_{ij} T^{ij} a^2(t). \quad (2)$$

Isso permite a redução das equações de campo a duas únicas expressões não nulas, denominadas equações de Friedmann e Raychaudhuri:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho}{3m_{pl}^2} - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(\rho + 3P)}{6m_{pl}^2}. \quad (4)$$

Assume-se $c = \hbar = 1$ (unidades naturais). Usando a conservação de energia ($T^{0\mu}_{,\mu} = 0$) em (3) e (4), chegamos a

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (5)$$

O comportamento de $a(t)$, desse modo, depende da relação entre P and ρ . Os principais modelos supõem uma equação de estado linear da forma $P = w\rho$. Usando (5), obtemos $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ e, como resultado,

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w)}, & w \neq -1 \\ e^{Ht}, & w = -1. \end{cases} \quad (6)$$

Na cosmologia padrão, as fontes gravitacionais são divididas entre matéria sem pressão ($w = 0$, também chamada de *poeira*), radiação ($w = 1/3$) e energia de vácuo ($w = -1$). Como suas densidades evoluem em ritmos diferentes, é ocasionalmente útil expressar (3) em termos das

densidades parciais atuais $\rho_{i,0}$:

$$H^2 = \frac{1}{\rho_{\text{crit}}} (\rho_{\text{mat},0} a^{-3} + \rho_{\text{rad},0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0}) + \Omega_\kappa a^{-2}, \quad \text{onde} \quad \Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa^2}{a^2 H^2}. \quad (7)$$

Aqui, $\rho_{\text{crit}} = 3m_{\text{pl}}^2 H^2$ representa a densidade crítica necessária para que um Universo plano se expanda a uma taxa de Hubble H . Observa-se que, para $a(t) \ll 1$, a contribuição da radiação supera amplamente a da matéria e a da energia escura. Desse modo, a cosmologia clássica prevê um Universo primitivo fortemente dominado por radiação, expandindo-se de forma *desacelerada* (equação 4). Entretanto, nos anos 1960 e 1970, à medida que os dados do CMB foram obtidos e estudados, foi rapidamente percebido que estes eram incompatíveis com a teoria usual do Big Bang. A inflação cósmica, definida como um período de expansão *acelerada* no início da existência do Universo, além de solucionar essa discordância, também pode estar na origem das anisotropias observadas no espectro atual.

Historicamente, a forma mais simples de gerar inflação é por meio de um único campo escalar φ , denominado inflaton, sob um certo potencial $V(\varphi)$. Desde a década de 1980, centenas de modelos já foram propostos. Nas últimas duas décadas, devido ao lançamento dos telescópios *ACT* e *SPT* (siglas do inglês *Atacama Cosmology Telescope* e *South Pole Telescope*, respectivamente) e sobretudo da sonda *Planck* e do projeto *BICEP/Keck* (sigla do inglês *Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*), tornou-se possível medir a temperatura e a polarização do CMB com crescente precisão. Os dados mais recentes, publicados em 2021 pelo projeto *BICEP/Keck* em associação com *Planck*, tornam obsoletos diversos modelos historicamente aceitos. Novos resultados acerca da fase intermediária de reaquecimento também fornecem mais informações sobre os primeiros instantes após a inflação, e oferecem restrições ao potencial de φ . Nesse contexto, é prudente reexaminar os resultados anteriores e a viabilidade de modelos inflacionários populares.

Este trabalho visa a fazer uma revisão pedagógica do período inflacionário, além de simular o reaquecimento subsequente e analisar os modelos inflacionários mais relevantes atualmente. Na Seção, é feita uma breve introdução da cosmologia inflacionária como solução aos problemas do Big Bang clássico. Na Seção 3, são calculadas as perturbações métricas previstas pela expansão acelerada do Universo. Na Seção 4, são estudados os períodos de pré-aquecimento e termalização, e são empregadas simulações de rede para testar os resultados analíticos e observar o período de reaquecimento não-linear. Por fim, na Seção 5, são utilizados os dados de Planck+BK18 para analisar seis modelos inflacionários, selecionados por relevância histórica e/ou compatibilidade com observações anteriores. Cálculos adicionais são incluídos no apêndice.

2 A TEORIA INFLACIONÁRIA

2.1 Limitações do Big Bang clássico

Dentre os principais problemas com o modelo antigo, que motivaram o surgimento da cosmologia inflacionária, estão os problemas da planicidade, do horizonte e dos monopolos [2, 1]. Nas subseções seguintes, apresentarei cada um brevemente e explicarei como a inflação cósmica os soluciona.

2.1.1 *Problema da planicidade*

No modelo antigo, como a expansão é desacelerada, o denominador $a^2 H^2 (= \dot{a}^2)$ de Ω_κ cai com o tempo. Logo, para qualquer $\kappa \neq 0$, $|\Omega_\kappa| \rightarrow 1$ conforme o universo se expande. Todavia, foi observado que, atualmente, $\mathcal{O}(|\Omega_k|) = 10^{-3}$ [3], um valor muito reduzido, o que, por sua vez, exige um valor ainda menor para o início do Universo. Na era de Planck, por exemplo, usando $T \propto E = (h/\lambda) \propto a^{-1}(t)$ para os fótons da CMB, obtém-se

$$\Omega_\kappa(t_{\text{pl}}) = \Omega_\kappa(t_0) \cdot \frac{a_0^2}{a_{\text{pl}}^2} \approx \Omega_\kappa(t_0) \cdot \frac{T_{\text{pl}}^2}{T_0^2} \approx 3,7 \cdot 10^{-67}. \quad (8)$$

Tamanha precisão nas condições iniciais não é impossível em si, mas amplamente considerada muito implausível.

2.1.2 *Problema do horizonte*

Define-se o horizonte de partículas $D_p(t) = a(t)d_p(t)$ como a distância percorrida pela luz desde o início do universo — ou seja, um raio máximo para a relação de causalidade entre duas regiões distintas. $d_p(t)(= 1/aH)$ é chamado de horizonte co-movente. Para $w \neq -1$,

$$D_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \propto \int_0^t \frac{dt'}{t'^{2/3(1+w)}} = \frac{t(3w+1)}{3(1+w)}. \quad (9)$$

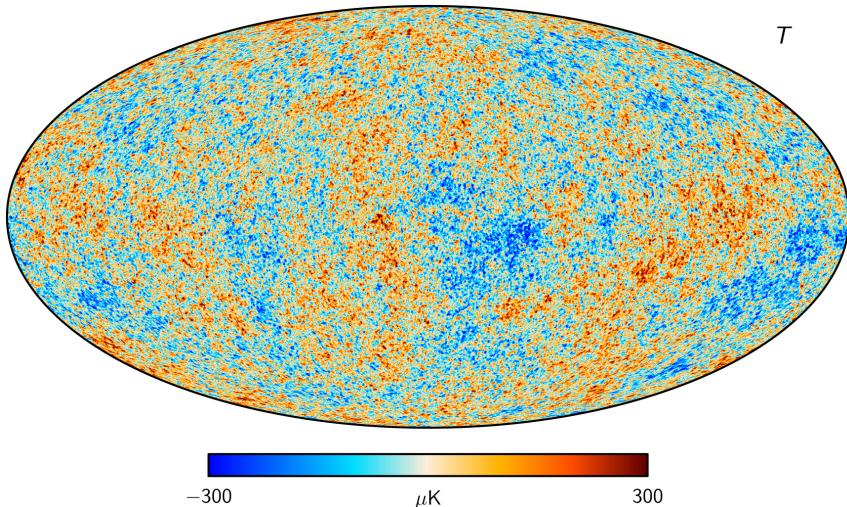
Como esperado, ao longo do tempo, novas regiões entram no raio de causalidade umas das outras pela primeira vez; antes disso, espera-se que elas fossem significativamente diferentes e relativamente inhomogêneas. No instante de espalhamento dos fótons da CMB, $t_{\text{fot}} \simeq$

$3.75 \cdot 10^5$ anos [4], o horizonte co-movente desse espalhamento era bem menor do que o atual:

$$\frac{d_p(t_{\text{fot}})}{d_p(t_0)} \propto \left(\frac{t_{\text{fot}}}{t_0} \right)^{1/3} \approx 0,03. \quad (10)$$

Apesar disso, dados observacionais mostram que o Universo é, em grande escala, extremamente uniforme. Em todas as direções, é observado equilíbrio térmico do CMB em $T \simeq 2.725$ K, com desvio relativo de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ (Figura 1), mesmo entre regiões que não poderiam, segundo o modelo antigo, ter tido qualquer contato causal até recentemente.

Figura 1 — Mapa das anisotropias de temperatura da CMB pelo satélite *Planck*.



Fonte: Planck Legacy Archive (Akrami *et al.*, 2019, p.66). Disponível em: https://wiki.cosmos.esa.int/planck-legacy-archive/index.php/CMB_maps. Acesso em: 3 jul. 2025.

2.1.3 Problema dos monopolos

Também chamado de *problema dos resquícios*, ele surge a partir da aplicação das Teorias de Grande Unificação (Grand Unification Theories, ou GUTs, na sigla em inglês) ao Universo primitivo. Diversas GUTs já foram propostas desde sua concepção inicial [5] e, embora ainda não haja consenso acerca da validade de um modelo específico, para os propósitos deste trabalho, suas características serão tomadas como descrições válidas das forças forte e eletrofraca.

Como $T \propto a^{-1}(t)$ para um Universo dominado por radiação, espera-se naturalmente que sua temperatura em $t \simeq 0$ fosse extremamente elevada. GUTs propõem que, em escalas de $T \sim 10^{16}$ GeV, a quebra das simetrias de *gauge* levaria a uma produção abundante dos chamados "resquícios exóticos". Como regiões a distâncias superiores a $d_h \sim H^{-1}$ seriam

causalmente desconectadas, cada uma teria estados de vácuo não triviais distintos. Isso geraria defeitos topológicos estáveis via mecanismo de Kibble-Zurek [6, 7], a uma densidade de $n \sim H^{-3}$ — mais notavelmente, monopólos magnéticos superpesados. Estes têm decaimento extremamente lento [8] e, se a cosmologia clássica estivesse correta, sua densidade atual seria comparável à do próton.

2.2 A cosmologia inflacionária

2.2.1 Fundamentos gerais

A teoria da inflação cósmica propõe que, logo após o Big Bang, o Universo sofreu uma expansão excepcionalmente acelerada ($\ddot{a} > 0$), durante a qual $w \approx -1$ (predominância da energia de vácuo). Supondo acoplamento mínimo, a ação S do inflaton escalar φ e seu tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ são

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_{pl}^2 R}{2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (11)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi + V(\varphi) \right). \quad (12)$$

A evolução de φ é dada por sua equação de movimento (desconsiderando flutuações quânticas por ora; $\nabla^2 \varphi = 0$):

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \varphi) + V_{,\varphi} \Rightarrow 3H\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0. \quad (13)$$

Usando (2), temos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad P = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (14)$$

Se $V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$, $w \approx -1$, a condição necessária para a inflação. Reescrevendo o lado esquerdo de (4) como $\dot{H} + H^2$ e combinando-a a (3), obtemos $H^2 + \dot{H} \approx -V(\varphi)/(3m_{pl}^2) \approx -H^2$. Retornando a (13), há um ponto de atração em $\dot{\varphi} \approx V_{,\varphi}/(3H)$ se o primeiro termo for grande o suficiente ($3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi}$). Dessa forma, estabelecemos dois parâmetros inflacionários:

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1, \quad \eta \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} \ll 1. \quad (15)$$

Em termos práticos, isso requer que o potencial seja suficientemente plano — daí o termo em inglês para esse estágio da inflação, rolamento lento (do inglês *slow rolling*, Figura 2). A partir

daqui, usa-se, durante a fase inflacionária,

$$H^2 \approx \frac{V(\varphi)}{3m_{pl}^2} (\approx \text{cte.}), \Rightarrow \quad (16)$$

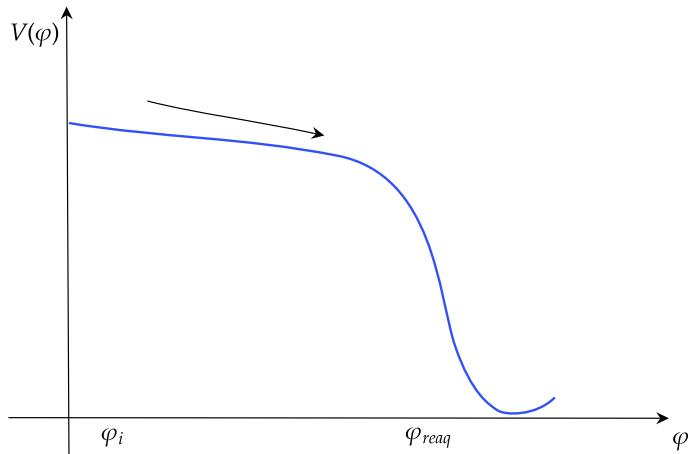
$$\epsilon \approx \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad \eta \approx \frac{m_{pl}^2 V_{,\varphi\varphi}}{V} - \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2. \quad (17)$$

Como a fase de rolamento lento impõe valores próximos de zero para todas as derivadas de H , é ocasionalmente útil definir a classe de funções ϵ_n , denominadas *fluxos de Hubble* [9, 10]:

$$\epsilon_{m+1} \equiv \frac{d \ln |\epsilon_m|}{dN}, \quad m \geq 0; \quad \epsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN}. \quad (18)$$

Aproximações similares a (17) podem ser encontradas para cada uma delas — nota-se que $\epsilon_1 = \epsilon$ e $\epsilon_2 = 2(\epsilon - \eta)$. A inflação termina quando w se distancia de -1 e, por conseguinte, $\epsilon \approx \eta \approx 1$.

Figura 2 — Exemplo de um campo φ sob um potencial de rolamento lento.



Fonte: Elaboração própria.

Sua duração é costumeiramente expressa em termos do número N de *e-foldings*, isto é, quantas vezes, em termos de e , o Universo se expande:

$$N = \log \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \approx \int_{t_i}^{t_f} H dt \approx \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V_{,\varphi}} d\varphi. \quad (19)$$

Na primeira passagem, foi utilizado $a \propto e^{Ht}$ (equação 6). N_f , dessa forma, determina o momento em que a inflação acaba. Neste trabalho, utilizarei um valor padrão $N_f \approx 60$ ($t \approx 10^{-35}$ s), necessário para resolver os problemas da cosmologia clássica (Seção 2.2.2). Para um dado momento t_* do período inflacionário, — normalmente expresso em termos do momento co-movente $k_* = a(t_*)H(t_*)$) — seu $N(k)$ correspondente pode ser calculado em termos do potencial V e

da equação de estado. Tem-se

$$\frac{aH}{a_0 H_0} = \frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a}{a_f} \frac{a_f}{a_{re}} \frac{a_{re}}{a_0} \frac{H}{H_0} = \text{cte.} \quad (20)$$

Ou, tirando os logaritmos e definindo $\Delta N_* \equiv N_f - N$,

$$\Delta N_* = -\ln\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) + \ln\left(\frac{a_f}{a_{re}}\right) + \ln\left(\frac{a_{re}}{a_0}\right) + \ln\left(\frac{H}{H_0}\right). \quad (21)$$

Supondo que a equação de Boltzmann (5) permaneça válida durante o reaquecimento, com w_{re} constante, a segunda contribuição pode ser expressa em termos da densidade $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. A terceira é calculada por meio da conservação de entropia $g_S(t_{re})a_{re}^3 T_{re}^3 = g_S(t_0)a_0^3 T_0^3$, onde g_S é o número de graus de liberdade relativísticos [11, 12]:

$$\ln\left(\frac{a_f}{a_{re}}\right) = \frac{1}{3(1+w_{re})} \ln\left(\frac{\rho_f}{\rho_{re}}\right), \quad \ln\left(\frac{a_{re}}{a_0}\right) = \ln\left(\frac{T_{re}}{T_0}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{g_S(t_{re})}{g_S(t_0)}\right). \quad (22)$$

Usando $V = 3m_{pl}^2 H^2$, $\rho_{re} = (\pi^2/30)g_S(t_{re})T_{re}^4$ e os valores conhecidos $g_S(t_0) \simeq 3, 91$, podemos obter a expressão geral

$$\Delta N_* \simeq 4,689 - \frac{1}{12} \ln g_S(t_{re}) - \ln\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{V^2}{m_{pl}^4 \rho_f}\right) + \frac{(1-3w_{re})}{12(1+w_{re})} \ln\left(\frac{\rho_{re}}{\rho_f}\right). \quad (23)$$

Essa relação será utilizada na Seção 5 para calcular as temperaturas previstas por cada modelo ao final da inflação, um parâmetro determinante para a viabilidade do reaquecimento.

2.2.2 Solução dos problemas observacionais

O problema da planicidade é resolvido de forma bastante direta: como a expansão passa a ser acelerada, $a^2 H^2$ aumenta e $|\Omega_k|$ rapidamente tende a zero. Durante a inflação, temos

$$\frac{\Omega_\kappa(a_f)}{\Omega_\kappa(a_i)} \approx \frac{a_i^2}{a_f^2} = e^{-2N_f}. \quad (24)$$

Dessa forma, N_f pode ser calculado como:

$$|\Omega_\kappa(t_0)| \simeq e^{-2N_f} \left(\frac{a_f H_f}{a_0 H_0}\right)^2 \Rightarrow N_f \approx \ln \left[\frac{T_0 H_f}{|\Omega_\kappa(t_0)|^{1/2} T_f H_0} \right]. \quad (25)$$

O problema do horizonte também é facilmente explicado. Como H permanece cons-

tante durante a inflação, enquanto $a \propto e^{Ht}$, o horizonte de partículas pode abranger regiões muito amplas, desde que a inflação dure o suficiente. Durante fase inflacionária, tem-se

$$D_p(t_f) = a(t_f) \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} = a(t_f) \int_0^{t_f} \frac{dt}{a(t_f) e^{H(t-t_f)}} = \frac{e^{Ht_f} - 1}{H} \approx \frac{a(t_f)}{a(t_i)H}. \quad (26)$$

$D_p(t)$ cresce exponencialmente, criando homogeneidade em larga escala. Quando a inflação termina, tanto H^{-1} quanto $D_p(t)$ passam a crescer linearmente, implicando que $D_p(t_f)$ deve ter a escala das regiões distintas observadas na CMB atual, separadas por H_0^{-1} . A distância D_{fot} entre os fótons no instante do último espalhamento é dada por $D_{\text{fot}} = a(t_{\text{fot}})/(H_0 a_0)$. Assim, usando (19),

$$D_p(t_f) \gtrsim D_p(t_{\text{fot}}), \Rightarrow N_f \gtrsim \ln \left(\frac{a(t_{\text{fot}}) H_f}{a_0 H_0} \right) \approx \ln \left(\frac{T_0 H_f}{T_{\text{fot}} H_0} \right). \quad (27)$$

Para a maioria dos modelos inflacionários, $50 \lesssim N \lesssim 60$ é suficiente para resolver ambos os problemas em temperaturas de reaquecimento viáveis ($10^{-2} \lesssim T \lesssim 10^{16}$ GeV) [13].

Finalmente, o problema dos monopolos é resolvido posicionando a quebra das simetrias de *gauge*

- a) após uma inflação suficientemente longa ($N_f \approx 60$);
- b) ou durante a inflação ativa, mas longe o bastante do fim dela.

Se a quebra das simetrias acontece após a inflação, todas as regiões a escalas observáveis mantêm causalidade, e não há diferença entre os estados de vácuo. Se a quebra acontece durante a inflação, os monopolos ainda podem ser diluídos o suficiente para serem imperceptíveis hoje, desde que $\Delta N_{\text{GUT}} \gtrsim 30$ [14].

3 PERTURBAÇÕES

3.1 Introdução e classes de perturbação

O princípio cosmológico é muito útil para descrever a evolução do Universo em larga escala, mas é claramente uma idealização; basta observar como galáxias se concentram em superaglomerados, enquanto áreas enormes permanecem virtualmente vazias. De fato, entende-se atualmente que pequenas inomogeneidades primordiais, presentes nos primeiros estágios da vida do Universo, cresceram com o tempo devido a instabilidades gravitacionais. Nesse contexto, as flutuações quânticas ignoradas na equação (13) se tornam relevantes. Cada modelo inflacionário prevê seu próprio espectro de perturbações, o que torna possível testar sua validade. Perturbações cosmológicas podem ser divididas em duas classes gerais:

- a) perturbações *adiabáticas* acontecem ao longo da mesma trajetória no espaço de fase da solução não perturbada — ou seja, uma variação δt causa a mesma mudança relativa para todas as quantidades, particularmente para a pressão e a densidade;

$$H\delta t = H \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} = H \frac{\delta p}{\dot{p}}. \quad (28)$$

- b) perturbações entrópicas, também chamadas de perturbações de isocurvatura, afastam a solução de seu estado não perturbado, tal que, para duas quantidades Z e W , não vale a condição (28):

$$\frac{\delta W}{\dot{W}} \neq \frac{\delta Z}{\dot{Z}}. \quad (29)$$

Em modelos de campo único, aos quais este trabalho é restrito, todas as flutuações pertencem à primeira classe. Além disso, elas são aproximadamente *gaussianas*, o que, em termos práticos, significa que seus coeficientes reais e imaginários no espaço de Fourier são estatisticamente independentes. Essa propriedade é oriunda do tratamento *linear* das equações de Einstein e Klein-Gordon, que pressupõe um inflaton quase totalmente homogêneo. A expansão a ordens superiores foge do escopo deste trabalho, mas pode ser consultada nas referências [15, 16, 17, 18]. De forma geral, ela fornece poucas diferenças qualitativas, à exceção de um termo de vorticidade encontrado na segunda ordem [17]. Na presente seção, serão discutidas as flutuações métricas e suas contribuições em termos de observação, seguindo passos semelhantes a [19, 20, 21].

3.2 Perturbações de um campo sob expansão

No contexto da cosmologia, perturbações são estudadas no limite $\lambda \gg H^{-1}$, ou escala "super-Hubble". Desse modo, ainda que a origem das oscilações seja quântica (flutuações de vácuo no espaço-tempo curvo), o número de ocupação $n_{\vec{k}} \gg 1$ permite o tratamento clássico, e cada modo k se torna independente.

Definimos inicialmente um campo escalar genérico $\phi = \phi_0(t) + \delta\phi(\vec{x}, t)$ de massa m em um espaço quasi-De Sitter ($w \simeq -1$). Expandindo $\delta\phi$ em uma transformação de Fourier no espaço k :

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\phi_{\vec{k}}(t). \quad (30)$$

Podemos escrever as equações das flutuações como osciladores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (\square\phi + m^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\phi_{\vec{k}}(t) &= 0, \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{3\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k^2}{a^2} + m^2 \right) \delta\phi_{\vec{k}}(t) &= 0, \\ \Rightarrow \delta\ddot{\phi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\vec{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 \right) \delta\phi_{\vec{k}} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Aqui, é conveniente realizar uma renormalização para um campo auxiliar $\delta\chi_{\vec{k}} \equiv a\delta\phi_{\vec{k}}$ e para o tempo conforme τ ($d\tau \equiv dt/a$). Durante a inflação, τ é calculado como, usando $H(a) \propto a^{-\epsilon}$ na primeira ordem (equação 17):

$$\tau = \int \frac{dt'}{a(t')} = \int \frac{da}{a^{2-\epsilon} H} = -\frac{1}{aH(1-\epsilon)}. \quad (32)$$

A equação (31) se torna

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + [k^2 + (m^2 - 2H^2) a^2(\tau)] \delta\phi' &= 0, \Rightarrow \\ \delta\chi''_{\vec{k}} + \left[k^2 + \frac{1}{\tau^2} \left(\nu_\phi^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \delta\chi_{\vec{k}} &= 0, \quad \text{onde} \quad \nu_\phi = \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

A solução geral para ν_ϕ real é uma soma de funções de Hankel $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$ de primeira e segunda classe, respectivamente:

$$\delta\chi_{\vec{k}} = \sqrt{-\tau} \left[c_1 H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau) + c_2 H_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\tau) \right] \quad (34)$$

As constantes são fixadas impondo, como condição inicial, a solução de onda plana $e^{-ik\tau}/\sqrt{2\pi}$ para $\tau \rightarrow -\infty$, ou escala "sub-Hubble" ($-k\tau \gg 1$). A solução exata é expressa como

$$\delta\chi_{\vec{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_\phi + \frac{1}{2})} \sqrt{-\tau} H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau). \quad (35)$$

Retornando a $\phi_{\vec{k}}$, encontramos, na escala "super-Hubble" ($-k\tau \ll 1$), uma solução praticamente estática, com uma pequena dependência no tempo $\tau = -(aH)^{-1}$. Concluímos, com isso, que o espectro de perturbações "congela" a partir do cruzamento $k = aH$.

$$|\delta\phi_{\vec{k}}| \approx \frac{H^2}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\phi}. \quad (36)$$

3.3 Perturbações métricas

As perturbações discutidas na sub-seção anterior acontecem para qualquer campo escalar ϕ sofrendo uma expansão quasi-De Sitter. No entanto, no contexto da inflação, é necessário levar em consideração as perturbações *métricas*. O inflaton φ representa a maior fonte de energia durante a inflação, e qualquer perturbação $\delta\varphi$ implica uma flutuação $\delta g_{\mu\nu}$, o que perturba o inflaton φ ainda mais. Consequentemente, calcular tais oscilações com alta precisão é matematicamente bastante complicado. Atendo-nos à primeira ordem, definimos $g_{\mu\nu}$ como:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}, \quad \text{tal que} \quad g_{\mu\nu}^0 \gg \delta g_{\mu\nu}. \quad (37)$$

Perturbações $\delta g_{\mu\nu}$ podem ser classificadas em escalares, vetoriais e tensoriais, a depender do seu comportamento sob rotação, utilizando o tempo conforme τ . Na primeira ordem (e apenas nela), cada modo evolui de forma independente [15]. Nesse contexto, δg_{00} , é escalar, o 3-vetor δg_{0i} é escrito como a soma de um vetor e do gradiente de um escalar, e o tensor δg_{ij} é dado por uma soma de componentes das três classes¹

$$\delta g_{00} = 2\Phi a^2, \quad \delta g_{0i} = a^2(S_i + B_{,i}), \quad \delta g_{ij} = a^2(h_{ij} + 2D_{ij}E + F_{i,j} + F_{j,i} + 2\Psi). \quad (38)$$

Φ, Ψ, B e E são funções escalares, $D_{ij} = (\partial_i \partial_j - (1/3)\delta_{ij}\nabla^2)$, $h_{j,i}^i = h_i^i = 0$ (tensor transverso e sem traço) e $S_{,i}^i = F_{,i}^i = 0$ (vetores sem divergência). Para a cosmologia, as perturbações mais relevantes são as escalares e tensoriais, oriundas, respectivamente, de variações na distribuição de energia e ondas gravitacionais primordiais. Estas serão o principal foco desta seção. Perturbações vetoriais lineares, especialmente na escala $\lambda \gg H^{-1}$, decaem muito rapidamente para terem qualquer impacto significativo [22, 23]. Partindo de (38), a forma geral

¹Ao longo deste trabalho, usa-se $i, j = 1, 2, 3$.

da métrica FLRW para flutuações escalares é

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + 2\partial_i B d\tau dx^i + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}E)dx^i dx^j]. \quad (39)$$

É importante salientar que as funções em (39) *não são* invariantes quanto ao *gauge*. Seja, por exemplo, uma transformação $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$. A perturbação do componente temporal será simplesmente o escalar ξ^0 . O 3-vetor espacial ξ^i pode ser decomposto em um componente longitudinal (gradiente de um escalar β) e um ortogonal v^i .

$$\xi^i = v^i + \beta_{,i}, \quad \text{tal que} \quad v_{,i}^i = 0. \quad (40)$$

Pode-se aplicar a invariância de cada elemento da métrica em (39) para chegar às transformações das funções escalares. Definindo $\mathcal{H} \equiv a'/a$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi - \xi'^0 - \mathcal{H}\xi^0, \\ \tilde{B} &= B + \xi^0 + \beta', \\ \tilde{\Psi} &= \Psi + \mathcal{H}\xi^0 - \frac{1}{3}\nabla^2\beta, \\ \tilde{E} &= E - 2\beta. \end{aligned} \quad (41)$$

Devido à variação das funções escalares com o *gauge*, é ocasionalmente vantajoso buscar quantidades invariantes, a fim de evitar trabalhar com graus de liberdade inexistentes. As mais comumente utilizadas são os potenciais de Bardeen [24, 22].

$$\Phi_G = \Phi - \frac{1}{a} \left[\frac{aE'}{2} - aB \right]', \quad (42)$$

$$\Psi_G = \Psi + \frac{1}{6}\nabla^2 E - \mathcal{H} \left(B - \frac{E'}{2} \right). \quad (43)$$

Trabalhar com essas quantidades, no entanto, é muito mais matematicamente exigente; por isso, em lugar utilizá-las, é mais comum simplesmente fixar um *gauge*. Nas próximas seções, os cálculos serão feitos adotando primariamente o *gauge* conforme newtoniano, também chamado de longitudinal, em que $B = E = 0$. Cálculos utilizando os potenciais de Bardeen são encontrados em [19].

3.3.1 Perturbações de curvatura

Em um universo plano, a curvatura espacial intrínseca de um instante τ é dada pelo escalar de Ricci tridimensional $R^{(3)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

$$R^{(3)} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \Psi. \quad (44)$$

Ψ , desse modo, é usualmente denominado *perturbação de curvatura*. No entanto, vimos que ele varia com o *gauge*: segundo a equação (41), uma transformação de hiper-superfície $\tau \rightarrow \tau + \xi^0$ induz uma variação $\Psi \rightarrow \Psi + \mathcal{H}\xi^0$. Devido a isso é necessário fixar um fatiamento de hiper-superfícies. A escolha mais intuitiva é o *gauge co-movente*, no qual as hiper-superfícies são definidas pelo tempo τ e ortogonais às linhas de mundo dos observadores co-moventes; ou seja, não há fluxo de energia ($T_{0i} = 0$). Isso impõe, usando a equação (194) do Apêndice A.1,

$$\delta\varphi_{\text{com}} = \delta\varphi - \varphi' \xi^0 = 0 \Rightarrow \xi^0 = \frac{\delta\varphi}{\varphi}. \quad (45)$$

Assim, $\xi^0 = \delta\varphi/\varphi'$ é a variação temporal necessária para deslocar Ψ de um *gauge* qualquer para o co-movente. A nova função de perturbação é então denominada *perturbação de curvatura co-movente* $\mathcal{R}_{\vec{k}}$.

$$\mathcal{R} = \Psi + \frac{a'}{a} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} = \Psi + H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}}. \quad (46)$$

Além do co-movente, a curvatura pode ser calculada no *gauge* de energia uniforme, no qual as hiper-superfícies são definidas por $\delta\rho = 0$. Essa partição é particularmente útil no cálculo do espectro da CMB, o qual é definido por flutuações de densidade. Seguindo os mesmos passos, chegamos à perturbação de curvatura nessa partição:

$$\zeta = \Psi + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\rho'} = \Psi + H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}. \quad (47)$$

Partindo das equações (13) e (14), sabemos que $\rho' = -3(\rho + p)$, e que $\rho + p = \dot{\varphi}^2$ durante a inflação. Como $\dot{\delta\varphi} \approx 0$ na escala super-Hubble, obtém-se:

$$\delta\rho = \dot{\varphi} \dot{\delta\varphi} + V_{,\varphi} \delta\varphi \approx V_{,\varphi} \delta\varphi \approx -3H\dot{\varphi} \delta\varphi, \Rightarrow \quad (48)$$

$$\zeta \approx \Psi - \frac{3H\dot{\varphi}}{3\dot{\varphi}^2} \delta\varphi = \mathcal{R}. \quad (49)$$

Essa equivalência representa, do ponto de vista físico, a conservação da energia ao longo do fluxo de φ . Isso possibilita a aferição do espectro da CMB diretamente por meio do *gauge* $\delta\varphi = 0$, matematicamente muito mais simples, sem a necessidade de calcular a evolução

de $\delta\rho$ e realizar novas transformações de *gauge* a cada novo regime (inflação, reaquecimento, era fóton, etc). Partindo de $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ e da definição de $T_{\mu\nu}$, temos, na primeira ordem:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\delta g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\delta R), \quad (50)$$

$$\delta T_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta\varphi \partial_\nu \varphi - \partial_\nu \delta\varphi \partial_\mu \varphi - \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V \right). \quad (51)$$

A computação completa de (50) e (51) para a métrica (39) em um *gauge* qualquer é feita no Apêndice A.1. Como não há fluxo de energia, $T_{\mu\nu}$ é diagonal e vale $\partial_i \partial_j (\Psi - \Phi) = 0 \Rightarrow \Psi = \Phi$ no *gauge* longitudinal ($i \neq j$, equação 192 do Apêndice A.1). Isso fornece as seguintes equações de campo $\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu}$ não nulas:

$$00 : \quad 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Psi) - \nabla^2\Psi = -4\pi G(\varphi'\delta\varphi' - \varphi'^2\Psi + a^2V_{,\varphi}\delta\varphi), \quad (52)$$

$$i0 : \quad \Psi' + \mathcal{H}\Psi = \epsilon\mathcal{H}^2 \frac{\delta\varphi'}{\varphi}, \quad (53)$$

$$ij : \quad 2\left(2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2\right)\Psi + 3\mathcal{H}\Psi' + \Psi'' = 4\pi G(\varphi'\delta\varphi' - \varphi'^2\Psi - a^2V_{,\varphi}\delta\varphi). \quad (54)$$

Podemos substituir $V_{,\varphi}$ a partir da ordem zero da equação de Klein-Gordon. No tempo conforme, temos:

$$0 = \frac{1}{a^4} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(a^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right) + V_{,\varphi} \Rightarrow V_{,\varphi} = -\frac{1}{a^2} (\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi'). \quad (55)$$

Somando as equações (52) e (54),

$$\Psi'' + 2\mathcal{H} \left(\mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Psi' - \nabla^2\Psi + 2 \left(\mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Psi = 0. \quad (56)$$

Para chegar a \mathcal{R} , realiza-se uma nova transformação $\Psi \rightarrow \Psi_{\vec{k}}$ nas variáveis espaciais. Usando a regra de derivação de Fourier, obtemos, para cada coordenada espacial x^μ ,

$$\Psi_{\vec{k}, \mu\mu} = \frac{\partial^2}{\partial(x^\mu)^2} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Psi = -k_\mu^2 \Psi_{\vec{k}}. \quad (57)$$

Logo, seguindo o mesmo procedimento utilizado para derivar a equação (31),

$$\Psi_{\vec{k}}'' + 2\mathcal{H} \left(\mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Psi_{\vec{k}}' + k^2 \Psi_{\vec{k}} + 2 \left(\mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Psi_{\vec{k}} = 0, \quad (58)$$

ou, em termos dos parâmetros inflacionários ϵ e η ,

$$\Psi_{\vec{k}}'' + 2\mathcal{H}\eta\Psi_{\vec{k}}' + k^2\Psi_{\vec{k}} + 2\mathcal{H}^2(\eta - \epsilon)\Psi_{\vec{k}} = 0. \quad (59)$$

Na escala super-Hubble, pode-se desprezar o termo $k^2 \Psi_{\vec{k}}$, e a equação (59) se torna uma equação ordinária, com solução geral da forma $\Psi_{\vec{k}}(\tau) = A\tau^{p_1} + B\tau^{p_2}$. Como $\epsilon, \eta \ll 1$ durante a inflação, é fácil encontrar $p_1 \simeq 0$ e $p_2 \simeq 1$. Portanto, $\dot{\Psi}_{\vec{k}} \approx 0$, e as flutuações "congelam", de forma análoga à equação (36). Usando (53),

$$\Psi_{\vec{k}} \approx \epsilon \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad (60)$$

portanto, no *gauge co-movente*,

$$\mathcal{R}_{\vec{k}} = (1 + \epsilon) H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} \approx H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}}. \quad (61)$$

Em lugar de medir $\mathcal{R}_{\vec{k}}$ de forma direta, é conveniente caracterizá-la por meio de seu *espectro de potência* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. Para uma grandeza $g(\vec{k}, t)$ qualquer, o espectro de potência é relacionado ao valor esperado no vácuo de $\langle g_{\vec{k}1}, g_{\vec{k}2} \rangle$, e representa a contribuição ponderada de um dado modo \vec{k} de $g_{\vec{k}}(\vec{k}, t)$:

$$\mathcal{P}_g(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |g_{\vec{k}}|^2. \quad (62)$$

Ou seja, para $\mathcal{R}_{\vec{k}}$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H^2 k^3}{2\pi^2} \frac{|\delta\varphi_{\vec{k}}|^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{k^3}{4m_p^2 \epsilon \pi^2} |\delta\varphi_{\vec{k}}|^2. \quad (63)$$

No espaço de Fourier e tempo t , a equação de Klein-Gordon perturbada (equação 200 do Apêndice A.2) é escrita como

$$\delta\ddot{\varphi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\varphi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2} \delta\varphi_{\vec{k}} - 4\dot{\Psi}\dot{\varphi} + 2\Psi_{\vec{k}} V_{,\varphi} + V_{,\varphi\varphi} \delta\varphi_{\vec{k}} = 0. \quad (64)$$

Como $\dot{\Psi} \approx 0$ em escalas super-Hubble e $V_{,\varphi} \approx -3H\dot{\varphi}$, temos:

$$\delta\ddot{\varphi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\varphi}_{\vec{k}} + (V_{,\varphi\varphi} - 6H^2\epsilon) \delta\varphi_{\vec{k}} = 0. \quad (65)$$

Aqui, retornamos ao tempo conforme e introduzimos o campo auxiliar $a\delta\chi_{\vec{k}} = \delta\varphi_{\vec{k}}$ e um parâmetro ν_{φ} , de forma análoga ao procedimento feito na sub-seção anterior (equações 31 a 36):

$$\partial\chi''_{\vec{k}} - \frac{1}{\tau^2} \left(\nu_{\varphi}^2 - \frac{1}{4} \right) \partial\chi_{\vec{k}} = 0, \quad \text{onde} \quad \nu_{\varphi} = \left(\frac{9}{4} + 6\epsilon - 3\eta \right)^{1/2} \simeq \frac{3}{2} + 2\epsilon - \eta. \quad (66)$$

Ou seja,

$$|\delta\varphi_{\vec{k}}| \approx \frac{H^2}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_{\varphi}}. \quad (67)$$

Computando o espectro de potência,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2m_{pl}^2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu_{\varphi}}. \quad (68)$$

Na análise de modelos inflacionários de campo único, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é tipicamente aproximado na forma de uma expansão à volta do cruzamento $k_* = aH$, representando o momento em que a escala super-Hubble se torna válida:

$$\ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) + \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \Big|_{k_*} \ln \left(\frac{k}{k_*}\right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k^2} \Big|_{k_*} \ln \left(\frac{k}{k_*}\right)^2 \dots \quad (69)$$

Definimos, dessa forma, a amplitude A_s , o índice espectral escalar n_s e o parâmetro α_s , tipicamente chamado de "running" ("funcionamento", "marcha"):

$$A_s \equiv \frac{1}{2m_{pl}^2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \Big|_{k_*}, \quad \alpha_s = \frac{d^2 \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d(\ln k)^2} \Big|_{k_*}. \quad (70)$$

Esses parâmetros são ligados às anisotropias de temperatura e polarização e polarização elétrica (modos E) da CMB, e fornecem alguns dos principais vínculos aos modelos inflacionários. Os expoentes n_s e α_s são calculados a partir dos fluxos de Hubble (18), de acordo com a precisão necessária. Na primeira ordem, ($\alpha_s = 0$), por exemplo, $n_s = 1 - 4\epsilon + 2\eta$. O cruzamento k_* normalmente assume os valores $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (valor mais recente) ou $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ (valor histórico) [25, 9].

3.3.2 Ondas gravitacionais primordiais

As perturbações tensoriais (h_{ij} da equação 38) são relativas aos graus de liberdade do próprio campo gravitacional. Na métrica FRLW,

$$ds^2 = a^2 [d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (71)$$

Como h_{ij} é transverso e seu traço é nulo, podemos expressá-lo como uma combinação de dois graus de liberdade, ou polarizações, normalmente denotadas pelos subscritos $+$, \times :

$$h_{ij}(\tau, \vec{x}) = h_+(\tau, \vec{x})e_{ij}^+ + h_{\times}(\tau, \vec{x})e_{ij}^{\times}. \quad (72)$$

Sendo $T_{\mu\nu}$ diagonal, h_{ij} não possui fonte e sua ação é

$$S = \frac{m_{pl}^2}{4} \int d\tau d^3x a^2 \frac{1}{2} [(h'_{ij})^2 + 2\mathcal{H}h'_{ij} - (\nabla h_{ij})^2]. \quad (73)$$

No espaço de Fourier, encontramos equações independentes para cada polarização [26]. Portanto, adotando a renormalização $v_{\vec{k}} = (am_{pl}/2)h_{\vec{k}}$ para cada uma,

$$v''_{\vec{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{\vec{k}} = 0. \quad (74)$$

É fácil ver que essa equação é igual a (33) para $m = 0$; portanto, as ondas gravitacionais exibirão um comportamento muito similar às perturbações do campo escalar. A solução exata de (74) é, impondo a solução da onda plana como contorno:

$$v_{\vec{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_T + \frac{1}{2})} \sqrt{-\tau} H_{\nu_T}^{(1)}(-k\tau), \quad \text{onde} \quad \nu_T \approx \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \frac{a''}{a} \right)^{1/2} \simeq \frac{3}{2} - \epsilon. \quad (75)$$

Analogamente a (33), foi introduzido o parâmetro ν_T , que, nesse contexto, abarca as correções oriundas da evolução de H no tempo ($H \propto a^{-\epsilon}$). Na escala super-Hubble, as soluções são quase estáticas:

$$|v_{\vec{k}}| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_T}. \quad (76)$$

Nessa escala, encontramos o seguinte espectro de potência para h_{ij} , com A_T e η_T definidos analogamente à seção anterior:

$$\mathcal{P}_T = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{ij} |h_{ijk}|^2 = \frac{4k^3}{2\pi^2 m_{pl}^2} (|v_{+\vec{k}}|^2 + |v_{\times\vec{k}}|^2) = \frac{8}{m_{pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_T}. \quad (77)$$

De forma análoga à seção anterior, podemos expandir $\ln \mathcal{P}_T(k)$ em uma série e definir a amplitude, o índice espectral e o parâmetro de "running":

$$A_T = \frac{8}{m_{pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} \Big|_{k_*}, \quad \alpha_T \equiv \frac{d^2 \ln \mathcal{P}_T}{d(\ln k)^2} \Big|_{k_*} \dots \quad (78)$$

Percebe-se que, na primeira ordem, $\eta_T = -2\epsilon \approx 0$; isto é, a perturbação tensorial é quase invariante durante a inflação, e sua amplitude A_T depende apenas de $H \propto V^2(\varphi)$. Logo, ela reflete diretamente a escala de energia do período inflacionário. Define-se então a razão tensor-escalar:

$$r \equiv \frac{A_T}{A_R} \simeq 16\epsilon. \quad (79)$$

4 REAQUECIMENTO

4.1 Abordagem perturbativa

A inflação termina quando a energia associada a $V(\varphi)$ irradia o suficiente para se tornar comparável a (e menor do que) a energia cinética — em outras palavras, quando (17) deixa de ser válida. Logo após a inflação, o Universo se encontra quase completamente homogêneo e dominado por vácuo, implicando temperaturas extremamente baixas; de fato, mesmo o conceito de temperatura é pouco aplicável a este momento. Durante o processo de reaquecimento, a temperatura do Universo deve subir até, no mínimo, $T \sim 10 \text{ MeV} (\sim 10^{12} \text{ K})$, a fim de viabilizar a bariogênese e a nucleossíntese subsequentes². As teorias iniciais do reaquecimento viam-no como um processo perturbativo, no qual φ era uma coleção de partículas escalares, decaindo aleatoriamente em produtos escalares e fermiônicos de forma independente. Isso é representado matematicamente pelo acoplamento de φ a um campo escalar χ e um campo fermiônico ψ , com a lagrangiana generalizada

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{1}{2}m_\chi^2(0)\chi^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}m_\psi(0)\psi - \frac{1}{2}g\varphi^2\chi^2 - h\bar{\psi}\psi\varphi. \quad (80)$$

Considera-se, por ora, um modelo simplificado de um potencial aproximadamente quadrático, oscilando em torno de um mínimo $\varphi = \varphi_m$:

$$V(\varphi) \approx \frac{1}{2}V_{,\varphi\varphi}(\varphi - \varphi_m)^2 \equiv \frac{1}{2}m_\varphi^2(\varphi - \varphi_m)^2. \quad (81)$$

Mediante uma quebra de simetria espontânea $\varphi - \varphi_m \rightarrow \varphi$, seu valor esperado no vácuo (vev) é deslocado, e surgem os termos de interação lineares em φ

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{lin}} = -g\varphi_m\varphi\chi^2 - h\bar{\psi}\psi\varphi. \quad (82)$$

Estes implicam decaimentos *dreibein* $\varphi \rightarrow \chi\chi$ e $\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi$, cujas taxas são conhecidas e podem ser calculadas por meio da matriz de amplitude invariante \mathcal{M} [29, 30].

$$\Gamma_{\varphi \rightarrow \chi\chi} = \frac{|\mathcal{M}|_{\varphi \rightarrow \chi\chi}^2}{32\pi m_\varphi^2} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\varphi^2}\right), \quad \Gamma_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi} = \frac{|\mathcal{M}|_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi}^2}{32\pi m_\varphi^2} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\varphi^2}\right). \quad (83)$$

²O limite inferior $\sim 10 \text{ MeV}$ é menor do que o necessário para a bariogênese eletrofraca ($T \gtrsim 100 \text{ GeV}$). Apesar disso, ainda pode haver formação de bárions e léptons por meio de oscilações locais de temperatura [27] e via mecanismo de Affleck-Dine [28].

Calculando os elementos de $|\mathcal{M}|^2$ em cada caso e assumindo $m_\chi > \sqrt{\varphi_m |\varphi|}$, $m_\varphi \gg m_\chi, m_\psi$, obtém-se

$$\Gamma_{\varphi \rightarrow \chi\chi} = \frac{g^2 \varphi_m^2}{8\pi m_\varphi}, \quad \Gamma_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi} = \frac{h^2 m}{8\pi}. \quad (84)$$

A taxa de decaimento total $\Gamma \equiv \Gamma_{\varphi \rightarrow \chi\chi} + \Gamma_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi}$ determina a variação de quanta de φ dentro de um volume co-movente a^3 . Para acoplamentos g, h fracos, pode-se assumir que ela obedece a equação de Boltzmann:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \rho_\varphi}{m_\varphi} \right) = -\Gamma \left(\frac{a^3 \rho_\varphi}{m_\varphi} \right) \equiv -\Gamma a^3 n_\varphi. \quad (85)$$

Trabalhando retroativamente a partir dessa expressão, os efeitos dissipativos podem ser qualitativamente aproximados por meio da introdução de um termo extra $\Gamma \dot{\varphi}$ à equação de Klein-Gordon (equação 13).

$$\ddot{\varphi} + (3H + \Gamma)\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0, \quad (86)$$

Após a inflação, $m \gg H \sim \Gamma (= t^{-1})$, e obtém-se o *ansatz* de WKB $\varphi(t) \approx \Pi(t) \cos(mt)$, com Π variando lentamente. Aplicando à equação (86) e desprezando $\ddot{\Pi}$ e $H\dot{\Pi}$,

$$2\dot{\Pi} + (3H + \Gamma)\Pi = 0 \Rightarrow \Pi(t) \sim \exp \left[-\frac{1}{2}(3H + \Gamma)t \right]; \quad (87)$$

portanto:

$$\varphi(t) = \varphi(0) \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3/2} e^{-\Gamma t/2} \cos(mt). \quad (88)$$

Esse resultado, como esperado, concorda com (85). Como g e h são tidas como pequenas, a dissipação só se torna significativa quando $H \approx \Gamma$, o que marca o fim da inflação e o início do reaquecimento. Usando a equação de Friedmann (3) e $H \approx \Gamma$,

$$\rho(\varphi) \approx 3\Gamma^2 m_{pl}^2. \quad (89)$$

Aqui, é pertinente fazer uma breve explicação da termodinâmica do Universo logo após o reaquecimento. Devido à temperatura extremamente elevada, é possível tratá-lo como um gás altamente térmico com partículas fracamente interagentes, cujos espaços de fase são ditados pelas distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Usando $|\vec{p}|^2 = E^2 - m^2$, tem-se a seguinte densidade para λ graus de liberdade:

$$\rho_\varphi = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) E d^3\vec{p} = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_m^\infty \frac{E^2(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{E/T} \pm 1} dE. \quad (90)$$

Como $T \gg m$, $\rho_\varphi = g^* \pi^2 T^4 / 30$, usando $g^* = g_S$ para bósons e $g^* = 7g_S/8$ para férmons. Igualando (89) e (90), obtém-se [22]

$$T_{\text{re}} \approx 0.74 \left(\frac{1}{g^*} \right)^{1/4} \sqrt{m_{pl} \Gamma}. \quad (91)$$

Conforme mencionado na Seção 2.1.3 $T_{\text{re}} \ll 10^{16}$ GeV, para que as simetrias não sejam restauradas e não haja produção de "resquícios exóticos". Para tal, impomos $\Gamma \ll m \sim 10^{-6}$ e $g^* \sim \mathcal{O}(100)$.

Essa abordagem, embora intuitiva, possui limitações significativas. A aproximação na equação (86) fornece uma boa visão fenomenológica, mas não é precisa o suficiente e ignora a influência de flutuações quânticas oriundas da dissipação [31, 32]. Ademais, o tratamento de φ como um conjunto de partículas livres é injustificado nos instantes logo após a inflação. Na prática, o inflaton é um condensado coerente, e os decaimentos acontecem de forma simultânea e interdependente. Finalmente, o número reduzido de partículas de χ e ψ no início do processo demanda as ferramentas da mecânica quântica, e a dependência temporal de suas massas efetivas produz *ressonâncias paramétricas*, muito mais eficientes em transferência de energia do que as perturbações clássicas.

Isso não torna a abordagem perturbativa inválida; na verdade, ela é imprescindível para a transição efetiva do estágio inflacionário ao Universo FLRW clássico. Contudo, ela deve ser reservada aos estágios finais do reaquecimento, quando a maior parte da energia de φ já decaiu. O primeiro estágio, desse modo, é denominado pré-aquecimento.

4.2 Pré-aquecimento: abordagem quântica

4.2.1 Análise de Floquet e equação de Mathieu

O inflaton é, ao final na inflação, quase perfeitamente homogêneo; nesse contexto, é possível tratá-lo como um campo de fundo *clássico* para os campos *quânticos* χ and ψ , que começam a uma densidade bem próxima do vácuo (mas não exatamente). Essencialmente, as oscilações de φ causam rápidas variações nas massas efetivas de χ e ψ , o que pode causar produção acelerada de partículas. Voltando-nos ao caso escalar, a ação S_χ e equação de Klein-

Gordon para um potencial qualquer $V(\varphi, \chi)$ são

$$S_\chi = \int a^2 d^3x dt \left[\frac{1}{2} |\partial_\mu \chi|^2 - V(\chi, \varphi) \right] \Rightarrow \quad (92)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\nabla^2 \chi}{a^2} + V_{,\chi} = 0. \quad (93)$$

Podemos expressar χ em termos dos operadores \hat{a} and \hat{a}^\dagger , tal que sua transformação de Fourier de \vec{x} para o momento co-movente $\vec{k} = \vec{p}/a$ se torna

$$\chi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\hat{a}_k \chi_{\vec{k}}^*(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_k^\dagger \chi_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]. \quad (94)$$

Daqui, podemos seguir os mesmos passos utilizados para chegar à equação (31), o que nos dá, no espaço dos momentos \vec{k} :

$$\ddot{\chi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\chi}_{\vec{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\chi} \right) \chi_{\vec{k}} = 0. \quad (95)$$

Para uma primeira aproximação, assumimos que as oscilações são rápidas o suficiente para que a expansão do espaço seja desprezível ($m_\varphi^{-1} \ll H^{-1}$), estabelecendo $a = 1$. Isso nos fornece uma versão da equação de Hill para oscilações periódicas:

$$\ddot{\chi}_{\vec{k}} + \omega^2(k, t) \chi_{\vec{k}} = 0, \quad \text{onde} \quad \omega^2 \equiv (k^2 + V_{,\chi}). \quad (96)$$

Segundo o teorema de Floquet [33, 34], a solução mais geral para (96) será uma combinação linear da forma

$$\chi_{\vec{k}}(t) = c_1 e^{\mu_{\vec{k}} t} \mathcal{P}_{\vec{k}+}(t) + c_2 e^{-\mu_{\vec{k}} t} \mathcal{P}_{\vec{k}-}(t), \quad (97)$$

na qual $\mu_{\vec{k}}$ é chamado de *expoente de Floquet*, e $\mathcal{P}_{\vec{k}\pm}$ são periódicos. O fenômeno de *ressonância paramétrica* se deve ao primeiro termo, que aumenta exponencialmente com o tempo — isto é, para certos modos de k , o campo χ cresce de forma acelerada. Nota-se que isso não acontece no caso fermiônico: devido ao princípio de exclusão de Pauli, a amplitude de ψ é muito rapidamente saturada [35, 36]. Devido a isso, é possível desprezar a produção de férmons durante o pré-aquecimento.

Como na última sub-seção, pode-se obter uma aproximação qualitativa considerando um modelo simplificado. Seja, desse modo, $V(\varphi, \chi)$ trilinear, expresso por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} g^2 \varphi^2 \chi^2 + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2. \quad (98)$$

Aplicando a $V(\phi, \chi)$ a (96), obtém-se

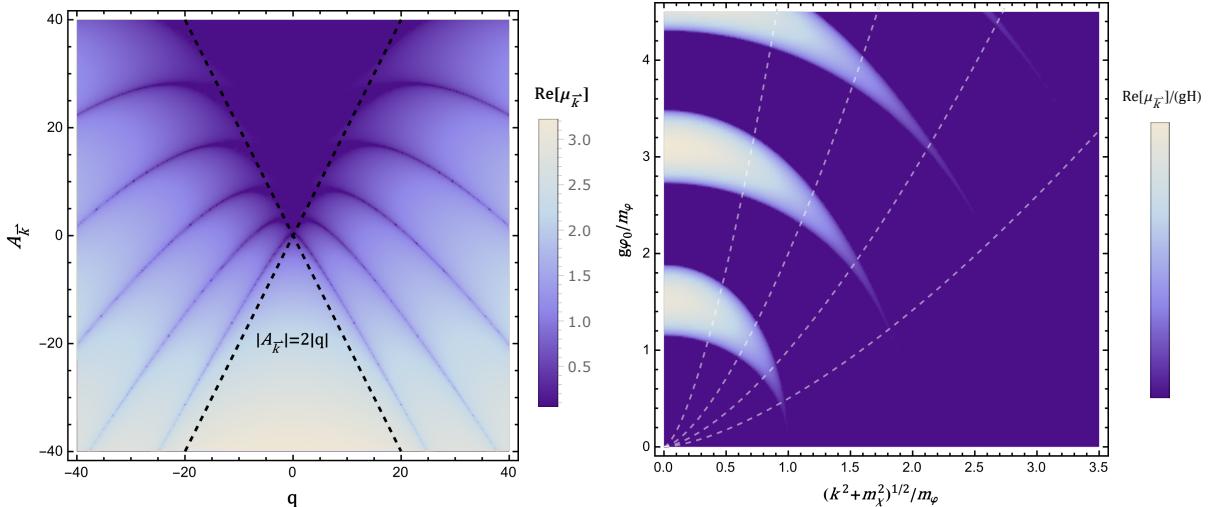
$$\ddot{\chi}_{\vec{k}} + [k^2 + m_\chi^2 + g^2\varphi^2(t)] \chi_{\vec{k}} = 0. \quad (99)$$

Partindo do *ansatz* WKB anterior para $\varphi(t)$, como há produção explosiva de partículas χ , assume-se que a amplitude $\Pi(t)$ cresce lentamente em relação às oscilações de χ , tal que $\varphi(t) \approx \varphi_0 \cos(m_\varphi t)$.³ Com isso, obtemos uma versão da equação de Mathieu, comumente expressa em função da unidade adimensional $z \equiv m_\varphi t$:

$$\frac{\partial^2 \chi_{\vec{k}}}{\partial z^2} + [A_{\vec{k}} + 2q \cos(2z)] \chi_{\vec{k}} = 0, \quad \text{onde} \quad A_{\vec{k}} \equiv \frac{(k^2 + m_\chi^2)}{m_\varphi^2} + 2q, \quad q \equiv \frac{g^2 \varphi_0^2}{4m_\varphi^2}. \quad (100)$$

Nesse caso, $\mu_{\vec{k}}$ é uma função de q e $A_{\vec{k}}$, e os regimes de oscilação podem ser divididos entre ressonância estreita e ressonância larga, como visto na Figura 3 (gráficos de *instabilidade-estabilidade*). Uma discussão sobre o algoritmo utilizado para calcular $\mu_{\vec{k}}$ é feita no Apêndice B.1. e na referência [38].

Figura 3 — Gráficos de instabilidade-estabilidade da equação de Mathieu.



Fonte: Elaboração própria. As linhas pontilhadas no painel esquerdo demarcam $A_{\vec{k}} = 2|q|$. As linhas no painel esquerdo mostram a evolução dos modos de k à medida que o espaço se expande e Φ cai ($\Phi \propto k_{\text{fis}}^{3/2}$, Seção 4.2.2).

Antes de prosseguirmos, vale a pena comentar sobre o estado inicial do campo χ . Segundo (97), se este fosse de fato um vácuo perfeito, isto é, $\chi_{\vec{k}}(t) = \dot{\chi}_{\vec{k}}(t) = 0$, a única solução possível seria $c_1 = c_2 = 0$. Isso reforça que, quando discutimos inflação e reaquecimento, sempre estamos lidando com idealizações. As flutuações iniciais, embora reduzidas, são fundamentais para gerar a ressonância.

³No modelo $V(\varphi) = (\lambda/4)\varphi^4 + (1/2)g^2\chi^2\varphi^2$, também bastante comum na literatura, a aproximação WKB fornece $\varphi(t) \propto \text{sn}(mt, k)$ (função elíptica), e a equação de Hill é convertida em uma equação de Lamé. Em geral, os dois modelos são qualitativamente bastante similares — consultar [37] para um tratamento analítico.

4.2.2 Ressonâncias estreita e larga

Os gráficos na Figura 3 são compostos por ilhas de estabilidade, onde $\mu_{\vec{k}} = 0$ (áreas escuras), cercados por regiões instáveis, onde $\mu_{\vec{k}} > 0$ e o campo χ cresce exponencialmente (áreas claras). O regime de ressonância estreita é definido por $|q| \ll 1$ e $A_{\vec{k}} > 2|q|$. Aqui, à medida que $q \rightarrow 0$, as regiões de instabilidade se tornam cada vez menores, aproximando-se de:

$$A_{\vec{k}} = l^2 \quad (l \in \mathbb{N}), \quad \Delta A_{\vec{k}} \approx q^l. \quad (101)$$

A maior e mais importante banda desse regime é a primeira, dada por $A_{\vec{k}} \approx 1 \pm |q| = 1 \pm g^2\varphi_0^2/4m_\varphi^2$, com um valor máximo do expoente de Floquet $\mu_{\vec{k}} \approx |q|/2$ [39, 40]:

$$\mu_{\vec{k}}^2 \approx \frac{q^2}{4} - \left(\frac{k}{m_\varphi} - 1 \right)^2 \Rightarrow \frac{m_\varphi}{2} \left(1 - \frac{|q|}{2} \right) < k < \frac{m_\varphi}{2} \left(1 + \frac{|q|}{2} \right). \quad (102)$$

No modelo trilinear proposto, isso corresponde ao intervalo $(m_\varphi/2 \pm g^2\varphi_0^2/6m_\varphi^2)$, com um pico $k = m_\varphi/2$ e crescimento máximo $\chi_{\vec{k}} \propto \exp[g^2\varphi_0^2 t/8m_\varphi]$. Partindo da equação (96), o número de ocupação $n_{\vec{k}}^\chi$ será similar ao de um oscilador quântico:

$$E_{\vec{k}} = \frac{|\dot{\chi}_{\vec{k}}|^2}{2} + \omega_{\vec{k}}^2 \frac{|\chi_{\vec{k}}|}{2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(n_{\vec{k}}^\chi + \frac{1}{2} \right) \omega_{\vec{k}} \Rightarrow \\ n_{\vec{k}}^\chi = \frac{(2\pi)^3}{\omega_{\vec{k}}} \left(\frac{|\dot{\chi}_{\vec{k}}|^2}{2} + \omega_{\vec{k}}^2 \frac{|\chi_{\vec{k}}|}{2} \right) - \frac{1}{2}. \quad (103)$$

Assim, $n_{\vec{k}}^\chi$ é proporcional ao quadrado do campo $\chi_{\vec{k}}$, com crescimento máximo de $n_{\vec{k}}^\chi \propto \exp[g^2\varphi_0^2 t/4m_\varphi]$. Sendo exponencial, esse processo é, no início do reaquecimento, bem mais eficiente do que as perturbações descritas na seção anterior, mesmo para valores baixos de acoplamento g^2 .

Se a amplitude inicial φ_0 (ou, alternativamente, g^2) for muito elevada, e, consequentemente, $|q| \gg 1$, a ressonância é dita larga, e ocorre para um intervalo bem maior de modos de k . Ela é catalisada primariamente pela quebra da condição adiabática.

$$\text{Condição adiabática: } \left| \frac{\dot{\omega}_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}^2} \right| \ll 1. \quad (104)$$

No regime estreito, como $|g\varphi_0| \ll m_\varphi$, a frequência $\omega_{\vec{k}}^2 = k^2 + m_\chi^2 + g^2\varphi^2(t)$ permanece aproximadamente constante, e a ressonância acontece simplesmente devido à acumulação de

pequenas variações ao longo do tempo, resultando no crescimento exponencial do campo $\chi_{\vec{k}}$. No regime largo, $\omega_{\vec{k}}$ varia de forma significativa ao longo do período T de $\varphi(t)$, o que permite instabilidade em intervalos contínuos de k . De fato, a razão entre as frequências (médias) de $\chi_{\vec{k}}$ e φ será

$$\frac{\langle \omega_{\vec{k}} \rangle}{m_{\varphi}} = \frac{(k^2 + m_{\chi}^2 + g^2 \varphi_0^2)^{1/2}}{m_{\varphi}} \sim q^{1/2} \gg 1. \quad (105)$$

Como $\omega_{\vec{k}}$ é muito alta para valores grandes $\varphi(t)$, $\chi_{\vec{k}}$ oscila de forma quase adiabática durante a maior parte do período T , exceto quando $\omega_{\vec{k}}$ se torna pequena o bastante para violar (104). Aplicando-a à equação (100), temos

$$\left| \left(\frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial z} \right) \right| \frac{1}{\omega_{\vec{k}}^2} = \frac{2q \operatorname{sen} 2z}{[A_{\vec{k}} + 2q \cos(2z)]^{3/2}} \ll 1. \quad (106)$$

Essa condição pode ser violada de duas formas:

- a) se $A_{\vec{k}} \lesssim 2|q|$, a condição não é válida para $z \approx \pi/4, 3\pi/4\dots$ ($\varphi \approx \varphi_0/\sqrt{2}$);
- b) se $A_{\vec{k}} \gtrsim 2|q|$ e $A_{\vec{k}} - 2q \ll q^{1/2}$, a condição não é válida para $z \approx \pi/2, 3\pi/2\dots$ ($\varphi \approx 0$).

Pode-se obter uma aproximação para as bandas instáveis de k e seu tempo característico Δt . No caso b), aproximando $\dot{\varphi} \approx m_{\varphi}\varphi_0$ próximo a $z = \pi/2$, a violação de (104) implica

$$\left| \frac{\dot{\omega}_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}^2} \right| \gtrsim 1 \Rightarrow (g^2 m_{\varphi}^2 \varphi \varphi_0)^{2/3} - g^2 \varphi \gtrsim (k^2 + m_{\chi}^2) \geq 0. \quad (107)$$

Essa expressão é parabólica em φ , com k máximo correspondente a $\varphi_{\max} = (m\varphi_0/4g)^{1/2}$.

Portanto,

$$0 \leq k \lesssim k_{\max} \approx \left(\frac{gm_{\varphi}\varphi_0}{2} \right)^{1/2} = m_{\varphi}q^{1/4}. \quad (108)$$

O caso a) é bastante similar, com $\dot{\varphi} \approx m_{\varphi}\varphi_0/\sqrt{2}$. Ao contrário do regime estreito, $k > m_{\varphi}$, representando a conversão coletiva da energia de φ em partículas χ relativamente mais energéticas. Cada oscilação de φ na faixa permitida dura $\Delta t \approx 2\varphi_{\max}/\dot{\varphi} \approx (\sqrt{2}k)^{-1}$, em concordância com o princípio de incerteza. Analiticamente, é possível analisar a ressonância larga como uma série de espalhamentos [41, 42]. Para um dado espalhamento j , $\mu_{\vec{k}}$ assume a forma aproximada

$$\mu_{\vec{k}}^j = \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + 2e^{-\pi\kappa^2} - 2\operatorname{sen} \theta_{\text{tot}}^j e^{-(\pi/2)\kappa^2} \sqrt{1 + e^{-\pi\kappa^2}} \right), \quad \text{onde} \quad \kappa^2 \equiv \frac{k^2}{gm_{\varphi}\varphi_0}. \quad (109)$$

Uma análise mais profunda de $\mu_{\vec{k}}$ e desse resultado pode ser encontrada no Apêndice

B.2. Nas próximas seções, serão discutidos alguns dos efeitos desconsiderados até o momento.

4.2.3 *Expansão e ressonância estocástica*

Aqui, devemos reintegrar a expansão do espaço à análise das ressonâncias paramétricas. Retornando à equação (93), ainda é possível encontrar uma equação de movimento similar a (96) por meio da transformação $X_{\vec{k}} = a^{3/2}\chi_{\vec{k}}$:

$$\ddot{X}_{\vec{k}} + \omega_X^2(k, t)X_{\vec{k}} = 0, \quad \text{onde} \quad \omega_X^2 \equiv \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\varphi_0^2\cos^2(mt) - \left(\frac{3H}{2}\right)^2 - \frac{3\dot{H}}{2}. \quad (110)$$

Esta já não é a equação de Hill, mas ainda pode fornecer uma visão qualitativa. Usando $\varphi_0 \propto a^{-3/2}$ e $3H^2 \approx -2\dot{H}$ (equação 17 para $\epsilon \approx 1$), percebe-se a relação

$$\varphi_0 \propto \left(\frac{k}{a}\right)^{3/2} \equiv k_{\text{fís}}^{3/2}. \quad (111)$$

O painel direito da Figura 3 traça a evolução dos modos de k co-movente. À medida que φ_0 diminui, os modos de k sofrem *redshift* e atravessam as faixas de ressonância. Apesar disso, é possível demonstrar que a equação (108) permanece válida para $k \rightarrow k_{\text{fís}}$: após a inflação, $a \propto t^{2/3}$, e temos, para o momento co-movente k ,

$$k_{\text{fís}} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{gm_\varphi\varphi_0}{2} \right)^{1/2} \propto t^{-1/2} \Rightarrow k = ak_{\text{fís}} \propto t^{1/6}. \quad (112)$$

Portanto, os modos k co-moventes amplificados no início da ressonância larga continuarão a crescer com $t^{1/6}$ até que ela termine. Embora novos modos continuem a entrar nas faixas largas, como $n_{\vec{k}}^\chi \propto e^{2\mu_{\vec{k}}m_\varphi}$, espera-se que os valores iniciais de k permaneçam exponencialmente dominantes entre as partículas produzidas nessa fase (Figura 8).

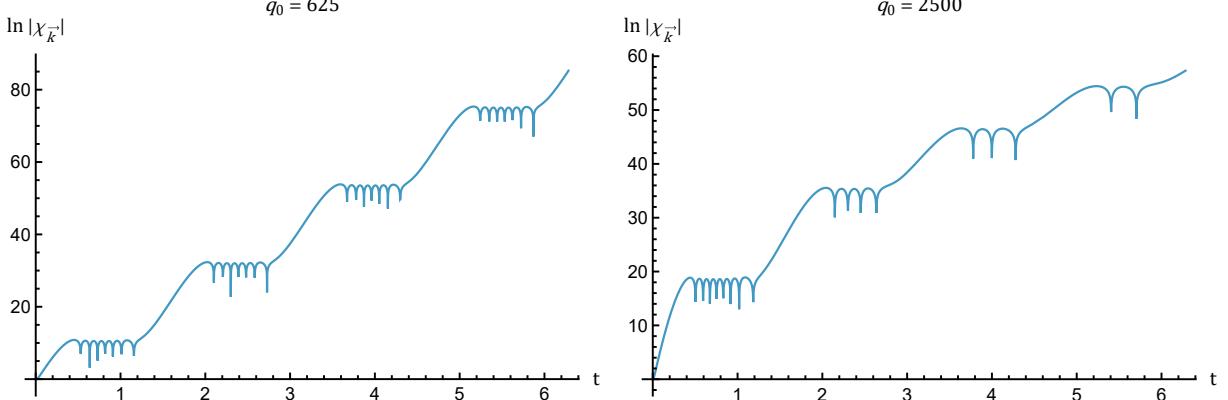
Além do *redshift* dos momentos, uma das consequências mais significativas da expansão do espaço é a alteração do fator q . O pré-aquecimento é primariamente caracterizado pela dominância da produção de partículas $\Gamma_{\text{pre}} \equiv \dot{n}_{\vec{k}}^\chi/n_{\vec{k}}^\chi = qm_\varphi$ sobre o decaimento perturbativo calculado em (88) $\Gamma_{\text{dec}} \equiv 3H + \Gamma$, que *cresce* com o tempo. Isso impõe, para $t \lesssim qH^{-1}$,

$$\Gamma_{\text{pre}} \gtrsim \Gamma_{\text{dec}} \Rightarrow g\varphi_0(t) \gtrsim 2m(H/m)^{1/4} \quad (\text{modelo trilinear}). \quad (113)$$

Como $\varphi_0(t) \sim t^{-1}$, este cai muito mais rapidamente do que $H^{1/4} \sim t^{-1/4}$. Para que a ressonância larga ocorra por um intervalo de tempo significativo, são necessários valores

iniciais de q muito elevados, da ordem de $q_0 \geq 10^3$. Nesse caso, o estágio inicial do pré-aquecimento é marcado pela chamada *ressonância estocástica*.

Figura 4 — Evolução de $\ln |\chi_{\vec{k}}| (t)$ para as ressonâncias larga usual e estocástica.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: ressonância larga no espaço de Minkowski. Painel direito: ressonância estocástica com $a \propto t^{2/3}$.

Na ressonância larga, o expoente de Floquet $\mu_{\vec{k}}$ não depende apenas da violação da condição de adiabaticidade, mas também da fase entre os campos $\chi_{\vec{k}}$ e φ (equações 109 e 212). Para q_0 muito elevado, $\chi_{\vec{k}}$ inicialmente oscila muito rapidamente e permanece dessincronizado em relação a φ . Portanto, no início do pré-aquecimento, $\mu_{\vec{k}}$ varia de forma essencialmente randômica (estocástica) entre 0 e 2π . A cada passagem $\varphi(t) = 0$, a amplitude $|\chi_{\vec{k}}|$ pode crescer ou diminuir. Apesar disso, em escalas de tempo longas o suficiente, $|\chi_{\vec{k}}|$ ainda cresce exponencialmente, embora de forma menos pronunciada do que o previsto pela equação de Mathieu (Figura 4). Conforme a amplitude de φ cai e os comprimentos de onda aumentam devido ao *redshift*, a análise usual da ressonância usando a equação de Mathieu volta a ser válida ($q \sim 1$).

A expansão do espaço também tem impacto sobre a ressonância estreita. Na Figura 3, observa-se que os modos de k atravessam as faixas estreitas muito mais rapidamente do que as largas. Se isso acontecer mais rápido do que a geração de partículas nessas faixas (isto é, se $H^{-1} \lesssim \mu_{\vec{k}}^{-1}$), a ressonância estreita é fortemente suprimida. Ademais, nos instantes finais do pré-aquecimento, quando sua relevância seria maior, efeitos não-lineares já são significativos o suficiente para enfraquecer-la (Seção 4.3.1). Devido a isso, a ressonância paramétrica normalmente é tratada apenas em termos das bandas largas.

4.3 Transição para a termalização

4.3.1 Reaquecimento não linear: fase transiente

À medida que o pré-aquecimento avança e novas partículas χ e ψ são rapidamente produzidas, suas interações entre si e com o inflaton φ deixam de ser desprezíveis, e já não é mais possível tratar φ como um campo de fundo. Essa fase do reaquecimento, denominada *transiente*,

é bastante breve e altamente não-linear. Ela marca o fim do domínio do inflaton e se inicia bem distante do equilíbrio térmico, com potencial para gerar diversos ”resquícios” potencialmente problemáticos. Duas características particularmente importantes são a mudança da frequência de oscilação m de φ , e a produção de partículas φ separadas do condensado por meio do *re-espalhamento* de χ , as quais dedicarei a presente sub-seção.

O primeiro fenômeno é bastante fácil de ilustrar por meio da aproximação de Hartree [43], a primeira solução proposta a esse problema. Esta é aplicável aos instantes iniciais, quando as densidades dos produtos ainda são relativamente baixas. Pressupõe-se que cada modo \vec{k} e cada campo (ou flutuação) evoluí de forma independente, sem nenhum acoplamento entre si, e aplica-se $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ ao potencial em (98). Com isso, obtemos as seguintes massas efetivas:

$$\overline{m}_\varphi^2 = \overline{m}_{\delta\varphi}^2 \equiv m_\varphi^2 + g^2 \langle \chi^2 \rangle, \quad \overline{m}_\chi^2 \equiv m_\chi^2 + g^2 (\langle \varphi^2 \rangle + \langle \delta\varphi^2 \rangle). \quad (114)$$

Aqui, $\langle *^2 \rangle$ são os valores médios de $*^2$ em um volume, normalizado no espaço de Fourier como

$$\langle *^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty |*_k|^2 k^2 dk. \quad (115)$$

Se os modos crescem exponencialmente, $\langle \chi^2 \rangle \propto |\chi_{\vec{k}}|^2 \propto e^{2\mu_{\vec{k}} m_\varphi t}$ e a frequência \overline{m}_φ de φ aumenta. Traçando um paralelo um pouco simplista com um oscilador harmônico simples, a conservação de energia resultaria em uma queda da amplitude efetiva $\overline{\varphi}_0$, aproximadamente $\overline{\varphi}_0 \sim (\overline{m}_\varphi)^{-1}$, extinguindo o pré-aquecimento; na notação de Mathieu, tomamos um q ”efetivo” $|\bar{q}| \equiv g^2 \overline{\varphi}_0^2 / 4\overline{m}_\varphi^2 \ll 1$. Sendo $m_\varphi^2 \approx g^2 \langle \chi^2 \rangle$, a variação da frequência se torna relevante em $t_1 \approx (\mu_{\vec{k}} m_\varphi)^{-1} \ln(m_\varphi/g)$. Expressando $\chi_{\vec{k}}(t)$ na sua forma WKB, é possível demonstrar que isso coincide com $n^\chi(t_1) \simeq m^2 \varphi_0(t_1)/g$ [42].

Todavia, em pouquíssimo tempo, a densidade n^χ cresce o suficiente para que a aproximação de Hartree deixe de ser válida, pois χ começa a ricochetear consideravelmente em φ e desintegrá-lo em ”partículas” individuais. A partir daqui, não é mais possível evitar a natureza não linear do sistema, e este se torna bastante caótico. Felizmente, para o caso escalar, como tanto φ quanto χ agora têm densidades significativas, podemos abandonar a mecânica quântica e tratar ambos classicamente.

No espaço de Fourier, o re-espalhamento aparece como o acoplamento de modos \vec{k}

de χ , φ e $\delta\varphi$ nas equações de movimento. Para as flutuações do inflaton, por exemplo, temos

$$\square\delta\varphi + m_\varphi^2\delta\varphi + g^2\chi^2\delta\varphi = 0 \Rightarrow \quad (116)$$

$$\delta\ddot{\varphi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\varphi} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\varphi^2\right)\delta\varphi_{\vec{k}} = -\frac{g^2}{(2\pi^3)} \left[\varphi_0(t) \int d^3p \chi_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}-\vec{p}} \right. \quad (117)$$

$$\left. \times \int d^3l d^3p \delta\varphi_{\vec{k}-\vec{p}+\vec{l}}\chi_{\vec{l}}\chi_{\vec{p}} \right].$$

Equações similares podem ser obtidas para χ e φ . A aproximação anterior é obtida se considerarmos o caso $\vec{p} = \vec{l}$ na segunda integral como a única contribuição do lado direito de (117). É fácil ver como esta se torna rapidamente imprecisa; a contribuição da primeira integral evolui exponencialmente com cada fator χ , tal que $\delta\varphi \sim \langle \chi_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}-\vec{p}} \rangle \propto e^{2m_\varphi\mu_k t}$, resultado direto do espalhamento de partículas φ para fora do condensado. Quando $\langle \delta\varphi^2 \rangle \gtrsim \varphi^2$, diz-se que o inflaton está *fragmentado*; esse é um passo fundamental no caminho para a termalização.

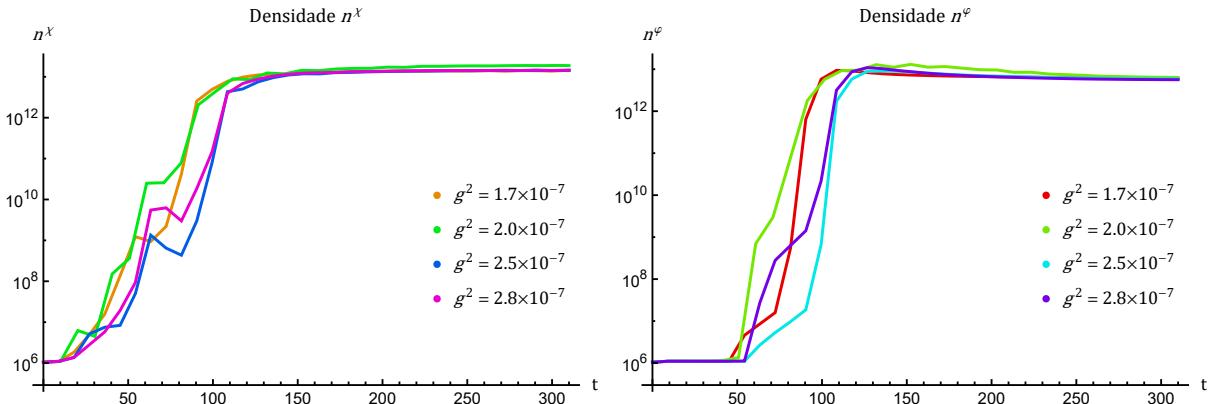
Embora um estudo analítico da fase transiente seja possível até certo ponto, métodos numéricos são atualmente amplamente favorecidos. A tarefa, sob esse prisma, é relativamente simples, consistindo simplesmente na resolução do sistema

$$\square\varphi + V_{,\varphi} = 0, \quad \square\chi + V_{,\chi} = 0, \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (118)$$

As ferramentas mais utilizadas para esse fim são as simulações em rede. Diversos programas de código aberto, tais como LATTICEEASY [44], DEFROST [45], GABE [46] e, mais recentemente, CosmoLattice [47] foram criados especificamente para esse problema. A maioria deles trabalha puramente com o espaço FLRW e despreza flutuações $\delta g_{\mu\nu}$, efetivamente simplificando (118) para um sistema de duas equações. Até o presente momento, todos os programas publicamente disponíveis estão limitados ao caso escalar, o que limita sua precisão em estágios avançadas do reaquecimento, quando $\Gamma_{\text{dec}} \gtrsim \Gamma_{\text{pre}}$.

Neste trabalho, foi utilizado o código LATTICEEASY no ambiente MinGW para *Windows* OS. Foram estabelecidos $L = 10/m$, $dt = 0,003$ e g^2 variando de $1.7 \cdot 10^{-7}$ a $2.8 \cdot 10^{-7}$ para fins de visualização. A expansão foi calculada de forma auto-consistente. Simulações similares podem ser encontradas nas referências [48, 49, 50, 51]. Normalmente estas são executadas com $N = 256^3$; devido a limitações computacionais, utilizei uma rede menor de $N = 128^3$, a qual é suficiente para os propósitos deste trabalho. Os resultados se encontram nas Figuras 5, 6, 8 e 9.

Figura 5 — Evolução das densidades n^χ e n^φ em gráfico semilog.



Fonte: Elaboração própria. Observa-se que n^χ cresce de forma aproximadamente exponencial até o momento em que as densidades se tornam comparáveis ($t \sim 100$).

4.3.2 Fase de turbulência e equilíbrio térmico

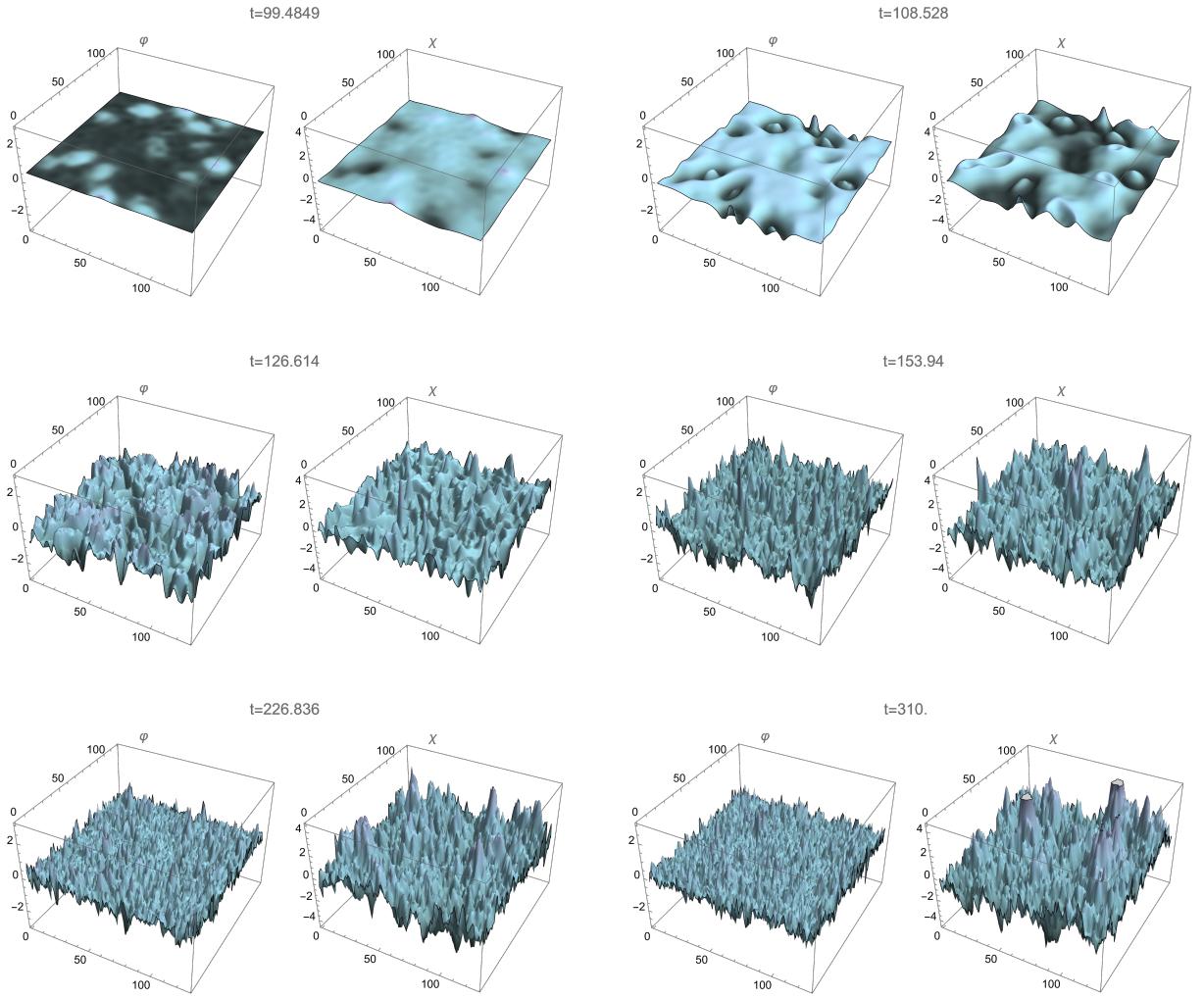
Na Figura 5 e nos primeiros painéis da Figura 6, podemos distinguir claramente as fases do pré-aquecimento já discutidas:

- ressonância paramétrica coerente em $t \leq 100$. Esse estágio é caracterizado pelo crescimento exponencial inicial de n_k^χ com um pico pronunciado próximo a $k \simeq k_{\max}/2 \simeq (gm_\varphi\varphi_0/8)^{1/2}$ (Figura 8);
- excitação de φ pelo re-espalhamento em $t \simeq 108$. As flutuações $\delta\varphi$ começam a crescer muito mais rápido do que χ , novamente com um pico próximo à banda dominante $k \simeq k_{\max}/2$. Por ora, devido ao curto alcance da interação trilinear $g^2\chi^2\varphi^2$, as inhomogeneidades de $\delta\varphi$ e χ têm perfis bastante similares;
- fase transitória, de $t \simeq 110$ a $t \simeq 130$. Aqui, as interações se tornam não-lineares. A banda principal de modos k se expande ligeiramente e o pico mais elevado translada de $\sim k_{\max}/2$ a $\sim k_{\max}$. Os picos de χ e φ alcançam sua amplitude máxima e começam a se espalhar e colidir violentamente. O caos rapidamente torna a ressonância ineficiente, e o pré-aquecimento termina.

Pouco depois do fim do pré-aquecimento, de $\tau \approx 250$ a $\tau \approx 2000$, os campos passam por uma longa fase de *escalada turbulenta*. Múltiplos picos de larguras comparáveis podem ser vistos, e as interações podem permanecer caóticas e não-gaussianas por bastante tempo. A estrutura geral dos campos durante esse estágio corresponde, com algumas diferenças, à turbulência estacionária de Kolmogorov para uma fonte estreita em um k finito [52]. Ademais, a Figura 6 sugere o provável desenvolvimento de *auto-similaridade* em algum momento t após o final da simulação em $t = 310$ — isto é, os espectros de χ e $\delta\varphi$ manteriam sua estrutura quando observados em diferentes escalas, tal como um fractal ou um aglomerado de galáxias. Isso motiva o seguinte *ansatz* para ambos números de ocupação nesse estágio [53]:

$$n(k, \tau) = \bar{\tau}^{-qp} n_0(k\bar{\tau}^{-p}). \quad (119)$$

Figura 6 — Evolução dos campos φ e χ .

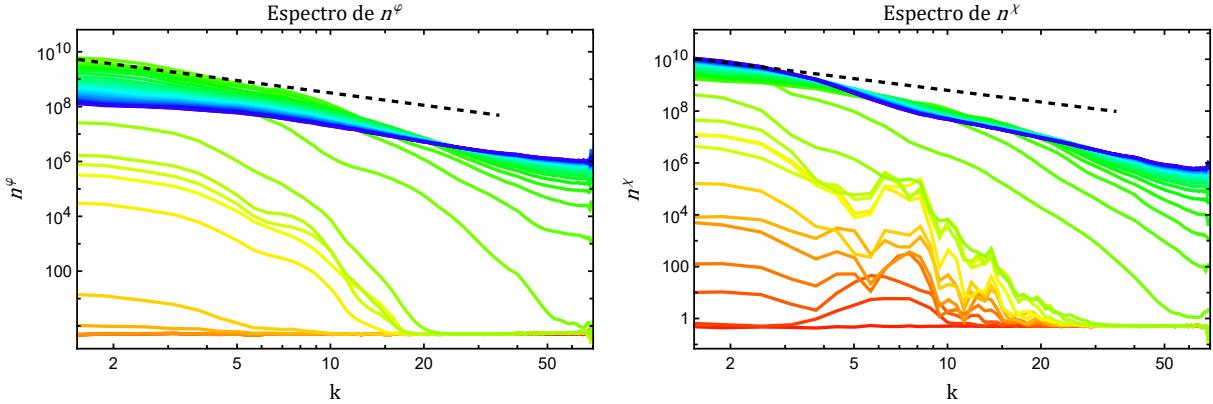


Fonte: Elaboração própria. Dados para $g^2 = 2,8 \cdot 10^{-7}$.

Aqui, define-se $\bar{\tau} \equiv \tau/\tau_c$, e τ_c é o momento em que a escalada turbulenta começa. O momento em que essa expressão se torna válida varia entre $\tau \simeq 200$ e $\tau \simeq 600$, a depender do modelo e da largura da banda de ressonância inicial. Numericamente, os valores mais apropriados para os expoentes giram em torno de $q \approx 3.5$ e $p \approx 0.2$ para maior parte dos modelos inflacionários, com $p \approx 1/7$ em estágios muito tardios — uma análise completa é feita em [54].

Durante a turbulência, a banda k principal ainda é proeminente, mas, muito lentamente, partículas de maior momento k se tornam mais numerosas. No instante $t \simeq 130$, as densidades $n_{\vec{k}}$ estão saturadas em $n(k) \propto (k/\varphi_0)^{-3/2}$ (Figura 7), como esperado em sistemas de turbulência quase-estacionária [55, 52], e ainda altamente concentradas na banda principal (Figura 8). À medida que as partículas se espalham, os modos de k "ultravioleta" crescem lentamente. No entanto, ao final da simulação (faixa azul escura na Figura 7), esse regime ainda está bem distante do equilíbrio térmico, no qual espera-se aproximadamente $n(k) \propto E_{\vec{k}}^{-1}$ para

Figura 7 — Evolução do espectro de φ e χ em gráfico log-log.

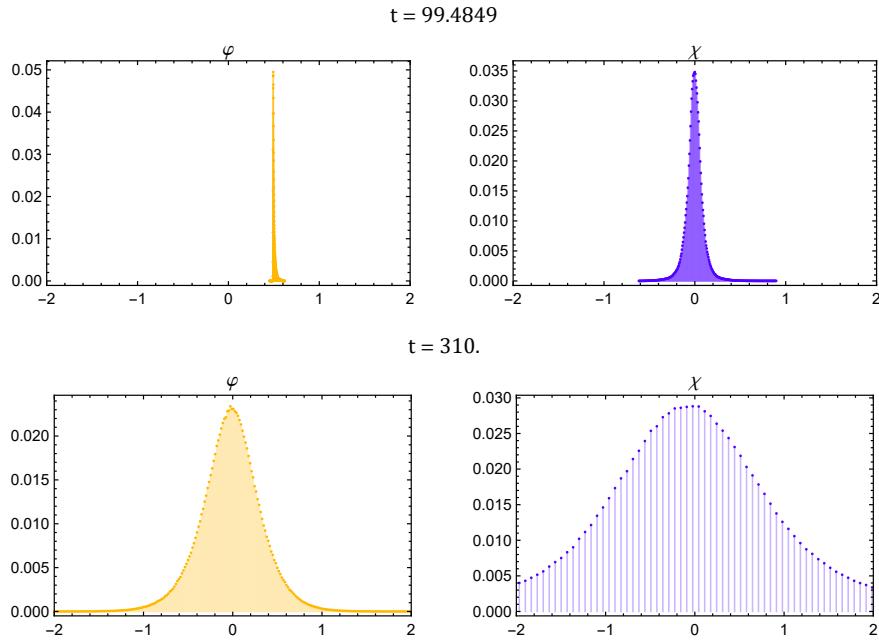


Fonte: Elaboração própria. Cores mais próximas do azul denotam t maior. As linhas pontilhadas representam a saturação em $n(k) \propto k^{-3/2}$; em ambos os campos, ela acontece em $t \simeq 130$, ao final da fase transiente. Dados para $g^2 = 2,8 \cdot 10^{-7}$.

baixos valores de k .

$$n_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{(E_{\vec{k}} - \mu)/T} - 1} \approx \frac{T}{E_{\vec{k}} - \mu} = \frac{T}{\sqrt{k^2 + m^2} - \mu} \quad (\text{limite clássico}). \quad (120)$$

Figura 8 — Evolução do espectro de φ e χ para $g^2 = 2,8 \cdot 10^{-7}$ em função do desvio da banda principal.



Fonte: Elaboração própria. Dados para $g^2 = 2,8 \cdot 10^{-7}$.

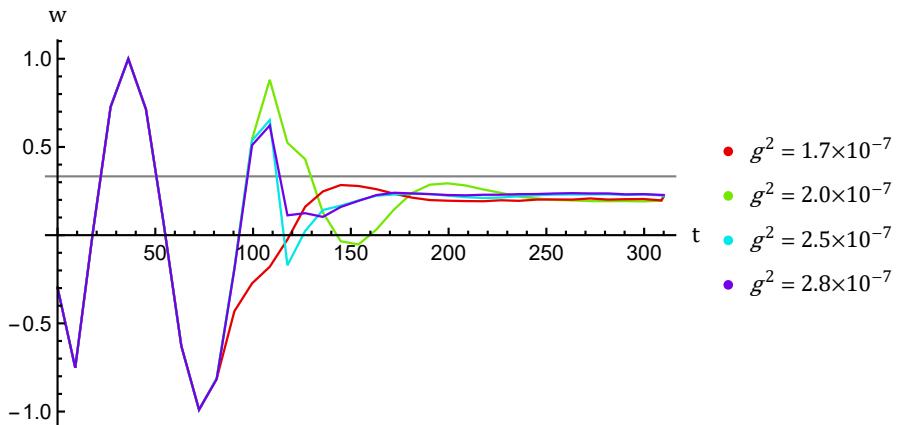
A termalização acontece quando a banda k principal finalmente perde força. A densidade total n_t é (aproximadamente) conservada e o espectro alcança $n_{\vec{k}} \sim 1$ para momentos k maiores. Nesse momento, a aproximação clássica (120) não pode mais ser utilizada. Como a densidade de energia por modo no "ultravioleta" é aproximadamente $\rho(k) \propto (k/a)^4 n(k)$, modos de k maiores dominam a distribuição de energia. A escala de tempo desse estágio final de

transição, normalmente denominado *turbulência livre*, é muito mais longa do que as anteriores. Das equação 119, obtém-se um tempo máximo τ_{ter} até o início do regime quântico [54]. Tomando $t \propto \tau^2$ temos, em unidades GeV^{-1} ,

$$\left(\frac{t_{\text{ter}}}{t_i}\right)^{p/2} \sim \frac{k_f}{k_i} \Rightarrow \left(\frac{t_{\text{ter}}}{t_i}\right) \sim \left(\frac{\rho_f^{1/4}}{q^{1/4}m_\varphi}\right)^{2/(1-p)} \quad \text{com} \quad p \approx \frac{1}{7}. \quad (121)$$

Usando as simulações de rede, pode-se também computar a evolução da equação de estado $\rho = wP$ durante e após o pré-aquecimento. Surpreendentemente, observa-se que w , após oscilar rapidamente nos primeiros instantes do reaquecimento ($t \lesssim 130$), evolui abruptamente de $w \approx 0$ para $w \approx 0.3$ (Figura 9), o que poderia ser ingenuamente interpretado como um estado de dominância por radiação.

Figura 9 — Equação de estado $w = P/\rho$ para diferentes valores de g .



Fonte: Elaboração própria. A linha horizontal demarca $w = 1/3$. Fonte: Elaboração própria.

Desse modo, atingir um estado macroscópico de $w \approx 1/3$ não pode ser suficiente para declarar que o reaquecimento acabou, pois, como vimos, um estado de equilíbrio térmico *local* pode levar muito tempo para ser atingido.⁴ A evolução de w com o tempo sugere uma correção ao último termo da equação (23) para ΔN_* , em que o valor fixo w_{re} deve ser substituído por uma média efetiva $w_{\text{ef}} \equiv \langle w(t) \rangle$ ao longo do reaquecimento [57]. Esse efeito é particularmente relevante para longos períodos de reaquecimento ΔN_{re} .

$$w_{\text{ef}} = \frac{1}{\Delta N_{\text{re}}} \int_0^{\Delta N_{\text{re}}} w(N') dN'. \quad (122)$$

ΔN_{re} tem efeito direto sobre a temperatura final T_{re} : escalas de tempo maiores implicam mais

⁴Para modelos $V \sim \varphi^p$, $p \neq 2$, $w \neq 0$ no início do reaquecimento. No entanto, é observada a evolução qualitativa durante o reaquecimento, com estabilização em $w \approx 0.3$ — ver [49, 56] para análises de w para diferentes expoentes e constantes de acoplamento.

redshift e T_{re} mais baixa. Para a maior parte dos modelos, a condição $10 \text{ MeV} \lesssim T_{\text{re}} \lesssim 10^{16} \text{ GeV}$ limita-o a $10 \lesssim \Delta N_{\text{re}} \lesssim 40$ [58, 59].

É importante reconhecer as limitações da análise tradicional do reaquecimento. Até o presente momento, a maior parte da literatura foca em interações *vierbein* do tipo $g^2 \varphi^2 \chi^2$. No entanto, esta é pouco térmica, resultando em uma escala de tempo excessivamente longa até a termalização ($t_{\text{ter}} \sim 10^{16}$). Uma estimativa de T_{re} baseada apenas nesse tipo de interação forneceria valores baixos demais, na escala de $\sim 1 \text{ keV}$ para constantes de acoplamento viáveis [60]. De fato, o decaimento *vierbein* não pode existir sozinho: um processo $\chi\chi \rightarrow \varphi\varphi$ (e vice-versa) obviamente poderia se manter por tempo indeterminado, e o inflaton nunca desapareceria. Interações perturbativas *dreibein* (equação 84), embora pouco significativas durante o pré-aquecimento, são vitais para que φ se desintegre e o Universo alcance as escalas de energia necessárias. A adição de termos lineares $\sigma\varphi\chi^2$, pode acelerar a desintegração do inflaton, bem como aumentar a eficiência do pré-aquecimento via ressonância taquionica [61, 62], a produção de fermions, embora lenta após a saturação, pode se tornar relevante no reaquecimento tardio, e interações com campos de *gauge* são fundamentais para a magnetogênese primordial [63, 64]. Um entendimento completo do reaquecimento, de modo a considerar todas as interações, ainda não foi alcançado.⁵

⁵Em modelos $V \sim \varphi^p$, $p > 4$, o inflaton naturalmente irradia mais rápido do que a radiação ($w > 1/3$). No entanto, na ausência de outras interações, esse processo não garante a termalização na escala necessária.

5 MODELOS INFLACIONÁRIOS

Desde o surgimento da cosmologia inflacionária na década de 1980, centenas de modelos já foram propostos: a versão mais recente da biblioteca *Previsões Precisas de Roloamento Lento na Cosmologia Inflacionária* (ASPIC, do inglês *Accurate Slow-roll Predictions for Inflationary Cosmology*) [65], atualizada em janeiro de 2025, reúne mais de 118 modelos distintos. Ao analisar os espectros de cada modelo para diferentes temperaturas de reaquecimento, é possível determinar quais deles são mais compatíveis com o estado atual da CMB. Neste trabalho, utilizei primariamente os dados coletados pelo satélite *Planck*, lançado pela ESA em 2009, e pelo projeto *BICEP/Keck* (do inglês *Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*).

Planck mede principalmente os espectros de temperatura (TT) e dos modos E de polarização (EE, lowE), além da correlação cruzada entre eles (TE). Estes são relativos às perturbações primordiais escalares (Seção 3.3.1), e podem ser refinados por meio de cálculos do efeito de lente gravitacional (*lensing*). Os dados mais recentes, coletados em 2018, foram utilizados na última edição da *Encyclopaedia Inflationaris* [9], que analisou todos os modelos então presentes na biblioteca ASPIC.

O projeto *BICEP/Keck*, por sua vez, especializa-se na detecção dos modos B de polarização, relativos a perturbações tensoriais (Seção 3.3.2). Estes são muito mais tênues, e *Planck* não é sensível o suficiente para aferi-los. Os últimos dados, divulgados em 2021 (Tabela 1), forneceram estimativas muito mais restritivas à razão tensor-escalar r , passando de $r < 0,11$, em *Planck-2018*, para $r < 0,036$ [66, 67].

Tabela 1 — Parâmetros cosmológicos observáveis.

Parâmetros	Planck-2018 + BAO + BK18
H_0	67.36 ± 0.54
Ω_K	0.0007 ± 0.0037
$10^2 t_{\text{esp}}$	1.04092 ± 0.00031
τ_p	0.0544 ± 0.0073
$\ln(10^{10} A_s)$	3.044 ± 0.014
n_s	0.9587 ± 0.0042
r_*	< 0.036
α_s	-0.0044 ± 0.0067

Fonte: *Planck 2018 results — X. Constraints on Inflation*. Parâmetros são calculados em $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$. Acesso em: 22 mai. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833887>>.

É cabível, portanto, reanalisar a compatibilidade dos modelos inflacionários mais relevantes frente às novas evidências. Foi empregado o código ASPIC para computar as previsões de seis deles: Campo Grande (*Large Field*, LFI), Campo Pequeno (*Small Field*, SFI), Natural (NI), Colina Modulada (*Mutated Hilltop*, MHI), Starobinsky-Higgs (SI-HI) e Higgs com Correção Radiativa (*Radiatively Corrected Higgs*, RCHI). Cada um é parametrizado por uma escala de massa M^4 , mais adequada e flexível do que m^2 por razões dimensionais ($V = [\text{massa}]^4$), que pode ser fixada por meio do parâmetro A_s . Como o espectro de perturbações permanece quase inalterado em escalas super-Hubble, sabe-se que, no cruzamento $k_* = aH$, A_s tinha o mesmo valor que possui hoje. Das equações 69 e 70, obtemos

$$P_{s*} \simeq A_{s*} = \frac{V(\varphi_*)}{24\pi^2\epsilon_*} \simeq 2.10 \cdot 10^{-9}. \quad (123)$$

Com isso, as previsões de cada modelo para n_s e r podem ser computadas e comparadas com as observações. Nas subseções seguintes, será fornecida uma breve introdução a cada modelo, com justificações teóricas relevantes e cálculos de ϵ_* , η_* and M como funções de $\Delta N_* \equiv N_f - N_*$. Os gráficos de cada um no plano (n_s, r) são dados na Seção 5.7. Como na Seção 4, o ambiente MinGW para *Windows* OS foi utilizado, com compiladores de Fortran e GCC. O rolamento lento é a única aproximação utilizada de forma nativa pelo código ASPIC. Seus resultados são bastante consistentes com cálculos exatos [68], com variações inferiores a 0,5%.

5.1 Inflação de Campo Grande (LFI)

Modelos de campo grande, também chamados de caóticos, foram inicialmente propostos de forma fenomenológica em 1983 [69, 70]. São os mais simples dentre os de campo único e, portanto, amplamente utilizados para propósitos pedagógicos. De fato, o potencial que utilizei ao longo da última seção (equação 98) pertence a essa categoria. São monotônicos e definidos pelo parâmetro livre p :

$$V(\varphi) = M^4\varphi^p. \quad (124)$$

Embora LFI normalmente seja estudada com $p \in \mathbb{N}$, algumas de suas motivações teóricas, particularmente em modelos de supergravidade, permitem expoentes fracionários [71, 72, 73]. Nesse contexto, considera-se um potencial de Kähler K , invariante sob uma transformação $\sigma^n \rightarrow \sigma^n + \alpha$, e um superpotencial W que quebre a simetria:

$$K = \frac{c(\sigma + \sigma^\dagger)}{m_{\text{pl}}^{(n-1)/2}} + \frac{(\sigma + \sigma^\dagger)^2}{2m_{\text{pl}}^{n-1}} + |\Sigma|^2 - c_\Sigma |\Sigma|^2, \quad W = \lambda\Sigma\sigma^m. \quad (125)$$

Na supergravidade, o potencial escalar V é determinado pela relação

$$V = e^{K/m_{\text{pl}}^2} \left(g^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W} - \frac{3}{m_{\text{pl}}^2} |W|^2 \right) \quad \text{onde} \quad D_i W = \partial_i W + \frac{1}{m_{\text{pl}}^2} (\partial_i K) W. \quad (126)$$

Para $c_\Sigma \lesssim 1$, $\Sigma \simeq 0$ permanece estável durante a inflação. Nesse caso,

$$V = e^{c^2/2} \lambda^2 (\sigma^\dagger \sigma)^m, \quad (127)$$

ou, definindo o inflaton real via $\sigma^n m_{\text{pl}}^{-(n-1)/2} \equiv \varphi/\sqrt{2} + c/2$:

$$V(\varphi) = e^{c^2/2} \lambda^2 \varphi^{2m/n} \equiv M^4 \varphi^p. \quad (128)$$

A partir do potencial, calculamos os fluxos de Hubble ϵ_1 e ϵ_2 e estabelecemos $\epsilon_f = 1$ ao fim da inflação:

$$\epsilon_1 = \frac{p^2}{2\phi^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{p(p-1)}{\phi^2} \Rightarrow \varphi_f^2 = \frac{p^2}{2\epsilon_1}. \quad (129)$$

Calculando e invertendo equação 19 para ΔN_* , obtém-se

$$\varphi_*^2 = 2p \left(\Delta N_* + \frac{p}{4} \right). \quad (130)$$

A equação (123) fornece $M/m_{\text{pl}} \approx 4.5 \cdot 10^{-6}$ para $p = 2$ e $M/m_{\text{pl}} \approx 2,1 \cdot 10^{-7}$ para $p = 4$, o que justifica o uso de $\sim 10^{-12} m_{\text{pl}}^2$ como a escala de massa nas seções anteriores. Como o potencial têm mínimo bem definido em $\varphi = 0$, a equação de estado ao final da inflação pode ser obtida por meio dos valores médios de P e ρ [74]. Pelo teorema do virial,

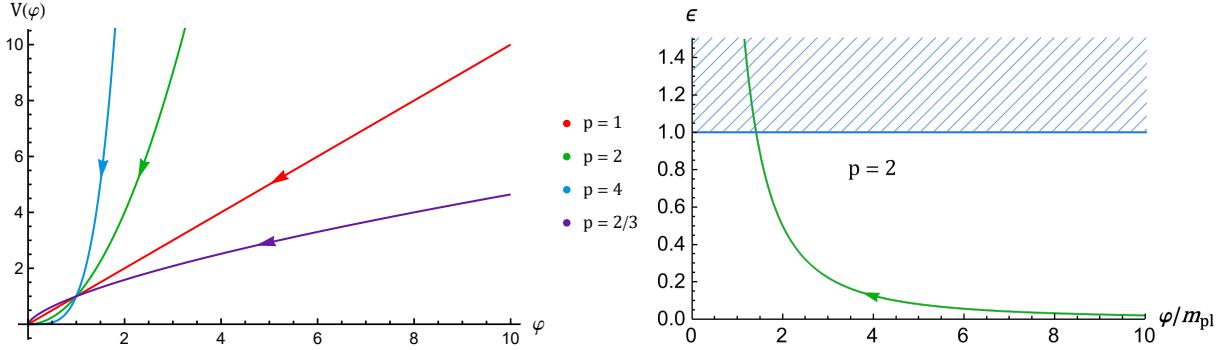
$$w_{\text{reh}} = \frac{\langle P \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{p}{p+2} \langle \rho \rangle - \frac{2}{p+2} \langle \rho \rangle \right) = \frac{p-2}{p+2}. \quad (131)$$

O resultado $w_{\text{reh}} = 0$ para $p = 2$ será importante nas próximas seções, pois a maior parte dos modelos inflacionários é aproximadamente quadrático próximo ao seu mínimo.

5.2 Inflação de Campo Pequeno (SFI)

Essa classe, popularmente chamada de "inflação de colina", foi introduzida em 1982 [75, 76] nos contextos de supergravidade e correções radiativas, mas também pode surgir estudada em diversos outros cenários, como campos modulares [77] e cosmologia de branas [78]. Dentro os modelos analisados neste trabalho, é o único com mais de um parâmetro livre: o

Figura 10 — Inflação de campo grande.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação.

expoente p e a normalização μ (Figura 11).

$$V(\varphi) = M^4 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\mu} \right)^p \right], \quad \frac{\varphi}{\mu} < 1. \quad (132)$$

Analogamente à seção anterior, calculamos os fluxos de Hubble e estabelecemos $\epsilon_f = 1$:

$$\epsilon_1 = \frac{m_{pl}^2 p^2}{2} \frac{\varphi^{2p-2}}{(\mu^p - \varphi^p)^2}, \quad e_2 = \frac{m_{pl}^2 p(p-1)\varphi^{p-2}}{(\mu^p - \varphi^p)}, \quad (133)$$

$$\varphi_f^p \left(1 + \frac{m_{pl} p}{\sqrt{2}\varphi_f} \right) - \mu^p = 0. \quad (134)$$

A integral (19) é resolvida diretamente, com o caso $p = 2$ computado à parte:

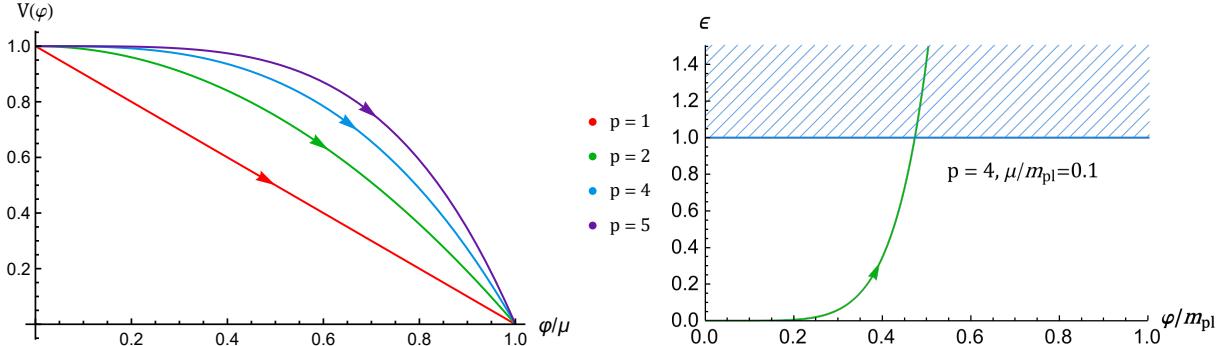
$$p \neq 2 : \quad N \approx \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V_{,\varphi}} d\varphi = \frac{\mu^2}{2m_{pl}^2 p^2} \left[\frac{\varphi_i^2 - \varphi_f^2}{\mu^2} - \frac{2}{(2-p)} \left(\frac{\varphi_i^{2-p} - \varphi_f^{2-p}}{\mu^{2-p}} \right) \right], \quad (135)$$

$$p = 2 : \quad N \approx \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V_{,\varphi}} d\varphi = \frac{\mu^2}{4m_{pl}^2} \left[\frac{\varphi_i^2 - \varphi_f^2}{\mu^2} - 2 \ln \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_f} \right) \right]. \quad (136)$$

A expressão (134) é facilmente resolvida para $p \in \mathbb{N}$; no entanto, a inversão das equações 135 e 136 pode ser matematicamente bastante complicada. Devido a isso, a SFI é normalmente subdividida em dois casos fisicamente relevantes:

- a) Caso "menor" ($\mu \ll m_{pl}$), para $p > 1$: Mais comumente utilizada, essa aproximação é particularmente necessária no contexto da supergravidade [79, 80]. Aqui,

Figura 11 — Inflação de campo pequeno.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação.

desprezamos φ_f^p em (134), bem como os termos quadráticos de ΔN . Isso fornece:

$$p \neq 2 : \quad \varphi_* \simeq \mu \left[-\frac{m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} p(2-p)\Delta N_* + \left(\frac{\sqrt{2}\mu}{m_{\text{pl}} p} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \right]^{1/(2-p)}, \quad (137)$$

$$p = 2 : \quad \varphi_* \simeq \exp \left[\frac{2m_{\text{pl}}^2 \Delta N_*}{\mu^2} \right] \left(\frac{\sqrt{2}\mu}{m_{\text{pl}} p} \right)^{1/(p-1)}. \quad (138)$$

b) Caso "maior" ($\mu \gg m_{\text{pl}}$): Nesse caso, realiza-se uma expansão de Taylor de φ_f em torno de $m_{\text{pl}}/\mu \ll 1$.

$$\frac{\varphi_f}{\mu} = 1 - \frac{m_{\text{pl}}}{\mu\sqrt{2}} + \frac{p-1}{4} \frac{m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \dots \quad (139)$$

Aplicando a (135) e desprezando os termos quadráticos em (m_{pl}^2/μ^2) , temos:

$$\varphi_* \simeq 1 - \frac{m_{\text{pl}}}{\mu} \left(\frac{1}{2} + 2\Delta N_* \right)^{1/2}. \quad (140)$$

A normalização (123) fornece valores na escala de $M/m_{\text{pl}} \simeq 5,0 \cdot 10^{-3}$ para ($p = 4$, $\mu/m_{\text{pl}} = 10$) a $M/m_{\text{pl}} \simeq 7,1 \cdot 10^{-2}$ ($p = 2$, $\mu/m_{\text{pl}} = 0.1$). Para $p \geq 2$, o potencial é aproximadamente quadrático próximo ao mínimo $\varphi_f = \mu$, e $w_{\text{re}} \approx 0$.

$$V(\varphi) = M^4 \left[\frac{p}{\mu} (\mu - \varphi) - \frac{p(p-1)}{2\mu^2} (\mu - \varphi)^2 - \dots \right]. \quad (141)$$

5.3 Inflação Natural (NI)

Proposto em 1990, [81, 82], esse modelo usa quebra de uma simetria global para gerar inflação via bósons de Nambu-Goldstone. Em essência, considera-se a seguinte ação para

um campo escalar Φ e um campo fermiônico Ψ , com $\Psi_{L,R} = (1 \pm \gamma_5)/2\Psi$ definidos como as projeções esquerda e direita:

$$S = - \int dx \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g_f (\bar{\Psi}_L \Phi \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L) - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{f^2}{2} \right)^2 \right].$$

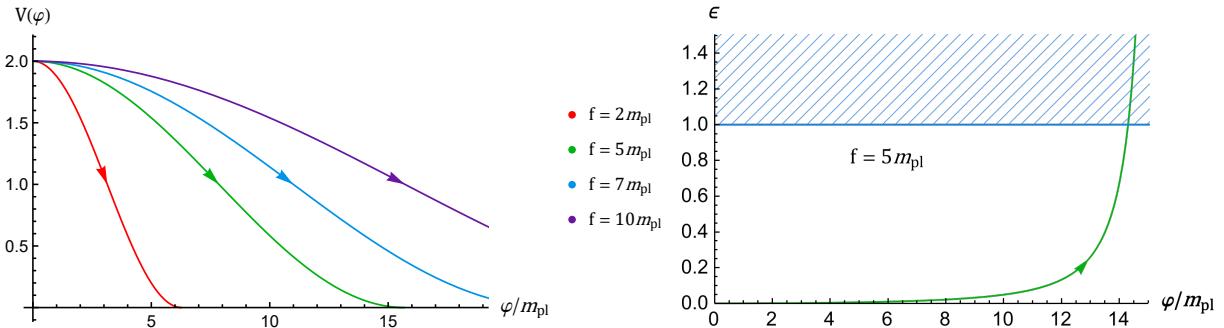
A simetria quiral global é expressa pelas transformações $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha}$, $\Psi_L \rightarrow \Psi_L e^{i\alpha/2}$, $\Psi_R \rightarrow \Psi_R e^{-i\alpha/2}$. Abaixo da energia f , o sistema adquire um valor esperado no vácuo (*vev*) de $\langle \Phi \rangle = f\sqrt{2}e^{i\varphi/f}$, onde φ é um bóson de Nambu-Goldstone. A lagrangiana efetiva se torna:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g_f \frac{f}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_L \Psi_R e^{i\varphi/f} + \bar{\Psi}_R \Psi_L e^{-i\varphi/f}). \quad (142)$$

É introduzida em seguida uma quebra de simetria explícita, na qual $\langle \Psi^\dagger \Psi \rangle = M_{\text{sim}}^3$ na escala de energia $M_{\text{sim}} < f$. O segundo termo em (142) naturalmente assume a forma $\cos(\varphi/f)$. Tomando $g_f M_{\text{sim}}^3 f = M^4$ como a escala geral de massa, pode-se expressar o potencial na forma (Figura 12)

$$V(\varphi) = M^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\varphi}{f} \right) \right]. \quad (143)$$

Figura 12 — Inflação natural.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação.

Seguindo os passos usuais, calculamos ϵ_1 e ϵ_2 , e estabelecemos $\epsilon_f = 1$ como o fim da inflação.

$$\epsilon_1 = \frac{m_{\text{pl}}^2}{2f^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\varphi}{f} \right)}{\left[1 + \cos \left(\frac{\varphi}{f} \right) \right]^2}; \quad \epsilon_2 = \frac{2m_{\text{pl}}^2}{f^2} \frac{1}{1 + \cos \left(\frac{\varphi}{f} \right)}, \quad (144)$$

$$\varphi_f = f \cos^{-1} \left(\frac{m_{\text{pl}}^2 - 2f^2}{m_{\text{pl}}^2 + 2f^2} \right). \quad (145)$$

O resultado para ϵ_2 em (144) implica que, em geral, $f^2 \gg m_{\text{pl}}^2$ é uma condição necessária para a aproximação de rolamento lento. Calculando e invertendo a integral para

ΔN_* , obtém-se:

$$\frac{\varphi_*}{f} = \cos^{-1} \left\{ 1 - \frac{4f^2}{m_{\text{pl}}^2 + 2f^2} \exp \left(-\frac{m_{\text{pl}}^2 \Delta N_*}{f^2} \right) \right\}. \quad (146)$$

Dadas as restrições para ΔN_* , a normalização (123) fornece $M/m_{\text{pl}} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ para valores pequenos de f ($f = 2m_{\text{pl}}$), até $M/m_{\text{pl}} \simeq 1 \cdot 10^{-2}$ para valores maiores ($f = 100m_{\text{pl}}$). O limite $f/m_{\text{pl}} \rightarrow \infty$ recupera o caso $p = 2$ de LFI. Próximo ao mínimo $\varphi = \pi f$, o potencial é quadrático, e $\omega_{\text{re}} \approx 0$.

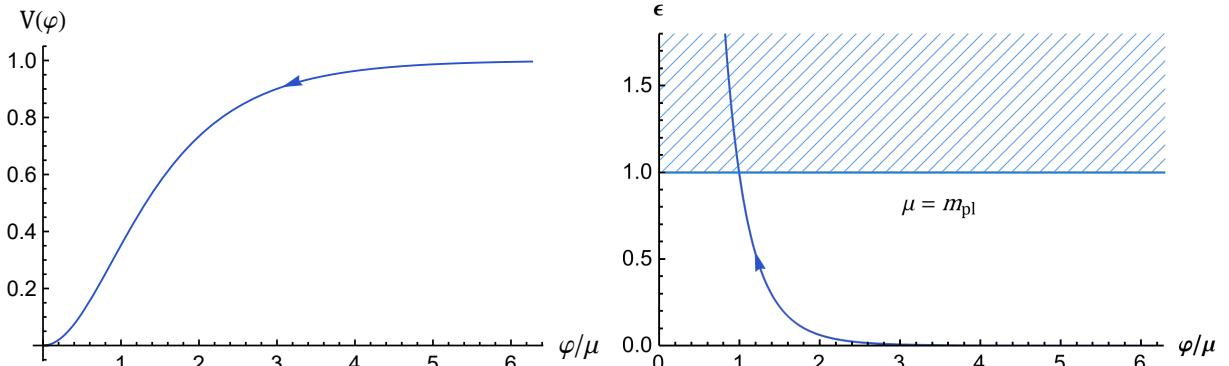
$$V(\varphi) = M^4 \left[\frac{(\pi f - \varphi)}{2f^2} + \dots \right]. \quad (147)$$

5.4 Inflação de Colina Modulada (MHI)

Esse modelo é uma adaptação da classe SFI, proposto em 2010 e estudado ao longo da última década [83, 84, 85]. É predominantemente fenomenológico, mas pode ser derivado no contexto da supergravidade [86]. O potencial é expresso como (Figura 13):

$$V = M^4 \left[1 - \operatorname{sech} \left(\frac{\varphi}{\mu} \right) \right]. \quad (148)$$

Figura 13 — Inflação de colina modulada.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação. Gráficos parametrizados para $\mu = m_{\text{pl}}$.

Dele, derivamos os fluxos ϵ_1 e ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = \frac{m_{\text{pl}}^2}{2\mu^2} \cot^2 \left(\frac{\varphi}{2\mu} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varphi}{\mu} \right); \quad \epsilon_2 = \frac{m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \left[\operatorname{csch}^2 \left(\frac{\varphi}{2\mu} \right) + 2\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varphi}{\mu} \right) \right]. \quad (149)$$

A condição $\epsilon_f = 1$ gera uma solução unívoca para φ_f , embora bastante complicada [9]. Aplicando-a à integral para ΔN_* e invertendo-a, pode-se escrever φ_* em termos da função de Lambert

W_{-1} :

$$\varphi_* = \mu \cosh^{-1} \left(-1 - W_{-1} \left\{ -(1 - \cos \left(\frac{\varphi_f}{\mu} \right)) \right\} \times \exp \left[-\frac{m_{pl}^2 \Delta N_*}{\mu^2} - 1 - \cosh \left(\frac{\varphi_f}{\mu} \right) \right] \right). \quad (150)$$

Usando φ_* , podemos calcular a normalização de M^4 . O caso mais relevante é o limite $\mu \ll m_{pl}$, para o qual $\varphi_* \simeq \mu \ln(\sqrt{2}m_{pl}/\mu)$. Para $\mu/m_{pl} = 0.1$, por exemplo, obtemos $M/m_{pl} \simeq 1 \cdot 10^{-3}$. Similarmente aos potenciais anteriores, o potencial MHI é quadrático próximo ao seu mínimo $\varphi = 0$, e $\omega_{re} \approx 0$.

$$V(\varphi) = M^4 \left[\frac{\varphi^2}{2\mu^2} + \dots \right]. \quad (151)$$

5.5 Inflação de Starobinsky-Higgs (SI, HI)

5.5.1 *Modelo original de Starobinsky*

Proposto em 1980 por Alexei Starobinsky [87, 88], esse modelo é baseado em uma ideia notavelmente elementar. Segundo ele, a inflação é meramente uma consequência de correções quânticas ao estado de vácuo das equações de campo. Na sua versão mais simples, ele considera campos quânticos, sem massa e covariantemente conformes, que interagem com o campo gravitacional. Isso é expresso por meio de um acoplamento não mínimo no componente gravitacional da ação em (11):

$$S_{\text{grav}} = \frac{M_g^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad \text{onde} \quad f(R) = R + \mu^2 R^2. \quad (152)$$

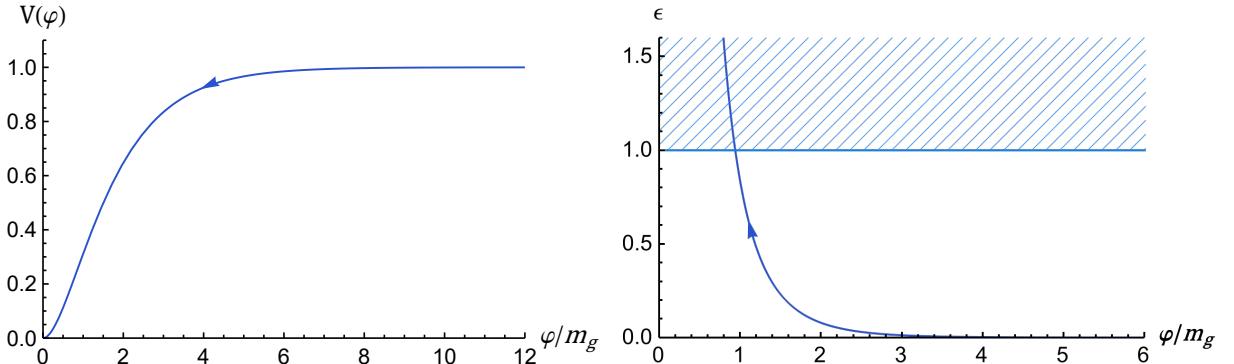
Starobinsky demonstra que isso gera um valor esperado $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ não nulo, ou "anomalia do traço", que, por sua vez, age como fonte de energia da inflação [89, 90]. A forma usual do potencial de SI pode ser derivada a partir de (152) por meio de uma transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}$, tal que $\sigma(R) = F(R) \equiv \partial f / \partial R$. Definimos o inflaton φ como

$$\frac{\varphi}{M_g} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln (1 + 2R\mu^2), \quad (153)$$

e, substituindo-o em S_{grav} , obtém-se (Figura 14)

$$V(\varphi) = M^4 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_g} \right) \right]^2, \quad \text{onde} \quad M^4 \equiv \frac{M_g^2}{8\mu^2}. \quad (154)$$

Figura 14 — Inflação de Starobinsky.



Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação.

Cálculos mais detalhados podem ser encontrados nas referências [91, 9, 92]. Percebe-se que (154) não depende de nenhum parâmetro livre além de sua massa. A partir daqui, podemos calcular os fluxos de forma usual.

$$\epsilon_1 = \frac{4}{3} \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_g} \right) \right]^{-2}, \quad \epsilon_2 = \frac{2}{3} \left[\operatorname{senh} \left(\frac{x}{\sqrt{6}} \right) \right]^{-2}, \quad (155)$$

$$\frac{\varphi_f}{M_g} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \simeq 0,9402. \quad (156)$$

A integral de ΔN_* pode ser calculada e revertida de forma exata usando a função W de Lambert:

$$\begin{aligned} \varphi_* &= M_g \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ -\frac{4}{3} \Delta N_* + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi_f}{M_g} - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_g}} \right. \\ &\quad \left. - W_{-1} \left[-\exp \left(-\frac{4}{3} \Delta N_* + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi_f}{M_g} - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_g}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (157)$$

A normalização da equação (123) fornece $M/M_g \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ para valores plausíveis de ΔN_* , implicando uma correção quadrática elevada em (152) ($\mu \simeq 10^5 M_g \simeq 10^{13}$ GeV). Generalizações de SI para correções R^{2p} são estudadas em [93]. Próximo ao mínimo $\varphi = 0$, o potencial é aproximadamente quadrático, e $w_{\text{re}} \approx 0$.

$$V(\varphi) = M^4 \left[\frac{2\varphi^2}{3} + \dots \right]. \quad (158)$$

5.5.2 Modelo de Higgs

Como seu nome indica, esse modelo gera inflação por meio de um acoplamento não mínimo do bóson de Higgs Σ à gravidade. Foi proposto em 2008 [94, 95] e recebeu bastante atenção após a descoberta do bóson de Higgs em 2012 pelo LHC. Ele assume o seguinte termo extra para a lagrangiana do Modelo Padrão \mathcal{L}_{MP} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{MP}} - \frac{M_g^2}{2} - \xi \Sigma^\dagger \Sigma R. \quad (159)$$

Em teorias de escalar-tensor, a ação assume a forma generalizada

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [F(h)R - Z(h)g^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu - 2U(h)]. \quad (160)$$

No modelo HI, $F \equiv \partial f/\partial R = 1 + \xi h^2$, $Z(h) = 1$ e $U(h)$ é o potencial de Higgs usual, com v e λ fixados pelos dados do LHC [96, 97]:

$$U(h) = \frac{M_g^2 \lambda}{4} \left(h^2 - \frac{v^2}{M_g^2} \right), \quad \text{onde} \quad v \simeq 246 \text{ GeV}, \quad \lambda \simeq 0, 13. \quad (161)$$

A constante gravitacional efetiva $G_{\text{ef}} = 1/(8\pi m_{\text{pl}}^2)$ é ligeiramente modificada pelos graus de liberdade escalares, tal que, definindo $F' \equiv dF/dh$,

$$\frac{1}{m_{\text{pl}}^2} = \frac{1}{M_g^2 F} \left[\frac{2ZF + 4(F')^2}{2ZF + 3(F')^2} \right] = \frac{1 + \xi h^2 + 8\xi^2 h^2}{(1 + \xi h^2)(1 + \xi h^2 + 6\xi^2 h^2)}. \quad (162)$$

Nesse contexto, é necessário impor a restrição $1 \ll \sqrt{\xi} \ll 10^{17}$, mediante a qual $M_g \simeq m_{\text{pl}}$ com elevada precisão. Em seguida, realizamos uma transformação conforme ($\tilde{g}_{\mu\nu} = 1 + \xi^2/m_{\text{pl}}^2)g_{\mu\nu}$) e definimos o inflaton φ a partir da relação

$$\frac{d\varphi}{dh} = m_{\text{pl}} \frac{\sqrt{1 + \xi(1 + 6\xi)h^2}}{1 + \xi h^2} \simeq m_{\text{pl}} \frac{\sqrt{6}\xi h}{1 + \xi h^2}. \quad (163)$$

A aproximação na segunda passagem fornece o potencial de Starobinsky da equação (154), com $M_g \rightarrow M_{\text{pl}}$ e $M^4 \equiv M_{\text{pl}}^4 \lambda / 4\xi^2$. Como estudado em [98], as correções quânticas induzidas por $\xi \gg 1$ podem atuar como a fonte primária de μ no modelo SI. Como as contribuições de ordem superior são desprezíveis para ξ , SI e HI costumam ser estudados juntos como Starobinsky-Higgs.

5.6 Inflação de Higgs com Correção Radiativa (RCHI)

O sucesso do modelo de Higgs (painel esquerdo da Figura 16) motivou seu refinamento pela adição de correções radiativas, ou ajustes ao potencial devido à influência de partículas virtuais. Em um diagrama de Feynman, elas se manifestam como *loops* — mais detalhes sobre a relação entre *loops* de Feynman e Σ são encontrados em [99, 29]. Aqui, utilizo os resultados de [100, 101, 102, 9]. As interações adicionais relevantes acontecem com o quark *top* (acoplamento de Yukawa $y_t \approx 0.93$) e com os bósons W^\pm e Z (acoplamentos $g \approx 0.6$ e $g' \approx 0.35$). Na primeira ordem, ou correção de um *loop*, $M_g \simeq m_{\text{pl}}$ permanece válido, e as correções para $F(h)$ e $U(h)$ são dadas por

$$F^{(1)}(h) = \frac{Ch^2}{16\pi^2} \ln(m_{\text{pl}}^2 h^2 \mu^2), \quad U^{(1)}(h) = \frac{m_{\text{pl}}^2 \lambda A h^2}{128\pi^2} \ln(m_{\text{pl}}^2 h^2 \mu^2), \quad (164)$$

onde A e C representam combinações dos acoplamentos.

$$A = \frac{3}{8\lambda} [2g^4 + g^2 + g'^2 - 16y_t^2] + 6\lambda, \quad C = 3\xi\lambda. \quad (165)$$

Com isso, pode-se realizar a transformação conforme usual em (160) e definir φ em termos de h . Assumindo A e C suficientemente pequenos, φ pode ser aproximado pela condição

$$\frac{d\varphi}{dh} \simeq m_{\text{pl}} \frac{\sqrt{3}h\xi}{(1+\xi h^2)} \left[1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} + \frac{3\lambda}{8\pi^2} \frac{1}{(1+\xi h^2)} \ln\left(\frac{m_{\text{pl}} h}{\mu}\right) \right]. \quad (166)$$

Dado que $\xi h^2 \gg 1$, a integral fornece $\varphi \simeq m_{\text{pl}} \left[(\sqrt{3}/2) \ln(\xi h^2) + (3\sqrt{3}\lambda/16\pi^2) \ln h \right]$, implicando um potencial escalar $V(\varphi)$ da forma (Figura 15):

$$V(\varphi) = M^4 \left[1 - 2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{m_{\text{pl}}}\right) + \frac{A_1 \varphi}{16\pi^2 \sqrt{6} m_{\text{pl}}} \right], \quad \text{onde } A_1 \equiv A + 12\lambda. \quad (167)$$

Calcula-se os fluxos ϵ_1 e ϵ_2 , definindo $\mathcal{A} \equiv A_1/(16\pi^2)$ e estabelecendo $\epsilon_f = 1$:

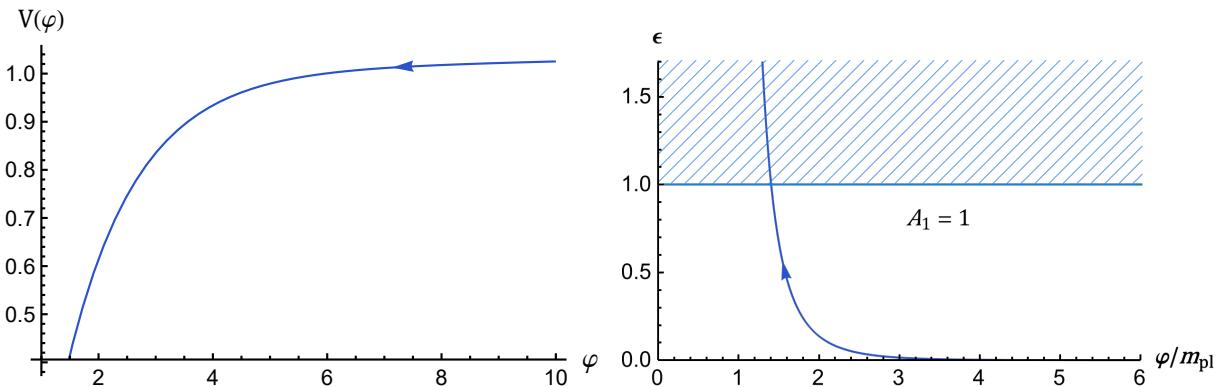
$$\epsilon_1 = \frac{1}{12} \left\{ \frac{4e^{-2\varphi/\sqrt{6}m_{\text{pl}}} + \mathcal{A}}{1 - 2e^{-2\varphi/\sqrt{6}m_{\text{pl}}} + \mathcal{A}/[\sqrt{2/3}(\varphi/m_{\text{pl}})]} \right\}^2, \quad (168)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3} \frac{8e^{-2\varphi/\sqrt{6}m_{\text{pl}}} \left\{ 1 + \mathcal{A} + \mathcal{A}/[\sqrt{2/3}(\varphi/m_{\text{pl}})] \right\} + \mathcal{A}^2}{\left\{ 1 - 2e^{-2\varphi/\sqrt{6}m_{\text{pl}}} + \mathcal{A}/[\sqrt{2/3}(\varphi/m_{\text{pl}})] \right\}^2}, \quad (169)$$

$$\frac{\varphi_f}{m_{\text{pl}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathcal{A} \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} W_{0,-1} \left[\frac{2}{\mathcal{A}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) e^{(\mathcal{A}-1/\sqrt{3})} \right]. \quad (170)$$

Uma aproximação de ΔN_* e φ_* pode ser feito tomando o denominador em (168) e (169) como ~ 1 (), mas sua precisão é muito baixa em comparação com os resultados do código ASPIC. Para correções pequenas, a normalização (123) resulta em massas similares às encontradas em Starobinsky. Para $A_1 = 1$, por exemplo, $M/m_{\text{pl}} \simeq 3,53 \cdot 10^{-3}$ em $\Delta N_* = 55$. O comportamento do potencial próximo ao mínimo depende do parâmetro livre. Para correções pequenas $A_1 \lesssim 1$, a aproximação quadrática permanece válida, e $w_{\text{re}} \approx 0$; correções maiores tornam o potencial mais íngreme.

Figura 15 — Inflação de Higgs com correção radiativa.



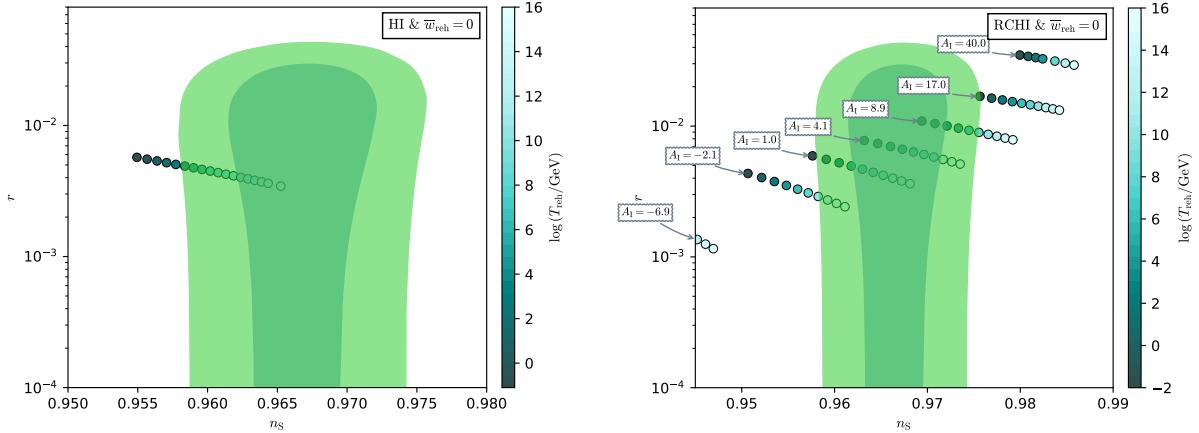
Fonte: Elaboração própria. Painel esquerdo: potencial $V(\varphi)$. Painel direito: parâmetro ϵ . A área hachurada indica o fim da inflação. Gráficos parametrizados para $A_1 = 1$.

5.7 Análise sob observação

Nas Figuras 17, 16 e 18, são apresentados os resultados da análise numérica dos seis modelos. As regiões em verde representam os intervalos de confiança de 68% e 95% dos dados observacionais. O caso $p = 2/3$ em LFI foi calculado e adicionado manualmente, pois o código ASPIC nativo é restrito a expoentes inteiros. Como as contribuições de ordem superior em $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ são muito reduzidas (Tabela 1), foram utilizadas as aproximações $n_s \simeq 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2$ e $r \simeq 16\epsilon_1$.

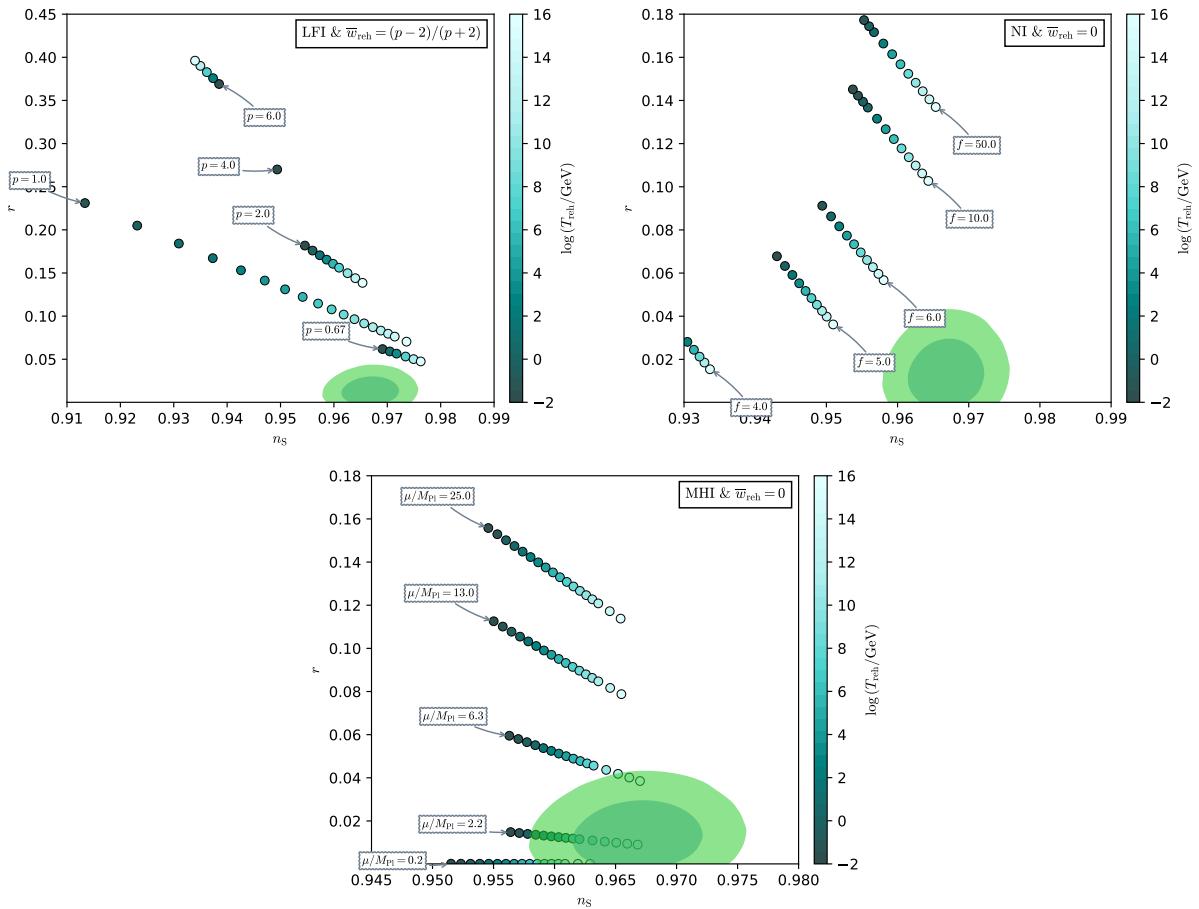
Os modelos SI-HI e RCHI com $A_1 \sim 1$ e apresentaram a maior concordância com Planck+BAO+BK18. São seguidos do caso $\log(\mu/m_{\text{pl}}) \lesssim 0$ de MHI e do caso $p = 4$, $\log(\mu/m_{\text{pl}}) \simeq 0$ de SFI. O caso $p = 2$ é menos favorecido, mas ainda possível. Dentre as seis, a classe LFI foi a mais fortemente impactada pela restrição $r < 0,036$, que tornou mesmo o caso $p = 2/3$, marginalmente compatível com Planck-2018 [68], improvável. NI, antes próximo ou tangente ao intervalo de 95% de confiança, é hoje fortemente desfavorecido. Ambos, no entanto, ainda podem ser possíveis mediante um acoplamento gravitacional não mínimo. Em [103], $\xi = -0.0081^{+0.0065}_{-0.0051}$ é calculado como suficiente para devolver NI ao intervalo de 68% de confiança de Planck+BAO+BK18. Para o caso $p = 4$ de LFI, são encontrados valores entre $\xi \sim 0.005$ a $\xi \sim 0.3$ [104, 105, 106]. Correções radiativas também podem influenciar suas as previsões.

Figura 16 — Previsões no plano (n_s, r) dos modelos SI-HI e RCHI.



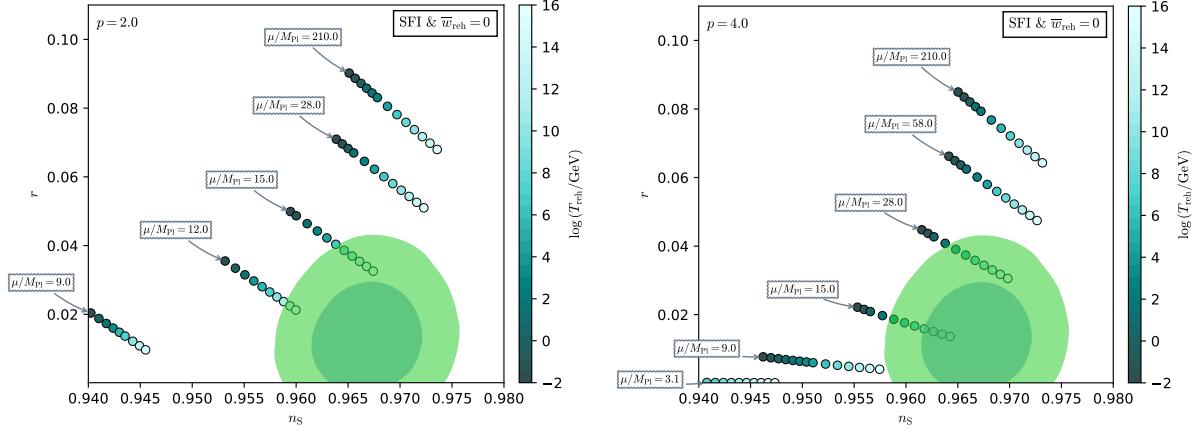
Fonte: Elaboração própria. As áreas em verde representam os intervalos de 68% e 95% de confiança dos dados de Planck+BAO+BK18. Fonte: Elaboração própria.

Figura 17 — Previsões no plano (n_s, r) dos modelos de parâmetro único LFI, NI e MHI



Fonte: Elaboração própria. As áreas em verde representam os intervalos de 68% e 95% de confiança dos dados de Planck+BAO+BK18. Fonte: Elaboração própria.

Figura 18 — Previsões no plano (n_s, r) para os casos $p = 2$ e $p = 4$ do modelo SFI.



Fonte: Elaboração própria. As áreas em verde representam os intervalos de 68% e 95% de confiança dos dados de Planck+BAO+BK18. Fonte: Elaboração própria.

6 CONCLUSÃO

Foram cumpridos os objetivos de revisão da literatura acerca da cosmologia inflacionária, simulação do reaquecimento pós-inflacionário e reanálise dos modelos selecionados. As simulações de rede do potencial quadrático $V(\varphi) = (1/2)m_\varphi^2 + (1/2)g^2\varphi^2\chi^2$ confirmaram o comportamento esperado pelo estudo analítico deste: crescimento inicial exponencial de χ , seguido de excitação do inflaton ϕ , saturação da densidade dos dois campos, evolução abrupta da equação de estado para $w \approx 0.3$, turbulência estática e lento espalhamento do espectro em uma longa fase de pré-termalização. Essa abordagem, limitada a interações *vierbein*, mostrou-se adequada ao estudo do pré-aquecimento, mas não das fases posteriores, dominadas por decaimento perturbativo. Percebeu-se que, além de não permitir a desintegração do inflaton, a ausência de termos lineares torna o reaquecimento altamente ineficiente.

O estudo dos modelos LFI, SFI, NI, MHI, SI-HI, e RCHI confirma a tendência observada em análises anteriores, com boa adequação de RCHI, SI-HI, MHI e SFI₄ às restrições de Planck+BAO+BK18. Modelos marginalmente adequados a Planck+BK15 (NI, caso $p = 2/3$ de LFI) foram descartados na ausência de acoplamentos não mínimos ou outras correções. A compatibilidade de SFI₄ e SFI₂ com BICEP/Keck mostrou-se particularmente dependente da temperatura de reaquecimento, com preferência em ambos os casos por temperaturas mais altas.

Esses resultados restringem os cenários inflacionários possíveis e motivam estudos futuros mais detalhados do reaquecimento, o qual permanece pouco claro em comparação ao período inflacionário e às fases subsequentes (era fóton e nucleossíntese). O intervalo atual de temperaturas T_{re} possíveis, por exemplo, possui amplitude de cerca de 10^{18} GeV, o que dificulta a análise precisa de modelos inflacionários como MHI, SFI₄ e, em menor escala, SI-HI. O desenvolvimento de novas ferramentas de código aberto, capazes de simular interações escalares e fermiônicas, é fundamental para um melhor entendimento desse estágio da evolução do Universo.

REFERÊNCIAS

- [1] GUTH, A. H. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. *Physics Reviews D*, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, 1981. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>. Acesso em: 4 abr. 2025.
- [2] BASSETT, B. A.; TSUJIKAWA, S.; WANDS, D. Inflation dynamics and reheating. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 78, n. 2, p. 537–589, 2006.
- [3] TRISTRAM, M. *et al.* Cosmological parameters derived from the final planck data release (pr4). *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 682, p. A37, 2024.
- [4] SPERGEL, D. N. *et al.* First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: determination of cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 148, n. 1, p. 175, 2003.
- [5] CROON, D. *et al.* Gut physics in the era of the lhc. *Frontiers in Physics*, Frontiers Media SA, v. 7, p. 76, 2019.
- [6] KIBBLE, T. W. B. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 9, n. 8, p. 1387, 1976. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/9/8/029>. Acesso em: 2 jul 2025.
- [7] KOLB, M. S. T. E. W. *The early universe*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1990. (Frontiers in Physics). ISBN 9780201116038.
- [8] ZELDOVICH, Y. B.; KHLOPOV, M. Y. On the concentration of relic magnetic monopoles in the universe. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 79, n. 3, p. 239–241, 1978.
- [9] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopædia inflationaris. *Physics of the Dark Universe*, Elsevier, v. 5, p. 75–235, 2014.
- [10] SCHWARZ, D. J.; TERRERO-ESCALANTE, C. A.; GARCÍA, A. A. Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 517, n. 3-4, p. 243–249, 2001.
- [11] LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521575980.
- [12] MARCO, A. D.; ORAZI, E.; PRADISI, G. Introduction to the number of e-folds in slow-roll inflation. *Universe*, MDPI, v. 10, n. 7, p. 284, 2024.
- [13] SENATORE, L. Lectures on inflation. In: *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: new frontiers in fields and strings*. Singapore: World Scientific, 2017. p. 447–543.

- [14] LINDE, A. D. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 1990. (Contemporary Concepts in Physics). ISBN 9783718604906.
- [15] MALIK, K. A.; WANDS, D. Cosmological perturbations. *Physics Reports*, Elsevier, v. 475, n. 1-4, p. 1–51, 2009.
- [16] CARLSON, J.; WHITE, M.; PADMANABHAN, N. Critical look at cosmological perturbation theory techniques. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, American Physical Society, v. 80, n. 4, p. 043531, 2009.
- [17] CHRISTOPHERSON, A. J. Applications of cosmological perturbation theory. *arXiv preprint arXiv:1106.0446*, 2011.
- [18] HUSTON, I.; MALIK, K. A. Numerical calculation of second order perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 09, p. 019, 2009.
- [19] RIOTTO, A. Inflation and the theory of cosmological perturbations. *arXiv preprint hep-ph/0210162*, 2002.
- [20] BRANDENBERGER, R. H. Lectures on the theory of cosmological perturbations. In: *The early universe and observational cosmology*. Berlin: Springer, 2004. p. 127–167.
- [21] DEMOZZI, V. *On inflationary perturbations*. Tese (Doutorado em Física) — Ludwig Maximilian University of Munich, Munique, 2011.
- [22] MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521563987.
- [23] GOLOVNEV, A.; VANCHURIN, V. Cosmological perturbations from vector inflation. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 79, n. 10, 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.103524>. Acesso em: 2 jul. 2025.
- [24] BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 22, n. 8, p. 1882, 1980.
- [25] AKRAMI, Y. *et al.* Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.
- [26] ALABIDI, L. *et al.* Observable spectra of induced gravitational waves from inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 09, p. 017, 2012.
- [27] JAECKEL, J.; YIN, W. High energy sphalerons for baryogenesis at low temperatures. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 107, n. 1, 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.015001>. Acesso em: 7 jul. 2025.

- [28] SETO, O. Affleck-dine baryogenesis and gravitino dark matter. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 73, n. 4, 2006. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.73.043509>. Acesso em: 7 jul. 2025.
- [29] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boca Raton: CRC Press, 2018. ISBN 9780201503975.
- [30] DOLGOV, A.; LINDE, A. Baryon asymmetry in the inflationary universe. *Physics Letters B*, v. 116, n. 5, p. 329–334, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382902921>. Acesso em: 02 jun. 2025.
- [31] ALLAHVERDI, R. *et al.* Reheating in inflationary cosmology: theory and applications. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 60, n. 1, p. 27–51, 2010.
- [32] KUBO, R. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 29, n. 1, p. 255, 1966.
- [33] CHICONE, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. 2. ed. New York: Springer, 2006. 187–191 p. ISBN 9783031516511.
- [34] MAGNUS, W.; WINKLER, S. *Hill's Equation*. Mineola: Courier Corporation, 2013. ISBN 978-0486495651.
- [35] PELOSO, M.; SORBO, L. Preheating of massive fermions after inflation: Analytical results. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2000, n. 05, p. 016, 2000.
- [36] GREENE, P. B.; KOFMAN, L. Theory of fermionic preheating. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 62, n. 12, p. 123516, 2000.
- [37] BOYANOVSKY, D. *et al.* Analytic and numerical study of preheating dynamics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 54, n. 12, p. 7570, 1996.
- [38] AMIN, M. A. *et al.* Nonperturbative dynamics of reheating after inflation: a review. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 24, n. 01, p. 1530003, 2015.
- [39] SCHMITZ, K.; VERTONGEN, G. Reheating and preheating after inflation: an introduction. *reh*, v. 6, p. t2, 2010.
- [40] MCLACHLAN, N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1947.
- [41] GREENE, P. B. *et al.* Structure of resonance in preheating after inflation. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 56, n. 10, p. 6175, 1997.

- [42] KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Towards the theory of reheating after inflation. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 56, n. 6, p. 3258, 1997.
- [43] BOYANOVSKY, D.; VEGA, H. de; HOLMAN, R. Non-equilibrium dynamics of phase transitions: from the early universe to chiral condensates. *Arxiv preprint hep-th/9412052*, 1994.
- [44] FELDER, G.; TKACHEV, I. Latticeeasy: a program for lattice simulations of scalar fields in an expanding universe. *Computer Physics Communications*, v. 178, n. 12, p. 929–932, 2008. ISSN 0010-4655. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046550800091X>. Acesso em: 28 maio 2025.
- [45] FROLOV, A. V. Defrost: a new code for simulating preheating after inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2008, n. 11, p. 009, nov. 2008. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2008/11/009>. Acesso em: 28 maio 2025.
- [46] CHILD, H. L. *et al.* Preheating with nonminimal kinetic terms. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 111, n. 5, 2013. ISSN 1079-7114. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.051301>. Acesso em: 4 jun. 2025.
- [47] FIGUEROA, D. G. *et al.* Cosmolattice: a modern code for lattice simulations of scalar and gauge field dynamics in an expanding universe. *Computer Physics Communications*, v. 283, p. 108586, 2023. ISSN 0010-4655. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465522003058>. Acesso em: 28 maio 2025.
- [48] FELDER, G. N.; KOFMAN, L. Nonlinear inflaton fragmentation after preheating. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, American Physical Society, v. 75, n. 4, p. 043518, 2007.
- [49] ANTUSCH, S. *et al.* Characterizing the postinflationary reheating history: single daughter field with quadratic-quadratic interaction. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 105, p. 043532, fev. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.043532>. Acesso em: 6. jul 2025.
- [50] FAN, J.; XIANYU, Z.-Z. A cosmic microscope for the preheating era. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2021, n. 1, p. 1–32, 2021.
- [51] CARAVANO, A. *et al.* Lattice simulations of inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2021, n. 12, p. 010, dez. 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/12/010>. Acesso em: 5 jul. 2025.

- [52] ZAKHAROV, V. E.; L'VOV, V. S.; FALKOVICH, G. *Kolmogorov spectra of turbulence I: wave turbulence*. Cham: Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 9783642500541.
- [53] MICHÀ, R.; TKACHEV, I. I. Relativistic turbulence: a long way from preheating to equilibrium. *Physical review letters*, American Physical Society, v. 90, n. 12, p. 121301, 2003.
- [54] MICHÀ, R.; TKACHEV, I. I. Turbulent thermalization. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 70, n. 4, p. 043538, 2004.
- [55] NAZARENKO, S. *Wave Turbulence*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011. v. 825. ISBN 9783642159411.
- [56] LOZANOV, K. D.; AMIN, M. A. Equation of state and duration to radiation domination after inflation. *Physical review letters*, American Physical Society, v. 119, n. 6, p. 061301, 2017.
- [57] SAHA, P.; ANAND, S.; SRIRAMKUMAR, L. Accounting for the time evolution of the equation of state parameter during reheating. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 102, p. 103511, nov. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.103511>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- [58] ZHANG, F.-Y.; LIN, W. Inflation and reheating predictions in polynomial inflation with small and large fields. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 855, p. 138765, 2024.
- [59] DAI, L.; KAMIONKOWSKI, M.; WANG, J. Reheating constraints to inflationary models. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 041302, jul. 2014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.041302>. Acesso em: 02 jun. 2025.
- [60] LOZANOV, K. *Reheating After Inflation*. Cham: Springer, 2020. ISBN 9783030568092.
- [61] ABOLHASANI, A. A.; FIROUZJAHI, H.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Tachyonic resonance preheating in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 043524, fev. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.043524>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- [62] DUFAUX, J. F. *et al.* Preheating with trilinear interactions: tachyonic resonance. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2006, n. 07, p. 006, jul. 2006. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2006/07/006>. Acesso em: 5 jul. 2025.
- [63] DURRER, R.; SOBOL, O.; VILCHINSKII, S. Backreaction from gauge fields produced during inflation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 108, p. 043540, ago. 2023. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.043540>. Acesso em: 15 jul. 2025.

- [64] SHARMA, R. *et al.* Lattice simulations of axion-u(1) inflation: gravitational waves, magnetic fields, and scalar statistics. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2025, n. 05, p. 079, maio 2025. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2025/05/079>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- [65] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. *Accurante Slow-Roll Predictions for Inflationary Cosmology*. 2013. Disponível em: <https://curl.irmsp.ucl.ac.be/chris/aspic.html>. Acesso em: 4 jun. 2025.
- [66] ADE, P. A. *et al.* Improved constraints on primordial gravitational waves using planck, wmap, and bicep/keck observations through the 2018 observing season. *Physical review letters*, American Physical Society, v. 127, n. 15, p. 151301, 2021.
- [67] ADE, P. *et al.* Constraining inflation with the bicep/keck cmb polarization experiments. *arXiv preprint arXiv:2405.19469*, 2024.
- [68] POZO, D. *et al.* Some inflationary models under the light of planck 2018 results. *Astroparticle Physics*, Elsevier, p. 102977, 2024.
- [69] LINDE, A. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, v. 129, n. 3, p. 177–181, 1983. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383908377>. Acesso em: 18 abr. 2025.
- [70] MADSEN, M. S.; COLES, P. Chaotic inflation. *Nuclear Physics B*, v. 298, n. 4, p. 701–725, 1988. ISSN 0550-3213. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321388900041>. Acesso em: 1 jul. 2025.
- [71] LI, T.; LI, Z.; NANOPoulos, D. V. Helical phase inflation and monodromy in supergravity theory. *Advances in High Energy Physics*, Wiley Online Library, v. 2015, n. 1, p. 397410, 2015.
- [72] NAKAYAMA, K.; TAKAHASHI, F.; YANAGIDA, T. T. Polynomial chaotic inflation in supergravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2013, n. 08, p. 038–038, 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/08/038>. Acesso em: 03 maio 2025.
- [73] TAKAHASHI, F. Linear inflation from running kinetic term in supergravity. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 693, n. 2, p. 140–143, 2010. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2010.08.029>. Acesso em: 2 jul. 2025.

- [74] TURNER, M. S. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 28, p. 1243–1247, set. 1983. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.1243>. Acesso em: 02 jun. 2025.
- [75] LINDE, A. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382912199>. Acesso em: 20 jun. 2025.
- [76] ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 48, p. 1220–1223, abr. 1982. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>. Acesso em: 20 jun. 2025.
- [77] BANKS, T. *et al.* Modular cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 52, n. 6, p. 3548–3562, 1995. ISSN 0556-2821. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.52.3548>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- [78] SAGO, N.; HIMEMOTO, Y.; SASAKI, M. Quantum fluctuations in brane-world inflation without an inflaton on the brane. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 65, n. 2, 2001. ISSN 1089-4918. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.65.024014>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- [79] KUMEKAWA, K.; MOROI, T.; YANAGIDA, T. Flat potential for inflaton with a discrete r-invariance in supergravity. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 92, n. 2, p. 437–447, ago. 1994. ISSN 1347-4081. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1143/ptp/92.2.437>. Acesso em: 4 jul. 2025.
- [80] IZAWA, K.-I.; KAWASAKI, M.; YANAGIDA, T. R-invariant topological inflation. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 101, n. 5, p. 1129–1133, 1999. ISSN 1347-4081. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1143/PTP.101.1129>. Acesso em: 4 jul. 2025.
- [81] ADAMS, F. C. *et al.* Natural inflation: particle physics models, power-law spectra for large-scale structure, and constraints from the cosmic background explorer. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 47, n. 2, p. 426, 1993.
- [82] FREESE, K.; FRIEMAN, J. A.; OLINTO, A. V. Natural inflation with pseudo nambu-goldstone bosons. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 65, n. 26, p. 3233, 1990.
- [83] PAL, B. K.; PAL, S.; BASU, B. Mutated hilltop inflation: a natural choice for early universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010,

- n. 01, p. 029–029, 2010. ISSN 1475-7516. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/01/029>. Acesso em: 16 jun. 2025.
- [84] PAL, B. K. Mutated hilltop inflation revisited. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–8, 2018.
- [85] PAL, B. K.; PAL, S.; BASU, B. A semi-analytical approach to perturbations in mutated hilltop inflation. *International Journal of Modern Physics D*, v. 21, n. 02, p. 1250017, 2012.
- [86] PINHERO, T.; PAL, S. Realising mutated hilltop inflation in supergravity. *Physics Letters B*, v. 796, p. 220–224, 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931930499X>. Acesso em: 16 jun. 2025.
- [87] STAROBINSKY, A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980. ISSN 0370-2693.
- [88] STAROBINSKY, A. A. Nonsingular model of the universe with the quantum-gravitational de sitter stage and its observational consequences. In: *Quantum Gravity*. Boston, MA: Springer US, 1984. p. 103–128. ISBN 978-1461327011.
- [89] VILENKIN, A. Classical and quantum cosmology of the starobinsky inflationary model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 32, p. 2511–2521, nov. 1985. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.2511>. Acesso em: 21 jun. 2025.
- [90] FARAONI, V.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. *arXiv preprint gr-qc/9811047*, 1998.
- [91] RIBEIRO, B. W. N. *On the cosmic acceleration and matter clustering in modified f(R) gravity models*. Tese (Doutorado em Astronomia) — Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 2024.
- [92] FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f (r) theories. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 13, n. 1, p. 1–161, 2010.
- [93] ROJAS, C. Study of scalar and tensor power spectra in the generalized starobinsky inflationary model using semiclassical methods. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 143, p. 102745, 2022.
- [94] BEZRUKOV, F.; SHAPOSHNIKOV, M. The standard model higgs boson as the inflaton. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 659, n. 3, p. 703–706, 2008. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2007.11.072>. Acesso em: 28 jun. 2025.

- [95] BEZRUKOV, F.; SHAPOSHNIKOV, M. Standard model higgs boson mass from inflation: two loop analysis. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2009, n. 07, p. 089–089, jul. 2009. ISSN 1029-8479. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/07/089>. Acesso em: 28 jun. 2025.
- [96] CELIS, A. *Phenomenology of two-Higgs-doublet models in the LHC era*. Tese (Doutorado em Física) — CSIC-UV-Instituto de Física Corpuscular (IFIC), Valência, 2014.
- [97] JAKOBS, K.; ZANDERIGHI, G. The profile of the higgs boson: status and prospects. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, The Royal Society, v. 382, n. 2266, p. 20230087, 2024.
- [98] CALMET, X.; KUNTZ, I. Higgs starobinsky inflation. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 76, n. 5, 2016. ISSN 1434-6052. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4136-3>. Acesso em: 28 jun. 2025.
- [99] ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton: Princeton University Press, 2010. v. 7.
- [100] STEINWACHS, C. F.; KAMENSHCHIK, A. Y. Non-minimal higgs inflation and frame dependence in cosmology. In: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2013. p. 161–164. ISSN 0094-243X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4791748>. Acesso em: 23 jun. 2025.
- [101] BARVINSKY, A.; KAMENSHCHIK, A. Y.; STAROBINSKY, A. Inflation scenario via the standard model higgs boson and lhc. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2008, n. 11, p. 021, 2008.
- [102] BARVINSKY, A.; KAMENSHCHIK, A. Y. Effective equations of motion and initial conditions for inflation in quantum cosmology. *Nuclear physics B*, Elsevier, v. 532, n. 1-2, p. 339–360, 1998.
- [103] SANTOS, F. D. *et al.* Is natural inflation in agreement with cmb data? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2024, n. 03, p. 038, 2024.
- [104] BITAJ, M.; RASHIDI, N.; NOZARI, K. Large field and small field inflation models in confrontation with planck2018 and bicep2018 datasets. *Journal of Holography Applications in Physics*, Damghan University Press, v. 3, n. 4, p. 23–38, 2023.
- [105] ODA, S. *et al.* Nonminimal quartic inflation in classically conformal $u(1)_X$ extended standard model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 055001, mar. 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.055001>. Acesso em: 7 jul. 2025.
- [106] CAMPISTA, M.; BENETTI, M.; ALCANIZ, J. Testing non-minimally coupled inflation with cmb data: a bayesian analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP

Publishing, v. 2017, n. 09, p. 010, set. 2017. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/09/010>. Acesso em: 7 jul. 2025.

- [107] MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0521868341.
- [108] OLVER, F. W. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0521140638.

APÊNDICE A — DERIVAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES MÉTRICAS

A.1 Equações de campo

Estabelecemos o inverso da métrica em (39) e as definições usuais de $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e $R_{\mu\nu}$. Nesta demonstração, trabalha-se com um *gauge* qualquer, e adota-se os índices $i, j = 1, 2, 3$.

$$g^{\mu\nu} = a^{-2} \begin{pmatrix} -1 + 2\Phi & \partial^i B \\ \partial^i B & (1 + 2\Psi)\delta^{ij} - D^{ij}E \end{pmatrix} \quad (171)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} \right) \quad (172)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \quad (173)$$

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (174)$$

Perturbando (172), (173) e (174) na primeira ordem, obtemos:

$$\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\delta g^{\alpha\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} \right) + \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} \left(\frac{\partial \delta g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \delta g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \delta g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} \right) \quad (175)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \quad (176)$$

$$\delta R = g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (177)$$

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta \quad (178)$$

Computando a ordem zero:

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad \Gamma_{0j}^i = \mathcal{H}\delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}\delta_{ij}, \quad \text{outros} \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad (179)$$

$$R_{00} = 3 \left(-\frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2 \right), \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2 \right) \delta_{ij} \quad (180)$$

$$R = \frac{6a''}{a^3} \quad (181)$$

Computando a primeira ordem:

$$\delta\Gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \delta\Gamma_{0i}^0 = \partial_i \Phi + \mathcal{H}\partial_i B, \quad \delta\Gamma_{00}^i = \mathcal{H}\partial_i B + \partial^i B' + \partial^i \Phi \quad (182)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = -2\mathcal{H}\Phi\delta_{ij} - \partial_i \partial_j B - 2\mathcal{H}\Psi\delta_{ij} - \Psi'\delta_{ij} - \mathcal{H}D_{ij}E + \frac{1}{2}D_{ij}E' \quad (183)$$

$$\delta\Gamma_{0j}^i = -\Psi'\delta_{ij} + \frac{1}{2}D_{ij}E' \quad (184)$$

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \partial_j \Psi\delta_k^i + \partial_k \Psi\delta_j^i - \partial^i \Psi\delta_{jk} - \mathcal{H}\partial^i B\delta_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j D_k^i E + \frac{1}{2}\partial_k D_j^i E - \frac{1}{2}\partial^i D_{jk}E \quad (185)$$

$$\delta R_{00} = \mathcal{H}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}\Phi' \quad (186)$$

$$\delta R_{0i} = \frac{a''}{a}\partial_i B + \mathcal{H}^2\partial_i B + 2\partial_i\Psi' + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi + \frac{1}{2}\partial_k D_i^K E' \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} = & \left[-\mathcal{H}\Phi' - 5\mathcal{H}\Psi' - 2\left(\frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2\right)(\Phi + \Psi) - \Psi'' + \partial^k\partial_k\Psi - \mathcal{H}\partial^k\partial_k B \right] \delta_{ij} + \\ & \partial_i\partial_j(\Psi - B' - \Phi) + \mathcal{H}(D_{ij}E' - 2\partial_i\partial_j B + \mathcal{H}D_{ij}E) + \frac{a''}{a}D_{ij}E \\ & \frac{1}{2}(D_{ij}E'' + \partial_k\partial_i D_j^k E + \partial_k\partial_i D_j^k E - \partial_k\partial^k D_{ij}E) \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} \delta R = & a^{-2}[-6\mathcal{H}(\partial_i\partial^i B + \Phi' + 3\Psi') - 2\partial_i\partial^i(B' + \Phi + 2\Psi) - 6\Psi'' \\ & - 12\frac{a''}{a}\Phi + \partial_k\partial^i D_i^k E] \end{aligned} \quad (189)$$

Portanto, usando a equação (50), obtemos:

$$\delta G_{00} = -2\mathcal{H}(\partial_i\partial^i B + 3\Psi') + 2\partial_i\partial^i\Psi + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D_i^K E \quad (190)$$

$$\delta G_{0i} = \mathcal{H}(2\partial_i\Phi + \mathcal{H}\partial_i B) + 2\partial_i\Psi' - 2\frac{a''}{a}\partial_i B + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D_i^K E' \quad (191)$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & \left[2\mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi' - \partial_k\partial^k B) + 2(\Phi + \Psi)\left(2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2\right) + 2\Psi'' \right. \\ & \left. - \partial_k\partial^k(\Psi + B' + \Phi) + \frac{1}{2}\partial_k\partial^m D_m^k E \right] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Psi - B' - \Phi) + \mathcal{H}(D_{ij}E' + \mathcal{H}D_{ij}E - 2\partial_i\partial_j B) \\ & - 2\frac{a''}{a}D_{ij}E + \frac{1}{2}(D_{ij}E'' + \partial_k\partial_i D_j^k E + \partial^k\partial_j D_{ik}E - \partial^k\partial_k D_{ij}E) \end{aligned} \quad (192)$$

De forma similar, usando a equação (51) para o tensor de energia-momento:

$$\delta T_{00} = \delta\varphi'\varphi' + 2\Phi V a^2 + a^2 \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi \quad (193)$$

$$\delta T_{0i} = \partial_i\delta\varphi\varphi' + \frac{1}{2}\partial_i B\varphi'^2 - \partial_i B V a^2 \quad (194)$$

$$\delta T_{ij} = \left[\delta\varphi'\varphi' - \varphi'^2(\Phi + \Psi) + a^2 \left(2\Psi V - \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi \right) \right] + D_{ij}E \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V a^2 \right) \quad (195)$$

Fixando o *gauge* conforme $B = E = 0$ e utilizando $\delta T_{ij} = 0$, encontramos as equações (52) a (54).

A.2 Equação de Klein-Gordon

No espaço curvo, a equação de Klein-Gordon é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \varphi) - V_{,\varphi} = 0 \quad (196)$$

A flutuação métrica δg fornece, na primeira ordem:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{\delta(a^8)}{2a^4}; \quad \delta \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) = \frac{\delta \sqrt{-g}}{g} = -\frac{\delta(a^4)}{a^8} \quad (197)$$

Aplicando-a à fórmula geral:

$$-\delta\varphi'' - 2\mathcal{H}\delta\varphi' + \partial_i \partial^i (\delta\varphi + B\varphi') + 2\Phi\varphi'' + (4\mathcal{H}\Phi + \Phi' + 3\Psi')\varphi' = \delta\varphi a^2 V_{,\varphi\varphi} \quad (198)$$

Usando a equação de Klein-Gordon na ordem zero (55), tem-se:

$$2\Phi\varphi'' + 4\mathcal{H}\Phi\varphi' = 2\Phi a^2 V_{,\varphi} \quad (199)$$

Ou seja,

$$-\delta\varphi'' - 2\mathcal{H}\delta\varphi' + \partial_i \partial^i (\delta\varphi + B\varphi') + 2\Phi\varphi'' + (4\mathcal{H}\Phi + \Phi' + 3\Psi')\varphi' = -a^2 \delta\varphi V_{,\varphi\varphi} \quad (200)$$

APÊNDICE B — EXPOENTE DE FLOQUET

B.1 Derivação geral

O expoente $\mu_{\vec{k}}$ é calculado em função do período T das funções $P_{\vec{k}\pm}$. Sejam $y_{\vec{k}}^{1,2}(t_0)$ soluções independentes da equação de Hill (96) em t_0 . Podemos escrever $y_{\vec{k}}^{1,2}(t_0 + T)$ na forma de combinações lineares:

$$\begin{pmatrix} y_{\vec{k}}^1(t_0 + T) \\ y_{\vec{k}}^2(t_0 + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\vec{k}}^1(t_0) \\ y_{\vec{k}}^2(t_0) \end{pmatrix} \equiv \mathcal{T}_{ij} \begin{pmatrix} y_{\vec{k}}^1(t_0) \\ y_{\vec{k}}^2(t_0) \end{pmatrix} \quad (201)$$

Podemos diagonalizar essa expressão, definindo como $\lambda^{(1,2)}$ os autovalores de \mathcal{T}_{ij} e $v_{\vec{k}}^{1,2}(t_0+T)$ combinações lineares de $y_{\vec{k}}^{1,2}(t_0+T)$:

$$\begin{pmatrix} v_{\vec{k}}^1(t+T) \\ v_{\vec{k}}^2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} v_{\vec{k}}^1(t) \\ \lambda^{(2)} v_{\vec{k}}^2(t) \end{pmatrix} \quad (202)$$

$$\Rightarrow v_{\vec{k}}^{1,2}(t) = (\lambda^{(1,2)})^{t/T} P_{\vec{k}}^{1,2}(t), \quad \text{tal que} \quad P_{\vec{k}}^{1,2}(t) = P_{\vec{k}}^{1,2}(t+T) \quad (203)$$

Dado o formato da equação (97), é fácil ver que o Wronskiano $W[y^1, y^2] = y^{(1)}\dot{y}^{(2)} - y^{(2)}\dot{y}^{(1)}$ é constante, implicando que $\dot{W}[y^{(1)}, y^{(2)}] = \dot{W}[v^{(1)}, v^{(2)}] = 0$. Da Eq.202:

$$W[y^{(1)}, y^{(2)}](t+T) = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}W[y^{(1)}, y^{(2)}](t) \Rightarrow \lambda^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} \equiv \lambda \quad (204)$$

Para encontrar λ , estabelecemos duas condições iniciais independentes $\{y_{\vec{k}}^{(1)}(0), \dot{y}_{\vec{k}}^{(1)}(0)\} = \{1, 0\}$, $\{y_{\vec{k}}^{(2)}(0), \dot{y}_{\vec{k}}^{(2)}(0)\} = \{0, 1\}$. Dada a expressão anterior:

$$|\mathcal{T}_{ij}| = 1 \Rightarrow \mathcal{T}_{ij} = \begin{pmatrix} y_{\vec{k}}^{(1)}(0) & \dot{y}_{\vec{k}}^{(1)}(0) \\ y_{\vec{k}}^{(2)}(0) & \dot{y}_{\vec{k}}^{(2)}(0) \end{pmatrix} \quad (205)$$

Evoluindo de 0 a T , obtemos λ e, por conseguinte, $\text{Re}(\mu_{\vec{k}}) = (\ln |\lambda|)/T$.

B.2 Ressonância larga

As soluções não adiabáticas da equação de Hill (96) acontecem apenas nos momentos t_j , $j \in \mathbb{N}$, onde $\varphi(t_j) = 0$. Assim, escrevemos a solução no limite adiabático de t_j como

$$\chi_{\vec{k}}^j(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(2\omega)^{1/2}} [a_{\vec{k}}^j e^{-I} + \beta_{\vec{k}}^j e^I], \quad \text{onde} \quad I \equiv i \int \omega dt \quad (206)$$

Aqui, $a_{\vec{k}}^j$ e $\beta_{\vec{k}}^j$ são os coeficientes Bogolyubov, determinados pelas soluções da equação (96) (e, portanto, pela frequência $\omega_{\vec{k}}$). Podemos seguir novamente a quantização usual [107], escrevendo $\chi_{\vec{k}}(t)$ em termos dos modos $\chi_{\vec{k}\pm}(t)$ e aplicando o comutador do momento conjugado:

$$\chi_{\vec{k}}(t) = \hat{a}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}+}(t) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger\chi_{\vec{k}-}(t) \quad (207)$$

$$[\chi_{\vec{k}}, \dot{\chi}_{\vec{q}}] = \frac{ia^2}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} + \vec{q}) \quad (208)$$

Os modos que minimizam a ação, dado (208), são tais que $|a_{\vec{k}}|^2 - |\beta_{\vec{k}}|^2 = 1$, e

o número de ocupação é $n_{\vec{k}}^{\chi} = |\beta_{\vec{k}}|^2$. Como as amplitudes $\alpha_{\vec{k}}$ e $\beta_{\vec{k}}$ são constantes entre cada instante t_j , podemos tratar o problema como um espalhamento da onda incidente $\chi_{\vec{k}}^j$. Tomando θ_k^j como a fase acumulada até t_j , escrevemos a matriz S :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}}^{j+1} e^{-i\theta_k^j} \\ \beta_{\vec{k}}^{j+1} e^{i\theta_k^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/D_k^j & R_k^{j*}/D_k^{j*} \\ R_k^j/D_k^j & 1/D_k^{j*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}}^j e^{-i\theta_k^j} \\ \beta_{\vec{k}}^j e^{i\theta_k^j} \end{pmatrix} \quad (209)$$

A começar do vácuo ($\beta_{\vec{k}}^0 = 0$), há produção de partículas a partir de $j = 1$. Em geral [60],

$$n_{\vec{k}}^{\chi,j+1} = \left| \frac{R_k^j}{D_k^j} \right|^2 (n_{\vec{k}}^{\chi,j} + 1) + \left| \frac{1}{D_k^j} \right|^2 n_{\vec{k}}^{\chi,j} + 2 \left| \frac{R_k^j}{D_k^j D_k^{j*}} \right| \left[n_{\vec{k}}^{\chi,j} (n_{\vec{k}}^{\chi,j} + 1) \right]^{1/2} \cos(\theta_k^j + \Delta\theta_k^j) \quad (210)$$

No limite $n_{\vec{k}}^{\chi,j} \gg 1$,

$$n_{\vec{k}}^{\chi,j+1} \simeq n_{\vec{k}}^{\chi,j} \left(\frac{1 + |R_k^j|^2 + 2|R_k^j| \cos(\theta_k^j + \Delta\theta_k^j)}{|D_k^j|^2} \right) \quad (211)$$

Ou, na forma da solução de Floquet:

$$n_{\vec{k}}^{\chi,j+1} = e^{2\mu_{\vec{k}}} n_{\vec{k}}^{\chi,j}, \quad \text{onde} \quad \mu_{\vec{k}} \equiv \ln \left| \frac{1 + e^{i(\theta_k^j + \Delta\theta_k^j)}}{\left(1 - |R_k^j|^2\right)^{1/2}} \right| \quad (212)$$

Portanto, para que haja produção de partículas em uma dada oscilação, R_k^j e $(\theta_k^j + \Delta\theta_k^j)$, devem ser tais que o expoente $\mu_{\vec{k}}^j$ seja positivo. A dependência do argumento angular explica o comportamento caótico da ressonância estocástica (Seção), pois, devido às oscilações rápidas de χ em relação, $(\theta_k^j + \Delta\theta_k^j)$ se torna imprevisível.

Para o potencial quadrático $V(\varphi) = (1/2)m_{\varphi}^2\varphi^2 + (1/2)g^2\varphi^2\chi^2$, nas proximidades do instante da violação de adiabaticidade em t_j ($z = \pi/2, 3\pi/2, \dots$), a interação é aproximadamente parabólica:

$$\varphi^2(t) \approx \varphi_0^2 \cos^2(mt) \approx \varphi_0^2 [\cos(\pi/2) - m \operatorname{sen}(\pi/2)(t - t_j) \dots]^2 \approx \varphi_0^2 m^2 (t - t_j)^2 \quad (213)$$

Usamos esse resultado na equação de Hill (96) e a reescrevemos em função da variável $y =$

$$(t - t_j)/(gm_\varphi\varphi_0)^{1/2}.$$

$$\frac{d^2\chi_{\vec{k}}}{dy^2} + (y^2 + \kappa^2) = 0, \quad \text{onde} \quad \kappa^2 \equiv \frac{k^2}{a^2 gm_\varphi\varphi_0} \quad (214)$$

Essa expressão é uma variante da equação de Weber, cuja solução é dada pelas funções parabólicas cilíndricas $W(-\kappa^2/2; \pm\sqrt{2}y)$ [108]. Portanto, o problema se reduz a um espalhamento parabólico, cujos coeficientes de transmissão e reflexão em (209) são:

$$D_k = \frac{e^{-iu}}{(1 + e^{-\kappa\pi^2})^{1/2}}, \quad R_k = -\frac{ie^{iu}}{(1 + e^{-\kappa\pi^2})^{1/2}} \quad (215)$$

$$\text{onde } u_{\vec{k}} \equiv \arg\Gamma\left(\frac{1+i\kappa^2}{2}\right) + \frac{\kappa^2}{2} \left[1 + \ln\left(\frac{2}{\kappa^2}\right)\right]$$

No limite $n_{\vec{k}}^{\chi,j}$, isso nos fornece a equação (109), em que $\theta_{\text{tot}} = 2\theta_{\vec{k}}^j - u_{\vec{k}} + \arg\beta_{\vec{k}}^j - \arg\alpha_{\vec{k}}^j$ é a fase total de cada espalhamento j . No caso estocástico, θ_{tot} se torna virtualmente randômico.

$$\mu_{\vec{k}}^j = \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + 2e^{-\pi\kappa^2} - 2\sin\theta_{\text{tot}}^j e^{-(\pi/2)\kappa^2} \sqrt{1 + e^{-\pi\kappa^2}} \right) \quad (216)$$