



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
MESTRADO ACADÊMICO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE REDES ELÉTRICAS DE TRANSMISSÃO
VISANDO O BALANÇO DE POTÊNCIA VIA TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS

FORTALEZA

2025

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE REDES ELÉTRICAS DE TRANSMISSÃO VISANDO
O BALANÇO DE POTÊNCIA VIA TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade

Coorientador: Prof. Dr. Arnaud Knippel

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S578m Silva, Antônio Geovane Cavalcante da.

Modelagem e Otimização de Redes Elétricas de Transmissão Visando o Balanço de Potência via Teoria Espectral de Grafos / Antônio Geovane Cavalcante da Silva. – 2025.
56 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, 1, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade.

Coorientação: Prof. Dr. Arnaud Knippel.

1. Otimização matemática. 2. Teoria espectral de grafos. 3. Fluxo de potência ótimo. 4. Rede elétrica de transmissão. I. Título.

CDD

ANTÔNIO GEOVANE CAVALCANTE DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE REDES ELÉTRICAS DE TRANSMISSÃO VISANDO
O BALANÇO DE POTÊNCIA VIA TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria da Computação.

Aprovada em: 31/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Arnaud Knippel (Coorientador)
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen
Normandie (INSA Rouen) - França

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lucas Silveira Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Edmarcio Antonio Belati
Universidade Federal do ABC (UFABC)

À minha família e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram e apoiaram a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Geovane e Silvia, pelo apoio incondicional e por sempre me incentivarem a persistir nos estudos, mesmo diante das dificuldades.

À minha avó Leuda, uma das pessoas mais importantes da minha vida, cujo amor e exemplo foram fundamentais em minha jornada.

A toda a minha família, pelo suporte direto e indireto, que contribuiu de maneira significativa para a minha formação acadêmica e pessoal.

Ao meu orientador, Rafael Andrade, pelas valiosas orientações, ensinamentos e, principalmente, pela paciência e dedicação ao longo deste processo.

Ao meu coorientador, Arnaud Knnipel, que, mesmo distante fisicamente, sempre se mostrou atencioso e disponível para contribuir com este trabalho.

A todos os membros do grupo de pesquisa ParGO, pela colaboração, apoio e disposição em ajudar sempre que necessário.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo financiamento que viabilizou a realização desta pesquisa.

RESUMO

A eletricidade é essencial para o desenvolvimento humano, impactando diretamente setores fundamentais como educação, saúde, transporte e indústria. No entanto, a crescente integração de fontes renováveis, como a energia eólica e a solar, tem tornado a gestão do sistema elétrico cada vez mais complexa, exigindo uma infraestrutura robusta para garantir a estabilidade e evitar interrupções no fornecimento. Neste trabalho, propomos uma nova abordagem para o problema de balanço de carga em redes de transmissão, utilizando ferramentas da teoria espectral de grafos para explorar a topologia da rede e analisar a distribuição de potência ativa nas linhas de transmissão. A partir da linearização das equações de fluxo de carga e da análise da matriz laplaciana da rede, é possível identificar linhas críticas e otimizar o fluxo de potência de maneira mais eficiente. Para isso, aplicamos um método matemático baseado nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), resolvendo o problema original da literatura por meio de operações elementares de matrizes. Essa estratégia resulta em uma significativa redução do tempo computacional necessário para resolver instâncias IEEE adaptadas para testes específicos do problema de balanço de carga, com tempo de cálculo inferior a 0,5 segundo para uma rede de 2383 nós. Desenvolvemos, ainda, um modelo matemático linear original que promove um balanço de carga mais equilibrado, minimizando a potência máxima nas linhas, diferente do usual que minimiza o quadrado da norma das potências. Como resultado, para a rede IEEE de 2383 nós, obtivemos uma redução de aproximadamente 23% na potência máxima nas linhas, além de ganhos expressivos em desempenho computacional. Adicionalmente, o modelo proposto incorpora restrições operacionais como limites de potência nas linhas e de geração nas unidades geradoras, possibilitando uma formulação mais aderente à realidade dos sistemas elétricos. O novo modelo também viabiliza o monitoramento automatizado de linhas críticas que operem acima de limites aceitáveis de risco de suas capacidades nominais, contribuindo para a identificação de pontos da rede que requerem investimentos. Consequentemente, este trabalho possibilita novas abordagens para a modernização da infraestrutura elétrica, promovendo maior eficiência operacional e visando a iminente integração de fontes renováveis ao sistema de transmissão, com impactos positivos na confiabilidade e no desempenho da rede elétrica.

Palavras-chave: otimização matemática; teoria espectral de grafos; fluxo de potência ótimo; rede elétrica de transmissão.

ABSTRACT

Electricity is essential for human development, directly impacting key sectors such as education, healthcare, transportation, and industry. However, the increasing integration of renewable sources, such as wind and solar power, has made power system management increasingly complex, requiring robust infrastructure to ensure stability and prevent supply interruptions. In this work, we propose a new approach to the load balancing problem in transmission networks, using tools from spectral graph theory to explore the network topology and analyze the active power distribution in transmission lines. By linearizing the power flow equations and analyzing the network's Laplacian matrix, it is possible to identify critical lines and optimize the power flow more efficiently. To achieve this, we apply a mathematical method based on the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions, solving the original problem from the literature through elementary matrix operations. This strategy significantly reduces the computational time required to solve adapted IEEE test instances for the load balancing problem, with a computation time of less than 0.5 seconds for a 2383-node network. Furthermore, we develop an original linear mathematical model that promotes a more balanced load distribution by minimizing the maximum power in the lines, unlike the conventional approach of minimizing the squared norm of power flows. As a result, for the IEEE 2383 node network, we achieved an approximately 23% reduction in the maximum line power, along with significant gains in computational performance. Furthermore, the proposed model incorporates operational constraints such as power limits on the lines and power generation on the generator units, enabling a formulation that better aligns with real-world power system conditions. The new model also facilitates automated monitoring of critical lines operating above acceptable risk thresholds of their nominal capacities, helping identify network segments requiring investment. Consequently, this work enables new approaches to modernize the electrical infrastructure, improve operational efficiency, and support the imminent integration of renewable energy sources into the transmission system, with positive impacts on the reliability and performance of the grid.

Keywords: mathematical optimization; graph spectral theory; optimal power flow; transmission power network.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de rede de 6 nós, em que todos os pontos consomem 1 unidade de energia com nós geradores em azul. O valor de geração ideal para o nó 1 é 4 unidades e para o nó 2 é 2 unidades para minimizar a potência nas linhas. . .	12
Figura 2 – Comparação da potência nas linhas entre a geração ideal e a não ideal. . . .	13
Figura 3 – Representação de um grafo simples, conexo e não orientado.	19
Figura 4 – Representação de um grafo orientado.	19
Figura 5 – Representação de uma dada orientação do grafo representado na Figura 1. .	32
Figura 6 – Representação gráfica da solução.	34
Figura 7 – Fluxograma dos modelos apresentados neste trabalho.	39
Figura 8 – Representação do esquema da rede IEEE 30. Os pontos 1,2,13,22,23 e 27 são geradores.	42
Figura 9 – Distribuição de potência nas linhas da rede para os modelos $(QP)_B$ e $(MW)_i$. .	47
Figura 10 – Distribuição da potência nas linhas das redes IEEE 30, IEEE 118 e IEEE 300 com identificação de linhas críticas (em vermelho) obtidas com o modelo $(WM)_L$	49
Figura 11 – Distribuição da potência nas linhas para a rede IEEE 118 com limitação de potência.	50
Figura 12 – Distribuição da potência nas linhas para a rede IEEE 118 com limitação de potência nas linhas e de geração nos geradores.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resolvendo um programa quadrático pelo método matricial $(QP)_B$	33
Tabela 2	– Valores ótimos da função objetivo $\ P_{lin}\ ^2$ para cada rede, incluindo a maior potência observada, a linha crítica e suas extremidades.	41
Tabela 3	– Tempo computacional para resolver cada instância por cada modelo e comparação da redução obtida pelos modelos (QP) e $(QP)_B$ em relação ao modelo (MF)	42
Tabela 4	– Avaliação de métricas para K considerando a ordenação crescente dos autovalores.	44
Tabela 5	– Avaliação de métricas para K escolhido de forma aleatória.	45
Tabela 6	– Comparação da potência máxima nas linhas de transmissão e do tempo computacional obtido pelos modelos $(WM)_i$ e $(QP)_B$ para diferentes redes. .	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Justificativa e motivação	11
1.1.1	<i>Um exemplo intuitivo como motivação</i>	12
1.2	Revisão do estado da arte	13
1.3	Objetivos do trabalho	14
1.4	Metodologia para condução do trabalho	15
1.5	Nossas contribuições	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Teoria espectral de grafos	18
2.2	Equações de Fluxo de Carga	22
2.3	Solução espectral do fluxo de carga	24
3	DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA . .	28
3.1	Introdução ao problema de balanço de carga em rede elétrica	28
3.1.1	<i>Definição formal do problema</i>	28
3.2	Nossa contribuição	30
3.2.1	<i>Resolução alternativa</i>	30
3.2.2	<i>Nova abordagem considerando um modelo linearizado</i>	34
3.2.3	<i>Explorando a nova abordagem para detectar risco iminente de sobrecarga em linhas</i>	36
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	40
4.1	Análise dos modelos quadráticos (FP), (FM), (FM)_K, (QP) e (QP)_B . . .	41
4.2	Análise do modelo linearizado (WM)_i versus (QP)_B e do modelo (WM)_L	45
5	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICE A – Conceitos básicos em redes de energia	54

1 INTRODUÇÃO

A eletricidade constitui um elemento fundamental para o progresso humano, estando diretamente relacionada ao desenvolvimento de setores essenciais como educação, saúde, transporte e indústria. Sua ausência pode desencadear impactos significativos sobre a sociedade, como evidenciado em eventos históricos, a exemplo do apagão ocorrido em novembro de 1965 nos Estados Unidos e Canadá (U.S. Department of Energy, 1965), e no Brasil em 2001 (PEREIRA *et al.*, 2002). Mais recentemente, em 2023, o país voltou a enfrentar uma falha de grandes proporções no sistema elétrico, evidenciando a vulnerabilidade de sua infraestrutura ainda nos dias atuais (Operador Nacional do Sistema Elétrico, 2023).

A rede elétrica moderna é uma das maiores conquistas da engenharia do século XX, mas, ao mesmo tempo, tornou-se extremamente complexa. Essa complexidade é resultado do crescimento da demanda, da interligação de sistemas e, mais recentemente, da integração crescente de fontes renováveis, como a energia solar e a eólica. Esse novo cenário impõe novos desafios de planejamento e operação, sobretudo no que diz respeito à identificação de linhas críticas de transmissão, ou seja, aquelas mais propensas à sobrecarga e falhas.

1.1 Justificativa e motivação

O aumento da complexidade das redes elétricas exige soluções mais eficientes e inteligentes para seu planejamento e operação. Esse desafio se intensifica com a expansão das fontes renováveis, cuja variabilidade pode concentrar fluxos de energia em partes específicas da rede, potencializando o risco de sobrecarga.

Nesse contexto, destaca-se o crescimento expressivo da geração eólica e solar no Nordeste brasileiro, especialmente no estado do Ceará. Apesar do seu elevado potencial para energias renováveis, a região enfrenta sérios desafios na infraestrutura de transmissão. Gargalos na rede têm limitado a expansão da geração, levando a cortes na produção, desperdícios energéticos e perdas financeiras significativas para investidores (Diário do Nordeste, 2024). Para mitigar esses problemas, investimentos bilionários vêm sendo realizados em novas linhas de transmissão (Secretaria de Desenvolvimento Econômico do Ceará, 2024).

Fortalecer essa infraestrutura é essencial para consolidar o Ceará como referência no setor, garantindo o escoamento eficiente da energia gerada e atraindo novos investimentos para a região (REUTERS, 2024). Para isso, torna-se urgente rever ou atualizar ferramentas matemáticas

e computacionais para modelar, analisar e projetar as novas necessidades de redes de transmissão para lidar com a produção de energia de fontes renováveis. Tais ferramentas devem identificar pontos críticos da rede, prever a distribuição dos fluxos de potência e propor estratégias para aumentar a confiabilidade e a resiliência do sistema elétrico.

1.1.1 Um exemplo intuitivo como motivação

Considere uma rede elétrica composta por pontos de consumo de eletricidade (clientes) e pontos de geração de eletricidade (geradores), onde os geradores têm a responsabilidade de suprir a demanda total dos consumidores. O objetivo é analisar e otimizar a distribuição de potência elétrica nas linhas da rede, considerando a geração de energia elétrica de cada produtor para atender a demanda e identificar quais delas estão mais vulneráveis à sobrecarga.

A Figura 1 mostra uma rede simplificada com seis nós. Todos consomem uma unidade de energia elétrica, enquanto apenas os nós 1 e 2 atuam como geradores. As conexões entre os nós são representadas pelas linhas de transmissão l_1, l_2, \dots, l_8 .

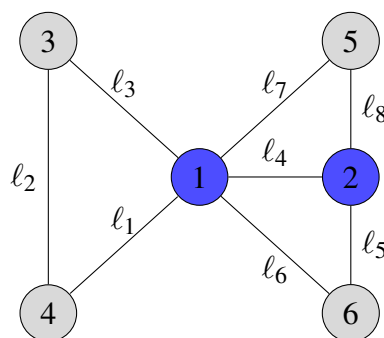
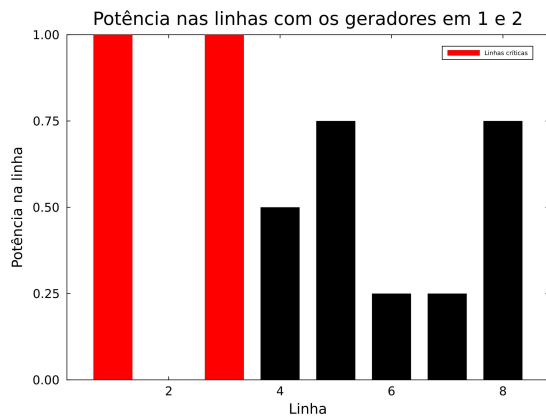
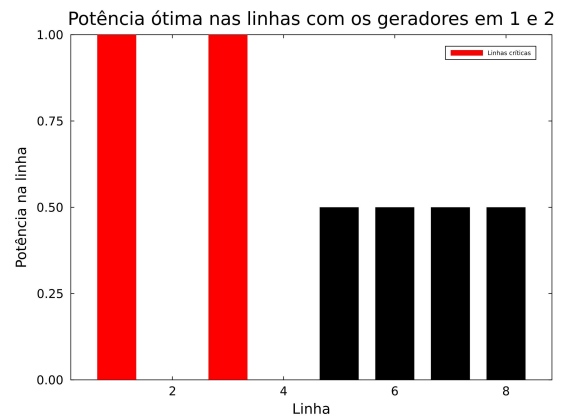


Figura 1 – Exemplo de rede de 6 nós, em que todos os pontos consomem 1 unidade de energia com nós geradores em azul. O valor de geração ideal para o nó 1 é 4 unidades e para o nó 2 é 2 unidades para minimizar a potência nas linhas.

Suponha que o gerador 1 e o gerador 2 produzam, cada um, 3 unidades de energia. Com essa configuração, obtemos a distribuição de potência nas linhas em valor absoluto, conforme ilustrado na Figura 2a. A soma do quadrado das potências nas linhas para essa configuração é 3.5. No entanto, para minimizar essa métrica (a norma ao quadrado da potência nas linhas), a geração ideal dos geradores deve ser ajustada da seguinte forma. O gerador localizado no ponto 1 deve produzir 4 unidades de energia, enquanto o gerador localizado no ponto 2 deve produzir 2 unidades de energia. A Figura 2b apresenta a distribuição de potência nas linhas correspondente a esse caso ideal, evidenciando a alocação equilibrada da energia gerada e transmitida pela rede. Para essa situação ideal, a soma do quadrado das potências nas linhas é 3.



(a) Geração não ideal: os geradores 1 e 2 produzem 3 unidades de energia cada.



(b) Geração ideal: os geradores 1 e 2 produzem 4 e 2 unidades de energia, respectivamente.

Figura 2 – Comparação da potência nas linhas entre a geração ideal e a não ideal.

Podemos levantar o questionamento: a otimização dessa métrica (a norma ao quadrado da potência nas linhas) resulta, de fato, na melhor distribuição de potência? Veremos que a resposta nem sempre é afirmativa.

1.2 Revisão do estado da arte

Com o aumento da complexidade dos sistemas elétricos e a crescente demanda por eficiência, os problemas de Fluxo de Potência Ótimo (Optimal Power Flow – OPF) tornaram-se centrais nas pesquisas da área. O OPF busca otimizar uma função objetivo de interesse, sujeita às restrições físicas e operacionais do sistema elétrico, como os limites de tensão, corrente e capacidade das linhas de transmissão.

Diferentes critérios (ou métricas) podem ser adotados como função objetivo, como a minimização das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão (BAPTISTA *et al.*, 2004) e a redução dos custos operacionais. A formulação e resolução eficiente do OPF têm sido objeto de intensas pesquisas nas últimas décadas, sendo parte essencial de ferramentas modernas de análise e operação de sistemas de potência. Para isso, o modelo de fluxo de carga desempenha papel fundamental, pois representa a base sobre a qual se estruturam os problemas de otimização em redes elétricas estacionárias (KUNDUR, 1994).

Essas equações de fluxo de carga estabelecem a relação entre a potência de entrada, a tensão elétrica e a corrente nos diferentes nós da rede. Trata-se de um sistema não linear, que costuma ser resolvido por métodos iterativos, como o método de Newton (GRAINGER; STEVENSON, 1994). No entanto, essas equações podem apresentar múltiplas soluções, e o processo iterativo pode enfrentar dificuldades de convergência, como apontado por diversos

autores Pourbagher e Derakhshandeh (2018), Tostado-Véliz *et al.* (2019). Compreender como a solução dessas equações é influenciada pela topologia da rede e pela distribuição espacial de geradores e consumidores de energia elétrica ainda representa um desafio relevante.

Nesse contexto, este trabalho propõe uma abordagem fundamentada na teoria espectral de grafos, conforme sugerido por Caputo *et al.* (2019). De forma geral, utiliza-se uma versão linearizada das equações de fluxo de carga para derivar uma formulação baseada no operador laplaciano do grafo correspondente à rede elétrica para chegar a uma equação semelhante à equação de Laplace. Essa equação envolve o operador laplaciano do grafo que representa a rede elétrica (CVETKOVIC *et al.*, 2011).

A matriz laplaciana associada ao grafo pode ser vista como uma versão discreta do operador laplaciano usado em problemas contínuos (NEWMAN, 2000). Essa matriz tem propriedades interessantes: é simétrica, semi-definida positiva e seus autovetores são ortogonais entre si. Com base nesses autovetores e autovalores, podemos desenvolver e analisar vários modelos matemáticos.

Essa análise espectral permite enxergar, de forma natural, como a estrutura da rede (topologia) e a localização dos geradores e cargas influenciam os fluxos de potência nas linhas de uma rede de transmissão. Embora esse tipo de abordagem também possa ser aplicado em redes de distribuição, o que não é o foco deste trabalho, elas geralmente têm uma estrutura mais simples, parecida com uma árvore, e a topologia tende a ter um impacto menor.

Por fim, problemas complexos geralmente aparecem nas redes de transmissão. Assim, o foco deste trabalho é nesse tipo de rede, tendo como base trabalhos como, por exemplo, o de Retiere *et al.* (2020) que utiliza essa abordagem para identificar pontos frágeis em redes de energia, mostrando o potencial dessa análise.

1.3 Objetivos do trabalho

O principal objetivo deste estudo é desenvolver uma abordagem eficiente para o balanço de carga em redes elétricas de transmissão, utilizando ferramentas de otimização matemática combinada com análise espectral das equações de fluxo. Embora o balanço de carga seja um problema amplamente abordado na literatura, a proposta aqui é oferecer uma nova perspectiva, incorporando a análise espectral para melhorar a compreensão e a distribuição da potência elétrica nas linhas de transmissão.

Mais especificamente, busca-se:

- Analisar a distribuição da potência elétrica nas linhas da rede elétrica: Considerando uma rede composta por pontos de consumo (cargas) e pontos de geração (geradores), busca-se monitorar e entender como a energia é distribuída ao longo da rede, com ênfase nas linhas de transmissão. O foco está na identificação de possíveis desequilíbrios e na detecção de linhas sujeitas a sobrecarga.
- Analisar modelos existentes na literatura: Realizar uma análise computacional comparativa entre modelos quadráticos propostos na literatura para o problema de balanço de carga. Avaliar, em particular, se aproximações da função objetivo baseadas na seleção de subconjuntos próprios de autovetores e autovalores podem gerar soluções próximas ao ótimo, sejam tais subconjuntos tomados em ordem ou de forma aleatória.
- Propor um método alternativo de resolução, desenvolver um método de resolução que utiliza basicamente operações matriciais elementares. O objetivo é tornar o processo de resolução dos modelos mais rápido e eficiente do que os métodos clássicos de programação não linear.
- Propor um modelo linear para a melhor distribuição de carga na rede. A partir de uma nova abordagem, buscar minimizar a potência máxima nas linhas da rede, favorecendo um melhor balanço entre geração e consumo. Comparar com a abordagem que minimiza a norma ao quadrado do vetor de potência nas linhas.
- Expandir o estudo para um cenário mais realista. Incorporar ao novo modelo linear, restrições físicas relacionadas à capacidade das linhas de transmissão e à geração das unidades geradoras. Além disso, introduzir um mecanismo de controle que permita monitorar e mitigar situações em que uma linha atinja limites críticos de operação.

1.4 Metodologia para condução do trabalho

Partindo das Equações de Fluxo de Carga em corrente alternada, realizamos aproximações apropriadas para redes de transmissão, que é o nosso foco, de modo a obter uma equação linearizada para a potência ativa. Com base nessa expressão linearizada, derivamos uma equação espectral da potência ativa nas linhas, que envolve diretamente os autovalores e os autovetores da matriz laplaciana associada ao grafo que representa a rede elétrica.

Essa equação espectral possibilita o cálculo da norma ao quadrado das potências nas linhas. Essa é a função objetivo dos modelos quadráticos de otimização presentes na literatura (CAPUTO *et al.*, 2019). A partir disso, realizamos uma análise desses modelos, compreendendo

a investigação da questão levantada por pelos autores sobre a viabilidade de aproximar a função objetivo utilizando apenas um subconjunto dos autovalores e autovetores da matriz laplaciana, reduzindo assim a complexidade computacional sem perda significativa de precisão.

Adicionalmente, desenvolvemos um método baseado nas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para a resolução desses modelos da literatura, o qual permite resolvê-los de forma mais rápida e eficiente, por meio de operações elementares sobre matrizes.

Motivados pela questão de saber se a minimização da norma ao quadrado da potência leva, de fato, à melhor distribuição de potência nas linhas da rede, propusemos um novo modelo de otimização linear considerando um objetivo alternativo. Essa nova abordagem busca minimizar a potência máxima nas linhas, promovendo uma distribuição mais equilibrada do fluxo de carga nas linhas da rede.

Com o intuito de aproximar o modelo das condições reais de operação do sistema elétrico, introduzimos restrições adicionais, tais como os limites de potência nominal das linhas de transmissão e as capacidades máximas de geração das unidades geradoras, além da identificação das linha que ultrapassam um certo limite de risco de sua potência nominal. Ainda mais, o modelo (de programação inteira mista) proposto é capaz de capturar situações de demanda não atendida, fornecendo uma ferramenta alternativa para o planejamento e a operação do sistema.

Por fim, os experimentos computacionais foram conduzidos sobre quatro instâncias de redes IEEE modificadas para representar cenários específicos do problema de balanço de carga, permitindo avaliar o desempenho dos modelos da literatura em comparação com as abordagens propostas neste trabalho.

1.5 Nossas contribuições

O problema de balanço de carga é um problema amplamente estudado. No entanto, o abordamos sob a perspectiva espectral, representando uma alternativa inovadora para compreender melhor a distribuição da potência elétrica na rede. Nosso interesse está na identificação de possíveis linhas críticas (com risco de sobrecargas), considerando a distribuição da produção de energia pelos geradores, com reavaliações periódicas a cada 10 ou 15 minutos. Nesse contexto, desenvolvemos formulações que permitem obter soluções de forma mais eficiente do que métodos convencionais.

Vale destacar que resultados preliminares desta pesquisa em (SILVA *et al.*, 2024), para o problema de balanço de carga em redes de energia, incluem uma análise computacional

comparativa de modelos propostos na literatura em (KNIPPEL *et al.*, 2020) e novas abordagens de resolução, respondendo ainda questões sobre se a função objetivo dos modelos matemáticos baseadas na seleção de um subconjunto de autovetores/autovalores em ordem crescente de valores proporcionaria uma aproximação mais precisa em comparação com uma escolha aleatória desse subconjunto, quando confrontada com a solução do problema obtida ao considerar todos os autovalores/autovetores. Além disso, em (SILVA *et al.*, 2024) foi proposto um método alternativo para a resolução do problema, que incorpora as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Esse método se baseia exclusivamente em cálculos matriciais elementares, tornando o processo de resolução significativamente mais rápido e eficiente do que os métodos tradicionais de resolução do problema na literatura.

Adicionalmente, avançamos para um modelo mais realista, incorporando a variação do problema de Despacho Econômico com Restrições de Segurança (SCED), considerando limitações na geração e na potência das linhas (que podem ser definidas pelo operador da rede e determinadas com base nas especificações físicas do material de fabricação das linhas). Além disso, introduzimos um mecanismo de controle baseado em variáveis de decisão para monitorar e gerenciar situações em que uma linha atinja um limite crítico de risco de sobrecarga (por exemplo, 80% ou 90% de sua capacidade nominal). Essa abordagem aprimora a compreensão da influência da topologia da rede na operação do sistema elétrico, ao mesmo tempo que reforça a análise da segurança e eficiência da transmissão, como veremos nos próximos capítulos.

O restante deste trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, apresentamos a base teórica necessária para a obtenção das equações de fluxo de carga e derivação de uma expressão para a potência ativa nas linhas aplicando a teoria espectral de grafos. No Capítulo 3, abordamos modelos de otimização da literatura e novos para o problema do balanço de carga em redes elétricas de transmissão. No Capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos com os modelos discutidos neste trabalho para redes elétricas modificadas da IEEE de diferentes dimensões. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões, perspectivas e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a base teórica que fundamenta o desenvolvimento deste trabalho, incluindo os principais conceitos utilizados. Inicialmente, exploramos elementos essenciais da teoria espectral de grafos, que permeiam todas as etapas do estudo, até o desenvolvimento e análise dos modelos matemáticos. Na sequência, discutimos os elementos essenciais da análise de sistemas elétricos, com ênfase nas equações de fluxo de carga. Em seguida, focamos especificamente nas redes de transmissão de energia, adotando aproximações clássicas para esse tipo de rede, a fim de derivar uma expressão para a potência ativa nas linhas da rede. Por fim, utilizamos a teoria espectral para encontrar uma formulação alternativa da potência nas linhas de transmissão, a qual é essencial para o desenvolvimento e análise dos modelos matemáticos apresentados nos capítulos seguintes.

Este capítulo faz uso extensivo de conceitos de álgebra linear. Para leitores que desejem revisar esses tópicos ou que ainda não estejam familiarizados com eles, recomendamos a leitura da obra (ANTON; RORRES, 2011).

2.1 Teoria espectral de grafos

Nesta seção, exploramos os elementos fundamentais da teoria espectral de grafos, que desempenham um papel crucial no desenvolvimento dos modelos matemáticos apresentados posteriormente. Para o leitor não familiarizado com conceitos básicos de teoria dos grafos, recomendamos (WEST, 2001). Já para um aprofundamento da teoria espectral de grafos, sugerimos (CVETKOVIC *et al.*, 2011).

Consideramos que uma rede elétrica pode ser modelada como um grafo simples, conexo e não orientado. Inicialmente, destacamos os conceitos de gradiente discreto e laplaciano, ambos diretamente associados à estrutura do grafo que representa a rede. Para introduzir a ideia de gradiente discreto, começamos com a noção de gradiente no contexto contínuo, o que nos permite definir o laplaciano de um grafo.

Uma das ferramentas fundamentais na análise de superfícies e campos escalares em espaços contínuos é o gradiente $\nabla_c(g) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$ no espaço tridimensional em coordenadas cartesianas x, y e z , sendo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. O gradiente mede a taxa de variação de uma função escalar em cada ponto do espaço e se comporta como um operador linear que opera sobre a função g . Na física, um exemplo clássico é o vetor campo elétrico \mathbf{E} , que pode ser obtido a partir do gradiente

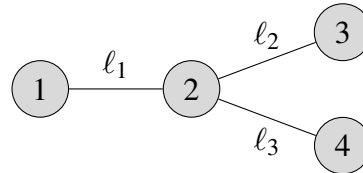
negativo do potencial elétrico ϕ , ou seja, $\mathbf{E} = -\nabla_c \phi$. Isso indica que a variação espacial do potencial elétrico induz um fluxo de carga, uma ideia central na eletrostática (GRIFFITHS, 2005).

Ao passar para o contexto discreto, como em redes elétricas modeladas por grafos, essa noção é adaptada para capturar variações entre os nós da rede. Em vez de um espaço contínuo, consideramos diferenças finitas da função definida nos vértices do grafo, o que reflete o papel das diferenças de potencial entre nós conectados por arestas (nós vizinhos). Dessa forma, o gradiente discreto pode ser interpretado como uma generalização do conceito diferencial, permitindo modelar fenômenos físicos como tensão elétrica e fluxo de corrente dentro da estrutura discreta da rede.

Essa abordagem nos leva à definição formal do gradiente discreto, elemento essencial na construção do operador laplaciano do grafo e na análise espectral de uma rede, conforme definido a seguir.

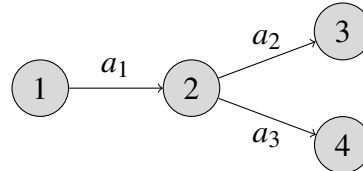
Definição 2.1.1 *Considerando uma orientação arbitrária das arestas do grafo que representa a rede, o gradiente discreto ∇ pode ser definido como a matriz $\nabla = M^T$, em que M^T é a transposta da matriz de incidência nó-arco M do grafo orientado.*

Figura 3. Representação de um grafo simples, conexo e não orientado.



Fonte: O autor.

Figura 4. Representação de um grafo orientado.



Fonte: O autor.

Para ilustrar o conceito de gradiente discreto, considere o grafo representado na Figura 3, com vértices 1, 2, 3 e 4, e arestas ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 . Atribuímos uma orientação arbitrária para as arestas desse grafo, conforme mostrado na Figura 4, obtendo-se os arcos a_1 , a_2 e a_3 . Denotamos cada arco a_i como um par ordenado (j, k) , indicando que o arco parte do vértice j

para o vértice k . Com essa orientação, calculamos o gradiente discreto associado a esse grafo. Nesse sentido, seja $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária definida nos vértices V de um grafo G (representando, por exemplo, a temperatura ou a energia em cada nó), podemos então calcular o gradiente discreto correspondente ao grafo da Figura 2 para a função f , com $f(i) = f_i$, como:

$$\nabla f = M^T f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,2) \\ (2,3) \\ (2,4) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_2 \\ f_4 - f_2 \end{pmatrix}.$$

Cada linha da matriz ∇ representando o gradiente discreto corresponde a um arco do grafo, e cada coluna, a um vértice. Para um arco representado pelo par ordenado (j, k) , atribuímos o valor -1 na coluna do vértice de origem j e o valor 1 na coluna do vértice de destino k .

Como apresentado, o gradiente discreto atua como um operador, capturando a variação da grandeza ao longo das arestas do grafo, permitindo uma interpretação análoga ao gradiente no caso contínuo. Com a definição de gradiente discreto em mãos, podemos agora definir o laplaciano associado a um grafo e explorar algumas de suas propriedades.

Definição 2.1.2 *O operador laplaciano Δ de um grafo \mathcal{G} de n nós é definido como $\Delta = \nabla^T \nabla = D_n - A_n$, em que A_n é a matriz de adjacência nó-nó e D_n é uma matriz diagonal cujo elemento d_{ii} de D é o grau do vértice i em \mathcal{G} .*

Observa-se que a matriz do laplaciano Δ é simétrica e real, satisfazendo a relação $\Delta \mathbf{v}^j = \lambda_j \mathbf{v}^j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, onde λ_j representa o j -ésimo autovalor associado ao autovetor \mathbf{v}^j da matriz laplaciana Δ . Além disso, essa matriz possui propriedades fundamentais que desempenham um papel central na análise espectral de grafos (ver, por exemplo, (CVETKOVIC *et al.*, 2011)):

- A matriz laplaciana é semi-definida positiva, garantindo que todos os seus autovalores sejam reais e não negativos. Dessa forma, esses autovalores podem ser ordenados da seguinte maneira:

$$\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n;$$

- Pois, como $\Delta = \nabla^T \nabla$, temos que para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T \Delta x = x^T \nabla^T \nabla x = (\nabla x)^T (\nabla x) \geq 0.$$

Como $(\nabla x)^T (\nabla x)$ representa a norma quadrada de ∇x , ela é sempre não negativa, o que implica que Δ é semi-definida positiva, ou seja, seus autovalores são não negativos.

- Os autovetores \mathbf{v}^j podem ser escolhidos de tal modo a formar um conjunto ortonormal;
 - Como Δ é uma matriz simétrica real, o teorema espectral garante que seus autovetores podem ser escolhidos como um conjunto ortonormal. Assim, Δ possui uma decomposição espectral $\Delta = \bar{V} \Lambda \bar{V}^T$ em que \bar{V} é uma matriz formada de autovetores ortonormais de Δ , formando uma base, e Λ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de Δ .
- A multiplicidade do autovalor nulo corresponde ao número de componentes conexas do grafo. No caso de um grafo conexo, que é a hipótese que adotaremos, apenas um autovalor λ_1 será nulo;
 - Pois, para um grafo conexo, o posto da matriz de incidência nó-arco M é $n - 1$, onde n é o número de vértices do grafo. Esse fato também se aplica à matriz associada ao gradiente discreto do grafo, $\nabla = M^T$. Como a matriz Laplaciana Δ é dada por $\Delta = \nabla^T \nabla$, conclui-se que o posto de Δ também é $n - 1$. Consequentemente, a matriz Laplaciana possui $n - 1$ autovalores diferentes de zero e exatamente um autovalor igual a zero. Para mais detalhes, consulte (ABREU *et al.*, 2012).
- O autovalor $\lambda_1 = 0$ está associado ao autovetor de Goldstone, dado por $\mathbf{v}^1 = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{n}$;
 - Pois, como a matriz laplaciana relacionada a um grafo conexo satisfaz

$$\Delta \mathbf{v}^1 = (D - A) \mathbf{v}^1,$$

notando que a soma das colunas de $D - A$ é zero, temos que

$$(\Delta \mathbf{v}^1)_i = d_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} = 0.$$

Portanto, \mathbf{v}^1 é um autovetor constante e está associado ao autovalor 0. Como os autovetores são ortonormais, pode ser dado por $(1, \dots, 1)^T / \sqrt{n}$.

- Para qualquer autovetor \mathbf{v}^j correspondente a um autovalor não nulo, a soma de suas componentes é zero, ou seja, $\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^j = 0, j > 1$.
 - Pois, como os autovetores são ortonormais e \mathbf{v}^1 é dado por $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)^T$, conside-

rando $j > 1$, temos que

$$\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^j \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{v}_k^j = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^j = 0.$$

2.2 Equações de Fluxo de Carga

Nesta seção, introduzimos as equações de fluxo de carga para o estudo de sistemas de corrente alternada (CA). Essas equações serão analisadas no contexto de sistemas de transmissão de energia, permitindo a modelagem e análise do comportamento da potência nas redes.

As ideias apresentadas nesta seção são baseadas em (CAPUTO *et al.*, 2019). Para leitores que não estão familiarizados com os conceitos básicos de circuitos elétricos de corrente alternada, um conteúdo mais detalhado pode ser encontrado no Apêndice A, bem como em (GRAINGER; STEVENSON, 1994).

Inicialmente, supomos existir conservação de potência em cada nó da rede. Ou seja, o vetor de potências \mathcal{P} , que representa as potências inseridas na rede ou extraídas dela, e cujo componente k corresponde ao nó k da rede, pode ser expresso em função da matriz de voltagem \mathcal{V} e da matriz de corrente \mathcal{I} como

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} \mathcal{I}^*, \quad (2.1)$$

em que \mathcal{I}^* é o conjugado complexo da corrente \mathcal{I} , sendo o termo no lado direito da igualdade a potência associada à rede. Além disso, a partir da generalização da lei de Ohm, a corrente \mathcal{I} pode ser expressa como:

$$\mathcal{I} = \mathcal{Y} \mathcal{V} \quad (2.2)$$

onde \mathcal{Y} representa a matriz de admitância nodal, também conhecida como matriz Y_{bus} , e pode ser escrita como $\mathcal{Y} = \hat{G} + jB$, com $j^2 = -1$, em que \hat{G} e B são matrizes genéricas associadas, respectivamente, à condutância e à susceptância da rede. Além disso, a matriz de voltagem \mathcal{V} pode ser expressa como $\mathcal{V} = V + jW$, sendo V e W matrizes genéricas que representam as

componentes real e imaginária da voltagem. Portanto,

$$\mathcal{S} = (\hat{G} + jB)(V + jW), \quad (2.3)$$

que após manipulação do produto dos parênteses e aplicando o conjugado, obtemos $\mathcal{S}^* = (\hat{G}V - BW) + j(-BV - \hat{G}W)$ e, ao combinar com a equação (2.1), resulta em

$$\mathcal{P} = V(\hat{G}V - BW) + W(BV + \hat{G}W) + j[W(\hat{G}V - BW) + V(-BV - \hat{G}W)]. \quad (2.4)$$

Nesta expressão das potências \mathcal{P} , desmembramos o vetor em duas partes, representando o vetor de potências ativas P e o vetor de potências reativas Q , tendo em vista que $\mathcal{P} = P + jQ$. Esta separação conduz às equações de fluxo de carga, fundamentais para a análise de sistemas elétricos de potência:

$$P = V(\hat{G}V - BW) + W(BV + \hat{G}W), \quad (2.5)$$

$$Q = W(\hat{G}V - BW) + V(-BV - \hat{G}W). \quad (2.6)$$

Em notação de índice, considerando uma rede com m linhas e n nós, o sistema é descrito, para todo nó $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pelas equações:

$$V_k \sum_i^m (G_{ki}V_i - B_{ki}W_i) + W_k \sum_i^m (B_{ki}V_i + G_{ki}W_i) = P_k, \quad (2.7)$$

$$W_k \sum_i^m (G_{ki}V_i - B_{ki}W_i) - V_k \sum_i^m (B_{ki}V_i + G_{ki}W_i) = Q_k. \quad (2.8)$$

As somas nas equações acima correspondem à multiplicação de matrizes por vetores, enquanto os termos à esquerda das somas representam produtos tensoriais. Note que essas duas operações não comutam. O sistema descrito pelas equações (2.7) e (2.8) é quadrático em V e W .

Uma observação importante é que as matrizes B e \hat{G} na expressão de \mathcal{S} são matrizes laplacianas (CVETKOVIC *et al.*, 2011). Aproximações típicas podem ser feitas para uma rede de transmissão e para uma rede de distribuição. Examinaremos essas aproximações a seguir, aproveitando as propriedades especiais de B e \hat{G} . Como nosso foco está em redes de transmissão, adotamos três suposições clássicas (KUNDUR, 1994):

- A parte ôhmica da matriz \mathcal{S} é desprezível, ou seja, $\hat{G} = \mathbf{0}$;
- O módulo da tensão \mathcal{V} pode ser considerado constante e próximo de 1;
- A fase θ pode ser considerada pequena.

Assumindo a primeira condição ($\hat{G} = \mathbf{0}$) nas equações (2.5) e (2.6), obtemos as expressões para as potências ativas e reativas como

$$P = -V(BW) + W(BV), \quad Q = -W(BW) - V(BV). \quad (2.9)$$

Com a aplicação da segunda e terceira condições, considerando que o módulo da tensão $|\mathcal{V}| = v \approx 1$, temos a seguinte relação para a tensão:

$$\mathcal{V} = V + jW \equiv ve^{j\theta} = v(\cos \theta + j\sin \theta) \approx 1 + j\theta. \quad (2.10)$$

Dessa forma, deduzimos que $V = \mathbf{1}$ e $W = \theta$, levando a expressão para o vetor de potências ativas P a ser dada por

$$P = -B\theta \quad (2.11)$$

Esse é um sistema linear singular a ser resolvido para o vetor de fases θ conhecendo o vetor de potências ativas P . Para identificar as linhas críticas, calculamos o vetor de potências ativas nas linhas, denotado por P_{lin} , cujos componentes são as potências em cada linha. Isso é calculado usando o gradiente discreto ∇ (veja (RETIERE *et al.*, 2020) para exemplos):

$$P_{lin} = \nabla \theta. \quad (2.12)$$

Observe também a conexão entre ∇ e o laplaciano $B \equiv \nabla^T \nabla \equiv \Delta$. As duas equações (2.11)–(2.12) formam a base para os modelos considerados no restante do trabalho. O sistema linear (2.11) pode ser resolvido considerando as simetrias da matriz laplaciana singular B .

Para concluir esta seção, embora ao longo deste trabalho tenhamos concentrado a análise em redes de transmissão, observa-se que, para redes de distribuição, também é possível realizar uma simplificação análoga das equações de fluxo de carga (GRAINGER; STEVENSON, 1994), resultando em uma expressão muito semelhante à equação 2.11 (CAPUTO *et al.*, 2019).

2.3 Solução espectral do fluxo de carga

Lembre-se que a matriz laplaciana Δ é simétrica e semi-definida positiva, que seus autovalores verificam a propriedade $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n$, com n sendo o número de nós da rede e que os autovetores $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ podem ser escolhidos ortonormais. No restante do trabalho, assumimos que a rede é conexa, de modo que $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$.

Uma maneira padrão de resolver a equação (2.11) é usar diretamente a pseudo-inversa de Moore-Penrose (ANTON; RORRES, 2011) com uma regularização para eliminar a singularidade devida ao autovalor zero. Isso não fornece muitas informações sobre como a solução depende do grafo e da distribuição de potência. Assim, projetaremos P nos autovetores para tirar proveito de suas ortogonalidades.

Para deduzirmos uma expressão alternativa para P_{lin} , observe que cada componente do vetor de potências ativas $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ corresponde a um nó da rede. Podemos expressar esse vetor na base canônica de \mathbb{R}^n , ou seja, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, em que \mathbf{e}_k é o k -ésimo vetor unitário (a componente k de \mathbf{e}_k é igual a 1, e as demais componentes são nulas). Assim, temos $P = \sum_{k=1}^n P_k \mathbf{e}_k$. Para encontrarmos a solução espectral do fluxo de carga, projetamos P na base de autovetores ortonormais $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n\}$ do laplaciano da matriz da rede, determinando os coeficientes (p_1, p_2, \dots, p_n) tais que

$$P = p_1 \mathbf{v}^1 + p_2 \mathbf{v}^2 + \dots + p_n \mathbf{v}^n. \quad (2.13)$$

Assumindo que a demanda e o fornecimento de energia estejam equilibrados na geração elétrica da rede, as componentes do vetor de potência P satisfazem $\sum_{k=1}^n P_k = 0$. Manipulando essa expansão em (2.13), expressando P_k na base dos autovetores de Δ e verificando que as componentes de cada autovetor \mathbf{v}^i satisfazem $\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^i = 0$, $i > 1$, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n P_k = \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^i \right) = p_1 \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^1 \right).$$

Além disso, considerando que o primeiro autovetor \mathbf{v}^1 (de Goldstone) se expressa como $\mathbf{v}^1 = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{n}$, vem que $\sum_{k=1}^n P_k = p_1 \sqrt{n} = 0 \Rightarrow p_1 = 0$. Isso significa que, explorando a conservação da potência ativa na rede elétrica, a primeira coordenada de P na base dos autovetores é sempre nula, pois a soma das potências é zero.

Visando reescrever a equação (2.12) de forma mais simples, explorando as propriedades da matriz laplaciana Δ , precisamos conhecer uma expressão para θ . Para isso, concentramos nossa atenção na equação (2.11) e utilizamos a relação entre a matriz B , que descreve a estrutura da rede, e o operador laplaciano Δ , dado também por $B \equiv \Delta = \nabla^T \nabla$. Essa matriz B é diagonalizável por ser simétrica. Uma vez ortonormalizada, podemos reescrever a sua inversa usando sua decomposição espectral. Se \bar{V} é a matriz cujas colunas são os autovetores \mathbf{v}^i de B e Λ é a matriz diagonal cujos elementos $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ são os autovalores correspondentes, então $B = \bar{V} \Lambda \bar{V}^T$. Note que B não é inversível. A seguir, calcularemos a fase θ utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose relacionada a B , à luz da teoria espectral (CVETKOVIC *et al.*, 2011).

Resgatando a equação (2.11) que expõe a equação fundamental do fluxo de potência ativa dada por $P = -B\theta$, temos que

$$P = -\bar{V} \Lambda \bar{V}^T \theta \Rightarrow \bar{V}^T P = \Lambda \bar{V}^T \theta. \quad (2.14)$$

Nesse caso, para resolver o sistema (2.14) em $\bar{V}^T \theta$, precisamos determinar a inversa generalizada de Moore-Penrose de Λ . Inicialmente, defina uma submatriz $\hat{\Lambda}$ de Λ como sendo a matriz diagonal $(n-1) \times (n-1)$ cujos elementos são dados por $(\hat{\Lambda})_{ii} = \lambda_{i+1}$. Além disso, seja $\mathbf{0}$ uma matriz coluna de dimensão $(n-1) \times 1$ contendo apenas elementos iguais a zero. Podemos expressar a matriz Λ através da seguinte decomposição posto completo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \hat{\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = KL \quad (2.15)$$

onde K e L são definidas como $K = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \hat{\Lambda} \end{pmatrix}$ e $L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, sendo K uma matriz $n \times (n-1)$ posto coluna completo e L uma matriz $(n-1) \times n$ posto linha completo. Uma inversa generalizada para Λ pode ser expressa como $L^+ K^+$, onde L^+ e K^+ são inversas generalizadas de L e K , respectivamente, tais que $L^+ = \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix}$ e $K^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix}$ onde $(\hat{\Lambda}^{-1})_{ii} = \frac{1}{\lambda_{i+1}}$.

A partir da Equação (2.14), obtemos:

$$L^+ K^+ (-\bar{V}^T P) = \bar{V}^T \theta \Rightarrow -\bar{V} L^+ K^+ \bar{V}^T P = \theta. \quad (2.16)$$

Notando que $L^+ K^+ = \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{\Lambda}^{-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{pmatrix}_{n \times n}$ e que $\bar{V}^T P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, resulta que

$$\theta = -\bar{V} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{\Lambda}^{-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = -\bar{V} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_2}{\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{\lambda_n} \end{pmatrix} = -\sum_{i=2}^n \frac{p_i}{\lambda_i} \mathbf{v}^i. \quad (2.17)$$

Essa equação fornece θ como projeção de P nos autovetores de B . Consequentemente, a potência nas linhas P_{lin} pode ser dada alternativamente por

$$P_{lin} = \nabla \theta = -\frac{p_2}{\lambda_2} \nabla \mathbf{v}^2 - \frac{p_3}{\lambda_3} \nabla \mathbf{v}^3 - \cdots - \frac{p_n}{\lambda_n} \nabla \mathbf{v}^n. \quad (2.18)$$

Considerando ainda que a rede elétrica é composta por pontos de geração e de consumo de energia, ambos essenciais para seu funcionamento e equilíbrio, é importante observar

que a geração ocorre em locais específicos, enquanto a demanda está distribuída entre diversos nós consumidores. Para uma análise eficiente desses aspectos, é crucial representar adequadamente as distribuições de geração e de consumo. Inicialmente, expressamos essas distribuições na base canônica, mas para capturar as propriedades espectrais e dinâmicas do sistema, é igualmente vantajoso projetá-las na base dos autovetores do laplaciano $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Nesse contexto, introduzimos os vetores G e L , que representam, respectivamente, a geração nos nós (a ser calculada) e a carga ou demanda nos nós (conhecida). Essas projeções permitem uma visão mais detalhada da interação entre geração e consumo de energia na rede, facilitando a análise e o controle do sistema. Os coeficientes dessas projeções são denotados por (g_1, g_2, \dots, g_n) e (l_1, l_2, \dots, l_n) , correspondendo às componentes de G e L na base dos autovetores. Portanto, podemos escrever

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}^i, \quad L = \sum_{k=1}^n L_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{v}^i. \quad (2.19)$$

Sendo $P \equiv G - L = \sum_{i=1}^n (g_i - l_i) \mathbf{v}^i$, vemos que a norma euclidiana de P_{lin} , utilizando a expressão (2.18) e considerando $p_1 = 0$, pode ser dada por

$$\|P_{lin}\|_2^2 = \sum_{i,j=2}^n \frac{(g_i - l_i)(g_j - l_j)}{\lambda_i \lambda_j} (\nabla \mathbf{v}^i)^\top \nabla \mathbf{v}^j.$$

Por fim, como

$$(\nabla \mathbf{v}^i)^\top \nabla \mathbf{v}^j = (\mathbf{v}^i)^\top (\nabla^\top \nabla) \mathbf{v}^j = (\mathbf{v}^i)^\top \Delta \mathbf{v}^j = \lambda_j (\mathbf{v}^i)^\top \mathbf{v}^j = \lambda_j \delta_{ij},$$

finalmente obtemos a relação de Parseval:

$$\|P_{lin}\|_2^2 = \sum_{i=2}^n \frac{(g_i - l_i)^2}{\lambda_i}. \quad (2.20)$$

Essa expressão mostra que a norma euclidiana das potências das linhas depende apenas dos autovalores e das projeções das potências de entrada e saída nos autovetores do laplaciano, usando λ_i , g_i e l_i . A expressão (2.20) também é válida para o laplaciano ponderado, o que a torna aplicável em redes elétricas reais (CAPUTO *et al.*, 2019). A seguir, utilizaremos esse desenvolvimento da teoria espectral para derivar modelos matemáticos para o problema de balanceamento de carga em redes elétricas de transmissão.

3 DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Neste capítulo, apresentamos o problema de otimização voltado ao balanço de carga em uma rede elétrica de transmissão, bem como suas formulações matemáticas. Tal problema foi inicialmente proposto em (KNIPPEL *et al.*, 2020) como uma extensão do trabalho desenvolvido em (CAPUTO *et al.*, 2019).

3.1 Introdução ao problema de balanço de carga em rede elétrica

Nesta seção, introduzimos o problema de otimização a ser tratado e apresentamos sua definição formal e suas formulações matemáticas, detalhando as variáveis, restrições e objetivos envolvidos.

3.1.1 Definição formal do problema

Modelamos a rede elétrica de transmissão como um grafo simples $\mathcal{G}(\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{E})$, onde cada ponto da rede pertence ao conjunto $\overline{\mathcal{V}}$ de vértices (nós da rede), e suas conexões (conjunto de linhas de transmissão) são dadas pelo conjunto de arestas \mathcal{E} . Denotamos por $n = |\overline{\mathcal{V}}|$ o número de vértices e $m = |\mathcal{E}|$ o número de arestas. Assumimos haver uma demanda elétrica em cada nó. Distinguímos duas classes de nós, $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}_{ger} \cup \mathcal{V}_{cons}$, onde \mathcal{V}_{ger} é o conjunto de nós que geram e distribuem energia (nós geradores) e \mathcal{V}_{cons} é o conjunto de nós que consomem energia (nós consumidores). O objetivo é determinar a quantidade de eletricidade gerada em cada nó gerador de modo a minimizar a “potência elétrica” nas linhas da rede, ou seja, a melhor distribuição de potência nas linhas - um problema conhecido como balanceamento de carga em redes de transmissão de energia. Para isso, busca-se, em uma primeira abordagem, minimizar a norma da potência nas linhas, conforme expressa na Equação (2.20). Isso nos redireciona a determinar o vetor de distribuição dos geradores G , dado o vetor de distribuição dos consumidores L , que minimiza essa expressão.

No desenvolvimento a seguir, os vetores G e L também podem ser representados por suas projeções g_i e l_i (com $i = 1, \dots, n$) no espaço dos autovetores ortonormais do laplaciano da rede. Com base nessa formulação, o problema pode ser apresentado conforme descrito a seguir, destacando-se os três primeiros modelos (FP) , (FM) e $(FM)_K$ desenvolvidos em (KNIPPEL *et al.*, 2020).

O primeiro modelo, denominado (FP) , explora as propriedades do espaço formado

pelos autovetores $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\}$ e autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ associados à rede elétrica. Nesse contexto, o modelo busca minimizar a norma da potência nas linhas de transmissão, conforme descrito pela equação (2.20):

$$(FP) \quad \min \quad \sum_{i=2}^n \frac{(g_i - l_i)^2}{\lambda_i} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i \geq 0, \quad k \in \mathcal{V}_{ger}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i = 0, \quad k \notin \mathcal{V}_{ger}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{v}_k^i, \quad (3.4)$$

em que a inequação (3.2) assegura a não negatividade da geração de energia G_k (sem projeção) nos vértices geradores. Por sua vez, a equação (3.3) impõe a restrição de ausência de geração de eletricidade nos vértices não geradores. Adicionalmente, a equação (3.4) garante que toda a energia gerada seja integralmente consumida. Ressaltamos que, como o objetivo geral é determinar o vetor de geração G , trabalhamos nesse modelo com suas projeções na base dos autovetores \mathbf{v}_i do grafo. Assim, as variáveis de decisão passam a ser os coeficientes g_i , que representam essas projeções. Como o vetor de consumo L é conhecido, suas projeções ℓ_i também são, podendo ser calculadas diretamente.

Um modelo equivalente pode ser obtido ao se considerar a base canônica e a base formada pelos autovetores:

$$(FM) \quad \min \quad \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\lambda_i} \right) (G-L)_j (G-L)_k \quad (3.5)$$

$$\text{s.a:} \quad G_k \geq 0, \quad k \in \mathcal{V}_{ger}, \quad (3.6)$$

$$G_k = 0, \quad k \notin \mathcal{V}_{ger}, \quad (3.7)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} G_k = \sum_{i=1}^n L_i. \quad (3.8)$$

Nesse contexto, a análise é conduzida por meio da transformação entre essas bases, permitindo uma interpretação mais clara das propriedades estruturais do sistema. Especificamente, a base canônica fornece uma representação padrão das variáveis envolvidas, enquanto a base dos autovetores revela a decomposição espectral, destacando as direções principais associadas aos autovalores do operador laplaciano.

Os autores (KNIPPEL *et al.*, 2020) levantaram um questionamento relevante acerca da viabilidade de resolver o modelo (FM) aproximadamente. A proposta consiste em aproximar o valor do coeficiente $\left(\sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\lambda_i} \right)$ associado ao produto $(G - L)_j (G - L)_k$ na função objetivo apresentada em (3.5). Embora o número de variáveis no modelo de otimização permaneça inalterado, a estratégia proposta envolveria o uso de uma técnica iterativa para selecionar, de forma sistemática, um subconjunto $K \subset \{2, 3, \dots, n\}$ de índices dos autovalores. Esse procedimento seria análogo a um esquema de geração de colunas, permitindo a definição dos coeficientes correspondentes aos produtos entre os elementos j e k pertencentes ao conjunto K .

Assim, a questão central reside em avaliar o quão próximo da solução ótima do modelo original (FM) estaria a solução do modelo aproximado, denotado por $(FM)_K$, obtido a partir da consideração de um subconjunto K dos autovalores e respectivos autovetores.

$$\begin{aligned} (FM)_K \quad \min \quad & \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i \in K} \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\lambda_i} \right) (G - L)_j (G - L)_k \\ \text{s.a: } & (3.6), (3.7), (3.8). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2 Nossa contribuição

Até o momento, foram apresentados os modelos disponíveis na literatura. Agora, passamos a delinear a contribuição original deste trabalho, enfatizando os aspectos inovadores propostos e as melhorias introduzidas em relação aos modelos previamente apresentados.

3.2.1 Resolução alternativa

Inicialmente, observe que é possível eliminar as variáveis associadas aos vértices não geradores em cada modelo, pois $G_k = 0$ para todo $k \notin \mathcal{V}_{ger}$. Essa simplificação reduz significativamente as dimensões do problema e acelera o processo de resolução, como será evidenciado nos resultados computacionais apresentados posteriormente.

Para introduzir uma nova abordagem de resolução, utilizamos a notação $q_{jk} = \sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\lambda_i}$, e reescrevemos o modelo (FM) na forma:

$$(QP) \quad \min \quad Z = \sum_{j,k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_j G_k - 2 \sum_{j \in \mathcal{V}_{ger}} \sum_{k=1}^n q_{jk} G_j L_k + 2 \sum_{j,k=1}^n q_{jk} L_j L_k \quad (3.10)$$

s.a: (3.6), (3.8).

As condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (BRADLEY *et al.*, 1977) podem ser aplicadas para resolver o modelo (QP). Esse procedimento utiliza a tradicional Fase I do método simplex, com a modificação de que uma variável nunca é introduzida na base caso sua variável complementar já esteja presente, mesmo que o critério simplex indique a possibilidade de sua inclusão.

Como a função objetivo do modelo (QP) é convexa, o problema apresenta um ponto ótimo único. Para encontrá-lo, basta observar que, na base ótima, todas as variáveis G_k estão nela. As condições de otimalidade KKT para (QP) são:

1. A solução é primal viável, isto é, satisfaz a restrição (3.8).
2. A solução é dual viável, ou seja, cada derivada parcial da função em (3.10), com relação a um dado G_j , satisfaz:

$$\left(2 \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_k - 2 \sum_{k=1}^n q_{jk} L_k \right) \geq u,$$

sendo u a variável dual associada à restrição (3.8).

3. Satisfação da complementariedade das folgas, isto é,

$$x_j G_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{V}_{ger},$$

em que x_j representa uma variável de folga introduzida na desigualdade da condição de viabilidade dual para G_j .

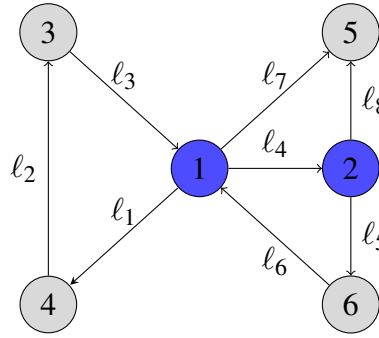
Com base nessas condições, é suficiente construir uma base cujas colunas estejam associadas às variáveis G_j . Para tanto, consideramos o sistema linear abaixo:

$$(QP)_B \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} G_k = \sum_{i=1}^n L_i, \\ x_j - 2 \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_k + u = -2 \sum_{k=1}^n q_{jk} L_k. \end{cases} \quad (3.11)$$

A inversa da matriz associada à base permite calcular diretamente os valores de cada G_j no ótimo. Esse procedimento simplifica consideravelmente a solução do problema, preservando a viabilidade e otimalidade garantidas pela convexidade do modelo.

As condições de otimalidade de KKT têm sido utilizadas para resolver problemas no setor de energia elétrica, como em variantes do problema de Fluxo de Potência Ótimo (OPF). Um desses problemas, que usamos como referencial para nosso estudo, tem como um dos objetivos principais minimizar as perdas de potência ativa na transmissão (BAPTISTA *et al.*, 2004).

Figura 5. Representação de uma dada orientação do grafo representado na Figura 1.



Fonte: O autor.

Para ilustrar intuitivamente o funcionamento do método, retomamos o exemplo apresentado na Subseção 1.1.1, resolvido por meio do método $(QP)_B$. Atribuindo uma orientação arbitrária às arestas do grafo da Figura 1 (resultando na representação orientada da Figura 5), obtemos o gradiente discreto associado à rede:

$$\nabla = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, o laplaciano discreto $\Delta = \nabla^T \nabla$ associado ao grafo é:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores λ_i (para $i = 1, 2, \dots, 6$) são:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad (3.12)$$

associados aos autovetores \mathbf{v}^i , que seguem abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T, & \mathbf{v}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{30}}(0, 3, 3, -2, -2, -2)^T, \\ \mathbf{v}^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, 1, -1)^T, & \mathbf{v}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{v}^5 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, 0, 2, -1, -1)^T, & \mathbf{v}^6 &= -\frac{1}{\sqrt{30}}(-5, 1, 1, 1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

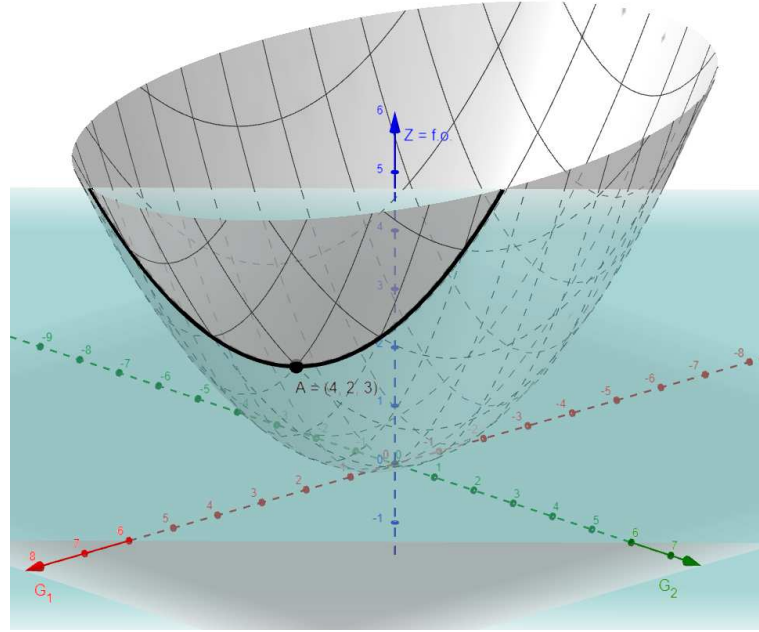
Portanto, a função objetivo é dada por $Z = f(G_1, G_2) = \frac{5}{36}G_1^2 - \frac{1}{18}G_1G_2 + \frac{11}{36}G_2^2$ para a formulação (QP), enquanto a restrição de conservação de energia é dada por $G_1 + G_2 = 6$, sendo $G_1 \geq 0$ e $G_2 \geq 0$. Assim, a solução ótima deve estar na interseção entre essas equações, resultando em uma parábola, cuja solução ótima encontra-se em seu vértice. A Figura 6 apresenta esses elementos, destacando o ponto ótimo $A = (G_1 = 4, G_2 = 2, Z = 3)$. Nesse contexto, a componente G_1 representa a geração no vértice 1, a componente G_2 a geração no vértice 2 e a componente Z o valor da função objetivo. Assim, a geração ótima é de 4 unidades no gerador do nó 1, 2 unidades no gerador do nó 2, e o valor ótimo da função objetivo que é 3. Para justificar essa solução, substituímos $G_2 = 6 - G_1$ na função objetivo Z , obtendo $\hat{Z} = f(G_1) = \frac{5}{36}G_1^2 - \frac{1}{18}G_1(6 - G_1) + \frac{11}{36}(6 - G_1)^2$. Derivando e igualando a zero, temos $\frac{d\hat{Z}}{dG_1} = 2 \cdot \frac{5}{36}G_1 - \frac{1}{18}(6 - 2G_1) - 2 \cdot \frac{11}{36}(6 - G_1) = \frac{1}{18}(18G_1 - 72) = 0$, resultando em $G_1 = 4$. Assim, $G_2 = 6 - 4 = 2$, e obtemos $Z = 3$.

Por outro lado, podemos resolver esse problema pelo método matricial (QP)_B por meio da construção de uma tabela do Método Simplex só com os G 's e u na base, conforme apresentado na Tabela 1 a seguir.

G_1	G_2	u	b
1	1	0	6
$2\frac{5}{36}$	$-\frac{1}{18}$	1	0
$-\frac{1}{18}$	$2\frac{11}{36}$	1	0

Tabela 1 – Resolvendo um programa quadrático pelo método matricial (QP)_B.

Figura 6 – Representação gráfica da solução.



Fonte: O autor.

Dessa forma, podemos obter as matrizes A e b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{10}{36} & -\frac{1}{18} & 1 \\ -\frac{1}{18} & \frac{22}{36} & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

em que A^{-1} denota a matriz inversa de A . Nesse caso, obtemos $G_1 = 4$, $G_2 = 2$ e $u = -1$.

3.2.2 Nova abordagem considerando um modelo linearizado

Uma questão natural a ser levantada diz respeito à efetividade dos modelos apresentados quanto à distribuição de potência nas linhas. Em particular, esses modelos minimizam a máxima potência transmitida pelas linhas? Como será exposto, a resposta a essa pergunta não é necessariamente positiva. Diante disso, propomos o desenvolvimento de uma nova abordagem para lidar com esse problema.

Com essa motivação, nosso objetivo é minimizar a potência em cada linha da rede. A partir da Equação (2.18) e considerando o conjunto $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ de linhas, podemos expressar a potência na linha $k \in \mathcal{M}$, P_ℓ^k , como:

$$P_\ell^k = - \left(\sum_{i=2}^n \frac{(g_i - l_i)}{\lambda_i} \nabla_{\mathbf{v}^i} \right)_k, \quad \forall k \in \mathcal{M}. \quad (3.13)$$

Para avaliar corretamente esse novo objetivo, é necessário considerar que o gradiente discreto pode assumir diferentes configurações dependendo da orientação arbitrária atribuída às linhas da rede, podendo resultar em valores positivos ou negativos para a potência de uma linha.

Como uma primeira abordagem, podemos considerar uma formulação alternativa baseada em cotas inferiores para P_ℓ^k , que denotaremos por \underline{P}_ℓ^k , onde faremos

$$\underline{P}_\ell^k \geq P_\ell^k \quad e \quad \underline{P}_\ell^k \geq -P_\ell^k, \quad (3.14)$$

garantindo que \underline{P}_ℓ^k seja, no mínimo, o valor absoluto de P_ℓ^k . Com isso, introduzimos um modelo matemático para minimizar a máxima potência nas linhas, ou seja, uma cota superior da potência nas linhas da rede, representada por W . O modelo é dado por

$$\begin{aligned} (\text{WM})_i \quad & \min \quad W \\ \text{s.a:} \quad & (3.2) - (3.4), (3.13), (3.14), \text{ e} \\ & \underline{P}_\ell^k \leq W, \quad \forall k \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esse modelo garante a minimização da máxima potência nas linhas, representada por W . Observe que é possível modificar o modelo $(\text{WM})_i$ para capturarmos os valores absolutos da distribuição de potências nas linhas caso queiramos analisar outros aspectos referentes à segurança das linhas, como o monitoramento de uma linha extrapolar um dado limite seguro de sua potência nominal máxima. Para isso, denote o valor absoluto da potência na linha k por $\hat{P}_\ell^k = |P_\ell^k|$. Esse valor é calculado introduzindo variáveis binárias Y_1^k e Y_2^k associada a toda linha k e um parâmetro $M' \in \mathbb{R}_+$ convenientemente grande como

$$\hat{P}_\ell^k = \begin{cases} P_\ell^k \leq \hat{P}_\ell^k \leq P_\ell^k + M'Y_2^k, \\ -P_\ell^k \leq \hat{P}_\ell^k \leq -P_\ell^k + M'Y_1^k, \\ Y_1^k + Y_2^k = 1, \\ Y_1^k, Y_2^k \in \{0, 1\}, \end{cases} \quad (3.16)$$

em que

$$\hat{P}_\ell^k = \begin{cases} P_\ell^k & \text{se } P_\ell^k \geq 0, \quad \text{quando } Y_1^k = 1, \\ -P_\ell^k & \text{se } P_\ell^k < 0, \quad \text{quando } Y_2^k = 1. \end{cases}$$

A partir disso, podemos modelar o problema de balanceamento de carga da rede, buscando minimizar a potência máxima nas linhas e expressar a sua real distribuição de potência ótima

como:

$$\begin{aligned}
 \text{(WM)} \quad & \min \quad W \\
 \text{s.a:} \quad & (3.2) - (3.4), (3.13), (3.16), \text{ e} \\
 & \hat{P}_\ell^k \leq W, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Essa abordagem de programação inteira mista garante que tanto os fluxos positivos de potência quanto os negativos sejam considerados em novas aplicações de monitoramento das linhas quando estivermos interessados na verdadeira magnitude da distribuição das potências pela rede.

3.2.3 Explorando a nova abordagem para detectar risco iminente de sobrecarga em linhas

A crescente integração de fontes de energia renovável, particularmente a geração distribuída por meio de painéis solares em residências e estabelecimentos comerciais, impõe desafios significativos à estabilidade e à capacidade da rede elétrica brasileira. A sobrecarga nas linhas de transmissão ocorre quando o fluxo de potência na linha supera a capacidade nominal da infraestrutura existente, aumentando o risco de falhas no fornecimento e potenciais apagões.

Diante desse cenário, torna-se fundamental a introdução de variáveis que permitam monitorar o risco de uma determinada linha atingir um percentual crítico de seu limite máximo de potência. Para isso, define-se uma variável R_k associada a cada linha k , possibilitando a identificação de situações em que a potência transmitida excede, por exemplo, 80% ou 90% de sua capacidade máxima. Esse percentual, $p\%$, é um parâmetro ajustável, que pode ser definido pelo operador do sistema, enquanto o limite de potência P_{lim}^k para uma linha k é um valor físico previamente conhecido. Propomos modelar o controle de risco de atingir um dado limite nominal de carga de uma linha da seguinte forma:

$$\begin{cases} \hat{P}_\ell^k \leq p\% P_{\text{lim}}^k + R_k(1 - p\%)P_{\text{lim}}^k, & \forall k \in \mathcal{M}, \\ \hat{P}_\ell^k \geq p\% P_{\text{lim}}^k R_k, & \forall k \in \mathcal{M}, \\ R_k \in \{0, 1\}, & \forall k \in \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Quando $R_k = 1$, significa que a linha k atingiu seu limite de risco, indicando que essa linha deverá ser monitorada com mais atenção para evitar seu desligamento, evitando um possível impacto no sistema.

A modelagem dessa variável permite a implementação automatizada de ações preventivas e corretivas mais precisas, contribuindo para a manutenção da integridade e confiabilidade do sistema elétrico. Essa abordagem se torna ainda mais relevante diante das novas dinâmicas de geração e consumo de energia, proporcionando maior eficiência na gestão da rede elétrica.

Além disso, as usinas geradoras possuem limites físicos e operacionais que restringem a quantidade máxima de energia que podem produzir.

Nesse sentido, propomos um modelo mais realista que considera não apenas os limites físicos das linhas de transmissão, representados por P_{lim} , mas também as restrições de geração dos nós geradores, denotadas por G_{lim} . Especificamente, impomos a restrição $0 \leq G_k \leq G_{\text{lim}}^k$ para todo $k \in \mathcal{V}_{\text{ger}}$. Além disso, reconhecendo que, em situações críticas, parte da carga dos consumidores pode não ser atendida para evitar falhas sistêmicas, introduzimos um gerador artificial G_a . Esse gerador artificial permite contabilizar a energia não fornecida, garantindo uma modelagem mais realista do comportamento da rede em cenários adversos.

Dessa forma, considerando aquele percentual $p\%$ de controle de risco de sobrecarga nas linhas como parâmetro de entrada, formulamos um novo modelo capaz de representar de maneira mais fiel as restrições e riscos operacionais da rede elétrica.

$$\begin{aligned} (\text{WM})_L \quad & \min \quad W + MG_a \\ \text{s.a.:} \quad & (3.2), (3.3), (3.13), (3.16) - (3.18), \text{ e} \\ & \hat{P}_\ell^k \leq P_{\text{lim}}^k, \quad \forall k \in \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i \leq G_{\text{lim}}^k, \quad k \in \mathcal{V}_{\text{ger}}, \quad (3.20)$$

$$G_a \geq 0, \quad (3.21)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_{\text{ger}}} \left(\sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i \right) + G_a = \sum_{i=1}^n L_i, \quad (3.22)$$

em que $M \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro convenientemente grande. O modelo proposto busca minimizar a expressão $W + MG_a$, priorizando a minimização de W , buscando alcançar uma melhor distribuição da geração entre os geradores reais e considerando uma conservação eventualmente fictícia de energia em (3.22). No caso em que $G_a \neq 0$, a geração artificial está sendo utilizada, indicando que a geração real não foi suficiente para suprir totalmente a demanda. Assim, parte da demanda dos pontos consumidores pode não ser atendida.

No entanto, é possível quantificar essa deficiência para cada consumidor por meio do gradiente discreto associado ao grafo da rede, utilizando a lei de conservação de energia. Dado a

demanda L_i no nó i , essa abordagem permite avaliar o balanço de energia em cada nó da rede por meio da orientação dada a cada linha da rede, analisando a diferença entre a potência recebida e a consumida (δD_i), determinando assim o déficit de atendimento dado por $L_i - \delta D_i$.

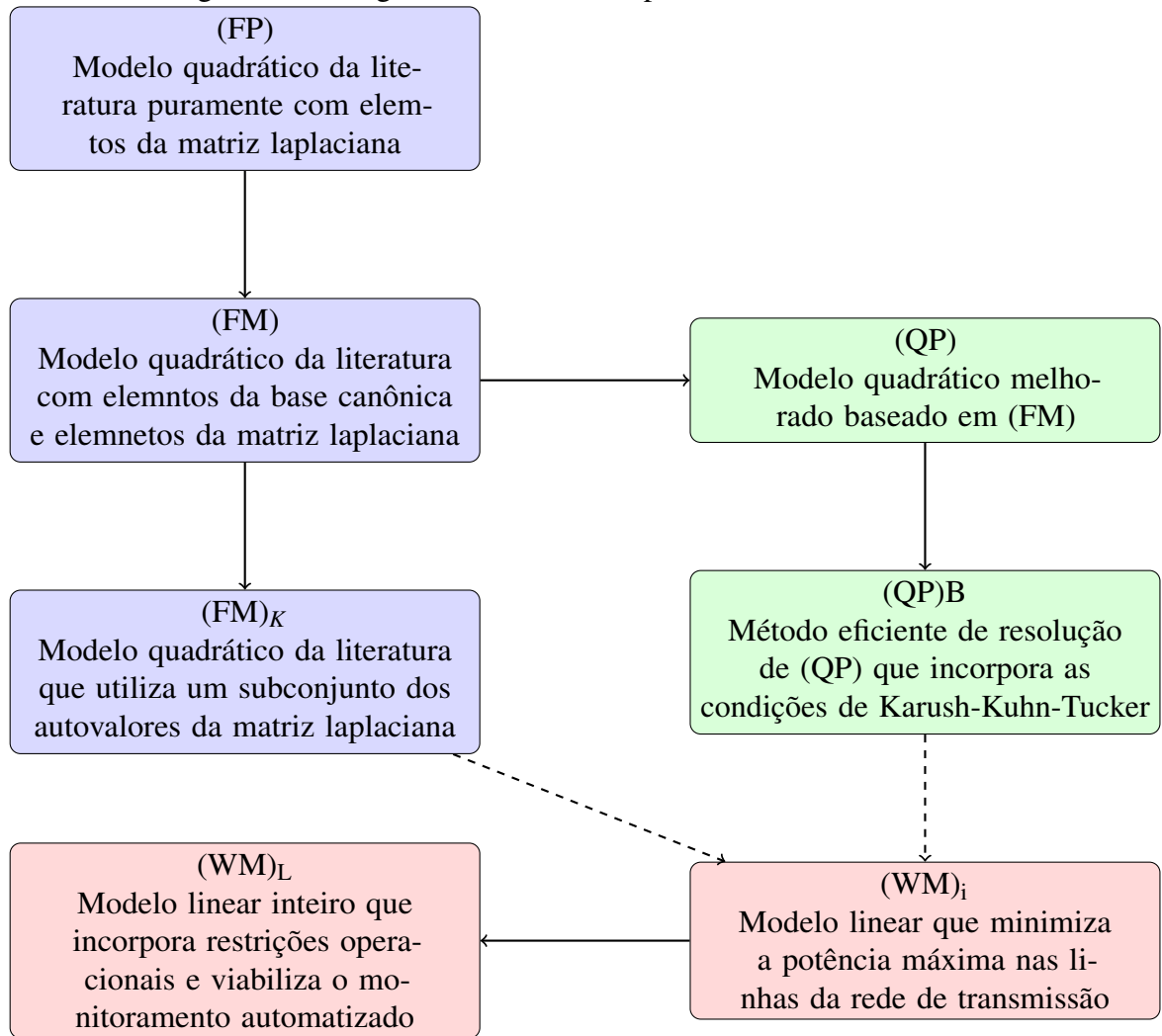
Dessa forma, o modelo força a minimização de W , assim minimizando a máxima potência nas linhas, enquanto busca uma alocação eficiente da geração entre os geradores reais suprindo da melhor forma a demanda, mesmo que parcial, dos pontos consumidores.

Por fim, com o objetivo de facilitar a compreensão da evolução dos modelos abordados neste trabalho, a Figura 7 apresenta um fluxograma que resume as relações entre as formulações utilizadas e desenvolvidas. Os modelos foram organizados em três categorias, distinguíveis por cores:

- Em azul, estão os modelos da literatura, que servem como base teórica e ponto de partida para os avanços propostos;
- Em verde, encontram-se os modelos que representam melhorias em relação à literatura, tanto em termos de formulação quanto de método de resolução, visando maior eficiência computacional;
- Em vermelho, são destacados os novos modelos lineares propostos neste trabalho, cujo objetivo principal é a minimização da potência máxima nas linhas da rede de transmissão.

As setas sólidas indicam a evolução ou derivação direta entre os modelos, enquanto as setas tracejadas representam influências conceituais ou estruturais indiretas, pois passamos de modelos quadráticos para modelos lineares. Por exemplo, o modelo $(FM)_K$ e o $(QP)B$ influenciam a construção do modelo $(WM)_i$, ainda que não haja uma relação de derivação direta, mas não há uma influência direta dos modelos $(FM)_K$ e do método $(QP)B$ no desenvolvimento do modelo $(WM)_i$.

Figura 7. Fluxograma dos modelos apresentados neste trabalho.



4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, apresentamos e discutimos os resultados obtidos com os modelos da literatura e os novos modelos desenvolvidos neste trabalho. Abordamos o desempenho das formulações levando em consideração diferentes instâncias, que representam redes elétricas variando de pequenas a consideravelmente grandes, destacando comparações e observações relevantes sobre suas soluções e eficiência computacional.

Para a análise dos resultados computacionais, consideramos instâncias adaptadas de referência de redes elétricas do IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) para testes específicos. As linhas das redes são homogêneas, ou seja, possuem as mesmas características físicas e estruturais, e todos os nós são consumidores de uma unidade de energia (por unidade de tempo), a exemplo de (KNIPPEL *et al.*, 2020). Reforçamos que todos os modelos matemáticos desenvolvidos neste texto consideram apenas a componente ativa da potência nas redes elétricas. Esses resultados são obtidos para quatro redes IEEE. Uma rede com 30 nós, 41 linhas e um conjunto de 6 geradores; outra com 118 nós, 179 linhas e um conjunto de 15 geradores; uma rede com 300 nós, 409 linhas e 69 nós geradores; e por último uma rede com 2383 nós, 2886 linhas e 327 nós geradores.

Os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i3-6006U (2×2.00 GHz), 12 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10 Pro (64 bits). As implementações foram desenvolvidas na linguagem de programação Julia (versão 1.9.3), com o uso de bibliotecas específicas para modelagem e resolução de problemas de otimização. A biblioteca LinearAlgebra.jl foi empregada nos cálculos matriciais, especialmente no cálculo de autovalores e autovetores. A biblioteca JuMP.jl foi utilizada para a formulação simbólica e estruturada dos modelos matemáticos de otimização. Para a resolução desses modelos, utilizou-se o solver CPLEX.jl nos casos de programação linear, e o solver HiGHS.jl nos casos de programação quadrática ou não linear.

A seguir, analisamos os experimentos realizados considerando tanto as formulações clássicas da literatura (FP), (FM) e (FM)_K, quanto o novo método de resolução desenvolvido neste trabalho, (QP)_B. Posteriormente avaliamos o modelo linearizado (WM)_i individualmente e em comparação com o método (QP)_B. Por fim, apresentamos e discutimos os resultados obtidos por meio da formulação mais realista (WM)_L levando em consideração limitações operacionais na geração e na potência nas linhas.

4.1 Análise dos modelos quadráticos (FP), (FM), (FM)_K, (QP) e (QP)_B

Resolvendo os modelos (FP), (FM), (FM)_K, (QP) e (QP)_B, é possível determinar uma distribuição de potência nas linhas que minimiza a “potência nas linhas” da rede, ou seja, nesse caso, essas formulações minimizam a norma ao quadrado da potência nas linhas $\|P_{lin}\|^2$, sendo possível identificar a linha mais sobrecarregada, os nós terminais e seu identificador em cada rede. Além disso, obtemos o tempo computacional para resolver cada instância dos modelos. Os resultados obtidos estão apresentados nas Tabelas 2 e Tabela 3. Esses resultados foram apresentados em (SILVA *et al.*, 2024). Na Tabela 2, na coluna “Extremidades da linha”, os valores seguem o formato “nó i - nó j ”. Todas as formulações aplicadas produziram os mesmos resultados, verificando que a abordagem baseada na teoria espectral gera soluções idênticas às dos modelos clássicos. Observa-se que todas as redes possuem uma única linha crítica, à exceção da rede IEEE 2383, que apresenta duas linhas críticas, como indicado na última linha da Tabela 2.

Rede	$\ P_{lin}\ ^2$	Potência máxima	Linha(s)	Extremidades
IEEE 30	62.28	2.78	28	10–22
IEEE 118	690.24	7.52	38	26–30
IEEE 300	1506.09	18.00	53	266–271
IEEE 2383	14749.63	11.94	1011	797–1004
			379	77–1095

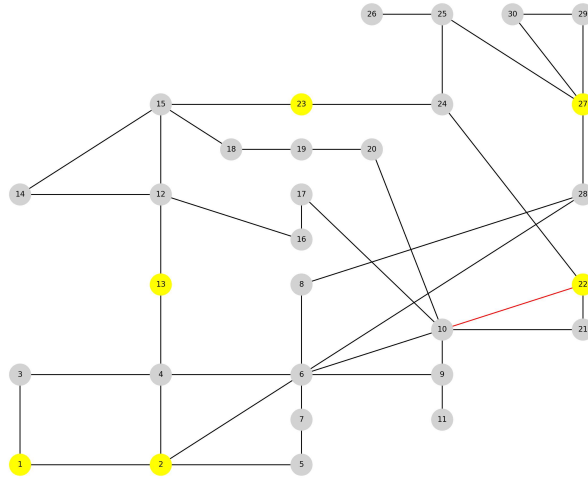
Tabela 2 – Valores ótimos da função objetivo $\|P_{lin}\|^2$ para cada rede, incluindo a maior potência observada, a linha crítica e suas extremidades.

A título de ilustração, a Figura 8 mostra a representação da rede IEEE 30, destacando os geradores em cinza e a linha crítica 10-22 em vermelho, definida como aquela com o maior fluxo de potência.

A Tabela 3 apresenta os tempos computacionais, em segundos, na linha “ $t(s)$ ”, para os modelos (FM), (QP) e (QP)_B, além de apresentar a redução do tempo computacional dos demais modelos em relação ao modelo (FM) na linha “Red(%)”. Observamos que o modelo (QP)_B se destaca por obter soluções significativamente mais rápidas. Para a rede IEEE 2383, o modelo (MF) não conseguiu resolver o problema em 24 horas de execução. Já para a rede IEEE 300, a redução no tempo computacional atingiu quase 97% em relação ao modelo (MF).

O tempo computacional do método (QP)_B inclui a construção das matrizes A e b , que depende do cálculo das derivadas conforme ilustrado no exemplo da subseção 3.2.1. Como

Figura 8 – Representação do esquema da rede IEEE 30. Os pontos 1,2,13,22,23 e 27 são geradores.



Fonte: O autor.

Rede	IEEE 30			IEEE 118			IEEE 300			IEEE 2383		
	(FM)	(QP)	(QP) _B	(FM)	(QP)	(QP) _B	(FM)	(QP)	(QP) _B	(FM)	(QP)	(QP) _B
t(s)	0.91	0.13	0.25	16.24	3.32	0.85	217.70	51.62	6.54	-	359×60	22×60
Red(%)	0.00	85.71	72.53	0.00	79.56	94.77	0.00	76.21	96.99	-	-	-

Tabela 3 – Tempo computacional para resolver cada instância por cada modelo e comparação da redução obtida pelos modelos (QP) e (QP)_B em relação ao modelo (MF).

mostra a Tabela 3, o tempo total para a rede IEEE 2383 é de aproximadamente 22 minutos - sendo quase todo esse tempo dedicado à montagem das matrizes. O cálculo de $A^{-1}b$, por outro lado, levou cerca de apenas 0,5 segundo, o que o torna praticamente desprezível frente ao custo da construção matricial.

Apesar disso, mesmo considerando o tempo de construção das matrizes, o método (QP)_B ainda é mais rápido que os demais modelos resolvidos por métodos convencionais. Se as matrizes A e b forem previamente fornecidas, o tempo de execução torna-se extremamente reduzido, como era de se esperar, já que envolve apenas operações matriciais elementares. Assim, há um grande potencial de ganho de desempenho, especialmente em cenários onde a montagem das matrizes possa ser otimizada com estruturas de dados mais eficientes — o que não foi explorado neste trabalho.

Agora, nas Tabelas 4 e 5, apresentamos os resultados que comparam diversas métricas para avaliar a variação da função objetivo ao considerar uma porcentagem dos autovalores selecionados de forma ordenada ou aleatória, em comparação com o uso do conjunto completo. Essa análise busca responder a uma questão levantada em (KNIPPEL *et al.*, 2020), onde os

autores argumentam que a consideração dos menores autovalores pode proporcionar uma boa aproximação da função objetivo quando comparada ao uso de todos os autovalores. Na Tabela 4, os elementos de K são selecionados com base na ordenação crescente dos índices dos autovalores (consequentemente dos autovalores, considerando que estão ordenados). Na Tabela 5, os elementos de K são escolhidos de forma aleatória. Para cada instância identificada na primeira linha de seu grupo de métricas, foram escolhidas diferentes porcentagens do total de autovalores (na linha “Porcent. de $|K|$ ”), variando de 100% a 20%. Na linha “Função de Custo”, apresentamos o valor da solução ótima.

As métricas escolhidas para avaliar o desvio em relação ao ótimo, considerando o uso de todo o conjunto de autovalores, estão na primeira coluna dessas tabelas e são calculadas conforme segue:

- $\|P_{lin}^{\%}\|_2$: norma 2 da potência nas linhas;
- $\|P_{lin}^{\%}\|_{\infty}$: norma infinita, indicando o valor máximo da potência nas linhas;
- $\frac{100\|P_{lin} - P_{lin}^{\%}\|_2}{\|P_{lin}\|_2}$: distância relativa entre as potências em termos da norma 2;
- $\frac{100\|P_{lin} - P_{lin}^{\%}\|_{\infty}}{\|P_{lin}\|_{\infty}}$: maior diferença entre as potências nas linhas;
- $\frac{100\|\|P_{lin}\|_2 - \|P_{lin}^{\%}\|_2\|}{\|P_{lin}\|_2}$: desvio da potência nas linhas em relação à norma 2;
- $\frac{100\|\|P_{lin}\|_{\infty} - \|P_{lin}^{\%}\|_{\infty}\|}{\|P_{lin}\|_{\infty}}$: maior diferença entre as potências máximas nas linhas.

Onde P_{lin} representa a potência nas linhas considerando 100% dos autovalores, e $P_{lin}^{\%}$ é a potência nas linhas que considera a solução utilizando uma porcentagem dos autovalores selecionados em ordem crescente, com $K = 2, 3, \dots, \lfloor \%|K| \rfloor$. No outro caso, os elementos de K são escolhidos de forma aleatória, com P_{lin}^r representando essa configuração. Ressaltamos que o mesmo problema pode ser resolvido com o modelo (QP) utilizando o mesmo subconjunto de autovalores/autovalores em cada caso. Os símbolos “-” na coluna de 20% para o caso IEEE 300 na Tabela 5 indicam que a execução foi abortada após 5 horas.

Observamos que a aproximação da função objetivo considerando um subconjunto de autovalores em relação à função objetivo calculada com todos os autovalores é mais eficaz quando escolhemos os menores autovalores em ordem crescente, em vez de selecioná-los aleatoriamente. Note que à medida que a rede cresce, os valores das métricas calculadas, em comparação com 100% dos autovalores, melhoram. Os resultados da Tabela 5 mostram que a escolha aleatória de K pode levar a distorções significativas nas métricas avaliadas. Para uma escolha baseada na ordenação dos autovalores, é necessário calcular todos eles previamente, o que compromete a geração iterativa de K , ideia levantada em (KNIPPEL *et al.*, 2020).

Rede IEEE 30								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	62.28	61.53	48.95	40.07	39.67	36.33	18.40	4.40
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	7.89	7.89	8.09	8.15	8.16	8.26	8.93	9.18
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	2.78	2.78	2.68	2.97	2.90	2.84	3.78	4.43
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	2.10	22.40	25.94	26.51	31.13	53.09	59.53
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	4.15	49.95	55.69	58.36	66.30	64.01	85.07
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2 \ }{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.00	2.53	3.29	3.42	4.69	13.43	16.35
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty} \ }{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	0.00	3.60	6.83	4.32	2.16	35.97	59.35
Rede IEEE 118								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	690.24	625.08	617.83	592.43	565.73	539.77	437.66	368.45
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	26.27	26.64	26.60	26.61	27.03	27.25	28.29	28.61
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	7.52	7.27	7.20	7.40	7.65	7.84	8.51	9.13
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	16.86	15.87	16.13	24.24	27.57	39.91	43.08
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	27.06	24.97	24.00	34.92	47.13	84.58	92.77
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2 \ }{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	1.41	1.26	1.29	2.89	3.73	7.69	8.91
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty} \ }{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	3.32	4.25	1.59	1.73	4.25	13.16	21.41
Rede IEEE 300								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	1506	1461	1404	1329	1275	1185	1006	—
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	38.81	38.88	39.06	39.17	39.26	39.43	42.0	—
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	—
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	5.99	11.50	13.74	15.33	18.00	41.69	—
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	4.48	7.35	7.96	10.45	9.80	19.86	—
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2 \ }{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.00	0.00	0.01	1.15	1.60	8.21	—
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty} \ }{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	—
Rede IEEE 2383								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	14750	13061	12310	11838	11280	10456	7911	5978
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	121.45	122.84	123.23	123.48	124.13	126.23	135.18	144.34
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	11.94	12.62	12.57	12.51	12.55	12.23	16.29	18.09
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	15.18	17.18	18.39	21.14	28.32	48.88	64.23
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	36.89	36.18	32.93	40.06	53.91	123.45	149.30
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2 \ }{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	1.14	1.46	1.67	2.21	3.93	11.30	18.85
$\frac{100\ \ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty} \ }{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	5.69	5.28	4.77	5.11	2.43	36.43	51.51

Tabela 4 – Avaliação de métricas para K considerando a ordenação crescente dos autovalores.

Rede IEEE 30								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	62.28	57.52	35.07	29.46	44.06	31.06	17.59	6.60
$\ P_{lin}^r\ _2$	7.89	7.94	8.20	8.44	9.09	8.41	15.79	15.93
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	2.78	2.69	3.33	3.86	3.99	3.74	6.90	9.24
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _2$	0.00	11.22	28.06	37.78	57.21	36.92	173.29	175.33
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _\infty$	0.00	13.01	26.43	45.90	71.66	55.01	181.20	260.52
$100\ \ P_{lin}\ _2-\ P_{lin}^r\ _2\ $	0.00	0.01	3.93	6.97	15.21	6.59	100.13	101.90
$100\ \ P_{lin}\ _\infty-\ P_{lin}^r\ _\infty\ $	0.00	3.24	19.78	38.85	43.52	34.53	148.20	232.37
Rede IEEE 118								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	690.24	666.62	308.52	246.02	172.15	62.57	27.90	28.47
$\ P_{lin}^r\ _2$	26.27	26.29	36.63	33.24	35.51	59.00	48.37	51.20
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	7.52	7.86	12.42	13.26	17.34	16.30	13.50	14.05
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _2$	0.00	3.33	97.15	77.53	90.96	201.06	154.60	167.29
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _\infty$	0.00	4.56	85.72	102.49	156.66	219.42	179.46	168.77
$100\ \ P_{lin}\ _2-\ P_{lin}^r\ _2\ $	0.00	0.00	39.44	26.53	35.17	124.59	84.13	94.90
$100\ \ P_{lin}\ _\infty-\ P_{lin}^r\ _\infty\ $	0.00	4.52	65.16	76.33	130.58	116.76	79.52	86.83
Rede IEEE 300								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	1506	904.11	507.98	642.43	246.47	229.04	33.50	1.92
$\ P_{lin}^r\ _2$	38.81	54.49	80.54	106.41	84.97	72.80	86.21	161.64
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	18.00	26.91	18.00	28.92	20.03	21.20	31.60	89.64
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _2$	0.00	98.57	181.85	255.30	194.77	158.71	198.36	404.33
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _\infty$	0.00	100.99	91.59	152.25	82.59	86.85	144.65	485.82
$100\ \ P_{lin}\ _2-\ P_{lin}^r\ _2\ $	0.00	40.40	107.52	174.18	118.94	87.58	122.13	316.49
$100\ \ P_{lin}\ _\infty-\ P_{lin}^r\ _\infty\ $	0.00	45.50	0.00	60.67	11.28	17.78	75.55	598.00
Rede IEEE 2383								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	14750	11054	11288	7976	6845	3949	1612	553
$\ P_{lin}^r\ _2$	121.45	158.22	132.03	233.65	233.14	190.41	231.02	298.06
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	11.94	25.92	11.74	47.20	47.69	26.33	24.57	42.82
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _2$	0.00	83.49	42.64	164.35	163.87	120.75	161.81	224.12
$100\ P_{lin}-P_{lin}^r\ _\infty$	0.00	218.70	84.67	423.70	427.83	222.13	193.57	387.02
$100\ \ P_{lin}\ _2-\ P_{lin}^r\ _2\ $	0.00	30.27	8.71	92.38	91.96	56.78	90.22	145.42
$100\ \ P_{lin}\ _\infty-\ P_{lin}^r\ _\infty\ $	0.00	117.08	1.67	295.31	299.41	120.51	105.78	258.63

Tabela 5 – Avaliação de métricas para K escolhido de forma aleatória.

4.2 Análise do modelo linearizado $(WM)_i$ versus $(QP)_B$ e do modelo $(WM)_L$

Nesta seção, apresentamos os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho dos modelos linearizados $(WM)_i$ e $(WM)_L$. Comparamos os resultados do modelo $(WM)_i$ com os de $(QP)_B$, analisando a máxima potência nas linhas resultante de cada abordagem. Além disso, investigamos o comportamento do modelo mais realista $(WM)_L$ em diferentes cenários operacionais e avaliamos a influência dos principais parâmetros na solução obtida. Os

experimentos para $(WM)_L$ foram conduzidos considerando diversas configurações de restrições operacionais, incluindo a capacidade máxima de geração e os limites operacionais das linhas de transmissão. Essa abordagem permite avaliar a robustez do modelo proposto e sua capacidade de representar cenários reais de operação da rede elétrica. Além disso, realizamos uma análise detalhada do impacto de parâmetros relacionados, investigando como a variável de controle de risco identifica linhas com risco iminente de sobrecarga ao ultrapassarem uma determinada porcentagem $p\%$ do limite permitido. Também examinamos de que forma a demanda não atendida é contabilizada pelo gerador artificial G_a em situações adversas, refletindo a capacidade do modelo de capturar déficits de suprimento e seu impacto na estabilidade da rede.

A Tabela 6 apresenta os valores de potência máxima (em valor absoluto), denotada por “Máx. pot.” e o tempo computacional obtido pelo modelo $(WM)_i$ e pelo método mais rápido $(QP)_B$, para as redes IEEE 30, IEEE 118, IEEE 300 e IEEE 2383.

Rede	IEEE 30		IEEE 118		IEEE 300		IEEE 2383	
Modelo	$(QP)_B$	$(WM)_i$	$(QP)_B$	$(WM)_i$	$(QP)_B$	$(WM)_i$	$(QP)_B$	$(WM)_i$
Máx. pot.	2.78	2.34	7.52	6.19	18.00	18.00	11.94	9.22
Tempo (s).	0.25	0.56	0.85	0.95	6.54	4.64	1320	315

Tabela 6 – Comparação da potência máxima nas linhas de transmissão e do tempo computacional obtido pelos modelos $(WM)_i$ e $(QP)_B$ para diferentes redes.

Na Tabela 6, observamos uma diminuição em unidades de energia da potência máxima nas linhas para as redes IEEE 30, IEEE 300 e IEEE 2383, de 2.78, 7.52 e 11.94, para 2.34, 6.19 e 9.22 unidades de energia, uma redução de 16%, 18% e 23%, respectivamente. Para a rede IEEE 300 ficou o mesmo valor de 18 unidades. Em termos de tempo de cálculo, observamos uma diminuição significativa para as redes IEEE 300 e, principalmente, IEEE 2383.

Na Figura 9 apresentamos como ficou a distribuição das potências nas linhas, em valor absoluto, para essas redes. Mostramos a distribuição tanto pelo método $(QP)_B$ quanto pelo modelo $(WM)_i$. O eixo horizontal de cada gráfico refere-se à linha da rede e, o eixo vertical, à potência nessa linha. Nesses gráficos, podemos observar que, à medida que a potência máxima é reduzida, ocorre uma maior uniformização da potência nas linhas da rede para o modelo $(WM)_i$ em relação ao método $(QP)_B$. Essa homogeneização indica que a distribuição de carga entre as linhas se torna mais equilibrada, reduzindo pontos de sobrecarga e favorecendo uma operação mais estável. Esse comportamento pode ser explorado para otimizar o desempenho da rede, aproveitando a tendência natural à homogeneização para melhorar a eficiência e a segurança do sistema.

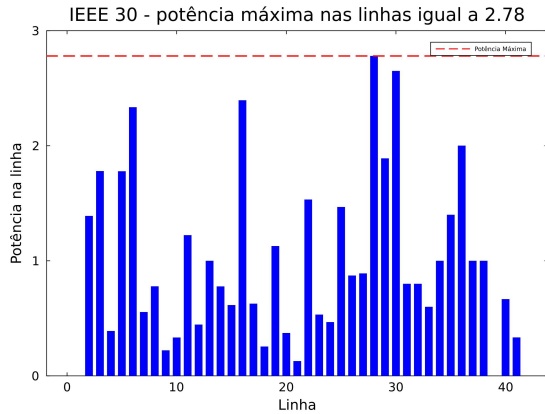
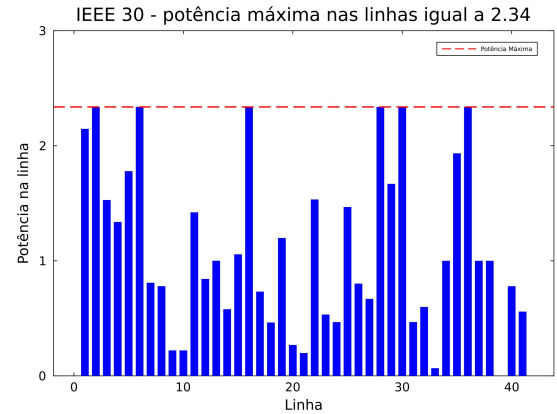
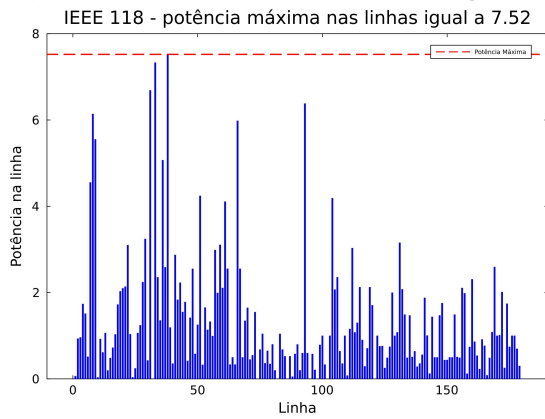
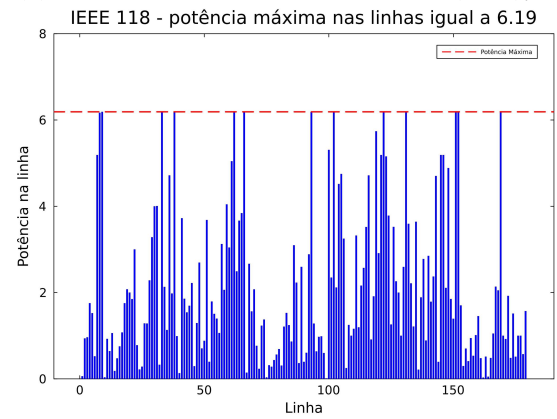
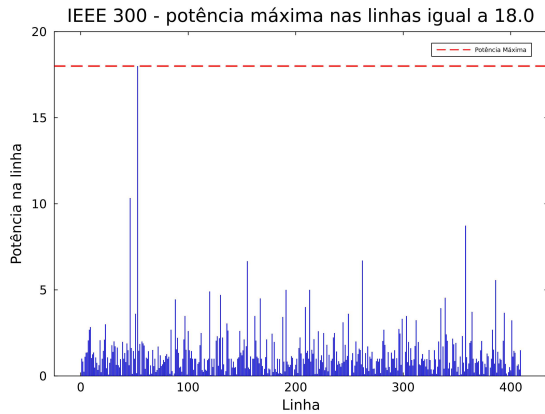
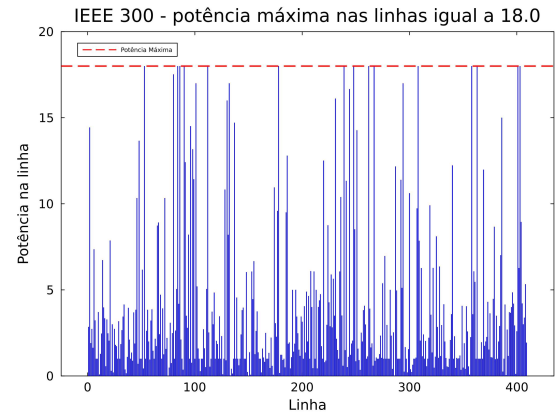
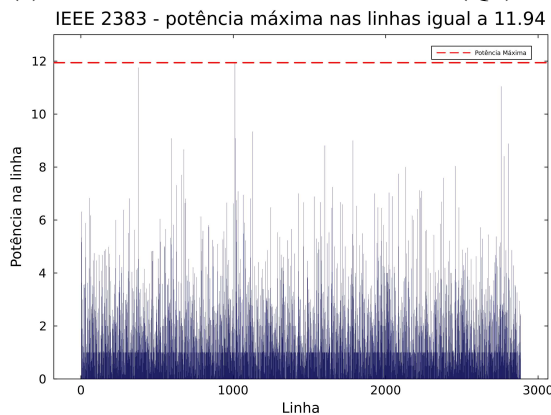
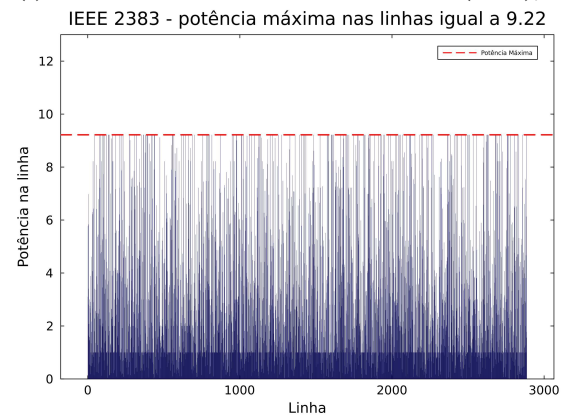
(a) Potência nas linhas IEEE 30 com $(QP)_B$.(b) Potência nas linhas IEEE 30 com $(WM)_i$.(c) Potência nas linhas IEEE 118 com $(QP)_B$.(d) Potência nas linhas IEEE 118 com $(WM)_i$.(e) Potência nas linhas IEEE 300 com $(QP)_B$.(f) Potência nas linhas IEEE 300 com $(WM)_i$.(g) Potência nas linhas IEEE 2383 com $(QP)_B$.(h) Potência nas linhas IEEE 2383 com $(WM)_i$.

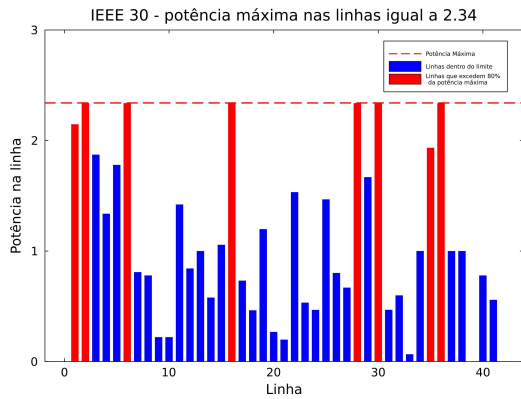
Figura 9 – Distribuição de potência nas linhas da rede para os modelos $(QP)_B$ e $(MW)_i$.

A partir de gráficos de distribuição de potências nas linhas de uma rede como os da Figura 9 é possível monitorar (em geral, manualmente) quais linhas merecem atenção para evitar sobrecarga ou ruptura e desligar, se necessário, algum ponto de geração de energia. Uma contribuição que julgamos importante deste trabalho é que utilizando o modelo $(WM)_L$, podemos identificar as linhas que excedam uma determinada porcentagem de um limite de controle determinado ou por características físicas do material das linhas ou pelo próprio operador da rede de transmissão. Por exemplo, empregando o modelo $(WM)_L$ para a rede IEEE 30, identificamos que 8 linhas ultrapassariam 80% do valor da potência máxima obtida com o método $(WM)_i$, que foi de 2.34, caso esse fosse o limite crítico de potência estabelecido. Para a rede IEEE 118, 20 linhas ultrapassariam um limite operacional de 80% de 6.19 unidades de energia. Para a rede IEEE 300, a potência máxima nas linhas foi de 18.00, com sete linhas excedendo 80% desse limite. As linhas críticas para a distribuição de potências nessas redes estão relatadas em vermelho na Figura 10. O tempo computacional para esses experimentos foi de aproximadamente 1 segundo para a rede IEEE 30, 5 segundos para a rede IEEE 118 e 57 segundos para a rede IEEE 300. Não obtivemos o resultado para a rede IEEE 2383. Sua execução foi interrompida após 6 horas de cálculo após atingir o limite de memória da máquina.

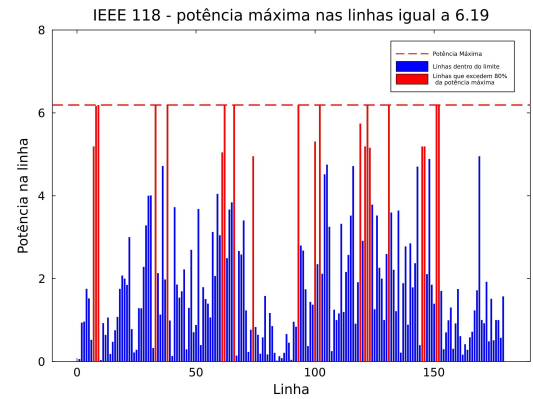
Outra relevância do modelo $(MW)_L$ é no estudo do impacto da limitação física da real potência máxima suportada nas linhas da rede sobre seu comportamento. Para exemplificar, consideramos a rede IEEE 118 impondo restrições de limite de potência nas linhas, escolhido de forma arbitrária, igual a 75% e a 50% da potência máxima obtida pelo modelo $(WM)_i$ sem limitações operacionais. As distribuições de potências para esses casos estão ilustradas na Figura 11.

Os resultados mostram que, independentemente do nível de restrição (75% ou 50%), as mesmas 20 linhas permaneceram sobrecarregadas, indicando que a configuração da rede não consegue redistribuir a potência uma vez mantida a mesma demanda. A necessidade de geração artificial mais do que dobrou ao reduzir a limitação para 50%, subindo de 29.49 para 58.99, indicando que a rede enfrenta dificuldades crescentes para atender à demanda sem ultrapassar os limites impostos. Isso equivale a deixar consumidores sem energia, bem como a reduzir ou parar a geração de energia da rede em algum nó gerador. Esse cenário sugere que investimentos em novas linhas de transmissão são necessários para garantir a operação da rede para atender esses limites.

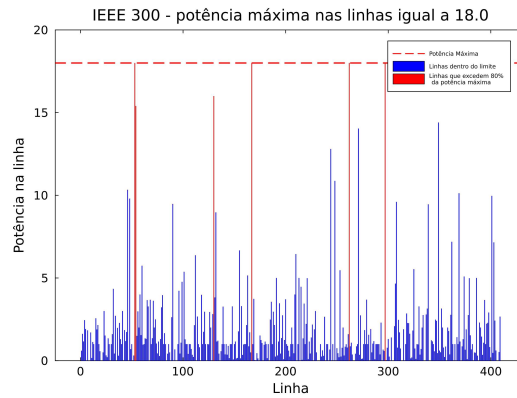
O próximo experimento computacional é inspirado em situação prática como ocorre



(a) Potência nas linhas da rede IEEE 30.



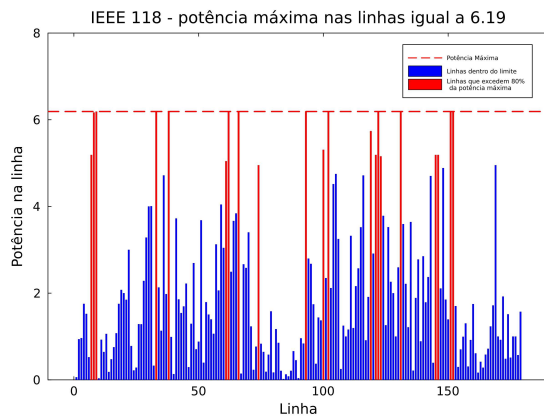
(b) Potência nas linhas da rede IEEE 118.



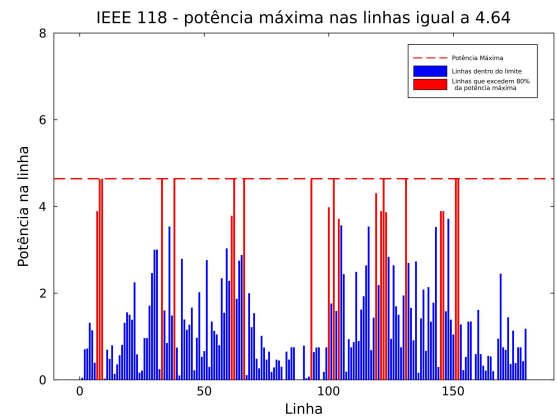
(c) Potência nas linhas da rede IEEE 300.

Figura 10 – Distribuição da potência nas linhas das redes IEEE 30, IEEE 118 e IEEE 300 com identificação de linhas críticas (em vermelho) obtidas com o modelo $(WM)_L$.

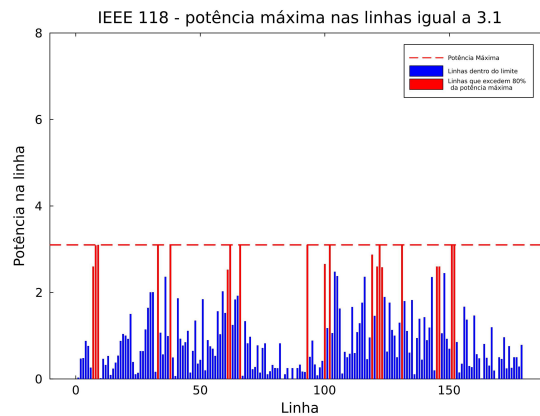
no Brasil. Sua matriz energética é diversificada, contando com hidrelétricas, usinas solares e parques eólicos. No entanto, períodos de seca podem reduzir significativamente a capacidade de geração das hidrelétricas, fazendo com que a produção de energia fique abaixo do ideal e esperado. Intuitivamente, nesses cenários, parte da demanda pode não ser atendida. Nosso modelo $(WM)_L$ consegue capturar essa limitação de geração de energia e avaliar seus impactos na rede de transmissão. Para ilustrar essa situação, consideramos um cenário onde a potência das linhas foi limitada a 75% da sua capacidade máxima, sem as restrições operacionais analisadas anteriormente, e a geração foi restringida a 50% da sua capacidade máxima para a situação analisada anteriormente para a rede IEEE 118. A Figura 12 apresenta a distribuição de potência resultante. Essa situação faz aumentar a geração artificial para 31.03, mas diminuir o número de linhas críticas para 9. Essa redução do número de linhas críticas, apesar da demanda não totalmente atendida, melhora a estabilidade da rede ao reduzir o risco de falhas em cascata, proporciona maior flexibilidade operacional e diminui os custos de manutenção. Além disso, permite priorizar setores essenciais e fornece conhecimento para futuras expansões da rede, garantindo um planejamento mais eficiente e resiliente do sistema elétrico.



(a) Potência nas linhas sem limitação de potência.



(b) Potência nas linhas com a potência limitada em 75% da máxima.



(c) Potência nas linhas com a potência limitada em 50% da máxima.

Figura 11 – Distribuição da potência nas linhas para a rede IEEE 118 com limitação de potência.

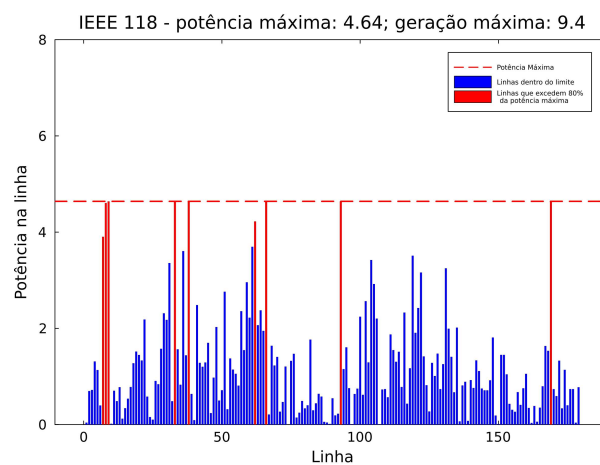


Figura 12 – Distribuição da potência nas linhas para a rede IEEE 118 com limitação de potência nas linhas e de geração nos geradores.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para a resolução do problema de balanceamento de carga em redes de transmissão de energia elétrica, explorando ferramentas da teoria espectral de grafos. Exploramos modelos matemáticos existentes e propomos novas abordagens, incluindo um método mais eficiente e rápido para sua resolução. Esse método pode ser estendido para uma versão mais complexa do problema para considerar futuramente tomadas de decisão automática, como a ativação e/ou desativação da geração em determinados nós da rede.

A partir da convexidade da função quadrática (semi-definida positiva) e das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), formulamos uma estratégia de resolução baseada em operações elementares de inversão de matriz, reduzindo significativamente o tempo computacional necessário para obter uma solução de igual valor à solução ótima do modelo original. Vale destacar que os resultados originais obtidos neste trabalho para melhorar a resolução dos modelos da literatura foram apresentados em (SILVA *et al.*, 2024).

Investigamos ainda se a equação da norma das potências nas linhas reflete uma “imagem de Fourier”, na qual os autovetores associados aos autovalores de menor ordem desempenham uma contribuição maior para a função objetivo do problema quadrático. No entanto, essa análise exige o conhecimento do espectro completo do laplaciano da rede. Aproximar a função objetivo por meio da geração iterativa de um subconjunto K de autovalores escolhidos de forma não ordenada apresentou grandes variações na função objetivo.

Adicionalmente, desenvolvemos um modelo matemático linear mais realista, que incorpora as restrições das linhas da rede e os limites da geração de eletricidade. Esse modelo fornece ao operador informações sobre as linhas que excedem determinados limites operacionais, contribuindo para a tomada de decisões mais assertivas e para a segurança do sistema elétrico. O novo modelo linear gera uma potência máxima nas linhas inferior ou igual àquela obtida pelos modelos quadráticos presentes na literatura.

Por fim, este trabalho abre novas perspectivas de pesquisa, sendo uma extensão possível do modelo original proposto (WM)_L a incorporação de variáveis binárias de decisão para modelar a ativação ou desativação da geração de energia em determinados nós, com o objetivo de evitar automaticamente a sobrecargas nas linhas da rede. Outra possibilidade a ser analisada seria a indicação de possíveis investimentos em novas linhas de transmissão na rede, visando atender a demanda dos consumidores sem risco de sobrecarregar as linhas existentes.

REFERÊNCIAS

- ABREU, N. M. M. de; DEL-VECCHIO, R. R.; VINAGRE, C. T. M.; STEVANOVIC, D. **Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações**. 2. ed. São Carlos: SBMAC, 2012.
- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; COSTA, G. R. M. da. Um método primal-dual aplicado na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. **Pesquisa Operacional**, Scielo Brasil, [s.l.], v. 24, n. 2, p. 215–226, 2004.
- BRADLEY, S. P.; HAX, A. C.; MAGNANTI, T. L. **The laplacian spectrum of graphs**. Boston: Addison-Wesley, 1977.
- CAPUTO, J.-G.; KNIPPEL, A.; RETIERE, N. Spectral analysis of load flow equations for transmission networks. **Engineering Research Express**, IOP Publishing, [S. l.], v. 1, n. 2, p. 025007, 2019.
- CVETKOVIC, D.; ROWLINSON, P.; SIMIC, S. **An introduction to the theory of graph spectra**. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- Diário do Nordeste. **Após prejuízos, setor de energia renovável sinaliza cautela para investir no Ceará; entenda**. 2024. Disponível em: <https://diariodonordeste.verdesmares.com.br/negocios/apos-prejuizos-setor-de-energia-renovavel-sinaliza-cautela-para-investir-no-ceara-entenda-1.3571834>. Acesso em: 28 dez. 2024.
- GRAINGER, J. J.; STEVENSON, J. W. D. **Power System Analysis**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1994.
- GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.
- KNIPPEL, A.; CAPUTO, J.-G.; AYMAZ, I. Modèle de load flow et décomposition spectrale pour l’optimisation des réseaux électriques. In: **Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d’Aide à la Décision**. Montpellier, France: [s.n.], 2020.
- KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. New York: McGraw-Hill, 1994.
- NEWMAN, M. W. **The Laplacian Spectrum of Graphs**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — University of Manitoba, Winnipeg, Canada, 2000.
- Operador Nacional do Sistema Elétrico. **Relatório Técnico sobre a Ocorrência Sistêmica de Agosto de 2023**. 2023. Disponível em: <https://www.ons.org.br/RelatorioTecnico/Apagao2023>. Acesso em: 28dez. 2024.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V.; CUNHA, S. H. O apagão de 2001 no brasil: Causas, consequências e lições aprendidas. **Revista Brasileira de Energia**, [S. l.], v. 12, n. 3, p. 45–60, 2002.
- POURBAGHER, R.; DERA KHSHANDEH, S. Y. A powerful method for solving the power flow problem in the ill-conditioned systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, [S. l.], v. 94, p. 88–96, 2018.

RETIERE, N.; HA, D. T.; CAPUTO, J. G. Spectral graph analysis of the geometry of power flows in transmission networks. **Engineering Research Express**, IEEE, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 2736–2747, 2020.

REUTERS. **Ceará e o Futuro da Energia Renovável**. 2024. Disponível em: <https://www.reuters.com/business/energy/brazils-grid-caps-power-wind-solar-threatening-renewable-projects-2024-08-22>. Acesso em: 2dez. 2024.

Secretaria de Desenvolvimento Econômico do Ceará. **Reunião discute implantação de linhas de transmissão no Ceará**. 2024. Disponível em: <https://www.sde.ce.gov.br/2024/04/19/reuniao-discute-implantacao-de-linhas-de-transmissao-no-ceara>. Acesso em: 26 dez. 2024.

SILVA, A. G. C. da; ANDRADE, R.; CAPUTO, J. G.; KNIPPEL, A. Modelos matemáticos para balanceamento de carga em redes de energia com uso de teoria espectral de grafos. In: **Anais do LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Fortaleza: Galoá, 2024.

TOSTADO-VÉLIZ, M.; KAMEL, S.; JURADO, F. Robust and efficient approach based on richardson extrapolation for solving badly initialised/ill-conditioned power-flow problems. **IET Generation, Transmission & Distribution**, IET Journals, [S. l.], v. 13, p. 3524–3533, 2019.

U.S. Department of Energy. **Northeast power failure, November 9-10, 1965**. [S.l.]: Office of Scientific and Technical Information, 1965. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/5457792>. Acesso em: 30 dez. 2024.

WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS EM REDES DE ENERGIA

Equações de fluxo de carga

Neste trabalho, abordamos sistemas de corrente alternada (CA) usados para transmitir e distribuir eletricidade de forma eficiente e econômica. Em um circuito CA típico, a corrente muda de direção muitas vezes por segundo, geralmente seguindo uma forma de onda senoidal de frequência (angular) ω constante. Consequentemente, o mesmo vale para a voltagem, que pode ser assumida como uma senoidal de frequência ω . Usamos letras minúsculas para indicar valores instantâneos.

Uma voltagem v e uma corrente i instantâneas de um circuito elétrico podem ser expressas como funções do tempo, como

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta), \quad (\text{A.1})$$

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t), \quad (\text{A.2})$$

V_{max} e I_{max} são valores máximos (amplitudes das ondas) de voltagem e de corrente, respectivamente. O termo magnitude (ou valor eficaz), $|V|$ e $|I|$, são valores lidos por tipos comuns de voltímetros e de amperímetros. Referem-se à raiz quadrada da média (ou rms), que são iguais

aos valores máximos divididos por $\sqrt{2}$, i.e., $|V| = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ e $|I| = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

Como, pela identidade de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad (\text{A.3})$$

vê-se que as ondas senoidais (Equações (A.1) - (A.2)) podem ser escritas como

$$v(t) = \text{Re}\{V_{max}e^{j(\omega t + \theta)}\} = \text{Re}\{V_{max}e^{j\theta}e^{j\omega t}\}, \quad (\text{A.4})$$

$$i(t) = \text{Re}\{I_{max}e^{j\omega t}\}, \quad (\text{A.5})$$

onde $\text{Re}\{\xi\}$ denota a parte real do número complexo ξ .

Podemos representar graficamente uma função senoidal por meio de um fasor, onde as características como amplitude, frequência angular e fase são fixas ao longo do tempo. Por exemplo, para a corrente, temos

$$\mathbf{I} = |I|e^{j0} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}e^{j0} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}},$$

e a voltagem, em referência a θ , é dada por

$$\mathbf{V} = |V|e^{j\theta} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}e^{j\theta} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}\cos\theta + j\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}\sen\theta.$$

Potência elétrica

Embora a teoria básica de transmissão de energia descreva a transferência de energia em termos da interação entre campos elétricos e magnéticos, é mais prático descrever a taxa de mudança de energia ao longo do tempo, que é definida como potência, em termos de voltagem e corrente. A potência, medida em Watts, absorvida por uma carga em qualquer momento, é o resultado da multiplicação da voltagem instantânea através da carga, em Volts, pela corrente instantânea que flui para a carga, em amperes, ou seja,

$$p(t) = v(t)i(t). \quad (\text{A.6})$$

Sejam a e b dois nós da rede, temos que

$$\begin{aligned} v_{ab} &= V_{max}\cos(\omega t + \theta), \\ i_{ab} &= I_{max}\cos(\omega t), \end{aligned}$$

com potência instantânea

$$p_{ab} = v_{ab} \cdot i_{ab} = V_{max}I_{max}\cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta), \quad (\text{A.7})$$

que pode ser reescrita como

$$p_{ab} = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\cos\theta(1 + \cos 2\omega t) + \frac{V_{max}I_{max}}{2}\sen\theta\sen 2\omega t. \quad (\text{A.8})$$

Percebe-se que o termo que contém $\cos\theta$ é sempre positivo e tem valor médio

$$P = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\cos\theta = |V||I|\cos\theta. \quad (\text{A.9})$$

Aqui P é a potência média, também chamada de potência real ou ativa. O cosseno do ângulo de fase θ entre a voltagem e a corrente é chamado fator de potência.

O termo que contém $\sen\theta$ da potência instantânea (Equação (A.8)) é conhecido como potência reativa instantânea e representa o fluxo alternado de energia em direção ou longe

da carga. O valor máximo dessa potência pulsante, designado por Q , é denominado potência reativa, dado por

$$Q = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \text{sen} \theta = |V||I| \text{sen} \theta. \quad (\text{A.10})$$

As expressões fasoriais para voltagem e corrente são dadas da forma mais geral como

$$V = |V|e^{j\alpha} = |V| \cos \alpha + j|V| \text{sen} \alpha, \quad (\text{A.11})$$

$$I = |I|e^{j\beta} = |I| \cos \beta + j|I| \text{sen} \beta, \quad (\text{A.12})$$

onde o produto da voltagem pelo conjugado da corrente em forma polar é

$$VI^* = |V|e^{j\alpha} \times |I|e^{-j\beta} = |V||I|e^{j(\alpha-\beta)}. \quad (\text{A.13})$$

Com $\alpha - \beta = \theta$ sendo o ângulo de fase entre a voltagem e a corrente, essa quantidade, designada por S , é chamada de potência complexa, que em coordenadas retangulares é dada por

$$S = VI^* = |V||I|(\cos \theta + j \text{sen} \theta) = P + jQ. \quad (\text{A.14})$$

Admitância e impedância

A impedância Z de um circuito é definida como a razão entre a tensão fasorial V e a corrente fasorial I , ou seja

$$Z = \frac{V}{I} \quad (\text{A.15})$$

Sendo um valor complexo, a impedância pode ser expressa na forma retangular

$$Z = R + jX, \quad (\text{A.16})$$

em que $R = \text{Re}\{Z\}$ é a resistência e $X = \text{Im}\{Z\}$ é a reatância.

A admitância, simbolizada por Y , é o inverso da impedância Z , definida como

$$Y = \frac{1}{Z}. \quad (\text{A.17})$$

Sendo um Y um valor complexo, podemos escrevê-lo como

$$Y = G + jB, \quad (\text{A.18})$$

sendo $G = \text{Re}\{Y\}$ chamada de condutância e $B = \text{Im}\{Y\}$ a susceptância.

A matriz de \mathcal{Y} , que representa a matriz de admitância nodal do sistema, pode ser analisada aplicando a lei das correntes de Kirchhoff.

Definição A.0.1 *A matriz de admitância $\mathcal{Y} = G + jB$ tem o elemento \mathcal{Y}_{jj} igual à soma das admitâncias das linhas diretamente conectadas ao nó j , e \mathcal{Y}_{ij} , ($i \neq j$), igual ao negativo da admitância líquida das linhas entre os nós i e j .*

Segue da definição acima e resgatando a definição do laplaciano (Definição 2.1.2) que as matrizes G e B são matrizes laplacianas.