



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

JOÃO PAULO DE SOUSA NASCIMENTO

PARTIÇÕES DE MARKOV PARA AUTOMORFISMOS LINEARES HIPERBÓLICOS
DO TORO

FORTALEZA

2020

JOÃO PAULO DE SOUSA NASCIMENTO

PARTIÇÕES DE MARKOV PARA AUTOMORFISMOS LINEARES HIPERBÓLICOS DO
TORO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Ciências, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Yuri Gomes Lima

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- N195p Nascimento, João Paulo de Sousa.
Partições de Markov para automorfismos lineares hiperbólicos do toro / João Paulo de Sousa Nascimento. – 2020.
97 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Yuri Gomes Lima.
1. Cadeias topológicas de Markov. 2. Similaridade métrica. 3. Dinâmica simbólica. I. Título.
CDD 510
-

JOÃO PAULO DE SOUSA NASCIMENTO

PARTIÇÕES DE MARKOV PARA AUTOMORFISMOS LINEARES HIPERBÓLICOS DO
TORO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Ciências, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos

Aprovada em: 02/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Yuri Gomes Lima (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ermerson Rocha Araujo
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Carlos Matheus Siva Santos
École Polytechnique

AGRADECIMENTOS

A minha família, por ser meu suporte e meu lar sempre, especialmente minha mãe, Maria Gorete, meu pai, José Valdenir e minha irmã, Maria Clara. Todo e qualquer mérito meu é, na verdade, de vocês.

A meus ex-professores, particularmente a Aurélio Eugênio e Vânia Schaffer.

Aos meus amigos da pós-graduação, em especial Alan, Allen, Arthur, Bianca, Carlos André, Isnard, Lia, Pedro, Peron, Rafael, Selene, Valderlanio e Walisson. A amizade de vocês só me fez crescer e espero mantê-la viva por muitos anos.

Aos professores do departamento de matemática da UFC, especialmente ao professor Yuri Gomes Lima, pela impecável orientação.

À Andrea, pela excelência no tratamento das questões burocráticas.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho se dedica ao estudo das cadeias topológicas de Markov, de automorfismos hiperbólicos do toro e sua relação. Vamos estar particularmente interessados na construção de uma partição de Markov para estes automorfismos. Lidamos também com o problema da similaridade métrica, com uma breve discussão da relevância histórica do assunto e mostrando que um sistema determinístico pode ser metricamente similar a um sistema probabilístico, este último com entropia positiva. Isto nos permite concluir que sistemas dinâmicos determinísticos podem ter entropia positiva.

Palavras-chave: cadeias topológicas de Markov; similaridade métrica; dinâmica simbólica.

ABSTRACT

This work addresses the study of topological Markov shifts, of hyperbolic toral automorphisms and their relationship. We will be particularly interested in the construction of a Markov partition for these automorphisms. We deal as well with the problem of metric similarity, with a brief discussion of the historic relevance of the topic and showing that a deterministic dynamical system can be metrically similar to a probabilistic one, the latter with positive entropy. This allows us to conclude that deterministic dynamical systems can have positive entropy.

Keywords: topological Markov shifts; metric similarity; symbolic dynamics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	CADEIAS TOPOLÓGICAS DE MARKOV	10
2.1	Introdução	10
2.2	Exemplos	12
2.3	Espaços simbólicos: cilindros e métricas	17
2.3.1	Métricas	17
2.3.2	Cilindros	18
2.3.3	Topologia produto	19
3	TRANSFORMAÇÕES NO TORO	22
3.1	Introdução ao toro e aplicações lineares	22
3.2	Automorfismos lineares hiperbólicos do toro	24
3.3	O “cat map”	26
4	PARTIÇÕES DE MARKOV	32
4.1	Definições	32
4.2	Um resultado preliminar	38
4.3	Construção da partição de Markov	44
4.3.1	Caso 1: $\lambda > 0$ e $\mu > 0$	47
4.3.2	Caso 2: $\lambda > 0$ e $\mu < 0$	52
4.3.3	Caso 3: $\lambda < 0$ e $\mu < 0$	57
4.3.4	Caso 4: $\lambda < 0$ e $\mu > 0$	58
4.4	Refinamento de \mathcal{R}	60
4.5	Cadeia topológica de Markov associada a ϕ	61
4.6	Exemplo: cat map	64
5	APLICAÇÕES	69
5.1	Entropia	69
5.2	Similaridade métrica entre automorfismos lineares hiperbólicos de \mathbb{T}^2 e shifts de Markov	73
5.2.1	Similaridade métrica	73
5.2.2	O sistema $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu, \phi)$	74
5.2.3	O sistema $(\Sigma, \mathbb{B}_{\Sigma}, m_{\mathbb{P}}, \sigma)$	75

5.2.4	A aplicação π preserva medida	78
5.2.5	Os sistemas $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu, \phi)$ e $(\Sigma, \mathbb{B}_{\Sigma}, m_P, \sigma)$ são metricamente similares . . .	80
5.3	Cálculo da entropia de $(\Sigma, \mathbb{B}_{\Sigma}, m_P, \sigma)$	81
5.4	Contagem de pontos periódicos	81
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A - MEDIDAS DE HAAR E MEDIDAS DE MARKOV . .	86

1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é discutir partições de Markov para automorfismos hiperbólicos do toro bidimensional e sua relevância histórica. Mais especificamente, nosso objetivo é, dado um automorfismo ϕ do toro bidimensional (a serem definidos propriamente no capítulo 2), queremos construir uma *partição de Markov*, que nos permitirá definir a função π (a ser apresentada no final do capítulo 3) que nos permite entender o comportamento do automorfismo ϕ no toro através da aplicação σ em Σ (ambos serão introduzidos no capítulo 1), além de nos possibilitar calcular no número de pontos periódicos de ϕ .

No capítulo 1, estudaremos os espaços simbólicos e as cadeias topológicas de Markov. Definiremos então uma métrica nos espaços simbólicos e faremos algumas definições básicas sobre o assunto. Terminamos o capítulo mostrando que os espaços simbólicos são espaços métricos compactos.

No capítulo 2, estudaremos as transformações lineares no toro. Mostraremos como automorfismos do toro bidimensional podem ser induzidos de automorfismos de \mathbb{R}^2 e em seguida nos debruçaremos sobre uma classe específica deste primeiro grupo: os automorfismos hiperbólicos do toro bidimensional. Por fim, estudamos o “Catmap”, um exemplo clássico de automorfismo hiperbólico do toro.

Adentrando no terceiro capítulo, abordaremos, dentre outras definições preliminares, o que é uma partição de Markov. Daí, partiremos para provar o resultado central do capítulo: dado um automorfismo hiperbólico do toro onde todas as entradas de sua matriz P têm o mesmo sinal, existe uma partição de Markov para o toro bidimensional e seu grafo tem como matriz de adjacência (considerando a possibilidade de múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices) a matriz $\pm P$ (com o sinal oposto ao das entradas de P). Para isso, mostraremos um resultado preliminar mostrando que, por meio de conjugação, sempre podemos obter um automorfismo com uma matriz de entradas de mesmo sinal. No final do capítulo, mostraremos como podemos refinar a partição supracitada (obtendo ainda uma partição de Markov) e por fim definiremos a função π . Tanto o refinamento da partição quanto a função π serão essenciais para o capítulo seguinte. Terminamos o capítulo ilustrando o teorema principal com o “Catmap”.

Finalmente, no quarto capítulo, trataremos de aplicações dos resultados do capítulo 3. Após uma introdução ao conceito de entropia, nos debruçaremos sobre a demonstração de que sistemas dinâmicos determinísticos podem ter entropia positiva e sobre o cálculo da quantidade de pontos periódicos de um automorfismo do toro bidimensional. No começo do

capítulo introduzimos uma breve explicação acerca da relevância história da noção de entropia e do problema de similaridade métrica (que explicaremos neste mesmo capítulo). Disso, passamos a definir os espaços de medida apropriados e mostramos enfim que um sistema dinâmico determinístico (um automorfismo do toro) é metricamente similar a um sistema dinâmico probabilístico (as cadeias topológicas de Markov, estudadas no capítulo 1). Em seguida, exporemos um método para calcular o número de pontos periódicos de um automorfismo do toro.

No apêndice, nos dedicamos a duas questões, ambas concernentes ao capítulo 4. Explicitamos os detalhes de como estender propriamente para um espaço simbólico uma medida que colocamos nos cilindros e mostramos que uma certa medida que colocamos no toro bidimensional é uma medida de Haar - o que é devidamente definido e tratado nesta seção do apêndice.

2 CADEIAS TOPOLÓGICAS DE MARKOV

2.1 Introdução

Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação.

Definição 1 (Órbita). A órbita de x por f é definida por

$$O^+(x) = \begin{cases} \{f^n(x) : n \geq 0\} & , \text{ se } f \text{ não é invertível} \\ \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} & , \text{ se } f \text{ é invertível.} \end{cases}$$

Hoje em dia, existem várias técnicas que permitem entender, sob certas condições na transformação f , quais são as propriedades dinâmicas e estatísticas das órbitas de f . Uma dessas técnicas se chama *dinâmica simbólica*, cuja introdução fazemos agora.

Definição 2 (Partição). Dado um conjunto X , dizemos que $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$ é uma partição de X se

$$X = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_N,$$

onde \sqcup representa união disjunta.

Para todo $x \in X$, existe único $n \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x \in P_n$. Assumimos inicialmente que f não é invertível. Fixado x , para cada $n \geq 0$ existe único $a_n \in \{1, \dots, N\}$ tal que $f^n(x) \in P_{a_n}$. Podemos, assim, associar a cada $x \in X$ uma *codificação* com respeito a \mathcal{P} , dada pela sequência (a_0, a_1, \dots) , chamada *itinerário de x por \mathcal{P}* ou simplesmente itinerário de x , que descreve os elementos de \mathcal{P} que a órbita de x visita. Quando f é invertível, o itinerário de x é a sequência bi-infinita $(\dots, a_{-1}; a_0, a_1, \dots)$, definida por $f^n(x) \in P_{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde o ponto e vírgula denota a separação entre as posições -1 e 0 . A codificação permite descrever órbitas de um modo mais simples: ao invés de descrevermos as posições reais dos pontos da órbita, descrevemos apenas a sequência de símbolos dos elementos de \mathcal{P} que são visitados.

Para entender o conjunto de todos os itinerários, fazemos a seguinte definição.

Definição 3 (Espaço simbólico). O espaço simbólico unilateral de N símbolos é definido por

$$\Sigma^+ = \Sigma_N^+ = \prod_{n \geq 0} \{1, 2, \dots, N\} = \{\underline{a} = (a_i)_{i=0}^\infty : a_i \in \{1, \dots, N\}, \forall i \geq 0\}.$$

Similarmente, o espaço simbólico bilateral de N símbolos é definido por

$$\Sigma = \Sigma_N = \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} = \{\underline{a} = (a_i)_{i=-\infty}^\infty : a_i \in \{1, \dots, N\}, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Repare que se o itinerário de x é $\underline{a} = (a_i)$, então o itinerário de $f(x)$ é $\underline{b} = (b_i)$ definida por $b_i = a_{i+1}$ para todo i . De fato, temos $f^i(f(x)) = f^{i+1}(x) \in P_{a_{i+1}}$. Por simplicidade, escrevemos $\underline{b} = (a_{i+1})$. A observação acima nos induz a considerar duas transformações, como abaixo.

Definição 4 (Transformação shift). *O shift unilateral e o shift bilateral são as transformações σ_+ e σ definidas por*

$$\begin{aligned} \sigma_+ : \quad \Sigma^+ &\longrightarrow \Sigma^+ & \sigma : \quad \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (a_0, a_1, \dots) &\longmapsto (a_1, a_2, \dots) & (\dots; a_0, \dots) &\longmapsto (\dots; a_1, \dots). \end{aligned}$$

A utilidade de uma codificação reside na possibilidade de decodificação: dado um itinerário por \mathcal{P} , é possível recuperar o ponto original x que segue esse itinerário? Infelizmente, nem sempre conseguimos decodificar. Um exemplo simples em que isso não ocorre é o seguinte: tome $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$, e considere a partição $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ onde $P_1 = (-\infty, 0]$ e $P_2 = (0, +\infty)$. Se $x > 0$, então $f^n(x) = (-1)^n x$, que é positivo se n é par e negativo se n é ímpar. O itinerário de x é portanto igual a $(\dots, 2, 1, 2, 1; 2, 1, 2, 1, \dots)$. Como isso vale para todo $x > 0$, é impossível recuperar x a partir de seu itinerário.

Ainda no mesmo exemplo, repare que nem todas as sequências de Σ são permitidas como codificações: não são permitidas sequências contendo, por exemplo, 22, já que é impossível um número positivo ser multiplicado por -1 e continuar positivo. Para melhor representar quais sequências são itinerários, podemos usar uma *matriz de transição*.

Definição 5 (Matriz de transição). *Uma matriz $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ é chamada matriz de transição se todas suas entradas A_{ij} são 0 ou 1.*

Assim, podemos guardar na matriz de transição quais transições entre elementos da partição são permitidas, pondo $A_{ij} = 1$ se o par ij é permitido na codificação e $A_{ij} = 0$ caso contrário. Seja $A^m = (A_{i,j}^{(m)})_{1 \leq i,j \leq N}$ sua m -ésima potência.

Definição 6 (Matriz irreduzível). *Uma matriz de transição $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ é irreduzível se para todos $1 \leq i, j \leq N$ existe $m > 0$ tal que $A_{i,j}^{(m)} > 0$.*

Essa noção será utilizada apenas no Capítulo 5.

Definição 7. *Seja A uma matriz de transição. O espaço simbólico unilateral definido por A é igual a*

$$\Sigma_A^+ = \{(a_i)_{i=0}^\infty \in \Sigma_N^+ : A_{a_i a_{i+1}} = 1, \forall i \geq 0\}.$$

O espaço simbólico bilateral definido por A é igual a

$$\Sigma_A = \{(a_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma_N : A_{a_i a_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que $\Sigma_A^+ \subset \Sigma_N^+$ e $\Sigma_A \subset \Sigma_N$. Podemos, considerar as restrições das aplicações σ_+ e σ a Σ_A^+ e Σ_A respectivamente, obtendo assim

$$\sigma_+ : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+ \quad \text{e} \quad \sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A.$$

Definição 8 (Cadeia topológica de Markov). *O par (σ_+, Σ_A^+) é chamado cadeia topológica de Markov unilateral associada à matriz de transição A . Similarmente, o par (σ, Σ_A) é chamado cadeia topológica de Markov bilateral associada a A .*

Repare que se $\underline{a} \in \Sigma_A^+$, então de fato $\sigma_+(\underline{a}) \in \Sigma_A^+$: dado que a aplicação σ_+ apenas desloca a sequência em uma unidade à esquerda, a sequência resultante permanece em Σ_A^+ . O mesmo ocorre para a restrição de σ a Σ_A .

Uma matriz de transição naturalmente está associada a um grafo orientado. Seja $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ uma matriz de transição de ordem N .

Definição 9. *O grafo $G_A = (V, E)$ associado à matriz de transição A é o grafo orientado com $V = \{1, \dots, N\}$ e $E = \{i \rightarrow j : A_{ij} = 1\}$.*

Em outras palavras, a matriz de transição descreve as arestas do grafo. Dizer que A é irredutível é o mesmo que dizer que entre quaisquer dois vértices i, j de G_A existe um caminho partindo de i e chegando em j .

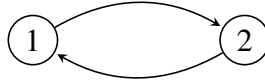
2.2 Exemplos

Exemplo 1. Considere o exemplo supracitado, com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$ e $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ dada por $P_1 = (-\infty, 0]$ e $P_2 = (0, +\infty)$. Como já argumentamos, neste caso, a transição 22 não é permitida. Analogamente, a transição 11 não é permitida. A matriz de transição associada é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o grafo associado a essa matriz é

Figura 1 – Grafo associado ao Exemplo 1



Fonte: elaborada pelo autor.

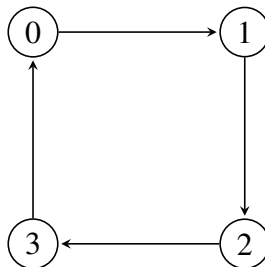
Os itinerários permitidos são os caminhos \mathbb{Z} -indexados nesse grafo, que são as duas sequências alternantes $(\dots, 2, 1; 2, 1, \dots)$ e $(\dots, 1, 2; 1, 2, \dots)$.

Exemplo 2. Dado $k \in \mathbb{Z}$, tome $X = [0, k)$ e a aplicação $f_k : X \rightarrow X$ dada por $f_k(x) = x + 1 \pmod{k}$. Considere a partição $\mathcal{P} = \{I_0, \dots, I_{k-1}\}$ com $I_n = [n, n+1)$. Temos que se $x \in I_n$ para $n < k - 1$, então $n \leq x < n+1 \Rightarrow n+1 \leq x+1 < n+2$. Como $n+1 < k$, segue que $f(x) \in I_{n+1}$. Já para $x \in I_{k-1}$, temos que $k \leq x+1 < k+1$, donde $f(x) = x+1 \pmod{k} = x+1-k \in I_1$. Em resumo: $f(x) \in I_{n+1}$ se $x \in I_n$, $1 \leq n < k-1$, e $f(x) \in I_0$ se $x \in I_{k-1}$. Por exemplo, se $k = 4$ então nossa matriz de transição é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o grafo associado é

Figura 2 – Grafo associado ao Exemplo 2



Fonte: elaborada pelo autor.

De modo similar, para k qualquer, o grafo associado é um ciclo de tamanho k .

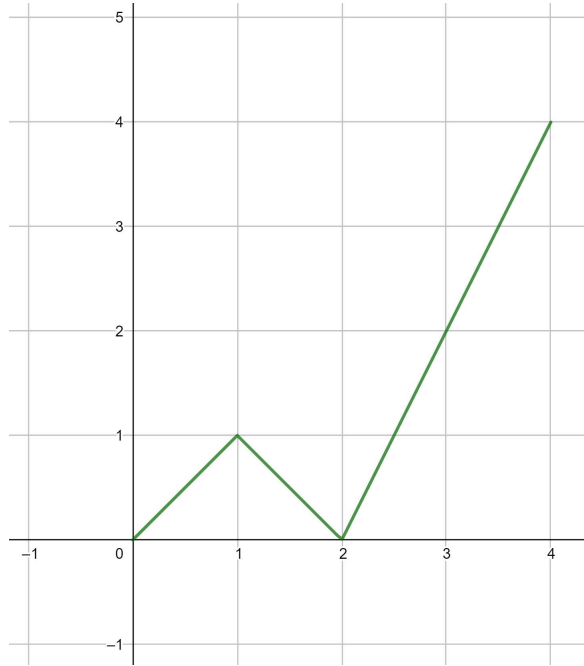
Exemplo 3. Vejamos um exemplo mais interessante, cujo grafo contém várias arestas saindo de um mesmo vértice, inclusive laços. Considere $X = [0, 4]$, a partição $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, I_3\}$ definida por

$I_1 = [0, 1)$, $I_2 = [1, 2)$ e $I_3 = [2, 4]$, e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in I_1 \\ -x + 2 & , \text{ se } x \in I_2 \\ 2x - 4 & , \text{ se } x \in I_3. \end{cases}$$

O gráfico de f é

Figura 3 – Gráfico da função f .



Fonte: elaborada pelo autor.

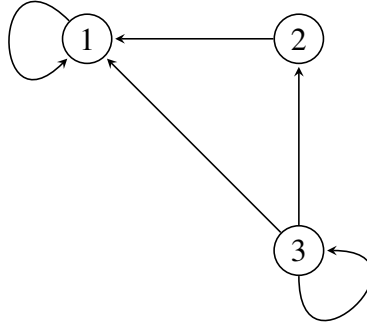
Vemos que $f(I_1) = I_1$, $f(I_2) = I_1$ e $f(I_3) = X = I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Então a matriz de transição correspondente é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e o grafo associado é

Como já sabemos, todo $x \in X$ possui um itinerário $\underline{a} \in \Sigma_A^+$. Afirmamos que, nesse caso, toda sequência $\underline{a} \in \Sigma_A^+$ é o itinerário de algum ponto $x \in X$. Aqui, introduziremos de modo não rigoroso a *propriedade de Markov*, que será estudada a fundo no Capítulo 4. Se afrouxarmos um pouco a noção de partição e dividirmos o intervalo $[0, 4]$ em $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [1, 2]$ e $I_3 = [2, 4]$, permitindo, portanto, que os intervalos se intersectem nos extremos, teremos que cada I_j é compacto. Em termos desses intervalos, as arestas do grafo orientado são definidas da seguinte

Figura 4 – Grafo associado ao Exemplo 3



Fonte: elaborada pelo autor.

maneira: $i \rightarrow j \iff f(\text{int}(I_i)) \supset \text{int}(I_j)$. Como essa última inclusão equivale a $f(I_i) \supset I_j$, obtemos então que $i \rightarrow j \iff f(I_i) \supset I_j$. Essa caracterização nos permite mais facilmente construir um itinerário para f . Se $\underline{a} = (a_i)_{i=0}^\infty \in \Sigma_A^+$, então $f(I_{a_n}) \supset I_{a_{n+1}}$ para todo $n \geq 0$.

Dada uma sequência $a_0 a_1 a_2 \dots$, defina então $F_n = \overline{I_{a_0} \cap f^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{a_n})}$. Então F_n é um conjunto fechado e limitado (é um subconjunto de $[0, 4]$ e portanto limitado), sendo então um conjunto compacto. Tem-se também $F_{n+1} \subseteq F_n$, donde $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ é um família encaixada de compactos. Vamos mostrar agora que F_n é não vazio. Como $f(I_{a_n}) \supseteq I_{a_{n+1}}$, temos $I_{a_n} \supseteq f^{-1}(f(I_{a_n})) \supseteq f^{-1}(I_{a_{n+1}})$. Assim, temos $f^{-(n+1)}(I_{a_{n+1}}) = f^{-n}(f^{-1}(I_{a_{n+1}})) \subseteq f^{-n}(I_{a_n})$ e portanto $I_{a_0} \supseteq f^{-1}(I_{a_1}) \supseteq \dots \supseteq f^{-n}(I_{a_n})$ e daí temos que $F_n = \overline{I_{a_0} \cap f^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{a_n})} = \overline{f^{-n}(I_{a_n})}$. Vamos mostrar então que $\overline{f^{-n}(I_{a_n})} \neq \emptyset$. Isso segue do fato que $f([0, 4]) = [0, 4]$ e portanto todo ponto em $[0, 4]$ tem pelo menos um ponto na sua pré-imagem. Aplicando esse resultado iteradamente, segue o resultado. Portanto $\bigcap_{n=0}^\infty F_n$ é não vazio. Agora, se $x \in \bigcap_{n=0}^\infty F_n = \bigcap_{n=0}^\infty \overline{I_{a_0} \cap f^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{a_n})}$, então $x \in \overline{f^{-n}(I_{a_n})}$. Portanto, $f^n(x) \in \overline{f^n(f^{-n}(I_{a_n}))} \subseteq \overline{f^n(f^{-n}(I_{a_n}))} \subseteq \overline{I_{a_n}} = I_{a_n}$, onde a penúltima inclusão segue porque f^n é contínua. Então $f^n(x) \in I_{a_n}$. Daí, $\bigcap_{n=0}^\infty F_n$ é não vazio e todos os elementos desse conjunto têm a codificação $a_0 a_1 a_2 \dots$.

Por outro lado, a codificação não é injetiva: todo $x \in I_1$ possui o mesmo itinerário $(1, 1, 1, \dots)$. Assim, embora podemos codificar e obter todas as possíveis sequências admissíveis pela matriz de transição, não podemos decodificar.

Exemplo 4. Considere a função $f : [0, 12] \rightarrow [0, 12]$ dada por

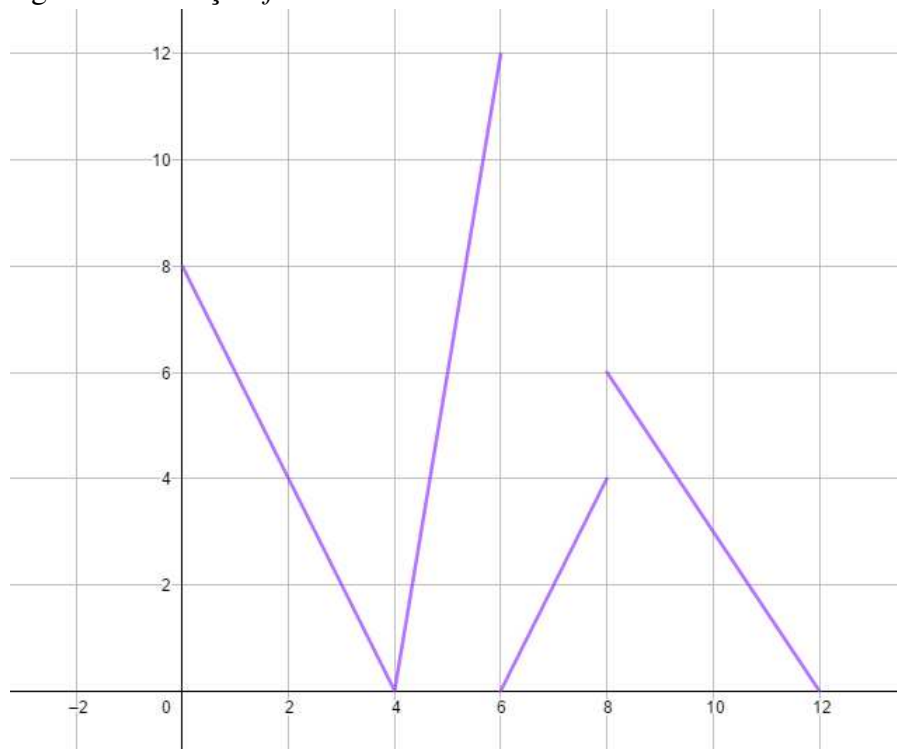
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 8 & , \text{ se } x \in [0, 4] \\ 6x - 24 & , \text{ se } x \in (4, 6] \\ 2x - 12 & , \text{ se } x \in (6, 8] \\ -\frac{3}{2}x + 18 & , \text{ se } x \in (8, 12]. \end{cases}$$

Temos aqui um exemplo de uma *aplicação markoviana*, isto é, existem $x_0 < \dots < x_n$ e $\lambda > 1$ tais que:

1. $f(\{x_0, \dots, x_n\}) \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$.
2. em cada $I_k = (x_k, x_{k+1})$ a restrição de f a I_k é diferenciável com $|f'| \geq \lambda$.

Neste caso, tomamos $x_0 = 0, x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 8$ e $x_4 = 12$.

Figura 5 – O gráfico da função f



Fonte: elaborada pelo autor.

Pela figura acima, vemos que:

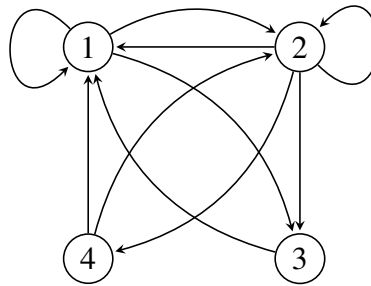
- $f(I_1)$ intersecta I_1, I_2, I_3 ;
- $f(I_2)$ intersecta I_1, I_2, I_3, I_4 ;
- $f(P_3)$ intersecta I_1 ;
- $f(I_4)$ intersecta I_1, I_2 .

Portanto, a matriz de transição então é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o grafo orientado associado é

Figura 6 – Grafo associado ao Exemplo 4



Fonte: elaborada pelo autor.

2.3 Espaços simbólicos: cilindros e métricas

No que segue, fixamos uma matriz de transição $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ e consideramos os espaços simbólicos Σ_A e Σ_A^+ . Por simplicidade, denotaremos esses conjuntos por Σ e Σ^+ .

2.3.1 Métricas

Vamos introduzir distâncias em Σ e Σ^+ . Começamos com Σ . Sejam $\underline{x} = (\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$ e $\underline{y} = (\dots, y_{-1}; y_0, y_1, \dots)$ sequências em Σ . Defina

$$N(\underline{x}, \underline{y}) = \min\{|N| : x_N \neq y_N\}.$$

Fixe $\rho > 1$, e defina $d_\rho : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho^{-N(\underline{x}, \underline{y})}.$$

Similarmente, definimos $d_\rho^+ : \Sigma^+ \times \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 1. (Σ, d_ρ) e (Σ^+, d_ρ^+) são espaços métricos.

Demonstração. É claro que, tanto d_ρ quanto d_ρ^+ são não negativos. Também, $d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho^{-N(\underline{x}, \underline{y})} = 0$ se e só se $N(\underline{x}, \underline{y}) = \infty$, o que significa que as sequências coincidem (o que é válido também para d_ρ^+). Tem-se ainda, claramente, que $N(\underline{x}, \underline{y}) = N(\underline{y}, \underline{x})$, e portanto $d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = d_\rho(\underline{y}, \underline{x})$ e $d_\rho^+(\underline{x}, \underline{y}) = d_\rho^+(\underline{y}, \underline{x})$. Nos resta então considerar a prova da desigualdade triangular. Se $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ são sequências em Σ , seja $N(\underline{x}, \underline{z}) = m$ e $N(\underline{z}, \underline{y}) = n$. Tome $\ell = \min\{m, n\}$. Então \underline{x} e \underline{y} coincidem nas ℓ primeiras coordenadas ao redor da origem (de 0 a $\ell - 1$ no caso de (Σ^+, d_ρ^+) e de $-(\ell - 1)$ a $\ell - 1$ no caso de (Σ, d_ρ)) e portanto $N(\underline{x}, \underline{y}) \geq \ell$, donde

$$d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho^{-N(\underline{x}, \underline{y})} \leq \rho^{-\ell} \leq \rho^{-m} + \rho^{-n} = d_\rho(\underline{x}, \underline{z}) + d_\rho(\underline{z}, \underline{y})$$

e o mesmo desenvolvimento vale para d_ρ^+ . □

Proposição 2. *Os shifts $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ e $\sigma_+ : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ são Lipschitz, com*

$$d_\rho(\sigma(\underline{x}), \sigma(\underline{y})) \leq \rho d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{e} \quad d_\rho^+(\sigma_+(\underline{x}), \sigma_+(\underline{y})) \leq \rho d_\rho^+(\underline{x}, \underline{y}).$$

Em particular, σ e σ_+ são contínuos.

Demonstração. Provamos o resultado para σ , deixando a prova para σ_+ para o leitor. Basta mostrar que $N(\sigma(\underline{x}), \sigma(\underline{y})) \geq N(\underline{x}, \underline{y}) - 1$. Fixe $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$. Se $N(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, não há nada a fazer. Assuma que $N(\underline{x}, \underline{y}) = k \geq 1$. Então \underline{x} e \underline{y} compartilham um mesmo bloco simétrico inicial $(a_{-k}, \dots, a_0, \dots, a_k)$ e portanto $\sigma(\underline{x})$ e $\sigma(\underline{y})$ compartilham o mesmo bloco simétrico $(a_{-k+2}, \dots, a_0; a_1, \dots, a_k)$. Isso implica que $N(\sigma(\underline{x}), \sigma(\underline{y})) \geq k - 1$. □

2.3.2 Cilindros

Vamos introduzir uma classe particular de subconjuntos de Σ e Σ^+ que facilitam entender a estrutura combinatória desses conjuntos, assim como as estruturas métricas introduzidas na seção anterior.

Definição 10 (Palavras). *Uma palavra de tamanho n é uma sequência (a_1, \dots, a_n) com $A_{a_i, a_{i+1}} = 1$ para $i = 1, \dots, n - 1$. Denotamos o conjunto das palavras de tamanho n por \mathcal{A}_n , e o conjunto de todas as palavras por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n.$$

Definição 11 (Cilindros). *Se $(a_m, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$, definimos o conjunto*

$$C_{m,n}(a_m, \dots, a_n) := \{\underline{x} = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma : x_i = a_i, m \leq i \leq n\},$$

chamado de cilindro entre as posições m, n com a configuração (a_m, \dots, a_n) , ou simplesmente cilindro. Em Σ , dizemos que o cilindro é simétrico se $m = -n$.

Os cilindros são importantes porque, nas distâncias que definimos, eles são bolas das métricas d_ρ e d_ρ^+ , como mostra o seguinte lema. Para $\underline{x} \in \Sigma$ e $r > 0$, denote por $B(\underline{x}, r)$ a bola de centro \underline{x} e raio r na métrica d_ρ . Uma definição análoga vale em (Σ^+, d_ρ^+) .

Lema 1. Se $\underline{x} \in \Sigma$ então

$$C_{-n,n}(x_{-n}, \dots, x_n) = B(\underline{x}, \rho^{-n}).$$

Similarmente, se $\underline{x} \in \Sigma^+$ então

$$C_{0,n}(x_0, \dots, x_n) = B(\underline{x}, \rho^{-n}).$$

Demonstração. Seja $\underline{y} \in C_{-n,n}(x_{-n}, \dots, x_n)$. Pela definição de cilindro, \underline{y} coincide com \underline{x} nas posições $-n, \dots, 0, \dots, n$, logo $N(\underline{x}, \underline{y}) > n$. Assim, $d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho^{-N(\underline{x}, \underline{y})} < \rho^{-n}$ e portanto $\underline{y} \in B(\underline{x}, \rho^{-n})$. Agora, seja $\underline{y} \in B(\underline{x}, \rho^{-n})$. Então $d_\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho^{-N(\underline{x}, \underline{y})} < \rho^{-n}$, o que nos dá $N(\underline{x}, \underline{y}) > n$. Pela definição de N , obtemos que \underline{x} e \underline{y} coincidem nas posições $-n, \dots, 0, \dots, n$, donde $\underline{y} \in C_{-n,n}(x_{-n}, \dots, x_n)$. Um desenvolvimento análogo se faz para (Σ^+, d_ρ^+) . \square

2.3.3 Topologia produto

Vamos agora mostrar que os espaços métricos (Σ^+, d_ρ^+) e (Σ, d_ρ) são compactos. Em cada um dos casos, faremos isso introduzindo uma topologia, que sabemos definir um espaço topológico compacto, e verificamos que tal topologia coincide com a topologia induzida pela métrica. Faremos a apresentação para (Σ^+, d_ρ^+) (a mesma prova valerá para (Σ, d_ρ)). Observe que

$$\Sigma^+ \subset \prod_{n \geq 0} \{1, \dots, N\} = \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} \times \dots$$

Vamos definir uma topologia em $\{1, \dots, N\}$. Esta topologia será a *topologia discreta*, isto é, a topologia em que o conjunto dos abertos coincide com o conjunto das partes de $\{1, \dots, N\}$. Ou seja: qualquer subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ é aberto (e, consequentemente, também fechado). Daí $\{1, \dots, N\}$ é um conjunto compacto (já que toda cobertura por abertos admite uma subcobertura finita). Dado isso, é natural, portanto, por em $\prod_{n \geq 0} \{1, \dots, N\}$ a topologia produto.

Definição 12 (Topologia produto). *Se I é um conjunto qualquer, $\{X_i\}_{i \in I}$ são espaços topológicos indexados por ele e $X = \prod_{i \in I} X_i$, a topologia produto é a topologia em X que tem como sub-base todos os conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, onde U_i é um aberto de X_i e $\pi_i : X \rightarrow X_i$ é a projeção. Noutras palavras, a topologia produto é aquela cujos abertos são todos os conjuntos obtidos como a união (arbitrária) de interseções finitas de conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(U_i)$.*

Vamos agora enunciar o teorema de Tychonoff.

Teorema 1 (Tychonoff). *Com respeito à topologia produto, o produto qualquer de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto.*

Isso nos diz que, com a topologia produto, $\prod_{n \geq 0} \{1, \dots, N\}$ é um espaço topológico compacto. A propriedade de ser compacto evidentemente depende da topologia. Já tínhamos uma topologia para Σ^+ , gerada pela métrica d_ρ^+ . O próximo resultado diz que essa última topologia coincide com a topologia produto.

Proposição 3. *Em $\prod_{n \geq 0} \{1, \dots, N\}$, a topologia produto e a topologia induzida por d_ρ^+ coincidem. Em particular, $(\prod_{n \geq 0} \{1, \dots, N\}, d_\rho^+)$ é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. Denote a topologia produto por π e a topologia induzida pela métrica por τ . Seja $A \in \pi$, isto é, A é um aberto da topologia π . Por definição,

$$A = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} \pi_j^{-1}(U_j) \right),$$

onde I é um conjunto arbitrário, $J_i \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto finito para todo $i \in I$ e U_j é um aberto de $\{1, \dots, N\}$. Para que $A \in \tau$, é suficiente mostrar que cada $\pi_j^{-1}(U_j)$ é um aberto de τ . De fato, nesse caso teremos que $A_i = \bigcap_{j \in J_i} \pi_j^{-1}(U_j)$ é um aberto de τ (pois é uma interseção finita de abertos de τ) e portanto $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ é um aberto de τ (pois é uma união arbitrária de abertos de τ). Para mostrar que $\pi_j^{-1}(U_j)$ é um aberto de τ , comece notando que se $U_j = \{a_1^j, \dots, a_k^j\}$, então $\pi_j^{-1}(U_j) = \pi_j^{-1}(\bigcup_{\ell=1}^k \{a_\ell^j\}) = \bigcup_{\ell=1}^k \pi_j^{-1}(\{a_\ell^j\})$. Agora, repare que $\pi_j^{-1}(a) = \{1, \dots, N\} \times \dots \times \{a\} \times \{1, \dots, N\} \times \dots$, onde a aparece na posição j . Esse último conjunto pode ser visto como a união

$$\bigcup_{\substack{a_i \in \{1, \dots, N\} \\ 0 \leq i < j}} C_{0,j}(a_0, \dots, a_{j-1}, a).$$

Pelo Lema 1, cada um dos cilindros acima é aberto na topologia τ , e portanto $\pi_j^{-1}(a)$ é aberto na topologia τ . Como $\pi_j^{-1}(U_j)$ é união de conjuntos da forma $\pi_j^{-1}(a)$, segue que $\pi_j^{-1}(U_j)$ é aberto na topologia τ . Em suma: todo aberto da topologia π é aberto da topologia τ .

Seja agora $B \in \tau$, e sejam $B_{d_\rho^+}(x, r_x)$ bolas da métrica d_ρ^+ tais que $B = \bigcup_{x \in B} B_{d_\rho^+}(x, r_x)$. Como $\rho > 1$, para cada x existe $n_x \geq 1$ tal que $\rho^{-n_x} \leq r_x$. Daí, podemos ajustar as bolas para que cada raio seja igual a ρ^{-n_x} , pois

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\} \subset \bigcup_{x \in B} B_{d_\rho^+}(x, \rho^{-n_x}) \subset \bigcup_{x \in B} B_{d_\rho^+}(x, r_x) = B.$$

e portanto $B = \bigcup_{x \in B} B_{d_\rho^+}(x, \rho^{-n_x})$. Agora, note que se $x = (x_0, x_1, \dots)$ então

$$\begin{aligned} B_{d_\rho^+}(x, \rho^{-n_x}) &= C_{0,n}(x_0, \dots, x_n) \\ &= \{x_0\} \times \dots \times \{x_n\} \times \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} \times \dots \\ &= \pi_0^{-1}(\{x_0\}) \cap \pi_1^{-1}(\{x_1\}) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(\{x_n\}). \end{aligned}$$

Isso mostra que cada bola $B_{d_\rho^+}$ está na topologia π , e portanto $B \in \pi$. □

Corolário 1. *Os espaços métricos (Σ^+, d_ρ^+) e (Σ, d_ρ) são compactos.*

Demonstração. Pela Proposição 3, as topologias geradas por d_ρ e d_ρ^+ são iguais às geradas pelas respectivas topologias produto. Pelo teorema de Tychonoff, essas últimas são compactas. Assim, os espaços (Σ, d_ρ) e (Σ^+, d_ρ^+) são compactos. □

Daí Σ^+ é um espaço compacto, tanto com a topologia produto quanto com a topologia gerada pela métrica. Também, não é difícil ver que os resultados acima valem para Σ fazendo os ajustes necessários.

Vamos agora mostrar que os cilindros são conjuntos tanto abertos e quanto fechados na topologia métrica (ou, equivalentemente, na do produto). São claramente abertos porque, como já provamos, os cilindros são bolas. São fechados porque para qualquer cilindro $C_n(a_0, \dots, a_n)$ temos que

$$C_n(a_0, \dots, a_n) = \{a_0\} \times \dots \times \{a_n\} \times \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} \times \dots$$

Como, na topologia discreta, $\{a_i\}$ é um subconjunto compacto de $\{1, \dots, N\}$ para todo i e evidentemente $\{1, \dots, N\}$ também o é (qualquer subconjunto de $\{1, \dots, N\}$ é compacto na topologia discreta), temos que o produto é compacto (pelo Teorema de Tychonoff). Daí, na topologia P , todo cilindro é compacto e sendo compacto é fechado. Como já vimos que as topologias P e M são iguais, os cilindros são fechados em ambas as topologias.

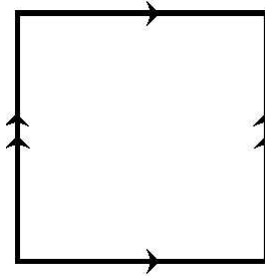
Os cilindros relevam sua importância num estudo posterior do assunto, onde servem para definir medidas via o Teorema de Carathéodory.

3 TRANSFORMAÇÕES NO TORO

3.1 Introdução ao toro e aplicações lineares

Neste capítulo abordaremos transformações definidas no toro bidimensional. Como o toro possui diversas possíveis interpretações, começaremos explicitando a interpretação que consideraremos. Topologicamente, o toro é definido como o produto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1]$ com as identificações $(0, x) \sim (1, x)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$. Visualmente, ele é representado da seguinte maneira:

Figura 7 – O toro



Fonte: elaborada pelo autor.

Na representação da imagem acima, os lados com a mesma quantidade de setas devem ser identificados (ou “colados”). A direção das setas diz em que sentido devem ser colados (se, por exemplo, a identificação fosse $(0, x) \sim (1, 1 - x)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$, as setas verticais teriam direção contrária). Podemos, definir uma relação de equivalência em \mathbb{R}^2 por:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Lema 2. *A relação \sim é uma relação de equivalência.*

Prova: Reflexividade: para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x_1, x_2) - (x_1, x_2) = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$. Simetria: se $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$, então claramente $(y_1, y_2) - (x_1, x_2) = -((x_1, x_2) - (y_1, y_2)) \in \mathbb{Z}^2$. Transitividade: se $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$, então $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $(y_1, y_2) - (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ e daí, como \mathbb{Z}^2 é fechado para soma, temos que $(x_1, x_2) - (z_1, z_2) = (x_1, x_2) - (y_1, y_2) + (y_1, y_2) - (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. Portanto, \sim é relação de equivalência. \square

Definição 13. *O toro bidimensional é definido como o conjunto*

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \sim = \{[x]; x \in \mathbb{R}^2\}$$

das classes de equivalência da relação \sim . Definimos também a função $\text{proj} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $\text{proj}(x) = [x]$, chamada de projeção canônica.

Consideramos a topologia quociente induzida pela projeção canônica, de modo que \mathbb{T}^2 é um espaço topológico. Podemos identificar \mathbb{T}^2 com $[0, 1)^2$. De fato, se $[x] \in \mathbb{T}^2$, então $[x] = [(x_1, x_2)]$ tem um único¹ representante em $[0, 1)^2$, a saber $(x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, x_2 - \lfloor x_2 \rfloor)$ (repare que $a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$). Vale salientar que a identificação acima é apenas uma forma de visualizar o toro: \mathbb{T}^2 e $[0, 1)^2$ não são iguais do ponto de vista topológico, por exemplo.

Vamos considerar agora aplicações lineares $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $F \in GL_2(\mathbb{Z})$ (isto é, a matriz de F com respeito à base canônica tem entradas inteiras). Nosso objetivo é estender essa noção para aplicações lineares no toro. Defina a aplicação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$f([x]) = [F(x)], \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos mostrar que f está bem definida, isto é, que $f([x])$ não depende da escolha do representante da classe $[x]$. De fato, se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são dois representantes da classe $[x]$, temos $F(x) - F(y) = F(x - y)$ (pois F é linear). Como x e y estão na mesma classe de equivalência, $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Daí, como as entradas da matriz de F na base canônica são inteiras por hipótese, se tal matriz de F é $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então

$$F(x - y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1 - y_1) + b(x_2 - y_2) \\ c(x_1 - y_1) + d(x_2 - y_2) \end{bmatrix}.$$

Como $a, b, c, d, x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$, o vetor acima pertence a \mathbb{Z}^2 . Daí, $F(x)$ e $F(y)$ diferem por um vetor em \mathbb{Z}^2 , donde estão na mesma classe de equivalência com respeito a \sim e portanto $[F(x)] = [F(y)]$. Em suma: se $x \sim y$ então $f([x]) = [F(x)] = [F(y)] = f([y])$, donde f está bem definida. Dito de outro modo, mostramos que $\text{proj} \circ F = f \circ \text{proj}$, donde o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \text{proj} \downarrow & & \downarrow \text{proj} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

¹ Essa representação é única porque se (a, b) é outro representante da classe em $[0, 1)^2$, então $(x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, x_2 - \lfloor x_2 \rfloor) = (a, b) + (z_1, z_2)$, com $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. Daí, $x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = a + z_1$ e $x_2 - \lfloor x_2 \rfloor = b + z_2$. Se $z_1 \neq 0$, então $a + z_1 \notin [0, 1)$, um absurdo. Assim, $z_1 = 0$ e, similarmente, $z_2 = 0$.

É fácil ver que se $A, B \in GL_2(\mathbb{Z})$ e f, g são as transformações definidas em \mathbb{T}^2 , respectivamente, então a transformação associada à matriz AB é a composição $f \circ g$.

3.2 Automorfismos lineares hiperbólicos do toro

Um *automorfismo* de \mathbb{R}^2 é uma transformação linear bijetiva $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. No que segue, consideramos $SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in GL_2(\mathbb{Z}) : \det(A) = 1\}$. Tome $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Como vimos na seção anterior, A define uma transformação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Como $B = A^{-1}$ também tem entradas inteiras, B também define uma transformação em \mathbb{T}^2 , igual à inversa de f . Por essa razão, temos a seguinte definição.

Definição 14. Um automorfismo linear do toro é uma transformação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induzida por uma matriz $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Os automorfismos lineares dos toros podem ser divididos em três categorias, a depender do traço da matriz A que os define:

- Elípticos: $|\text{traço}| < 2$.
- Parabólicos: $|\text{traço}| = 2$.
- Hiperbólicos: $|\text{traço}| > 2$.

Denotaremos o traço de A por $tr(A)$. Como A tem entradas inteiras, $tr(A)$ é inteiro. Nesta dissertação, focaremos nos automorfismos lineares hiperbólicos. Seja portanto

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

com $|tr(A)| > 2$. Note que $b \neq 0$, pois caso contrário $a = d = \pm 1$ e daí $|tr(A)| = 2$, um absurdo. Vamos identificar os autovalores de A . O polinômio característico de A é

$$x^2 - tr(A)x + \det(A) = x^2 - tr(A)x + 1,$$

cujo discriminante é igual a $\Delta = tr(A)^2 - 4 > 0$. Afirmamos que Δ não é um quadrado perfeito. Caso contrário, teríamos $tr(A)^2 - 4 = z^2$ para z inteiro, e daí $z^2, tr(A)^2$ seriam quadrados perfeitos com diferença igual a 4. Isso só é possível se esses quadrados forem 0, 4, em cujo caso $tr(A) = 2$, contrariando nossa hipótese. Assim, A possui dois autovalores irracionais

$$\lambda = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ e } \mu = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Temos $|\lambda| \cdot |\mu| = 1$. Afirmamos que nenhum dos autovalores tem módulo 1. Caso contrário, teríamos $|\lambda| = |\mu| = 1$ e daí $2 = |\lambda| + |\mu| \geq |\lambda + \mu| = |\text{tr}(A)|$, o que contradiz o fato de $|\text{tr}(A)| > 2$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $0 < |\mu| < 1$ e $|\lambda| > 1$. A autodireção de λ é chamada de *expansora*, enquanto a de μ é chamada de *contratora*. Denotamos as autodireções de λ, μ por ℓ_λ, ℓ_μ respectivamente, e os autovetores de λ, μ por v_λ, v_μ respectivamente.

Finalizamos a seção com algumas propriedades das retas ℓ_λ e ℓ_μ .

Lema 3. *Valem os seguintes itens:*

1. *As inclinações de ℓ_λ e ℓ_μ são irracionais.*
2. *As retas ℓ_λ e ℓ_μ intersectam \mathbb{Z}^2 apenas na origem.*
3. *A projeção das retas ℓ_λ e ℓ_μ é densa no toro.*

Demonstração. (1) Escrevendo $v_\lambda = (x, y)$, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \implies ax + by = \lambda x \implies y = \frac{\lambda - a}{b}x$$

e portanto a inclinação de ℓ_λ é $m_\lambda = \frac{\lambda - a}{b}$. Analogamente, a inclinação de ℓ_μ é $m_\mu = \frac{\mu - a}{b}$. Como λ, μ são irracionais, o mesmo ocorre para m_λ, m_μ .

(2) Isto decorre diretamente de (1): se (n, m) é uma intersecção de \mathbb{Z}^2 com, digamos, a reta ℓ_λ , teríamos

$$\frac{\lambda - a}{b}n = m.$$

Se $n \neq 0$, teríamos então $\lambda = \frac{bm}{n} + a$, o que contradiz a irracionalidade de λ . Logo, $n = 0$ e daí $m = 0$. A prova é análoga para ℓ_μ .

(3) Daremos um esboço da prova para ℓ_λ . A prova para ℓ_μ é análoga. Fixamos $t = [(t_1, t_2)] \in \mathbb{T}^2$, com $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Vamos mostrar que a intersecção da projeção de ℓ_λ , que chamaremos de $[\ell_\lambda]$, e de $R = \{[(t_1, r)] : 0 \leq r \leq 1\}$ é densa em R . Isto nos dará então que para todo t e todo $\varepsilon > 0$ teremos que existem pontos de $[\ell_\lambda]$ com distância menor que ε .

Observe que os pontos em $[\ell_\lambda]$ são da forma $[(\alpha, \alpha m_\lambda)]$, de forma que os pontos $[(\alpha, \alpha m_\lambda)] \in [\ell_\lambda]$ que intersectam R satisfazem $\alpha = t_1 + k$ para algum inteiro k . Note também que tais pontos são da forma $[(\alpha, \alpha m_\lambda)] = [(t_1, t_1 m_\lambda + k m_\lambda)] = [(t_1, \{t_1 m_\lambda\} + k m_\lambda)]$, onde $\{t_1 m_\lambda\}$ é a parte fracionária de $t_1 m_\lambda$. Então as intersecções de $[\ell_\lambda]$ e R são a órbita de uma rotação irracional em R (a saber, do ponto $[(t_1, \{t_1 m_\lambda\})]$), que é identificado com \mathbb{S}^1 . Tais órbitas, de

qualquer ponto, são densas no círculo. Portanto as intersecções de R e $[\ell_\lambda]$ são densas em R . Logo, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in R \cap [\ell_\lambda] \subset [\ell_\lambda]$ com $d_R(x, t) < \varepsilon$. Em posse disso, não é difícil ver também que $d_{\mathbb{T}^2}(x, t) < \varepsilon$.

□

3.3 O “cat map”

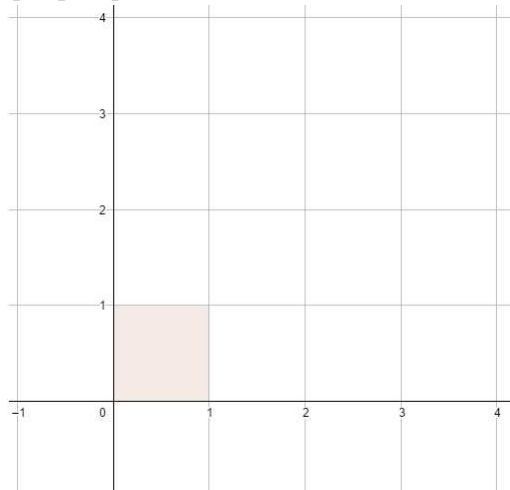
Olhemos agora para um exemplo particular de automorfismo linear hiperbólico. Esse exemplo é o mapa $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definido pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A aplicação f é conhecida como *cat map de Arnold* ou simplesmente *cat map* ou *mapa de Arnold*. Ela recebe esse nome devido a Vladimir Arnold que, em sua obra “Ergodic Problems in Classical Mechanics”, usou a figura de um gato para ilustrar as propriedades caóticas de f , veja (D; AVEZ, 1968).

Vamos tentar entender a dinâmica da aplicação f . Como ponto de partida, consideramos o quadrado $[0, 1]^2$ e identificamos sua imagem pela matriz A . O quadrado é o que chamamos de *domínio fundamental*: um polígono cujas translações por vetores de coordenadas inteiras cobre todo o plano, com intersecções apenas na fronteira. Pela definição de \mathbb{T}^2 , isso significa dizer que as classes de equivalência definidas pelo quadrado são iguais a \mathbb{T}^2 e que, a menos do bordo do quadrado, todo ponto de \mathbb{T}^2 possui um único representante no quadrado.

Figura 8 – O quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$



Fonte: elaborada pelo autor.

Os vértices do quadrado são $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. A imagem do quadrado por A é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ e $(3,2)$. De fato, temos

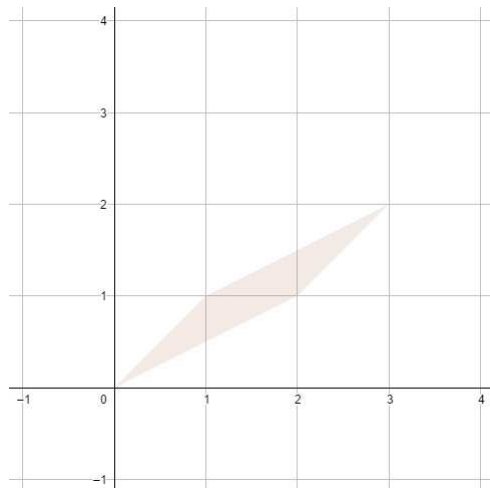
$$[0,1]^2 = \{a(0,0) + b(1,0) + c(0,1) + d(1,1); a+b+c+d=1, a,b,c,d \geq 0\}$$

cuja imagem por A é (usando a linearidade de A)

$$\begin{aligned} A([0,1]^2) &= \{aA(0,0) + bA(1,0) + cA(0,1) + dA(1,1) : a,b,c,d \geq 0 \text{ com } a+b+c+d=1\} \\ &= \{a(0,0) + b(2,1) + c(1,1) + d(3,2) : a,b,c,d \geq 0 \text{ com } a+b+c+d=1\}, \end{aligned}$$

que é igual ao fecho convexo de $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$ e $(3,2)$, ou seja, é o paralelogramo definido por esses quatro pontos.

Figura 9 – A imagem do quadrado $[0,1] \times [0,1]$ pela matriz A

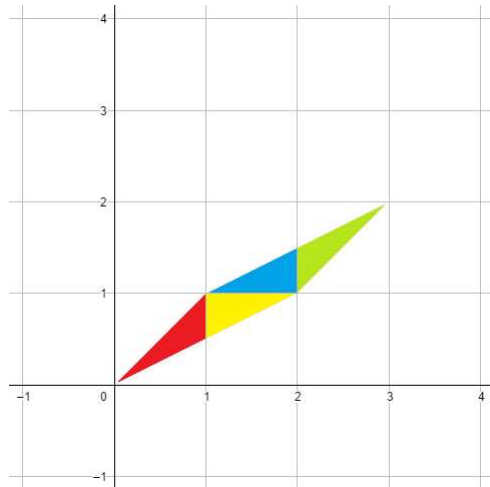


Fonte: elaborada pelo autor.

Queremos entender como a imagem de \mathbb{T}^2 por f se comporta. Para isso, podemos imaginar o plano “coberto” por infinitas cópias de \mathbb{T}^2 . De fato, o plano pode ser coberto por conjuntos da forma $[n, n+1) \times [m, m+1)$, que são identificados a $[0,1) \times [0,1)$ por meio de translações por vetores de coordenadas inteiras (e, como já citamos, esse último conjunto pode ser identificado ao toro). Assim, sempre que a imagem de um subconjunto não está contida em $[0,1) \times [0,1)$, aplicamos a respectiva translação para “trazer de volta” essa imagem para $[0,1) \times [0,1)$.

A imagem de $[0,1) \times [0,1)$ intersecta quatro cópias do quadrado, descritas na figura abaixo:

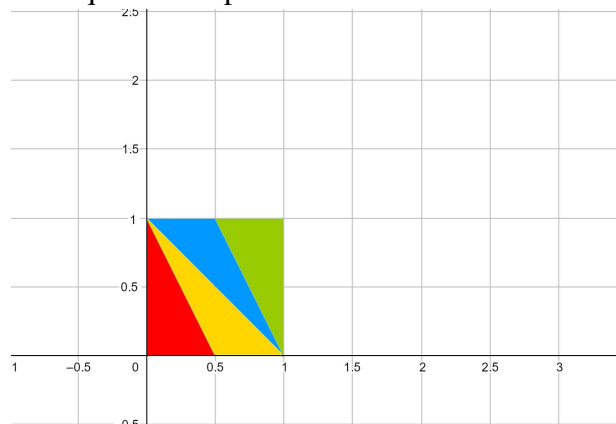
Figura 10 – Os quadrados atravessados pela imagem



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a cada uma das quatro componentes, obtemos os respectivos subconjuntos de $[0, 1) \times [0, 1)$:

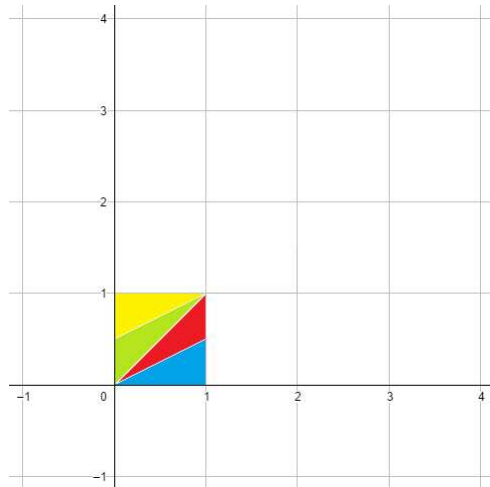
Figura 11 – Pré-imagem das quatro componentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, trasladando as componentes amarela, azul e verde da primeira figura de volta para o intervalo $[0, 1) \times [0, 1)$, obtemos que as imagens por f de cada uma das componentes é:

Figura 12 – As componentes reorganizadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, a ação de f no toro ocorre da seguinte forma:

Figura 13 – Como a transformação age



Fonte: elaborada pelo autor.

Em particular, do ponto de vista geométrico, o comportamento dinâmico de f parece ser bastante complicado. Imagine, por exemplo, iterar f dez vezes: cada iteração requer uma divisão e a identificação de cada componente.

Felizmente, em outro sentido, o cap map pode ser mais facilmente compreendido. A matriz A é um operador auto-adjunto e portanto é diagonalizável, ou seja, existem direções nas quais a aplicação se resume à multiplicação por escalar. Nosso objetivo então se torna claro: estudar os automorfismos hiperbólicos usando tais direções como os eixos coordenados e daí tentar entender seu comportamento.

Finalizamos esse capítulo introduzindo um conceito e provando uma propriedade simples a seu respeito.

Definição 15. Um domínio fundamental de \mathbb{T}^2 é um conjunto fechado $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

(i) $D = \overline{\text{int}(D)}$.

(ii) A união dos translados de D é igual a \mathbb{R}^2 :

$$\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} D + (m,n) = \mathbb{R}^2.$$

(iii) Quaisquer dois pontos de $\text{int}(D)$ não são equivalentes com respeito a \sim .

Noutras palavras, um domínio fundamental é um conjunto fechado cujos translados por \mathbb{Z}^2 cobre \mathbb{R}^2 e só possuem interseção em suas fronteiras. Na análise feita nesse capítulo, utilizamos o domínio fundamental canônico $[0, 1] \times [0, 1]$ porque esse é geometricamente o mais simples. Como veremos no próximo capítulo, do ponto de vista dinâmico existem domínios fundamentais mais naturais.

Lema 4. Se D é um domínio fundamental de \mathbb{T}^2 e $A \in SL_2^\pm(\mathbb{Z}) = \{M \in GL_2(\mathbb{Z}) : \det(M) = \pm 1\}$, então $A(D)$ também é um domínio fundamental de \mathbb{T}^2 .

Demonstração. Verificaremos as três condições da definição.

(i) Como A é invertível, para qualquer conjunto $X \subset \mathbb{T}^2$ valem as igualdades $\text{int}(A(X)) = A(\text{int}(X))$ e $\overline{A(X)} = A(\overline{X})$. Assim,

$$\overline{\text{int}(A(D))} = \overline{A(\text{int}(D))} = A(\overline{\text{int}(D)}) = A(D).$$

(ii) Por hipótese, temos $\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [D + (m,n)] = \mathbb{R}^2$. Como A é sobrejetiva e linear, temos que

$$A\left(\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [D + (m,n)]\right) = A(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \implies \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [A(D) + A(m,n)] = \mathbb{R}^2$$

Como A, A^{-1} ambas têm entradas inteiras, a restrição $A|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ é uma bijeção, e portanto a última igualdade acima implica que $\bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [A(D) + (m,n)] = \mathbb{R}^2$.

(iii) Assuma que $x, y \in \text{int}(A(D)) = A(\text{int}(D))$ satisfazem $x \sim y$. Então $x - y \in \mathbb{Z}^2$, e daí $A^{-1}x - A^{-1}y = A^{-1}(x - y) \in \mathbb{Z}^2$. Como $A^{-1}x, A^{-1}y \in \text{int}(D)$, a hipótese de que D é domínio fundamental implica que $A^{-1}x = A^{-1}y$, e portanto $x = y$. \square

Nos capítulos seguintes, usaremos os domínios fundamentais como uma forma de representar “cópias” de \mathbb{T}^2 em \mathbb{R}^2 . Assim, poderemos entender melhor como um automorfismo do toro se comporta estudando como a transformação linear que o induziu se comporta nos domínios fundamentais e em seus translados. Essa é uma boa forma de representar o toro, pois se D é um domínio fundamental então:

- A restrição de proj a D é sobrejetiva. De fato, se $[a] \in \mathbb{T}^2$ então existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $a \in D + (n_0, m_0)$ e portanto $[a] = \text{proj}(a - (n_0, m_0)) \in \text{proj}(D)$. Isso prova que $\mathbb{T}^2 \subset \text{proj}(D)$, donde $\mathbb{T}^2 = \text{proj}(D)$.
- A restrição de proj a $\text{int}(D)$ é injetiva. Isso decorre diretamente da propriedade (iii) da Definição 15.

Noutras palavras a restrição da projeção ao domínio fundamental só não é um bijeção por conta de sua fronteira. Todavia, nos exemplos que iremos considerar, a fronteira do domínio fundamental é, em certo sentido, irrelevante para a dinâmica (tem medida nula).

4 PARTIÇÕES DE MARKOV

Nesse capítulo, faremos uma construção clássica devida a Adler & Weiss (ADLER; WEISS, 1967), veja também (ADLER; WEISS, 1970). O texto que seguimos é o survey de Adler (ADLER, 1998).

4.1 Definições

Vamos começar definindo uma *partição topológica*, que será a base para definirmos partição de Markov.

Definição 16 (Partição topológica). *Dizemos que $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ é uma partição topológica de \mathbb{T}^2 se:*

- (i) *Cada R_i é um aberto conexo de \mathbb{T}^2 , homeomorfo ao produto cartesiano de dois intervalos abertos.*
- (ii) *$R_i \cap R_j = \emptyset$ se $i \neq j$.*
- (iii) *$\mathbb{T}^2 = \overline{R_1} \cup \dots \cup \overline{R_n}$.*

Seja $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um automorfismo linear do toro.

Definição 17 (Partição de Markov). *Uma partição topológica $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ é uma partição de Markov para ϕ se para todo $m \geq 0$ vale a seguinte condição:*

$$R_{a_k} \cap \phi^{-1} R_{a_{k+1}} \neq \emptyset \text{ para } k = 0, \dots, m \implies \bigcap_{k=0}^{m+1} \phi^{-k} R_{a_k} \neq \emptyset.$$

Vamos fornecer uma motivação simbólica para a definição acima. Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ uma partição topológica. Como vimos no Capítulo 2, \mathcal{R} define um grafo orientado $G = (V, E)$. Dizer que \mathcal{R} é de Markov significa dizer que arestas (que representam possíveis transições de pontos em \mathbb{T}^2 pela aplicação ϕ) podem ser concatenadas, gerando um ponto que segue o itinerário dessas arestas. Noutras palavras: se $R_{a_0} \rightarrow R_{a_1}, \dots, R_{a_m} \rightarrow R_{a_{m+1}}$ são arestas em G (isto é, para cada $k = 0, \dots, m$ existe $x_k \in R_{a_k}$ tal que $\phi(x_k) \in R_{a_{k+1}}$), então existe $x \in R_{a_0}$ tal que $\phi(x) \in R_{a_1}, \phi^2(x) \in R_{a_2}, \dots, \phi^{m+1}(x) \in R_{a_{m+1}}$.

O resultado principal dessa seção, Teorema 3, fornece condições suficientes para que uma partição topológica seja de Markov, em termos apenas de propriedades de sua fronteira. Para isso, primeiro faremos algumas definições. De agora em diante, assuma que ϕ é hiperbólico com autovalores μ, λ tais que $|\mu| < 1 < |\lambda|$, e sejam v_μ, v_λ autovetores unitários relativos a μ, λ

respectivamente. Seja $p \in \mathbb{T}^2$. Por simplicidade de notação, vamos escrever $\{p + tv_\lambda : t \in \mathbb{R}\}$ para denotar a projecção da reta que passa por um ponto qualquer de $\text{proj}^{-1}(p)$ com vetor diretor v_λ . Noutras palavras, $\{p + tv_\lambda : t \in \mathbb{R}\}$ é a direcção expansora de ϕ no ponto $p \in \mathbb{T}^2$. De modo análogo, $\{p + tv_\mu : t \in \mathbb{R}\}$ denota a direcção contratora de ϕ no ponto p . Como λ, μ são irracionais, esses dois conjuntos são densos em \mathbb{T}^2 . Por simplicidade, chamaremos v_λ de direcção horizontal e v_μ de direcção vertical.

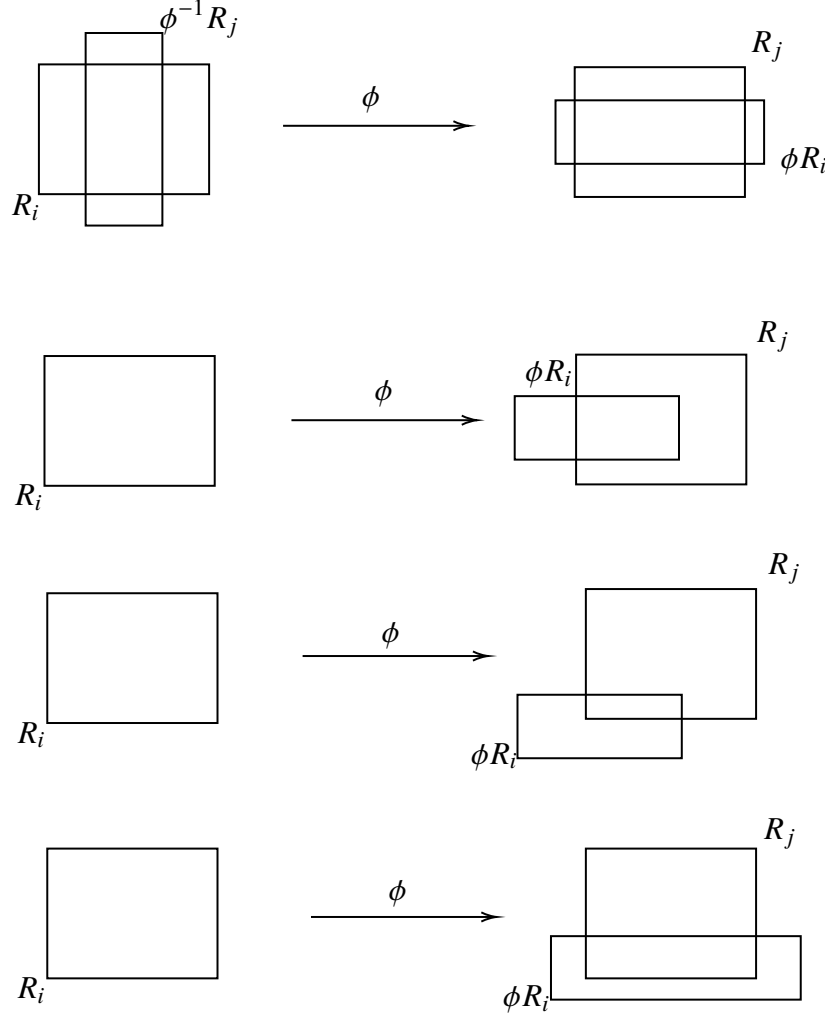
Definição 18 (Fibras horizontais e verticais). *Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ uma partição topológica. A fibra horizontal de $p \in R_i$, denotada por $H_i(p)$, é igual à componente conexa de $\{p + tv_\lambda : t \in \mathbb{R}\} \cap R_i$ que contém p . A fibra vertical de $p \in R_i$, denotada por $V_i(p)$, é igual à componente conexa de $\{p + tv_\mu : t \in \mathbb{R}\} \cap R_i$ que contém p .*

Definição 19 (Propriedade de Markov). *Nas mesmas notações acima, dizemos que \mathcal{R} tem a propriedade de Markov para ϕ se:*

$$\begin{cases} p \in R_i \cap \phi R_j \implies \phi^{-1}H_i(p) \subset H_j(\phi^{-1}p) \\ p \in R_i \cap \phi^{-1}R_j \implies \phi V_i(p) \subset V_j(\phi p). \end{cases}$$

Podemos interpretar essas condições como: a imagem da fibra horizontal de p contém a fibra horizontal de ϕp , e a pré-imagem da fibra vertical de p contém a fibra vertical de $\phi^{-1}p$. Assim, se ϕR_i intersecta R_j então ϕR_i atravessa R_j completamente de um lado ao outro ao longo da direcção expansora, e $\phi^{-1}R_j$ atravessa R_i completamente de um lado ao outro ao longo da direcção contratora. Veja a Figura 14 que exemplifica o cruzamento correto e três cruzamentos proibidos. Em suma, a propriedade de Markov diz que, com respeito às direcções expansora e contratora, “se intersecta, então contém”. Repare que se \mathcal{R} tem a propriedade de Markov para ϕ , então ela também tem a propriedade de Markov para ϕ^{-1} : basta inverter os papéis das direcções expansora e contratora.

Figura 14 – A propriedade de Markov é satisfeita na primeira figura e não vale nas demais. O terceiro caso é particularmente patológico, pois nem se tem $\phi V_i(p)$ contido em $V_j(\phi p)$, nem $\phi H_i(p)$ contendo $H_j(\phi p)$ (essa condição é equivalente à do enunciado para as fibras horizontais).



Fonte: elaborada pelo autor.

O próximo teorema é a observação fundamental que proporciona construir partições de Markov. Essa observação foi feita tanto por Adler & Weiss (ADLER; WEISS, 1967) quanto por Sinai (SINA, 1968).

Teorema 2. *Se \mathcal{R} tem a propriedade de Markov, então \mathcal{R} é uma partição de Markov.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ uma partição topológica com a propriedade de Markov.

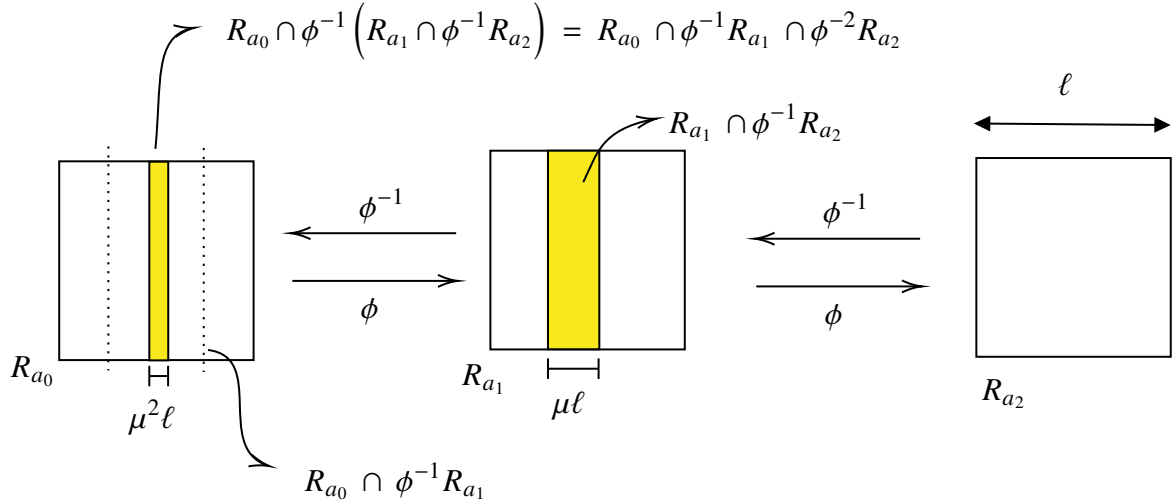
Devemos mostrar que

$$R_{a_k} \cap \phi^{-1} R_{a_{k+1}} \neq \emptyset \text{ para } k = 0, \dots, m \implies \bigcap_{k=0}^{m+1} \phi^{-k} R_{a_k} \neq \emptyset.$$

Vamos mostrar isso por indução em m . O caso $m = 0$ é óbvio. Note que nesse caso a interseção $R_{a_0} \cap \phi^{-1}(R_{a_1})$ é uma faixa vertical de R_{a_0} , ou seja, é formada pela união de fibras verticais

de R_{a_0} . Vejamos o caso $m = 1$. Pelo caso inicial, $R_{a_1} \cap \phi^{-1}R_{a_2}$ é uma faixa vertical de R_{a_1} . Assim, $R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \phi^{-2}R_{a_2} = R_{a_0} \cap \phi^{-1}(R_{a_1} \cap \phi^{-1}R_{a_2})$ é também uma faixa vertical, mais fina e contida na faixa vertical $R_{a_0} \cap \phi^{-1}(R_{a_1})$. Em particular, $R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \phi^{-2}R_{a_2} \neq \emptyset$. A Figura 15 ilustra essa situação.

Figura 15 – Faixas verticais: se R_{a_2} tem largura ℓ , então $R_{a_1} \cap \phi^{-1}R_{a_2}$ tem largura $\mu\ell$ e $R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \phi^{-2}R_{a_2}$ tem largura $\mu^2\ell$.



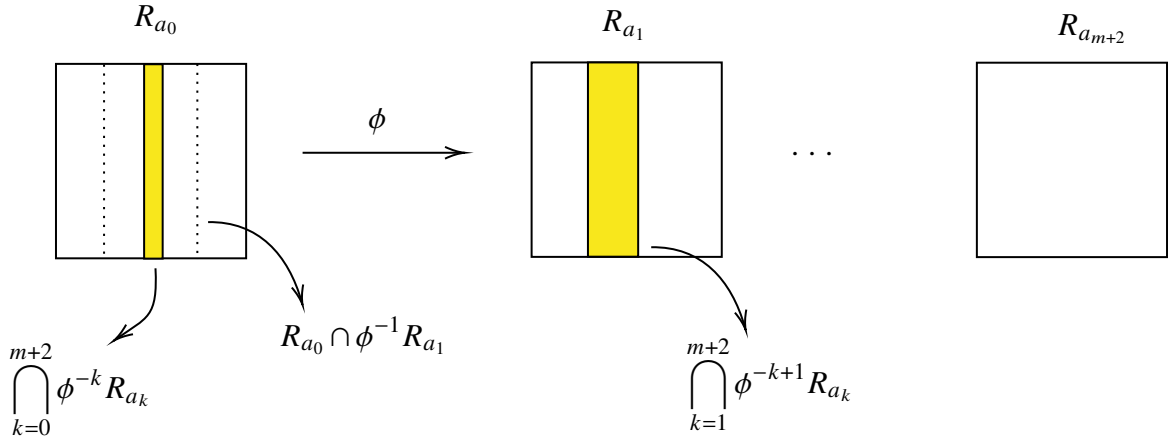
Fonte: elaborada pelo autor.

Procedemos agora para o passo indutivo. Suponha que para algum $m \geq 1$ valha que:

$$R_{a_k} \cap \phi^{-1}R_{a_{k+1}} \neq \emptyset \text{ para } k = 0, \dots, m \implies \bigcap_{k=0}^{m+1} \phi^{-k}R_{a_k} \text{ é uma faixa vertical de } R_{a_0}.$$

Assuma que $R_{a_k} \cap \phi^{-1}R_{a_{k+1}} \neq \emptyset$ para $k = 0, \dots, m+1$. Vamos provar que $\bigcap_{k=0}^{m+2} \phi^{-k}R_{a_k}$ é uma faixa vertical de R_{a_0} . Pela hipótese de indução, $S = \bigcap_{k=1}^{m+2} \phi^{-k+1}R_{a_k}$ é uma faixa vertical de R_{a_1} . Como $R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \neq \emptyset$, segue da propriedade de Markov que $\phi^{-1}R_{a_1}$ atravessa R_{a_0} da extremidade inferior à superior. Como S é uma faixa vertical de R_{a_1} , $\phi^{-1}S$ também atravessa R_{a_0} da extremidade inferior à superior, e portanto $\bigcap_{k=0}^{m+2} \phi^{-k}R_{a_k} = R_{a_0} \cap \phi^{-1}S$ é uma faixa vertical em R_{a_0} . Veja a Figura 16.

Figura 16 – Esquematização do passo indutivo.



Fonte: elaborada pelo autor.

□

Agora, vamos definir uma condição mais fácil para que uma partição topológica seja de Markov. Antes, precisamos introduzir alguns conceitos. Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ uma partição topológica. Relembrando que $\partial R_i = \overline{R_i} \setminus R_i$ é a fronteira de R_i , definimos a *fronteira* de \mathcal{R} por $\partial \mathcal{R} := \bigcup_{i=1}^n \partial R_i$. Para cada $R_i \in \mathcal{R}$, definimos também as fronteiras vertical e horizontal de R_i . Formalmente, a *fronteira vertical* $\partial_V R_i$ de R_i é igual ao conjunto $\bigcup_{p \in R_i} \partial R_i \cap (\overline{H_i(p)} \setminus H_i(p))$. Similarmente, a *fronteira horizontal* $\partial_H R_i$ de R_i é igual ao conjunto $\bigcup_{p \in R_i} \partial R_i \cap (\overline{V_i(p)} \setminus V_i(p))$. A fronteira vertical de \mathcal{R} é definida por $\partial_V \mathcal{R} := \bigcup_{i=1}^n \partial_V R_i$. Similarmente, definimos a fronteira horizontal de \mathcal{R} .

Definição 20 (Propriedade M). Dizemos que uma partição topológica \mathcal{R} possui a fronteira satisfazendo a propriedade M se:

- (i) $\partial R_i = \partial_V R_i \cup \partial_H R_i$ para todo $R_i \in \mathcal{R}$.
- (ii) $\overline{V_i(p)} \cap \partial R_i \subset \partial_H R_i$ para todo $R_i \in \mathcal{R}$ e todo $p \in R_i$.
- (iii) $\overline{H_i(p)} \cap \partial R_i \subset \partial_V R_i$ para todo $R_i \in \mathcal{R}$ e todo $p \in R_i$.
- (iv) $\phi[\partial_V \mathcal{R}] \subset \partial \mathcal{R}$.
- (v) $\phi^{-1}[\partial_H \mathcal{R}] \subset \partial \mathcal{R}$.

As condições (ii) e (iii) garantem uma certa regularidade de cada retângulo, enquanto (iv) e (v) requerem inclusões das fronteiras (a imagem da fronteira vertical - que é contratora - deve estar contida em $\partial \mathcal{R}$, e o mesmo para a pré-imagem da fronteira horizontal - que é expansora

e portanto contrai no passado). Agora estamos prontos para enunciar o teorema principal dessa seção.

Teorema 3. *Sejam $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um automorfismo linear hiperbólico e \mathcal{R} uma partição topológica. Se \mathcal{R} possui a fronteira satisfazendo a propriedade M e satisfazendo*

$$\begin{cases} p \in R_i \cap \phi R_j \implies \phi^{-1}H_i(p) \cap R_j \subset H_j(\phi^{-1}p) \\ p \in R_i \cap \phi^{-1}R_j \implies \phi V_i(p) \cap R_j \subset V_j(\phi p) \end{cases}$$

então \mathcal{R} é uma partição de Markov.

Demonstração. Pelo Teorema 2, basta mostrar que \mathcal{R} satisfaz a propriedade de Markov (Definição 19). Por simetria entre ϕ e ϕ^{-1} , basta mostrarmos essa propriedade para as fibras verticais. Como ϕ é induzido por uma matriz linear, é suficiente mostrar que

$$p \in R_i \cap \phi^{-1}R_j \implies \phi V_i(p) \subset R_j.$$

Por definição, a fibra vertical $V_i(p)$ é conexa e portanto $\phi V_i(p)$ também o é. É claro que $\phi V_i(p) \cap R_j \neq \emptyset$, pois $\phi V_i(p)$ e R_j ambos contêm ϕp . Por contradição, suponha que $\phi V_i(p) \not\subset R_j$. Então $\phi V_i(p) \cap R_j^c \neq \emptyset$, e daí o teorema da alfândega implica que $\phi V_i(p) \cap \partial R_j \neq \emptyset$.

Afirmamos que obteremos uma contradição se existir $q \in \mathbb{T}^2$ com $q \in \phi V_i(p) \cap \partial R_j$ e $q \in \overline{\phi V_i(p) \cap R_j}$. De fato, isso implica que

$$\begin{cases} q \in \phi V_i(p) \cap \partial R_j \subset \partial R_j \\ q \in \overline{\phi V_i(p) \cap R_j} \subseteq \overline{V_j(\phi p)} \end{cases}$$

e daí $q \in \overline{V_j(\phi p)} \cap \partial R_j \subset \partial_H R_j$, onde a última inclusão segue da condição (ii) da propriedade M. Mas então a condição (v) da propriedade M dá que $\phi^{-1}q \in \partial \mathcal{R}$. Isso é um absurdo, pois $\phi^{-1}q \in V_i(p) \subset R_i$ e $R_i \cap \partial \mathcal{R} = \emptyset$.

Resta mostrar que tal q existe. Se esse não for o caso, existe um aberto $U \supset \phi V_i(p) \cap \partial R_j$ com $U \cap \overline{\phi V_i(p) \cap R_j} = \emptyset$. Afirmamos que $\{\phi V_i(p) \cap R_j, \phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)\}$ forma uma cisão não-trivial do conjunto conexo $\phi V_i(p)$. De fato: $\circ\circ$

1. $\phi V_i(p) \cap R_j$ e $\phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)$ são abertos não-vazios na topologia induzida de $\phi V_i(p)$, pois R_j e $U \cup \overline{R_j}^c$ são abertos de \mathbb{T}^2 .
2. $\phi V_i(p) \cap R_j$ e $\phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)$ são disjuntos, pois

$$\begin{aligned} [\phi V_i(p) \cap R_j] \cap [\phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)] &= \phi V_i(p) \cap R_j \cap (U \cup \overline{R_j}^c) \\ \underbrace{[\phi V_i(p) \cap R_j \cap U]}_{=\emptyset} \cup \underbrace{[\phi V_i(p) \cap R_j \cap \overline{R_j}^c]}_{=\emptyset} &= \emptyset. \end{aligned}$$

3. A união de $\phi V_i(p) \cap R_j$ e $\phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)$ é igual $\phi V_i(p)$, pois

$$\begin{aligned} [\phi V_i(p) \cap R_j] \cup [\phi V_i(p) \cap (U \cup \overline{R_j}^c)] &= [\phi V_i(p) \cap U] \cup [\phi V_i(p) \cap R_j] \cup [\phi V_i(p) \cap \overline{R_j}^c] \\ &= [\phi V_i(p) \cap U] \cup [\phi V_i(p) \cap (\partial R_j)^c] \supset [\phi V_i(p) \cap \partial R_j] \cup [\phi V_i(p) \cap (\partial R_j)^c] \\ &= \phi V_i(p) \cap [\partial R_j \cup (\partial R_j)^c] = \phi V_i(p) \cap \mathbb{T}^2 = \phi V_i(p), \end{aligned}$$

onde na primeira inclusão usamos que $U \supset \phi V_i(p) \cap \partial R_j$ e portanto $\phi V_i(p) \cap U \supset \phi V_i(p) \cap \partial R_j$.

Isso contradiz a conexidade de $\phi V_i(p)$, o que conclui a prova da existência de q , e também do teorema. \square

A condição em destaque no enunciado é chamada *preservação dos alinhamentos*. Só trabalharemos com partições que cumprem essa condição. Ela será, daqui para frente, subentendida e portanto omitida.

4.2 Um resultado preliminar

Nesta seção, vamos estabelecer um resultado preliminar que será útil na demonstração do resultado principal da dissertação. Ele mostra que toda matriz hiperbólica 2×2 é conjugada a uma matriz com todas as entradas não negativas ou todas as entradas não positivas. Relembre da Seção 3.2 que se $A \in SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ então A possui dois autovalores λ, μ tais que $0 < |\mu| < 1 < |\lambda|$. O autovalor λ define a direção expansora e o autovalor μ define a direção contratora. Iniciamos a sessão com um critério geométrico para que uma matriz 2×2 tenha entradas não negativas. No que segue, consideramos o primeiro quadrante como a região fechada do plano definida por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$. As definições de segundo, terceiro e quarto quadrantes são semelhantes.

Lema 5. *Seja $P \in SL_2^\pm(\mathbb{Z})$ e suponha que:*

- (i) *P possui um autovalor $\lambda > 1$ com autodireção $\bar{\ell}_\lambda$ no primeiro e terceiro quadrantes.*
- (ii) *P possui um autovalor $\mu < 1$ com autodireção $\bar{\ell}_\mu$ no segundo e quarto quadrantes.*

Então todas as entradas de P são não negativas.

Demonstração. Escreva

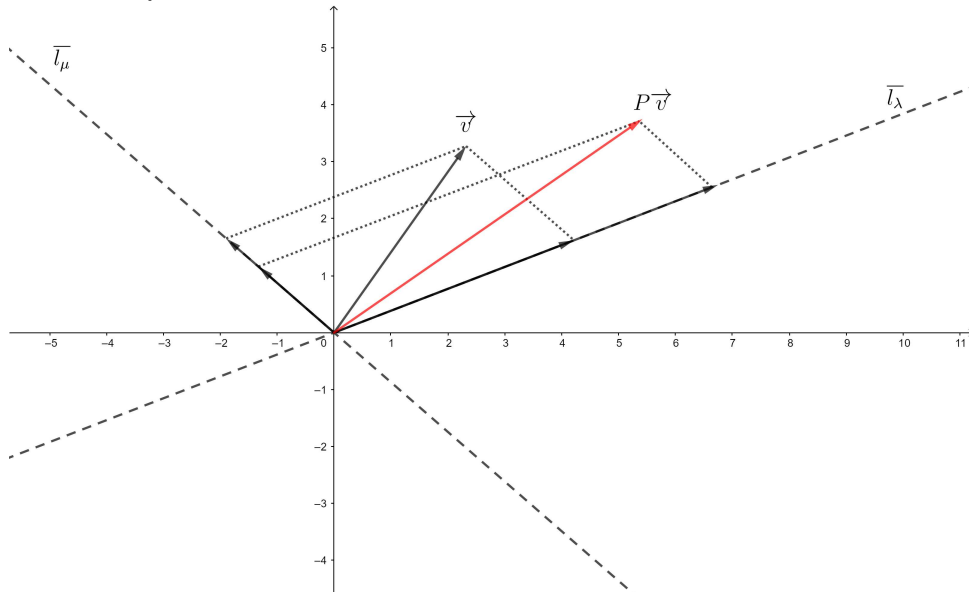
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Temos $P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$ e portanto as entradas p_{11}, p_{21} são não negativas se e somente se $P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertence ao primeiro quadrante. Similarmente, p_{12}, p_{22} são não negativas se e somente se $P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertence ao primeiro quadrante. Desse modo, as entradas de P são não negativas se e somente se a imagem do primeiro quadrante por P está contida no primeiro quadrante. Afirmamos que isso é garantido se P satisfizer as condições do enunciado. Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\mu > 0$.

Vamos mostrar que nesse caso todas as entradas de P são de fato positivas. Geometricamente, isso é fácil de provar. Por ser linear, P leva retas passando pela origem em retas passando pela origem. Como P é hiperbólica, se ℓ é uma tal reta então $P\ell$ fica mais próxima de $\bar{\ell}_\lambda$. Melhor ainda: como $\lambda, \mu > 0$ então $P\ell$ pertence ao cone determinado por ℓ e $\bar{\ell}_\lambda$, veja a Figura 17.

Figura 17 – Caso 1: $\mu > 0$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em particular, a imagem do eixo x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes, e o mesmo se aplica ao eixo y . Por completude, damos também uma prova algébrica desse fato.

Escreva

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v + w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix},$$

onde $v \in \bar{\ell}_\lambda$ com $v_1, v_2 > 0$ e $w \in \bar{\ell}_\mu$. Então

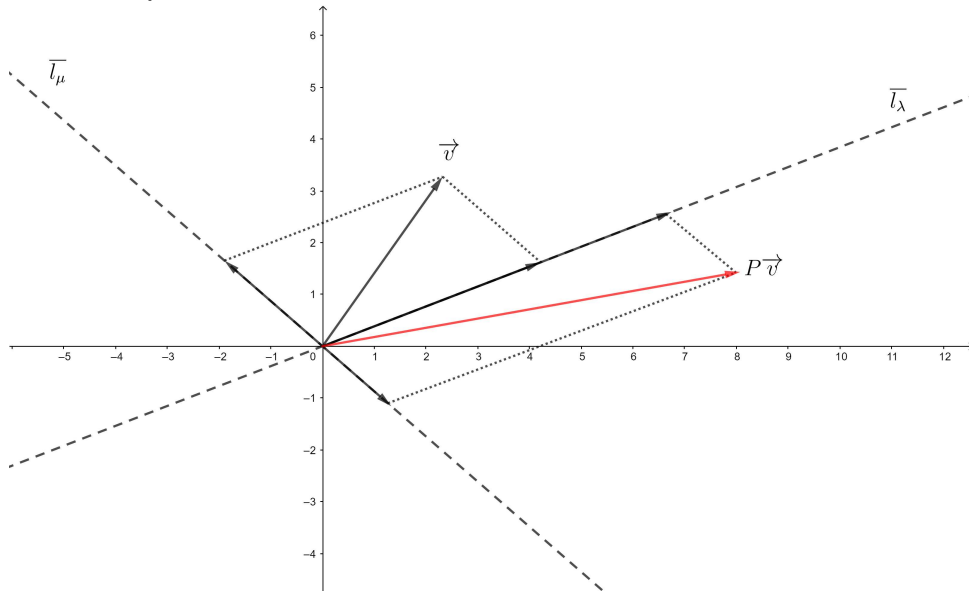
$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 - v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - \mu)v_1 + \mu \\ (\lambda - \mu)v_2 \end{bmatrix},$$

que tem as duas entradas positivas. A mesma argumentação prova que $P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem as duas entradas positivas.

CASO 2: $\mu < 0$.

Esse caso é mais delicado, pois envolve uma reflexão com respeito a $\bar{\ell}_\lambda$, veja a figura 18.

Figura 18 – Caso 2: $\mu < 0$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Começamos mostrando o fato para $(0, 1)$. Defina os pontos:

$$A = (0, 1)$$

B = interseção entre $\bar{\ell}_\lambda$ e a reta paralela a $\bar{\ell}_\mu$ passando por A

$$O = (0, 0)$$

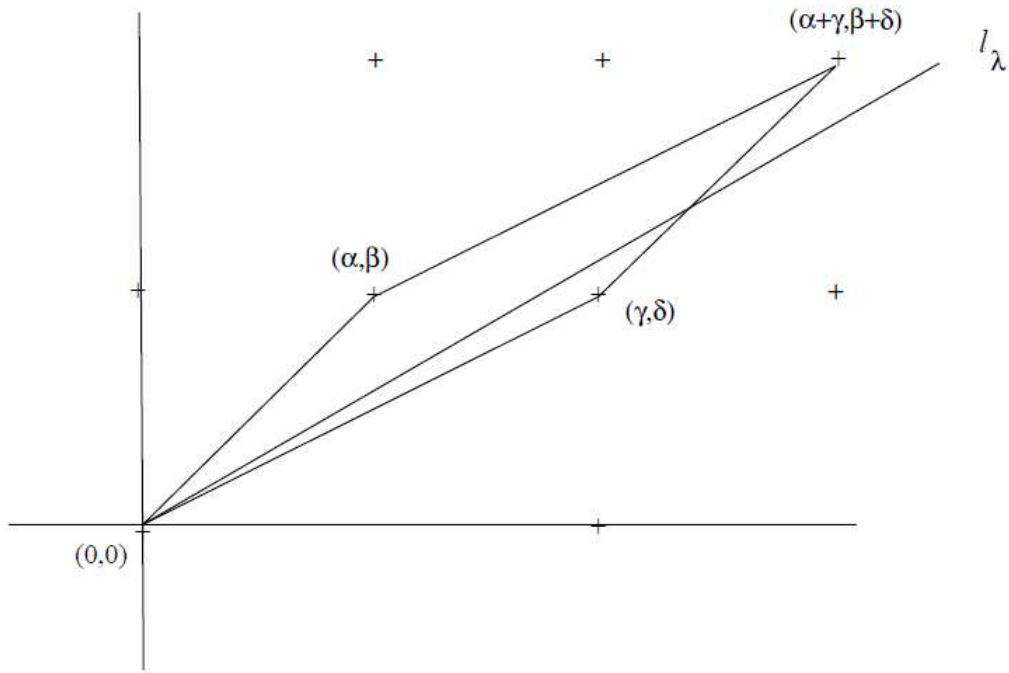
$$A' = PA = P(0, 1)$$

$$B' = PB$$

O' = interseção entre $\bar{\ell}_\lambda$ e a reta vertical passando por A' .

- (i) O interior do cone positivo definido pelas semirretas \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{OY} intersecta ℓ_λ e não intersecta ℓ_μ .
- (ii) O paralelogramo fechado de vértices $O, X, Y, X+Y$ não contém nenhum outro ponto do reticulado além de seus vértices.

Figura 20 – O paralelogramo de vértices $O, X, Y, X+Y$



Fonte: (ADLER, 1998), p. 37.

Veja a figura acima. Para ver que essa escolha pode ser feita, aplicamos um argumento iterativo. Começamos observando que podemos escolher X, Y satisfazendo (i). De fato, como o coeficiente angular m_λ de ℓ_λ é um irracional positivo, podemos tomar racionais positivos $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ arbitrariamente próximos de m_λ com $\frac{p}{q} < m_\lambda < \frac{p'}{q'}$. Daí, $X = (q, p)$ e $Y = (q', p')$ satisfazem (i). Infelizmente, (ii) não é necessariamente satisfeita para essa escolha inicial. Para estabelecer essa segunda propriedade, vamos aplicar uma sequência de operações que a cada passo gera um novo par de pontos satisfazendo (i) para tal que a área do paralelogramo definido por eles diminui estritamente. Notando que essas operações não poderão ser aplicadas indefinidamente, no final obteremos um par de pontos satisfazendo (i) e (ii). Para isso, escreva $Z = X + Y$, seja π o paralelogramo de vértices O, X, Y, Z , e seja S sua área. Como os vértices de π estão em \mathbb{Z}^2 , então S é inteiro. Isso pode ser visto, por exemplo, pela fórmula de área de Gauss (*shoelace formula*). Se (ii) é satisfeita, a escolha está completa. Se (ii) não está satisfeita, então existe algum ponto em $\pi \cap \mathbb{Z}^2$ diferente dos vértices. Seja Q um deles. Temos alguns casos a considerar.

Em qualquer deles, mostraremos como trocar X, Y por pontos X', Y' de modo que a área do novo paralelogramo é $S' < S$.

- $Q \in \overline{OX}$: faça $X' = Q$ e $Y' = Y$.
- $Q \in \overline{OY}$: faça $X' = X$ e $Y' = Q$.
- $Q \in \overline{YZ}$: nesse caso temos que $Q - Y$ é um ponto de \mathbb{Z}^2 em \overline{OX} e portanto podemos aplicar o primeiro caso.
- $Q \in \overline{XZ}$: similarmente, $Q - X$ é um ponto de \mathbb{Z}^2 em \overline{OY} e portanto podemos aplicar o segundo caso.
- Q está no interior de π : se Q, X estão no mesmo semiplano determinado por ℓ_λ , faça $X' = Q$ e $Y' = Y$. Caso contrário, faça $X' = X$ e $Y' = Q$.

Em qualquer dos casos, o novo paralelogramo π' está estritamente contido em π , e portanto $S' < S$. Como todas as áreas são inteiras, esse processo para. Quando ele para, obtemos as condições (i) e (ii).

Afirmamos que a condição (ii) acima implica que $S = 1$. Para isso, aplicamos o seguinte teorema.

Teorema 5 (Pick). *Seja π um polígono com vértices em \mathbb{Z}^2 e área S . Se π contém i pontos de \mathbb{Z}^2 em seu interior e b pontos de \mathbb{Z}^2 em seu bordo, então*

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

No nosso caso, temos $i = 0$ e $b = 4$, donde $S = 1$. Podemos agora concluir a prova do teorema. Considere a transformação linear

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

e seja $P = C^{-1}AC$. A matriz C leva $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$, logo C leva o quadrado $[0, 1]^2$ em π . Isso implica que C possui determinante igual a 1, isto é, $C \in SL_2(\mathbb{Z})$. Para concluir o teorema, basta checar que P satisfaz as condições do Lema 5. Por ser conjugada a A , a matriz P possui autovalores λ, μ e autodireções $\bar{\ell}_\lambda = C^{-1}\ell_\lambda$ e $\bar{\ell}_\mu = C^{-1}\ell_\mu$ respectivamente. De fato, se $v \in \bar{\ell}_\lambda$ então $Cv \in \ell_\lambda$ e portanto $ACv = \lambda Cv$, donde

$$C^{-1}ACv = C^{-1}(\lambda Cv) = \lambda C^{-1}Cv = \lambda v.$$

O mesmo vale para μ . A reta $\bar{\ell}_\lambda$ pertence ao cone definido pelas retas $C^{-1}\overrightarrow{OX}$ e $C^{-1}\overrightarrow{OY}$, que por construção são os eixos x e y . Assim, $\bar{\ell}_\lambda$ pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Fazendo o mesmo para $\bar{\ell}_\mu$, concluímos a prova do teorema. \square

4.3 Construção da partição de Markov

Seguimos agora para o teorema central dessa dissertação.

Teorema 6. *Seja ϕ um automorfismo linear hiperbólico de \mathbb{T}^2 induzido por uma matriz $A \in SL_2^\pm(\mathbb{Z})$, e seja*

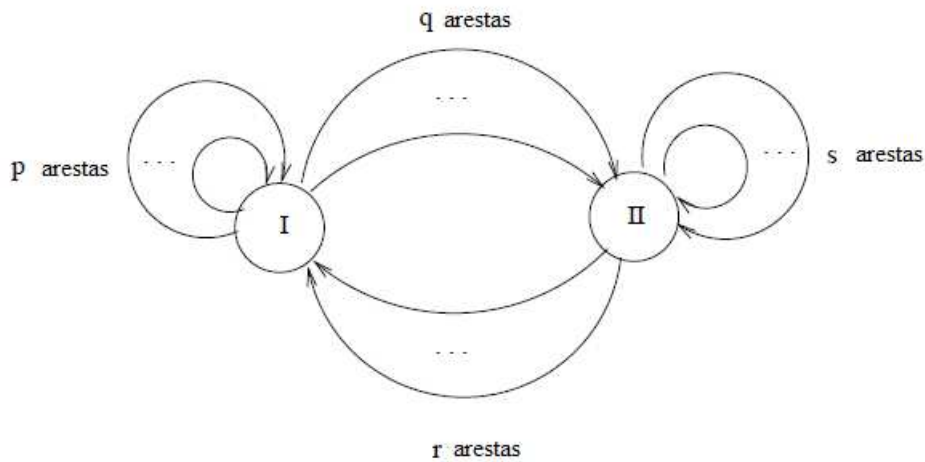
$$P = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

a matriz dada pelo Teorema 4. Se $p, q, r, s > 0$, então ϕ possui uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ com dois paralelogramos abertos tal que seu grafo orientado associado contém:

- p arestas de R_1 para R_1 ;
- q arestas de R_1 para R_2 ;
- r arestas de R_2 para R_1 ; e
- s arestas R_2 para R_2

A Figura 21 representa o grafo orientado associado a \mathcal{R} .

Figura 21 – Grafo orientado associado à partição de Markov \mathcal{R} .



A prova desse resultado será dividida em quatro casos, a depender do sinal dos autovalores de A . Primeiramente, discutiremos fatos gerais que serão úteis em todos os casos. Começamos fazendo algumas reduções. Uma partição de Markov para ϕ induz uma partição de Markov para o automorfismo $-\phi$ definido por $-A$ e vice-versa. De fato, se ι é o automorfismo associado à matriz $-\text{Id}$, então \mathcal{R} é partição de Markov para ϕ se e somente se $\iota\mathcal{R}$ é partição de Markov para $-\phi$. Assim, tratamos os detalhes apenas dos casos em que $\lambda > 0$ e obteremos, a partir da observação acima, as partições de Markov para os casos em que $\lambda < 0$. Feita essa observação, no que segue assumimos que $\lambda > 0$. Do Teorema 4, temos então que $AC = CP$, onde $A, C, P \in SL_2^\pm(\mathbb{Z})$. Sejam π, ψ os automorfismos lineares definidos por C, P respectivamente. Como observado na Seção 3.1, temos $\phi \circ \pi = \pi \circ \psi$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

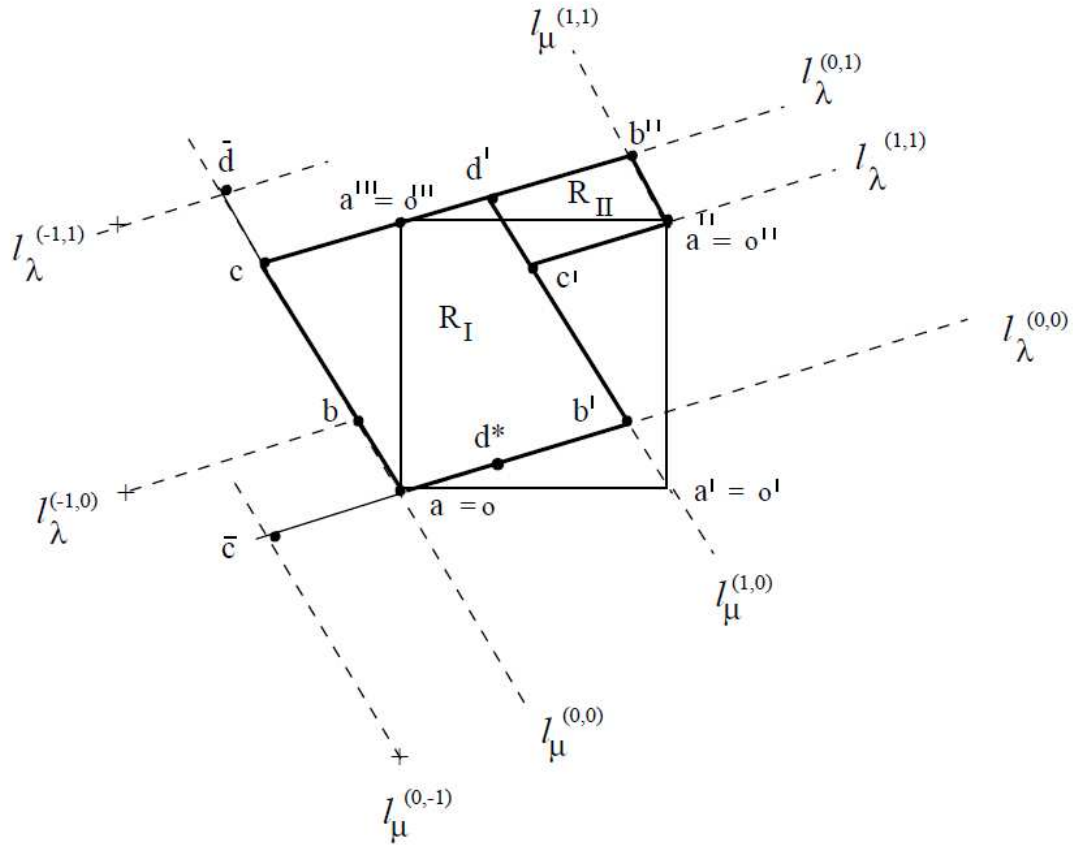
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Portanto, \mathcal{R} é partição de Markov para ϕ satisfazendo o Teorema 6 se e somente se $\pi^{-1}\mathcal{R}$ é partição de Markov para ψ satisfazendo o Teorema 6. Desse modo, basta provarmos o Teorema 6 para ψ , cuja matriz é P .

Daqui em diante, denotamos as autodireções de P por ℓ_λ e ℓ_μ (ou seja, não utilizaremos mais as barras como na seção anterior). Ademais, chamamos a direção de ℓ_λ de horizontal e a de ℓ_μ de vertical. Dado um ponto P do plano, seja ℓ_λ^P (respectivamente ℓ_μ^P) a reta passando pelo ponto P que é paralela à reta ℓ_λ (respectivamente ℓ_μ). Em particular, $\ell_\lambda^{(0,0)} = \ell_\lambda$ e $\ell_\mu^{(0,0)} = \ell_\mu$. Defina então os seguintes pontos do plano (veja a figura 22):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (0,0) \\ a' = (1,0) \\ a'' = (1,1) \\ a''' = (0,1) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} b = \ell_\mu \cap \ell_\lambda^{(-1,0)} \\ b' = \ell_\mu^{(1,0)} \cap \ell_\lambda \\ b'' = \ell_\mu^{(1,1)} \cap \ell_\lambda^{(0,1)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c = \ell_\mu \cap \ell_\lambda^{(0,1)} \\ c' = \ell_\mu^{(1,0)} \cap \ell_\lambda^{(1,1)} \\ \bar{c} = \ell_\mu^{(0,-1)} \cap \ell_\lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d' = \ell_\mu^{(1,0)} \cap \ell_\lambda^{(0,1)} \\ \bar{d} = \ell_\mu \cap \ell_\lambda^{(-1,1)} \\ d^* = d' - (0,1) \end{array} \right\}$$

Figura 22 – Pontos e retas considerados.

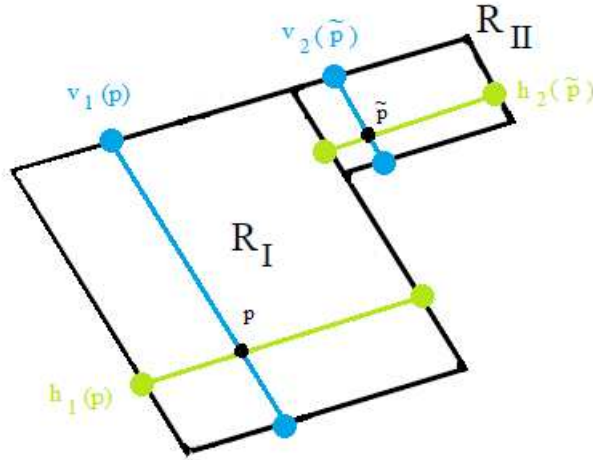


Fonte: (ADLER, 1998), p. 42.

Obtemos assim um domínio fundamental formado pelo polígono $ab'c'a''b''c$. Alguns comentários sobre a notação utilizada: pontos com as mesmas letras são equivalentes com respeito à relação \sim ; pontos em ℓ_μ não possuem apóstrofo e estão organizados em ordem alfabética; pontos em $\ell_\mu^{(1,0)}$ possuem um apóstrofo; pontos em $\ell_\mu^{(1,1)}$ possuem dois apóstrofes; pontos fora do domínio fundamental possuem uma barra. O domínio fundamental $ab'c'a''b''c$ se decompõe em dois paralelogramos $ab'd'c$ e $c'a''b''d'$. Sejam \tilde{R}_1 e \tilde{R}_2 os interiores desses paralelogramos, e sejam R_1 e R_2 as projeções desses conjuntos em \mathbb{T}^2 . Assim, aplicamos o automorfismo ψ para os conjuntos R_1, R_2 e a transformação linear P para os conjuntos \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 . A matriz P , sendo hiperbólica, estica cada fronteira horizontal de \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 e contrai cada fronteira vertical.

Agora, passamos a analisar os casos. Em cada um deles, checamos as condições do Teorema 3. Começamos observando que, como R_1, R_2 são paralelogramos abertos com lados paralelos às autodireções de P , temos $\overline{V_i(p)} \cap \partial R_i \subset \partial_H R_i$ e $\overline{H_i(p)} \cap \partial R_i \subset \partial_V R_i$.

Figura 23 – $H_1(p), V_1(p)$ para o ponto $p \in R_I$ e $H_2(\tilde{p}), V_2(\tilde{p})$ para o ponto \tilde{p} . Repare que a intersecção das fibras horizontais com a fronteira de cada paralelogramo está contida na fronteira vertical, e similarmente para as fibras verticais.



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, resta checar que a fronteira tem a propriedade M.

4.3.1 Caso 1: $\lambda > 0$ e $\mu > 0$

PARTE I: Partição de Markov

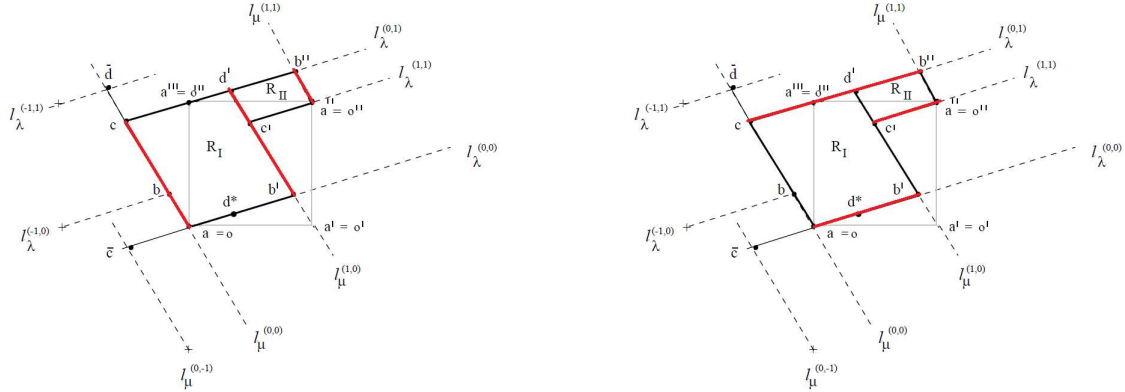
Divida ∂R_1 e ∂R_2 em duas partes horizontais e verticais, da seguinte maneira:

- $\partial R_1 = \partial_V R_1 \cup \partial_H R_1$, onde $\partial_V R_1 = ac \cup b'd'$ e $\partial_H R_1 = ab' \cup cd'$.
- $\partial R_2 = \partial_V R_2 \cup \partial_H R_2$, onde $\partial_V R_2 = c'd' \cup a''b''$ e $\partial_H R_2 = c'a'' \cup d'b''$.

Afirmamos que, no toro, $\partial_H \mathcal{R}$ e $\partial_V \mathcal{R}$ formam dois segmentos transversais se intersectando na origem:

$$\partial_H \mathcal{R} = \overline{cb'} \text{ e } \partial_V \mathcal{R} = \overline{ad'}$$

Figura 24 – $\partial_H \mathcal{R}$ e $\partial_V \mathcal{R}$, nesta ordem, destacados em vermelho.



Fonte: (ADLER, 1998), p. 42. Modificada pelo autor.

Para provar isso, usaremos a notação \sim para identificar segmentos de \mathbb{R}^2 que são equivalentes na relação que define \mathbb{T}^2 . Começamos com a fronteira horizontal. Da figura acima, vemos que $cb'' \sim \bar{c}b'$ e $c'a'' \sim \bar{c}a$. Assim, $\partial_H \mathcal{R} = \bar{c}b'$. Para a fronteira vertical, temos $b'd' \sim b\bar{d}$ e $a''b'' \sim ab$ e portanto $\partial_V \mathcal{R} = ab \cup b\bar{d} = a\bar{d}$. Como os autovalores de P são positivos, temos que $P(\bar{c}b') \supset \bar{c}b'$ e $P(a\bar{d}) \subset a\bar{d}$. Isso nos dá que $\psi^{-1}(\partial_H \mathcal{R}) \subset \partial_H \mathcal{R} \subset \partial \mathcal{R}$ e $\psi(\partial_V \mathcal{R}) \subset \partial_V \mathcal{R} \subset \partial \mathcal{R}$. Pelas figuras acima, vemos que valem as propriedades (ii) e (iii) da Propriedade M. Também, pela linearidade de P , os alinhamentos são preservados. Pelo Teorema 3, concluímos que $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ é uma partição de Markov para ψ .

PARTE II: Grafo orientado

Lema 6. Denote por a_{ij} o número de paralelogramos disjuntos na intersecção $\psi(R_i) \cap R_j$. Então

a_{i1} = número de retas verticais $x = 0, x = 1, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$

a_{i2} = número de retas horizontais $y = 1, y = 2, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$.

Em particular:

a_{11} = coordenada x de $P(1,0) = p$

a_{12} = coordenada y de $P(1,0) = q$

a_{21} = coordenada x de $P(0,1) = r$

a_{22} = coordenada y de $P(0,1) = s$

Demonstração. Para demonstrar esse lema, devemos entender como $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$ intersectam os translados inteiros de \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 em \mathbb{R}^2 . Começamos observando algumas propriedades geométricas das interseções de $P(\tilde{R}_i)$ com translados de \tilde{R}_j . A primeira é que, como P é linear e as fronteiras dos paralelogramos são paralelas às autodireções, cada interseção é também um paralelogramo aberto. Mais ainda, as projeções em \mathbb{T}^2 dessas interseções são disjuntas duas a duas, porque o fecho de $P(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)$ é também um domínio fundamental para \mathbb{T}^2 , pelo Lema 4. Agora obtemos mais duas propriedades sobre tais interseções, que decorrem da propriedade de Markov. Em primeiro lugar, esse cruzamento ocorre completamente da fronteira vertical esquerda até a fronteira vertical direita do translado de \tilde{R}_j , por conta da propriedade M. Ademais, nenhum ponto da interseção pertence à fronteira horizontal do translado de \tilde{R}_j , pois senão a projeção de um desses pontos daria origem a um ponto do toro $p \in \partial_H \mathcal{R}$ com $\psi^{-1}(p) \in R_i$, contrariando a inclusão $\psi^{-1}(\partial_H \mathcal{R}) \subset \partial_H \mathcal{R}$ (relembre que R_1, R_2 são abertos e portanto não intersectam $\partial_H \mathcal{R}$).

Devemos agora identificar $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$. Como o lado direito de \tilde{R}_1 e esquerdo de \tilde{R}_2 estão sobre a reta $\ell_\mu^{(1,0)}$ e o lado direito de \tilde{R}_2 está sobre a reta $\ell_\mu^{(1,1)}$, consideramos os pontos de coordenadas inteiras $\tilde{a} = Pa' = (p, q)$ e $\hat{a} = Pa'' = (p+r, q+s)$ e os seguintes translados de b e c (veja a figura 25):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{b} = b + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = b' + \begin{bmatrix} p-1 \\ q \end{bmatrix} \in \ell_\mu^{\tilde{a}} \\ \tilde{c} = c + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = c' + \begin{bmatrix} p-1 \\ q \end{bmatrix} \in \ell_\mu^{\tilde{a}} \\ \hat{b} = b + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix} = b'' + \begin{bmatrix} p+r-1 \\ q+s-1 \end{bmatrix} \in \ell_\mu^{\hat{a}}. \end{array} \right.$$

Afirmamos que a fronteira vertical de $P(\tilde{R}_1)$ está contida em $ab \cup \tilde{a}\tilde{b}$ e a fronteira vertical de $P(\tilde{R}_2)$ está contida em $\tilde{a}\tilde{b} \cup \hat{a}\hat{b}$, como na figura 25. Provamos a primeira afirmação em duas partes, verificando que a fronteira vertical direita de $P(\tilde{R}_1)$ está contida em $\tilde{a}\tilde{b}$ e a esquerda em ab , da seguinte maneira:

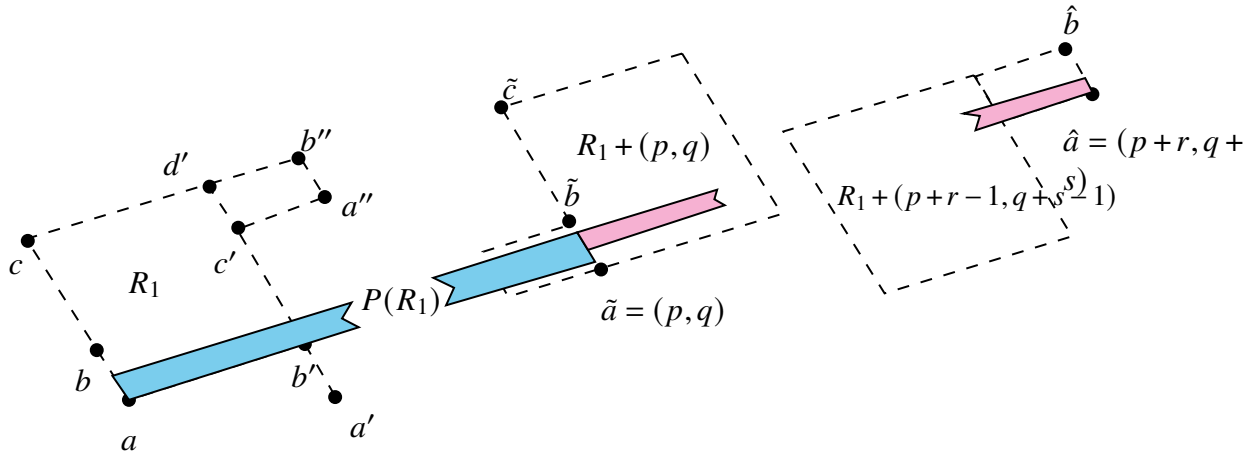
- Como $Pa' = \tilde{a}$ e $\mu > 0$, o ponto Pb' pertence à semirreta $\overrightarrow{\tilde{a}\tilde{b}}$. Seja $x = |ab| = |a'b'| = |\tilde{a}\tilde{b}| = |\hat{a}\hat{b}|$. Como $\mu < 1$, o comprimento do segmento $P(a'b')$ é menor que x e portanto $Pb' \in \tilde{a}\tilde{b}$. Mas então temos também que $Pd' \in \tilde{a}\tilde{b}$, pois caso contrário $P(\tilde{R}_1)$ intersectaria

a fronteira horizontal superior do transladado $\tilde{R}_2 + (p-1, q-1)$, o que não pode ocorrer pelo parágrafo anterior.

- Do exposto acima, obtemos em particular que o comprimento de $P(a'd')$ é menor que x . Como $|a\bar{d}| = |a'd'|$, o comprimento de $P(a\bar{d})$ também é menor que x e portanto, lembrando que a é ponto fixo e $\mu > 0$, concluímos que $P\bar{d} \in ab$.

Assim, $P(\tilde{R}_1)$ começa intersectando \tilde{R}_1 e termina intersectando o transladado $\tilde{R}_2 + (p-1, q-1)$.

Figura 25 – Representação geométrica de $P(\tilde{R}_1)$ em azul e $P(\tilde{R}_2)$ em rosa.



Fonte: (ADLER, 1998), p. 46. Modificada pelo autor.

Mostraremos agora que a fronteira vertical de $P(\tilde{R}_2)$ está contida em $\tilde{a}\tilde{b} \cup \hat{a}\hat{b}$. A fronteira vertical esquerda de $P(\tilde{R}_2)$ está contida na fronteira vertical direita de $P(\tilde{R}_1)$, que pelo exposto está contida em $\tilde{a}\tilde{b}$. Resta, portanto, provar que a fronteira vertical direita de $P(\tilde{R}_2)$ está contida em $\hat{a}\hat{b}$. Ora, mas isso é fácil: como por definição temos $Pa'' = \hat{a}$ e $P(a''b'')$ tem comprimento menor que x , então $P(b'')$ pertence ao segmento $\hat{a}\hat{b}$. Portanto, $P(\tilde{R}_2)$ começa intersectando o transladado $R_1 + (p, q)$ e termina intersectando o transladado $\tilde{R}_2 + (p+r-1, q+s-1)$.

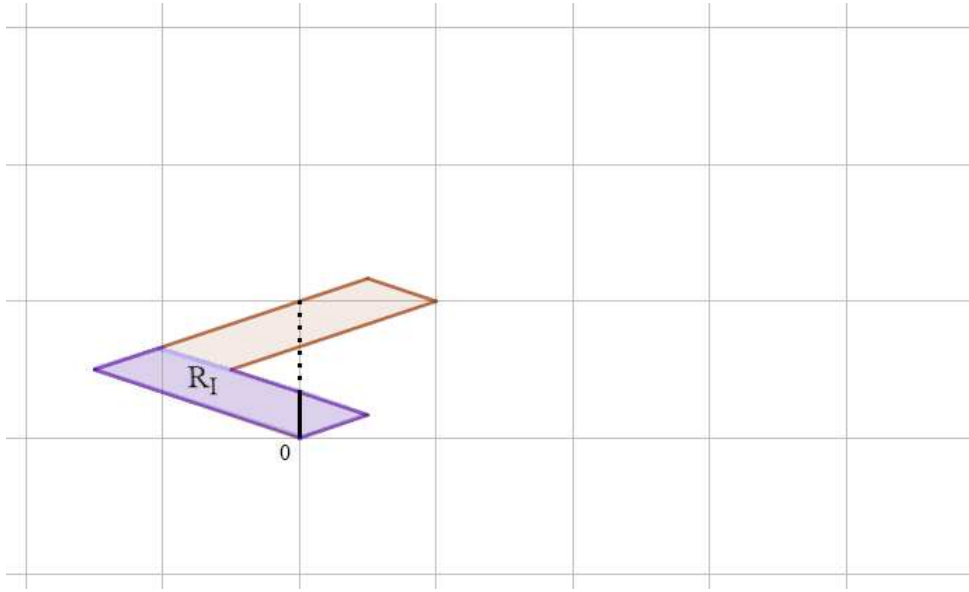
Calculamos agora a quantidade de interseções, como afirmado no lema. Começamos assumindo que o ângulo entre ℓ_μ e o eixo vertical é menor que 45° . Nesse caso, o domínio fundamental construído é como na figura 22, onde o segmento aberto aa''' está contido em \tilde{R}_1 . Mais ainda: aa''' está contido na reta vertical $x = 0$, com a na fronteira horizontal inferior de \tilde{R}_1 e a''' na fronteira horizontal superior de \tilde{R}_1 . Pela propriedade de Markov, toda interseção entre $P(\tilde{R}_i)$ e um transladado $\tilde{R}_1 + (m, n)$ é um paralelogramo que começa na fronteira vertical esquerda de $\tilde{R}_1 + (m, n)$ e termina em sua fronteira vertical direita, e portanto necessariamente intersecta o segmento transladado $aa''' + (m, n)$, que está contido na reta vertical $x = m$. Reciprocamente, se

$P(\tilde{R}_i)$ possui um ponto (m, y) com $n < y < n+1$, então $P(\tilde{R}_i)$ intersecta o transladado $\tilde{R}_1 + (m, n)$. Noutras palavras: $P(\tilde{R}_i) \cap (\tilde{R}_1 + (m, n)) \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_i) \cap \{x = m\} \neq \emptyset$. Obtemos assim da figura 25 que:

- $P(\tilde{R}_1)$ intersecta as retas verticais $x = 0, x = 1, \dots, x = p - 1$, logo $a_{11} = p$.
- $P(\tilde{R}_2)$ intersecta as retas verticais $x = p, x = p + 1, \dots, x = p + r - 1$, logo $a_{21} = r$.

Afirmamos que a mesma conclusão vale quando o ângulo entre ℓ_μ e o eixo vertical é maior que 45° , em cujo caso o segmento aberto aa''' não está contido em \tilde{R}_1 , veja a figura 26.

Figura 26 – Quando o ângulo entre ℓ_μ e o eixo vertical é maior que 45° , o segmento aberto aa''' não está contido em \tilde{R}_1 .



Fonte: elaborada pelo autor

Para obter o mesmo resultado, observamos que $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$ terminam em translados de \tilde{R}_2 e que \tilde{R}_2 intersecta a reta $x = 0$ em um segmento aberto $a'''e$. Desse modo:

- Se $P(\tilde{R}_i)$ intersecta $\tilde{R}_1 + (m, n)$ cruzando o segmento $b'c' + (m, n)$, então $P(\tilde{R}_i)$ deve se prolongar mais e intersectar $ae + (m, n)$, que é um segmento da reta vertical $x = m$.
- Se $P(\tilde{R}_i)$ intersecta $\tilde{R}_1 + (m, n)$ cruzando o segmento $c'd' + (m, n)$, então $P(\tilde{R}_i)$ deve se prolongar mais e intersectar $a'''e + (m, n)$, que é um segmento da reta vertical $x = m$.

Essas são as duas possibilidades de interseção entre $P(\tilde{R}_i)$ intersecta $\tilde{R}_1 + (m, n)$, pois se $P(\tilde{R}_i)$ intersecta os dois segmentos $b'c' + (m, n)$ e $c'd' + (m, n)$ então $P(\tilde{R}_i)$ contém a fronteira horizontal inferior de $\tilde{R}_2 + (m, n)$, o que contraria a propriedade de Markov. Reciprocamente, se $P(\tilde{R}_i)$ contém um ponto (m, y) com $n < y < n+1$ então $P(\tilde{R}_i)$ intersecta $\tilde{R}_1 + (m, n)$. Isso conclui o cálculo de a_{11} e a_{21} .

A mesma ideia pode ser feita para calcular a quantidade de interseções entre $P(\tilde{R}_i)$ e translados de \tilde{R}_2 . Agora, o caso de fácil análise é quando o ângulo entre ℓ_μ e o eixo vertical é maior que 45° , pois então o segmento aberto $a''a'''$ está contido em \tilde{R}_2 , com a'' na fronteira horizontal inferior de \tilde{R}_2 e a''' na fronteira horizontal superior. Assim, $P(\tilde{R}_1) \cap (\tilde{R}_2 + (m, n)) \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_1) \cap \{y = n\} \neq \emptyset$. Obtemos assim da figura 25 que:

- $P(\tilde{R}_1)$ intersecta as retas horizontais $y = 1, y = 2, \dots, y = q$, logo $a_{12} = q$.
- $P(\tilde{R}_2)$ intersecta as retas horizontais $y = q + 1, y = q + 2, \dots, y = q + s$, logo $a_{22} = s$.

Quando o ângulo entre ℓ_μ e o eixo vertical é menor que 45° , argumentamos como acima para concluirmos que o mesmo resultado vale (usando, mais uma vez, que $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$ terminam em translados de \tilde{R}_2). \square

4.3.2 Caso 2: $\lambda > 0$ e $\mu < 0$

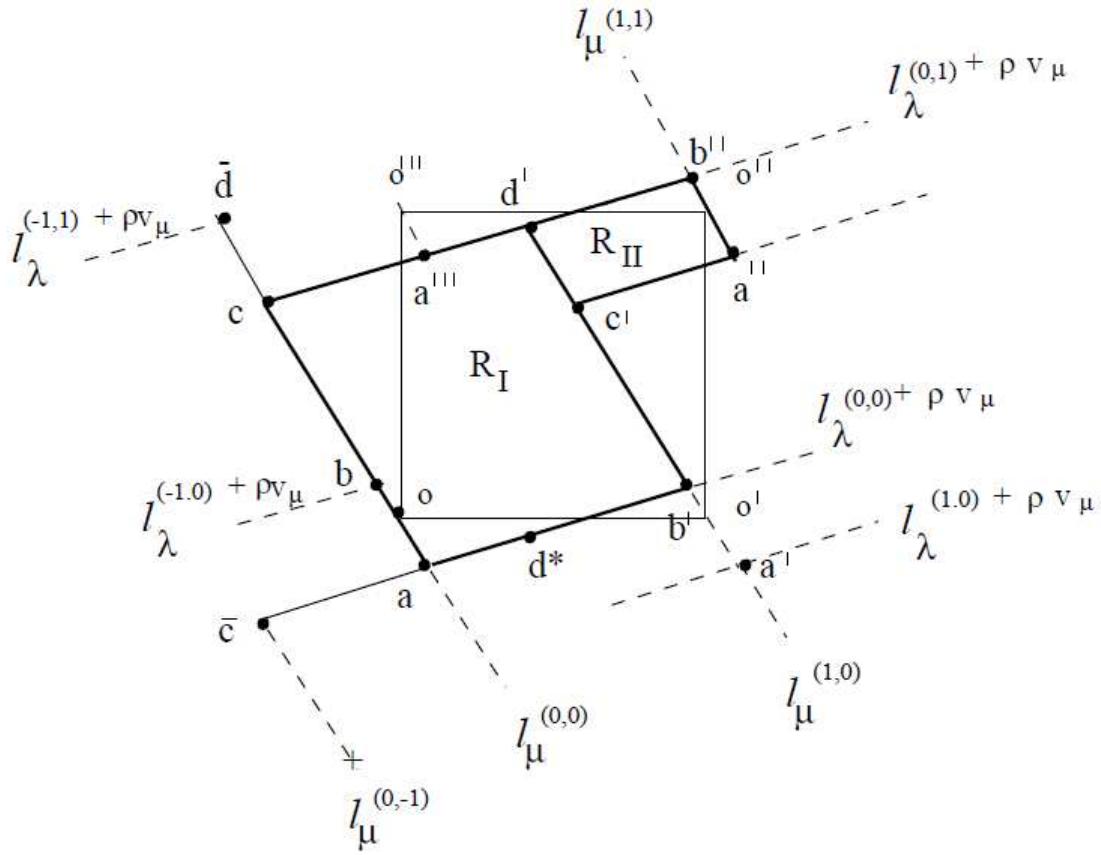
PARTE I: Partição de Markov

Como $\mu < 0$, há uma reflexão na autodireção de μ . Se considerarmos o domínio fundamental construído na seção anterior, então $P(ac)$ não está mais contido em ac . Para resolver essa problema, sendo v_μ o autovetor unitário de μ com a mesma orientação de \bar{d} , vamos transladar o domínio fundamental na direção de ℓ_μ por ρv_μ para $\rho < 0$ até que essa propriedade seja válida. Mais especificamente, $\rho < 0$ é escolhido tal que $P(\bar{d} + \rho v_\mu) = \rho v_\mu$. A existência de ρ é garantida por continuidade, mas como precisaremos estimar seu valor vamos calculá-lo diretamente. Denotando o comprimento do segmento $a\bar{d}$ por $|a\bar{d}|$, o vetor $\bar{d} + \rho v_\mu$ tem comprimento $|a\bar{d}| + \rho$ e portanto $P(\bar{d} + \rho v_\mu)$ tem comprimento $|\mu|(|a\bar{d}| + \rho)$. Assim, ρ é definido pela igualdade

$$|\mu|(|a\bar{d}| + \rho) = -\rho \iff \rho = -\frac{|\mu|}{1 + |\mu|} |a\bar{d}|.$$

Relembre do caso 1 que se x é o comprimento do segmento ab então $|\mu| \cdot |a\bar{d}| < x$. Da igualdade acima, segue que $|\rho|(1 + |\mu|) < x$ e em particular obtemos que $|\rho| < x$, de modo que a imagem do segmento ab pela translação contém a origem. Mantendo a mesma notação da seção anterior para os pontos do domínio fundamental transladado, concluimos que a configuração de tal domínio fundamental é dada pela figura 27. Relembre que, por definição, temos $P\bar{d} = a$.

Figura 27 – Domínio fundamental transladado na direção de ℓ_μ .



Fonte: (ADLER, 1998), p. 48.

Vamos mostrar que $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ é uma partição de Markov para ψ . Como na seção anterior, devemos provar que $\psi(\partial_V \mathcal{R}) \subset \partial_V \mathcal{R}$ e $\psi^{-1}(\partial_H \mathcal{R}) \subset \partial_H \mathcal{R}$. A prova dessas inclusões é mais complicada, pois a não é mais um ponto fixo de P , mas ainda temos $\partial_H \mathcal{R} = \bar{c}b'$ e $\partial_V \mathcal{R} = a\bar{d}$. Pela definição de ρ , temos $P(a\bar{d}) \subset a\bar{d}$ e portanto $\psi(\partial_V \mathcal{R}) \subset \partial_V \mathcal{R}$. Para a outra inclusão, escreva $Pd^* = \tilde{a}$, isto é,

$$\tilde{a} = Pd^* = P\bar{d} + P \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a + \begin{bmatrix} p-r \\ q-s \end{bmatrix}$$

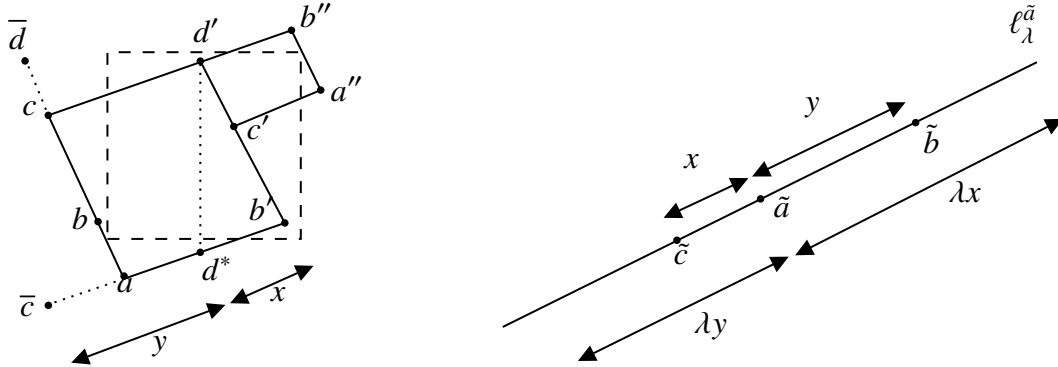
é um transladado de a . Defina também

$$\tilde{b} = b' + \begin{bmatrix} p-r \\ q-s \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{c} = \bar{c} + \begin{bmatrix} p-r \\ q-s \end{bmatrix},$$

que são os transladados de b' e \bar{c} respectivamente pela mesma translação, veja a figura 28. Observe que $\tilde{b}, \tilde{c} \in \ell_\lambda^{\bar{a}}$. A inclusão $\psi^{-1}(\partial_H \mathcal{R}) \subset \partial_H \mathcal{R}$ seguirá uma vez que mostrarmos que $P(\bar{c}b') \supset \tilde{c}\tilde{b}$. Para isso, comparamos tamanhos. Sejam $x = |d^*b'| = |\bar{c}a|$ e $y = |ab'| = |\bar{c}d^*|$.

Sabemos do caso 1 que $\lambda x \geq y$, pois nesse caso $P(\tilde{R}_2)$ cruza um transladado de \tilde{R}_1 . Similarmente, $\lambda y \geq x$. Como $\lambda > 0$, $P\tilde{c}$ é o ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{\tilde{a}\tilde{c}}$ que dista λy de \tilde{a} , e portanto $P(a\tilde{c}) \supset \tilde{a}\tilde{c}$. De modo análogo, Pb' é o ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{\tilde{a}\tilde{b}}$ que dista λx de \tilde{a} , e portanto $P(ab') \supset \tilde{a}\tilde{b}$. Assim, $P(\tilde{c}b') \supset \tilde{c}\tilde{b}$.

Figura 28 – Os pontos $\tilde{c}, \tilde{a}, \tilde{b}$ são transladados de \tilde{c}, a, b' respectivamente, com $\tilde{a} = P(d^*)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

PARTE II: Grafo orientado

Enunciamos a versão do Lema 6 para o caso 2: enquanto a primeira parte é uma versão transladada, a segunda parte permanece a mesma. Escreva $\rho v_\mu = (x_0, y_0)$.

Lema 7. Denote por a_{ij} o número de paralelogramos disjuntos na intersecção $\psi(R_i) \cap R_j$. Então

a_{i1} = número de retas verticais $x - x_0 = 0, x - x_0 = 1, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$

a_{i2} = número de retas horizontais $y - y_0 = 1, y - y_0 = 2, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$.

Em particular:

$$a_{11} = \text{coordenada } x \text{ de } P(1,0) = p$$

$$a_{12} = \text{coordenada } y \text{ de } P(1,0) = q$$

$$a_{21} = \text{coordenada } x \text{ de } P(0,1) = r$$

$$a_{22} = \text{coordenada } y \text{ de } P(0,1) = s$$

Demonstração. Como na prova do Lema 6, começamos identificando os conjuntos $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$. Iniciamos identificando $P(\tilde{R}_1)$. Note que $Pd' = P(d^* + (0,1)) = Pd^* + (r,s) = a + (p,q) = \tilde{a}$, um

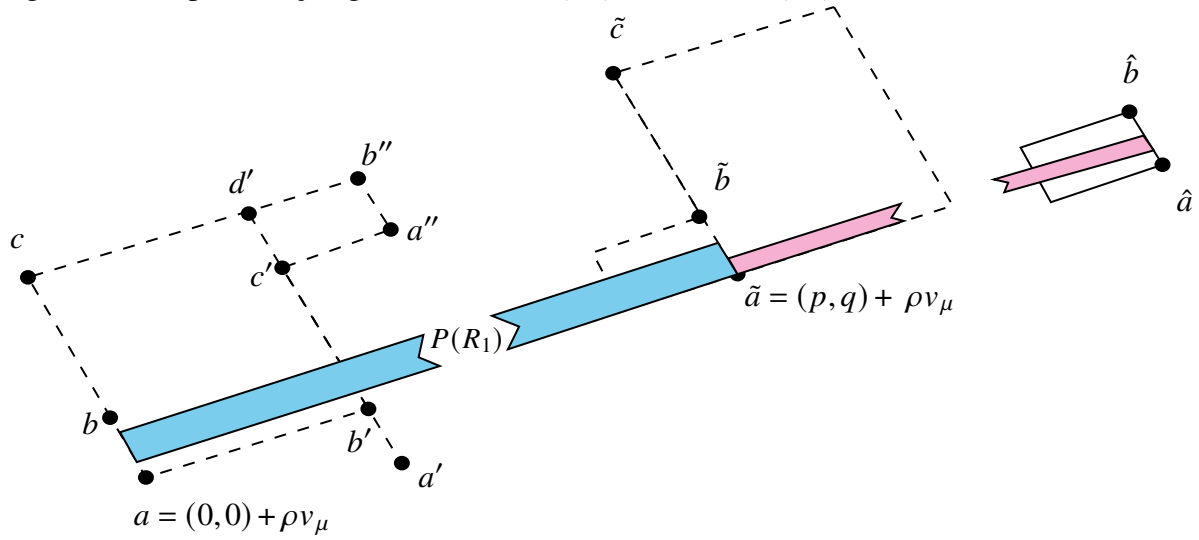
transladado inteiro de a . Definindo $\widehat{a} = a + (p+r, q+s)$, observamos que $\widetilde{a}, \widehat{a}$ possuem, em termos de a , as mesmas definições do caso 1. Continuamos essa analogia considerando os mesmos translados de b e c (veja a figura 29):

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{b} = b + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = b' + \begin{bmatrix} p-1 \\ q \end{bmatrix} \in \ell_{\mu}^{\widetilde{a}} \\ \widetilde{c} = c + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = c' + \begin{bmatrix} p-1 \\ q \end{bmatrix} \in \ell_{\mu}^{\widetilde{a}} \\ \widehat{b} = b + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix} = b'' + \begin{bmatrix} p+r-1 \\ q+s-1 \end{bmatrix} \in \ell_{\mu}^{\widehat{a}} \end{array} \right.$$

Como no caso 1, afirmamos que a fronteira vertical de $P(\widetilde{R}_1)$ está contida em $ab \cup \widetilde{a}\widetilde{b}$ e a fronteira vertical de $P(\widetilde{R}_2)$ está contida em $\widetilde{a}\widetilde{b} \cup \widehat{a}\widehat{b}$. Repetindo a notação $x = |ab| = |\widetilde{a}\widetilde{b}| = |\widehat{a}\widehat{b}|$, a primeira inclusão segue dos seguintes fatos:

- A fronteira vertical esquerda de $P(\widetilde{R}_1)$ é o segmento de extremos Pa e Pc . O ponto Pc está no segmento que une $(0,0)$ e a , logo basta mostrar que Pa está no segmento que une $(0,0)$ e b , ou seja, que $\|Pa\| < \|b\|$. Por construção, $\|Pa\| = |\mu| \cdot \|a\| = |\mu| \cdot |\rho|$ e $\|b\| = x - |\rho|$. Relembrando que $|\rho|(1 + |\mu|) < x$, concluímos o requerido.
- A fronteira vertical direita de $P(\widetilde{R}_1)$ é o segmento de extremos \widetilde{a} e Pb' . Como $\mu < 0$, Pb' pertence ao segmento $\widetilde{a}\widetilde{c}$. Como o comprimento de $P(b'd')$ é menor que x , segue que Pb' pertence ao interior do segmento $\widetilde{a}\widetilde{b}$.

Figura 29 – Representação geométrica de $P(\tilde{R}_1)$ em azul e $P(\tilde{R}_2)$ em rosa.



Fonte: (ADLER, 1998), p. 51. Modificada pelo autor.

Para a segunda inclusão, novamente a fronteira vertical esquerda de $P(\tilde{R}_2)$ está contida na fronteira vertical direita de $P(\tilde{R}_1)$, e portanto está contida em $\tilde{a}\tilde{b}$. Logo, basta checarmos que a fronteira vertical direita de $P(\tilde{R}_2)$ está contida em $\hat{a}\hat{b}$. Para isso, é suficiente mostrar que $P(a'')$ está abaixo de \hat{b} em $\ell_\mu^{\hat{a}}$ e que $P(b'')$ está acima de \hat{a} em $\ell_\mu^{\hat{a}}$ (aqui, usamos que $\mu < 0$ e portanto as ordens de a'', b'' e suas imagens são diferentes). Vejamos:

- Temos $a'' = a + (1, 1) = \rho v_\mu + (1, 1)$ e portanto $Pa'' = \mu \rho v_\mu + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix}$ está abaixo de $\hat{b} = (x - |\rho|)v_\mu + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix}$ em $\ell_\mu^{\hat{a}}$, pois $\mu\rho = |\mu||\rho| < x - |\rho|$.
- Temos $b'' = b + (1, 1) = (x - |\rho|)v_\mu + (1, 1)$ e portanto $Pb'' = \mu(x - |\rho|)v_\mu + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix}$ está acima de $\hat{a} = \rho v_\mu + \begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix}$ em $\ell_\mu^{\hat{a}}$, pois $|\rho| = \frac{|\mu|}{1+|\mu|}|a\bar{d}| > \frac{|\mu|}{1+|\mu|}x$ implica que $\mu(x - |\rho|) > \rho$.

Identificados os conjuntos $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$, procedemos agora à prova do lema. Aqui, é essencial relembrar o seguinte fato observado no caso 1: $P(\tilde{R}_1)$ e $P(\tilde{R}_2)$ ambos terminam em translados de \tilde{R}_2 . Desse modo, podemos provar uma versão transladada do Lema 6: $P(\tilde{R}_1) \cap (\tilde{R}_1 + (m, n)) \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_1) \cap \{x - x_0 = m\} \neq \emptyset$ e $P(\tilde{R}_1) \cap (\tilde{R}_2 + (m, n)) \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_1) \cap \{y - y_0 = n\} \neq \emptyset$. Concluimos assim que:

- $P(\tilde{R}_1)$ intersecta as retas verticais $x - x_0 = 0, x - x_0 = 1, \dots, x - x_0 = p - 1$, logo $a_{11} = p$.
- $P(\tilde{R}_2)$ intersecta as retas verticais $x - x_0 = p, x - x_0 = p + 1, \dots, x - x_0 = p + r - 1$, logo

$$a_{21} = r.$$

- $P(\tilde{R}_1)$ intersecta as retas horizontais $y - y_0 = 1, y - y_0 = 2, \dots, y - y_0 = q$, logo $a_{12} = q$.
- $P(\tilde{R}_2)$ intersecta as retas verticais $y - y_0 = q + 1, y - y_0 = q + 2, \dots, y - y_0 = q + s$, logo

$$a_{22} = s.$$

Isso conclui a prova do lema. □

Aqui, tomamos a liberdade para apontar um erro em (ADLER, 1998, pp. 50), onde é dito que $P(\tilde{R}_i) \cap \{x - x_0 = m\} \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_i) \cap \{x = m\} \neq \emptyset$ e que $P(\tilde{R}_i) \cap \{y - y_0 = n\} \neq \emptyset$ se e somente se $P(\tilde{R}_i) \cap \{y = n\} \neq \emptyset$. Nenhuma das afirmações é verdadeira:

- Embora $P(\tilde{R}_1)$ intersecte $x = p$, $P(\tilde{R}_1)$ não intersecta $x - x_0 = p$.
- Embora $P(\tilde{R}_1)$ intersecte $y - y_0 = q$, $P(\tilde{R}_1)$ não intersecta $y = q$ (basta observar que Pb' está abaixo da reta $y = q$).

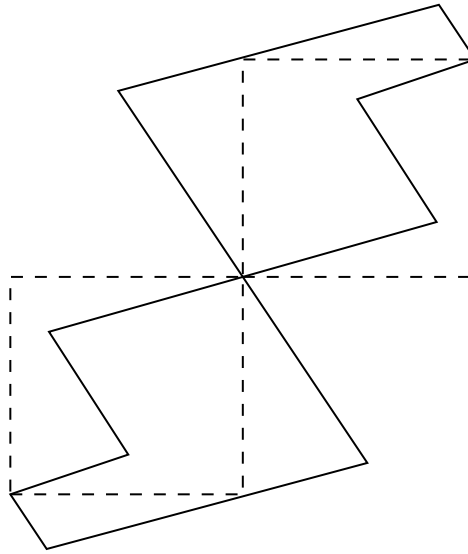
4.3.3 Caso 3: $\lambda < 0$ e $\mu < 0$

Como já explicamos, a partição de Markov é obtida aplicando a involução ι à partição obtida no caso 1. Por completude, vamos enunciar os resultados.

PARTE I: Partição de Markov

A figura abaixo mostra o domínio fundamental obtido no caso 1 e sua reflexão por $-\text{Id}$, que se divide em dois paralelogramos \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 cuja projeção em \mathbb{T}^2 é uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ para ψ .

Figura 30 – Domínio fundamental no caso I e sua reflexão.



Fonte: elaborada pelo autor.

PARTE II: Grafo orientado

Lema 8. Denote por a_{ij} o número de paralelogramos disjuntos na intersecção $\psi(R_i) \cap R_j$. Então

a_{i1} = número de retas verticais $x = 0, x = -1, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$

a_{i2} = número de retas horizontais $y = -1, y = -2, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$.

Em particular:

a_{11} = coordenada x de $P(1,0) = p$

a_{12} = coordenada y de $P(1,0) = q$

a_{21} = coordenada x de $P(0,1) = r$

a_{22} = coordenada y de $P(0,1) = s$

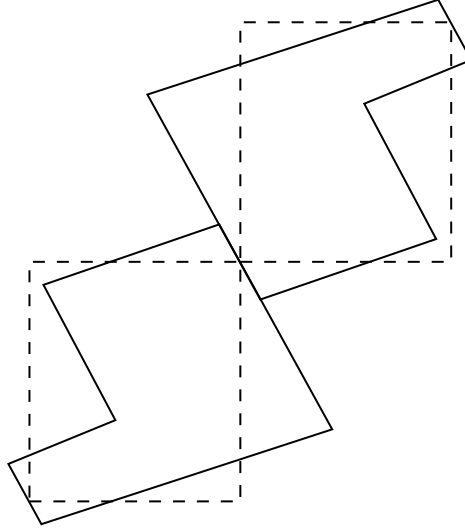
4.3.4 Caso 4: $\lambda < 0$ e $\mu > 0$

A partição de Markov é obtida aplicando a involução ι à partição obtida no caso 3.

PARTE I: Partição de Markov

A figura abaixo mostra o domínio fundamental obtido no caso 3 e sua reflexão por $-\text{Id}$, que se divide em dois paralelogramos \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 cuja projeção em \mathbb{T}^2 é uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ para ψ .

Figura 31 – Domínio fundamental no caso 3 e sua reflexão.



Fonte: elaborada pelo autor.

PARTE II: Grafo orientado

Lema 9. Denote por a_{ij} o número de paralelogramos disjuntos na intersecção $\psi(R_i) \cap R_j$. Então

a_{i1} = número de retas verticais $x - x_0 = 0, x - x_0 = -1, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$

a_{i2} = número de retas horizontais $y - y_0 = -1, y - y_0 = -2, \dots$ que intersectam $P(\tilde{R}_i)$.

Em particular:

$$a_{11} = \text{coordenada } x \text{ de } P(1,0) = p$$

$$a_{12} = \text{coordenada } y \text{ de } P(1,0) = q$$

$$a_{21} = \text{coordenada } x \text{ de } P(0,1) = r$$

$$a_{22} = \text{coordenada } y \text{ de } P(0,1) = s$$

Concluimos, assim, a prova do Teorema 6. Consequentemente, segue do Teorema 3 que \mathcal{R} é partição de Markov para ϕ .

4.4 Refinamento de \mathcal{R}

Na seção anterior, construímos uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$ para o automorfismo ϕ . Nessa seção, mostramos como essa partição pode ser refinada, de modo a evitar a existência de múltiplas arestas entre dois vértices do grafo orientado. Isso vai ser importante tanto para poder definir caminhos no grafo orientado por meio dos vértices visitados, quanto para poder definir, na próxima seção, a codificação π . O mais simples a ser feito, de modo a manter a conexidade de cada paralelogramo da partição, é considerar a família formada por todas as componentes conexas dos conjuntos $R_i \cap \phi^{-1}R_j$, $i, j = 1, 2$. Chame essa família de \mathcal{R}^* .

Proposição 4. *A família \mathcal{R}^* é uma partição de Markov para ϕ .*

Demonstração. Afirmamos que \mathcal{R}^* é uma partição topológica com a fronteira satisfazendo a propriedade M. Uma vez provado isso, o resultado seguirá pelo Teorema 3. Como ϕ é induzida por uma transformação linear e a fronteira de \mathcal{R} é formada por segmentos paralelos às autodireções, $\phi^{-1}(R_1)$ é obtido a partir de R_1 expandindo $1/\mu$ na direção de v_μ e contraindo $1/\lambda$ na direção de v_λ , e o mesmo vale para $\phi^{-1}(R_2)$. Em particular, cada um desses conjuntos é um paralelogramo com fronteira paralela às autodireções, e o mesmo ocorre para os elementos de \mathcal{R}^* . Ademais, \mathcal{R}^* satisfaz as condições da Definição 16, o que fica claro da geometria das construções exploradas na seção anterior.

Agora provamos que \mathcal{R}^* satisfaz a Definição 20. A propriedade (i) é óbvia, e as propriedades (ii)–(iii) valem porque, assim como \mathcal{R} , a partição \mathcal{R}^* é formada por paralelogramos com fronteira paralela às autodireções. Resta checar (iv)–(v). Para isso, identificamos a fronteira de \mathcal{R}^* . Usando que \mathcal{R} possui a fronteira satisfazendo a propriedade M, temos que

$$\begin{cases} \partial_H \mathcal{R}^* = \partial_H \mathcal{R} \cup \phi^{-1}[\partial_H \mathcal{R}] = \partial_H \mathcal{R} \\ \partial_V \mathcal{R}^* = \partial_V \mathcal{R} \cup \phi^{-1}[\partial_V \mathcal{R}] = \phi^{-1}[\partial_V \mathcal{R}] \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{cases} \phi^{-1}[\partial_H \mathcal{R}^*] = \phi^{-1}[\partial_H \mathcal{R}] \subset \partial_H \mathcal{R} = \partial_H \mathcal{R}^* \\ \phi[\partial_V \mathcal{R}^*] = \partial_V \mathcal{R} \subset \phi^{-1}[\partial_V \mathcal{R}] = \partial_V \mathcal{R}^*. \end{cases}$$

Notando que essa nova partição também preserva alinhamentos pela linearidade, concluímos a prova da proposição. \square

4.5 Cadeia topológica de Markov associada a ϕ

Com os resultados das seções anteriores em mãos, vamos codificar a dinâmica de ϕ por meio de uma cadeia topológica de Markov. Mais especificamente, seja $\mathcal{R}^* = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ a partição de Markov construída na seção anterior, seja $G = (V, E)$ o grafo orientado onde $V = \mathcal{R}^*$ e $E = \{R_i \rightarrow R_j : R_i \cap \phi^{-1}R_j \neq \emptyset\}$, e seja Σ o espaço simbólico bilateral definido por G . Note que Σ é compacto (basta mostrar que é fechado, o que segue de um argumento simples com sequências de elementos de Σ). Defina a aplicação $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}^2$ por

$$\pi(\underline{a}) := \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}},$$

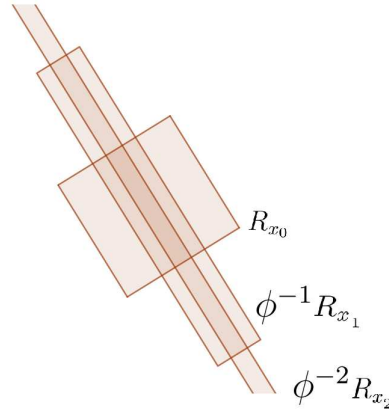
onde $\underline{a} = (\dots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \dots) \in \Sigma$. No que segue, mostraremos que π está bem definida e de que modo ela se relaciona com ϕ .

Para mostrar que π está bem definida, começamos mostrando que a interseção no lado direito consiste de um único elemento. Para isso, vamos mostrar que as interseções

$$S_n := \overline{\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}}$$

são paralelogramos fechados (logo compactos) com diâmetro convergindo a zero. Uma vez provado isso, obtemos que $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência encaixada de compactos não vazios com diâmetros convergindo a zero. Pelo teorema de interseção de Cantor, a interseção $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ consiste de um único elemento. Já sabemos que, como cada elemento de \mathcal{R}^* é um paralelogramo com lados paralelos às autodireções de ϕ , $\phi^{-1}(R_i)$ é obtido a partir de R_i expandindo $1/\mu$ na direção de v_μ e contraindo $1/\lambda$ na direção de v_λ . Em particular, $\phi^{-1}R_{a_1}$ intersecta R_{a_0} ao longo de uma única faixa aberta vertical (a faixa é única porque o grafo associado a \mathcal{R}^* não possui arestas múltiplas), ou seja, $F_1 = R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1}$ é uma faixa vertical de R_{a_0} . De modo análogo, $\phi^{-2}R_{a_2}$ intersecta $\phi^{-1}R_{a_1}$ ao longo de uma única faixa aberta vertical, e portanto a interseção $F_2 = R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \phi^{-2}R_{a_2}$ é uma faixa aberta vertical de R_{a_0} , mais fina do que F_1 . Veja a Figura 32. Por indução, a sequência $\{F_n\}_{n \geq 1}$ definida por $F_n = R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \dots \cap \phi^{-n}R_{a_n}$ é uma família de faixas abertas verticais de R_{a_0} tal que a largura de F_{n+1} é $1/|\lambda| = |\mu|$ vezes menor que a largura de F_n , para todo $n \geq 0$.

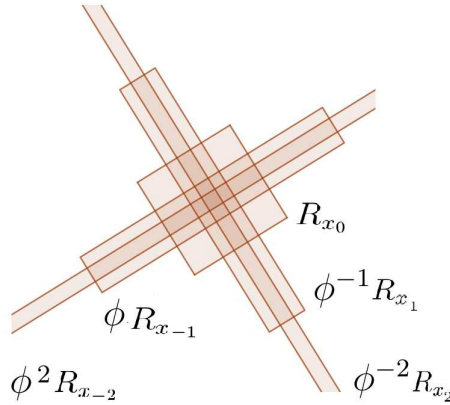
Figura 32 – Faixas verticais envolvidas na definição de π .



Fonte: elaborada pelo autor.

De modo similar, $\phi R_{a_{-1}}$ intersecta R_{a_0} ao longo de uma única faixa aberta horizontal, isto é, $F_{-1} = \phi R_{a_{-1}} \cap R_{a_0}$ é uma faixa aberta horizontal de R_0 ; $F_2 = R_{a_0} \cap \phi^{-1}R_{a_1} \cap \phi^{-2}R_{a_2}$ é uma faixa aberta horizontal de R_0 mais fina do que F_1 . Por indução, a sequência $\{F_n\}_{n \leq 0}$ dada por $F_n = \phi^n R_{a_{-n}} \cap \cdots \cap \phi R_{a_{-1}} \cap R_{a_0}$ é uma família de faixas abertas horizontais de R_0 tal que a altura de F_{n-1} é $|\mu|$ vezes menor que a largura de F_n , para todo $n \geq 0$. Veja a Figura 33.

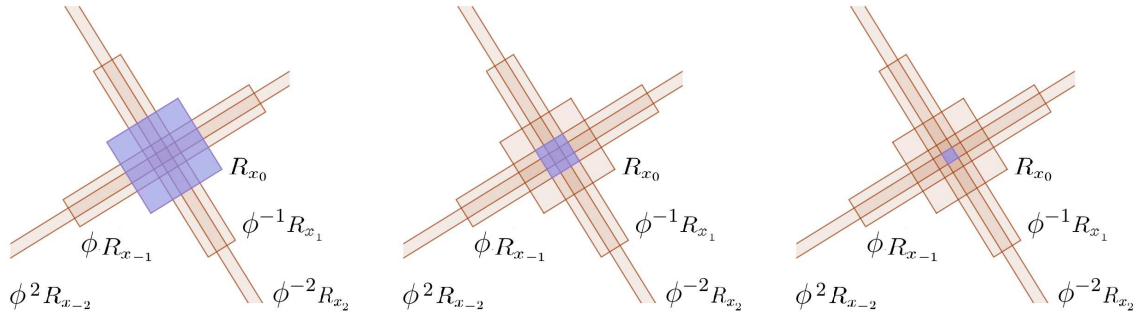
Figura 33 – Faixas verticais e horizontais envolvidas na definição de π .



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, $S_n = F_{-n} \cap F_n$ é um paralelogramo fechado, onde as dimensões de S_{n+1} são $|\mu|$ vezes menores que as dimensões de S_n , veja a Figura 34.

Figura 34 – Os paralelogramos S_0, S_1, S_2 destacados em azul.



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso mostra que o refinamento $\bigvee_{k=-n}^n \phi^{-k} \mathcal{R}^* = \phi^n \mathcal{R}^* \vee \dots \vee \mathcal{R}^* \vee \dots \vee \phi^{-n} \mathcal{R}^*$ é uma partição cujos átomos possuem diâmetros exponencialmente pequenos em n . Em particular, π está bem definida.

Afirmamos que $\phi \circ \pi = \pi \circ \sigma$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{T}^2
 \end{array}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \phi(\pi(\underline{a})) &= \phi \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}} \right) \\
 &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \phi \left(\overline{\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}} \right) && \text{(pois } \phi \text{ é injetiva)} \\
 &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\phi \left(\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k} \right)} && \text{(pois } \phi \text{ é homeomorfismo)} \\
 &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k+1} R_{a_k}} && \text{(pois } \phi \text{ é injetiva)} \\
 &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n-1}^{n-1} \phi^{-k} R_{a_{k+1}}} && \text{(fazendo } l = k - 1) \\
 &\subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n+1}^{n-1} \phi^{-k} R_{a_{k+1}}} \\
 &= \pi(\sigma(\underline{a})).
 \end{aligned}$$

Vale notar, entretanto, que π não é injetiva. Por exemplo, $(0,0) \in \mathbb{T}^2$ está na fronteira de dois elementos de \mathcal{R}^* , e isso implica que existe mais de uma sequência $\underline{a} \in \Sigma$ que codifica $(0,0)$. Veremos na Seção 5.2.5 que π é injetiva fora da fronteira e de seus iterados. Note também que π é contínua e sobrejetora. Uma ideia da continuidade pode ser vista na Figura 34: se duas sequências estão próximas, então compartilham um bloco inicial de, digamos, tamanho l . Então os pontos que eles codificam estão em $\overline{\bigcap_{k=-l}^l \phi^{-k} R_{a_k}}$, cujo diâmetro, como vimos, vai pra zero conforme $l \rightarrow \infty$. Ou seja, quão mais próximos são essas sequências, maior é l e menor é o diâmetro de $\overline{\bigcap_{k=-l}^l \phi^{-k} R_{a_k}}$. Por conseguinte, os pontos codificados estão mais próximos.

Para a sobrejetividade, notemos que $\bigvee_m^n \phi^k \mathcal{R}$, $m \leq n$, é também uma partição topológica. Existe então um conjunto nela cujo fecho contém p , digamos $\overline{\bigcap_m^n \phi^{-k} R_{s_k}}$. Mostramos a seguir que, no refinamento $\bigvee_{m-1}^{n+1} \phi^k \mathcal{R}$, os elementos da forma $\bigcap_{m-1}^{n+1} \phi^{-k} R_{t_k}$, onde $t_k = s_k$ para $m \leq k \leq n$, compõem uma subfamília que é uma partição topológica de $\overline{\bigcap_m^n \phi^{-k} R_{s_k}}$. Vê-se facilmente que a partição $\bigvee_{m-1}^{n+1} \phi^k \mathcal{R}$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de partição topológica. Para ver que a condição (iii) segue, basta observar que

$$\bigcup_{\substack{0 \leq t_{m-1} \leq N-1 \\ 0 \leq t_{n+1} \leq N-1 \\ t_k = s_k, m \leq k \leq n}} \bigcap_{m-1}^{n+1} \phi^{-k} R_{t_k} = \bigcap_m^n \phi^{-k} R_{s_k}$$

e que o fecho da união é a união dos fechos. Assim, podemos escolher por indução os conjuntos R_{s_k} da seguinte forma. Tendo especificado os conjuntos $R_{s_{-n}}, \dots, R_{s_n}$ tais que $p \in \overline{\bigcap_{-n}^n \phi^{-k} R_{s_k}}$, podemos encontrar conjuntos $R_{s_{-n-1}}$ e $R_{s_{n+1}}$ tais que

$$p \in \overline{\bigcap_{-n-1}^{n+1} \phi^{-k} R_{s_k}}.$$

Portanto, existe uma sequência $(R_{s_k})_{k \in \mathbb{Z}}$ de conjuntos em \mathcal{R} tal que

$$p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{-n}^n \phi^{-k} R_{s_k}}.$$

4.6 Exemplo: cat map

Como ilustração do Teorema 6, vamos construir o domínio fundamental e partição de Markov para o cat map. Relembre da Seção 3.3 que o cat map é o automorfismo $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induzido pela matriz

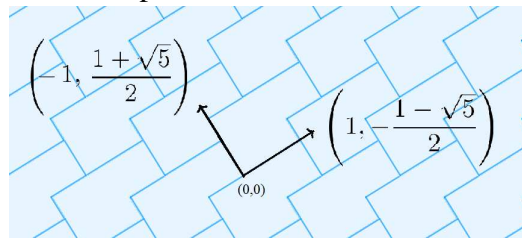
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos $\text{tr}(A) = 3 > 2$ e portanto A é hiperbólica. Ademais, $p = 2$ e $q = r = s = 1$. Vamos calcular os autovalores e autovetores de A . O polinômio característico de A é igual a $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$, logo os autovalores são $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Repare que $\lambda_1 > 1$ e $0 < \lambda_2 < 1$. Para identificar as autodireções, observe que

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Assim, $\left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e $\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ são autovetores de λ_1 e λ_2 , respectivamente. Aplicando a construção do caso 1 da Seção 4.3, obtemos a seguinte cobertura de \mathbb{R}^2 por domínios fundamentais:

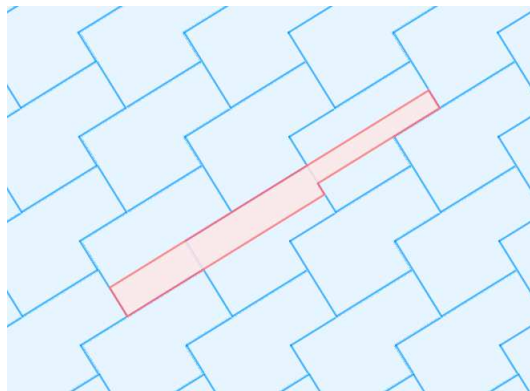
Figura 35 – Os autovetores do Catmap



Fonte: elaborada pelo autor.

A imagem do domínio fundamental que contém o segmento vertical $\{0\} \times (0, 1)$ é igual ao polígono rosa na figura abaixo:

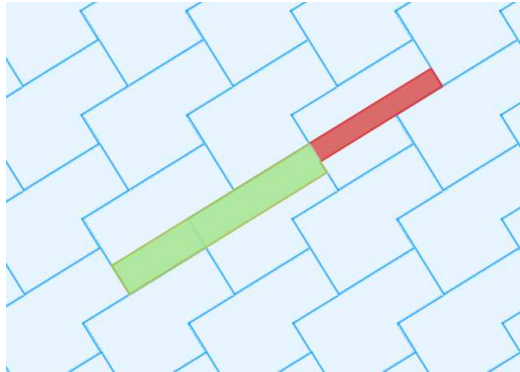
Figura 36 – A imagem do domínio fundamental



Fonte: elaborada pelo autor.

Abaixo, destacamos $A(\tilde{R}_1)$ e $A(\tilde{R}_2)$ com cores distintas.

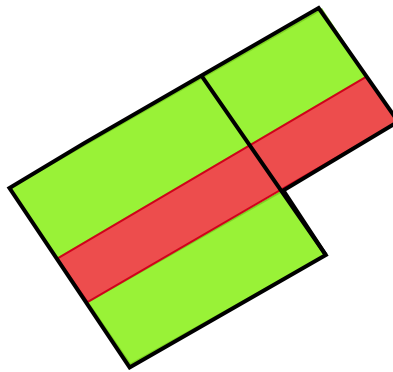
Figura 37 – $A(\tilde{R}_1)$ em verde, e $A(\tilde{R}_2)$ em vermelho.



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, as imagens $\phi(R_1)$ e $\phi(R_2)$ podem ser representadas no domínio fundamental por:

Figura 38 – $\phi(R_1)$ e $\phi(R_2)$ desenhados no domínio fundamental. Os segmentos em preto formam $\partial\mathcal{R}$.



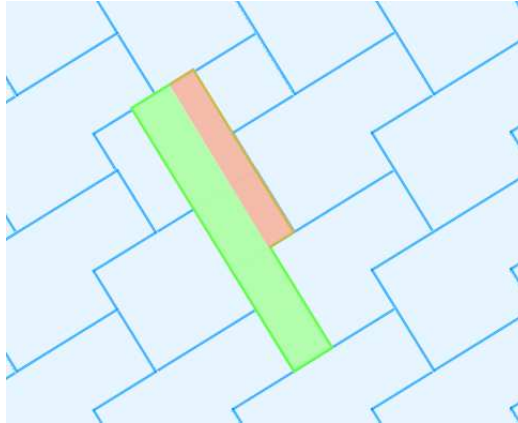
Fonte: elaborada pelo autor.

Repare que:

- $A(\tilde{R}_1)$ intersecta exatamente dois translados de \tilde{R}_1 , e as duas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$.
- $A(\tilde{R}_2)$ intersecta apenas um translado de \tilde{R}_1 , e apenas a reta vertical $x = 2$.
- $A(\tilde{R}_1)$ intersecta apenas um translado de \tilde{R}_2 , e apenas a reta horizontal $y = 1$.
- $A(\tilde{R}_2)$ intersecta apenas um translado de \tilde{R}_2 , e apenas a reta horizontal $y = 2$.

Podemos também ver as imagens desses retângulos por ϕ^{-1} :

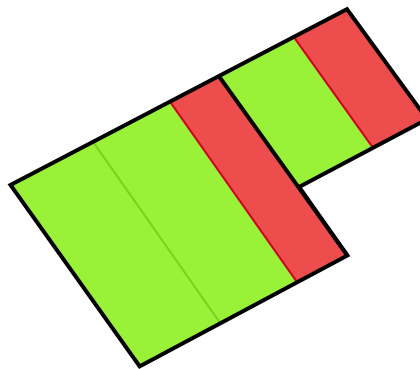
Figura 39 – Imagens por ϕ^{-1}



Fonte: elaborada pelo autor.

Em \mathbb{T}^2 , isto nos dá:

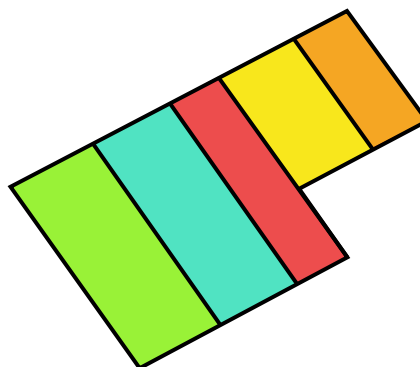
Figura 40 – Imagens projetadas no toro



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, aplicando a Proposição 4, obtemos uma nova partição de Markov com cinco elementos:

Figura 41 – Nova partição de Markov



Fonte: elaborada pelo autor.

Vale observar que a construção de partições de Markov para automorfismos do toro

em dimensão maior que 2 é mais complicada. Por exemplo, em dimensão 3, Bowen mostrou que a fronteira dos elementos de uma partição de Markov é necessariamente fractal. Ver (BOWEN, 1978).

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, utilizaremos os resultados do capítulo 4 para obter duas propriedades sobre automorfismos lineares do toro. A primeira calcula sua entropia com respeito à medida de Lebesgue, e a segunda estima sua quantidade de pontos periódicos.

É importante ressaltar um aspecto histórico dessa discussão, que motivou a introdução do conceito de entropia em sistemas dinâmicos e teoria ergódica. Durante a década de 1950, a teoria ergódica era uma área muito nova, com diversas interações com a probabilidade, e um dos grandes expoentes dessas duas áreas era o matemático soviético Andrei Kolmogorov. Uma das perguntas da época consistia em classificar (ou pelo menos distinguir) sistemas do ponto de vista de teoria da medida (essa é a noção de similaridade métrica que será definida nas próximas seções), e esperava-se que os sistemas definidos a partir da teoria da probabilidade não eram metricamente similares àqueles definidos por equações diferenciais (que chamaremos de sistemas determinísticos). Baseado nessa distinção e motivado por conceitos da teoria da informação, Kolmogorov deu a primeira definição de entropia, que se aplicava para sistemas probabilísticos. Posteriormente, Sinaï deu uma definição dinâmica, que estende a definição de Kolmogorov e também pode ser usada para sistemas determinísticos. Essa é a definição que daremos na próxima seção, que hoje em dia é conhecida como *entropia métrica* ou *entropia de Kolmogorov-Sinaï*.

A crença da época era que os sistemas probabilísticos tinham entropia positiva, enquanto os sistemas determinísticos tinham entropia zero. Em particular, automorfismos lineares do toro deveriam ter entropia zero. Na contramão dessa intuição, Sinaï mostrou que os automorfismos lineares hiperbólicos têm entropia positiva! A teoria de partições de Markov, desenvolvida alguns anos após a introdução de entropia, mostra ainda mais: além de terem entropia positiva, automorfismos lineares hiperbólicos do toro também são metricamente similares a sistemas probabilísticos. Em particular, do ponto de vista de teoria da medida, não há distinção entre sistemas probabilísticos e determinísticos.

5.1 Entropia

A entropia pode ser entendida como uma medida de complexidade de sistemas. Existem vários tipos de entropia. Começaremos nosso estudo fornecendo uma definição de partição mais adequada a espaços de medida. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de probabilidade de Lebesgue. Começamos com uma série de definições. No que segue, escrevemos “módulo

zero" sempre que a igualdade for verdadeira a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 21 (Partição). *Uma partição de $\mathbb{X} = (X, \mathcal{M}, \mu)$ é uma coleção $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos que cobrem X módulo zero. Cada elemento $A \in \mathcal{A}$ é chamado um átomo de \mathcal{A} . Dizemos que \mathcal{A} é finita se possuir finitos átomos, e enumerável se possuir uma quantidade enumerável de átomos.*

Compare a definição acima com a Definição 2. No que segue, \mathcal{A} e \mathcal{B} são partições de \mathbb{X} .

Definição 22 (Refinamento). *Dizemos que \mathcal{B} é um refinamento de \mathcal{A} ou que \mathcal{B} é mais fina que \mathcal{A} se todo átomo de \mathcal{A} é igual à união de átomos de \mathcal{B} módulo zero. Nesse caso, escrevemos $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ e dizemos também que \mathcal{A} é mais grosseira que \mathcal{B} .*

Definição 23 (Soma de partições). *A soma de \mathcal{A} e \mathcal{B} é a partição $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}\}$.*

Definição 24 (Independência). *Dizemos que $A, B \in \mathcal{M}$ são independentes se $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$, e que as partições \mathcal{A}, \mathcal{B} são independentes se A, B são independentes para todos $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$.*

Definição 25 (Função informação). *A função informação de \mathcal{A} é a função $I_\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ definida por $I_\mu(A) = -\log \mu(A)$, com a convenção de que $-\log 0 = \infty$. A informação de \mathcal{A} é definida por*

$$I_\mu(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} I_\mu(A) = - \sum_{A \in \mathcal{A}} \log \mu(A).$$

A intuição dessa definição é a seguinte: $I_\mu(A)$ mede a incerteza da proposição “ $x \in A$ ”. Existem algumas justificativas para definir I_μ a partir da função logaritmo. De fato, I_μ como acima é unicamente determinada (a menos de múltiplos) pelas quatro propriedades abaixo:

- $I_\mu \geq 0$: de fato, $-\log : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$.
- Se $A \subset B$ então $I_\mu(A) \geq I_\mu(B)$: de fato, $-\log : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ é decrescente.
- Se A, B são independentes então $I_\mu(A \cap B) = I_\mu(A) + I_\mu(B)$: de fato,

$$I_\mu(A \cap B) = -\log \mu(A \cap B) = -\log[\mu(A)\mu(B)] = -\log \mu(A) - \log \mu(B) = I_\mu(A) + I_\mu(B).$$

- Se $\mu(A) = 1$ então $I_\mu(A) = 0$: isso é óbvio.

Finalmente, definimos a entropia de uma partição. A partir de agora, assumimos que \mathcal{A} é finita ou enumerável, e usamos a convenção de que $0 \log 0 = 0$.

Definição 26 (Entropia de partição). A entropia de \mathcal{A} é definida por $H_\mu(\mathcal{A}) = - \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \log \mu(A)$. Dizemos que \mathcal{A} tem entropia finita se $H_\mu(\mathcal{A}) < \infty$.

Intuitivamente, a entropia mede o grau de incerteza que a partição possui: quanto maior a entropia, mais difícil é saber a qual átomo um elemento qualquer $x \in X$ pertence. Algumas propriedades da entropia são as seguintes:

- $H_\mu(\mathcal{A}) \geq 0$.
- Se $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ então $H_\mu(\mathcal{A}) \leq H_\mu(\mathcal{B})$.
- $H_\mu(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H_\mu(\mathcal{A}) + H_\mu(\mathcal{B})$, com igualdade se e só se \mathcal{A}, \mathcal{B} são independentes.

Vejamos alguns exemplos. Considere o espaço de probabilidade $([0, 1], \mathfrak{B}, \mu)$, onde \mathfrak{B} e μ são a sigma-álgebra de Borel e a medida de Lebesgue restritas ao intervalo $[0, 1]$, respectivamente. Dado $p \in [0, 1)$, considere a partição $\mathcal{A}_p = \{[0, p], [p, 1]\}$. Temos

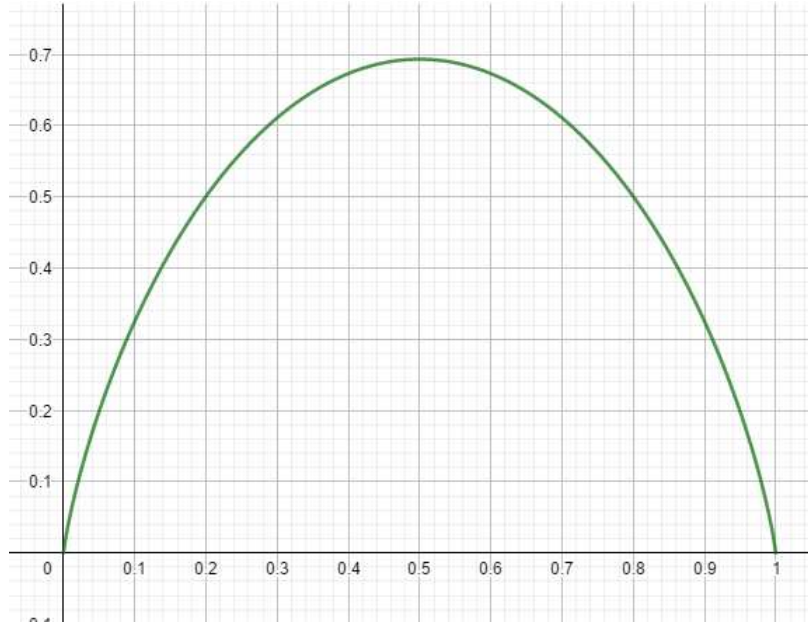
$$H_\mu(\mathcal{A}_p) = -\mu[0, p] \log \mu[0, p] - \mu[p, 1] \log \mu[p, 1] = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p).$$

Repare que se $p \neq 0, 5$, então algum átomo de \mathcal{A}_p possui medida maior que 0,5. Portanto, se tivéssemos que apostar em qual átomo de \mathcal{A}_p um elemento qualquer $x \in [0, 1]$ está, podemos apostar nesse átomo de maior medida e teremos uma chance de acerto maior de 50%. Por outro lado, se $p = 0, 5$, independente da escolha teremos 50% de chance de acerto. Isso mostra que a incerteza associada a $\mathcal{A}_{0,5}$ é maior que aquela associada a \mathcal{A}_p para $p \neq 0, 5$. Essa heurística pode ser vista notando que, dentre todas as partições \mathcal{A}_p , a que maximiza a entropia é $\mathcal{A}_{0,5}$. Para provar isso, basta derivar a função $p \mapsto H_\mu(\mathcal{A}_p)$:

$$\frac{d}{dp} [-p \log p - (1 - p) \log(1 - p)] = \log(1 - p) - \log p.$$

Assim, $p \mapsto H_\mu(\mathcal{A}_p)$ possui um único máximo em $p = 0, 5$. Veja também seu gráfico na figura abaixo.

Figura 42 – Gráfico da função $p \in [0, 1] \mapsto -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Seja agora $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável em um espaço de probabilidade $\mathbb{X} = (X, \mathcal{M}, \mu)$. Dizemos que ϕ preserva μ ou que μ é uma medida ϕ -invariante se $\mu(\phi^{-1}A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$. No que segue, utilizaremos as notações $\phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ou (\mathbb{X}, ϕ) para representar os objetos \mathbb{X} e ϕ .

Seja \mathcal{A} uma partição finita de \mathbb{X} . Para cada $n \geq 0$, seja $\phi^{-n}\mathcal{A} = \{\phi^{-n}A : A \in \mathcal{A}\}$, que é também uma partição finita de \mathbb{X} . Considere também a partição

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \vee \phi^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee \phi^{-n+1}\mathcal{A}.$$

Um átomo de \mathcal{A}^n representa o conjunto de pontos de X que visitam os mesmos átomos de \mathcal{A} , do iterado zero até o iterado $n - 1$.

Definição 27 (Entropia de transformação com respeito a partição). *A entropia de ϕ com respeito à partição \mathcal{A} é definida por*

$$h_\mu(\phi, \mathcal{A}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_\mu(\mathcal{A}^n)}{n}.$$

A entropia $h_\mu(\phi, \mathcal{A})$ mede o crescimento de incerteza da partição \mathcal{A} por iterações de ϕ .

Definição 28 (Entropia de transformação). *A entropia de ϕ é definida*

$$h_\mu(\phi) = \sup_{\mathcal{A}} h_\mu(\phi, \mathcal{A}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas.

De fato, o supremo acima tem o mesmo valor se considerarmos todas as partições (finitas e enumeráveis) de entropia finita. Terminamos essa seção mencionando um importante resultado que permite calcular a entropia a partir de uma única partição.

Definição 29. Uma partição \mathcal{A} é chamada geradora para ϕ se $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{-n} \mathcal{A} = \mathcal{M}$.

Teorema 7 (Kolmogorov-Sinai). Se \mathcal{A} é partição geradora para ϕ , então $h_{\mu}(\phi) = h_{\mu}(\phi, \mathcal{A})$.

5.2 Similaridade métrica entre automorfismos lineares hiperbólicos de \mathbb{T}^2 e shifts de Markov

A ideia desta seção é utilizar partições de Markov para mostrar como calcular, efetivamente, a entropia de automorfismos lineares hiperbólicos de \mathbb{T}^2 . Veremos que esses sistemas determinísticos são indistinguíveis, do ponto de vista da teoria da medida, de sistemas probabilísticos. Para isso, vamos introduzir a noção de *similaridade métrica* entre duas transformações (\mathbb{X}, ϕ) e (\mathbb{X}', ϕ') que preservam medida, e mostraremos os seguintes fatos:

- Similaridade métrica preserva entropia.
- Automorfismos lineares hiperbólicos de \mathbb{T}^2 são metricamente similares a shifts de Markov.
- A entropia de shifts de Markov é calculável.

5.2.1 Similaridade métrica

Sejam $\mathbb{X} = (X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathbb{X}' = (X', \mathcal{B}', \mu')$ espaços de probabilidade. Dizemos que uma transformação mensurável $\theta : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ preserva medida se $\theta_* \mu = \mu'$, onde $\theta_* \mu$ é o *push-forward* da medida μ por θ , definido pela igualdade $(\theta_* \mu)(A') = \mu(\theta^{-1} A')$ para todo $A' \in \mathcal{B}'$. Sejam (\mathbb{X}, ϕ) e (\mathbb{X}', ϕ') duas transformações mensuráveis que preservam medida.

Definição 30 (Similaridade métrica). Dizemos que (\mathbb{X}, ϕ) e (\mathbb{X}', ϕ') são metricamente similares se existirem conjuntos $X_0 \subset X$ e $X'_0 \subset X'$ de medida nula e uma bijeção mensurável $\theta : X \setminus X_0 \rightarrow X' \setminus X'_0$ tal que $\theta \circ \phi = \phi' \circ \theta$ e $(\theta_* \mu)(A') = \mu'(A')$ para todo $A' \subset X' \setminus X'_0$ mensurável.

A igualdade $\theta \circ \phi = \phi' \circ \theta$ significa dizer que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{X} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathbb{X}' & \xrightarrow{\phi'} & \mathbb{X}' \end{array}$$

Em termos práticos, a similaridade métrica é usualmente provada em dois passos:

1. Existe uma transformação mensurável sobrejetiva que preserva medida e tal que $\theta \circ \phi = \phi' \circ \theta$.
2. O conjunto $X'_0 \subset X'$ onde ϕ não é injetiva possui medida nula.

Nesse caso, o conjunto mensurável $X_0 := \theta^{-1}(X'_0)$ também possui medida nula.

Proposição 5. *Sejam (\mathbb{X}, ϕ) e (\mathbb{X}', ϕ') metricamente similares.*

- (a) *Se \mathcal{A}' é uma partição de \mathbb{X}' e $\mathcal{A} = \theta^{-1}\mathcal{A}'$, então $h_\mu(\phi, \mathcal{A}) = h_{\mu'}(\phi', \mathcal{A}')$.*
- (b) *$h_\mu(\phi) = h_{\mu'}(\phi')$.*

Demonstração. (a) Para cada $n \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{A}^n) &= - \sum_{A \in \mathcal{A}^n} \mu(A) \log \mu(A) = - \sum_{A' \in (\mathcal{A}')^n} \mu(\theta^{-1}A') \log \mu(\theta^{-1}A') \\ &= - \sum_{A' \in (\mathcal{A}')^n} \mu'(A') \log \mu'(A') = H_{\mu'}((\mathcal{A}')^n), \end{aligned}$$

onde na terceira passagem usamos que θ preserva medida. Assim,

$$h_\mu(\phi, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_\mu(\mathcal{A}^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{\mu'}((\mathcal{A}')^n)}{n} = h_{\mu'}(\phi', \mathcal{A}').$$

- (b) Temos $h_\mu(\phi) = \sup_{\mathcal{A}} h_\mu(\phi, \mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}'} h_{\mu'}(\phi', \mathcal{A}') = h_{\mu'}(\phi')$. □

5.2.2 O sistema $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu, \phi)$

Nesta e na próxima seção descreveremos em detalhes os sistemas que mostraremos a similaridade métrica. Começamos com o automorfismo linear hiperbólico de \mathbb{T}^2 . Considere uma matriz hiperbólica e ϕ seu automorfismo induzido.

Definição 31 (Sigma-álgebra em \mathbb{T}^2). *Seja $\mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}$ a sigma-álgebra de Borel em \mathbb{T}^2 , isto é, $\mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}$ é a sigma-álgebra gerada pelos abertos de \mathbb{T}^2 .*

Agora, poremos uma medida em \mathbb{T}^2 . Relembre que $\text{proj} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é a projeção canônica da relação de equivalência. Seja D um domínio fundamental de \mathbb{T}^2 , e seja Leb a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 .

Definição 32 (Medida de Haar ou Lebesgue em \mathbb{T}^2). *A medida de Haar ou Lebesgue em \mathbb{T}^2 é a medida de probabilidade μ definida pela igualdade*

$$\mu(A) = \text{Leb}(\text{proj}^{-1}A \cap D)$$

para todo $A \in \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}$.

A medida assim definida de fato é uma medida de Haar. As definições pertinentes e a demonstração deste fato estão no Apêndice, Seção 5.4.

5.2.3 O sistema $(\Sigma, \mathbb{B}_\Sigma, m_P, \sigma)$

Vamos agora descrever o sistema simbólico, incluindo a medida que consideraremos, chamada de *medida de Parry* e denotada por m_P . No que segue, denotaremos a sigma-álgebra gerada por uma família de conjuntos \mathcal{F} por $\mathfrak{B}(\mathcal{F})$. Por se tratar de um tema não usual em programas de mestrado, daremos todos os detalhes. Seja (Σ, σ) uma cadeia topológica de Markov, com $\Sigma \subset \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$. Relembre que Σ é um espaço métrico compacto.

Definição 33 (Sigma-álgebra em Σ). *Seja \mathbb{B}_Σ a sigma-álgebra de Borel em Σ , isto é, \mathbb{B}_Σ é a sigma-álgebra gerada pelos abertos de Σ .*

Seja Cil a família de todos os cilindros da forma $C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$ para qualquer $n \geq 0$, e seja

$$\mathcal{A} = \{C_{0,0}(1), C_{0,0}(2), \dots, C_{0,0}(N)\}$$

a partição de Σ nos cilindros na posição zero. Considere a sigma-álgebra $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, igual à menor sigma-álgebra contendo a união $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^k(\mathcal{A})$. Afirmamos que $\mathbb{B}_\Sigma = \mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}(\text{Cil})$. Mostraremos isso por meio das inclusões $\mathbb{B}_\Sigma \supset \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{B}(\text{Cil}) \supset \mathbb{B}_\Sigma$:

- $\mathbb{B}_\Sigma \supset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$: pelo Lema 1, cada elemento de \mathcal{A} é uma bola aberta.
- $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{B}(\text{Cil})$: como $\sigma^k(\mathcal{A})$ é o conjunto dos cilindros na posição k , interseções $A_{-n} \cap \dots \cap A_n$ com $A_k \in \sigma^k(\mathcal{A})$ são exatamente os cilindros da forma $C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$. Assim, $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{B}(\text{Cil})$.

- $\mathfrak{B}(\text{Cil}) \supset \mathbb{B}_\Sigma$: pelo Lema 1, todo aberto na topologia da métrica pode ser escrito como a união arbitrária de elementos de Cil. Por ser um espaço métrico compacto, Σ é completamente separável (isto é, sua topologia possui uma base enumerável - em inglês, um espaço com essa propriedade é chamado de “second countable”) e daí o teorema de Lindelöf se aplica. Em particular, todo aberto de Σ é igual à união *enumerável* de elementos de Cil e portanto pertence a $\mathfrak{B}(\text{Cil})$. Isso mostra que $\mathfrak{B}(\text{Cil}) \supset \mathbb{B}_\Sigma$.

Agora vamos definir a medida de probabilidade m_P . Nosso plano é definir uma família de medidas, chamadas *medidas de Markov*, e escolher dentre elas uma medida específica, chamada *medida de Parry*. Os detalhes da construção se encontram na Seção 5.4 do Apêndice.

Definição 34 (Matriz de probabilidade em Σ). *Uma matriz de probabilidade em Σ é uma matriz $T = (T_{i,j})_{N \times N}$ tal que:*

- $T_{i,j} \geq 0$ para todos $1 \leq i, j \leq N$.
- Se $T_{i,j} > 0$, então (i, j) é uma palavra em Σ , veja a Definição 10.
- $\sum_{j=1}^N T_{i,j} = 1$ para todo $1 \leq i \leq N$, isto é, a soma das entradas de cada linha é igual a 1.

Definição 35 (Vetor de probabilidade para T). *Dada uma matriz de probabilidade T em Σ , dizemos que um vetor linha $v = (v_1, \dots, v_N)$ é um vetor de probabilidade para T se:*

- $v_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq N$.
- $\sum_{i=1}^N v_i = 1$.
- $vT = v$.

Definição 36 (Medida de Markov). *Seja T uma matriz de probabilidade em Σ , e seja v um vetor linha de probabilidade para T . A medida de Markov gerada por T, v é a medida de probabilidade definida em Cil pela igualdade*

$$m[C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)] = v_{a_{-n}} \prod_{k=-n}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}}.$$

Ressaltamos que a mesma definição pode ser feita em shifts unilaterais, tomando

$$m[C_{0,n}(a_0, \dots, a_n)] = v_{a_0} \prod_{k=0}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}}.$$

A Seção 5.4 fornece todos os detalhes da boa-definição da medida de Markov. No que segue, mostramos que m é invariante por σ . Dado um cilindro $C = C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$, temos

$$\sigma^{-1}(C) = C_{-n+1,n+1}(a_{-n}, \dots, a_n) = \bigcup_{i,j \in \{1, \dots, N\}} C_{-(n+1),n+1}(i, j, a_{-n}, \dots, a_n)$$

e daí

$$m[\sigma^{-1}(C)] = \sum_{i,j \in \{1, \dots, N\}} v_i T_{i,j} T_{j,a-n} \prod_{k=-n}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}} = \left[\sum_{i,j \in \{1, \dots, N\}} v_i T_{i,j} T_{j,a-n} \right] \prod_{k=-n}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}}.$$

A soma $\sum_{i,j \in \{1, \dots, N\}} v_i T_{i,j} T_{j,a-n}$ é igual à a_{-n} -ésima entrada do vetor linha $vT^2 = v$, ou seja, é igual a $v_{a_{-n}}$. Assim,

$$m[\sigma^{-1}(C)] = v_{a_{-n}} \prod_{k=-n}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}} = m[C].$$

Agora, especificamos a construção acima para definir a medida m_P . De agora em diante, assumimos que a matriz de transição (A_{ij}) que define Σ é irredutível, veja a Definição 6. Precisamos do seguinte resultado.

Teorema 8 (Perron-Frobenius). *Se A é uma matriz de transição irredutível, então A possui um autovalor $\lambda > 0$ tal que:*

- (a) λ é um autovalor simples de A .
- (b) $\lambda \geq |\mu|$ para qualquer outro autovalor μ de A .
- (c) λ possui autovetores coluna e linha com todas as entradas positivas, e essa condição caracteriza λ .

O autovalor λ é chamado de valor de Perron de A .

De fato, o teorema de Perron-Frobenius vale para matrizes que não são de transição, veja uma formulação mais geral em (KITCHENS, 1998, Theorem 1.3.5). Aplicando o teorema acima para a matriz de transição (A_{ij}) que define Σ , seja λ seu valor de Perron, e sejam w e u autovetores coluna e linha associados a λ , respectivamente. Escreva $w = (w_1, \dots, w_N)$ e $u = (u_1, \dots, u_N)$. Normalize u de modo que $\sum_{i=1}^N w_i u_i = 1$, e defina $v = (v_1, \dots, v_N)$ pondo $v_i = w_i u_i$. Por fim, defina a matriz de probabilidade $T = (T_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ pondo

$$T_{i,j} = \frac{w_j A_{i,j}}{\lambda w_i}.$$

É fácil ver que v é um vetor linha para T , de modo que a próxima definição faz sentido.

Definição 37 (Medida de Parry). *A medida de Parry de Σ é a medida de Markov gerada por T, v . Denotamos essa medida por m_P .*

A definição vale tanto para shifts bilaterais quanto unilaterais. Nos shifts bilaterais, se (a_{-n}, \dots, a_n) é uma palavra então

$$\begin{aligned} m_P[C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)] &= w_{a_{-n}} u_{a_{-n}} \prod_{k=-n}^{n-1} \frac{w_{a_{k+1}} A_{a_k, a_{k+1}}}{\lambda w_{a_k}} \\ &= w_{a_{-n}} u_{a_{-n}} \prod_{k=-n}^{n-1} \frac{w_{a_{k+1}}}{\lambda w_{a_k}} = w_{a_n} u_{a_{-n}} \frac{1}{\lambda^{2n}} = \left(\frac{w_{a_n}}{\lambda^n} \right) \left(\frac{u_{a_{-n}}}{\lambda^n} \right). \end{aligned}$$

Nos shifts unilaterais, se (a_0, \dots, a_n) é uma palavra então

$$m_P[C_{0,n}(a_0, \dots, a_n)] = w_{a_n} u_{a_0} \frac{1}{\lambda^n} = u_{a_0} \left(\frac{w_{a_n}}{\lambda^n} \right).$$

5.2.4 A aplicação π preserva medida

Agora mostraremos que $\mu = m_P \pi^{-1}$. A prova original dada por Adler & Weiss (ADLER; WEISS, 1967) utiliza uma propriedade importante sobre m_P , provada por Parry: m_P é a única medida de máxima entropia. Nessa dissertação, provaremos a igualdade $\mu = m_P \pi^{-1}$ de modo puramente geométrico, sem utilizar que m_P maximiza a entropia. Seja $\mathcal{R}^* = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ a partição consistindo de N paralelogramos abertos definida na Seção 4.4. Vimos na Seção 4.5 que $\bigvee_{k=-n}^n \phi^{-k} \mathcal{R}^*$ é uma partição cujos átomos possuem diâmetros exponencialmente pequenos em n . Portanto, basta checarmos a igualdade $\mu = m_P \pi^{-1}$ para todos os elementos de $\bigvee_{k=-n}^n \phi^{-k} \mathcal{R}^*$, para todo $n \geq 0$.

Seja $w = (w_1, \dots, w_N)$ o vetor coluna onde w_i é igual ao tamanho do lado paralelo a ℓ_λ do paralelogramo R_i . Similarmente, seja $u = (u_1, \dots, u_N)$ o vetor linha onde u_i é igual ao tamanho do lado paralelo a ℓ_μ do paralelogramo R_i . Noutras palavras, se considerarmos os eixos coordenados onde ℓ_λ é o eixo horizontal e ℓ_μ é o eixo vertical, então w_i e u_i são respectivamente a largura e a altura do paralelogramo R_i . Repare que todas as entradas de w, u são positivas.

Seja $A = (A_{i,j})$ a matriz de transição de Σ , i.e.

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \phi R_i \cap R_j \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

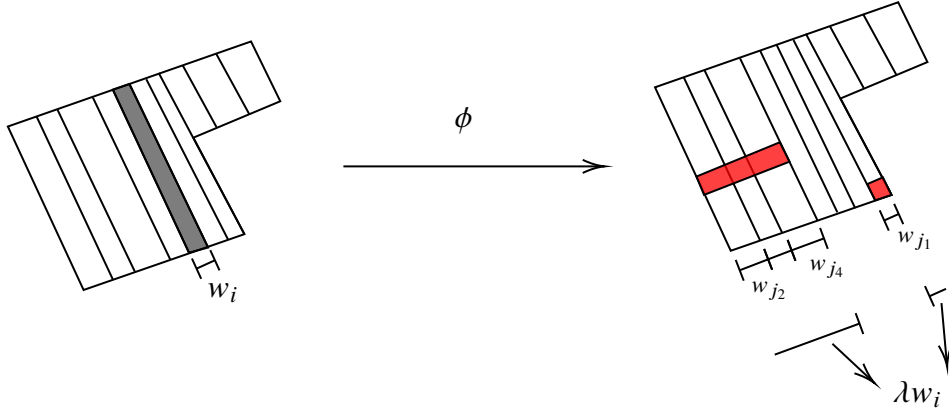
Afirmamos que $|\lambda|$ é o autovalor de Perron de A , e que w, u são autovetores satisfazendo o Teorema 8(c). Como as entradas de w, u são positivas, basta checarmos as igualdades $Aw = |\lambda|w$ e $uA = |\lambda|u$. Vejamos como provar isso. A n -ésima linha/coluna de A representa as interseções de R_n com os demais paralelogramos. Em particular, a i -ésima entrada do produto Aw está

relacionada com os paralelogramos R_j que intersectam a imagem ϕR_i . Mais especificamente,

$$(Aw)_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ \phi R_i \cap R_j \neq \emptyset}} w_j$$

é igual à soma das larguras dos paralelogramos R_j que intersectam ϕR_i . Pela propriedade de Markov, essa soma é igual à largura de ϕR_i , ou seja, é igual a $|\lambda|w_i$. Veja a Figura 43. Assim, $(Aw)_i = |\lambda|w_i$ para todo i e portanto $Aw = |\lambda|w$.

Figura 43 – À esquerda, o paralelogramo cinza é R_i . À direita, cada interseção não-vazia $\phi R_i \cap R_{j_k}$ tem largura w_{j_k} . A largura total de ϕR_i é $|\lambda|w_i$. A figura representa uma situação em que quatro interseções são não-vazias.



Fonte: elaborada pelo autor.

A igualdade $uA = |\lambda|u$ é provada de modo similar. Comece observando que a j -ésima entrada do produto uA está relacionada com os paralelogramos R_i cuja imagem ϕR_i intersecta R_j . Mais especificamente,

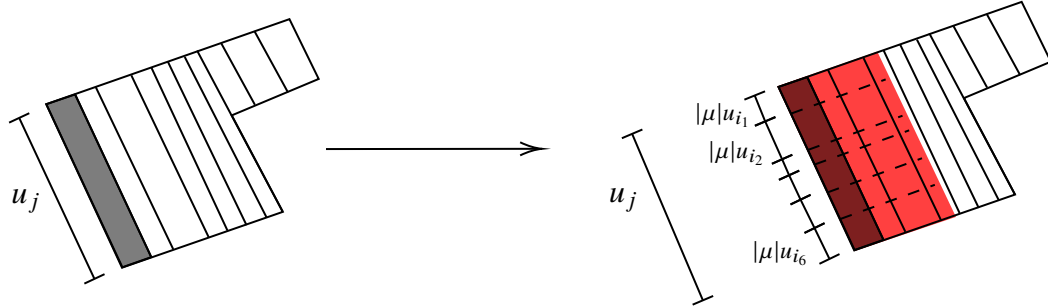
$$(uA)_j = \sum_{1 \leq i \leq N} u_i A_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \phi R_i \cap R_j \neq \emptyset}} u_i$$

é igual à soma das alturas dos paralelogramos R_i cuja imagem ϕR_i intersecta R_j . Agora, repare que para cada tal R_i , a altura de ϕR_i é igual a $|\mu|u_i$. Pela propriedade de Markov, a altura do paralelogramo R_j é igual à soma das alturas dos paralelogramos ϕR_i que o intersectam, ou seja:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \phi R_i \cap R_j \neq \emptyset}} |\mu|u_i = u_j \implies \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \phi R_i \cap R_j \neq \emptyset}} u_i = \frac{1}{|\mu|}u_j = |\lambda|u_j.$$

Veja a Figura 44. Assim, $(uA)_j = |\lambda|u_j$ para todo j e portanto $uA = |\lambda|u$.

Figura 44 – À esquerda, o paralelogramo cinza é R_j . À direita, cada interseção não-vazia $\phi R_{i_k} \cap R_j$ tem altura $|\mu|u_{i_k}$. A figura representa uma situação em que seis interseções são não-vazias.



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos agora dar um significado geométrica à normalização de u necessária para associar μ à medida de Parry m_P . Se α é o ângulo entre ℓ_μ e ℓ_λ , então

$$1 = \text{Área}(\mathbb{T}^2) = \sum_{i=1}^N \text{Área}(R_i) = \sum_{i=1}^N w_i u_i \sin(\alpha).$$

Multiplicando u por $\sin(\alpha)$, obtemos que $\sum_{i=1}^N w_i u_i = 1$. Portanto, definindo $v = (v_1, \dots, v_N)$ por $v_i = w_i u_i$, a medida de Parry m_P é igual à medida de Markov gerada por T, v . Ademais,

$$\mu[R_i] = v_i = m_P[C_0(i)]$$

e portanto μ e $m_P \pi^{-1}$ coincidem nos conjuntos de \mathcal{R} .

Para concluir, precisamos mostrar que a área de um conjunto da forma $\bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}$ é igual a $m_P[C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)]$. Fixe uma palavra (a_{-n}, \dots, a_n) em Σ e seja $A = \bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k} R_{a_k}$. Vimos na Seção 4.5 que A é um paralelogramo, igual à interseção de duas faixas de R_0 :

- uma faixa vertical de largura igual a $|\mu|^n$ vezes a largura de R_{a_n} , e
- uma faixa horizontal de altura igual a $|\mu|^n$ vezes a altura de $R_{a_{-n}}$.

Assim, esse paralelogramo tem área igual a

$$(|\mu|^n w_{a_n}) (|\mu|^n u_{a_{-n}}) = \left(\frac{w_{a_n}}{|\lambda|^n} \right) \left(\frac{u_{a_{-n}}}{|\lambda|^n} \right) = m_P[C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)].$$

Isso conclui a prova da igualdade $\mu = m_P \pi^{-1}$.

5.2.5 Os sistemas $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, \mu, \phi)$ e $(\Sigma, \mathbb{B}_\Sigma, m_P, \sigma)$ são metricamente similares

Pelo que já vimos nas subseções anteriores, resta provar que existe um conjunto $X_0 \subset \mathbb{T}^2$ com $\mu[X_0] = 0$ tal que a restrição de π a $\Sigma \setminus \pi^{-1}(X_0)$ é uma bijeção sobre $\mathbb{T}^2 \setminus X_0$.

Vamos investigar quando π deixa de ser injetiva. Seja $L = \text{proj}(\ell_\lambda \cup \ell_\mu)$, um conjunto com medida de Lebesgue igual a zero. Assuma que $x = \pi[\underline{a}] = \pi[\underline{b}]$ onde $\underline{a}, \underline{b} \in \Sigma$ são distintos. Temos que $x \in \overline{R_{a_0}} \cap \overline{R_{b_0}}$. Mais geralmente, como $\phi^n(x) = \pi[\sigma^n(\underline{a})] = \pi[\sigma^n(\underline{b})]$, temos que $\phi^n(x) \in \overline{R_{a_n}} \cap \overline{R_{b_n}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Escolhendo n tal que $a_n \neq b_n$, a interseção $\overline{R_{a_n}} \cap \overline{R_{b_n}}$ está contida em L e portanto $\phi^n(x) \in L$. Isso mostra que x pertence ao conjunto

$$X_0 := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \phi^{-n} L.$$

Pela invariância de μ , temos que $\mu[X_0] = 0$. Isso conclui a prova da similaridade métrica.

5.3 Cálculo da entropia de $(\Sigma, \mathbb{B}_\Sigma, m_P, \sigma)$

Considere a partição $\mathcal{A} = \{C_{0,0}(1), C_{0,0}(2), \dots, C_{0,0}(N)\}$, introduzida na Seção 5.2.3. Como $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathbb{B}_\Sigma$, \mathcal{A} é uma partição geradora para ϕ , e portanto o Teorema 7 implica que $h_{m_P}(\sigma) = h_{m_P}(\sigma, \mathcal{A})$. A partição $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \vee \sigma^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee \sigma^{-n+1}\mathcal{A}$ é formada pelos cilindros da forma $C_{0,n}(a_0, \dots, a_n)$. Pela definição de m_P , existe $C > 0$ tal que

$$\frac{C^{-1}}{|\lambda|^n} \leq -\log m_P[A] \leq \frac{C}{|\lambda|^n}, \quad \forall A \in \mathcal{A}^n, \forall n \geq 0.$$

Logo, $n \log |\lambda| - \log C \leq -\log \mu(A) \leq n \log |\lambda| + \log C$ para todo $A \in \mathcal{A}^n$ e daí

$$n \log |\lambda| - \log C \leq H_{m_P}(\mathcal{A}^n) \leq n \log |\lambda| + \log C.$$

Assim, $\log |\lambda| - \frac{\log C}{n} \leq \frac{1}{n} H_{m_P}(\mathcal{A}^n) \leq \log |\lambda| + \frac{\log C}{n}$ e portanto

$$h_{m_P}(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{m_P}(\mathcal{A}^n)}{n} = \log |\lambda|.$$

Pela similaridade métrica, concluímos que $h_\mu(\phi) = \log |\lambda| > 0$.

5.4 Contagem de pontos periódicos

Finalizamos esse capítulo apresentando um método para contar pontos periódicos de automorfismos hiperbólicos do toro. Seja ϕ um tal automorfismo.

Definição 38 (Ponto periódico). *Dizemos que $x \in \mathbb{T}^2$ é um ponto fixo de ϕ se $\phi(x) = x$. Denotamos o conjunto dos pontos fixos de ϕ por $\text{Fix}(\phi)$. Dizemos que x é um ponto periódico de ϕ se existe $n \geq 1$ tal que $\phi^n(x) \in \text{Fix}(\phi)$. Também denotamos o conjunto de tais pontos por $\text{Fix}_n(\phi)$.*

Relembre que a restrição de π a $\Sigma \setminus \pi^{-1}(X_0)$ é uma bijeção sobre $\mathbb{T}^2 \setminus X_0$, onde $X_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \phi^{-n}L$. Afirmamos que o único ponto periódico de ϕ em X_0 é o ponto fixo $0 \in \mathbb{T}^2$. Para provar essa afirmação, basta mostrar que 0 é o único ponto periódico em L . Para ver isso, lembre que $L = \text{proj}(\ell_\lambda \cup \ell_\mu)$ é a projeção de duas retas de inclinações irracionais. Assuma que $x \in \text{proj}(\ell_\lambda) \setminus \{0\}$ é periódico, com $\phi^n(x) = x$ para $n \geq 1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x \in \text{proj}(\ell_\lambda)$. Se $\tilde{x} \in \ell_\lambda$ satisfaz $\text{proj}(\tilde{x}) = x$, então $\text{proj}(\lambda^n \tilde{x}) = [\phi^n(x)] = [x] = \text{proj}(\tilde{x})$ e portanto $\lambda^n \tilde{x} - \tilde{x} \in \mathbb{Z}^2$. Como $\lambda^n \tilde{x} - \tilde{x}$ é um elemento de ℓ_λ e como ℓ_λ só intersecta \mathbb{Z}^2 em $(0,0)$, segue que $\tilde{x} = (0,0)$ e portanto $x = 0 \in \mathbb{T}^2$.

Feito isto, concluímos que para todo $n > 1$ a restrição de π a $\Sigma \setminus \pi^{-1}(X_0)$ induz uma bijeção entre $\text{Fix}_n(\sigma)$ e $\text{Fix}_n(\phi)$. De fato:

- Se $\underline{x} \in \Sigma \setminus \pi^{-1}(X_0)$ está em $\text{Fix}_n(\sigma)$, então $\phi^n(\pi(\underline{x})) = \pi(\sigma^n(\underline{x})) = \pi(\underline{x})$ e portanto $\pi(\underline{x}) \in \text{Fix}_n(\phi)$.
- Reciprocamente, assuma que $\pi(\underline{x}) \in \mathbb{T}^2 \setminus X_0$ está em $\text{Fix}_n(\phi)$. Como $\pi(\sigma^n(\underline{x})) = \phi^n(\pi(\underline{x})) = \pi(\underline{x})$ e π é injetiva em $\Sigma \setminus \pi^{-1}(X_0)$, segue que $\sigma^n(\underline{x}) = \underline{x}$ e portanto $\underline{x} \in \text{Fix}_n(\sigma)$.

Assim, basta calcular o número de elementos de $\text{Fix}_n(\sigma)$. Essa quantidade é igual ao total de palavras admissíveis (a_0, \dots, a_n) de tamanho n com $a_0 = a_n$, e pode ser calculada a partir do seguinte resultado. Assuma que $A = (A_{i,j})$ seja a matriz de transição associada a Σ .

Lema 10. *O total de palavras admissíveis (i, \dots, j) de tamanho n é igual a $(A^n)_{ij}$. Em particular, $\text{Fix}_n(\sigma) = \text{tr}(A^n)$.*

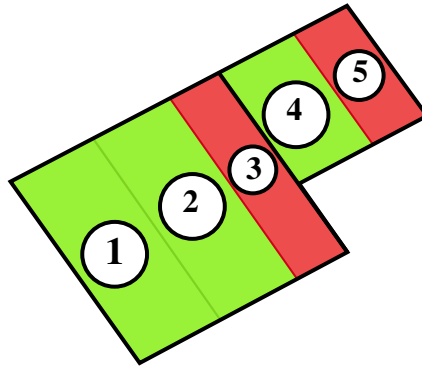
Demonstração. A prova é por indução em n . Para $n = 1$, a igualdade segue da própria definição de matriz de transição. Suponha o resultado válido para n . Toda palavra (i, \dots, j) de tamanho $n+1$ de i até j é igual à concatenação de uma palavra de tamanho n da forma (i, \dots, k) com a transição (k, j) . Portanto, o total de palavras admissíveis (i, \dots, j) de tamanho $n+1$ é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,j) \text{ admissível}} \#\{(i, \dots, k) \text{ admissível de tamanho } n\} \\ &= \sum_k \#\{(i, \dots, k) \text{ de tamanho } n \text{ admissível}\} \cdot A_{k,j} \\ &= \sum_k (A^n)_{i,k} \cdot A_{k,j} \end{aligned}$$

que, pela definição do produto de matrizes, é igual a $(A^{n+1})_{i,j}$. □

Vamos exemplificar o resultado tomando o cat map. Considere a partição \mathcal{R}^* , descrita na Seção 4.6, e rotule seus elementos, conforme a figura abaixo.

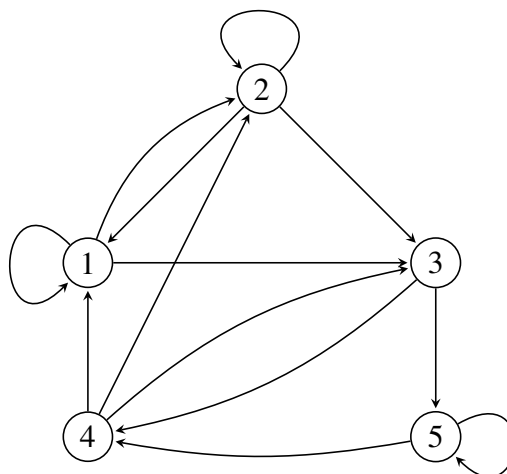
Figura 45 – A partição \mathcal{R}^* .



Fonte: elaborada pelo autor.

O grafo orientado definido por \mathcal{R}^* é

Figura 46 – O grafo do exemplo



Fonte: elaborada pelo autor.

e a matriz de adjacência associada é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para entendermos, por exemplo, a quantidade de caminhos de tamanho 4 entre quaisquer dois

vértices do grafo, devemos tomar a quarta potência de A :

$$A^4 = \begin{bmatrix} 13 & 13 & 13 & 8 & 8 \\ 13 & 13 & 13 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 5 & 5 \\ 13 & 13 & 13 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, existem 13 caminhos de tamanho 4 partindo do vértice 1 e chegando ao vértice 2. Já o total de caminhos de tamanho 4 partindo do vértice 3 e chegando ao vértice 4 é 5. De fato, são eles:

- $3 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

Por fim, temos $\text{Fix}_4(\phi) = \text{tr}(A) = 47$.

REFERÊNCIAS

- ADLER, R. L. Symbolic dynamics and Markov partitions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, United States, v. 35, n. 1, p. 1–56, 1998.
- ADLER, R. L.; WEISS, B. Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, United States, v. 57, p. 1573–1576, 1967.
- ADLER, R. L.; WEISS, B. *Similarity of automorphisms of the torus*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1970. ii, 43 p. (Memoirs of the American Mathematical Society, n. 98).
- BOWEN, R. Markov partitions are not smooth. *Proceedings of the American Mathematical Society*, United States, v. 71, n. 1, p. 130–132, 1978.
- D, V. I. A.; AVEZ, A. *Ergodic problems of classical mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1968.
- FOLLAND, G. B. *Real analysis*. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999. xvi, 386 p.
- KITCHENS, B. P. *Symbolic dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 1998. x, 252 p.
- LEE, J. M. *Introduction to topological manifolds*. 2nd. ed. New York: Springer, 2011. v. 202. xviii, 433 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 202).
- MUNKRES, J. R. *Topology*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. xvi, 537 p.
- SINA, J. G. Markov partitions and U-diffeomorphisms. *Funkcional. Anal. i Priložen*, [s.l.], v. 2, n. 1, p. 64–89, 1968.

APÊNDICE A - MEDIDAS DE HAAR E MEDIDAS DE MARKOV

A medida μ é de Haar

Esta seção prova que a medida μ introduzida na Definição 32 é a medida de Haar do toro \mathbb{T}^2 . Ao longo da discussão, introduziremos os conceitos de grupos topológicos, espaços localmente compactos e medidas de Radón. Começamos fazendo algumas observações úteis. Como \mathbb{T}^2 é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, temos as seguintes propriedades:

- \mathbb{T}^2 é compacto: de fato, \mathbb{S}^1 é compacto e portanto pelo Teorema de Tychonoff segue que $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é compacto.
- \mathbb{T}^2 é metrizável: de fato, \mathbb{S}^1 é metrizável, e o mesmo vale para o produto $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- \mathbb{T}^2 é completamente separável: de fato, \mathbb{S}^1 é completamente separável, e o mesmo vale para o produto $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Relembre que o espaço topológico é completamente separável se sua topologia possuir uma base enumerável - em inglês, um espaço com essa propriedade é chamado de “second countable”.

Grupos topológicos

Definição 39 (Grupo topológico). *Um grupo topológico é um grupo G munido de uma topologia τ para a qual as operações de produto*

$$P : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

e inversão

$$I : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

são contínuas.

Queremos aqui mostrar que \mathbb{T}^2 é grupo topológico Hausdorff e localmente compacto. Começamos definindo a operação de grupo em \mathbb{T}^2 . De agora em diante, denotamos $\text{proj}(\cdot)$ por $[\cdot]$. A estrutura de grupo topológico (aditivo) de \mathbb{R}^2 induz uma estrutura de grupo topológico (aditivo) em \mathbb{T}^2 , ou seja, definimos $P : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ por

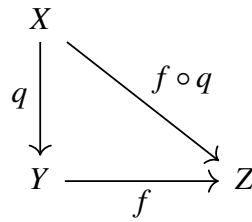
$$[a] + [b] = [a + b].$$

O elemento neutro é $[0]$ e a inversão é $[a] \mapsto [-a]$. É fácil ver que a soma/diferença definidas desse modo não dependem da escolha de representantes. De fato, se $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$, então $(a \pm b) - (a' \pm b') = (a - a') \pm (b - b') \in \mathbb{Z}$ e portanto $[a \pm b] = [a' \pm b']$.

O próximo passo é provar a continuidade das operações acima definidas. Para isso, utilizaremos alguns resultados clássicos sobre a topologia quociente, veja e.g. (MUNKRES, 2000; LEE, 2011).

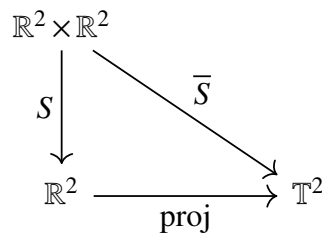
Definição 40 (Aplicação quociente). *Dados espaços topológicos X, Y , dizemos que uma aplicação sobrejetora $q : X \rightarrow Y$ é uma aplicação quociente quando U é aberto em Y se e somente se $q^{-1}(U)$ é aberto em X .*

Teorema 9 (Propriedade característica da topologia quociente). *Sejam X e Y espaços topológicos e $q : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente. Para qualquer espaço topológico Z , uma aplicação $f : Y \rightarrow Z$ é contínua se e só se a aplicação composta $f \circ q$ é contínua.*



Demonstração. Segue imediatamente do seguinte fato: se $U \subset Z$ é aberto, então $f^{-1}(U)$ é aberto em Y se e somente se $q^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ q)^{-1}(U)$ é aberto em X . \square

Procedemos agora para provar a continuidade de P, I . Seja $S : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $S(x, y) = x + y$ e $\bar{S} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $\bar{S} = \text{proj} \circ S$.



Note que \bar{S} é a composição de funções contínuas, logo é contínua. Seja agora $\text{proj} \times \text{proj} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ dada por $(\text{proj} \times \text{proj})(x, y) = ([x], [y])$. Como o produto de funções contínuas é uma função contínua (veja e.g. (LEE, 2011, pp. 62)), temos que $\text{proj} \times \text{proj}$ é contínua. Afirmamos que $\text{proj} \times \text{proj}$ é também uma aplicação quociente. Uma vez provado isso,

como o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & & \\
 \text{proj} \times \text{proj} \downarrow & \searrow \bar{S} & \\
 \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{P} & \mathbb{T}^2
 \end{array}$$

é comutativo, o Teorema 9 implicará que P é contínua. No que segue, mostraremos que $\text{proj} \times \text{proj}$ é uma aplicação quociente.

A função $\text{proj} \times \text{proj}$ é claramente sobrejetiva, portanto basta mostrar que a topologia produto de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ coincide com a topologia induzida por $\text{proj} \times \text{proj}$, ou seja, que $U \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ é aberto se e somente se $(\text{proj} \times \text{proj})^{-1}(U)$ é aberto. Como $\text{proj} \times \text{proj}$ é contínua, se $U \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ é aberto então $(\text{proj} \times \text{proj})^{-1}(U)$ é aberto. Reciprocamente, assuma que $(\text{proj} \times \text{proj})^{-1}(U)$ é aberto. Então podemos escrever

$$(\text{proj} \times \text{proj})^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$$

onde $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$ são famílias de abertos em \mathbb{R}^2 . Como proj é sobrejetora, segue que

$$\begin{aligned}
 U &= \bigcup_{i \in I} (\text{proj} \times \text{proj})(A_i \times B_i) = \bigcup_{i \in I} \text{proj}(A_i) \times \text{proj}(B_i) \\
 &= \text{proj} \left[\bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} A_i + (n,m) \right] \times \text{proj} \left[\bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} B_i + (n,m) \right]
 \end{aligned}$$

Como $\bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} A_i + (n,m)$ e $\bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} B_i + (n,m)$ são saturados com respeito a proj (ou seja, é a pré-imagem de sua imagem por proj), suas imagens por proj são abertas e portanto U é aberto.

Isso conclui a prova de que P é contínua.

Mostrar que I é contínua é mais simples. A função $\bar{I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida $\bar{I}(x) = [-x]$ é contínua, por ser a composição $\bar{I} = \text{proj} \circ (-\text{Id})$ de funções contínuas (veja o diagrama comutativo abaixo).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & & \\
 -\text{Id} \downarrow & \searrow \bar{I} & \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{proj}} & \mathbb{T}^2
 \end{array}$$

Observando que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & & \\
 \text{proj} \downarrow & \searrow \bar{I} & \\
 \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{I} & \mathbb{T}^2
 \end{array}$$

também comuta, o Teorema 9 implica que \bar{I} é contínua. Em suma, provamos que \mathbb{T}^2 é um grupo topológico.

Medidas de Haar

Definição 41 (Espaço localmente compacto). *Um espaço topológico (X, τ) é dito localmente compacto se para todo $x \in X$ existem vizinhança U aberto e K compacto K tais que $x \in U \subseteq K$.*

Obviamente, todo espaço compacto é localmente compacto. Em particular, \mathbb{T}^2 é localmente compacto. É fácil ver que \mathbb{T}^2 é também um espaço Hausdorff.

Definição 42 (Grupo localmente compacto). *Um grupo G é chamado um grupo localmente compacto se G é um grupo topológico e sua topologia é Hausdorff e localmente compacta.*

Logo, \mathbb{T}^2 é um grupo localmente compacto.

Definição 43 (Medida regular). *Dado um espaço de medida (X, \mathcal{M}, m) , dizemos que m é:*

- regular exterior se para todo $A \in \mathcal{M}$ vale que $m(A) = \inf\{m(U) : U \supset A \text{ aberto}\}$.
- regular interior se para todo $A \in \mathcal{M}$ vale que $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto}\}$.
- regular se for regular exterior e regular interior.

Definição 44 (Medida de Radón). *Dizemos que m é uma medida de Radón se for regular e finita em compactos.*

Dado um grupo localmente compacto G , seja \mathbb{B}_G sua sigma-álgebra de Borel.

Definição 45 (Medida de Haar). *Uma medida m em \mathbb{B}_G é uma medida de Haar esquerda se:*

- m é não nula.
- m é invariante à esquerda, isto é, $m(A) = m(xA)$ para todos $A \in \mathbb{B}_G$ e $x \in G$.
- m é de Radon.

Definimos similarmente uma medida de Haar direita.

O principal resultado sobre medidas de Haar é o seguinte.

Teorema 10 (Haar). *Todo grupo localmente compacto G possui uma medida de Haar esquerda. Mais ainda, se m, \tilde{m} são medidas de Haar esquerdas em G , então existe uma constante $c > 0$ tal que $m = c\tilde{m}$.*

Veja a prova em (FOLLAND, 1999, pp. 344). Obviamente, se G é abeliano, então não precisamos explicitar se a medida de Haar é esquerda ou direita. Usando que Leb é a medida de Haar de \mathbb{R}^2 , provaremos na sequência que μ é a medida de Haar de \mathbb{T}^2 . Como $\mu(\mathbb{T}^2) = 1$, basta mostrar que μ é invariante por translações e regular. Começamos provando a invariância por translações, i.e. que $\mu(A + [c]) = \mu(A)$ para todos $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}$ e $c \in \mathbb{R}^2$. Fixado um domínio fundamental D , essa igualdade equivale a provar que $\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A + [c]) \cap D) = \text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A) \cap D)$. Afirmamos que $\text{proj}^{-1}(A + [c]) = \text{proj}^{-1}(A) + c$. De fato: $\circ\circ$

1. $\text{proj}^{-1}(A + [c]) = \text{proj}^{-1}\{[a] + [c] : a \in \text{proj}^{-1}(A)\} = \text{proj}^{-1}\{[a + c] : a \in \text{proj}^{-1}(A)\} \supset \text{proj}^{-1}(A) + c$.
2. Reciprocamente, se $x \in \text{proj}^{-1}(A + [c])$ então $[x - c] = [x] - [c] \in A$ e daí $x - c \in \text{proj}^{-1}(A)$, provando que $x \in \text{proj}^{-1}(A) + c$.

Assim,

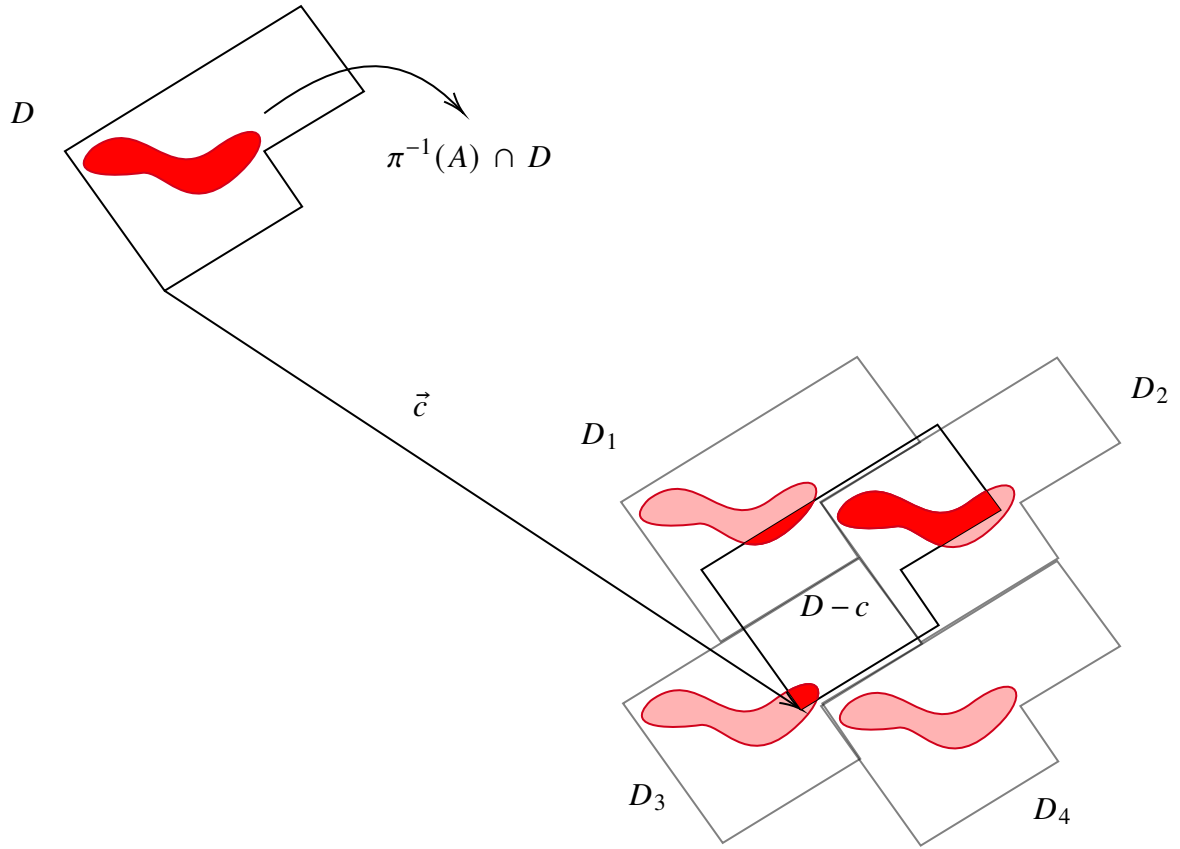
$$\begin{aligned} \text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A + [c]) \cap D) &= \text{Leb}((\text{proj}^{-1}(A) + c) \cap D) \\ &= \text{Leb}((\text{proj}^{-1}(A)) \cap (D - c)), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que Leb é invariante por translações (pois é a medida de Haar de \mathbb{R}^2). Para calcular essa última medida, note que $D - c$ é também um domínio fundamental e portanto, a menos da fronteira, podemos representar A dentro de tal domínio. Mais especificamente, considerando o conjunto de medida nula $N_c = \text{proj}^{-1}(A) \cap \partial(D - c)$, temos que a restrição de proj ao conjunto $\tilde{A} = (\text{proj}^{-1}(A) \setminus N_c) \cap (D - c)$ é uma bijeção sobre $A \setminus \text{proj}(N_c)$. Logo, $\text{Leb}((\text{proj}^{-1}(A)) \cap (D - c)) = \text{Leb}(\tilde{A})$. Sendo $D_i = D + (n_i, m_i)$, $i = 1, \dots, k$, os translados de D tais que $\text{int}(D_i) \cap \text{int}(D - c) \neq \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned} \text{Leb}(\tilde{A}) &= \sum_{i=1}^k \text{Leb}(\tilde{A} \cap D_i) = \sum_{i=1}^k \text{Leb}((\tilde{A} - (n_i, m_i)) \cap D) \\ &= \text{Leb}\left(\left(\bigcup_{i=1}^k [\tilde{A} - (n_i, m_i)]\right) \cap D\right) = \text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A) \cap D), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que \tilde{A} possui um único representante para cada classe de equivalência em $A \setminus \text{proj}(N_c)$. A imagem abaixo ilustra a situação.

Figura 47 – Decomposição de \tilde{A} (conjunto em vermelho) entre os translados de D .



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, mostraremos que μ é regular. Como Leb é a medida de Haar de \mathbb{R}^2 , ela é regular. Começamos provando a regularidade exterior de μ . Como $\text{Leb}(\partial D) = 0$, temos $\mu(A) = \text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A) \cap D) = \text{Leb}(\text{proj}^{-1}(A) \cap \text{int}(D))$. Sendo $\hat{A} = \text{proj}^{-1}(A) \cap \text{int}(D)$ e usando que Leb é regular exterior, temos que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \text{Leb}(\hat{A}) = \inf\{\text{Leb}(U) : U \text{ é aberto e } \hat{A} \subset U \subset \text{int}(D)\} \\ &= \inf\{\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(\text{proj}(U)) \cap \text{int}(D)) : U \text{ é aberto e } \hat{A} \subset U \subset \text{int}(D)\} \end{aligned}$$

Como a restrição de proj a $\text{int}(D)$ é um homeomorfismo sobre $\text{proj}(\text{int}(D)) = \mathbb{T}^2 \setminus \text{proj}(\partial D)$, ao variar os abertos dentro de $\text{int}(D)$, variamos bijetivamente os abertos dentro de $\text{proj}(\text{int}(D))$, e portanto

$$\begin{aligned} &\inf\{\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(\text{proj}(U)) \cap \text{int}(D)) : U \text{ é aberto e } \hat{A} \subset U \subset \text{int}(D)\} \\ &= \inf\{\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(\tilde{U}) \cap \text{int}(D)) : \tilde{U} \text{ é aberto e } \text{proj}(\hat{A}) \subset \tilde{U} \subset \text{proj}(\text{int}(D))\} \\ &= \inf\{\mu(\tilde{U}) : \tilde{U} \text{ é aberto e } \text{proj}(\hat{A}) \subset \tilde{U} \subset \text{proj}(\text{int}(D))\} \end{aligned}$$

Como $\mu(A \setminus \pi(\partial D)) = \mu(A)$, o último ínfimo acima é igual a $\inf\{\mu(\tilde{U}) : \tilde{U} \text{ é aberto e } \text{proj}(\hat{A}) \subset \tilde{U}\} = \inf\{\mu(\tilde{U}) : \tilde{U} \text{ é aberto e } A \subset \tilde{U}\}$. Assim, obtemos que

$$\mu(A) = \inf\{\mu(\tilde{U}) : \tilde{U} \text{ é aberto e } A \subset \tilde{U}\}.$$

Quanto à regularidade interior, observamos que há uma correspondência *quase* biunívoca entre os compactos de D e os compactos de \mathbb{T}^2 , por meio das aplicações:

$$\begin{aligned} K \subset D &\longmapsto \pi(K) \\ \text{proj}^{-1}(\tilde{K}) \cap D &\longleftarrow \tilde{K} \subset \mathbb{T}^2 \end{aligned}$$

Nesta correspondência, $\text{proj}(K)$ é compacto porque proj é contínua e $\text{proj}^{-1}(\tilde{K}) \cap D$ é compacto porque é a interseção do compacto D com o fechado $\text{proj}^{-1}(\tilde{K})$. A correspondência cobre todos os compactos de \mathbb{T}^2 , mas podem existir compactos distintos de D que são levados no mesmo compacto de \mathbb{T}^2 . Estes, entretanto, só diferem em ∂D , que é um conjunto de medida nula. Assim

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \text{Leb}(\hat{A}) = \sup\{\text{Leb}(K) : K \subseteq \hat{A} \text{ é compacto}\} \\ &= \sup\{\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(\text{proj}(K)) \cap D) : K \subseteq \hat{A} \text{ é compacto}\} \\ &= \sup\{\text{Leb}(\text{proj}^{-1}(\tilde{K}) \cap D) : \tilde{K} \subseteq A \text{ é compacto}\} \\ &= \sup\{\mu(\tilde{K}) : \tilde{K} \subseteq A \text{ é compacto}\}. \end{aligned}$$

Isso conclui a prova da regularidade de μ . Assim, μ é a medida de Haar de \mathbb{T}^2 .

Medidas de Markov

Nessa seção, provamos que as medidas de Markov introduzidas na Definição 36 estão bem-definidas. Começamos enunciando novamente algumas definições da Seção 5.2.3. Seja (Σ, σ) uma cadeia topológica de Markov, com $\Sigma \subset \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$. Seja Cil a família de todos os cilindros da forma $C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$ para qualquer $n \geq 0$.

Definição 46 (Matriz de probabilidade em Σ). *Uma matriz de probabilidade em Σ é uma matriz $T = (t_{ij})_{N \times N}$ tal que:*

- $T_{ij} \geq 0$ para todos $1 \leq i, j \leq N$.
- Se $T_{ij} > 0$, então (i, j) é uma palavra em Σ , veja a Definição 10.
- $\sum_{j=1}^N T_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq N$, isto é, a soma das entradas de cada linha é igual a 1.

Definição 47 (Vetor de probabilidade para T). *Dada uma matriz de probabilidade T em Σ , dizemos que um vetor linha $v = (v_1, \dots, v_N)$ é um vetor de probabilidade de T se:*

- $v_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq N$.
- $\sum_{i=1}^N v_i = 1$.
- $vT = v$.

Analogamente, definimos um vetor coluna, trocando a terceira condição pela igualdade $Tv = v$.

Definição 48 (Medida de Markov). *Seja T uma matriz de probabilidade em Σ , e seja v um vetor linha de probabilidade de T . A medida de Markov gerada por T, v é a medida de probabilidade definida em Cil pela igualdade*

$$m[C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)] = v_{a_{-n}} \prod_{k=-n}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}}.$$

Ressaltamos que a mesma definição pode ser feita em shifts unilaterais, tomando

$$m[C_{0,n}(a_0, \dots, a_n)] = v_{a_0} \prod_{k=0}^{n-1} T_{a_k, a_{k+1}}.$$

Nosso objetivo é mostrar que m , definida acima para elementos de Cil , se estende para a sigma-álgebra \mathcal{B}' . A prova será feita em três etapas:

1. Definiremos o conceito de *família elementar* e mostraremos que $\text{Cil} \cup \{\emptyset\}$ é uma tal família.
2. Mostraremos se ξ é uma família elementar, então a família obtida por uniões finitas *disjuntas* de conjuntos de ξ forma uma álgebra.
3. Usaremos um teorema de extensão (baseado no teorema de extensão de Carathéodory) para estender uma pré-medida na álgebra gerada pela família elementar $\text{Cil} \cup \{\emptyset\}$ para sua sigma-álgebra gerada. Como mostraremos, essa sigma-álgebra é igual \mathcal{B}' .

Definição 49. *Uma família elementar é uma coleção ξ de subconjuntos de Σ tal que:*

- (i) $\emptyset \in \xi$.
- (ii) Se $A, B \in \xi$, então $A \cap B \in \xi$.
- (iii) Se $A \in \xi$, então existem $C_1, \dots, C_k \in \xi$ disjuntos tais que $\Sigma \setminus A = \bigcup_{i=1}^k C_i$.

A proposição abaixo completa o primeiro passo do nosso objetivo.

Proposição 6. *A família $\xi = \text{Cil} \cup \{\emptyset\}$ é uma família elementar.*

Demonstração. A condição (i) é óbvia, por definição.

(ii) Sejam $A, B \in \xi$. Se $A = \emptyset$ então $A \cap B = \emptyset \in \xi$, e o mesmo ocorre se $B = \emptyset$. Assuma agora que $A = C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$ e $B = C_{-m,m}(b_{-m}, \dots, b_m)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $m \leq n$. Temos dois casos:

- Se $a_k \neq b_k$ para algum $|k| \leq m$, então $A \cap B = \emptyset \in \xi$.
- Se $a_k = b_k$ para todo $|k| \leq m$, então $A \subset B$ e portanto $A \cap B = A \in \xi$.

(iii) Relembre a Definição 10. Se $A = \emptyset$, então

$$\Sigma \setminus A = \Sigma = \bigcup_{1 \leq i \leq N} C_{0,0}(i)$$

é a união disjunta de N elementos de ξ . Se $A = C_{-n,n}(a_{-n}, \dots, a_n)$, então

$$\Sigma \setminus A = \bigcup_{\substack{(b_{-n}, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_{2n+1} \\ (b_{-n}, \dots, b_n) \neq (a_{-n}, \dots, a_n)}} C_{-n,n}(b_{-n}, \dots, b_n)$$

é a união disjunta de no máximo $2^{2n+1} - 1$ elementos de ξ . A prova está completa. \square

Prosseguiremos agora para o segundo passo.

Definição 50 (Álgebra de conjuntos). *Dado um conjunto X , dizemos que uma família \mathcal{A} de subconjuntos de X é uma álgebra se:*

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
- (ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- (iii) Se $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}$.

É claro que qualquer família ξ de subconjuntos de X está contida em pelo menos uma álgebra (por exemplo, na álgebra de todos os subconjuntos de X). Como a interseção de álgebras é também uma álgebra, podemos definir a álgebra gerada por ξ , que denotaremos por $\mathcal{A}(\xi)$. Essa é a menor álgebra contendo ξ , e é igual à interseção de todas as álgebras contendo ξ . A próxima proposição caracteriza $\mathcal{A}(\xi)$ quando ξ é uma família elementar.

Proposição 7. *Se ξ é uma família elementar, então $\mathcal{A}(\xi)$ é igual à família de todas as uniões finitas disjuntas de elementos de ξ .*

Demonstração. Seja $\tilde{\mathcal{A}}$ a família de todas as uniões finitas disjuntas de elementos de ξ . É óbvio que qualquer álgebra que contém ξ deve conter $\tilde{\mathcal{A}}$, e portanto basta mostrar que $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma álgebra. Vamos checar as propriedades (i)–(iii). No que segue, $A^c = X \setminus A$.

(i) Pela propriedade (i) da Definição 49, temos $\emptyset \in \xi$ e daí $\emptyset \in \tilde{\mathcal{A}}$. Pela propriedade (iii) da Definição 49 aplicada ao conjunto vazio, temos que $X = \emptyset^c = \bigcup_{i=1}^k C_i$ para $C_1, \dots, C_k \in \xi$ disjuntos, e portanto $X \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(ii) Seja $A \in \tilde{\mathcal{A}}$, digamos $A = \bigcup_{i=1}^k C_i$ para $C_1, \dots, C_k \in \xi$ disjuntos. Pela propriedade (iii) da Definição 49, temos $C_i^c = \bigcup_{j=1}^{M_i} C_{i,j}$ para $C_{i,1}, \dots, C_{i,M_i} \in \xi$ disjuntos. Portanto,

$$A^c = \bigcap_{i=1}^k C_i^c = \bigcap_{i=1}^k \left(\bigcup_{j=1}^{M_i} C_{i,j} \right) = \bigcup_{\substack{1 \leq j_i \leq M_i \\ 1 \leq i \leq k}} (C_{1,j_1} \cap \dots \cap C_{k,j_k}),$$

e a última união acima é disjunta. Como cada $C_{1,j_1} \cap \dots \cap C_{k,j_k} \in \xi$, concluímos que $A^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(iii) Sejam $A, B \in \xi$. Pela propriedade (iii) da Definição 49, temos $B^c = \bigcup_{i=1}^k C_i$ para $C_1, \dots, C_k \in \xi$ disjuntos. Portanto $A \setminus B = A \cap B^c = \bigcup_{i=1}^k (A \cap C_i)$ está em $\tilde{\mathcal{A}}$. Como $\tilde{\mathcal{A}}$ é fechado para uniões disjuntas finitas, segue que $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ está em $\tilde{\mathcal{A}}$. Segue então por indução que $\tilde{\mathcal{A}}$ é fechado para uniões finitas. \square

Isso conclui o segundo passo. Para o terceiro e último passo, precisaremos introduzir a seguinte noção. Seja X um conjunto, e seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de X .

Definição 51 (Pré-medida). *Uma pré-medida em \mathcal{F} é uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ satisfazendo:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Se $\{E_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ são disjuntos e tais que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$, então

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

A diferença entre uma medida e uma pré-medida é que a pré-medida não precisa estar definida em uma sigma-álgebra, e portanto se $\{E_i\}_{i \geq 1} \in \mathcal{F}$ então, em princípio, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ não necessariamente está em \mathcal{F} mas, quando pertence, obedece à equação acima.

Estamos procedendo para mostrar a boa definição de m dada pela Definição 36, e em particular da medida de Parry dada pela Definição 37. Fixe T, ν , e seja $m : \xi \rightarrow [0, 1]$ a função dada pela Definição 36. Estendemos essa função para $m : \mathcal{A}(\xi) \rightarrow [0, 1]$ do seguinte modo: se

$A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ é uma união disjunta com $A_1, \dots, A_k \in \xi$, então

$$m(A) := \sum_{i=1}^k m(A_i).$$

Afirmamos que m é uma pré-medida bem definida em $\mathcal{A}(\xi)$. Começamos provando a boa definição. Assuma que $A = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j$, onde as uniões são disjuntas e $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{\ell} \in \xi$. Então $\{A_i \cap B_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell\}$ é uma partição de A por elementos de ξ que refina tanto $\{A_i\}_{i=1}^k$ quanto $\{B_j\}_{j=1}^{\ell}$, portanto

$$\sum_{i=1}^k m(A_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\ell} m(B_j).$$

Mostraremos agora que m de fato é uma pré-medida. Já sabemos que $m(\emptyset) = 0$.

Resta provar a condição (ii) da Definição 51. Antes de prosseguir, caracterizamos quando a união $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ de uma sequência $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ em ξ é também um cilindro. Afirmamos que necessariamente existem finitos C_{i_1}, \dots, C_{i_m} tais que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_m}$. Para provar isso, relembramos que todo cilindro é compacto e aberto, logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ é uma cobertura aberta de um compacto e portanto existe uma subcobertura finita.

Dito isso, procedemos para provar a condição (ii) da Definição 51. Assuma que $\{E_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{A}(\xi)$ são disjuntos não-vazios tais que $\{E_i\}_{i \geq 1} \in \mathcal{A}(\xi)$. Como cada E_i é a união disjunta de cilindros, o mesmo ocorre para $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$. Essa união disjunta se reduz a uma união finita, também disjunta, ou seja, $\{E_i\}_{i \geq 1} = C_{i_1} \sqcup \dots \sqcup C_{i_m}$, e daí por definição temos que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m(C_{i_1} \sqcup \dots \sqcup C_{i_m}) = \sum_{\ell=1}^m m(C_{i_{\ell}}) = \sum_{i \geq 1} m(E_i).$$

Proposição 8. *Se ξ é uma família elementar e $\mathcal{A}(\xi)$ é a álgebra gerada por ξ , então $\mathfrak{B}(\xi) = \mathfrak{B}(\mathcal{A}(\xi))$.*

Demonstração. Como $\xi \subset \mathcal{A}(\xi)$, tem-se $\mathfrak{B}(\xi) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A}(\xi))$. Por outro lado, $\mathcal{A}(\xi) \subset \mathfrak{B}(\xi)$ pois $\mathfrak{B}(\xi)$ contém todas as uniões enumeráveis de elementos de ξ e, em particular, contém todas as uniões finitas de ξ que, pela Proposição 7, é a álgebra $\mathcal{A}(\xi)$. Assim, $\mathfrak{B}(\mathcal{A}(\xi)) \subset \mathfrak{B}(\xi)$. \square

O último ingrediente que precisamos é o seguinte teorema.

Teorema 11. *Sejam \mathcal{A} uma álgebra e m_0 uma pré-medida σ -finita em \mathcal{A} . Então existe uma única medida em $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ que estende m_0 .*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (FOLLAND, 1999, pp. 31). Aplicando-o à pré-medida $m : \mathcal{A}(\xi) \rightarrow [0, 1]$ e usando a Proposição 8, concluímos que essa função se estende unicamente a uma medida $m : \mathbb{B}_\Sigma \rightarrow [0, 1]$. Assim, m dada pela Definição 36 está bem definida.