



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ANTÔNIO KLINGER GUEDÊLHA DA SILVA**

**PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA DA  
AGULHA DE BUFFON E APLICAÇÕES**

**FORTALEZA**

**2014**

ANTÔNIO KLINGER GUEDÊLHA DA SILVA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA DA AGULHA  
DE BUFFON E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

S578p Silva, Antônio Klinger Guedêlha da  
Probabilidade geométrica : generalizações do problema da agulha de Buffon e aplicações /Antônio  
Klinger Guedêlha da Silva. – 2014.  
74 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Probabilidades. 2. Diagnóstico por imagem. 3. Variáveis aleatórias. I. Título.

---

CDD 519.2

ANTÔNIO KLINGER GUEDÊLHA DA SILVA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA DA  
AGULHA DE BUFFON E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12 / 04 / 2014.

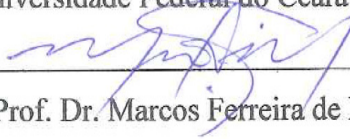
BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



---

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais Ricardo e Joazilda que através da educação me mostraram o caminho para a liberdade.

À minha esposa Nelda... minha inspiração, minha força, meu amor.

Aos nossos filhos Aline, Fernando e Marcos Vinícius a quem procuramos transmitir o nosso legado.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, cuja presença ao meu lado sinto em todos os momentos;

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a CAPES pela realização deste projeto;

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Marcelo Melo, pela ajuda na escolha do tema e pelas orientações práticas e esclarecedoras;

Aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos e experiências compartilhadas;

Aos colegas de curso, pela amizade, pelas horas de estudo produtivas e pelas conversas agradáveis.

À minha família, pelo apoio na realização desse ideal.

## RESUMO

O presente trabalho tem por finalidades: demonstrar o problema da agulha de Buffon, fazer uma pequena generalização do resultado obtido e apresentar aplicações baseadas nos fundamentos do referido problema. O problema da agulha de Buffon está inserido no estudo da Teoria das Probabilidades, particularmente na subárea de probabilidade geométrica. Para chegarmos à solução desta questão, além dos conceitos e propriedades atinentes à Teoria das probabilidades é necessário o conhecimento de noções básicas do cálculo integral. Nos capítulos 2, 3 e 4 é apresentado um estudo preliminar sobre probabilidade, com os conceitos básicos, propriedades e a formulação de alguns modelos probabilísticos. Durante o desenvolvimento do trabalho, sempre que possível, os conceitos e definições são inseridos com o auxílio de um problema motivador e para fixação dos mesmos são mostrados exemplos resolvidos. O último capítulo evidencia a importância do problema de Buffon como método para realizar estimativas e como fundamento para o processo de captação de imagens pelos aparelhos de tomografia computadorizada, um grande avanço para a Medicina no que diz respeito ao diagnóstico por imagens.

**Palavras-chave:** Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento. Probabilidade. Probabilidade geométrica. Variável aleatória. Agulha de Buffon. Tomografia computadorizada.

## ABSTRACT

This paper has the objective of showing Buffon's needle problem, doing a minor generalization of the results obtained hereby, and also presenting some applications based upon the fundamentals of such problem. Buffon's needle problem has been inserted into the study of Theory of Probability, particularly in its sub-area of geometrical probability. In order to attain the solution to this question, in addition to the concepts and the properties concerning the theory of probabilities, it is necessary that one should have some basic knowledge about integral calculus. In chapters 2, 3, and 4 there is a preliminary study of probability, with the basic concepts, properties and formulation of some probabilistic models being presented. During the development of this paper, whenever it was possible, the concepts and definitions were inserted with the aid of a motivational problem and they were solved by means of fixing the same examples as shown. The final chapter presents the importance of Buffon's needle problem as a method of making estimates and as a foundation for the process of capturing images in CT (computerized tomography) scanning machines, such a great breakthrough in what concerns the diagnosis by means of imaging.

**Keywords:** Random Experiment. Sample Space. Event. Probability. Geometrical Probability. Random Variable. Buffon's needle. Computerized Tomography.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PROBABILIDADE</b> .....	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Experimento aleatório</b> .....	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Espaço amostral de um experimento aleatório</b> .....	<b>10</b>
<b>2.3</b>	<b>Evento</b> .....	<b>11</b>
<b>2.3.1</b>	<i>União e interseção de eventos</i> .....	<b>12</b>
<b>2.3.2</b>	<i>Diferença de eventos</i> .....	<b>13</b>
<b>2.3.3</b>	<i>Evento complementar</i> .....	<b>13</b>
<b>2.4</b>	<b>Probabilidade de um evento</b> .....	<b>15</b>
<b>2.4.1</b>	<i>Espaço amostral equiprovável</i> .....	<b>17</b>
<b>2.5</b>	<b>Probabilidade Condicional</b> .....	<b>24</b>
<b>2.5.1</b>	<i>Probabilidade total</i> .....	<b>29</b>
<b>2.5.2</b>	<i>Eventos independentes</i> .....	<b>33</b>
<b>2.6</b>	<b>O modelo binomial</b> .....	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>PROBABILIDADE GEOMÉTRICA</b> .....	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>O conceito de probabilidade geométrica</b> .....	<b>38</b>
<b>3.2</b>	<b>Aplicações da probabilidade geométrica</b> .....	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS</b> .....	<b>46</b>
<b>4.1</b>	<b>Conceito de variável aleatória</b> .....	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Variável aleatória discreta</b> .....	<b>47</b>
<b>4.2.1</b>	<i>Modelos teóricos de distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias discretas</i> .....	<b>49</b>
<b>4.3</b>	<b>Variável aleatória contínua</b> .....	<b>50</b>
<b>5</b>	<b>O PROBLEMA DA AGULHA BUFFON</b> .....	<b>54</b>
<b>5.1</b>	<b>Resolução do problema da agulha de Buffon</b> .....	<b>54</b>
<b>5.2</b>	<b>O Problema de Laplace</b> .....	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES DO PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON</b> .....	<b>69</b>
<b>6.1</b>	<b>Estimativa do valor de <math>\pi</math></b> .....	<b>69</b>
<b>6.2</b>	<b>Um importante avanço para a Medicina</b> .....	<b>70</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>74</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nosso cotidiano é cercado de incertezas que variam das mais simples até as maiores e mais complexas, como por exemplo: a ansiedade em saber o resultado do sorteio de um jogo de loteria, o desejo de observar a previsão do tempo para a programação do fim de semana ou a necessidade de estudar a transferência das informações contidas nos genes, compartilhados de geração em geração.

Para determinar, por exemplo, a chance de certa característica genética ser transmitida dos pais para os filhos, a genética utiliza modelos matemáticos relacionados à Teoria das Probabilidades. A palavra probabilidade deriva do latim *probare*, que significa “provar” ou “testar”; no universo da Matemática, é o ramo da ciência que estuda e formula modelos referentes à ocorrência dos fenômenos aleatórios. Usualmente, o termo “provável” é utilizado para designar eventos cuja certeza de ocorrer não é totalmente garantida. No exemplo a seguir, vejamos uma idéia intuitiva do conceito de probabilidade.

Numa rifa de um smartphone foram vendidos cem bilhetes numerados de 1 a 100. Antônio comprou quatro bilhetes e Célia comprou seis. É natural crermos que as chances de um bilhete ganhar o prêmio são iguais as chances de qualquer outro. Desse modo, intuitivamente, é plausível medirmos a possibilidade de cada concorrente ganhar o smartphone. Como Antonio concorre com 4 dos 100 números, indicaremos por  $\frac{4}{100}$  a medida da possibilidade dele ganhar o prêmio e, analogamente, por  $\frac{6}{100}$  a medida da possibilidade de Célia ser sorteada.

Historicamente, os primeiros registros ligados à Teoria das Probabilidades apareceram na obra do italiano Girolamo Cardano (1501– 1576) sobre jogos de azar. Jogador contumaz, Cardano escreveu um “manual do jogador”, no qual abordou algumas questões interessantes sobre probabilidade.

No ano de 1654, o jogador da sociedade parisiense Chevalier de Mère apresentou ao matemático Blaise Pascal (1623 – 1662) alguns problemas relacionados às possibilidades de vencer jogos. Reflexões sobre esses problemas levaram Pascal a trocar correspondências com Pierre de Fermat (1601 – 1665) o que desencadeou discussões a respeito dos princípios da nova teoria, dando assim um novo impulso ao estudo das probabilidades. Embasado nos trabalhos de Pascal e Fermat, em 1657, o gênio holandês Christian Huygens (1629 – 1695) escreveu o primeiro tratado formal sobre probabilidade, considerado a melhor apresentação

sobre o assunto até o surgimento, em 1713, da obra *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli (1654 – 1705). Após esses estudos desbravadores, outros grandes matemáticos levaram adiante o estudo sobre probabilidades, como Abraham de Moivre (1667 – 1754), Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Leonhard Euler (1707 – 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) e Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827).

Em 1777, Georges-Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707 – 1788)<sup>1</sup>, no seu trabalho *Essai d'Arithmétique Morale* (Ensaio da Aritmética Moral) apresentou o problema que ficou conhecido como “Problema da Agulha de Buffon”. Nesse trabalho, Leclerc analisa a moral existente em situações de jogos e a utilização de conhecimentos matemáticos para a tomada da melhor decisão. O referido problema é considerado um marco inicial para o estudo da Probabilidade Geométrica; um novo ramo da teoria das probabilidades envolvendo conceitos geométricos. Eis uma versão do enunciado do problema extraída do livro *Matemática e Língua Materna* de José Nilson Machado:

“Uma agulha de comprimento  $a$  é mantida horizontalmente a certa altura de uma folha de papel, também horizontal, onde se encontram riscadas retas paralelas, espaçadas por uma distância  $d$  ( $d$  não é menor do que  $a$ ). Abandonando-se a agulha ao acaso, de certa altura, ao cair sobre o papel, é possível que ela corte alguma das retas riscadas ou que se situe completamente entre duas delas. Qual a probabilidade de que ela corte alguma das retas?”.

No presente trabalho será dada a solução para o referido problema – cuja resposta é  $\frac{2a}{\pi d}$  –, bem como, serão desenvolvidas duas pequenas generalizações do mesmo e, em seguida, apresentadas algumas aplicações baseadas em fundamentos utilizados na demonstração de Buffon.

No capítulo que segue introduziremos as definições, as propriedades e alguns modelos básicos da teoria das probabilidades que formam o suporte teórico inicial necessário para alcançarmos nosso objetivo final.

---

<sup>1</sup> Naturalista, matemático e escritor francês cujas teorias influenciaram naturalistas como Jean-Baptiste de Lamarck e Charles Darwin.

## 2 PROBABILIDADE

### 2.1 Experimento aleatório

Experimentos que produzem resultados diferentes, quando repetidos sob as mesmas condições, são chamados de “aleatórios”. São exemplos de experimentos aleatórios:

#### Exemplo 1

A Confederação Brasileira de Futebol (CBF) irá realizar um sorteio para decidir em qual região do país será realizado um jogo da seleção brasileira de futebol.

#### Exemplo 2

Ao fazer a previsão do tempo para o dia de domingo em uma cidade, um meteorologista precisa classificar sua previsão em uma das seguintes opções: sol com céu aberto (SCA), sol com céu parcialmente nublado (SCPN), sol com eventuais pancadas de chuva (SEPC), nublado (N), nublado com pancadas de chuva (NPC) e chuvoso (C).

#### Exemplo 3

Em uma urna há quatro bolas com as seguintes cores: verde (V), azul (A), branca (B) e preta (P). Duas bolas são retiradas, uma após a outra e sem reposição, e são observadas as cores obtidas.

Ao contrário dos “fenômenos determinísticos” – aqueles que geram o mesmo resultado quando repetidos sob as mesmas condições – os experimentos dos exemplos acima podem gerar resultados diversos a cada nova realização.

As definições que veremos agora são fortemente embasadas na Teoria dos Conjuntos, por esse motivo, utilizaremos a notação que é empregada nesse estudo bem como suas propriedades.

### 2.2 Espaço amostral de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado “espaço amostral”. Representaremos o espaço amostral de um experimento

aleatório pela letra grega ômega ( $\Omega$ ). Desse modo, o número de elementos (ou cardinalidade) desse conjunto será indicado por  $n(\Omega)$ .

Em cada exemplo da seção 2.1, o espaço amostral e a sua respectiva cardinalidade são:

- Exemplo 1:  $\Omega = \{\text{Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste, Sul}\}$  e  $n(\Omega) = 5$ .

- Exemplo 2:  $\Omega = \{\text{SCA, SCPN, SEPC, N, NPC, C}\}$  e  $n(\Omega) = 6$ .

- Exemplo 3: Se indicarmos o resultado da retirada das bolas pelo par ordenado  $(x, y)$ , onde “x” é a cor da primeira bola retirada e “y” é a cor da segunda bola, temos:

$\Omega = \{(V, A), (V, B), (V, P), (A, V), (A, B), (A, P), (B, V), (B, A), (B, P), (P, V), (P, A), (P, B)\}$  e  $n(\Omega) = 12$ .

Em muitas situações é inviável descrever, um a um, todos os elementos do espaço amostral. Em muitos desses casos podemos recorrer aos métodos de contagem que são estudados em Análise Combinatória para encontrarmos o número de resultados possíveis para o experimento aleatório (ou de um subconjunto desses resultados). É o caso da quantidade de resultados possíveis para um sorteio da Mega-Sena, jogo de loteria em que são escolhidos aleatoriamente seis números do universo de 1 a 60. Nesse caso, o total de resultados possíveis é:

$$n(\Omega) = \binom{60}{6} = \frac{60!}{6! \cdot 54!} = 50\,063\,860.$$

Neste capítulo, nos restringiremos a estudar casos em que  $\Omega$  é finito ou infinito enumerável.

### 2.3 Evento

Chamamos de “evento” a qualquer subconjunto do espaço amostral e utilizaremos aqui a notação usual para representar conjuntos, ou seja, letras maiúsculas do nosso alfabeto. Diremos que um evento ocorre quando o resultado do experimento aleatório pertencer ao evento. No exemplo 2, o subconjunto  $A = \{\text{Norte, Nordeste, Sul}\}$  é um evento do espaço amostral  $\Omega = \{\text{Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste, Sul}\}$ . Caso o resultado do sorteio da região, realizado pela CBF, seja Norte, Nordeste ou Sul, diremos que ocorreu o evento A.

Todo subconjunto unitário de um espaço amostral é denominado “evento simples, unitário ou elementar”.

O espaço amostral  $\Omega$  é denominado “evento certo”, ou seja, é o evento que sempre ocorre. O subconjunto  $A = \emptyset$  (vazio), do espaço amostral, é denominado “evento impossível”, ou seja, é aquele que nunca acontece.

#### Exemplo 4

Dois dados com faces numeradas de 1 a 6 são lançados uma única vez e observa-se a soma “s” dos números das faces voltadas para cima. Vamos determinar – enumerando os seus elementos – os seguintes eventos do espaço amostral  $\Omega$ :

$$A = \{s \in \Omega \mid s \text{ é ímpar}\}; B = \{s \in \Omega \mid s < 2\}; C = \{s \in \Omega \mid s > 11\} \text{ e } D = \{s \in \Omega \mid s \leq 15\}.$$

Os valores possíveis das faces variam de 1 a 6, assim, a soma dos números das faces voltadas para cima é no mínimo 2 e no máximo 12. Desse modo, o espaço amostral do experimento é  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Portanto, os eventos A, B, C e D são respectivamente:  $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ,  $B = \emptyset$  (evento impossível),  $C = \{12\}$  (evento elementar) e  $D = \Omega$  (evento certo).

#### 2.3.1 União e interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B de um espaço amostral  $\Omega$ .

1)  $A \cup B$  é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A ou ocorre o evento B, ou seja, se ocorre pelo menos um dos dois eventos. Simbolicamente, temos:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

2)  $A \cap B$  é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A e ocorre o evento B, isto é, se os dois eventos ocorrem simultaneamente. Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se  $A \cap B = \emptyset$  dizemos que os eventos A e B são “mutuamente excludentes”, isto é, os dois eventos não ocorrem simultaneamente.

Observações:

I) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, não existem elementos comuns a esses dois conjuntos, desse modo,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

$$\text{II) } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Com efeito, os eventos  $A - B$ ,  $A \cap B$  e  $B - A$  são, dois a dois, mutuamente excludentes e:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A &= (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow n(A) = n(A - B) + n(A \cap B); \\ \text{(ii)} \quad B &= (B - A) \cup (A \cap B) \Rightarrow n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \\ &\Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B). \end{aligned}$$

Temos ainda que  $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ . Segue que:

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A - B) + n(A \cap B)}_{n(A)} + \underbrace{n(B - A)}_{n(B) - n(A \cap B)}.$$

Substituindo os resultados de (i) e (ii) na igualdade acima, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

### 2.3.2 Diferença de eventos

Chamamos “A menos B” e representamos por  $A - B$  ao evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A e não ocorre o evento B. Simbolicamente, temos:

$$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

### 2.3.3 Evento complementar

Seja A um evento de um espaço amostral. Chamamos “evento complementar de A” ou “evento oposto de A” em relação à  $\Omega$ , ao evento que ocorre se, e somente se, o evento A não ocorre. Representamos por  $\bar{A}$  o evento complementar de A. Simbolicamente:

$$\bar{A} = \Omega - A.$$

No **Exemplo 4**, o evento complementar de A é:  $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ .

#### Proposição 1

Como consequência imediata das definições acima, podemos observar os seguintes fatos:

- i)  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .
- ii)  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , ou seja, A e  $\bar{A}$  são mutuamente excludentes.

#### Prova:

- i)  $x \in A \cup \bar{A} \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \Omega$ .
- ii)  $x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$ , portanto  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

O exemplo a seguir pode ser facilmente resolvido utilizando o emprego de um raciocínio lógico simples, juntamente com as operações de adição e subtração. No entanto, para ilustrar a utilidade dos conceitos e das propriedades da união, interseção e diferença de eventos, vamos dar um pouco mais de formalidade à sua resolução.

### Exemplo 5

Uma pesquisa foi realizada em um aeroporto com 80 homens e 60 mulheres que iriam embarcar em um dos vôos. Constatou-se que 30 mulheres e 20 homens iriam viajar pela primeira vez, e que os demais já haviam voado antes. Um desses passageiros é escolhido ao acaso para viajar na primeira classe. Vamos determinar o número de elementos de cada um dos seguintes eventos:

- a) O passageiro escolhido era mulher ou iria viajar pela primeira vez;
- b) O passageiro escolhido era homem e já havia voado antes;
- c) O passageiro escolhido não era homem.

### Solução:

Vamos considerar os seguintes eventos:

$H = \{\text{o passageiro escolhido era homem}\};$

$M = \{\text{o passageiro escolhido era mulher}\};$

$A = \{\text{o passageiro escolhido já havia voado antes}\};$

$B = \{\text{o passageiro escolhido iria viajar pela primeira vez}\}.$

Do enunciado, e utilizando a notação aqui empregada, podemos tirar as seguintes informações imediatas:

$$n(H) = 80, n(M) = 60, n(H \cap B) = 20 \text{ e } n(M \cap B) = 30.$$

i) O evento  $H$  pode ser descrito como:

$$H = (H \cap A) \cup (H \cap B)$$

$$\Rightarrow n(H) = n[(H \cap A) \cup (H \cap B)] \quad (*)$$

Como os eventos  $H \cap A$  e  $H \cap B$  são mutuamente excludentes, temos:

$$n[(H \cap A) \cup (H \cap B)] = n(H \cap A) + n(H \cap B) \quad (**)$$

De (\*) e (\*\*) segue que:

$$n(H) = n(H \cap A) + n(H \cap B)$$

$$\Rightarrow n(H \cap A) = n(H) - n(H \cap B)$$

$$\Rightarrow n(H \cap A) = 80 - 20 = 60$$



ii) De maneira análoga podemos concluir que:

$$n(M \cap A) = n(M) - n(M \cap B)$$

$$\text{Logo, } n(M \cap A) = 60 - 30 = 30.$$

iii) O espaço amostral  $\Omega$  é composto pelos 140 passageiros pesquisados, ou seja:

$n(\Omega) = n(H) + n(M) = 140$ . Observe que os eventos H e M são mutuamente excludentes.

Vamos construir uma tabela para distribuir as quantidades de elementos dos eventos H, M A e B:

	A	B
H	60	20
M	30	30

Portanto:

a) O evento “o passageiro escolhido era mulher ou iria viajar pela primeira vez”, simbolicamente é representado por  $M \cup B$ . Desse modo:

$$n(M \cup B) = 30 + 30 + 20 = 80$$

ou

$$n(M \cup B) = n(M) + n(B) - n(M \cap B) = 60 + 50 - 30 = 80$$

b) O evento “o passageiro escolhido era homem e já havia voado antes” é representado por  $H \cap A$ . De acordo com i), temos:

$$n(H \cap A) = 60$$

c) O evento “o passageiro escolhido não era homem” pode ser representado por  $\bar{H} = M$ . Dessa maneira:

$$n(\bar{H}) = n(\Omega - H) = n(M) = 60$$

## 2.4 Probabilidade de um evento

Seja  $\Omega$  o espaço amostral de um experimento aleatório. Uma “probabilidade” é uma função que associa a cada evento  $A \in \Omega$  um número real  $P(A)$  que satisfaz as seguintes condições:

a)  $0 \leq P(A) \leq 1$ , para todo evento  $A \in \Omega$ ;

b)  $P(\Omega) = 1$ ;

c) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Exemplo 6

Uma moeda é lançada e observa-se a face que ficou voltada para cima. O espaço amostral é  $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$ . Temos quatro eventos, a saber:  $\emptyset$ ,  $C = \{\text{cara}\}$ ,  $K = \{\text{coroa}\}$  e  $\Omega$ . A função  $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(C) = P(K) = 0,5$  e  $P(\Omega) = 1$  é uma probabilidade.

Com efeito:

i) os itens a) e b) da definição decorrem diretamente da lei de formação da função P;

ii) Vamos verificar o item c) da definição. Os eventos  $\emptyset$ , C e K são obviamente, dois a dois, mutuamente excludentes, e:

$$- P(\emptyset \cup C) = P(C) = 0,5 = 0 + 0,5 = P(\emptyset) + P(C);$$

$$- P(\emptyset \cup K) = P(K) = 0,5 = 0 + 0,5 = P(\emptyset) + P(K);$$

$$- P(K \cup C) = P(\Omega) = 1 = 0,5 + 0,5 = P(K) + P(C).$$

$$- \text{Temos ainda que } \emptyset \text{ e } \Omega \text{ são mutuamente excludentes e, } P(\emptyset \cup \Omega) = P(\Omega) = 1 = 0 + 1 = P(\emptyset) + P(\Omega).$$

Existem infinitas maneiras de definirmos uma probabilidade para o experimento aleatório acima descrito, no entanto, quando definimos uma probabilidade em um espaço amostral, esperamos que os números reais associados aos eventos representem uma medida confiável da possibilidade do evento ocorrer. Nessa perspectiva, o modelo P é aceitável para traduzir a medida da possibilidade dos eventos C e K, pois intuitivamente, tratando-se de uma moeda honesta, é natural esperar que as chances de que esses eventos ocorram sejam iguais. Esse raciocínio nos leva ao modelo “equiprobabilístico”.

Se definirmos, por exemplo, a função  $P_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com  $P_1(\emptyset) = 0$ ,  $P_1(C) = 0,4$ ,  $P_1(K) = 0,6$  e  $P_1(\Omega) = 1$ , podemos verificar que também se trata de uma probabilidade. Nesse caso, o modelo  $P_1$  é mais adequado para uma situação em que, após várias repetições do experimento aleatório, o evento C ocorre em 40% das vezes e o evento K em 60%. Por exemplo, em 1000 lançamentos da moeda são obtidas 400 caras e 600 coroas. Esse modelo é denominado “frequencial” – após inúmeras repetições do experimento aleatório, as

probabilidades são obtidas pela razão entre o número de casos em que ocorrem os eventos e o número total de repetições do experimento.

### 2.4.1 Espaço amostral equiprovável

Seja  $P$  uma probabilidade definida em um espaço amostral  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , de um experimento aleatório. Dizemos que  $\Omega$  é equiprovável se, e somente se:

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = P(\{a_3\}) = \dots = P(\{a_k\}).$$

Ou seja,  $\Omega$  é equiprovável se, e somente se, todos os eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer.

#### Teorema 1

Seja  $P$  uma probabilidade em um espaço amostral  $\Omega$  equiprovável e finito. Se  $A$  é um evento de  $\Omega$ , então  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ , onde  $n(A)$  é o número de elementos do evento  $A$  e  $n(\Omega)$  é o número de elementos do espaço amostral  $\Omega$ .

#### Prova:

Seja  $P$  uma probabilidade definida em um espaço amostral  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ , equiprovável e finito.

Podemos escrever que  $\Omega = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_k\}$ , logo:

$P(\Omega) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_k\})$ , onde  $P(\Omega) = 1$ , pois  $P$  é uma probabilidade.

Dessa maneira, segue que:

$$1 = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_k\})$$

Como os eventos elementares  $\{a_i\}$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , são mutuamente excludentes, temos:

$$1 = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_k\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + \dots + P(\{a_k\})^2$$

O espaço amostral  $\Omega$  é equiprovável, logo  $P(\{a_i\}) = P(\{a_j\})$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Segue que:

$$k \cdot P(\{a_i\}) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}.$$

<sup>2</sup> Pode ser demonstrado por indução a partir de  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Portanto, temos:

$$(I) \quad P(\{a_i\}) = \frac{1}{k}, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}.$$

Sem perda de generalidade, tomemos um evento  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\} \subset \Omega$ , com  $p \leq k$ . De maneira análoga aos fatos utilizados acima, temos:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_p\}) \\ &\Rightarrow P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + \dots + P(\{a_p\}) \\ &\Rightarrow P(A) = p \cdot P(\{a_i\}), \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Substituindo neste último resultado, o valor de  $P(\{a_i\})$  encontrado na igualdade (I) temos:

$$P(A) = \frac{p}{k}, \text{ onde } p \text{ é o número de elementos de } A \text{ e } k \text{ é o número de elementos}$$

de  $\Omega$ .

$$\text{Portanto, } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Dessa maneira, podemos traduzir a probabilidade de ocorrer um evento, num espaço amostral equiprovável e finito, como sendo a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número de resultados possíveis do experimento aleatório.

### Exemplo 7

Para ganhar num jogo de dados, num único lançamento de dois dados honestos com faces numeradas de 1 a 6, um jogador precisa acertar a soma dos resultados das faces voltadas para cima. Para qual valor da soma dos resultados das faces, esse jogador tem mais chances de ganhar o jogo?

### Solução:

Seja o par ordenado  $(i, j)$ , com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , onde “i” é o resultado obtido na face voltada para cima do 1º dado e “j” é o resultado obtido na face voltada para cima do 2º dado. Desse modo, temos 36 resultados possíveis e podemos escrever o espaço amostral do experimento como:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ &(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), \\ &(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), \\ &(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}. \end{aligned}$$

Observe que, esperamos que cada par de resultados tenha a mesma chance de ocorrer que todos os outros pares. Dessa maneira,  $\Omega$  equiprovável.

A soma dos resultados das faces voltadas para cima pode assumir qualquer valor natural de 2 até 12. Assim, representemos o evento  $A_k$  como sendo:

$A_k = \{ \text{a soma dos resultados das faces é } k \}$ , com  $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$ , ou seja:

$$A_k = \{(i, j) \in \Omega \mid i + j = k\}$$

Dessa maneira, temos:

$$A_2 = \{(1, 1)\}.$$

$$A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

$$A_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

$$A_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

$$A_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

$$A_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

$$A_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

$$A_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}.$$

$$A_{10} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}.$$

$$A_{11} = \{(5, 6), (6, 5)\}.$$

$$A_{12} = \{(6, 6)\}.$$

De acordo com os eventos destacados acima, podemos observar que o resultado 7 é o que tem mais chances de ocorrer, com a seguinte probabilidade:

$$P(A_7) = \frac{n(A_7)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

As probabilidades para os demais eventos são:

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A_4) = \frac{n(A_4)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A_5) = \frac{n(A_5)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A_6) = \frac{n(A_6)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

$$P(A_8) = \frac{n(A_8)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

$$P(A_9) = \frac{n(A_9)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A_{10}) = \frac{n(A_{10})}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A_{11}) = \frac{n(A_{11})}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A_{12}) = \frac{n(A_{12})}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

Em alguns casos, a maneira de escrever o espaço amostral depende do ponto de vista que se dá ao experimento aleatório. Por exemplo, podemos dizer que o experimento

aleatório do **Exemplo 4** é o mesmo do **Exemplo 7**, resolvido acima. Naquele caso, consideramos o espaço amostral como sendo  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , em virtude de o experimento solicitar “a soma dos resultados das faces”. Observe que, considerado dessa maneira,  $\Omega$  não é equiprovável, pois aos eventos elementares  $\{k\}$ , com  $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$  não estão associadas probabilidades iguais, como pudemos perceber na resolução do Exemplo 7. Portanto, escrever o espaço amostral da maneira  $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  foi mais conveniente para resolver o problema, tendo em vista que assim  $\Omega$  é equiprovável.

### Exemplo 8

Um casal pretende ter quatro filhos. Eles gostariam que fossem três meninos e uma menina, exatamente nessa ordem.

- Determine o número de eventos elementares do espaço amostral.
- Determine a probabilidade de o casal ter o seu desejo realizado.
- Se o casal desejasse apenas ter três meninos e uma menina, sem considerar a ordem de nascimento, qual seria a probabilidade disso ocorrer?

### Solução:

a) Seja  $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \text{ representa o sexo do } i\text{-ésimo filho, } i = 1, 2, 3, 4\}$ . Para cada filho que vai nascer existem duas possibilidades para o sexo da criança:  $a_i = H$ , no caso de menino ou  $a_i = M$ , no caso de menina. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, o número de eventos elementares é dado por:

$$n(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

b) Considere o evento  $A = \{\text{nascer três meninos e uma menina, exatamente nessa ordem}\}$ , ou seja,  $A = \{(H, H, H, M)\}$ . Dessa maneira, temos  $n(A) = 1$ .

Portanto, a probabilidade do casal ter seu desejo realizado é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{16}$$

c) Consideremos agora o evento  $B = \{\text{nascer três meninos e uma menina, sem considerar a ordem de nascimento}\}$ , ou seja:

$$B = \{(H, H, H, M), (H, H, M, H), (H, M, H, H), (M, H, H, H)\}.$$

Dessa maneira,  $n(B) = 4$  e, portanto, a probabilidade de nascer três meninos e uma menina, independentemente da ordem de nascimento, é dada por:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

**Teorema 2:**

Se  $A$  e  $B$  são eventos de um espaço amostral e  $P$  uma probabilidade, então:

- a)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
- b)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- c)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ;
- d)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;
- e) Se  $B \subset A$ , então  $P(B) \leq P(A)$ .

**Prova:**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral e  $P$  uma probabilidade.

$$a) A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

$$b) A \cup \emptyset = A \Rightarrow P(A \cup \emptyset) = P(A) \Rightarrow P(A) + P(\emptyset) = P(A) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

c)  $A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ , pois  $A - B$  e  $A \cap B$  são mutuamente excludentes. Da última igualdade segue que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

d)  $A \cup B = B \cup (A - B) \Rightarrow P(A \cup B) = P[B \cup (A - B)] \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$ , pois  $B$  e  $A - B$  são mutuamente excludentes. Do resultado do item c) segue que:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B).$$

e) Do item c) temos que  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$  e, ainda, como  $B \subset A$ , então  $A \cap B = B$ .

$$\text{Logo, } P(A) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) \geq 0. \text{ Portanto, } P(A) \geq P(B).$$

**Exemplo 9**

Ana e Pedro participarão de um sorteio na empresa em que trabalham, onde os dez integrantes da empresa serão sorteados, um de cada vez, para receberem um prêmio em

dinheiro. Sabendo que a cada sorteio o valor do prêmio é maior, qual a probabilidade de Ana receber o maior prêmio ou Pedro receber o menor prêmio?

**Solução:**

Considerando que os valores dos prêmios variam do menor para o maior, ou seja, estão numa ordem pré-determinada, o número de casos possíveis para o experimento aleatório pode ser calculado permutando-se os dez integrantes da empresa. Dessa maneira, temos:

$$n(\Omega) = P_{10} = 10!$$

Sejam os eventos  $A = \{\text{Ana receberá o maior prêmio}\}$  e  $B = \{\text{Pedro receberá o menor prêmio}\}$ . Então, para resolver o problema devemos determinar  $P(A \cup B)$ . Para tanto podemos utilizar a relação:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

O evento  $A$  ocorre se, e somente se, Ana for a última funcionária a ser sorteada, desse modo, o número de casos favoráveis à ocorrência da  $A$  é encontrado permutando-se os outros nove funcionários para os nove primeiros prêmios, ou seja:

$$n(A) = P_9 = 9!$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento  $A$  é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9!}{10!} = \frac{9!}{10 \cdot 9!} = \frac{1}{10}$$

De maneira análoga, o evento  $B$  ocorre se, e somente se, Pedro for o primeiro funcionário a ser sorteado. Para calcular o número de casos favoráveis à ocorrência de  $B$  basta permutar os outros nove funcionários entre os nove últimos prêmios. Assim:

$$n(B) = P_9 = 9!$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento  $B$  é dada por:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{9!}{10!} = \frac{9!}{10 \cdot 9!} = \frac{1}{10}$$

O evento  $A \cap B$  ocorre se, e somente se, Ana for a última funcionária a ser sorteada e Pedro for o primeiro, desse modo, o número de casos favoráveis à ocorrência da  $A \cap B$  é encontrado permutando-se os outros oito funcionários entre os prêmios que variam do 2º ao 9º, ou seja:

$$n(A \cap B) = P_8 = 8!$$



Logo, a probabilidade de ocorrer o evento  $A \cap B$  é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{8!}{10!} = \frac{8!}{10 \cdot 9 \cdot 8!} = \frac{1}{90}$$

Dessa maneira, pelo item d) do Teorema 2, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{90}$$

Portanto:

$$P(A \cup B) = \frac{17}{90}$$

### Exemplo 10

Em uma cidade, de cada dez habitantes, quatro já foram picados pelo mosquito da dengue. Escolhendo-se ao acaso três habitantes dessa cidade, qual a probabilidade de pelo menos um deles ter sido picado pelo mosquito da dengue?

### Solução:

Nesse exemplo, se utilizarmos o evento complementar de A, será possível calcular  $P(\bar{A})$  de uma maneira mais rápida.

Vamos tomar o total de 10 habitantes como base para os cálculos. Dessa maneira, o número de casos possíveis para o experimento é dado pela combinação de 10 habitantes tomados 3 a 3.

$$n(\Omega) = C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

Seja o evento  $A = \{\text{pelo menos um dos três habitantes escolhidos foi picado pelo mosquito da dengue}\}$ . Vamos calcular a probabilidade do evento  $\bar{A} = \{\text{nenhum dos três habitantes escolhidos foram picados pelo mosquito}\}$ . O número de casos favoráveis à ocorrência de  $\bar{A}$  é dado pela combinação dos 6 habitantes que não foram picados tomados 3 a 3.

$$n(\bar{A}) = C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento  $\bar{A}$  é:

$$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Portanto, pelo item a) do Teorema 2, a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

## 2.5 Probabilidade Condicional

Vamos estudar situações em que o conhecimento da ocorrência de um determinado evento pode alterar a probabilidade da ocorrência de outro evento. Para esses casos, vamos introduzir o conceito de probabilidade condicional e, em seguida, verificar quando dois eventos são independentes. Antes de formalizarmos o conceito de probabilidade condicional vamos tentar compreendê-lo por meio do seguinte exemplo.

### Exemplo 11

Um professor, durante uma aula sobre probabilidade, levou para a sala de aula uma urna com três bolas, sendo duas azuis e uma branca. Ele sugeriu aos alunos que resolvessem o seguinte problema: ao retirar duas bolas da urna, uma após a outra e sem reposição, qual a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca?

### Solução:

Para resolver este problema, vamos indicar por “ $a_1$ ” e “ $a_2$ ” as duas bolas azuis e por “ $b$ ” a bola branca. Seja o par ordenado  $(x, y)$ , o evento elementar do experimento aleatório, onde  $x$  é a bola da primeira retirada e  $y$  é a bola da segunda retirada. Dessa maneira:

$\Omega = \{(a_1, a_2), (a_1, b), (a_2, a_1), (a_2, b), (b, a_1), (b, a_2)\}$  e, conseqüentemente,  $n(\Omega) = 6$ .

Seja o evento  $B = \{\text{a segunda bola retirada é branca}\}$ , ou seja,  $B = \{(a_1, b), (a_2, b)\}$  e, conseqüentemente,  $n(B) = 2$ .

Portanto, a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é dada por:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Após os alunos darem a solução do exercício acima, o professor retirou a primeira bola da urna e, mostrando-a aos alunos, observou que a cor da bola era “azul”. Então, fez a seguinte pergunta: tendo a certeza de que a cor da primeira bola retirada é azul, vamos calcular agora a probabilidade de a segunda bola ser branca.

Para muitos alunos, à primeira vista, o novo problema pareceu não ser diferente do resolvido anteriormente, no entanto, nesse último, ter-se-á um novo espaço amostral que é a restrição de  $\Omega$  ao evento  $A = \{\text{a primeira bola retirada é azul}\} = \{(a_1, a_2), (a_1, b), (a_2, a_1), (a_2, b)\}$  e o evento do qual se deseja calcular a probabilidade será denominado “a segunda bola retirada da urna é branca, dado que a primeira bola é azul”. Esse evento é representado, nesse caso, por  $B|A$  e o número de casos favoráveis à sua ocorrência é igual a  $n(A \cap B) = 2$ , pois  $A \cap B = \{(a_1, b), (a_2, b)\}$ .

Portanto, a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca, dado que a primeira bola é azul, é dada por:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

### Definição

Sejam dois eventos  $A$  e  $B$  de um espaço amostral  $\Omega$ , com  $P(A) \neq 0$ . A probabilidade condicional de  $B$ , dado que ocorreu  $A$  é definida por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Da relação acima – o que em muitos casos é bastante útil –, podemos calcular a probabilidade da interseção dos eventos  $A$  e  $B$ .

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Se  $\Omega$  é equiprovável, temos:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}.$$

### Exemplo 12

A tabela abaixo relaciona dados sobre os funcionários de uma empresa.

Setor	Homens	Mulheres	Total
Vendas	9	15	24
Financeiro	27	18	45
Total	36	33	69

Um funcionário será sorteado ao acaso. Determine a probabilidade de o funcionário ser:

- do setor financeiro.
- homem, sabendo que é do setor de vendas.
- mulher, sabendo que é do setor de financeiro.
- do setor financeiro e mulher.

**Solução:**

Sejam os seguintes eventos:

$H = \{\text{o funcionário é homem}\}$ ,  $M = \{\text{o funcionário é mulher}\}$ ,  $V = \{\text{o funcionário é do setor de vendas}\}$  e  $F = \{\text{o funcionário é do setor financeiro}\}$ .

a) Para calcular a probabilidade de que o funcionário escolhido seja do setor financeiro temos um total de 45 casos favoráveis dentre 69 possíveis, portanto:

$$P(F) = \frac{45}{69} = \frac{15}{23}.$$

b) Deseja-se calcular a seguinte probabilidade condicional:

$$P(H | V) = \frac{n(H \cap V)}{n(V)} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

c) Temos a seguinte probabilidade condicional:

$$P(M | F) = \frac{n(F \cap M)}{n(F)} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}.$$

d) A probabilidade solicitada é:

$$P(F \cap M) = \frac{n(F \cap M)}{n(\Omega)} = \frac{18}{69} = \frac{6}{23}.$$

Utilizando a definição de “probabilidade condicional” também é possível calcular  $P(F \cap M)$ . Temos que:

$$P(M | F) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)}.$$

Logo:

$$P(F \cap M) = P(F) \cdot P(M | F).$$

Portanto, pelos resultados obtidos nos itens (a) e (c), segue que:

$$P(F \cap M) = \frac{15}{23} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{23}.$$

Uma ferramenta bastante interessante para o cálculo de probabilidades é a “árvore de probabilidades” – um diagrama no qual podemos visualizar as probabilidades calculadas em eventos sucessivos. Para o **Exemplo 12** podemos montar a seguinte árvore (Figura 1):

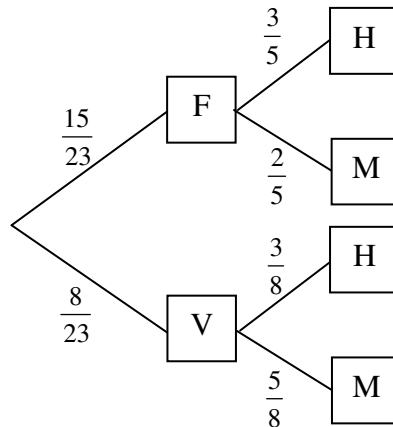


Figura 1

Pelo diagrama, é possível visualizar as probabilidades condicionadas. Em cada caminho do diagrama, tem-se a probabilidade do evento, com a certeza da ocorrência dos eventos que o precedem no diagrama. Por exemplo:

$$P(H|F) = \frac{3}{5}, P(M|F) = \frac{2}{5}, P(H|V) = \frac{3}{8} \text{ e } P(M|V) = \frac{5}{8}.$$

Multiplicando-se os valores de caminhos sucessivos, obtém-se a probabilidade da interseção dos eventos ao longo desses caminhos. Por exemplo:

$$P(F \cap M) = \frac{15}{23} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{23} \text{ e } P(F \cap H) = \frac{15}{23} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{23}.$$

Inspirados no resultado acima e no diagrama da Figura 1, vamos supor que tenhamos três eventos A, B e C em caminhos sucessivos de uma árvore de probabilidades (Figura 2).

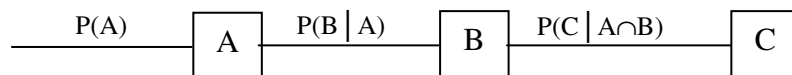


Figura 2

Podemos induzir que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$

Realmente, utilizando-se a definição de probabilidade condicional por duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P[C \cap (B \cap A)] \\
&\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(C \mid B \cap A) \cdot P(B \cap A) \\
&\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(C \mid B \cap A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A).
\end{aligned}$$

Este resultado pode ser generalizado, através do seguinte teorema.

### Teorema 3

Sejam os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , com  $n \in \mathbf{N}$  e  $n \geq 2$ . Se  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \neq \emptyset$ , então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

#### Prova:

A demonstração será feita por indução finita sobre  $n$ .

(I) Para  $n = 2$ , temos a igualdade  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$ . Portanto, a relação é verdadeira para  $n = 2$ .

(II) Suponha que a afirmação é verdadeira para  $n = k$ , ou seja:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Mostraremos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) &= P[A_{k+1} \cap (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)] = \\
&= P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução segue que:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) &= P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot \\
&P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}).
\end{aligned}$$

Reordenando os fatores do produto acima, temos:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \\
&\cap \dots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k).
\end{aligned}$$

Logo, a afirmação é verdadeira para  $n = k + 1$ . Portanto, ela é verdadeira para todo  $n \in \mathbf{N}$ , com  $n \geq 2$ .

### Exemplo 13

De uma urna com seis bolas vermelhas e quatro brancas são retiradas quatro bolas, uma após a outra e sem reposição. Qual a probabilidade de serem retiradas três bolas vermelhas e uma branca, nessa ordem?

**Solução:**

Sejam os eventos  $V_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é vermelha}\}$  e  $B_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é branca}\}$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dessa maneira, devemos calcular a probabilidade da ocorrência do evento  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap B_4$ .

De acordo com o Teorema 3, devemos calcular:

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap B_4) = P(V_1) \cdot P(V_2 | V_1) \cdot P(V_3 | V_1 \cap V_2) \cdot P(B_4 | V_1 \cap V_2 \cap V_3).$$

Os fatores desse produto podem ser facilmente retirados da árvore de probabilidades. Basta seguirmos o seguinte caminho (Figura 3):

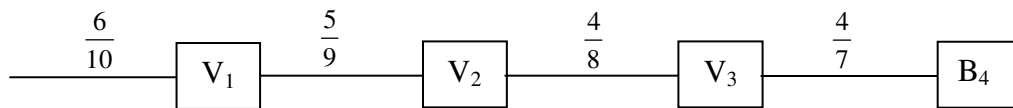


Figura 3

Portanto:

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap B_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{21}.$$

No experimento acima, observe que a probabilidade condicional do resultado de cada retirada, é alterada de acordo com o resultado da retirada anterior. Por exemplo, se a primeira bola retirada é vermelha, a probabilidade de sair uma bola vermelha na segunda retirada é  $\frac{5}{9}$ , no entanto, se a primeira bola for branca, a probabilidade de a segunda bola ser vermelha é  $\frac{6}{9}$ .

### 2.5.1 Probabilidade total

#### Definição

Sejam os eventos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Dizemos que eles formam uma partição do espaço amostral  $\Omega$  se, e somente se:

- $P(A_i) > 0$ , para todo  $i \leq n$ ;
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ ;
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ .

Abaixo, temos uma ilustração para uma partição do espaço amostral com  $n = 5$  (Figura 4).

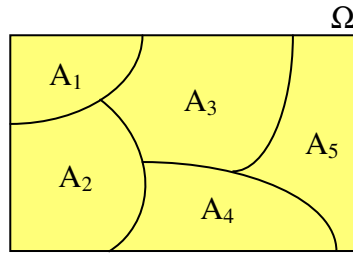


Figura 4

### Teorema da probabilidade total

Seja um evento  $B$  de um espaço amostral finito  $\Omega$ . Se  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  é uma partição de  $\Omega$ , então:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

### Prova:

Mostraremos inicialmente a igualdade  $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$ . Para isso, verificaremos a inclusão em relação aos dois lados da igualdade.

(i) Pela definição de interseção, temos que  $A_i \cap B \subset B$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Logo:

$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \subset B.$$

(ii) Seja  $x \in B$ . Segue que  $x \in \Omega$ , pois  $B \subset \Omega$ . Como  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  é uma partição de  $\Omega$ , então  $x \in A_i$ , para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dessa maneira,  $x \in A_i \cap B$ , para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ . Logo,  $x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$ .

Portanto:

$$B \subset (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Das inclusões verificadas em (i) e (ii) segue que:

$$(I) \quad B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Mostraremos agora que os eventos  $A_i \cap B$  e  $A_j \cap B$ , com  $i \neq j$ , são mutuamente excludentes.

Temos que  $A_i \cap B \subset A_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Segue que  $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) \subset A_i \cap A_j$ . Como  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  é uma partição de  $\Omega$ , temos que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Logo,  $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$ , ou seja, os eventos  $A_i \cap B$  e  $A_j \cap B$ , com  $i \neq j$ , são mutuamente excludentes.

Da igualdade (I) temos que:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)].$$



Como os eventos  $A_i \cap B$  e  $A_j \cap B$ , com  $i \neq j$ , são mutuamente excludentes, segue que:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$ , como queríamos demonstrar.

#### Exemplo 14

Três urnas contêm bolas vermelhas e brancas nas seguintes quantidades: a urna I tem três bolas vermelhas e duas brancas; a urna II tem quatro bolas vermelhas e uma branca; a urna III tem duas bolas vermelhas e três brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola. Qual é a probabilidade de a bola ser branca.

#### Solução:

O experimento aleatório em questão é “escolher uma urna ao acaso e retirar uma bola”. Nesse sentido, os eventos  $A_i = \{a\ i\text{-ésima urna é a escolhida}\}$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ , obviamente, formam uma partição do espaço amostral.

Sejam os eventos  $V = \{a\ bola\ escolhida\ é\ vermelha\}$  e  $B = \{a\ bola\ escolhida\ é\ branca\}$ . Pelo teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B).$$

Utilizando uma árvore de probabilidades (Figura 5), temos:

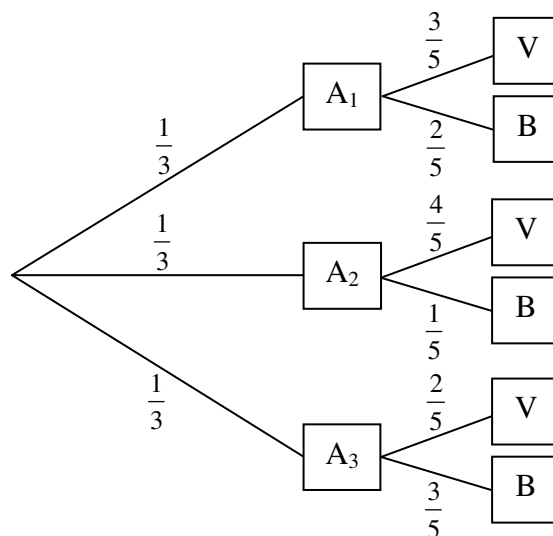


Figura 5

$$P(A_1 \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \quad P(A_2 \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \quad \text{e} \quad P(A_3 \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15}.$$

Portanto:

$$P(B) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

**Exemplo 15** (Problema da moeda de Bertrand)<sup>3</sup>

Existem três caixas idênticas: a primeira contém duas moedas de ouro; a segunda contém uma moeda de ouro e uma de prata; a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

**Solução:**

Sejam os eventos  $C_i = \{a\ i\text{-ésima caixa é a selecionada}\}$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ ,  $O = \{a\ moeda\ escolhida\ é\ de\ ouro\}$  e  $P = \{a\ moeda\ escolhida\ é\ de\ prata\}$ . Os eventos  $C_1, C_2$  e  $C_3$  formam uma partição do espaço amostral, portanto, pelo teorema da probabilidade total segue que:

$$P(O) = P(C_1 \cap O) + P(C_2 \cap O) + P(C_3 \cap O).$$

Com o auxílio de uma árvore de probabilidades (Figura 6), temos:

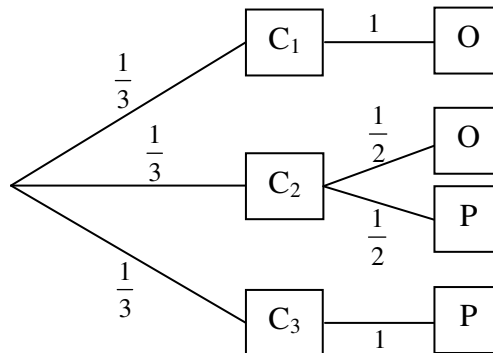


Figura 6

$$P(O) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

O pedido do problema pode ser interpretado como: “se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de ter sido escolhida a primeira caixa”, pois a primeira caixa é a única que contém duas moedas de ouro. Dessa maneira, devemos calcular:

<sup>3</sup> Joseph Bertrand, matemático francês, publicou em 1989 o livro *Calcul dès probabilités*.

$$P(C_1 \mid O) = \frac{P(C_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Observe que, como foi estipulada a condição de que a moeda escolhida era de ouro, em princípio, o leitor poderia imaginar que essa probabilidade seria  $\frac{1}{2} = 50\%$ , pois restariam duas caixas e a terceira caixa contém apenas moedas de prata. No entanto, deve-se considerar que a primeira caixa possui duas moedas de ouro, enquanto a segunda caixa possui apenas uma.

Veremos a seguir, situações em que a probabilidade condicional independe do resultado do evento anterior, ou seja, dados dois eventos A e B, temos:  $P(B \mid A) = P(B)$  e  $P(A \mid B) = P(A)$ .

### 2.5.2 Eventos independentes

Dois eventos A e B são “independentes” se, e somente se,  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

#### Proposição 2

Sejam os eventos A e B de um espaço amostral e  $P(A) \neq 0$ . A e B são independentes se, e somente se,  $P(B \mid A) = P(B)$ .

Com efeito:

(I) Se A e B são independentes, então  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

(II) Como  $P(A) \neq 0$ , da definição de probabilidade condicional segue que:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A).$$

De (I) e (II) temos que:

$$P(B \mid A) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B). \quad \text{Logo, } P(B \mid A) = P(B).$$

Reciprocamente, se  $P(B \mid A) = P(B)$ , então:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = P(B) \cdot P(A). \quad \text{Portanto, A e B são independentes.}$$

**Exemplo 16**

Um dado é lançado duas vezes. Considere os eventos  $A = \{\text{o resultado do primeiro lançamento é ímpar}\}$ ,  $B = \{\text{a soma dos resultados obtidos é igual a 7}\}$  e  $C = \{\text{o resultado do primeiro lançamento é ímpar e o resultado do segundo lançamento é par}\}$ . Quais pares de eventos são independentes?

$$(I) \ n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36 \text{ e } n(A) = 3 \cdot 6 = 18, \text{ logo } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}, \text{ logo } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$A \cap B = \{(1, 6), (3, 4), (5, 2)\}, \text{ logo } P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Temos  $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$ . Portanto, A e B são independentes.

$$(II) \ n(\Omega) = 36 \text{ e } n(C) = 3 \cdot 3 = 9, \text{ logo } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

$$C \subset A \Rightarrow A \cap C = C, \text{ logo } P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Temos  $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(A \cap C)$ . Portanto, A e C não são independentes.

$$(III) \ B \cap C = \{(1, 6), (3, 4), (5, 2)\}, \text{ logo } P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Temos  $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \neq P(B \cap C)$ . Portanto, B e C não são independentes.

Não se deve confundir eventos independentes com eventos mutuamente excludentes. Os eventos A e B do exemplo acima são independentes, pois  $P(B | A) = P(B)$ , ou seja, sendo conhecida a ocorrência do evento A, este fato não modificará a probabilidade da ocorrência de B. No entanto, os eventos A e B não são mutuamente excludentes, tendo em vista que  $A \cap B \neq \emptyset$ , isto é, os dois eventos podem ocorrer simultaneamente.

A definição de eventos independentes pode ser estendida para uma quantidade “n” de eventos com  $n \geq 2$ . Dizemos que  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  são independentes se, e somente se, as probabilidades das interseções dos eventos, tomados k a k (para todo  $k \leq n$ ), é igual ao produto das probabilidades dos eventos. Em particular:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Por exemplo, ao lançar uma moeda dez vezes, a probabilidade de sair cara em qualquer um dos lançamentos não depende dos resultados anteriores e é igual a  $\frac{1}{2}$ . Dessa maneira, a probabilidade de obtermos dez caras como resultado é  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ .

Ainda com relação ao exemplo da moeda acima, podemos pensar na seguinte situação: no lançamento de uma moeda (ou de um dado) “n” vezes qual a probabilidade de sair um resultado “m” vezes ( $m \leq n$ ). Esse tipo de problema pode ser resolvido pelo método binomial que será explorado a seguir.

## 2.6 O modelo binomial

O modelo binomial apresenta as seguintes características:

- a) o experimento é repetido um número “n” de vezes e as repetições são denominadas “provas”;
- b) Em cada repetição serão observados dois resultados denominados “sucesso” e “fracasso”, onde sucesso significa obter o resultado esperado e fracasso indica não obter o resultado esperado;
- c) Os resultados observados são independentes, a probabilidade de sucesso é “p” e a probabilidade de fracasso é “q”, onde  $q = 1 - p$ ;
- d) deseja-se determinar a probabilidade de ocorrer “m” vezes um resultado (sucesso ou fracasso) em “n” provas ( $m \leq n$ ).

### Exemplo 17

Um dado é lançado três vezes consecutivas. Deseja-se determinar a probabilidade de obter o número 1 em exatamente dois desses lançamentos.

Nesse caso, os resultados obtidos nos lançamentos são independentes; sucesso é obter o número 1 e fracasso é obter um número diferente de 1. Os parâmetros do modelo binomial são  $n = 3$ ,  $m = 2$ ,  $p = \frac{1}{6}$  e  $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

A relação a seguir permite o cálculo de probabilidades que se adequam ao modelo binomial.

### Proposição 3

Seja o evento  $E = \{\text{ocorrer o evento A exatamente m vezes em uma sequência de n provas independentes}\}$ . A probabilidade de ocorrer o evento E é dada por:

$$P(E) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ onde } p \text{ é a probabilidade de ocorrer o evento A em cada}$$

lançamento e  $q = 1 - p$ .

#### Prova:

Suponha que o evento A ocorreu exatamente m vezes em uma sequência de n provas, como mostra a ilustração abaixo.

$$\underbrace{\frac{A}{p} \quad \frac{\bar{A}}{1-p} \quad \frac{A}{p} \quad \frac{A}{p} \quad \frac{\bar{A}}{1-p} \quad \frac{A}{p} \quad \dots \quad \frac{\bar{A}}{1-p} \quad \frac{A}{p} \quad \frac{\bar{A}}{1-p}}_{\text{O evento A ocorre "m" vezes em "n" lançamentos.}}$$

O evento A ocorre "m" vezes em "n" lançamentos.

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrer a situação descrita na figura acima é dada pelo produto das probabilidades, isto é,  $p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$ .

A quantidade de casos em que o evento A pode ocorrer m vezes em uma sequência de n provas é dada por  $\binom{n}{m}$ . Esses casos são mutuamente excludentes, logo a probabilidade de ocorrer o evento E é dada pela soma das probabilidades desses eventos, ou seja, é a probabilidade  $p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$  somada  $\binom{n}{m}$  vezes. Portanto:

$$P(E) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

Assim, o **Exemplo 17** pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$P(E) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1, \text{ onde E é o evento "obter o número 1 em exatamente dois}$$

dos três lançamentos". Logo,  $P(E) = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$ .

### Exemplo 18

Um casal planeja ter cinco filhos. Determine a probabilidade de nascerem duas meninas e três meninos.

**Solução:**

A solução do problema se encaixa perfeitamente no método binomial, onde podemos considerar como “sucesso” o fato de nascer um menino em cada prova (ou uma menina).

Seja “p” a probabilidade de nascer um menino em cada prova e “q” a probabilidade de nascer uma menina. Logo,  $p = \frac{1}{2}$  e  $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Temos ainda,  $n = 5$ ,  $m = 3$  e desejamos calcular a probabilidade do evento  $E = \{\text{nascer três meninos e duas meninas}\}$ .

Dessa maneira:

$$P(E) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

### 3 PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

#### 3.1 O conceito de probabilidade geométrica

A probabilidade geométrica é uma parte do estudo da probabilidade na qual se faz necessário associar noções geométricas à resolução de problemas probabilísticos. As noções geométricas mais utilizadas na resolução desses problemas são as de comprimento, área e volume. Segundo Eisen (1969):

Em problemas de probabilidade geométrica, os possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas ou ainda por sólidos. Desde que o número de acontecimentos seja usualmente não contável, não podemos definir probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Todavia, podemos ainda definir a probabilidade de um evento de uma maneira natural e calculá-la por meio de considerações geométricas.

Preliminarmente, vamos contar com o auxílio do exemplo abaixo para construirmos o conceito de probabilidade geométrica.

#### Exemplo 19

Considere um círculo, dividido em quatro regiões:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , e  $\gamma$ , determinadas por dois diâmetros perpendiculares  $\overline{XZ}$  e  $\overline{YW}$  (Figura 7).

- Ao escolher aleatoriamente um ponto qualquer do círculo, qual a probabilidade dele pertencer à região  $\alpha$ ?
- Ao escolher aleatoriamente um ponto qualquer da circunferência, qual a probabilidade dele pertencer ao arco  $YZ$ ?

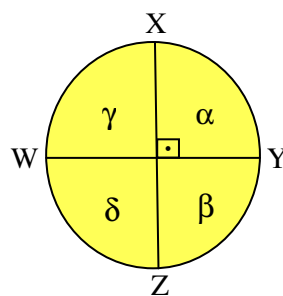


Figura 7

#### Solução:

- Seja o evento  $A = \{\text{o ponto escolhido pertence à região } \alpha\}$ .

O espaço amostral nesse caso – o conjunto de todos os pontos que pertencem ao círculo –, bem como o evento  $A$ , são conjuntos não-enumeráveis. Dessa maneira, como não



podemos “contar” os elementos desses conjuntos, não temos como utilizar o conceito tradicional de probabilidade para espaços amostrais equiprováveis, ou seja, a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número de casos possíveis. No entanto, podemos observar que as quatro regiões definidas no círculo são congruentes, por isso, é intuitivo considerar que não há razão para que um ponto escolhido ao acaso tenha mais chances de estar em determinada região do que em outra. Portanto, agora sim utilizando o conceito usual de probabilidade, podemos indicar a probabilidade de ocorrer o evento A como sendo  $P(A) = \frac{1}{4}$ . Essa razão encontrada, também reflete a razão entre a área da região  $\alpha$  e a área do círculo.

De acordo com Lima (2006, p. 129): “Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte do plano é extremamente razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região”.

Logo, dada uma região  $\alpha$  do plano contida em um espaço amostral  $\Omega$ , vamos admitir que a probabilidade de um ponto  $A \in \Omega$  também pertencer a  $\alpha$  é proporcional à área de  $\Omega$  e não depende da posição que  $\alpha$  ocupa em  $\Omega$ . Portanto, escolhido aleatoriamente um ponto  $A \in \Omega$ , a probabilidade de que ele pertença a  $\alpha$  é:

$$P(A) = \frac{\text{Área de } \alpha}{\text{Área de } \Omega}.$$

b) Seja o evento  $B = \{\text{o ponto escolhido pertence ao arco } YZ\}$ . Um raciocínio análogo ao utilizado no item a) nos leva a concluir que  $P(B) = \frac{1}{4}$ , pois o referido arco possui comprimento igual à quarta parte do comprimento da circunferência. De uma maneira geral, a probabilidade de um ponto B da circunferência pertencer a um arco da circunferência, independe da posição desse arco na circunferência e, portanto, a probabilidade do ponto B pertencer ao arco é dada por:

$$P(B) = \frac{\text{Comprimento do arco}}{\text{Comprimento da circunferência}}.$$

Partindo dos conceitos acima, podemos aplicar para conjuntos não-enumeráveis, propriedades das probabilidades que utilizamos no capítulo anterior.

### 3.2 Aplicações da probabilidade geométrica

#### Exemplo 20

(ENEM 2001) Um município de  $628 \text{ km}^2$  é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município (Figura 8). Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

- a) 20%      b) 25%      c) 30%      d) 35%      e) 40%

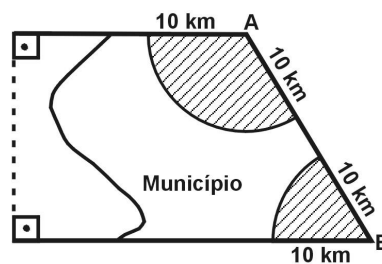


Figura 8

#### Solução:

O espaço amostral  $\Omega$  é formado pela região que compreende o município. Indicaremos a área dessa região por  $\text{Área}(\Omega) = 628 \text{ km}^2$ . Temos os seguintes eventos:  $A = \{\text{o morador encontra-se na área de alcance da antena A}\}$  e  $B = \{\text{o morador encontra-se na área de alcance da antena B}\}$ . Dizer que o morador encontra-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras é equivalente a afirmar que o morador encontra-se na área de alcance de A ou B. Portanto, queremos determinar a probabilidade de ocorrer o evento  $A \cup B$  e, para tanto, precisamos calcular a soma das áreas das regiões de alcance das duas antenas.

Os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , interiores ao município, são colaterais internos, logo,  $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) = 180^\circ$ . Além do mais, o ângulo agudo  $\hat{B}$  é congruente ao ângulo agudo  $\hat{A}$  (Figura 9), assim sendo, a soma das áreas de alcance das emissoras A e B corresponde à área do semicírculo com centro em A.

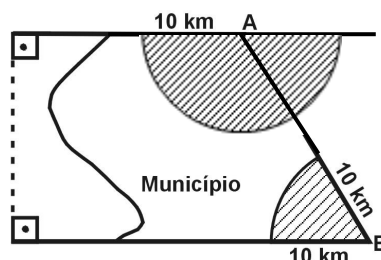


Figura 9

Temos ainda que os eventos A e B são mutuamente excludentes, dessa maneira, considerando  $\pi = 3,14$ , obtemos:

$$\text{Área}(A \cup B) = \text{Área}(A) + \text{Área}(B) = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 157 \text{ km}^2.$$

Portanto, a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras é:

$$P(A \cup B) = \frac{\text{Área}(A \cup B)}{\text{Área}(\Omega)} = \frac{157}{628} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

**Resposta:** letra “b”.

### Exemplo 21

Uma vara de madeira AD de comprimento L é partida aleatoriamente em três partes, pelos pontos B e C (Figura 10).



Figura 10

a) Calcule a probabilidade de as três partes formarem um triângulo;

b) Sabendo que o pedaço AB mede  $\frac{L}{4}$ , qual a probabilidade de as três partes

formarem um triângulo?

### Solução:

a) Seja o evento  $E = \{\text{os três pedaços são lados de um triângulo}\}$  e tome  $AB = x$ ,  $BC = y$ . Logo,  $CD = L - x - y$  (Figura 11).

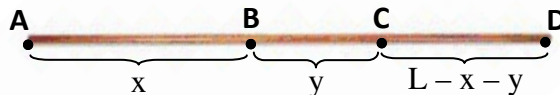


Figura 11

Vamos analisar o problema através dos valores possíveis para as medidas  $x$  e  $y$ , representando os pares ordenados  $(x, y)$  num plano cartesiano.

(I) Espaço amostral do experimento.

As medidas  $x$  e  $y$  devem satisfazer simultaneamente as três seguintes condições:

(i)  $0 < x < L$ ;

- (ii)  $0 < y < L$ ;
- (iii)  $x + y < L$ .

Logo, temos a seguinte região triangular do plano cartesiano ortogonal que representa  $\Omega$  (Figura 12):

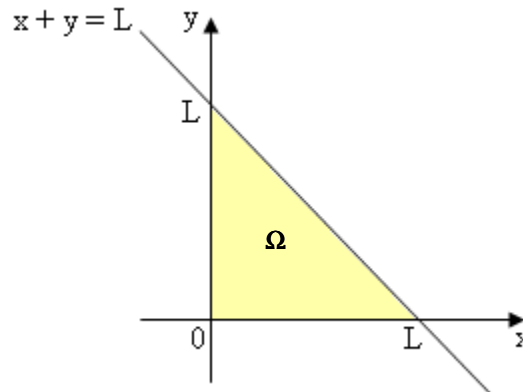


Figura 12

(II) Situação favorável para que o evento E ocorra.

Para que AB, BC e CD sejam lados de um triângulo as seguintes condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

(iv)  $x + y > L - x - y \Leftrightarrow 2x + 2y > L$ .

(v)  $x + L - x - y > y \Leftrightarrow y < \frac{L}{2}$ .

(vi)  $y + L - x - y > x \Leftrightarrow x < \frac{L}{2}$ .

Dessa maneira, fazendo a interseção das três regiões do plano que representam as condições (iv), (v) e (vi) acima, obtemos a região triangular  $\alpha$  que indica o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  para os quais as partes AB, BC e CD são lados de um triângulo (Figura 13).

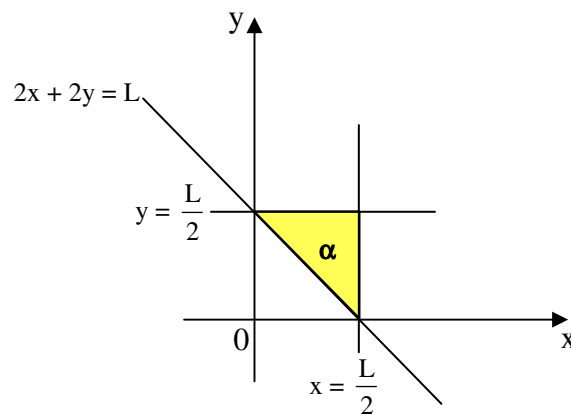


Figura 13

Representando as condições (I) e (II) numa ilustração apenas, concluímos que a região que representa o espaço amostral  $\Omega$  fica dividida em quatro triângulos retângulos congruentes (Figura 14).

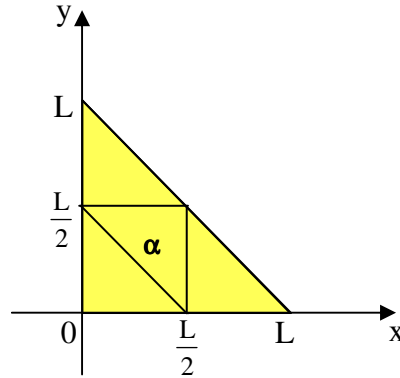


Figura 14

Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento E é dada por:

$$P(E) = \frac{\text{Área de } \alpha}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{4}.$$

b) Considere o evento  $E_1 = \{ \text{a medida do pedaço AB é } x = \frac{L}{4} \}$ . Desse modo, devemos determinar a probabilidade de ocorrer E dado que ocorreu  $E_1$ .

No segmento de reta PS (Figura 15) estão todos os pontos de  $\Omega$  em que  $x = \frac{L}{4}$ , enquanto no segmento QR estão os pontos pertencentes ao segmento de reta PS para os quais os pedaços AB, BC e CD formam um triângulo. A probabilidade de ocorrer E dado que ocorreu  $E_1$  é dada pela razão entre os comprimentos dos segmentos QR e PS.

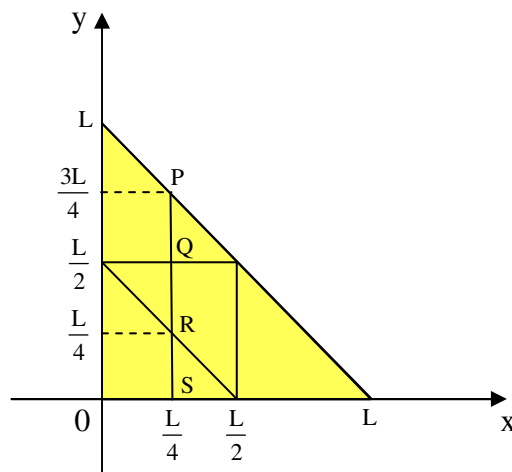


Figura 15

Utilizando congruência de triângulos podemos concluir que  $PQ = QR = RS = \frac{L}{4}$ .

Como  $PS = PQ + QR + RS$  segue que  $PS = 3 \cdot QR$ .

Portanto:

$$P(E_1 | E) = \frac{QR}{PS} = \frac{QR}{3 \cdot QR} = \frac{1}{3}.$$

O seguinte exercício, de Lima (2006, p. 136), evidencia o caráter geométrico que existe na resolução de problemas que envolvem probabilidade, embora esse aspecto não fique tão evidente no enunciado do problema.

### Exemplo 22

Cristina e Maria, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegará ao encontro em um instante entre 16 e 17 horas e se dispõem a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem.

### Solução:

Seja o evento  $A = \{\text{Cristina e Maria se encontrarão dentro do tempo previsto}\}$  e considere “x” e “y” os tempos decorridos a partir das 16 h, em minutos, até o momento em que Cristina e Maria, respectivamente, chegarão ao local do encontro. Vamos analisar o problema através dos valores possíveis para os tempos x e y, representando os pares ordenados (x, y) num plano cartesiano.

(I) Espaço amostral do experimento.

Pelo exposto acima, os valores possíveis para x e y são:

- (i)  $0 \leq x \leq 60$  e
- (ii)  $0 \leq y \leq 60$ , com x e y em minutos.

O espaço amostral é o quadrado formado pelos pares ordenados (x, y) que satisfazem as condições (i) e (ii) acima (Figura 16).

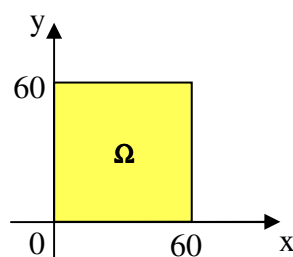


Figura 16

(II) Situação favorável para que o evento A ocorra.

Para que Cristina e Maria se encontrem, a diferença entre os tempos de chegada no local de encontro deve ser menor ou igual que 10 minutos, ou seja:

$$|x - y| \leq 10, \text{ com } x \text{ e } y \text{ em minutos.}$$

Segue que:  $-10 \leq x - y \leq 10$ . Dessa maneira, temos:

(iii)  $x - y \leq 10$  e

(iv)  $x - y \geq -10$

A região  $\alpha$  do plano cartesiano que corresponde à situação favorável para que o evento A ocorra é formada pelos pontos que satisfazem as condições (iii) e (iv) acima (Figura 17).

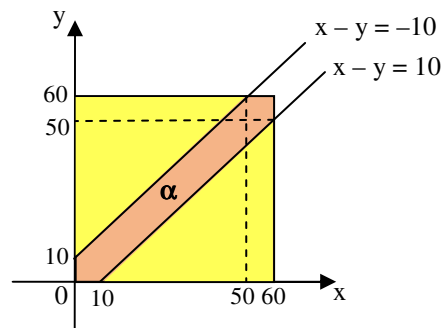


Figura 17

Portanto, a probabilidade das amigas se encontrarem dentro do tempo estipulado é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Área de } \alpha}{\text{Área de } \Omega} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

## 4 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

### 4.1 Conceito de variável aleatória

Em muitas situações experimentais, com o objetivo de aplicarmos modelos matemáticos para o estudo de estimativas e tomadas de decisões, é mais interessante associarmos um número real a um evento aleatório e calcularmos a probabilidade da ocorrência desse número, em vez de buscar a probabilidade de ocorrer o evento. Por exemplo:

No lançamento de três moedas, vamos analisar os casos em que ocorrem (ou não) o resultado cara.

Representemos por “c” o resultado cara, por “k” o resultado coroa e  $(x_1, x_2, x_3)$  o resultado obtido no lançamento das três moedas com  $x_i = c$  ou  $x_i = k$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ .

O espaço amostral do experimento é:

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}.$$

Seja  $X$  o número de ocorrências da face cara para cada evento elementar de  $\Omega$ . Desse modo,  $X$  pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Vamos associar a esses números os eventos A, B, C e D que correspondem, respectivamente, à ocorrência de nenhuma, uma, duas ou três caras, conforme a tabela a seguir:

X	Evento associado
0	$A = \{(k, k, k)\}$
1	$B = \{(c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)\}$
2	$C = \{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}$
3	$D = \{(c, c, c)\}$

Podemos associar às probabilidades dos eventos, as probabilidades de  $X$  assumir os valores numéricos associados aos eventos:

$$P(X = 0) = P(A) = \frac{1}{8}; \quad P(X = 1) = P(B) = \frac{3}{8}; \quad P(X = 2) = P(C) = \frac{3}{8} \quad \text{e}$$

$$P(X = 3) = P(D) = \frac{1}{8}.$$

Para as probabilidades encontradas acima, podemos aplicar o seguinte modelo matemático:



$$P(X = i) = \binom{3}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-i}, \text{ onde } X = i \text{ é a quantidade de caras obtidas no}$$

lançamento das moedas.<sup>4</sup>

É possível ainda, representarmos os resultados graficamente (Figura 18):

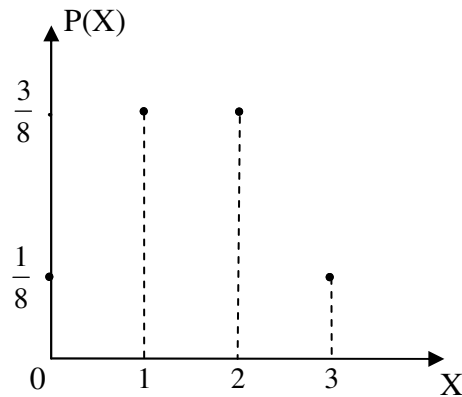


Figura 18

De acordo com Morettin (2012, p. 46): “*variável aleatória* é a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único número real”.

## 4.2 Variável aleatória discreta

Se a variável aleatória assume valores em um conjunto enumerável dizemos que ela é “discreta”. Nesse caso, se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são eventos pertencentes a uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e  $X$  uma variável aleatória, então, indicaremos:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } X(A_i) = x_i \in \mathbb{R}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

A função “P” que associa cada valor  $x_i$ , assumido pela variável aleatória, à probabilidade do evento  $A_i$  correspondente é denominada “função de probabilidade”. Simbolicamente representamos:

$$P(X = x_i) = P(A_i) \text{ ou } P(x_i) = P(A_i), \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

O conjunto  $\{(x_i, P(x_i)) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  é denominado “distribuição de probabilidades” da variável aleatória  $X$ . É importante observar que para que se tenha uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória é necessário que:

$$P(x_i) \geq 0, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1.$$

<sup>4</sup> Ver o modelo binomial na seção 2.6.

**Exemplo 23**

Seja uma variável aleatória com função de probabilidade dada por:

$$P(X = i) = \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{2}{3}, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots$$

Calcular:

- a)  $P(X = 3)$ ;
- b)  $P(X \text{ ser par})$ ;
- c)  $P(X \geq 3)$ .

**Solução:**

Inicialmente, é interessante observar que  $P$  é realmente uma função de probabilidade. Com efeito:

(i)  $P(x_i) > 0$ , para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ , pois é um produto de números reais positivos;

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \dots \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right]. \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes corresponde a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $q = \frac{1}{3}$ . Dessa maneira,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Logo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Portanto,  $P$  é uma função de probabilidade.

$$\text{a) } P(x_3) = P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

$$\text{b) } P(X \text{ ser par}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X = 2k\right), \text{ com } k = 1, 2, 3, \dots$$

Como os eventos associados aos valores da variável aleatória são mutuamente excludentes, segue que:

$$P(X \text{ ser par}) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243} + \dots\right].$$

A expressão entre colchetes é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão  $q = \frac{1}{9}$  e primeiro termo  $a_1 = \frac{1}{3}$ .

Dessa maneira:

$$P(X \text{ ser par}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$c) P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

Portanto:

$$P(X \geq 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

#### 4.2.1 Modelos teóricos de distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias discretas

Existem modelos teóricos de distribuições de probabilidade nos quais se encaixam diversas situações práticas. Por exemplo, a distribuição de probabilidades definida pela função de probabilidade do **Exemplo 23** é denominada “distribuição geométrica”. Generalizando a situação do exemplo supracitado, ela possui as seguintes características:

Sejam “n” tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite sucesso com probabilidade “p” e fracasso com probabilidade “q”, sendo  $p + q = 1$ .

Tome a variável aleatória X como sendo o “número de tentativas necessárias ao aparecimento do primeiro sucesso”. Dessa maneira:

$$P(X = i) = p \cdot q^{i-1}.$$

O modelo binomial [2.6] define a “distribuição binomial” cuja função de probabilidade é:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i},$$

onde a variável aleatória  $X$  é o “número de sucessos em  $n$  tentativas independentes de um experimento”, sendo que cada tentativa admite apenas os resultados sucesso com probabilidade  $p$  e fracasso com probabilidade  $q = 1 - p$ .

A “distribuição de Bernoulli” é um caso particular da binomial, em que é realizada apenas uma tentativa do experimento, isto é,  $n = 1$ . Nesse caso, a variável aleatória assume os valores  $X = 0$  (fracasso) ou  $X = 1$  (sucesso) com probabilidades  $p(X = 0) = q$  e  $p(X = 1) = p$ , respectivamente. A sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = i) = p^i \cdot q^{1-i}.$$

Na “distribuição de Pascal”, um experimento aleatório é repetido independentemente até que um evento  $A$  ocorra pela primeira  $k$ -ésima vez. Fazendo  $P(A) = p$  (sucesso),  $P(\bar{A}) = q$  (fracasso) e tomando a variável aleatória  $X$  como sendo o “número de repetições necessárias para que  $A$  ocorra pela  $k$ -ésima vez”, sua função de probabilidade é:

$$P(X = i) = \binom{i-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{i-r}.$$

No caso em que  $r = 1$ , temos o caso particular da distribuição geométrica.

Outros modelos teóricos bastante utilizados são a distribuição hipergeométrica, a polinomial e a de Poisson. Esta última é muito utilizada, por exemplo, para calcular a probabilidade do tempo de espera em filas ou a probabilidade da quantidade de carros que passam em um cruzamento, por minuto, durante uma certa hora do dia.

### 4.3 Variável aleatória contínua

Dizemos que uma variável aleatória é contínua quando ela pode assumir qualquer valor em um dado intervalo real. São exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

- a) o tempo até a cura de uma doença;
- b) a altura de árvores;
- c) a concentração de  $\text{CO}_2$  na água;
- d) a precipitação diária medida no pluviômetro;
- e) a evaporação mensal de um açude.

Podemos formalizar uma definição para variável aleatória contínua de modo que sejam preservadas as propriedades existentes para o estudo de probabilidades no caso

discreto. De acordo com Morettin (2012, p.126), uma variável aleatória  $X$  é contínua em  $\mathbb{R}$  se existir uma função  $f(x)$ , tal que:

$$(1) f(x) \geq 0 \text{ (não negativa) e;}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

A função  $f$  é chamada “função densidade de probabilidade”. Segue que, a probabilidade de a variável aleatória pertencer ao intervalo  $[a, b]$  é dada por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

No plano ortogonal, a probabilidade de a variável aleatória assumir um valor no intervalo  $[a, b]$  é dada pela área delimitada pelo eixo das abscissas e a curva que representa graficamente a função  $f$  (Figura 19).

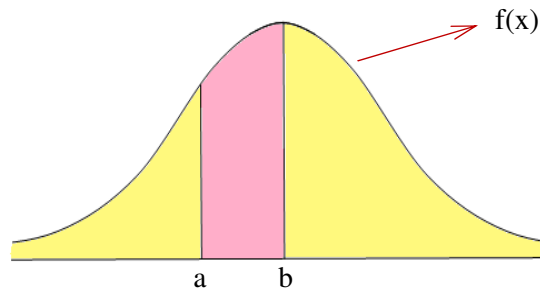


Figura 19

### Exemplo 24

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32} x(4-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}.$$

a) Verifique que  $f$  é uma função densidade de probabilidade.

b) Calcule  $P(1 \leq X \leq 3)$ .

### Solução:

a) Verificaremos as duas condições da definição de função densidade de probabilidade.

(1) Para  $0 \leq x \leq 4$ , temos a lei de formação de uma função quadrática com concavidade da parábola voltada para baixo e raízes iguais a 0 e 4. Dessa maneira, a função é não negativa nesse intervalo. Fora do intervalo  $[0, 4]$  tem-se  $f(x) = 0$ .

Portanto,  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx + \int_4^{\infty} f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x(4-x)dx = \frac{3}{32} \cdot \int_0^4 (4x - x^2)dx = \frac{3}{32} \cdot \left[ \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{3}{32} \cdot \left[ \frac{4 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} \right] = \frac{3}{32} \cdot \left[ 32 - \frac{64}{3} \right] = 3 - 2 = 1.$$

Portanto, de (1) e (2) concluímos que  $f$  é uma função densidade de probabilidade.

$$\text{b) } P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 f(x)dx$$

$$\Rightarrow P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{3}{32} x(4-x)dx = \frac{3}{32} \cdot \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$\Rightarrow P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3}{32} \cdot \left[ 2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3} \right]$$

$$\Rightarrow P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3}{32} \cdot \left[ 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} \right] = \frac{3}{32} \cdot \frac{22}{3} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}.$$

### Exemplo 25

De STEWART(2006, p. 572):

Fenômenos como tempo de espera ou tempo de falha de um equipamento são comumente modelados por funções densidade de probabilidade exponencialmente decrescentes. Ache a forma exata de uma função desse tipo.

### Solução:

Seja  $f$  uma função densidade de probabilidade exponencialmente decrescente. Sua lei de formação tem a seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot e^{-kt} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \text{ onde } t \text{ é o tempo de espera, sendo } c \text{ e } k \text{ constantes reais}$$

com  $c > 0$  e  $k > 0$  (Figura 20).

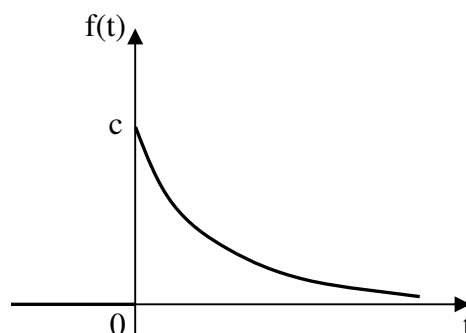


Figura 20

Da maneira como foi definida, temos que  $f(t)$  é não negativa, logo, basta impormos a condição (2) da definição de função densidade de probabilidade para encontrarmos os valores de  $c$  e  $k$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) dt &= \int_0^{\infty} c \cdot e^{-kt} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x c \cdot e^{-kt} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} c \cdot \left[ -\frac{e^{-kt}}{k} \right]_0^x \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{c}{k} \cdot [e^{-kx} - e^0] \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{c}{k} \cdot [e^{-kx} - e^0] \right) \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{c}{k} \cdot [e^{-kx} - 1] \right). \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt &= \frac{c}{k} \end{aligned}$$

Pela condição (2) da definição de variável aleatória contínua temos  $\frac{c}{k} = 1$ , logo,

$c = k$ .

Portanto, uma função densidade de probabilidade exponencialmente decrescente deve ser da forma:

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot e^{-ct} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \text{ sendo } c \text{ uma constante real com } c > 0.$$

## 5 O PROBLEMA DA AGULHA BUFFON

### 5.1 Resolução do problema da agulha de Buffon

Nesta seção passaremos à resolução do problema a que nos propomos no início deste trabalho. Para o enunciado do problema utilizaremos a versão dada por STEWART (2006, p. 581) nos exercícios 11 e 12 da seção “Problemas Quentes” da referida obra e, em seguida, vamos partir para uma pequena generalização e uma variante do problema.

#### Problema 1 (PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON)

Uma agulha de comprimento “ $h$ ” é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa), na qual retas paralelas separadas por “ $L$ ” unidades, com  $h \leq L$ , foram desenhadas. Determinar a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas. Calcule a probabilidade de a agulha interceptar uma reta se  $h = L$ . O que acontece se  $h = \frac{L}{2}$ ?

#### Solução:

Vamos considerar inicialmente uma agulha de tamanho  $h$  e as retas paralelas do plano com distância entre elas igual a  $L \geq h$ . O experimento aleatório a ser considerado é “a agulha é lançada sobre a superfície plana e observa-se se ela intercepta uma das linhas”. Utilizando noções geométricas, vamos identificar os “casos possíveis” para a agulha cair sobre a superfície e os “casos favoráveis” para que ela intercepte uma das linhas.

Estudaremos o problema mediante a análise dos parâmetros  $y$  e  $\theta$  (Figura 21) que definiremos a seguir:

a) Indicaremos por  $\theta$ , a medida do ângulo no sentido anti-horário, entre uma reta da superfície e a agulha;

b) A distância da extremidade inferior da agulha à reta da superfície plana, imediatamente acima dessa extremidade, vamos representar por “ $y$ ”. Caso a extremidade inferior da agulha pertença a uma das retas, vamos considerar  $y = 0$  (Figura 22).

Para efeito de calcular a probabilidade de a agulha cortar uma linha é irrelevante o fato da agulha encontrar-se “mais à esquerda” ou “mais à direita” no plano. Esse cálculo depende apenas das variações dos parâmetros  $y$  e  $\theta$  acima definidos.



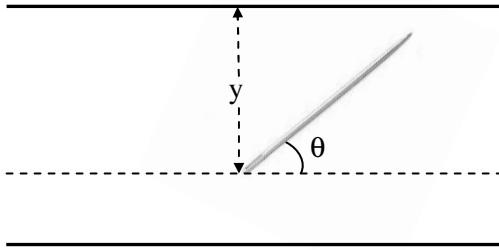


Figura 21

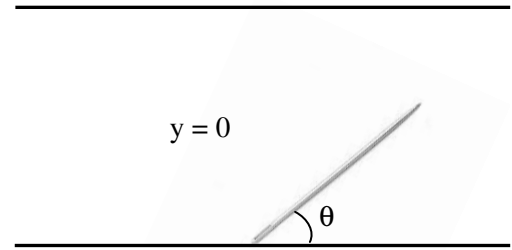


Figura 22

Dessa maneira, os casos possíveis em que a agulha cairá no plano ocorrerão com  $y \in [0, L]$  e  $\theta \in [0, \pi]$ , ou seja, o espaço amostral é o conjunto  $\Omega = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq L \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . Representando  $\Omega$  no plano ortogonal, temos a seguinte região retangular (Figura 23).

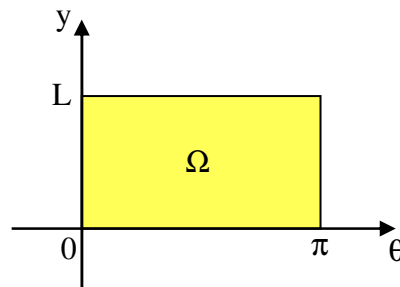


Figura 23

Dessa maneira, os “casos possíveis” para o experimento são dados por:

Área de  $\Omega = \pi \cdot L$ .

Seja o evento  $A = \{\text{a agulha intercepta uma reta do plano}\}$ . Com relação a este fato, temos as seguintes situações (Figura 24):

(i) Se a agulha não intercepta alguma das retas, então  $y > h \cdot \text{sen}\theta$ ;

(ii) Se a agulha intercepta uma das retas, então  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta$ .<sup>5</sup>

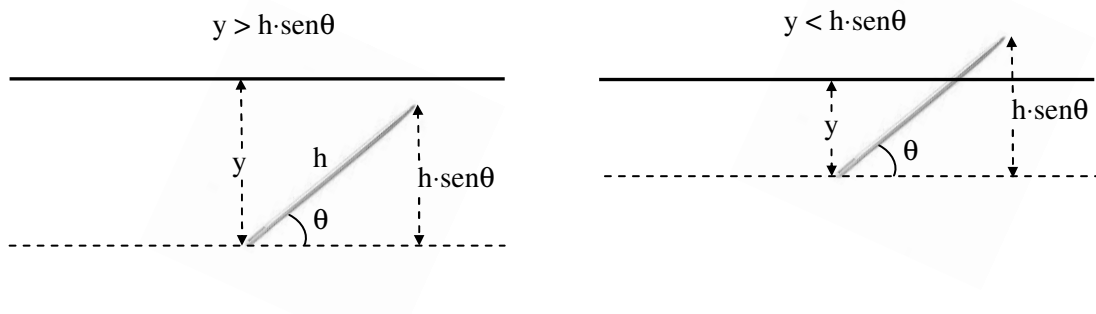


Figura 24

<sup>5</sup>  $y = h \cdot \text{sen}\theta$  se a extremidade superior da agulha pertence à uma reta da superfície plana.

Graficamente, os pontos  $(\theta, y)$  para os quais a agulha intercepta uma reta são aqueles que se encontram abaixo da curva que representa a função  $y = h \cdot \text{sen}\theta$  (Figura 25).

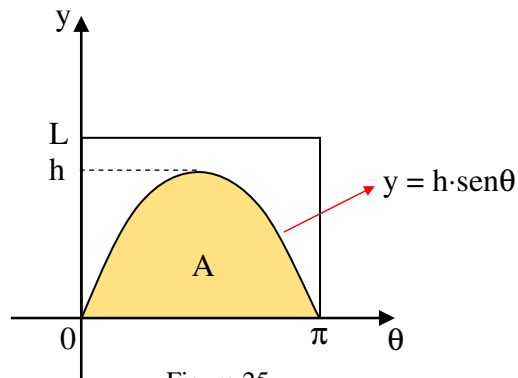


Figura 25

Desse modo, a probabilidade de agulha interceptar uma reta da superfície plana é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_0^{\pi} h \cdot \text{sen}\theta \, d\theta = \frac{-h}{\pi \cdot L} \cdot [\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{-h}{\pi \cdot L} \cdot (\cos \pi - \cos 0) = \frac{-h}{\pi \cdot L} \cdot (-2) = \frac{2h}{\pi \cdot L}.$$

$$\text{Se } h = L, \text{ temos que } P(A) = \frac{2}{\pi} \text{ e se } h = \frac{L}{2}, \text{ temos } P(A) = \frac{1}{\pi}.$$

Se considerarmos a variável aleatória  $X$  como sendo, “o número de retas da superfície plana que a agulha intercepta”, temos  $X = 0$  ou  $X = 1$ . Sua função de probabilidade é:

$$P(X = i) = \begin{cases} 1 - \frac{2h}{\pi \cdot L} & \text{se } i = 0 \\ \frac{2h}{\pi \cdot L} & \text{se } i = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad P(X = i) = 1 - i + \frac{(-1)^{1+i} \cdot 2h}{\pi \cdot L}.$$

## Problema 2

Suponha que a agulha do problema anterior tem comprimento  $h \geq L$ .

- Qual a probabilidade de a agulha interceptar pelo menos uma reta?
- Qual a probabilidade de a agulha interceptar duas retas?

## Solução:

Vamos considerar os parâmetros  $\theta$  e  $y$ , assim como no **Problema 1**.

Sendo  $h \geq L$ , temos três situações possíveis em relação à interseção da agulha com as retas da superfície (Figura 26):

- (i) Se a agulha não intercepta alguma das retas, então  $y > h \cdot \text{sen}\theta$ .
- (ii) Se a agulha intercepta apenas uma das retas, então  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta < y + L$ .
- (iii) Se a agulha intercepta duas retas, então  $y + L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ .

As igualdades nos itens (ii) e (iii) ocorrem somente quando a extremidade superior da agulha pertencer à uma reta da superfície plana.

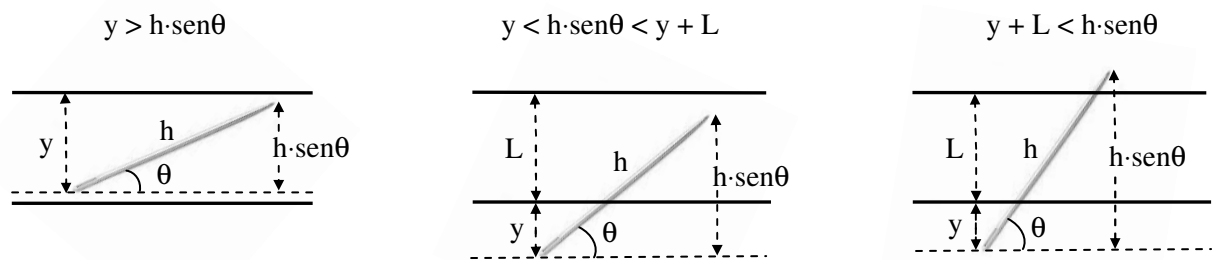


Figura 26

a) Seja a variável aleatória  $X$ : número de retas da superfície plana que a agulha intercepta. Desse modo, queremos calcular  $P(X \geq 1)$ .

Para a agulha interceptar pelo menos uma reta é necessário e suficiente que  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta$ . Graficamente, os pares ordenados  $(\theta, y)$  que satisfazem essa desigualdade são os pontos de  $\Omega$  que se encontram abaixo da curva que representa a função  $y = h \cdot \text{sen}\theta$  (Figura 27).

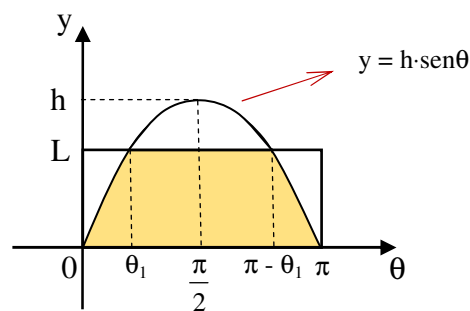


Figura 27

O ângulo  $\theta_1$  da Figura 27 é tal que  $h \cdot \text{sen}\theta_1 = L$ . Daí segue que  $\text{sen}\theta_1 = \frac{L}{h}$ , conseqüentemente,  $\text{cos}\theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h}$  e  $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h}$ . Calculando a probabilidade  $P(X \geq 1)$ , temos que:

$$P(X \geq 1) = \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - \theta_1 - \theta_1)L + 2 \int_0^{\theta_1} h \cdot \text{sen}\theta \, d\theta \right)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_1)L + 2h[-\cos\theta]_0^{\theta_1} \right)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_1)L - 2h[\cos\theta_1 - \cos 0] \right)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L - 2L \cdot \theta_1 + 2h - 2h \cdot \cos\theta_1 \right)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L - 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} + 2h - 2h \cdot \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h} \right).$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar pelo menos uma reta da superfície plana, no caso em que  $h \geq L$ , é:

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2h - 2\sqrt{h^2 - L^2} - 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} \right).$$

No caso particular em que  $h = L$ , temos:

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2L - 2L \cdot \text{sen}^{-1} 1 \right) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2L - 2L \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2L}{\pi \cdot L} = \frac{2}{\pi},$$

como já havíamos observado no **Problema 1**.

b) Nesse caso, devemos calcular a probabilidade  $P(X \geq 2)$  e, de acordo com (iii), para a agulha interceptar duas retas é necessário e suficiente que  $y + L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ , ou seja,  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta - L$ . Com relação aos “casos favoráveis” para que ocorra o evento do problema temos duas situações a considerar:

**1º caso:**

Se  $L \leq h \leq 2L$ , então  $0 \leq h - L \leq L$  (Figura 28).

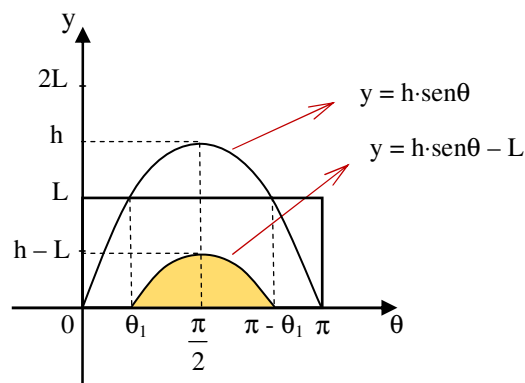


Figura 28

A probabilidade  $P(X \geq 2)$  é dada por:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} (h \cdot \text{sen}\theta - L) d\theta \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos\theta - L\theta]_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos(\pi - \theta_1) - L(\pi - \theta_1) + h \cdot \cos\theta_1 + L\theta_1] \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (h \cdot \cos\theta_1 - \pi \cdot L + L\theta_1 + h \cdot \cos\theta_1 + L\theta_1) \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (2h \cdot \cos\theta_1 + 2L\theta_1 - \pi \cdot L).
\end{aligned}$$

Assim como no exercício a), temos:  $\text{sen}\theta_1 = \frac{L}{h}$ ,  $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h}$  e  $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h}$ .

Dessa maneira, a probabilidade de a agulha interceptar duas retas da superfície plana para  $L \leq h \leq 2L$  é:

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - L^2} + 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} - \pi \cdot L \right).$$

## 2º caso:

Se  $h \geq 2L$ , então  $h - L \geq L$  (Figura 29)

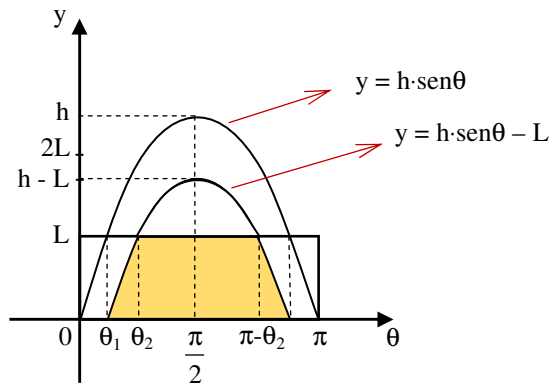


Figura 29

A probabilidade  $P(X \geq 2)$  é dada por:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - \theta_2 - \theta_2)L + 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (h \cdot \text{sen}\theta - L) d\theta \right) \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_2)L + 2[-h \cos\theta - L\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) \\
\Rightarrow P(X \geq 2) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_2)L - 2(h \cos\theta_2 + L\theta_2 - h \cos\theta_1 - L\theta_1) \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi \cdot L - 2L\theta_2 - 2h \cos \theta_2 - 2L\theta_2 + 2h \cos \theta_1 + 2L\theta_1)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (2h \cos \theta_1 - 2h \cos \theta_2 + 2L\theta_1 - 4L\theta_2 + \pi \cdot L).$$

Com relação aos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , temos que:

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{L}{h}, \text{ logo, } \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h} \text{ e } \theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h}.$$

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{2L}{h}, \text{ logo, } \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{h^2 - 4L^2}}{h} \text{ e } \theta_2 = \text{sen}^{-1} \frac{2L}{h}.$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar duas retas da superfície plana para  $h \geq 2L$  é:

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - L^2} - 2\sqrt{h^2 - 4L^2} + 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} - 4L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{2L}{h} + \pi \cdot L \right).$$

Observe que para  $h = 2L$ , seja no primeiro ou no segundo caso, temos

$$P(X \geq 2) = \frac{2}{3\pi} \cdot (3\sqrt{3} - \pi).$$

No **Problema 3** a seguir, faremos uma generalização para o exercício anterior, em seguida, mostraremos uma análise gráfica da distribuição de probabilidades em torno do problema de Buffon.

### Problema 3

Encontre uma fórmula geral para a probabilidade de a agulha interceptar “n” retas, com  $n \in \mathbf{N}$  e  $n \geq 1$ .

#### Solução:

Seja a variável aleatória X: número de retas da superfície plana que a agulha intercepta. Queremos então calcular  $P(X \geq n)$ .

Para que a agulha intercepte n retas é necessário e suficiente que  $y + (n - 1)L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ , ou seja,  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta - (n - 1)L$ . A função cuja lei de formação é

$y = h \cdot \text{sen}\theta - (n - 1)L$  tem ponto de máximo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  no intervalo  $[0, \pi]$  e seu valor máximo é

$$y_{\text{máx}} = h - (n - 1)L.$$

Desse modo, temos três casos a considerar:

**1º caso:**

Se  $h \leq (n-1)L$ , então  $h - (n-1)L \leq 0$  (Figura 30).

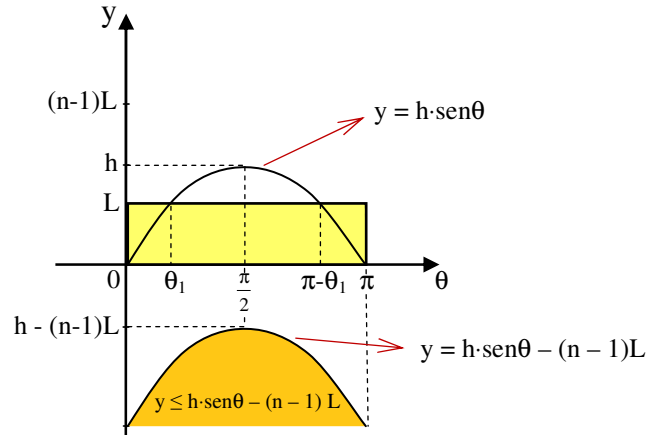


Figura 30

Logo, não existem resultados possíveis em  $\Omega$  para a agulha interceptar  $n$  retas do plano, portanto,  $P(X \geq n) = 0$ .

**2º caso:**

Se  $(n-1)L \leq h \leq nL$ , então  $0 \leq h - (n-1)L \leq L$  (Figura 31).

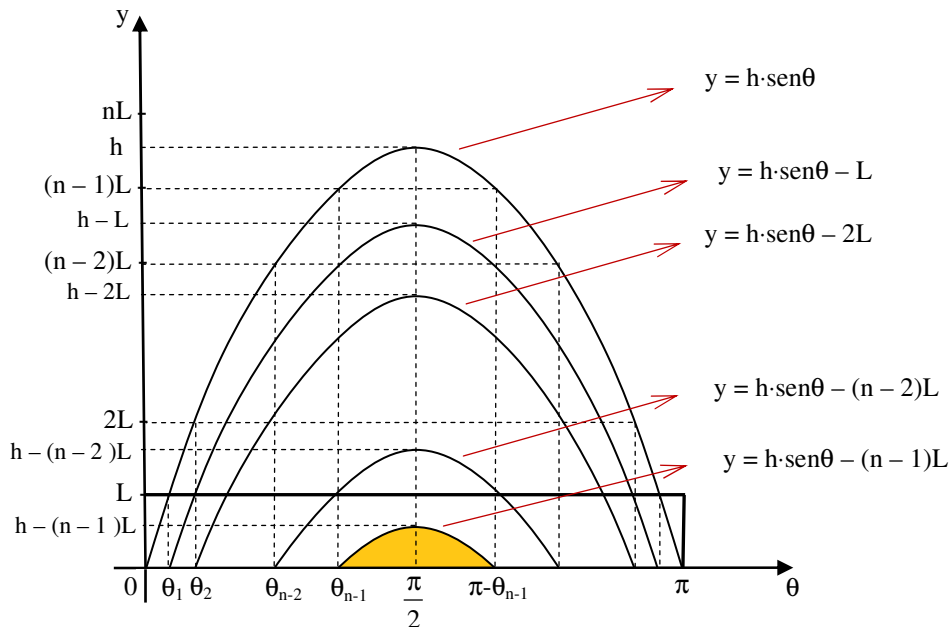


Figura 31

Dessa maneira, a probabilidade  $P(X \geq n)$  é dada por:

$$P(X \geq n) = \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}} (h \cdot \text{sen} \theta - (n-1)L) d\theta, \text{ onde } \text{sen} \theta_i = \frac{i \cdot L}{h},$$

para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Segue que:

$$P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}} (h \cdot \text{sen} \theta - (n-1)L) d\theta$$

$$\Rightarrow P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos \theta - (n-1)L\theta]_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}}$$

$$\Rightarrow P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos(\pi - \theta_{n-1}) - L(n-1)(\pi - \theta_{n-1}) + h \cdot \cos \theta_{n-1} + (n-1)L\theta_{n-1}]$$

$$\Rightarrow P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (h \cdot \cos \theta_{n-1} + h \cdot \cos \theta_{n-1} + L(n-1)(\theta_{n-1} - \pi + \theta_{n-1})), \text{ pois}$$

$$\cos(\pi - \theta_{n-1}) = -\cos \theta_{n-1}.$$

$$\Rightarrow P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (2h \cdot \cos \theta_{n-1} + L(n-1)(2\theta_{n-1} - \pi)).$$

$$\text{Como } \text{sen} \theta_{n-1} = \frac{(n-1)L}{h}, \text{ temos } \cos \theta_{n-1} = \frac{\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2}}{h} \text{ e } \theta_{n-1} = \text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h}.$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar “n” retas da superfície plana para  $(n-1)L \leq h \leq nL$  é:

$$P(X \geq n) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2} + L(n-1) \cdot \left( 2\text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h} - \pi \right) \right), \text{ para todo}$$

$n \geq 1$ .

Observe que para  $n = 1$ , temos  $h \leq L$  e  $P(X \geq 1) = \frac{2h}{\pi \cdot L}$  (**Problema da agulha de**

**Buffon**).

**3º caso:**

Se  $h \geq nL$ , temos  $h - (n-1)L \geq L$  (Figura 32).

Dessa maneira, a probabilidade  $P(X \geq n)$  é dada por:

$$P(X \geq n) = \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} (h \cdot \text{sen} \theta - (n-1)L) d\theta \right),$$

onde  $\text{sen} \theta_i = \frac{i \cdot L}{h}$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .



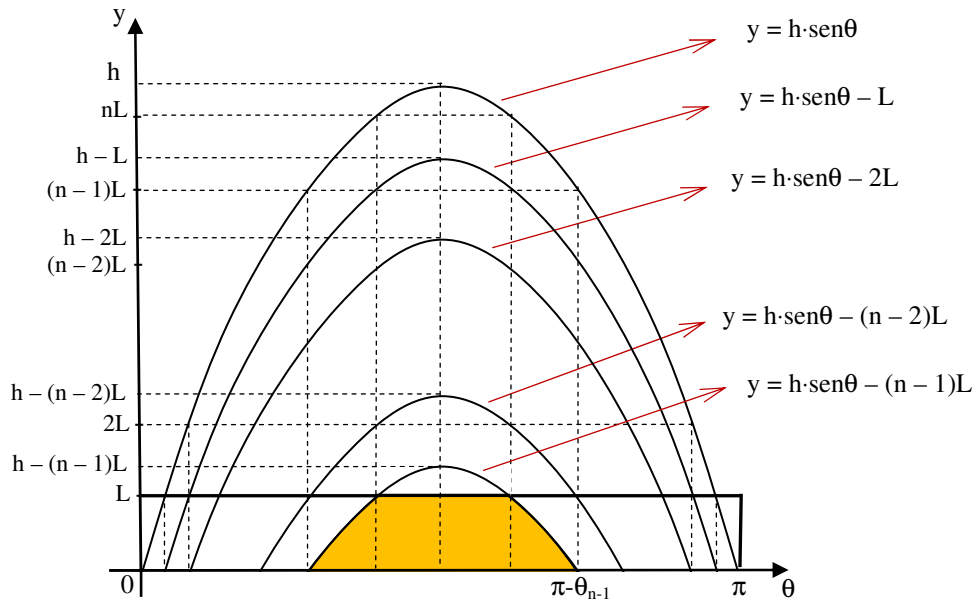


Figura 32

Segue que:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} (h \cdot \text{sen}\theta - (n-1)L) d\theta \right) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2[-h \cdot \cos\theta - (n-1)L\theta]_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \right) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L - 2(h \cdot \cos\theta_n - h \cdot \cos\theta_{n-1} + (n-1)L(\theta_n - \theta_{n-1})) \right) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \\
 &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2L\theta_n - 2h \cdot \cos\theta_n + 2h \cdot \cos\theta_{n-1} - 2nL\theta_n + 2nL\theta_{n-1} + 2L\theta_n - 2L\theta_{n-1}) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos\theta_n + 2h \cdot \cos\theta_{n-1} - 2nL\theta_n + 2nL\theta_{n-1} - 2L\theta_{n-1}) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos\theta_n + 2h \cdot \cos\theta_{n-1} + 2L(n\theta_{n-1} - \theta_{n-1} - n\theta_n)) \\
 \Rightarrow P(X \geq n) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos\theta_n + 2h \cdot \cos\theta_{n-1} + 2L((n-1)\theta_{n-1} - n\theta_n)).
 \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}\theta_i = \frac{i \cdot L}{h}$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , temos que  $\text{sen}\theta_{n-1} = \frac{(n-1)L}{h}$  e

$\text{sen}\theta_n = \frac{nL}{h}$ . Desse modo:

$$\cos\theta_{n-1} = \frac{\sqrt{h^2 - (n-1)^2L^2}}{h}, \cos\theta_n = \frac{\sqrt{h^2 - n^2L^2}}{h}, \theta_{n-1} = \text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h} \text{ e } \theta_n = \text{sen}^{-1} \frac{nL}{h}.$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar “n” retas da superfície plana para  $h \geq nL$  é:

$$P(X \geq n) = \frac{1}{\pi L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - (n-1)^2L^2} - 2\sqrt{h^2 - n^2L^2} + 2L \left( (n-1)\text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h} - n \cdot \text{sen}^{-1} \frac{nL}{h} \right) + \pi L \right),$$

para todo  $n \geq 1$ .

Os gráficos do **Problema 3** nos levam a refletir sobre o comportamento das probabilidades de a agulha interceptar uma certa quantidade de retas da superfície plana. Por exemplo, na ilustração abaixo (Figura 33) estão reproduzidas as regiões  $A_i \subset \Omega$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ , que ficam limitadas pelas curvas  $y = h \cdot \text{sen}\theta - (i-1)L$  e  $y = h \cdot \text{sen}\theta - iL$ , sendo que nesse caso específico, temos  $nL \leq h \leq n(L+1)$ .

Cada região  $A_i$  representa “os casos favoráveis” para que a agulha intercepte **exatamente** “i” retas da superfície plana.

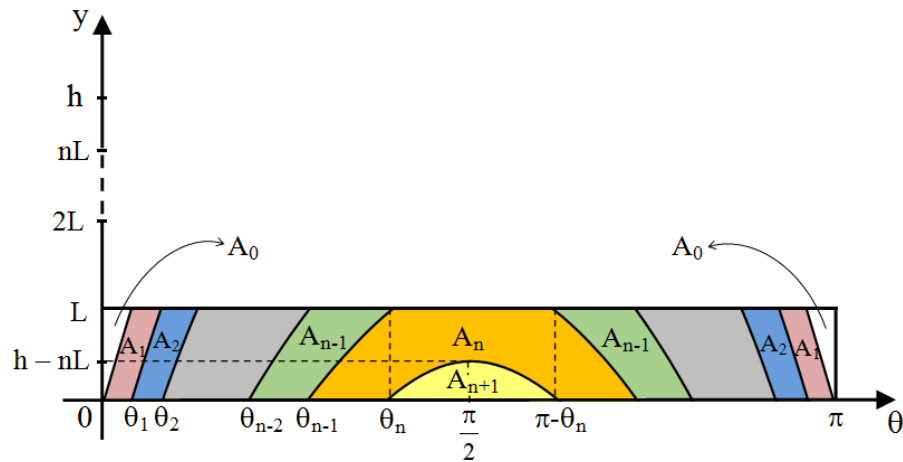


Figura 33

Se considerarmos a variável aleatória  $X$  que indica a “quantidade de retas que a agulha intercepta”, de maneira semelhante aos problemas resolvidos anteriormente, podemos calcular probabilidades como  $P(X = i)$  ou  $P(X \geq i \mid \theta_k < \theta < \theta_p)$ , com  $k < p$ , entre outras.

Ainda para estudos posteriores, com base na figura acima, nos parece bastante razoável supor que seja possível estabelecer condições para que se obtenha a maior ou menor probabilidade relativa à quantidade exata de retas que a agulha intercepta.

Vamos finalizar esta seção com uma variante do problema da agulha de Buffon – proposta em 1812, por Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) <sup>6</sup> – que é um interessante problema de probabilidade geométrica com a utilização do conceito de volume.

## 5.2 O Problema de Laplace

Um plano é particionado por retângulos congruentes de lados  $a$  e  $b$  e sobre ele é lançada uma agulha de tamanho  $l$ , menor que os lados do retângulo. Qual a probabilidade de a agulha interceptar um dos lados desse retângulo?

### Solução:

Seja a variável aleatória  $X$  que indica “o número de lados do retângulo que a agulha intercepta”. A probabilidade procurada no problema é  $P(X \geq 1)$ . Vamos calcular inicialmente a probabilidade de a agulha não interceptar algum dos lados dos retângulos, ou seja,  $P(X = 0)$  (Figura 34).

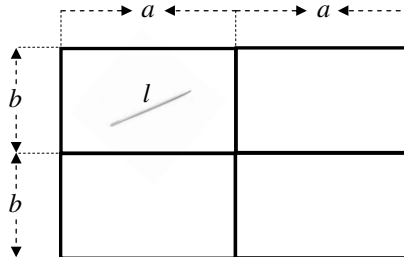


Figura 34

Sejam “ $\theta$ ” o ângulo entre a agulha e um lado horizontal do retângulo, no sentido anti-horário; “ $x$ ” a distância da extremidade inferior da agulha até o lado  $a$  do retângulo que fica acima da referida extremidade e “ $y$ ” a distância da extremidade inferior da agulha ao lado  $b$  que fica à direita desta extremidade (Figura 35).

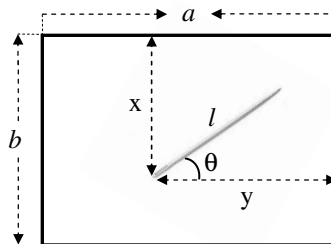


Figura 35

<sup>6</sup> Prodigioso matemático, astrônomo e físico francês que dedicou grande parte de sua vida ao estudo da astronomia matemática

Vamos fazer o estudo do problema analisando os valores possíveis para a terna  $(\theta, x, y)$ . Todas as possíveis situações em que a agulha vai se encontrar após o lançamento serão cobertas para:

$$0 \leq \theta < \pi, 0 \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq a.$$

Dessa maneira, o espaço amostral  $\Omega$  é composto pelos pontos do paralelepípedo de dimensões  $\pi, b$  e  $a$  (Figura 36) cujo volume é: Volume de  $\Omega = \pi \cdot a \cdot b$ .

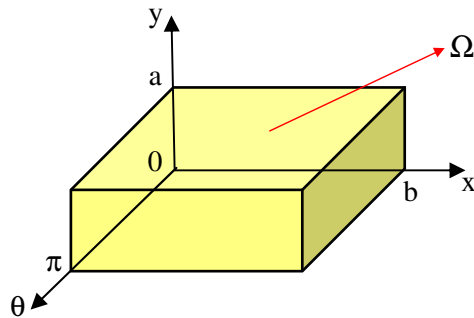


Figura 36

Para determinarmos os “casos favoráveis” para que a agulha não intercepte um dos lados de um retângulo, vamos verificar inicialmente qual a área do retângulo que será coberta pela extremidade inferior da agulha, considerando o ângulo  $\theta$  constante e variando os valores dos parâmetros  $x$  e  $y$ . O valor dessa área será calculado considerando dois casos, a saber:

**1º caso:** o ângulo  $\theta$  pertence ao 1º quadrante, ou seja,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  (Figura 37).

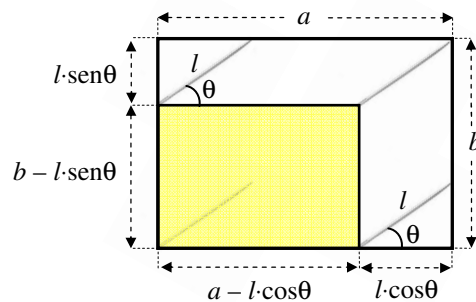


Figura 37

Indicando por  $A(\theta)$  a área coberta pela extremidade inferior da agulha (retângulo sombreado), temos:

$$A(\theta) = (a - l \cdot \cos\theta)(b - l \cdot \sin\theta) = ab - al \cdot \sin\theta - bl \cdot \cos\theta + l^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow A(\theta) = ab - al \cdot \sin\theta - bl \cdot \cos\theta + \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\theta.$$

**2º caso:** o ângulo  $\theta$  pertence ao 2º quadrante, ou seja,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$  (Figura 38).

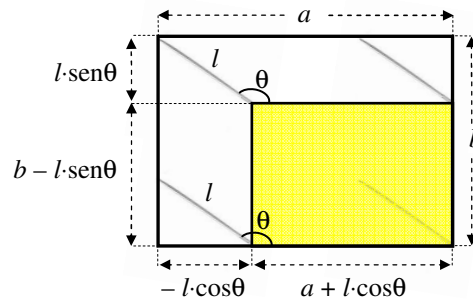


Figura 38

Nesse caso, a área  $A(\theta)$  do retângulo sombreado é dada por:

$$A(\theta) = (a + l \cdot \cos \theta)(b - l \cdot \sin \theta) = ab - al \cdot \sin \theta + bl \cdot \cos \theta - l^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow A(\theta) = ab - al \cdot \sin \theta + bl \cdot \cos \theta - \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\theta.$$

Fazendo o ângulo  $\theta$  variar de 0 a  $\pi$  teremos o sólido contido em  $\Omega$ , gerado pela extremidade inferior da agulha, para os quais esta não intercepta um dos lados do retângulo de lados  $a$  e  $b$ . O volume  $V(\theta)$  desse sólido é dado por:

$$V(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ab - al \cdot \sin \theta - bl \cdot \cos \theta + \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (ab - al \cdot \sin \theta + bl \cdot \cos \theta - \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\theta) d\theta.$$

$$\Rightarrow V(\theta) = \left[ ab\theta + al \cdot \cos \theta - bl \cdot \sin \theta - \frac{l^2}{4} \cdot \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ ab\theta + al \cdot \cos \theta + bl \cdot \sin \theta + \frac{l^2}{4} \cdot \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\Rightarrow V(\theta) = ab \cdot \frac{\pi}{2} - bl + \frac{l^2}{4} - al + \frac{l^2}{4} + ab\pi - al + \frac{l^2}{4} - ab \cdot \frac{\pi}{2} - bl + \frac{l^2}{4}$$

$$\Rightarrow V(\theta) = l^2 - 2al - 2bl + \pi ab.$$

Dessa maneira, a probabilidade de a agulha não interceptar qualquer lado de um retângulo é:

$$P(X = 0) = \frac{V(\theta)}{\text{Volume de } \Omega} = \frac{l^2 - 2al - 2bl + \pi ab}{\pi ab} = 1 + \frac{l^2 - 2l(a + b)}{\pi ab}.$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar um dos lados do retângulo é dada por:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

É interessante observar que se  $a \rightarrow \infty$  ou  $b \rightarrow \infty$ , o problema de Laplace se reduz ao caso particular do problema de Buffon, ou seja, os retângulos se transformam em retas paralelas, tendo em vista que a medida de dois lados paralelos tendem ao infinito. Por exemplo:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P(X \geq 1) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{2l}{\pi b} + \frac{2l}{\pi a} - \frac{l^2}{\pi ab} \right) = \frac{2l}{\pi b}.$$

## 6 APLICAÇÕES DO PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

O procedimento experimental utilizado por Buffon inspirou matemáticos e outros estudiosos a buscarem estimativas de alguns resultados conhecidos por outros métodos – como é o caso, por exemplo, do valor aproximado de  $\pi$  – ou de resultados de difícil obtenção pela resolução analítica. Nesse sentido, é possível de maneira empírica estimar o valor de  $\pi$ , o comprimento de curvas ou áreas de regiões irregulares. Nessa linha de raciocínio, em 1940, John Von Neumann e Stanislaw Ulam, introduziram um método interessante para a resolução de problemas. O procedimento, conhecido como Método de Monte Carlo, é baseado na geração apropriada de números aleatórios com a observação da fração destes números que seguem determinada propriedade.

### 6.1 Estimativa do valor de $\pi$

Através do resultado obtido no problema da agulha de Buffon é possível estimar de forma empírica o valor de  $\pi$ . Para tanto, basta realizar o experimento proposto por Buffon utilizando-se convenientemente uma agulha (ou um objeto retilíneo) com comprimento igual à distância entre as retas paralelas. Após lançar diversas vezes a agulha sobre a superfície plana contendo as retas paralelas equidistantes, registra-se a quantidade de lançamentos realizados, bem como o número de casos em que a agulha corta uma das retas. Em seguida, utiliza-se a definição usual de probabilidade em um espaço amostral equiprovável, ou seja, a razão entre número de casos em que a agulha cortou uma das linhas (número de casos favoráveis) e o número de lançamentos realizados (número de casos possíveis), igualando-se este resultado ao valor obtido no problema de Buffon, com  $h = L$  ( $P = \frac{2}{\pi}$ ), para calcular o valor aproximado de  $\pi$ .

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{\pi}.$$

Alguns matemáticos se empenharam em tal tarefa, como foi o caso do italiano M. Lazzarini, em 1901, que após 3408 lançamentos da agulha obteve 1808 cruzamentos com as retas, estimando assim o valor de  $\pi$  em 3,1415929, com seis casas decimais corretas.

## 6.2 Um importante avanço para a Medicina

Em 1972, o engenheiro inglês Sir Godfrey Newbold Hounsfield, apresentou à comunidade científica o primeiro aparelho de tomografia computadorizada. Esse aparelho permitia realizar um exame complementar de diagnóstico por imagem, que consistia numa imagem representando uma seção ou "fatia" do corpo humano.

Segundo Machado (2006, p. 76 e 71), o princípio consiste em jogar feixes planos de raios-X paralelos disparados sucessivamente em um grande número de diferentes direções sobre uma região do corpo humano, de forma a medir e converter em imagens tridimensionais partes ou objetos inacessíveis. A fração de raios que interceptam o objeto em relação ao total de raios do feixe é medida pela comparação da intensidade de radiação que incide sobre o corpo e a intensidade registrada na recepção por um dispositivo de captação computadorizado.

Olhando o objeto a ser analisado como uma agulha, a probabilidade de ele ser interceptado por determinada quantidade de raios é conhecida, dessa maneira, é possível medir com bastante precisão as dimensões do objeto. Em suma, é o mesmo experimento pensado por Buffon, com a pequena variação de lançar o feixe de paralelas sobre o objeto, em vez de lançar o objeto sobre o feixe de paralelas.

A tomografia computadorizada é considerada uma das mais importantes invenções para a Medicina, desde o surgimento dos raios-X. Essa tecnologia permitiu aos médicos observar pela primeira vez tecidos do cérebro e, posteriormente, de outras partes do corpo humano sem necessidade de cirurgia. Em 1979, Hounsfield e o físico Allan M. Cormack, da Tufts University, em Massachusetts, que também desenvolveu uma tecnologia similar, receberam o Prêmio Nobel de Fisiologia/Medicina.

O tomógrafo de primeira geração trabalhava com um feixe de radiação bastante estreito - de aproximadamente 3 mm por 13 mm - que fazia uma varredura retilínea sobre o objeto, coletando informações de 160 feixes de radiação distintos. Após a primeira varredura o tubo sofria uma rotação de 1 grau e iniciava uma nova varredura, coletando novas informações de outros 160 feixes. Esse processo se repetia por 180 vezes e, assim, obtinha-se informações do objeto em 180 projeções diferentes, com variações de 1 grau em cada projeção e coleta de dados de 160 feixes por projeção (Figura 39).

O tempo para a obtenção de um corte (seção transversal) tomográfico era de aproximadamente cinco minutos e um estudo completo podia durar mais de uma hora.



Feixe de raios paralelos com giro de um grau a cada varredura

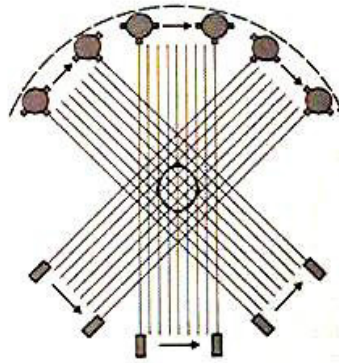


Figura 39

Após o passo inicial dado por Hounsfield, os aparelhos de tomografia evoluíram até a quarta geração sempre inovando os métodos e princípios de obtenção de imagens. Estes últimos aparelhos foram sucedidos pelo Tomógrafo Helicoidal que permite a obtenção de seções em forma de hélices. O avanço dessa tecnologia permitiu reduzir bastante o tempo de realização dos exames, com a obtenção de múltiplas imagens por segundo e o manuseio em tempo real das imagens de tomografia.

## 7 CONCLUSÃO

Os estudos sobre probabilidade que Buffon desenvolveu surgiram da curiosidade que este estudioso tinha em analisar sob o ponto de vista científico e moral as possibilidades de um indivíduo ganhar num jogo de azar, mediante condições estabelecidas. Nesse sentido, em 1733, ele já havia apresentado um trabalho sobre o jogo de *Franc Carreau*<sup>7</sup>, que era bastante popular na corte francesa. Nessa mesma linha de investigação dos resultados de jogos de azar, a teoria das probabilidades atraiu outros grandes matemáticos como Fermat e Pascal. Com a primeira obra formal apresentada por Huygens, a teoria das probabilidades passou a crescer de importância no meio científico e, nos dias atuais, é de fundamental importância nos mais diversos ramos da ciência em que se estudam fenômenos não determinísticos, como foi o caso do tratamento dado por Hounsfield e Cormack – um engenheiro e um físico, respectivamente – na criação do aparelho de tomografia computadorizada.

Na Física Experimental por exemplo, a partir do século XVIII, os instrumentos de medidas para observação em laboratórios se tornaram mais acessíveis, com isso, os físicos passaram a não se contentar em apenas medir, mas em procurar a melhor medida possível. A partir de então passaram a concentrar esforços no estudo da “Teoria dos Erros”, da qual Gauss obteve o expressivo resultado de que: se os erros das medidas têm uma distribuição gaussiana (curva normal), então o valor mais provável é a média das medidas.

A Teoria dos erros, até a metade do século XIX, era tida pelos físicos como a única aplicação plausível para a probabilidade dentro da Física, pois argumentavam que os fenômenos físicos tinham propriedades bem definidas e que não estavam sujeitas à variações, em virtude da aleatoriedade. No entanto, em 1860, Maxwell mostrou ao mundo a primeira lei física de natureza probabilística: a lei de Maxwell para a distribuição do percentual de moléculas de um gás em equilíbrio que estão a uma determinada velocidade. A partir das idéias de Maxwell, Josiah Willard Gibbs, em 1902, com seu livro *Principles of Statistical Mechanics*, tratou com excelência a abordagem probabilística dos fenômenos físicos.

No início do século XX, Max Planck produziu uma importante obra para a Humanidade: a Mecânica Quântica. Essa nova disciplina, ao explicar os fenômenos de radiação em termos de probabilidades, destruiu o ponto de vista clássico de que todos os fenômenos eram determinísticos. Ela permitiu uma aproximação entre o ponto de vista dos

---

<sup>7</sup> Consistia em jogar uma moeda em um piso com ladrilhos, com o objetivo desta cair completamente no interior de um ladrilho sem interceptar qualquer dos lados.

físicos e dos químicos no estudo da matéria, resultando disso resultados fundamentais no campo teórico e na criação de importantes tecnologias como a engenharia nuclear.

Hoje, com o surgimento de novas técnicas aliadas a computadores com alta capacidade de armazenamento e processamento de dados, a análise dos resultados de experimentos aleatórios de natureza científica – como por exemplo, a obtenção de imagens tridimensionais de partes inacessíveis do corpo humano através de um aparelho de tomografia – é executada com extrema precisão permitindo à comunidade científica avaliar e mensurar esses resultados, com o objetivo de aplicar o tratamento mais adequado para cada situação.

## REFERÊNCIAS

- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.
- FUGITA, F. et al. **Matemática, 2ª Série**: Ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2009.
- HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Combinatória Probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- JAMES, B. R. **Probabilidade**: um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro: IMPA, 1981.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- MORETTIN, L. G. **Estatística Básica**: probabilidade e inferência. São Paulo: PEARSON, 2010.
- PAIVA, M. R. **Matemática 2**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- STEWART, J. **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: THOMSON, 2006. v. 1.
- MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: CORTEZ, 2011.
- POSSANI, C. **Probabilidade geométrica**: história, paradoxos e rigor. **Com Ciência**. São Paulo. Disponível em: <<http://www.comciencia.br/comciencia/>>. Acesso em: 01 mar. 2014.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. Biblioteca Universitária. **Guia de Normalização de Trabalhos Acadêmicos da Universidade Federal do Ceará**. Fortaleza: Comissão de Normalização, 2013.