UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Antonio Edinardo de Oliveira

UMA CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\text{sen}\,\theta)$ NA ESFERA EUCLIDIANA $\mathbb{S}^{n+1}$

FORTALEZA
2013

ANTONIO EDINARDO DE OLIVEIRA

UMA CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\text{sen}\ \theta)$ NA ESFERA EUCLIDIANA $\mathbb{S}^{n+1}$.

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA
2013

ficha catalográfica

folha de aprovação

Dedico este trabalho a meus pais, meus irmãos e aos meus amigos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e a minha amada mãe, pois são os grandes responsáveis por eu estar aqui. Gostaria também de agradecer brevemente a todos que me ajudaram nessa caminhada. A Tiago Veras e Flávio França, colegas de curso e grandes amigos, pelo companheirismo, por toda a troca de conhecimento existente durante o curso de mestrado e o incentivo durante a preparação do referido trabalho. A Marcos Antonio, Nazareno, Cícero Aquino e Jobson, todos alunos do doutorado, pelas conversas e esclarecimentos prestados sobre dúvidas e sugestões relevantes no desenvolvimento do texto. À Aurineide, Adam, Halisson, Ernani, Kelton, João Francisco, Thiago Alencar, Valéria, Damião Júnio, Fabrício, Jocel e Thiago Cruz por toda a convivência e troca de conhecimentos.

À Andrea, secretaria da pós-graduação, pela sua competência enquanto funcionária e pela sua simpatia enquanto pessoa.

Ao professor João Lucas Barbosa pelas valiosas contribuições e esclarecimentos bem como pela ótima didática apresentada em suas aulas. E ao professor Carlos Alberto Gomes de Almeida por todo o incentivo durante a graduação.

Ao professor Abdênago Alves de Barros por mostrar que somos mais capazes do que podemos imaginar, basta haver empenho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho dificilmente se concretizaria.

“Podem lhe tirar tudo, menos o conhecimento....”
(Mamãe)

RESUMO

Neste trabalho, consideraremos hipersuperfícies n-dimensionais com curvatura escalar constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Caracterizaremos as hipersuperfícies $\mathbb{S}^k(\cos\ \theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\text{sen}\ \theta)$ na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ e mostraremos que existem várias hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ que não são congruentes entre si. Em particular, provaremos que se M é uma hipersuperfície n-dimensional $(n > 3)$ completa, localmente conformemente plana com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, então $r > 1 - \frac{2}{n}$ e (1) quando $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, se $S \geq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$, então M é isométrica a $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M; (2) não existem hipersuperfícies completas na esfera unitária com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples, tais que $r = \frac{n-2}{n-1}$ e $S > (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2} = n$.

Palavras-chave: Hipersuperfícies. Curvatura. Geometria

ABSTRACT

In this work, we consider n-dimensional hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$. We character the hypersurfaces $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\text{sen } \theta)$ in the unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$, and it is shown that there exist many compact hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ wich are not congruent to each other in it. In particular, it is proved that if M is an n-dimensional $(n > 3)$ complete locally conformally flat hypersurface with constant scalar curvature $n(n-1)r$ in the unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$, then $r > 1-\frac{2}{n}$, and (1) when $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, if $S \geq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$, then M is isometric to $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, where S is the squared norm of the second fundamental form of M; (2) there are no complete hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$ with constant scalar curvature $n(n-1)r$ and with two distinct principal curvatures, one of wich is simple, such that $r = \frac{n-2}{n-1}$ and $S > (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2} = n$.

Keywords: Hipersurfaces. Curvature. Geometry

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Seja M uma hipersuperfície n-dimensional na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ de dimensão $n+1$. Em [8], S.Y. Cheng e S.T. Yau provaram que se M é uma hipersuperfície n-dimensional compacta com curvatura escalar constante $n(n-1)r$, $r \geq 1$ e a curvatura seccional de M é não-negativa, então M é isométrica ou a uma hipersuperfície totalmente umbílica ou a um produto riemanniano $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\text{sen}\,\theta)$, $1 \leq k \leq n-1$, onde $\mathbb{S}^k(c)$ denota uma esfera de raio c. Fazendo uso de métodos semelhantes aos que foram usados por H. Nakagawa e Q.M. Cheng em [7] e do operador diferencial introduzido por S.Y. Cheng e S.T. Yau, H. Li [15] provou que se M é uma hipersuperfície n-dimensional compacta com curvatura escalar constante $n(n-1)r$, se $r \geq 1$ e $S \leq C(n,r)$, onde $C(n,r) = (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$, então M é isométrica ou a uma hipersuperfície totalmente umbílica ou a um produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ com $c^2 = \frac{n-2}{nr} \leq \frac{n-2}{n}$, onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M. Devemos notar que a condição $r \geq 1$ desempenha um papel essencial nas provas dos teoremas. Por outro lado, para qualquer $0 < c < 1$, considerando as imersões padrões $\mathbb{S}^{n-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \subset \mathbb{R}^2$ e tomando a imersão produto $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, obtemos uma hipersuperfície compacta $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$, onde $r > 1 - \frac{2}{n}$. Consequentemente, nem todos os produtos riemannianos $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ aparecem nestes resultados de S.Y. Cheng e S.T. Yau [8] e H. Li [15]. Já que o produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ tem somente duas curvaturas principais distintas e a curvatura escalar é constante e satisfaz $r > 1 - \frac{2}{n}$. Consequentemente, podemos perguntar o seguinte:

Problema 1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se M tem somente duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples, então devemos ter $r > 1-\frac{2}{n}$?*

Na seção 3, daremos uma resposta afirmativa para o Problema 1 (ver Teorema 3.1). E se $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, provamos que $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ são as únicas hipersuperfícies completas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples tal que $S \geq C(n,r)$. Além disso, quando $r = \frac{n-2}{n-1}$, concluímos que $S \geq C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$ e provamos que não existem hipersuperfícies completas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples tal que $S > C(n, \frac{n-2}{n-1})$. Por outro lado, o toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$ é uma hipersuperfície mínima compacta em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $r = \frac{n-2}{n-1}$ e com $S = n$. Consequentemente, podemos considerar o seguinte problema:

Problema 2 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ $(r = \frac{n-2}{n-1})$ em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se M tem somente duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples, então M é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$?*

O problema 2 ainda está em aberto.

Dos Teoremas 3.1 e 3.3 na seção 3 e a afirmação acima, é interessante generalizar estes resultados devidos a S.Y. Cheng e S.T. Yau [8] e H. Li [15] para o caso $r > 1-\frac{2}{n}$. Ou seja, é interessante considerar o seguinte problema:

Problema 3 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se $r > 1 - \frac{2}{n}$ e $S \leq C(n,r)$, então ou M é isométrica a uma hipersuperfície totalmente umbílica ou a um produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.*

Quando $r = \frac{n-2}{n-1}$, responderemos o Problema 3 afirmativamente (ver Teorema 3.4). Para o caso geral, contudo não podemos dar uma resposta.

Por outro lado, toda hipersuperfície localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ $(n > 3)$ é conformemente equivalente à esfera de Riemann ou a uma variedade clássica de Schottky (conforme Y. Suyama [20] e U. Pinkall [19]). Sabemos que a esfera de Riemann e o produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ são hipersuperfícies compactas, localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante. É natural perguntar se existem hipersuperfícies localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante que não são congruentes à esfera de Riemann e ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.

Neste trabalho, que é baseado em um artigo de Q.M. Cheng (ver [4]), consideraremos hipersuperfícies n-dimensionais com curvatura escalar constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Mostraremos que existem várias hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ que não são congruentes entre si e caracterizar a hipersuperfície $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta)$ na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Em particular, provaremos que se M é uma hipersuperfície n-dimensional $(n > 3)$, completa, localmente conformemente plana com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, então $r > 1 - \frac{2}{n}$ e quando $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, se $S \geq C(n,r)$, então M é isométrica a $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M.

Capítulo 2

CÁLCULOS PRELIMINARES

2.1 Equações de estrutura

Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão da variedade n-dimensional M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Considere $\{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal adaptado a M, ou seja, $e_1, ..., e_n$ são tangentes a M e e_{n+1} é normal a M. Sejam $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, ..., \overline{\omega}_{n+1}\}$ as formas duais de $\{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ e $\omega_i = \overline{\omega}_i|_M$ para $1 \leq i \leq n$. Usaremos a convenção de índices já adotada na literatura, qual seja,

$$1 \leq A, B, C, ... \leq n+1; 1 \leq i, j, k, ... \leq n; 1 \leq a, b, c, ... \leq n-1. \tag{2.1}$$

Um dos resultados mais básicos no estudo do método do referencial móvel é o Lema de Cartan, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Lema 1 (Cartan) *Consideremos V um espaço vetorial real de dimensão n e $\omega_1, ..., \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares em V, linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, ..., \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então temos $\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j$, *onde* $i, j = 1, ..., r$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Demonstração: Inicialmente completemos as formas $\omega_1, ..., \omega_r$, em uma base $\omega_1, ..., \omega_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n$ de V^* e escrevamos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j + \sum_{l>r} b_{il}\omega_l, \quad l = r+1, ..., n.$$

Temos por hipótese que

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0,$$

deste modo

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j + \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \sum_{l>r} b_{il}\omega_l$$

$$= \sum_{i<j\leq r} (a_{ij} - a_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i\leq r<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l.$$

Como as 2-formas $\omega_k \wedge \omega_s, k < s, k, s = 1, ..., n$, são linearmente independentes, conclui-se que

$$a_{ij} = a_{ji}$$

e

$$b_{il} = 0,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Passemos agora ao estudo das chamadas equações de estrutura. Observando que $\langle x, x\rangle = 1$, temos $\langle dx, x\rangle = 0$. Assim, o vetor posição x em $\mathbb{S}^{n+1}$ é perpendicular ao plano tangente e, portanto, $\{e_1, e_2, ..., e_{n+1}, x = e_{n+2}\}$ é um referencial ortonormal adaptado a $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Logo,

$$dx = \sum_A \omega_A e_A.$$

Observando que todo vetor v no espaço tangente T_pM é escrito na forma $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, temos

$$\overline{\omega}_{n+1}(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\omega}_{n+1}(e_i) = 0,$$

pois $1 \leq i \leq n$, (lembre que $\overline{\omega}_i(e_j) = \delta_{ij}$) donde obtemos $\overline{\omega}_{n+1}|_M = 0$.
Assim,

$$dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i. \tag{2.2}$$

Escrevendo o campo de_i no referencial escolhido obtemos

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j + \omega_{in+1} e_{n+1} + \omega_{ix} x. \tag{2.3}$$

Fazendo produto interno da expressão (2.3) com x, obtemos

$$\langle de_i, x\rangle = \sum_j \omega_{ij}\langle e_j, x\rangle + \omega_{in+1}\langle e_{n+1}, x\rangle + \omega_{ix}\langle x, x\rangle.$$

Agora usando que $\langle e_j, x\rangle = \langle e_{n+1}, x\rangle = 0$ e $\langle x, x\rangle = 1$, obtemos

$$\langle de_i, x\rangle = \omega_{ix}.$$

Como

$$\langle x, e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle de_i, x\rangle = -\langle dx, e_i\rangle = -\sum_j \omega_j \langle e_j, e_i\rangle = -\sum_j \omega_j \delta_{ji},$$

concluímos que $\omega_{ix} = -\omega_i$.
Observando que $\omega_{n+1} = 0$, vemos que

$$\sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i = d\omega_{n+1} = 0.$$

Pelo Lema de Cartan,

$$\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij}\omega_j.$$

Assim, podemos reescrever (2.3) como

$$de_i = \sum_j \omega_{ij}e_j - \sum_j h_{ij}\omega_j e_{n+1} - \omega_i x. \tag{2.4}$$

De maneira análoga ao que foi feito acima,

$$de_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i}e_i - \omega_{n+1n+1}e_{n+1} + \omega_{n+1x}x. \tag{2.5}$$

Utilizando o fato que $\langle e_{n+1}, x\rangle = 0$, temos

$$\langle de_{n+1}, x\rangle = -\langle e_{n+1}, dx\rangle = -\langle e_{n+1}, \sum_j \omega_j e_j\rangle = 0.$$

Daí, utilizando (2.5) podemos escrever

$$\omega_{n+1x} = \sum_i \omega_{n+1i}\langle e_i, x\rangle + \omega_{n+1x}\langle x, x\rangle = \langle de_{n+1}, x\rangle = 0.$$

Portanto, (2.5) se reescreve como

$$de_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i}e_i = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_j e_i. \tag{2.6}$$

Devido à simetria da segunda forma, o operador linear associado é autoadjunto, portanto, diagonalizável. Logo, considere λ_1,...,λ_n as curvaturas principais de M^n em $\mathbb{S}^{n+1}$. Por isso, podemos considerar, em cada ponto $p \in M$, um referencial $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ tal que

$$\omega_{n+1i} = \lambda_i\omega_i.$$

Isto é, como $\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij}\omega_j$, teremos para cada ponto $p \in M$,

$$\overline{\omega}_{n+1i}(e_k) = \sum_j h_{ij}\omega_j(e_k) = \sum_j h_{ij}\delta_{jk} = h_{ik},$$

$$h_{ij} = \lambda_i \omega_i(e_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \tag{2.7}$$

onde (h_{ij}) é a matriz da segunda forma de M^n.

Agora vamos encontrar as equações de Gauss

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})$$

e

$$n(n-1)r = n(n-1) + n^2H^2 - S.$$

Para tanto, representemos por $\overline{\omega}_A$ as formas duais em $\mathbb{S}^{n+1}$, por $\overline{\omega}_{AB}$ as formas de conexão em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\omega_i = \overline{\omega}_i|_M, \omega_{ij} = \overline{\omega}_{ij}|_M$.
Usando as formas de conexão

$$d\overline{\omega}_{ij} = \sum_C \overline{\omega}_{iC} \wedge \overline{\omega}_{Cj} + \overline{\Omega}_{ij}$$

e

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= d\overline{\omega}_{ij}|_M - \sum_k (\overline{\omega}_{ik}|_M) \wedge (\overline{\omega}_{kj}|_M) \\
&= \overline{\Omega}_{ij} + \sum_C (\overline{\omega}_{iC}|_M) \wedge (\overline{\omega}_{Cj}|_M) - \sum_k (\overline{\omega}_{ik}|_M) \wedge (\overline{\omega}_{kj}|_M) \\
&= \overline{\Omega}_{ij} + (\overline{\omega}_{in+1}|_M) \wedge (\overline{\omega}_{n+1j}|_M).
\end{aligned}$$

Utilizando novamente

$$\omega_{n+1j} = \sum_l h_{jl}\omega_l,$$

dos cálculos anteriores obtemos que

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= \overline{\Omega}_{ij} - \sum_k h_{ik}\overline{\omega}_k|_M \wedge \sum_l h_{jl}\overline{\omega}_l|_M \\
&= \overline{\Omega}_{ij} - \sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= \overline{\Omega}_{ij} - \sum_{k<l}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\overline{\Omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l}\overline{R}_{ijkl}\overline{\omega}_k \wedge \overline{\omega}_l,$$

teremos

$$-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l = -\sum_{k<l}\overline{R}_{ijkl}(\overline{\omega}_k|_M) \wedge (\overline{\omega}_l|_M) - \sum_{k<l}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\omega_k \wedge \omega_l.$$

Portanto, $\overline{\omega}_k|_M = \omega_k$ nos dá

$$-\sum_{k<l}\left(R_{ijkl} - \overline{R}_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\right)\omega_k \wedge \omega_l = 0$$

e daí,

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}).$$

Considerando

$$X = \sum_A x_A e_A \text{ e } Y = \sum_A y_A e_A \text{ em } T_p\mathbb{S}^{n+1},$$

podemos escrever $\langle(\overline{R}_{XY})X, Y\rangle = \displaystyle\sum_{A,B,C,D} x_A y_B x_C y_D \overline{R}_{ABCD}$. Usando que

$$\overline{R}(X,Y) = X \wedge Y$$

e

$$\begin{aligned}
\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 &= \sum_{A,C} x_A x_C \delta_{AC} \sum_{B,D} y_B y_D \delta_{BD} - \sum_{A,D} x_A y_D \delta_{AD} \sum_{B,C} x_B y_C \delta_{BC} \\
&= \sum_{ABCD}(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC})x_A y_B x_C y_D
\end{aligned}$$

obtemos

$$\sum_{A,B,C,D} x_A y_B x_C y_D \overline{R}_{ABCD} = \sum_{A,B,C,D} (\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) x_A y_B x_C y_D.$$

Portanto,

$$\overline{R}_{ABCD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}. \tag{2.8}$$

Quando restringimos a M, tal expressão passa a ser

$$\overline{R}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}. \tag{2.9}$$

Encontramos, assim, a primeira das equações de Gauss

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.10}$$

Para obter a segunda equação, da expressão (2.10) temos, para $i \neq j$,

$$R_{ijij} = 1 + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2.$$

Ao somarmos em i, obtemos

$$\sum_i R_{ijij} = n + \sum_i (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2).$$

Agora, somando em $j \neq i$,

$$\sum_{i \neq j} R_{ijij} = n(n-1) + \sum_{i \neq j} (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2). \tag{2.11}$$

Por definição, temos $H = \dfrac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ e $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$. Daí, $n^2H^2 - S = (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^2$. Observando que

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{i<j} a_i a_j = \sum_{i \neq j} a_i a_j$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} n^2H^2 - S &= (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^2 \\ &= (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_i h_{ii}^2 - \sum_{i \neq j} h_{ij}^2 \\ &= \sum_{i \neq j} h_{ii}h_{jj} - \sum_{i \neq j} h_{ij}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$n^2H^2 - S = \sum_{i \neq j}(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2). \tag{2.12}$$

Portanto, de (2.11) e (2.12) obtemos que

$$\sum_{i \neq j} R_{ijij} = n(n-1) + n^2H^2 - S.$$

Como a curvatura escalar de M é dada por $r = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} R_{ijij}$ obtemos

$$n(n-1)r = n(n-1) + n^2H^2 - S \tag{2.13}$$

que é a segunda equação de Gauss.

2.2 Distribuição do espaço de direções principais

Dada uma variedade M, de dimensão n, denotamos por TM o fibrado tangente de M, cuja dimensão é $2n$. Observe que,

$$TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

Seja $\pi : TM \to M$ a projeção canônica de TM em M. Chamamos $\pi^{-1}(p) \simeq T_pM$ de fibra de p em TM. Uma distribuição k-dimensional sobre M é uma função $p \to \Delta_p$, onde $\Delta_p \subset \pi^{-1}(p)$ é um subespaço k-dimensional de $\pi^{-1}(p)$ tal que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p e k campos vetoriais $X_1, ..., X_k$ tais que $X_1(q), ..., X_k(q)$ é uma base para Δ_q, para cada $q \in U$. Dizemos que Δ é uma distribuição C^∞ se esses campos $X_1, ..., X_k$ puderem ser escolhidos como campos suaves. Uma subvariedade k-dimensional N de M é chamada uma variedade integral de Δ se para cada $p \in N$ temos $\iota_*(T_pN) = \Delta_p$, onde $\iota : N \hookrightarrow M$ é a aplicação de inclusão (ι_* é a diferencial de ι). Uma distribuição Δ é integrável (ver [14]) se para X, Y campos de Δ, tivermos que $[X, Y]$ pertence a Δ, ou seja, em cada ponto p, o vetor $[X, Y]$ está em Δ_p.

Admita que M é uma hipersuperfície imersa numa variedade riemanniana $(n+1)$-dimensional N e que M tem p curvaturas principais distintas $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de multiplicidades constantes $m_1, ..., m_p$, respectivamente. Seja

$$\Delta^i : M \to TM$$

tal que

$$\Delta_x^i = \{X \in T_xM; A_x(X) = \lambda_i(x)X\},$$

onde $1 \leq i \leq p$ e A_x é o operador linear associado à segunda forma, isto é,

$$H(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle \ \forall x \in M \text{ e } \forall X, Y \in T_xM.$$

Então, de acordo com um teorema de Nomizu, obtemos distribuições suaves (veja [17]) $\Delta^1, ..., \Delta^p$ de dimensões $m_1, ..., m_p$ sobre M, respectivamente.

Chamamos Δ^i de distribuição do espaço de direções principais.

Uma subvariedade m_i-dimensional M_i de M cujo espaço tangente T_xM_i é Δ_x^i $\forall x \in M$, isto é, é o subespaço de direções principais associado a λ_i, é dita uma subvariedade integral de Δ^i. Considere agora Δ, uma distribuição C^∞, k-dimensional em M^n. Dizemos que uma p-forma ω se anula em Δ se, para cada $q \in M^n$ e $X_1, X_2, ..., X_p \in \Delta_q$ temos

$$\omega_q(X_1, X_2, ..., X_p) = 0.$$

Definindo

$$I_p = \{\omega \in \Omega^p(M^n);\ \omega \text{ se anula em } \Delta\},$$

o Teorema de Frobenius via formas (veja [21], p. 229) nos diz que a distribuição Δ é completamente integrável se, e somente se, $dI_p \subset I_{p+1}$ $\forall$ p.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de codimensão 1, ou seja, $f(M) \subset \overline{M}$ é uma hipersuperfície. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq n$.

Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f. As funções simétricas de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(A_\eta)$ é denominada a *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $tr(A_\eta)$ é denominada *a curvatura média* de f.

As hipersuperfícies com as quais estamos trabalhando possuem curvaturas principais de multiplicidades constantes, $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = \lambda$ de multiplicidade $n-1$ e $\lambda_n = \mu$ de multiplicidade 1, em todos os seus pontos. Desta forma, ver [16], p. 463, para cada ponto $p \in M$ existe um referencial ortonormal local definido em uma vizinhança U de p que diagonaliza A, isto é, $\{e_1, ..., e_n\}$ tais que $A(e_i) = \lambda_i e_i$ com cada λ_i diferenciável em U.

Após essas considerações demonstraremos o seguinte teorema devido a Otsuki.

Teorema 2.1 (Otsuki) *Seja M uma hipersuperfície na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que as multiplicidades das curvaturas principais são constantes. Então, as distribuições do espaço de direções principais correspondentes a cada curvatura principal são completamente integráveis. Em particular, se a multiplicidade de uma curvatura principal é maior que 1, então essa curvatura principal é constante em cada subvariedade integral da correspondente distribuição do espaço de direções principais.*

Demonstração: Escolha um referencial adaptado $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ em um ponto $x \in M$ tal que,

$$\omega_{n+1i} = \lambda_i \omega_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.14}$$

onde λ_i é uma curvatura principal.

Então temos

$$d\omega_{n+1i} = d(\lambda_i\omega_i) = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i d\omega_i = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}.$$

Por outro lado, temos que, em M, $\omega_{n+1} = 0$. Já que

$$\overline{\Omega}_{AB} = -\sum_{C<D} \overline{R}_{ABCD}\overline{\omega}_C \wedge \overline{\omega}_D,$$

temos as formas de curvatura em M

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}_{n+1i} &= -\sum_{C<D} \overline{R}_{n+1iCD}\omega_C \wedge \omega_D \\
&= -\sum_{C<D} (\delta_{n+1C}\delta_{iD} - \delta_{n+1D}\delta_{iC})\omega_C \wedge \omega_D \\
&= \omega_i \wedge \omega_{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

em M. Assim, usando (2.14) e (2.15) em

$$d\omega_{n+1i} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{n+1j} + \overline{\Omega}_{n+1i},$$

obtemos,

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} - \sum_j \omega_{ij} \wedge \lambda_j\omega_j = 0$$

implicando

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \sum_j (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} \wedge \omega_j = 0. \tag{2.16}$$

Considerando

$$d\lambda_i \wedge \omega_i = \sum_j d\lambda_j \wedge \omega_j\delta_{ij}$$

e pondo

$$\theta_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij}, \tag{2.17}$$

podemos reescrever (2.16) como

$$\sum_j (d\lambda_j\delta_{ij} + \theta_{ij}) \wedge \omega_j = 0.$$

Pelo Lema de Cartan, já que as formas ω_j são linearmente independentes,

$$d\lambda_j\delta_{ij} + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k, \tag{2.18}$$

onde $h_{ijk} = h_{ikj}$. Observe que $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ (pois $\theta_{ji} = (\lambda_j - \lambda_i)\omega_{ji} = -(\lambda_i - \lambda_j)(-\omega_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} = \theta_{ij}$). Assim,

$$\delta_{ij}d\lambda_i + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k$$

e

$$\delta_{ji}d\lambda_j + \theta_{ji} = \sum_k h_{jik}\omega_k.$$

Portanto, das duas equações acima obtemos que

$$\delta_{ij}(d\lambda_i - d\lambda_j) = \sum_k (h_{ijk} - h_{jik})\omega_k.$$

Considerando $i \neq j$ temos que $\delta_{ij} = 0$ donde

$$\sum_k (h_{ijk} - h_{jik})\omega_k = 0.$$

Ou seja, $h_{ijk} = h_{jik}$. Com isso, concluímos que

$$h_{ijk} = h_{jik} = h_{ikj} = h_{kji}. \tag{2.19}$$

Por outro lado, se $i \neq j$ e $\lambda_i = \lambda_j$, temos que

$$\theta_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} = 0.$$

Como $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 0$ obtemos

$$0 = d\lambda_j\delta_{ij} + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k, \tag{2.20}$$

isto é, $h_{ijk} = 0$.

Usando a notação $[i] = \{j; \lambda_i = \lambda_j\}$, das equações de estrutura e de (2.17) temos que

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \\ &= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} \\ &= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \omega_j \wedge \frac{\theta_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} \\ &= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \theta_{ij}. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$j \notin [i] \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \text{ e } \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k.$$

Assim,

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \sum_k h_{ijk}\omega_k.$$

Vamos separar esta última soma em duas: uma para $k = i$ e outra para $k \neq i$. Assim,

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_i + \sum_{\substack{j\notin[i] \\ k\neq i}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Nesta última parcela poderemos ter $k = j$ ou $k \neq j$; separamos estes casos em mais duas somas:

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_i + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{ijj}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_j + \sum_{\substack{j\notin[i] \\ k\neq i,j}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Neste último termo, se $\lambda_k = \lambda_i$ ($k \in [i]$), então $h_{ijk} = 0$ e o mesmo para $\lambda_k = \lambda_j$ ($k \in [j]$). Portanto, nesta soma os termos possivelmente não nulos são aqueles onde $k \notin [i], k \notin [j]$. Deste modo,

$$d\omega_i = \left\{ \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_i \right\} + \sum_{\substack{j\notin[i] \\ k\notin[i]\cup[j]}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_k. \tag{2.21}$$

Agora, fixado $1 \leq l \leq n$, temos

$$\Delta^l = \bigcap \{\ker \omega_t;\ t \notin [l]\}.$$

Portanto, pelo critério de involutividade via formas (ver [14], Lema 19.8), para mostrar que Δ^l é completamente integrável é suficiente tomar $i \notin [l]$ e provar que

$$d\omega_i = \sum_{t \notin [l]} \omega_t \wedge \phi_t, \tag{2.22}$$

para certas $1-$formas ϕ_t.

Para um tal $i \notin [l]$, analisemos a expressão (2.21) para $d\omega_i$:

- Se $j \in [i]$, segue de $i \notin [l]$ que $j \notin [l]$. Portanto, cada termo $\omega_j \wedge \omega_{ji}$ na primeira parcela de (2.21), com $j \in [i]$, é do tipo $\omega_t \wedge \phi_t$, com $t \notin [l]$.
- Os termos da segunda parcela de (2.21) todos têm ω_i, de sorte que também são todos do tipo $\omega_t \wedge \phi_t$, com $t \notin [l]$.
- Os termos da terceira parcela são do tipo $\omega_j \wedge \omega_k$, com $j \notin [i]$ e $k \notin [i] \cup [j]$. Portanto, ou $j \notin [l]$ ou $k \notin [l]$ (de fato, se $j \notin [l]$ nada há a fazer; se $j \in [l]$, então $k \notin [j] \Rightarrow k \notin [l]$), e daí os termos da terceira parcela também são do tipo $\omega_t \wedge \phi_t$, com $t \notin [l]$.

Portanto, (2.22) ocorre.

Suponha agora que a multiplicidade de λ_i é maior que 1. Usando (2.19) e (2.20) em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} d\lambda_i &= \sum_k h_{iik}\omega_k \\ &= h_{iii}\omega_i + \sum_{k \neq i} h_{iik}\omega_k \\ &= h_{iii}\omega_i + \sum_{k \notin [i]} h_{iik}\omega_k + \sum_{k \in [i]} h_{iik}\omega_k \\ &= h_{iii}\omega_i + \sum_{k \notin [i]} h_{iik}\omega_k \end{aligned}$$

e para todo $j \in [i], j \neq i$, temos também

$$\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow d\lambda_i = d\lambda_j.$$

Como

$$d\lambda_j \delta_{ij} + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k$$

e $\theta_{ii} = 0$, fazendo $i = j$ obtemos $h_{ijk} = 0$ quando $\lambda_i = \lambda_j$, $i \neq j$ vem que

$$d\lambda_j = \sum_k h_{jjk}\omega_k.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d\lambda_i = d\lambda_j &= \sum_k h_{jjk}\omega_k \\ &= h_{jjj}\omega_j + \sum_{k\neq j\neq i} h_{jjk}\omega_k \\ &= h_{jjj}\omega_j + \sum_{k\notin[i]=[j]} h_{jjk}\omega_k + \sum_{k\in[i]=[j]} h_{jjk}\omega_k \\ &= h_{jjj}\omega_j + \sum_{k\notin[i]=[j]} h_{jjk}\omega_k. \end{aligned}$$

Consequentemente, comparando a expressão acima com aquela obtida para $d\lambda_i$, concluímos que $h_{jjj} = 0 = h_{iii}$, $h_{jjk} = h_{iik}, j \in [i], k \notin [i]$. Também $0 = h_{jjk} = h_{iik}, j \in [i], k \notin [i]$. Desta forma, ao longo da subvariedade correspondente ao campo λ_i, nós temos $d\lambda_i = 0$.

$\square$

Corolário 1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional compacta na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante e com duas curvaturas principais distintas. Se as multiplicidades destas curvaturas são maiores que* 1, *então M é isométrica ao produto riemanniano* $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta), 1 < k < n-1$.

Demonstração: Consideremos a equação de Gauss (2.13), qual seja,

$$n(n-1)(r-1) = n^2H^2 - S.$$

Já que $n(n-1)(r-1) = c$, onde c é constante, $nH = (n-k)\lambda + k\mu$ e $S = (n-k)\lambda^2 + k\mu^2$ vemos que $((n-k)\lambda + k\mu)^2 - (n-k)\lambda^2 - k\mu^2 = c$. Donde obtemos

$$(n-k)\lambda\,[(n-k)\lambda - \lambda + 2k\mu] + (k^2-k)\mu^2 = c.$$

Derivando a última expressão com respeito a s (assumimos λ como função de um parâmetro s), obtemos que

$$\begin{aligned}&(n-k)d\lambda\,[(n-k)\lambda - \lambda + 2k\mu] + (n-k)\lambda\,[(n-k)d\lambda - d\lambda + 2kd\mu]\\ &+ (k^2-k)2\mu d\mu = 0.\end{aligned}$$

Sejam $M_1^{n-k}(x)$ e $M_2^k(x)$ as subvariedades integrais passando por $x \in M$ correspondentes a λ e μ, respectivamente. Do Teorema 2.1 sabemos que:

- Ao longo de $M_1^{n-k}(x)$, $d\lambda = 0$, assim,

$$\begin{aligned}2k(n-k)\lambda d\mu + (k^2-k)2\mu d\mu &= 0\\ \Rightarrow d\mu\left[2k(n-k)\lambda + (k^2-k)2\mu\right] &= 0\\ \Rightarrow d\mu &= 0.\end{aligned}$$

  Para vermos que a conclusão acima é verdadeira suponha que $d\mu \neq 0$ em algum ponto $p \in M_1^{n-k}(x)$. Assim, por continuidade, temos que existe uma vizinhança V de p na qual $d\mu \neq 0$ e, com isso, temos que μ não é constante em V. Logo obtemos que em V, $2k(n-k)\lambda + (k^2-k)2\mu = 0$ e concluímos que $\lambda = -C\mu$, onde C é constante. Deste modo, vemos que λ não é constante em V o que é um absurdo. Portanto, temos que μ é constante em $M_1^{n-k}(x)$.

- Ao longo de $M_2^k(x)$, $d\mu = 0$, assim,

$$\begin{aligned} (n-k)d\lambda\,[(n-k)\lambda - \lambda + 2k\mu] + (n-k)\lambda[(n-k)d\lambda - d\lambda] &= 0 \\ \Rightarrow d\lambda\,[(n-k)((n-k)\lambda - \lambda + 2k\mu) + (n-k)((n-k)-1)] &= 0 \\ \Rightarrow d\lambda &= 0. \end{aligned}$$

  De forma análoga ao que acabamos de fazer para o caso anterior se supormos que $d\lambda \neq 0$ em algum ponto $p \in M_2^k(x)$ chegaremos à conclusão que existirá uma vizinhança V de p tal que μ não é constante, o que nos leva a um absurdo. Portanto, λ deve ser constante em $M_2^k(x)$.

Tendo em vista que M é conexa e que $d\lambda = 0 = d\mu\ \forall\ p \in M$ concluímos que λ e μ são constantes em M.

Uma vez que M é compacta e λ, μ são constantes em M, temos que o resultado é verdadeiro devido a um dos resultados demonstrado por E. Cartan (ver [3]).

□

Exemplo 1 *Por um momento, assumamos que M é uma hipersuperfície completa com curvatura escalar constante e com duas curvaturas principais distintas em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se as multiplicidades dessas curvaturas são todas maiores que 1, do Corolário 1 sabemos que M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta), 1 < k < n-1$. Consequentemente, assumiremos que uma dessas duas curvaturas principais é simples, isto é, assumiremos que*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{n-1} = \lambda \text{ e } \lambda_n = \mu,$$

onde os λ_i's, $1 \leq i \leq n$, são as curvaturas principais de M (e mostraremos que $\lambda \neq 0$ em todos pontos de M. Em verdade podemos sempre supor $\lambda > 0$). Já que a curvatura escalar $n(n-1)r$ é constante, da equação de Gauss (2.11),

$$n(n-1)r = n(n-1) + n^2H^2 - S,$$

(e observando que $nH = (n-1)\lambda + \mu$ *e* $S = (n-1)\lambda^2 + \mu^2$*) obtemos que*

$$\begin{aligned} n(n-1)r &= n(n-1) + (n-1)^2\lambda^2 + 2\lambda\mu(n-1) + \mu^2 - (n-1)\lambda^2 - \mu^2 \\ &= n(n-1) + (n-1)\lambda[(n-1)\lambda + 2\mu - \lambda] \\ \Rightarrow n(n-1)(r-1) &= (n-1)\lambda[(n-2)\lambda + 2\mu] \\ \Rightarrow n(r-1) &= (n-2)\lambda^2 + 2\lambda\mu. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se $\lambda = 0$ *em algum ponto* $p \in M$*, então* $r = 1$ *neste ponto. Já que* r *é constante, sabemos que* $r = 1$ *em* M*. Assim,*

$$\lambda\,[(n-2)\lambda + 2\mu] = 0$$

e vamos mostrar que $\lambda \equiv 0$ *em* M*. Para isso, defina os conjuntos*

$$\begin{cases} N = \{q \mid q \in M, \lambda(q) \neq 0\}. \\ Q = \{q \mid q \in M, (n-2)\lambda(q) + 2\mu(q) = 0\}. \end{cases}$$

Dado um ponto em N*, pela continuidade das curvaturas principais, existe uma vizinhança deste ponto em* N*, isto é,* N *é aberto. Da mesma forma, obtemos que* Q *é fechado. Já que* $p \notin N$ *temos que os conjuntos* N *e* M *são distintos. Vamos mostrar que* $N = Q$*. Seja* $q \in N$*, então, como*

$$\lambda\,[(n-2)\lambda + 2\mu] = 0,$$

obtemos que $(n-2)\lambda(q) + 2\mu(q) = 0$ *e* $q \in Q$*. Assim,* $N \subset Q$*. Agora, como, por hipótese,* $\lambda(q) \neq \mu(q)$ $\forall$ $q \in M$*, vemos que se* $(n-2)\lambda(q) + 2\mu(q) = 0$*, então* $\lambda(q) \neq 0$ *já que caso contrário teriamos* $\lambda(q) = 0 = \mu(q)$*, o que é um absurdo. Logo se* $q \in Q$*, então* $q \in N$ *e* $Q \subset N$*. Assim,* $N = Q$*. Portanto,* N *é aberto e fechado e já que* M *é conexa (pois é completa) e* $N \neq M$ *obtemos que* N *é vazio. Com isso, se* λ *se anula em algum ponto* $p \in M$*, teremos que* $\lambda \equiv 0$ *em* M*.*

Agora da equação de Gauss (2.10), qual seja,

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}),$$

e observando que $h_{ii}h_{jj} = 0$ *para* $1 \leq i, j \leq n$ *vemos que em* M

$$R_{ijij} = 1$$

e, consequentemente, a curvatura seccional K *é tal que*

$$K = 1.$$

Ou seja, é não negativa. De acordo com o resultado devido a S.Y. Cheng e S.T. Yau em [8], citado na introdução, sabemos que M *é uma hipersuperfície totalmente umbílica. Consequentemente, podemos assumir que* $\lambda \neq 0$ *em* M*. Portanto, (2.23) nos dá*

$$\begin{aligned} 2\lambda\mu &= n(r-1) - (n-2)\lambda^2 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{(n-2)\lambda}{2} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n\lambda^2}{2\lambda} + \lambda \\ \Rightarrow \lambda - \mu &= n\frac{\lambda^2 - (r-1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

e já que $\lambda \neq \mu$ *temos que*

$$\lambda^2 - (r-1) \neq 0.$$

Se $\lambda^2 - (r-1) < 0$*, então da expressão anterior temos que*

$$\lambda^2 - \lambda\mu = \frac{n}{2}\{\lambda^2 - (r-1)\} < 0$$

e $r > 1$*. Consequentemente,*

$$\mu\lambda > \lambda^2.$$

Assim, da equação de Gauss (2.10),

$$R_{ijij} = \begin{cases} 1 + \lambda^2 \geq 1 & \text{se} \quad i, j < n \\ 1 + \lambda\mu \geq 1 & \text{se} \quad i < n \quad e \quad j = n. \end{cases}$$

Assim, $1+\lambda^2 \geq 1$ *e* $r > 1$*. Portanto, usando novamente o resultado devido a S.Y. Cheng e S.T. Yau em [8], citado na introdução,* M *é uma hipersuperfície totalmente umbílica. Isto é um absurdo por que assumimos que* M *possui duas curvaturas principais distintas. Desta forma,* $\lambda^2 - (r-1) > 0$*. Defina agora a seguinte função* $\omega = \{\lambda^2 - (r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$*. Com isso, vemos que* ω *é positiva.*

No nosso caso, em que M tem duas curvaturas principais em $\mathbb{S}^{n+1}$, sendo uma de multiplicidade $n-1$, e $n^2H^2 - S = c$, onde c é constante, podemos escrever

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda, \ \lambda_n = \mu$$

e vamos escolher $\lambda > 0$. Denote as subvariedades integrais passando por $x \in M$ e correspondentes a λ e μ por $M_1^{n-1}(x)$ e $M_2^1(x)$, respectivamente. Considere

$$d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{,k}\omega_k \text{ e } d\mu = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{,k}\omega_k,$$

onde $\lambda_{,k}, \mu_{,k}, 1 \leq k \leq n-1$ são funções diferenciáveis. Assim, pelo Teorema (2.1), e tendo em vista que os $\omega_k, \ 1 \leq k \leq n-1$, são linearmente independentes, vemos que

$$\lambda_{,1} = \ldots = \lambda_{,n-1} = 0$$

ao longo de $M_1^{n-1}(x)$. Uma vez que $n^2H^2 - S = c$ temos que

$$\lambda\left((n-2)\lambda + 2\mu\right) = c.$$

Derivando a expressão acima com respeito a s (novamente estamos considerando λ e μ funções de um parâmetro s) obtemos

$$\begin{aligned} d\lambda\left((n-2)\lambda + 2\mu\right) + \mu((n-2)d\lambda + 2d\mu) &= 0 \\ \Rightarrow (n-2)\lambda + 2d\mu &= 0 \\ \Rightarrow \sum_k ((n-2)\lambda_{,k} + 2\mu_{,k}) &= 0 \\ \Rightarrow \mu_{,k} &= 0, \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n-1$.

As informações obtidas acima sobre as funções $\lambda_{,k}, \mu_{,k}$ com $1 \leq k \leq n-1$ serão úteis na demonstração do próximo teorema.

Teorema 2.2 *Se M é uma hipersuperfície n-dimensional ($n > 2$) em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas, e o espaço de direções principais correspondente a uma delas tem dimensão 1 (ou seja, a curvatura correspondente tem multiplicidade 1), então M é o lugar geométrico das subvariedades $(n-1)$-dimensionais $M_1^{n-1}(s)$ ao longo das quais a curvatura λ de multiplicidade $n-1$ é constante. Além disso, tais subvariedades são localmente isométricas a uma esfera $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1}(c(s)) = \mathbb{E}^n(s) \ \cap \ \mathbb{S}^{n+1}$, de curvatura constante dada por $\{\frac{d(\log(\lambda^2-(r-1))^{\frac{1}{n}})}{ds}\}^2+\lambda^2+1$ e $\omega = \{\lambda^2-(r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$ satisfaz a equação diferencial ordinária de 2^a ordem,*

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \omega\left\{\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right\}, \tag{2.24}$$

onde $\mathbb{E}^n(s)$ é um subespaço linear n-dimensional no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ que é paralelo ao $\mathbb{E}^n$ fixado.

Demonstração: Aqui vamos considerar λ localmente como função de um parâmetro s, por exemplo, o comprimento de arco de uma trajetória ortogonal de uma família de subvariedades integrais correspondentes a λ.
Então, teremos

$$\begin{aligned} d\lambda = d\lambda_a = \sum_i h_{aai}\omega_i &= \sum_b h_{aab}\omega_b + h_{aan}\omega_n \\ &= \sum_b \lambda_{,b}\,\omega_b + \lambda_{,n}\,\omega_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h_{aab} = 0\,, \forall\ a, b \leq n-1 \,\text{e}\, h_{aan} = \lambda_{,n}\,. \tag{2.25}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d\mu = d\lambda_n = \sum_i h_{nni}\omega_i &= \sum_b h_{nnb}\omega_b + h_{nnn}\omega_n \\ &= \mu_{,n}\,\omega_n. \end{aligned}$$

Logo

$$h_{nnb} = 0\,, \forall\ b \leq n-1 \,\mathrm{e}\, h_{nnn} = -(n-1)\lambda_{,n}\,. \tag{2.26}$$

Assim, de (2.19) e (2.20),

$$\theta_{an} = \sum_k h_{ank}\omega_k = h_{ana}\omega_a + h_{ann}\omega_n + \sum_{\substack{k\neq a\\ k\neq n}} h_{ank}\omega_k.$$

O último somatório se anula pois sempre temos $\lambda_k = \lambda_a$. Além disso, como $h_{ann} = h_{nna}$, temos que $h_{ann=0}$. Assim,

$$\theta_{an} = \lambda_{,n}\omega_a.$$

Daí, escrevemos

$$\omega_{an} = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_n}\theta_{an} = \frac{1}{\lambda-\mu}\lambda_{,n}\omega_a = \frac{1}{\lambda-\mu}\lambda_{,n}\omega_a. \tag{2.27}$$

Agora observamos que $\lambda_{,n} = \frac{d\lambda}{ds}$, $\lambda - \mu = \frac{n(\lambda^2-(r-1))}{2\lambda}$ e, obtemos de (2.27) que

$$\omega_{an} = \frac{2\lambda\lambda_{,n}}{n(\lambda^2-(r-1))}\omega_a.$$

Em seguida, vemos que ($'$ representa derivada com respeito a s)

$$\begin{aligned} (\log(\lambda^2-(r-1))^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n}(\log(\lambda^2-(r-1)))' \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda^2-(r-1)}2\lambda\frac{d\lambda}{ds} \\ &= \frac{2\lambda}{n(\lambda^2-(r-1))}\frac{d\lambda}{ds} \\ &= \frac{\lambda_{,n}}{\lambda-\mu}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega_{an} = (\log(\lambda^2-(r-1))^{\frac{1}{n}})'\omega_a. \tag{2.28}$$

Assim,

$$d\omega_{an} = d(\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}})'\omega_a + (\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}})'d\omega_a.$$

Observando que

$$d(\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}})' = (\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}})''ds,$$

fazemos $A = (\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}}$ e, então podemos escrever

$$\begin{aligned} d\omega_{an} &= (\log A)''ds \wedge \omega_a + (\log A)' \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ia} \\ &= -(\log A)''\omega_a \wedge ds + (\log A)' \sum_b \omega_b \wedge \omega_{ba} + (\log A)'\omega_n \wedge \omega_{na} \\ &= -(\log A)''\omega_a \wedge ds + [(\log A)']^2\omega_a \wedge ds + (\log A)' \sum_b \omega_b \wedge \omega_{ba}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d\omega_{an} = \{-(\log A)'' + [(\log A)']^2\}\omega_a \wedge ds + (\log A)' \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_b. \tag{2.29}$$

Observe que

$$\omega_n = ds, \tag{2.30}$$

uma vez que

$$d\omega_n = \sum_a \omega_a \wedge \omega_{an}$$

e

$$\sum_a \omega_a \wedge \omega_{an} = \sum_a \omega_a \wedge (\frac{\lambda_{,n}}{\lambda - \mu})\omega_a = \sum_a (\frac{\lambda_{,n}}{\lambda - \mu})\omega_a \wedge \omega_a = 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} d\omega_{an} &= \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_{bn} + \omega_{an} \wedge \omega_{nn} + \omega_{an+1} \wedge \omega_{n+1n} - \omega_a \wedge \omega_n \\ &= \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_{bn} - \lambda\mu\omega_a \wedge \omega_n - \omega_a \wedge \omega_n \\ &= (\log A)' \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_b - (\lambda\mu + 1)\omega_a \wedge \omega_n. \end{aligned}$$

Observe que em $\mathbb{S}^{n+1}$ temos

$$\omega_{n+2n} = \lambda_n \omega_n = \omega_n$$

e

$$\omega_{n+2a} = \lambda_a \omega_a \Rightarrow -\omega_{an+2} = \omega_a,$$

pois em $\mathbb{S}^{n+1}$ todas as curvaturas principais são iguais a 1. Isso justifica a presença desses dois termos na última parcela da expressão de $d\omega_{an}$ dada acima. Como

$$\lambda[(n-2)\lambda + 2\mu] = n(r-1)$$

vem que

$$-\lambda\mu = \frac{n(r-1) - (n-2)\lambda^2}{2}.$$

Daí,

$$d\omega_{an} = (\log A)' \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_b + \left[\frac{(n-2)\lambda^2 - n(r-1)}{2} - 1\right] \omega_a \wedge \omega_n. \quad (2.31)$$

Igualando as equações (2.30) e (2.31) acima obtemos

$$(\log A)'' - [(\log A)']^2 + \frac{(n-2)\lambda^2 - n(r-1)}{2} - 1 = 0. \quad (2.32)$$

Fazendo $\omega = (\lambda^2 - (r-1))^{-\frac{1}{n}}$ segue que

$$\begin{aligned}
0 &= (\log \omega^{-1})'' - [(\log \omega^{-1})']^2 + \frac{(n-2)}{2}[\omega^{-n} + (r-1)] - \frac{n(r-1)}{2} - 1 \\
&= (\log \omega^{-1})'' - [(\log \omega^{-1})']^2 + \frac{(n-2)}{2}\frac{1}{\omega^n} + \frac{nr - n - 2r + 2 - nr + n - 2}{2} \\
&= (\log \omega^{-1})'' - \left[(\log \omega^{-1})'\right]^2 + \frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r \\
&= \left[-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right]' - \left[-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right]^2 + \frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r \\
&= -\frac{1}{\omega}\frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \omega\left(\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right).$$

Assim,

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{n-2}{2}\omega^{-n+1} + \omega r = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por $2\frac{d\omega}{ds}$ teremos

$$2\frac{d\omega}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2} - 2\frac{n-2}{2}\frac{d\omega}{ds}\omega^{-n+1} + 2\omega r\frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Ou seja,

$$\left[\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 + \omega^{-n+2} + r\omega^2\right]' = 0.$$

Desta forma, integrando (2.24), obtemos que

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - r\omega^2 - \frac{1}{\omega^{n-2}},$$

onde C é uma constante de integração.

Então, por (2.23), (2.28), (2.30) e (2.32) de_a pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} de_a &= \sum_b \omega_{ab}e_b + \omega_{an}e_n + \omega_{an+1}e_{n+1} + \omega_{an+2}e_{n+2} \\ &= \sum_b \omega_{ab}e_b + (\log A')\omega_a e_n + \lambda\omega_a e_{n+1} - \omega_a e_{n+2} \\ &= \sum_b \omega_{ab}e_b + [(\log A')e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_a. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d\{(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}\} =$$

$$d\{(\log A)'\}e_n + (\log A)'de_n + d\lambda e_{n+1} + \lambda de_{n+1} - de_{n+2},$$

$d[(\log A)'] = (\log A)''\omega_n$, $d\lambda = \lambda_{,n}\,\omega_n$, $de_{n+1} = -\sum_b \lambda\omega_b e_b - \mu\omega_n e_n$ e $de_{n+2} = \sum_a \omega_a e_a + \omega_n e_n$

implicam que

$$\begin{aligned}
d[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= (\log A)'(\sum_b (-\log A)'\omega_b e_b) \\
&+ (\log A)''\omega_n e_n + \mu\omega_n e_{n+1}(\log A)' \\
&- \omega_n e_{n+2}(\log A)' \\
&+ \lambda_{,n}\omega_n e_{n+1} + \lambda \sum_b (-\lambda\omega_b)e_b \\
&- \lambda\mu\omega_n e_n - \sum_a \omega_a e_a - \omega_n e_n.
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos teremos

$$\begin{aligned}
d[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= (\log A)''\omega_n e_n - \lambda\mu\omega_n e_n - \omega_n e_n \\
&+ (\log A)'\mu\omega_n e_{n+1} + \lambda_{,n}\omega_n e_{n+1} \\
&- (\log A)'\omega_n e_{n+2} \\
&- [(\log A)']^2 \sum_b \omega_b e_b \\
&- \sum_b \omega_b e_b - \lambda^2 \sum_b \omega_b e_b.
\end{aligned}$$

E, com isso,

$$\begin{aligned}
d[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= \left[(\log A)'' + \frac{n(r-1) - (n-2)\lambda^2}{2} - 1\right]\omega_n e_n \\
&+ \left[(\log A)'(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda) + \lambda'\right]\omega_n e_{n+1} \\
&- (\log A)'\omega_n e_{n+2} \\
&- \left\{[(\log A)']^2 + \lambda^2 + 1\right\}\sum_b \omega_b e_b \\
&= \left[(\log A)'' + \frac{n(r-1) - (n-2)\lambda^2}{2} - 1\right]\omega_n e_n \\
&+ \left[(\log A)'(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda) + \lambda'\right]\omega_n e_{n+1} \\
&- (\log A)'\omega_n e_{n+2}. \\
&\quad (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}))
\end{aligned}$$

Utilizando (2.32) escrevemos

$$(\log A)'' + \frac{(n-2)\lambda^2 - n(r-1)}{2} - 1 = [(\log A)']^2,$$

e obtemos finalmente o resultado $d[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] =$

$$\begin{aligned}
&= [(\log A)']^2\omega_n e_n + [(\log A)'(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda) + \lambda']\omega_n e_{n+1} \\
&\quad -(\log A)'\omega_n e_{n+2}. \ (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})) \\
&= (\log A)'[(\log A)'e_n + (\mu + \lambda - \mu)e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_n. \\
&\quad (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})) \\
&= (\log A)'[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_n. \\
&\quad (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}))
\end{aligned}$$

Pondo $E = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{n-1}$, $F = (\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}$, e por último $W = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge \{(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}\}$, temos que

$$W = E \wedge F \Rightarrow dW = dE \wedge F + E \wedge dF.$$

Acima já calculamos dF, calculemos agora $dE \wedge F$.
Primeiramente observamos que

$$dE = \sum_a (-1)^{a-1} de_a \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e_a} \wedge \ldots \wedge e_{n-1},$$

onde o símbolo $\widehat{\ }$ indica que o termo foi omitido.
Como

$$de_a = \sum_b \omega_{ab}e_b + [(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_a,$$

substituindo o termo acima e distribuindo a soma, obtemos a equação

$$\begin{aligned}
dE &= \sum_a (-1)^{a-1} \sum_b \omega_{ab}e_b \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e_a} \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \\
&+ \sum_a (-1)^{a-1}\omega_a[(\log A)'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e_a} \wedge \ldots \wedge e_{n-1}.
\end{aligned}$$

Observe que no primeiro termo da soma, se $b = a \Rightarrow \omega_{ab} = \omega_{aa} = 0$ e se $b \neq a$, temos que b é um dos índices entre 1 e $n-1$, e assim, o produto $e_b \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots \wedge e_{n-1}$ é nulo já que um termo se repete. Assim, sendo nulo o primeiro termo da soma, reescrevemos

$$dE = \sum_a (-1)^{a-1} \omega_a F \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots \wedge e_{n-1}.$$

Portanto, $dE \wedge F = 0$, pois o vetor F se repete.
Assim,

$$dW = E \wedge dF = (\log A)' W ds.$$

Esta equação mostra que o n-vetor W em $\mathbb{R}^{n+2}$ é constante ao longo de $M_1^{n-1}(s)$. Deste modo, existe um subespaço linear $\mathbb{E}^n(s)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ contendo $M_1^{n-1}(s)$. Da equação acima, o campo vetorial W depende somente de s e por integração obtemos

$$W(s) = \left[\frac{\lambda(s)}{\lambda(s_0)}\right]^{\frac{1}{n}} W(s_0).$$

Então nós temos que $\mathbb{E}^n(s)$ é paralelo a $\mathbb{E}^n(s_0)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$.

Por fim, temos que a curvatura de $M_1^{n-1}(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} d\omega_{ab} - \sum_c \omega_{ac} \wedge \omega_{cb} &= \omega_{an} \wedge \omega_{nb} + \omega_{an+1} \wedge \omega_{n+1b} - \omega_a \wedge \omega_b \\ &= -\left\{[(\log A)']^2 + \lambda^2 + 1\right\} \omega_a \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Já que $M_1^{n-1}(s) \subset \mathbb{E}^n \cap \mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}^{n-1}(c(s))$ tomamos em $M_1^{n-1}(s)$ a métrica induzida de $\mathbb{S}^{n-1}(c(s))$. Dessa forma, obtemos que $M_1^{n-1}(s)$ é localmente isométrica a $\mathbb{S}^{n-1}(c(s))$.

$\square$

Como vimos na demonstração do Teorema 2.2 integrando (2.24) temos que

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - r\omega^2 - \frac{1}{\omega^{n-2}}, \tag{2.33}$$

onde C é uma constante de integração.

A mesma afirmação como em [18] implica o seguinte:

Corolário 2 *Em $\mathbb{S}^{n+1}$, existem várias hipersuperfícies com curvatura escalar constante que não são congruentes entre si.*

Demonstração: Basta observarmos que no teorema 2.2 consideramos λ como uma função que depende de um parâmetro s (parâmetro da curva), pois deste modo para cada escolha de s teremos funções distintas (logo curvaturas distintas) e, com isso, as hipersuperfícies correspondentes a essas curvaturas não são isométricas.

$\square$

Observação 1. Fazendo uso da mesma construção como em Otsuki [18], podemos provar que existem várias hipersuperfícies compactas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante do tipo descrito no Teorema 2.2 que não são congruentes entre si.

Capítulo 3

UMA CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO RIEMANNIANO $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$

Nesta seção, caracterizaremos o produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$. Primeiro, daremos uma resposta afirmativa para o Problema 1 que foi citado na introdução e se $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, provaremos que se $S \geq C(n,r)$, então $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ é a única hipersuperfície completa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples. Além disso, quando $r = \frac{n-2}{n-1}$, concluiremos que $S \geq C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$ e provaremos que não existem hipersuperfícies completas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples tal que $S > C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$.

Definição 1 *Variedades conformemente planas são variedades riemannianas localmente conformes a um espaço euclidiano. Isto é, localmente a métrica riemanniana é um múltiplo da métrica euclidiana.*

Definição 2 *Dizemos que M^n é uma subvariedade conformemente plana n-dimensional de uma variedade riemanniana $\overline{M}^{n+p}$ $n+p$-dimensional se existe uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ tal que M^n é conformemente plana com a métrica induzida. Quando a codimensão p é um, dizemos que M^n é uma hipersuperfície conformemente plana de $\overline{M}^{n+1}$.*

O *Teorema de Kuiper* (veja [10], p. 116) nos diz que se M é uma variedade compacta, simplesmente conexa e conformemente plana, então M é conforme à esfera euclidiana.

Dizemos que uma variedade riemanniana M^n é conformemente plana se cada ponto de M está em uma vizinhança que é difeomorficamente conforme a um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a métrica canônica.

Exemplo 2 *Abaixo temos alguns exemplos de variedades conformemente planas.*

1. *Qualquer superfície é conformemente plana porque sempre admite coordenadas isotérmicas locais, isto é, sempre é possível encontrar uma parametrização na qual os coeficientes da primeira forma fundamental são tais que $E = G$ e $F = 0$;*

2. *As esferas Euclidianas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são conformemente planas já que a projeção estereográfica é um difeomorfismo conforme. Em verdade, prova-se que qualquer variedade riemanniana com curvatura seccional constante é conformemente plana (ver [10], p. 108);*

3. *Hipersuperfícies de rotação ou tubos em torno de curvas suaves são também conformemente planas (ver [10], p. 127).*

Teorema 3.1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples. Então $r > 1-\frac{2}{n}$ e, quando $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, se $S \geq C(n,r)$, então M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2})\times\mathbb{S}^{n-1}(c)$.*

Corolário 3 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas. Se $r \neq \frac{n-2}{n-1}$ e $S \geq C(n,r)$, então M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta), 1 \leq k \leq n-1$.*

Demonstração: Já que M é completa, então pelo Corolário 1 temos que M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta), 1 < k < n-1$, desde que as multiplicidades de ambas as curvaturas sejam maiores que 1. No caso em que uma delas é simples e se $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, $S \geq C(n,r)$, então o Teorema 3.1 diz que M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$, $k = 1$ ou $k = n-1$.

Portanto, M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^k(\cos\theta) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin\theta)$ com $1 \leq k \leq n-1$.

$\square$

Toda hipersuperfície n-dimensional ($n > 3$) compacta localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ ($n > 3$) é conformemente equivalente à esfera de Riemann ou a uma variedade clássica de Schottky (cf. Suyama [20] e Pinkall [19]). Sabemos que a esfera de Riemann e o produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ são hipersuperfícies compactas localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante. Na seção 2, foi mostrado que existem várias hipersuperfícies localmente conformemente plana na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante que não são congruentes à esfera de Riemann e ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$. O Corolário 4, a seguir, dá uma caracterização da classe das hipersuperfícies conformemente planas.

Para provar o próximo corolário faremos uso do seguinte resultado presente em [10] (ver p. 118):

Teorema 3.2 *Seja* $f : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $n \geq 4$, *uma imersão isométrica (onde* c *é a curvatura seccional de* $\overline{M}_c^{n+1}$ *que é constante). Então* M^n *é conformemente plana se, e somente se,* f *tem curvaturas principais de multiplicidades 1,* $n-1$ *ou* n *apenas.*

Corolário 4 *Seja* M *uma hipersuperfície n-dimensional* $(n > 3)$ *completa, localmente conformemente plana na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}$ *com curvatura escalar constante* $n(n-1)r$. *Então* $r > 1-\frac{2}{n}$ *e, quando* $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, *se* $S \geq C(n,r)$, *então* M *é isométrica a* $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.

Demonstração: Já que M é uma hipersuperfície localmente conformemente plana em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $n > 3$, do Teorema 3.2, sabemos que M tem no máximo duas curvaturas principais distintas e as multiplicidades delas assumem os valores: 1, $n-1$ ou n. Se em algum ponto p, estas curvaturas coincidem (ou seja, temos uma curvatura com multiplicidade n), então $S = nH^2$, pois tendo em vista que $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ e que $h_{ii} = \lambda_i, h_{jj} = \lambda_j$ e $h_{ij} = 0$ temos que $S = \sum_i \lambda^2$ (já que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$) e, com isso, como,

$$(\sum_i \lambda)^2 - \sum_i \lambda^2 = \sum_{i \neq j} \lambda^2 \Rightarrow \sum_i \lambda^2 = (\sum_i \lambda)^2 - \sum_{i \neq j} \lambda^2$$

e

$$\sum_{i \neq j} \lambda^2 = (n-1) \sum_i \lambda^2,$$

temos que $\sum_i \lambda^2 + (n-1) \sum_i \lambda^2 = (\sum_i \lambda)^2$ donde concluímos que $S = nH^2$. Usando este fato na equação de Gauss (2.11) temos que $S = n(r-1)$. Como estamos assumindo que $S \geq C(n,r)$ vem que

$$n(r-1) \geq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$$

o que é um absurdo. Logo M possui duas curvaturas principais distintas em todos os pontos e uma delas tem multiplicidade $n-1$. Portanto, pelo Teorema 3.1, temos que M é isométrica a $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.

$\square$

Teorema 3.3 *Seja M uma hipersuperfície completa com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

1. *Se $r = \frac{n-2}{n-1}$, então $S \geq C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$, e se $S = n$ em M, então M é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$;*

2. *Não existem tais hipersuperfícies com $r = \frac{n-2}{n-1}$ e $S > C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$.*

Observação 2. Sabemos que o toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$ é uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que $r = \frac{n-2}{n-1}$ e $S = n$. Mas não sabemos se uma hipersuperfície completa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples e $r = \frac{n-2}{n-1}$ é somente o toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$.

Corolário 5 *Não existem hipersuperfícies completas n-dimensionais $(n > 3)$ localmente conformemente plana em $\mathbb{S}^{n+1}$ tais que $r = \frac{n-2}{n-1}$ e $S > C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$.*

Demonstração: Fazendo uso do Teorema 3.3 e o mesmo argumento no Corolário 4, sabemos que o Corolário 5 é verdadeiro. De fato, pelo Corolário 4 uma hipersuperfície completa n-dimensional $(n > 3)$ localmente conformemente plana em $\mathbb{S}^{n+1}$, com $S \geq C(n, r)$, possui duas curvaturas principais distintas, uma das quais é simples (no nosso caso, como $S > C(n, r)$, essa conclusão ainda é válida mesmo sendo $r = \frac{n-2}{n-1}$). Desta forma, o Corolário 5 nada mais é do que a parte (2) do Teorema 3.3, ou seja, o resultado é verdadeiro.

$\square$

Observação 3. É bem conhecido que uma hipersuperfície localmente conformemente plana em $\mathbb{S}^{n+1}$ $(n > 3)$ possui no máximo duas curvaturas principais distintas. Mas quando $n = 3$, essa afirmação não é verdade (para um exemplo de uma hipersuperfície conformemente plana de $\mathbb{S}^4$ com três curvaturas principais distintas ver [12]). Consequentemente, podemos perguntar se estas afirmações, as dos Corolários 4 e 5, ocorrem quando $n = 3$. Mas podemos ter em mente que na condição que a curvatura escalar de M é constante, deve ser verdade que uma hipersuperfície localmente conformemente plana em $\mathbb{S}^4(1)$ tem no máximo duas curvaturas principais distintas. Consequentemente, podemos conjecturar que as afirmações nos Corolários 4 e 5 ocorrem.

Para provar o Teorema 3.1, precisaremos de alguns lemas.

Lema 2 *Se M possui duas curvaturas principais distintas e λ é a curvatura principal de multiplicidade $n-1$, então $S = C(n,r)$ se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 = \frac{2r}{n-2}$.*

Demonstração: Suponha que $S = (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$. Sabemos que $S = \sum_i \lambda_i^2$ e já que λ tem multiplicidade $n-1$, temos que $S = (n-1)\lambda^2 + \mu^2$. Também sabemos que

$$n^2H^2 - S = n(n-1)(r-1).$$

Daí, como

$$n^2H^2 = (\sum_i \lambda_i)^2 = ((n-1)\lambda + \mu)^2,$$

obtemos que

$$\mu = \frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S &= (n-1)\lambda^2 + \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)^2 \\ &= (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}. \end{aligned}$$

Logo

$$(n-1)\lambda^2 + \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)^2 = (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}.$$

Já que $n(n-1)r = \text{const.} \Leftrightarrow r = \text{const.}$, então a expressão à direita na última igualdade acima é constante. Daí, obtemos que

$$(n-1)\lambda^2 + \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)^2$$

é constante, consequentemente, λ é constante, pois se derivamos a expressão acima obtemos que

$$d\lambda\left[2(n-1)\lambda - \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)\left(\frac{n(r-1)}{2\lambda^2} + \frac{n-2}{2}\right)\right] = 0,$$

donde

$$d\lambda\left[2(n-1)\lambda\frac{(n-2)^2}{4}\lambda - \frac{n^2(r-1)^2}{4\lambda^3}\right] = 0.$$

Uma vez que podemos tomar $\lambda \neq 0$ e tendo em vista que λ e $d\lambda$ são funções contínuas obtemos da expressão acima que $d\lambda = 0$ em M. Agora, observando que M está nas hipóteses do Teorema 2.2, temos por (2.24) que, uma vez que $\omega = \{\lambda^2 - (r-1)\}^{-\frac{1}{n}}$ é também constante,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\omega}{ds^2} &= \omega\left\{\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right\} \\
\Leftrightarrow \omega\left\{\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right\} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} &= r \\
\Leftrightarrow \omega^{-n} &= \frac{2r}{n-2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\omega^{-n} = \lambda^2 - (r-1) = \frac{2r}{n-2}$.

Reciprocamente, se $\omega^{-n} = \frac{2r}{n-2}$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (r-1) &= \frac{2r}{n-2} \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{2r}{n-2} + (r-1) \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{2r + (n-2)(r-1)}{n-2} \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{n(r-1)+2}{n-2}. \end{aligned}$$

Como λ tem multiplicidade $n-1$ e μ tem multiplicidade 1 já sabemos que

$$\begin{aligned} S &= (n-1)\lambda^2 + \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)^2 \\ &= (n-1)\lambda^2 + \frac{n^2(r-1)^2}{4\lambda^2} - \frac{n(r-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)^2\lambda^2}{4}. \end{aligned}$$

Com isso, substituindo o valor encontrado para λ^2, vemos que

$$\begin{aligned} S &= (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n^2(r-1)^2}{4}\frac{(n-2)}{n(r-1)+2} \\ &- \frac{n(r-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)^2}{4}\frac{(n(r-1)+2)}{n-2} \\ &= (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = C(n,r).$$

Assim, o Lema 2 está provado.

□

Lema 3 *Se M possui duas curvaturas principais distintas e λ é a curvatura principal de multiplicidade $n-1$, obtemos o seguinte:*

1. *Quando $r - 1 \geq 0$, $S \geq C(n,r)$ se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \geq \frac{2r}{n-2}$.*

2. *Quando* $1 - \frac{2}{n} < r < 1$ *e* $r \neq \frac{n-2}{n-1}$, $S \geq C(n,r)$ *se, e somente se, uma das seguintes condições ocorre*

   (a) $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \geq \frac{2r}{n-2}$ *e* $\lambda^2 > 1 - r$

   (b) $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \leq \frac{2r}{n-2}$ *e* $\lambda^2 < 1 - r$.

Demonstração: Inicialmente, consideramos a função

$$f(t) = \frac{n^2}{4}t + \frac{n^2(r-1)^2}{4t} - \frac{n(n-2)}{2}(r-1)$$

para $t > 0$. Já que

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{n^2}{4} - \frac{n^2(r-1)^2}{4t^2}$$

sabemos que $t^2 \geq (r-1)^2$ se, e somente se, $f(t)$ é uma função crescente (pois $t^2 \geq (r-1)^2 \Leftrightarrow \frac{(r-1)^2}{t^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n^2(r-1)^2}{4t^2} \leq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow \frac{n^2}{4} - \frac{n^2(r-1)^2}{4t^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{df(t)}{dt} \geq 0 \Leftrightarrow$ $f(t)$ é uma função crescente) e, da mesma forma, $t^2 \leq (r-1)^2$ se, e somente se, $f(t)$ é uma função decrescente. Além disso, $f(t)$ obtém um mínimo em $t^2 = (r-1)^2$. De fato, neste caso $\frac{df(t)}{dt} = 0$ e $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{2n^2(r-1)^2}{t^3} \geq 0$ já que $r \geq 1$ e $t > 0$.

De acordo com o exemplo 1, podemos assumir que $\lambda \neq 0$ e $r \geq 1$, donde $\lambda^2 - (r-1) > 0$ e, com isso, podemos assumir que $\lambda > 0$. Uma vez que

$$\begin{aligned} S &= (n-1)\lambda^2 + \mu^2 \\ &= (n-1)\lambda^2 + (\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda)^2 \\ &= \frac{n^2}{4}\lambda^2 + \frac{n^2(r-1)^2}{4\lambda^2} - \frac{n(n-2)(r-1)}{2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

concluímos que S é uma função crescente de λ^2 se $\lambda^2 > |r-1|$ e S é uma função decrescente de λ^2 se $0 < \lambda^2 < |r-1|$.

1. Se $r - 1 \geq 0$, sabemos que S é uma função crescente de λ^2 porque $\lambda^2 > r - 1 = |r-1|$. Assim, do Lema 2 temos que $S = C(n,r)$ se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 = \frac{2r}{n-2}$ e por ser S uma função crescente de λ^2 temos que $S > C(n,r)$ se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 > \frac{2r}{n-2}$.

2. No caso em que $1 - \frac{2}{n} < r < 1$ e $r \neq \frac{n-2}{n-1}$ temos, pelo que foi feito na seção 2, que λ^2 é uma função contínua de s. Assim, se existirem dois pontos s_1 e s_2 tais que $\lambda^2(s_1) > 1 - r$ e $\lambda^2(s_2) < 1 - r$, então deve existir um ponto s_0 tal que $\lambda^2(s_0) = 1 - r$. Substituimos $\lambda^2(s_0) = 1 - r$ em (3.1) e obtemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{n^2}{4}(1-r) + \frac{n^2(r-1)^2}{4(1-r)} - \frac{n(n-2)(r-1)}{2} \\ &= n(n-1)(1-r). \end{aligned}$$

Agora observamos que, por ser $r \neq \frac{n-2}{n-1}$,

$$n(n-1)(1-r) < (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}.$$

Consequentemente, neste caso,

$$S \geq (n-1)\frac{n(r-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(r-1)+2}$$

se, e somente se, $\lambda^2 > 1-r$ ou $\lambda^2 < 1-r$ ocorre sempre. Se $\lambda^2 > 1-r$, S é uma função crescente de λ^2 (pois $\lambda^2 > 1-r \Leftrightarrow \lambda^4 > (1-r)^2 \Leftrightarrow \lambda^4 > (r-1)^2 \Leftrightarrow \frac{(r-1)^2}{\lambda^4} < 1 \Leftrightarrow \frac{n^2(r-1)^2}{4\lambda^4} < \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow \frac{n^2}{4} - \frac{n^2(r-1)^2}{4\lambda^4} > 0 \Leftrightarrow \frac{dS}{d(\lambda^2)} > 0 \Leftrightarrow S$ é crescente). Consequentemente, como em (1), concluímos que $S \geq C(n,r)$ se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \geq \frac{2r}{n-2}$. Da mesma forma, se $\lambda^2 < 1-r$ temos que S é uma função decrescente de λ^2. Consequentemente, $S \geq C(n,r)$ ocorre se, e somente se, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \leq \frac{2r}{n-2}$.

O Lema 3 está provado.

$\square$

Lema 4 *Seja M com duas curvaturas principais distintas e seja λ a curvatura principal de multiplicidade $n-1$. Se $r \leq 1 - \frac{2}{n}$, então $\frac{d\omega(s)}{ds}$ é uma função monótona crescente de s.*

Demonstração: Observe que M está nas hipóteses do Teorema 2.2. Logo $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1$ satisfaz a equação (2.25), isto é,

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \omega\left(\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right) = 0. \tag{3.2}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\omega}{ds^2} &= \omega\left(\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right) \\
&= \omega\left(\frac{n-2}{2}(\lambda^2 - r + 1) - r\right) \\
&= \omega\left(\frac{n-2}{2}\lambda^2 + \frac{(n-2)-nr}{2}\right) > 0
\end{aligned}$$

porque $r \leq 1 - \frac{2}{n}$ ($\Rightarrow r \leq \frac{n-2}{n} \Rightarrow nr \leq n-2 \Rightarrow (n-2) - nr \geq 0$) e $\lambda^2 > 0$ e, além disso, ω é positiva. Consequentemente, $\frac{d\omega(s)}{ds}$ é uma função monótona crescente de s. Isto finaliza a prova do Lema 4.

□

Proposição 1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ e com duas curvaturas principais distintas em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se λ denota a curvatura principal de multiplicidade $n-1$, então $\omega(s)$ é constante se $\frac{d\omega(s)}{ds}$ é uma função monótona de s.*

Demonstração: Já que estamos nas hipóteses do Teorema 2.2, e fazendo uso dos mesmos cálculos lá realizados, sabemos que

$$\omega_{jn} = \frac{d\{\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}}\}}{ds}\omega_j.$$

Agora observando que $\langle \nabla_{e_n} e_n, e_n \rangle = \frac{1}{2} e_n \langle e_n, e_n \rangle = 0$ e $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$, podemos escrever

$$\nabla_{e_n} e_n = \sum_{a=1}^{n} \langle \nabla_{e_n} e_n, e_a \rangle e_a = \sum_{a=1}^{n} \omega_{na}(e_n) e_a.$$

Logo

$$\nabla_{e_n} e_n = -\frac{d\{\log(\lambda^2 - (r-1))^{\frac{1}{n}}\}}{ds} \sum_a \omega_a(e_n) e_a = 0.$$

Desta forma, toda curva integral do campo de direções principais correspondentes a μ é uma geodésica (pois $\frac{D}{dt} e_n = \nabla_{e_n} e_n = 0$ e e_n é um campo de vetores tangentes a tal curva). Suponha que ω não é constante. Sabemos que, uma vez que $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1$ satisfaz a equação (2.25),

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \omega \left(\frac{n-2}{2} \frac{1}{\omega^n} - r \right) = 0.$$

Já que M é completa e a curva integral do campo de direções principais correspondente a μ é uma geodésica, temos que $\omega(s)$ é uma função definida em $(-\infty, +\infty)$. Da equação (2.25), temos

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{n-2}{2} \omega^{-n+1} + \omega r = 0.$$

Agora multiplicando ambos os membros por $2\frac{d\omega}{ds}$ teremos

$$2\frac{d\omega}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2} - 2\frac{n-2}{2}\frac{d\omega}{ds}\omega^{-n+1} + 2\omega r \frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Ou seja, (onde $'$ denota derivação com respeito a s)

$$\left[\left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 + \omega^{-n+2} + r\omega^2 \right]' = 0$$

Desta forma, integrando (2.25), obtemos que

$$\left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 = C - r\omega^2 - \frac{1}{\omega^{n-2}}, \tag{3.3}$$

onde C é uma constante de integração. Assim,

$$C \geq r\omega^2 + \frac{1}{\omega^{n-2}} \Rightarrow C \geq \min_{\omega > 0} \left(r\omega^2 + \frac{1}{\omega^{n-2}} \right) = \frac{n}{2} \left(\frac{2r}{n-2} \right)^{\frac{n-2}{n}}, \tag{3.4}$$

definindo $g(\omega) = r\omega^2 + \frac{1}{\omega^{n-2}}$ e tomando $\omega = (\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$ vemos que

$$\begin{aligned}
g((\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}) &= r\left(\frac{2r}{n-2}\right)^{-\frac{2}{n}} + \left(\frac{2r}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&= \left(\frac{2r}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{n}}\left(1 + r\left(\frac{2r}{n-2}\right)^{-1}\right) \\
&= \left(\frac{2r}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{n}}\left(1 + r\frac{(n-2)}{2r}\right) \\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{2r}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{n}}.
\end{aligned}$$

Em verdade temos que $\omega = (\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$ é ponto de mínimo de g. Com efeito, se $0 < \omega^{-n} < \frac{2r}{n-2}$ temos que

$$\begin{aligned}
\omega^{-n} &< \frac{2r}{n-2} \\
\Leftrightarrow (n-2)\omega^{-n} &< 2r \\
\Leftrightarrow (n-2)\omega^{-n} - 2r &< 0 \\
\Leftrightarrow 2r - (n-2)\omega^{-n} &> 0 \\
\Leftrightarrow 2r\omega - (n-2)\omega^{-n+1} &> 0 \\
\Leftrightarrow g'(\omega) &> 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $g(\omega)$ é crescente. Da mesma forma se $\omega^{-n} > \frac{2r}{n-2}$, então $g(\omega)$ é decrescente. Assim, temos que $\omega = (\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$ é ponto de mínimo de g. Além disso, $C = \frac{n}{2}(\frac{2r}{n-2})^{\frac{n-2}{2}}$ se, e somente se, ω é constante. Portanto, concluímos que, para qualquer solução não constante ω de (2.25),

$$C > \frac{n}{2}\left(\frac{2r}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{3.5}$$

É bem sabido que se g é crescente para $0 < \omega^{-n} < \frac{2r}{n-2}$, decrescente para $\omega^{-n} > \frac{2r}{n-2}$ e atinge o mínimo em $\omega^{-n} = \frac{2r}{n-2}$, então g possui duas raízes distintas. Agora, como $C > \min g(\omega)$, e as raízes de g são positivas (pois $\omega(s) > 0\ \forall s \in (-\infty, +\infty)$), obtemos que a equação

$$r\omega^2 + \frac{1}{\omega^{n-2}} - C = 0$$

possui duas raízes distintas positivas ω_1 e ω_2 e

$$\omega_1 < \left(\frac{2r}{n-2}\right)^{-\frac{1}{n}} < \omega_2. \tag{3.6}$$

Já que

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - r\omega^2 - \frac{1}{\omega^{n-2}}$$

e $\frac{d\omega}{ds}$ é monótona (estritamente crescente ou decrescente), sabemos que $\frac{d\omega}{ds}$ tem no máximo um zero em $(-\infty, +\infty)$.

- Se $\frac{d\omega}{ds}$ não tem zero em $(-\infty, +\infty)$, então, por continuidade, $\frac{d\omega}{ds} > 0$ ou $\frac{d\omega}{ds} < 0$. Assim, $\omega(s)$ é uma função monótona de s em $(-\infty, +\infty)$.

- Se $\frac{d\omega}{ds}$ tem um único zero em $(-\infty, +\infty)$, qual seja $s_0 \in (-\infty, +\infty)$, então $\omega(s)$ é uma função monótona de s em $(-\infty, s_0]$ e em $[s_0, +\infty)$.

Em qualquer caso, $\omega(s)$ é uma função monótona de s em $(-\infty, s_0]$ e em $[s_0, +\infty)$. Já que

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - r\omega^2 - \frac{1}{\omega^{n-2}} \geq 0,$$

sabemos que $\omega(s)$ é limitada, isto é, $\omega_1 \leq \omega(s) \leq \omega_2$. De fato, já temos que $\omega_1 < (\dfrac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}} < \omega_2$ e vamos mostrar em verdade que $\omega_1 < \omega(s) < \omega_2 \ \forall\ s$. Suponha que $\omega(s) \leq \omega_1$ para algum s. Então $\omega(s) \leq (\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$, donde $\omega(s)^{-n} \leq \frac{2r}{n-2}$ e como neste caso g é crescente temos que o mínimo de g é menor que $(\dfrac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$ o que é um absurdo. Logo $\omega(s) > \omega_1 \ \forall\ s$. Suponha agora que, para algum s, $\omega(s) \geq \omega_2$, assim $\omega(s) \geq (\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}}$ e como neste caso g é decrescente temos que $g(\omega(s)) \leq g((\frac{2r}{n-2})^{-\frac{1}{n}})$ o que, novamente, é um absurdo, donde $\omega(s) < \omega_2 \ \forall\ s$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\frac{d\omega(s)}{ds}$ é uma função monótona crescente. Então para s_0, do Teorema do Valor Médio, temos que para qualquer $s \in [s_0, +\infty)$, existe $t \in [s_0, s]$ tal que

$$\frac{d\omega(t)}{ds} = \frac{\omega(s) - \omega(s_0)}{s - s_0}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{d\omega(s)}{ds} = 0$$

por que $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função monótona crescente e $\omega(s)$ é limitada. Com efeito, temos que

$$0 \leq \frac{d\omega(t)}{ds} = \frac{\omega(s) - \omega(s_0)}{s - s_0} \leq \frac{1}{s - s_0}(\omega_2 - \omega_1)$$

e observe que $\omega_2 - \omega_1 < \infty$. Logo

$$0 \leq \lim_{s \to \infty} \frac{d\omega(t)}{ds} = \lim_{s \to \infty} \frac{\omega(s) - \omega(s_0)}{s - s_0} \leq \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s - s_0}(\omega_2 - \omega_1) = 0.$$

Portanto,

$$0 \leq \lim_{s \to \infty} \frac{d\omega(t)}{ds} \leq 0 \Rightarrow \lim_{s \to \infty} \frac{d\omega(s)}{ds} = 0.$$

Assim, concluímos que $\frac{d\omega(s)}{ds} < 0$, $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ e $\sup \frac{d\omega(s)}{ds} = 0$. Da mesma forma, consideramos $\frac{d\omega(s)}{ds}$ em $s \in (-\infty, s_0]$. Daí, como $\frac{d\omega(s)}{ds}$ é uma função monótona crescente, então, novamente pelo Teorema do Valor Médio, para algum s_0 temos que para qualquer $s \in (-\infty, s_0]$ existe $t \in [s, s_0]$ tal que

$$\frac{d\omega(t)}{ds} = \frac{\omega(s_0) - \omega(s)}{s_0 - s} = \frac{\omega(s) - \omega(s_0)}{s - s_0}$$

e, com isso, analogamente ao caso anterior,

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{d\omega(s)}{ds} = 0.$$

Novamente temos que $\frac{d\omega(s)}{ds} < 0$, $\forall s \in (-\infty, +\infty)$ e, pelo que acabamos de fazer, $\inf \frac{d\omega}{ds} = 0$. Mas isto é um absurdo porque $\inf \frac{d\omega}{ds} \leq \frac{d\omega}{ds}$ e $\frac{d\omega(s_1)}{ds} \leq \frac{d\omega(s_2)}{ds} < 0$, $s_1, s_2 \in (-\infty, +\infty)$ com $s_1 < s_2$. Consequentemente, concluímos que $\omega(s)$ é constante. Isto prova a Proposição 1.

$\square$

Demonstração do Teorema 3.1: Vamos mostrar que $r > 1 - \frac{2}{n}$. De fato, se $r \leq 1 - \frac{2}{n}$, pelo Lema 4, $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função monótona crescente de s, e pela Proposição 1 temos que ω é constante e, com isso, λ e, consequentemente, μ são constantes. De um resultado clássico devido a E. Cartan [3], obtemos que M é isométrica a $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$ para alguma constante $0 < c < 1$, o que implica que $r > 1 - \frac{2}{n}$, contradizendo nossa hipótese. Consequentemente, $r > 1 - \frac{2}{n}$. Se $r \neq \frac{n-2}{n-1}$ e $S \geq C(n,r)$ são satisfeitos, então para o caso em que $r \geq 1$ $(r - 1 \geq 0)$ temos pelo Lema 3, $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 \geq \frac{2r}{n-2}$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\omega}{ds^2} &= \omega\left(\frac{n-2}{2}\omega^{-n} - r\right) \\
&\geq \omega\left(\frac{n-2}{2}\frac{2r}{n-2} - r\right) = 0.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $1 - \frac{2}{n} < r < 1$ vemos, novamente pelo Lema 3, que

1. $\omega^{-n} \geq \frac{2r}{n-2}$ e $\lambda^2 > 1 - r$. Neste caso $\frac{d^2\omega}{ds^2} \geq 0$;

2. $\omega^{-n} \leq \frac{2r}{n-2}$ e $\lambda^2 < 1 - r$. Aqui obtemos que $\frac{d^2\omega}{ds^2} \leq 0$.

Consequentemente, ou $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função crescente de s ou $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função decrescente de s, isto é, $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função monótona de s. Desta forma, a Proposição 1 fornece que ω bem como λ devem ser constantes (consequentemente μ também é constante). Do resultado de E. Cartan [3], já citado, concluímos que M é isométrica a $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-c^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(c)$.

□

Demonstração do Teorema 3.3:

1. Já que $r = \frac{n-2}{n-1}$ temos

$$\begin{aligned}
S &= (n-1)\lambda^2 + \mu^2 \\
&= (n-1)\lambda^2 + \left(\frac{n(r-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda\right)^2 \\
&= \frac{n^2}{4}\left(\lambda - \frac{1}{(n-1)\lambda}\right)^2 + n \\
&\geq n.
\end{aligned}$$

Ou seja, $S - n = \dfrac{n^2}{4}(\lambda - \dfrac{1}{(n-1)\lambda})^2$. Consequentemente $S = n$ em algum ponto $p \in M$ se, e somente se, $\lambda^2 = \frac{1}{n-1}$.

Por outro lado, se $S = n$, temos da equação de Gauss (2.11) que

$$\begin{aligned} n^2H^2 - n &= n(n-1)\left(\frac{n-2}{n-1} - 1\right) \\ \Rightarrow H &= 0 \end{aligned}$$

em p. Assim, se $S = n$ em M, então M é uma hipersuperfície mínima. Do resultado clássico obtido inedependentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi [9] e Lawson [13], sabemos que M é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$.

2. Suponha que tais hipersuperfícies existam. Já que $r = \frac{n-2}{n-1} > 1 - \frac{2}{n}$ e $S > C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$, então raciocinando como na prova do Teorema 3.1 temos que $S > C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$ se, e somente se, uma das seguintes condições ocorre (pelo Lema 3)

   (a) $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 > \frac{2r}{n-2}$ e $\lambda^2 > 1 - r$;

   (b) $\omega^{-n} = \lambda^2 - r + 1 < \frac{2r}{n-2}$ e $\lambda^2 < 1 - r$

   e $S = C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$ se, e somente se, $\lambda^2 = 1 - r$ (da parte 1, $S = n \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n+2}{n-1} = \frac{n-1-(n-2)}{n-1} = 1 - \frac{n-2}{n-1} = 1 - r$). Uma vez que $S > C(n, \frac{n-2}{n-1})$ e λ^2 é uma função contínua de s, temos que $\lambda^2 > 1 - r$ (e $\frac{d^2\omega}{ds^2} > 0$) ou $\lambda^2 < 1 - r$ (e $\frac{d^2\omega}{ds^2} < 0$) ocorre sempre, donde $\lambda^2 \neq 1 - r$. Consequentemente, concluímos que ou $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função crescente de s ou $\frac{d\omega}{ds}$ é uma função decrescente de s (se ω é não constante). Consequentemente, concluímos da Proposição 1 que $\omega(s)$

é constante. Da equação (2.24) temos que

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{n-2}{2}\frac{1}{\omega^n} - r\right) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{n-2}{2}(\lambda^2 - r + 1) - r &= 0 \\
\Rightarrow \lambda^2 - r + 1 &= r\frac{2}{n-2} \\
\Rightarrow \lambda^2 + \frac{1}{n-1} &= \frac{n-2}{n-1}\frac{2}{n-2} \\
\Rightarrow \lambda^2 + \frac{1}{n-1} &= \frac{2}{n-1} \\
\Rightarrow \lambda^2 &= \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $S = C(n, \frac{n-2}{n-1}) = n$ o que é um absurdo. Assim, a parte 2 está provada.

Consequentemente, o Teorema 3.3 está provado.

□

Do Teorema 3.3 (1), temos o seguinte:

Teorema 3.4 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional completa com curvatura escalar constante $n(n-1)r$ ($r = \frac{n-2}{n-1}$) em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se $S \leq C(n, \frac{n-2}{n-1})$, então M é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$.*

Demonstração: Já que $r = \frac{n-2}{n-1}$ temos pelo Teorema 3.3 (1) que $S \geq n$. Por hipótese $S \leq n$. Logo $S = n$ em M e, novamente pelo Teorema 3.3 (1), vem que M é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$.

□

REFERÊNCIAS

[1] CARMO, M. do, *Geometria riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[2] CARMO, M. do, *O método do referencial móvel*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[3] CARTAN, E. Familles de surfaces isoparametriques dans les espaces a courvure constante. *Annali di Mat.*, v. 17, p. 177-191, 1938.

[4] CHENG, Q.M., Hypersufaces in a unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ with constant scalar curvature. *London Math Soc.*, v. 2, n. 64, p. 755-768, 2001.

[5] CHENG, Q.M., The classification of complete hypersurfaces with constant mean curvature of space form of dimension 4. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, v. 47, p. 79-102, 1993.

[6] CHENG, Q.M., The rigidity of Clifford torus $\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{(n-1)}{n}})$, *Comment. Math. Helvetici*, v. 71, p. 60-69, 1996.

[7] CHENG, Q.M. and NAGAKAWA, H. Totally umbilical hypersurfaces. *Hiroshima Math. J.*, v. 20, p. 1-10, 1990.

[8] CHENG, S.Y.; YAU, S.T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, v. 225, p. 195-204, 1977.

[9] CHERN, S.S.; CARMO, M. do; KOBAYASHI, S. *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant lenght, Functional analysis and related fields*. p. 59-75, 1970

[10] DAJCZER, M. *Submanifolds and isometric immersions*. Houston, Texas: Publish or Perish, c/990.

[11] LAFONTAINE, J. Conformal geometry from Riemannian viewpoints. In: KULKARNI, R.S.; PINKALL, U. (eds.). *Conformal geometry.* Braunschweig: F. vieweg, 1988. p. 65-92 (Aspects of Mathematics, v. E12).

[12] LANCASTER, G. Canonical metrics for certain conformally euclidean spaces of dimensions three and codimension one. *Duke Math. J.*, v. 40, p. 1-8, 1973.

[13] LAWSON, H.B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math.*, v. 89, p. 187-197, 1969.

[14] LEE, J.M., *Introduction to smooth manifolds.* New York: Springer, 1950.

[15] LI, H., Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms, *Math. Ann.*, v. 305, p. 665-672, 1996.

[16] ALÍAS, Luis J.; BRASIL JR, Aldir; COLARES, A. Gervasio. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 46, p. 465-488, 2003.

[17] NOMIZU, K., Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symetric matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 1, p. 159-162, 1973.

[18] OTSUKI, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. *Amer. J. Math.*, v. 92, p. 145-173, 1970.

[19] PINKALL, U. Compact conformally flat hypersurfaces, in Conformal Geometry In: KULKARNI, R.S.; PINKALL, U. (eds.). *Conformal geometry.* Braunschweig: F. vieweg, 1988. p. 217-236 (Aspects of Mathematics.).

[20] SUYAMA, Y., Explicit representation of compact conformally flat hypersurfaces, *Tohoku Math. J.*, v. 50, p. 179-196, 1988.

[21] WESTENHOLZ, C. Von. *Differential forms in mathematical physics.* New York: North-Holland Publishing Company, 1978.