

José Euclides Gomes da Silva

Brane resolution em conifold com torção

Fortaleza

14 de Julho de 2010

José Euclides Gomes da Silva

Brane resolution em conifold com torção

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza

14 de Julho de 2010

Silva, Euclides

Brane resolution em conifold com torção / Euclides Silva - 2010

120.p

1. Teoria quântica de Campos 2. Resolução de branas 3. Teoria BF.

I. Título.

CDU 530.143

José Euclides Gomes da Silva

Brane resolution em conifold com torção

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovado em 14 de Julho de 2010

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Universidade estadual paulista - UNESP

RESUMO

Estudaremos uma técnica de suavização de uma singularidade nua em um *conifold* chamada *Brane Resolution*. Por um lado, a singularidade aparece como uma solução de brana de supergravidade contendo apenas termos do setor de Neveu-Schwarz. Por outro lado, podemos ver a singularidade do conifold como oriunda de um ponto fixo do grupo de simetria discreto, responsável pela geração do conifold.

O conifold tem bastante importância no processo de compactificação em teorias de cordas, em particular nas chamadas transições cônicas. De fato, existem diferentes tipos de espaços de Calabi-Yau que podem ser variedades internas. Apesar de tais espaços terem características topológicas distintas, pode-se transformar um espaço no outro através das transições cônicas. Isso se faz através da geração de singularidades no espaço de Calabi-Yau que surpreendentemente não gera problemas quânticos.

A técnica consiste em acrescentar um termo topológico do setor de Ramond-Ramond à ação. A inclusão de um termo de Chern-Simons, responsável pela interação entre os campos do setor de *Ramond-Ramond* (C_n), gera um fluxo dos campos $H_3 = dB_2$ e $F_3 = dC_2$ sobre a singularidade do *conifold*. A partir da equação de movimento do campo pode-se, dada uma escolha adequada para a configuração da métrica e dos campos, encontrar os fatores de *warp* que são responsáveis pela retirada da singularidade. O método também pode ser entendido topologicamente como a incisão de uma esfera no lugar da vizinhança do nodo do cone.

O estudo do comportamento de campos sobre o *conifold* é feito no intuito de estender a correspondência AdS-CFT: originalmente a correspondência foi proposta para o espaço $AdS_5 \times S^5$ mas logo surgiram extensões utilizando outras variedades como $M_4 \times C_6$. Próximo a singularidade o espaço pode ser escrito como $AdS_5 \times X^5$, onde X^5 é o espaço base do conifold. Geralmente toma-se o espaço base como um espaço homogêneo de *Einstein Ricci-plana* onde $X^5 = SU(3)/SU(2) \times SU(2)$. Contudo, para manter a invariância conforme da teoria de campos dual é necessário suavizar o *conifold* através de incisões do tipo *Eguchi-Hanson*, que podem ser de dois tipos: por uma 3-esfera S^3 é chamada *deformation* ou por uma 2-esfera S^2 é chamada *resolution*.

Recentemente, foram propostas resoluções do *conifold* em um cenário de teoria heterótica

dotada de torção. Tal efeito é relevante em teorias onde soluções do tipo buraco negro existem na variedade interna, como as *black branes* e *spinning branes*; esta última leva em conta o momento angular do buraco negro - *spin* - e é uma solução do tipo *Kerr*. A partir da transgressão da *identidade de Bianchi* para a 3-forma intensidade de campo de *Kalb-Ramond*, oriundo de um termo de *Gauss-Bonnet* e de instanton, podemos introduzir uma torção e com isso, um novo termo na conexão não dependente da métrica. Estudaremos os efeitos de tais termos sobre a suavização de um *conifold* comparando com o caso sem torção. Além disso, buscamos estudar o efeito que um outro termo topológico tem sobre a resolução de branas: o termo BF. Tal termo surgiu como uma extensão do termo de Chern-Simons para quatro dimensões tendo como função gerar massa topologicamente para campos de calibre. Nesse trabalho, iremos modificar a ação da teoria heterótica de modo a obtermos o termo BF como um dos termos de anomalia e logo responsável pelo fluxo que retira a singularidade. Encontramos para um ansatz bastante conhecido uma configuração onde o fluxo gerado pelo termo BF é o responsável pela desingularização do espaço.

Palavras-chaves: Resolução de branas, *Conifold*, extensão da correspondência AdS-CFT, branas com torção.

ABSTRACT

In this work we shall study a technique for smooth out a naked singularity in the conical manifold called brane resolution. This singularity arise as a fixed point of a discrete group of symmetry in the compactification. We put a stack of N D-3 branes close to a singularity; the fields that live in the brane create a flux over the conifold resolving it. From Chern-Simons supergravity action and the subtle choice of the kind of metric, we can find the warp factors without problems, because it has a sphere instead of the singularity.

The study of behavior of fields in the conifold is done for to enlarge the gauge-gravity correspondence: in beggining, it was proposted for a bulk of kind $AdS_5 \times S^5$ but after it has arised extensions taking instead of S^5 , a Einstein ricci-flat manifold X^5 , known Sasaki-Einstein manifolds and the conifold is a noncompact representant. But for keep the conformal invariance we need to smooth out the conifold, using two techniques: in the deformation, we incise the tip of cone and put a S^3 and in the resolution we change it by a S^2 .

Recently, it was proposted conifold resolution in the heterotic supergravity with torsion. Such efect is relevant in theories using black-holes solutions in higher dimensions like black-branes and spinning-branes. This last brane take in account the spin of black-hole. From the transgression of Bianchi identity for Kalb-Ramond field strengh, that comes from a topological term of instanton and Gauss-Bonnet, we can introduct torsion and then, a new term in the conexion, independent of metric. We shall study the effects of such terms in the resolution of conifold comparing with torsionless case.

Keywords: *Conifold*, extension of AdS-CFT correspondence, spinning branes, fractional branes, torsion branes, RG flow, Supergravity, M theory; .

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, José Maria Ferreira da Silva e Elma Cristina Gomes da Silva que me fizeram o homem que hoje sou, com muito amor, amparo e exemplos.

Aos meus avós Almiros Feitosa Gomes e Otávio Ramos de Abreu pelo seu amor.

Aos meus tios-padrinhos Rita Célia Feitosa Cavalcante e Alessandro Sá Cavalcante pelo amor e apoio.

Ao Professor Dr. Carlos Alberto Santos Almeida por acreditar em meus sonhos, capacidades e por todos os conhecimentos, conselhos e paciência.

À todos do Lassco: Victor, Diego, Hudson, Alex, Ivan, Luciana,...= ∞ , por todos os momentos de amizade e aprendizados.

Aos meus amigos pela força, compreensão, carinho e apoio.

Aos meus colegas pelas discussões, estudos, e conselhos.

Sumário

1 Supergravidade	16
1.1 Supergravidade em D=10	16
1.1.1 Os campos e os tipos de supergravidade	16
1.1.2 Ação para a teoria do tipo II-B	18
1.1.3 Ação da teoria do tipo II-A	21
1.1.4 Ação da teoria heterótica	22
1.2 Teoria M	22
1.3 Branas e cargas	23
1.4 Anomalias e o termo de Chern-Simons	24
1.4.1 Classes características	26
1.4.2 Branas dentro de branas	32
1.4.3 Anomalia na teoria heterótica	33
1.5 Teoria BF	34
1.6 Curvatura no termo de Chern-Simons	35
2 O Conifold	39
2.1 Espaços de <i>Calabi-Yau</i>	39
2.1.1 Conservação de supersimetria e espinores covariantemente constantes	40
2.1.2 Holonomia e conservação da supersimetria	42
2.1.3 A forma fundamental	43
2.1.4 Torção de \mathcal{M}_6	45
2.1.5 Curvatura de \mathcal{M}_6	48
2.1.6 Equações de <i>Cartan</i>	49

2.1.7	(3,0)-Forma holomórfica	50
2.1.8	Equações de <i>Strominger</i>	51
2.1.9	O espaço modular - Simetrias entre espaços de <i>Calabi-Yau</i> -	52
2.1.10	Subvariedades de <i>Calabi-Yau</i> do tipo $\mathbb{C}P^n$ geradas por polinômios	55
2.2	O <i>conifold</i>	56
2.3	Métrica do <i>conifold</i>	59
2.4	Branas sobre a singularidade do <i>conifold</i> e uma extensão da correspondência calibre-gravidade;	
2.4.1	O <i>conifold</i> e os modelos de mundo-brana	65
3	Suavizações do <i>conifold</i>	66
3.1	<i>Deformation</i>	67
3.2	<i>Resolution</i>	68
3.2.1	Métrica do <i>resolved conifold</i>	69
3.2.2	Configurações do potencial de Kähler	77
4	Brane-Deformation e Brane-Resolution	79
4.1	Fluxos sobre o <i>conifold</i> na teoria II-B	79
4.1.1	Adição dos termos de curvatura	82
4.1.2	Brane resolution em teoria M	83
4.1.3	Equações do movimento	83
4.1.4	Fluxos sobre a 8-variedade	84
4.2	Brane resolution no cenário heterótico	88
4.2.1	Influência do termo BF	92
5	Conifold com torção	95
5.1	Branas girantes	96
5.2	Variedades com torção	97
5.3	Métrica	99

5.3.1	Conexão	101
5.3.2	<i>Vielbeins</i>	102
5.3.3	Forma fundamental	103
5.3.4	Forma holomórfica	106
5.3.5	Campos	108
6	Conclusões	111
7	Perspectivas	113
	Referências Bibliográficas	115

Introdução

Nos últimos anos houve bastante estudos em teorias de calibre supersimétricas e supergravidade. De fato, como o modelo padrão trata as interações como provenientes de campos de calibre supersimétricos, onde esta última condição é assumida para evitar-se problemas relativos a renormalização, é de se esperar que extensões supersimétricas possam incorporar a gravitação e assim, obtermos uma teoria quântica da gravidade. Hoje sabemos que ambas as teorias surgem como descrições complementares no limite de baixas energias de uma teoria envolvendo branas em teoria M e em cordas. Branas, ou p-branas, são variedades $(p+1)$ -dimensionais, com uma coordenada do tipo tempo, e um grupo de simetria $SO(p,1)$ que são soluções das equações que aparecem em teoria de cordas. As Dp-branas são fontes para os campos de calibre no setor de Ramond-Ramond e sua origem é topológica, como um sóliton, como mostrado por Paul Townsend e Joseph Polchinski. Se a brana tiver supersimetria e se sua energia tiver um limite mínimo relacionado às cargas topológicas tal brana é chamada do tipo BPS [1],[2].

A relação entre campos de calibre e gravitação é fundamental ainda no sentido de prever propriedades de partículas elementares do modelo padrão e de suas possíveis extensões a partir da teoria de supercordas. Nessa linha de pesquisa um resultado bastante interessante é a correspondência AdS-CFT, conjectura que associa campos em teoria M e supercordas definidos no interior da variedade $\mathcal{M} = AdS_p \times S^k$, onde S^k é uma esfera de k-dimensões, com um $(p-1)$ campo conforme específico na fronteira de AdS_p . Inicialmente *Maldacena* sugeriu que uma teoria de cordas em $AdS_5 \times S^5$ é dual a uma teoria de Yang-Mills supersimétrica com $\mathcal{N} = 4$ no bordo de AdS_5 que é uma variedade de quatro dimensões [3]. Aqui *dual* significa que as funções de correlação das duas teorias são iguais devido o grupo de simetria de AdS_5 , $SO(2,4)$ ser o mesmo que o grupo conforme da teoria de Yang-Mills. Tal dualidade permite obter informações de regimes não-perturbativos de teorias de Yang-Mills, como o confinamento em cromodinâmica, a partir do correspondente perturbativo em teoria de cordas.

Inicialmente, utilizou-se D3-branas imersas em um espaço com curvatura nula, obtendo-se campos supersimétricos com $\mathcal{N} = 4$. Generalizações, realizadas no sentido de utilizar outras variedades de *Calabi-Yau* compactas diferentes de S^5 , utilizaram *orbifolds*, espaços gerados pela ação de um grupo de simetria sobre uma variedade inicial, calculando-se próximas às

singularidades destes [4],[5], [6]. O resultado foi a quebra de determinadas supersimetrias e extensão da correspondência para $AdS_5 \times X^5$, onde X^5 é uma variedade de Einstein. A introdução de branas quebra a simetria de Lorentz do *bulk* e reduz a supersimetria pois a teoria de cordas do tipo II e I, onde tais objetos aparecem tem supersimetria respectivamente, $\mathcal{N} = 2$ e $\mathcal{N} = 1$. Estudando essa dualidade próxima a singularidades de um tipo especial de *orbifold* que é uma subvariedade do grupo CP^3 chamado *conifold* [5],[8] mesmo na ausência de uma 3-brana transversal descobriu-se que a singularidade do *conifold* é dual a um sistema de branas de Neveu-Schwarz se intercectando sobre um volume mundo $(3 + 1)$ dimensional.

O *conifold* é uma espaço cônico de seis dimensões, compacto em cinco e não-compacto em uma, chamada direção radial[1],[2],[9],[11]. A componente compacta é chamada *espaço-base* e geralmente é tomada como uma variedade de *Calabi-Yau* de Einstein. Espaços com essas características são chamados espaços de *Sasaki-Einstein*. Um *espaço-base* muito utilizado na literatura é o espaço-quociente $T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)$, que tem grupo de isometria $SU(2) \times SU(2)$. Além de ser um espaço homogêneo, $T^{1,1}$ também possui a propriedade de ter um espinor covariantemente constante, característica esta que o torna uma variedade de *Kähler*. A singularidade do *conifold* têm propriedades interessantes, devido ser um ponto fixo da aplicação quociente \mathcal{M}/\mathcal{G} , onde \mathcal{G} é o grupo de simetria sobre a variedade que gera o *orbifold*. Uma dessas propriedades é que, colocando-se uma D3-brana próxima à singularidade pode-se deduzir uma teoria $\mathcal{N} = 1$ supersimétrica de calibre na D3-brana a partir das propriedades do *conifold*.

Outra característica importante do *conifold* é que se pode gerar outros tipos de espaços de *Calabi-Yau* a partir de um processo chamado *conifold transitions*[1],[2]. Tal processo consiste em comprimir um ciclo no interior do *conifold* até gerar um ponto, chamado *conifold singularity*. Em seguida, expande-se outros ciclos. O resultado final é uma variedade que não é homotópica a original e portanto, não tem o mesmo número de *Hodge*, que determina o número de modos não-massivos. Apesar de tal processo não ser contínuo e logo invariantes topológicos não são conservados, não há divergências ou anomalias na função geradora, ou seja, na quantização da teoria. Isso se deve às cargas topológicas das branas que envolvem a singularidade, formando uma espécie de escudo e retirando-a no nível quântico. Logo, pode-se gerar muitos, e talvez todos, os espaços como uma única rede conexa a partir do *conifold*. Nos pontos de conexão o espaço degenera. Como nem todos os espaços de *Calabi-Yau* têm singularidades faz-se ainda mais importante os processos de suavização da singularidade.

Por servir de gerador para outras variedades de *Calabi-Yau*, define-se um espaço modular

para o *conifold* e sobre esse espaço define-se uma métrica e um grupo de isometria que deve preservar ainda a condição do *conifold* ser uma variedade Ricci-plana [1],[2]. Desta última condição surge uma equação diferencial para a variação da métrica do *conifold* em função da curvatura de *Ricci*, chamada equação de Lichnerowitz [1]. Tal equação surge quando fazemos uma perturbação da métrica de tal forma que a métrica resultante ainda seja uma solução de vácuo. O campo de *Kalb-Ramond* tem um papel fundamental sobre a classificação dos possíveis espaços de *Calabi-Yau* determinando os números de *Betti* do espaço modular. Tal espaço, assim como o *conifold*, é uma variedade de *Kähler*, onde pode-se definir um superpotencial de *Kähler* de onde a métrica provêm.

Outro motivo para se analisar dualidades em *conifold* é um resultado envolvendo os campos de Kalb-Ramond e o dÍlaton. De fato, a equação de Killing, que vêm da condição de supersimetria da teoria e assegura no mínimo um espinor covariantemente constante, condição esta necessária para que a variedade interna seja de *Kähler*, impõe certas restrições sobre que espaços são compatíveis. Em particular, se tal espaço for compacto e o dÍlaton for globalmente definido então os únicos espaços que preservam no mínimo 4 supersimetrias são espaços de Calabi-Yau cujo campo de Kalb-Ramond é nulo e o dÍlaton é constante [1]. Para termos soluções com dÍlaton não constante e $H_3 \neq 0$ devemos então buscar espaços de Calabi-Yau não-compactos, cujo *conifold* é um bom representante. Se o campo de *Kalb-Ramond* for não-nulo temos necessariamente um *dÍlaton* não constante. Isso acarreta duas propriedades interessantes para a variedade interna: a torção oriunda do campo H_3 e constantes de acoplamento variáveis, pois $g_s = e^{2\phi}$. Tais campos tem implicações importantes em cosmologia: a presença de um dÍlaton não constante é conjecturada por muitos como fonte da energia escura [12],[13], enquanto que um universo dotado de torção pode ser livre de uma singularidade inicial - *big bang*-[14].

Por ser uma variedade não compacta em uma dimensão, o *conifold* serve de pano de fundo para modelos do tipo mundo-brana como os cenários do tipo *Randall-Sundrum*. No modelo RS1 [15], duas branas paralelas interagem gravitacionalmente sendo a gravidade localizada em uma das branas. Utilizando o *conifold* como espaço-base, pode-se deduzir a distância entre as branas através de fluxos dos campos H_3, F_3 sobre ciclos internos do *conifold*[1]. Há também relações com os modelos do tipo RS2 [16] onde há apenas uma brana com um fator de *warp* que decai exponencialmente com o raio da variedade interna; de fato, buscando *conifolds* com uma métrica conformemente Ricci-plana, pode-se encontrar soluções desse tipo. Ainda nos modelos de mundo brana tem-se estudado cenários com dÍlaton e Kalb-Ramond não nulos sendo tais campos necessários no processo de localização de outros campos. No cenário do chamado

cigar-like universe[17], estudam-se soluções do tipo corda numa variedade transversal de duas dimensões $\mathbb{C}P^1$ que pode ser considerado como uma subvariedade do *conifold*.

Apesar das atraentes propriedades da singularidade do *conifold*, a relatividade geral não é bem comportada em singularidades, principalmente nas desprovidas de um horizonte de eventos, por isso chamadas *nuas*, como é o caso da origem do *conifold*. Klebanov e Strassler [7] e depois Klebanov e Murugan [8] estudaram o efeito que a singularidade gerava em uma teoria de campos conforme e mostraram, estudando o *fluxo do grupo de renormalização*, que a simetria conforme era quebrada a não ser que se suavizasse a região em torno da singularidade. Surgiu daí a idéia de suavizar o *conifold*. Anos antes, Candelas e de la Ossa[9] haviam estudado duas técnicas, ambas com nomes sugestivos: uma, chamada *deformation*, se faz ao substituir uma região em torno da singularidade por uma S^3 , através da deformação do polinômio que define o *conifold*, enquanto a outra, chamada *resolution*, consiste na mudança da vizinhança singular por S^2 , sem alterar o polinômio mas simplesmente reinterpretando-o e introduzindo um parâmetro de resolução. Tais métodos de suavização através da incisão de uma bola S^n/\mathbb{Z}_2 , pois identificamos dois pontos antípodas, em torno das singularidades são chamados de *Eguchi-Hanson* pois utiliza-se espaços com mesmo nome [1]. Espaços de *Eguchi-Hanson* são variedades que tem tensor de Riemann ou a 2-forma de Ricci auto-duais. Por esse motivo, tais espaços são soluções da equação de Einstein em quatro dimensões que por serem auto-duais são chamados instantons gravitacionais[1], [18]. Tais espaços são ainda exemplos de espaços mais amplos usados para suavizar-se variedades, chamados espaços de *Stenzel*, definidos sobre o fibrado cotangente de S^{n+1} com grupo de isometria $SO(n+2)$ [19],[20].

Para suavizar o *conifold* usando tais técnicas, Klebanov e Strassler introduziram D3-branas em teoria de cordas do tipo II-B. Tais branas são sub-variedades do espaço de base $\mathcal{T}^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)$. O termo de *Chern-Simons*, que aparece naturalmente nas ações de baixas energias de supergravidade oriundas de teoria de cordas e M e que estabelece a interação entre os campos de calibre $F_p = dC_{p-1}$ de tais branas, sendo ainda responsável pelo cancelamento da anomalia de calibre de tais campos, introduz uma *transgressão* à identidade de *Bianchi*, na forma:

$$dF_p = F_q \wedge F_r \quad (1)$$

onde $q + r = p + 1$. Tal equação descreve um fluxo que, para uma escolha devida da métrica, ou seja, da configuração do *conifold*, suaviza a região em torno do nodo. Klebanov e Strassler

estudaram o fluxo do campo $F_5 = \star F_5$ na teoria II-B que é da forma:

$$dF_5 = \tilde{F}_3 \wedge \tilde{\tilde{F}}_3 \quad (2)$$

sobre um *conifold* com métrica da forma:

$$ds_{10}^2 = H(r)^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 ds_{T^{1,1}}^2) \quad (3)$$

O campo $\tilde{\tilde{F}}_3 = F_3 + iH_3$ é harmônico, $d\tilde{\tilde{F}}_3 = 0$, e tem seu fluxo calculado sobre D3-branas geradas tomando uma D5-brana e colapsando um 2-ciclo interno. Tais branas são chamadas *Branas fracionárias*. A escolha de tomarmos uma D-3 brana é justificada pelo fato de que tal defeito topológico é o que gera um campo de *Ramond-Ramond* C_4 e este tem uma 5-forma intencional de campo F_5 essencial em nossa análise.

Pela equação de *Einstein* podemos relacionar o fator de *warp* com F_3 , pela relação:

$$\Delta H(r) = -\frac{m^2}{12} |F_3|^2 \quad (4)$$

onde Δ é o laplaciano na variedade interna. Logo, encontrando uma 3-forma harmônica adequada podemos suavizar o *conifold*. *Cvetič et al* [21] mostraram que se tal forma for de quadrado integrável L^2 a suavização é possível [19],[20].

Uma propriedade interessante comum aos três tipos de solução (singular, deformada e resolvida) é que elas podem ser obtidas a partir de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem oriundas de uma ação unidimensional no regime BPS, admitindo-se um superpotencial no espaço modular [1],[11], [10]. De fato, o potencial de *Kähler* do *conifold* pode ser relacionado com um superpotencial e este, aos fluxos de F_3 e de H_3 sobre uma D3-brana fracionária [1].

Todos os resultados acima foram obtidos tomando um *conifold* sem **torção**, ou seja, fazendo $dH_3 = 0$. *Cvetič et al* [21] estudaram a resolução do *conifold* utilizando como cenário a teoria heterótica. Nessa teoria não há campos de *Ramond-Ramond* e logo, o papel central entre os campos de calibre é dado pelo campo de *Kalb-Ramond* $\mathcal{H}_3 = dB_2 + tr(A \wedge F - \frac{1}{3}A^3)$. Note que a identidade de *Bianchi* fica:

$$d\mathcal{H}_3 = tr(F_2 \wedge F_2) \quad (5)$$

⁰*fractional branes* na literatura inglesa.

O lado direito desta equação é a densidade de carga de um defeito topológico do tipo *instanton*. Logo, podemos dizer que tal defeito topológico, vivendo em um 4-ciclo na variedade interna, gera um fluxo cuja carga topológica é a responsável pela transgressão da relação de *Bianchi*. Escolhendo uma solução gravitacional de uma D5-brana temos, [21],[18]:

$$ds^2 = H(r)^{-\frac{1}{4}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + H(r)^{\frac{3}{4}} ds_4^2 \quad (6)$$

onde o 4-ciclo estudado pelos autores é um espaço de *Eguchi-Hanson*, que é uma solução auto-dual e *Ricci-plana* conhecida das equações de *Einstein* gerada por um *instanton*, e

$$F_2 = mL_2 \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_3 = dH^{-1} \wedge dx^6 \quad (8)$$

então

$$\Delta H(r) = -\frac{m^2}{4} L^2 \quad (9)$$

Assim, escolhendo uma configuração na qual o 4-ciclo seja um espaço de *Kähler*, os autores obtiveram a resolução da variedade cônica.

Recentemente, Carlevaro e Isráel [22] estudaram o processo de resolução do *conifold* no cenário da teoria heterótica. Tal transgressão se deve a introdução de termos topológicos sobre branas internas no *conifold* como o termo de *Gauss-Bonnet* e o de *instanton*:

$$d\mathcal{H}_3 = tr(\mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2) - tr(F_2 \wedge F_2) \quad (10)$$

Ao se introduzir torção, a variedade interna deixa de ser um espaço de *Calabi-Yau*, não sendo nem mesmo uma variedade de *Kähler*. Portanto devemos procurar um outro método que não o largamente desenvolvido por *Cvetič et al* [21] que consiste em encontrar uma forma harmônica sobre a brana em questão.

Os termos de *Gauss-Bonnet* e de *instanton* podem ser obtidos de uma ação geral de *Chern-Simons* em teoria de cordas do tipo II que carrega informação sobre a anomalia que o volume mundo da brana tem, anomalias de calibre e de curvatura [1],[2], [33]. Se definirmos uma nova 2-forma de calibre

$$\mathcal{F}_2 = B_2 + kF_2 \quad (11)$$

onde $k = 2\pi\alpha'$. Expandindo o termo de anomalia até segunda ordem, obtemos além dos termos citados, um termo do tipo $\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{F}_2$, $\mathbf{H}_3 \wedge \mathbf{A}_1$ e $\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{B}_2$. A transgressão fica então:

$$d\mathcal{H}_3 = tr(\mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2) - tr(k^2 F_2 \wedge F_2 + k(\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{H}_3 \wedge \mathbf{A}_1) + \mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{B}_2) \quad (12)$$

Note que ao redefinirmos a curvatura de calibre, introduzimos um parâmetro k que depende do comprimento característico da corda. Assim, podemos interpretar esse procedimento como uma adição de termos de anomalia dependendo da escala: para k^2 , ou seja, para comprimentos bem maiores que o comprimento da corda, $L \gg l_s$ teremos apenas o termo de instanton como termo relevante. Para k , ou seja, para comprimentos da ordem do comprimento da corda, $L \sim l_s$ os dois termos $B_2 \wedge F_2 + H_3 \wedge A_1$ passam a dominar. Note que ambos pertencem a mesma classe de *cohomologia* pois $d(B_2 \wedge A_1) = H_3 \wedge A_1 + B_2 \wedge F_2$ e referem-se a um acoplamento do tipo $B_2 \wedge A_1$ entre os potenciais de calibre de uma partícula e uma corda. Já o termo BB se refere a uma potência zero de k , ou seja, independe da escala. Tal termo aparece na teoria de cordas do tipo II-A massiva. Além disso, *Baez*[41] propôs que um termo do tipo $\lambda B \wedge B$ seria o análogo topológico de um termo de constante cosmológica.

O termo BF é o análogo em quatro dimensões do termo de *Chern-Simons* $\mathcal{L}_3^{CS} = A_1 \wedge F_2$ em três dimensões, este último conhecido por gerar uma teoria de calibre massiva sem utilizar o mecanismo de *Higgs*. Tal analogia pode ser deduzida das características de *Chern*: de fato, a lagrangeana de *Chern-Simons* é uma 3-forma tal que sua derivada $d(A_1 \wedge F_2) = F_2 \wedge F_2$, a segunda característica de *Chern*, cuja integral em uma 4-variedade fornece um invariante topológico. Assim, para a característica de *Chern* $tr(H_3 \wedge F_2)$ em cinco dimensões, teremos a lagrangeana $\mathcal{L}_4^{BF} = B_2 \wedge F_2$. Ao contrário das características de *Chern* definidas em variedades de dimensão par, onde tomamos polinômios simétricos da forma de curvatura de calibre F , nesta última tomamos um produto entre a forma de torção e de curvatura. Já o último termo aparece em uma teoria do tipo II-A massiva e talvez seja o análogo de um termo de instanton para o campo de *Kalb-Ramond*. É possível relacionar campos da teoria II-B com campos da teoria heterótica através de dualidades T e teoria F [37], [36]. Contudo, vamos nos limitar a análise dos efeitos que tais termos têm sobre o *conifold* seguindo uma perspectiva heurística.

A organização dessa trabalho será a seguinte: no capítulo 1 vamos fazer um breve revisão das teorias de supergravidade ressaltando seus campos, equações e dando especial atenção ao termo de *Chern-Simons* geral, oriundo da teoria do índice de Atiyah-Singer. No final, destacaremos como o termo BF aparece na ação de *Chern-Simons* e qual o papel que termos de curvatura

alteram as equações de movimento dos campos.

No capítulo 2 estudaremos o *conifold* começando por suas características de conservação de supersimetria e geométricas como sendo uma variedade de *Calabi-Yau*. Após uma breve introdução aos conceitos que necessitaremos (curvatura, torção, 3-forma holomórfica, forma fundamental), bem como as equações que determinam a estrutura geométrica chamadas equações de *Strominger*, vamos analisar o espaço modular dos espaços de *Calabi-Yau*, onde o *conifold* é essencial devido às *transições cônicas*. Por fim, definiremos o *conifold* e estudaremos suas características geométricas.

No capítulo 3 discutiremos um pouco sobre os processos de suavização do *conifold*, destacando suas propriedades geométricas. No capítulo seguinte, trataremos da técnica de suavização por fluxos *-brane resolution-* em teoria II-B, teoria M e teoria heterótica. Nesse capítulo iremos nos basear no trabalho de *Cvetič et al* [21] onde reproduzimos a resolução de um *conifold* sobre o espaço Eguchi-Hanson utilizando um termo BF no lugar do termo de instanton FF .

No quinto e último capítulo estudaremos a resolução de *conifold* com torção no cenário heterótico, em uma abordagem mais ampla que a anterior. Iremos nos basear no artigo de *Carlevaro-Israel* onde os autores tomam um produto *warped* entre uma 3-brana e um cone sobre o espaço $T^{1,1}$. Como a variedade possui torção deve-se agora obter as soluções a partir das chamadas equações de *Strominger* que são as equações de movimento para os campos bem como condições sobre a forma fundamental $J_{1,1}$ e sobre a forma holomórfica $\Omega_{3,0}$ de forma a preservar a supersimetria. Analisaremos o trabalho acima relacionando-o com o caso abeliano sem torção.

1 Supergravidade

1.1 Supergravidade em D=10

No limite de baixas energias de uma teoria de supercordas, obtemos ações para supergravidade em dez dimensões. Nesse regime pode-se mais facilmente estudar soluções clássicas de campos e gravidade, com ou sem interação. Além disso, uma teoria de supergravidade é fundamental no intuito de unificar a relatividade geral com o modelo padrão porque estes últimos são descritos por teorias de calibre e usando o formalismo de referenciais móveis ou *vielbeins* podemos ver a gravitação como uma teoria de calibre do grupo de Lorentz.

1.1.1 Os campos e os tipos de supergravidade

As teorias de supergravidade são teorias de campos em um espaço-tempo curvo de dez ou onze dimensões, chamado genericamente *bulk*, onde se une o grupo de calibre dos campos com o grupo de *Poincaré* em um supergrupo de *Poincaré*. Assim, podemos definir o *bulk* da teoria de supergravidade como uma variedade semi-riemaniana \mathcal{M}_D , $D \in (10, 11)$. A utilização de supersimetria em gravitação surgiu como uma solução ao problema da não-renormabilidade gravitacional. Além disso, como tal teoria é essencial para o modelo-padrão, a inclusão de supersimetria é um componente básico para uma teoria unificadora.

Os campos bosônicos em teorias de supercordas podem ser divididos em duas classes: os do setor de *Neveu-Schwarz* e do setor de *Ramond-Ramond*. Vamos descrever tais campos, que são de natureza escalar, vetorial e n-tensorial, por seus respectivos duais, 0-formas, 1-formas, n-formas. O primeiro é formado por pelo dílaton ϕ , o grávitron g_{ab} e o potencial de *Kalb-Ramond* B_{ab} . Tais campos aparecem no espectro da corda bosônica e se acoplam diretamente à métrica da folha mundo. Já o setor de *Ramond-Ramond* é formado por campos de calibre C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 cujas cargas são de origem topológica e vivem nas D-branas, subvariedades de \mathcal{M}_{10} onde cordas abertas tem suas extremidades.

Existem cinco tipos diferentes de teorias de supercordas relacionadas por dualidades: a do tipo I possui supersimetria do tipo $\mathcal{N} = 1$ do espaço-tempo; a do tipo II possui supersimetria do

tipo $\mathcal{N} = 2$ e é dividida em dois tipos: a II-A que não possui espinores quirais e que a do tipo II-B os possui. Tal divisão mantém os mesmos campos para o setor *Neveu-Schwarz* mas separa os campos de calibre do setor de *Ramond-Ramond*: a tipo II-A possui os campos C_1, C_3, C_5, C_7 enquanto que a do tipo II-B possui C_0, C_2, C_4, C_6, C_8 . Os índices dos campos são a ordem das formas diferenciais ou tensores antisimétricos associados. Para qualquer desses campos podemos definir um campo de intensidade de campo como, em analogia como o eletromagnetismo, da forma:

$$F_{q+1} = dC_q \quad (1.1)$$

Em termos de coordenadas a forma intensidade de campo acima se escreve como:

$$F_{q+1} = \frac{1}{(q+1)!} F_{i_1, \dots, i_{q+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q+1}} \quad (1.2)$$

e como

$$dC_q = \frac{1}{q!} \partial_{i_1} (C_{i_2, \dots, i_{q+1}}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q+1}} \quad (1.3)$$

Logo,

$$F_{i_1, \dots, i_{q+1}} = \partial_{[j_1} C_{j_2, \dots, j_{q+1}]} \quad (1.4)$$

Assim, por exemplo, para o campo eletromagnético, cujo campo é vetorial, vamos tomar uma 1-forma A_a representando o 10-potencial vetor, cujo tensor intensidade de campo é dado por:

$$F_2 = dA_1 = \partial_a A_b dx^a \wedge dx^b \quad (1.5)$$

Logo,

$$F_{ab} = \partial_{[a} A_{b]} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (1.6)$$

Como se vê, a utilização do formalismo de formas diferenciais - álgebra exterior -, deixa os cálculos mais estéticos.

Outro campo que estudaremos bastante é o campo de *Kalb-Ramond* B_2 , que é uma espécie de potencial tensorial de calibre cujo tensor intensidade de campo H_3 é dado, como no caso eletromagnético, por:

$$H_3 = dB_2 \quad (1.7)$$

ou em coordenadas,

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} \quad (1.8)$$

Assim como A^B é o potencial vetor gerado por uma carga pontual, o campo B_{AB} é um potencial tensorial antisimétrico de segunda ordem gerado por um corda.

As duas últimas são chamadas *heteróticas* pois são o resultado da junção - *heterosis* - entre a teoria de cordas bosônica em $D = 26$ com a supercorda em $D = 10$. Tal teoria tem dois grupos possíveis de simetria: $E_8 \times E_8$ e $SO(32)$. Tais grupos são cotados como possíveis grupo de simetria de uma teoria unificada. Daremos um destaque especial a teoria heterótica nos capítulos posteriores devido ser mais fácil analisar torção nesse cenário.

Vamos agora expor os principais ingredientes que iremos utilizar das cinco teorias acima.

1.1.2 Ação para a teoria do tipo II-B

O setor bosônico da ação para tal modelo pode ser dividida em três partes:

$$S_{10}^{II-B} = S_{NS-NS} + S_{R-R} + S_{CS} \quad (1.9)$$

Setor de Neveu-Schwarz

No setor de Neveu-Schwarz temos o dÍlaton (ϕ), um termo de Einstein-Hilbert sem constante cosmológica e a intensidade de campo correspondente ao campo de Kalb-Ramond, $H_3 = dB_2$,

$$\begin{aligned} S_{NS/NS} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int e^{-2\phi} \left(R \wedge \star 1 - \frac{1}{2} \star d\phi \wedge d\phi - \frac{1}{2} \star H_3 \wedge H_3 \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int e^{-2\phi} \left(R - \frac{1}{2} |d\phi|^2 - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) \sqrt{-g} d^{10}x \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int e^{-2\phi} \left(R - \frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi - \frac{1}{2} H^{ABC} H_{ABC} \right) \sqrt{-g} d^{10}x \quad (1.10) \end{aligned}$$

onde

$$H^{ABC} H_{ABC} = g^{AE} g^{BF} g^{CG} \partial_{[E} B_{FG]} \partial_{[A} B_{BC]} \quad (1.11)$$

Acima utilizamos o operador estrela dual de *Hodge*, $\star : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{D-p}$, que leva uma p -forma em uma $(D-p)$ -forma de tal modo que possamos definir um produto interno entre formas diferenciais:

$$(\alpha, \beta) = \int_M \star \alpha \wedge \beta = \int_M \beta \wedge \star \alpha \quad (1.12)$$

e a partir desse produto interno o módulo das formas diferenciais.

Todos os campos nesse setor têm ação dependente da métrica do volume mundo formado pela evolução temporal da 9-brana.

Setor de Ramond-Ramond

Já no setor de Ramond-Ramond, temos os campos intensidade para os campos de calibre gerados pelas branas:

$$\begin{aligned} S_{RR/RR} &= -\frac{1}{4\kappa^2} \int (\star F_1 \wedge F_1 + \star F_3 \wedge F_3 + \star F_5 \wedge F_5) \\ &= -\frac{1}{4\kappa^2} \int (|F_1|^2 + |F_3|^2 + |F_5|^2) \sqrt{-g} dx^{10} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Note que na ação acima apenas temos campos de calibre com índice ímpar; tal é uma característica da teoria de cordas do tipo II-B.

O primeiro campo gera a 1-forma intensidade de campo:

$$F_1 = F_1 = dC_0 \quad (1.14)$$

onde $\chi = C_0$ é o áxion, um campo escalar.

A segunda forma acima é:

$$F_3 = dC_2 - \chi dB_2 \quad (1.15)$$

A 3-forma intensidade de campo acima é o resultado da combinação de duas derivadas exteriores que combina campos do setor de *Neveu-Schwarz* com campos do setor de *Ramond-Ramond*. Tal interação é oriunda de um termo de origem topológica chamado de *Chern-Simons* que veremos a seguir. Esta forma será essencial no estudo da suavização do *conifold* em seis dimensões por estar intrinsecamente ligada a D-3 branas.

O último tensor é a 5-forma:

$$F_5 = dC_4 - \frac{1}{2}dC_2 \wedge dB_2 + \frac{1}{2}B_2 \wedge dC_2 \quad (1.16)$$

Como estamos em uma variedade de dez dimensões, podemos tomar F_5 como sendo auto-dual, ou seja,

$$\star_{10} F_5 = F_5 \quad (1.17)$$

Tal condição de autodualidade aparece na teoria eletromagnética usual, em quatro dimensões, pois o tensor intensidade de campo $F_2 = dA_1$ pode ter soluções auto duais conhecidas como instantons. Logo mais veremos que o papel de tais soluções conhecidas como defeitos topológicos é essencial no estudo da resolução do *conifold*.

Note que os termos na ação acima não dependem do dÍlton, o que indica que a constante de acoplamento não varia ponto a ponto nem é mediada por um outro campo.

O setor de *Chern-Simons*

$$S_{CS} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int (C_4 \wedge dB_2 \wedge dC_2) \quad (1.18)$$

Note que tal termo não depende da métrica do volume mundo. Logo, interações mediadas por tal termo tem caráter não-locais. Esse termo representa a interação dos campos de Ramond-Ramond e são de origem topológica tendo suas simetrias e cargas origem topológica, das *classes características de Chern* que discutiremos logo mais. Note que na ação acima já há um acoplamento entre campo do setor de *Neveu-Schwarz* e *Ramond-Ramond*, responsáveis pela definição das 3-forma F_3 e a 5-forma auto-dual F_5 .

Equações de movimento

Extremizando o termo da ação referente ao campo C_4 , encontramos as *equações de movimento*:

$$S_1 = \int \star F_5 \wedge F_5 + C_4 \wedge dB_2 \wedge dC_2 \quad (1.19)$$

$$\delta S_1 = 0 \Rightarrow d(\star_{10} F_5) = dB_2 \wedge dC_2 \quad (1.20)$$

Como

$$\star_5 F_5 = F_5 \quad (1.21)$$

podemos reescrever a equação acima como:

$$\delta S_1 = 0 \Rightarrow dF_5 = dB_2 \wedge dC_2 \quad (1.22)$$

Note que a transgressão na identidade de *Bianchi* é gerada pelo termo de *Chern-Simons*.

Já para a parte geométrica, a variação em relação a métrica fornece a equação de *Einstein* sem constante cosmológica:

$$R_{AB} + 2\nabla_A \nabla_B \phi = \frac{e^\phi}{4} [H_{ABC} H^{ABC}] \quad (1.23)$$

Para o dÍlaton, obtemos a equação de *Klein-Gordon* em um *background* gravitacional:

$$\partial_A \partial^A \phi - (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{4} R = 0 \quad (1.24)$$

1.1.3 Ação da teoria do tipo II-A

Como na teoria tipo II-B, podemos dividir a ação em:

$$S_{10}^{II-A} = S_{NS-NS} + S_{R-R} + S_{CS} \quad (1.25)$$

O setor de *Neveu-Schwarz* é o mesmo que o da teoria II-B.

O setor de Ramond-Ramond

$$\begin{aligned} S_{R-R} &= -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}_{10}} \star F_2 \wedge F_2 + \star \tilde{F}_4 \wedge \tilde{F}_4 \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}_{10}} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right) \sqrt{-g} d^{10}x \end{aligned} \quad (1.26)$$

O setor de *Chern-Simons*

$$S_{CS}^{II-A} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int (B_2 \wedge F_4 \wedge F_4) \quad (1.27)$$

1.1.4 Ação da teoria heterótica

A ação da teoria é [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{het} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_M e^{-\frac{\phi}{2}} \left(\mathcal{R} \wedge \star 1 + 4 \star d\phi \wedge d\phi - \frac{1}{2} \star \mathcal{H}_3 \wedge \mathcal{H}_3 - \frac{\kappa^2}{30g^2} Tr(\star F_2 \wedge F_2 + \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_M dx^{10} \sqrt{-g} e^{-\frac{\phi}{2}} \left(R + 4|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}|\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa^2}{30g^2} \epsilon^{ABCD} (F_{AB}F_{CD} + \mathcal{R}_{AB}\mathcal{R}_{CD}) \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Interessante notar que a ação acima não contém campos de *Ramond-Ramond*. Logo, sua ação é geométrica, tendo todos os termos um fator $e^{-\frac{\phi}{2}}$. Contudo, devido a anomalia, a 3-forma intensidade de campo de *Kalb-Ramond* terá um termo a mais, de origem topológica:

$$\mathcal{H}_3 = dB_2 + \frac{l_s^2}{4} (\mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{GB}) \quad (1.29)$$

onde, \mathcal{L}_{CS} é a 3-forma de *Chern-Simons* de calibre e \mathcal{L}_{GB} é a 3-forma de Gauss-Bonnet gravitacional, da forma:

$$\mathcal{L}_{CS} = A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_{GB} = \omega \wedge d\omega + \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \quad (1.31)$$

onde, A_1 o potencial eletromagnético e ω uma *vielbein*, que é uma 1-forma diferencial que faz o papel análogo de potencial para a forma de curvatura.

A identidade de *Bianchi* para o novo campo \mathcal{H}_3 fica:

$$d\mathcal{H}_3 = Tr(F \wedge F + \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) \quad (1.32)$$

Daremos uma explicação para o aparecimento do termo topológico na seção de anomalias.

1.2 Teoria M

Podemos obter as ações acima de uma teoria de supergravidade em $D = 11$, chamada teoria M.

O setor bosônico é da forma[1]:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{2} \left(\int R \wedge 1 - F \wedge *F \right) \\
&= \frac{1}{2} \int (R - |F_4|^4) \sqrt{-g} d^{11}x
\end{aligned} \tag{1.33}$$

onde A_3 é uma 3-forma e F_4 é a forma intensidade de campo, dada por:

$$F_4 = dA_3 \tag{1.34}$$

Pelo lema de Poincaré:

$$d^2 A = 0 \Rightarrow dF = 0 \tag{1.35}$$

Tal equação é chamada de *relação de Bianchi*.

$$d(*F) = 0 \tag{1.36}$$

O potencial de *Kalb-Ramond* pode ser deduzido do potencial A_3 através de um redução de *Kaluza-Klein*

$$B_{ab} = A_{ab11} \tag{1.37}$$

Termo de Chern-Simons

Introduzindo um termo de *Chern-Simons* do tipo:

$$S_{CS} = \int F_4 \wedge F_4 \wedge A_3 \tag{1.38}$$

Fazendo uma variação funcional da ação sobre o campo A_3 , obtemos a seguinte equação diferencial:

$$d(*F_4) = F_4 \wedge F_4 \tag{1.39}$$

1.3 Branas e cargas

Uma p-brana interage com um campo de calibre através do acoplamento:

$$S_{int} = \mu_p \int A_{p+1} \quad (1.40)$$

De fato, uma partícula - 0-brana - acopla-se com o campo de calibre A_1 através do intervalo no espaço-tempo:

$$S_{int} = e \int_C A_1 = e \int_C \frac{dA}{d\tau} d\tau \quad (1.41)$$

Note que na ação de *Chern-Simons* para a teoria II-B, temos um potencial C_4 , o que indica que a brana sobre a qual tal campo vive é um D-3 brana. Tais branas terão papel importante na resolução do *conifold*.

A presença do potencial A_3 num espaço de onze dimensões indica o acoplamento de uma brana, chamada M-brana, de dois modos possíveis: eletricamente, com uma M2-brana, através da forma:

$$e = \int *F \quad (1.42)$$

e magneticamente com uma M5-brana através do termo

$$g = \int F \quad (1.43)$$

O acoplamento com a M2-brana é deduzido pelo fato de que o campo de calibre se acopla com uma p-brana na forma: e tendo o espaço ambiente dimensão D , o acoplamento magnético vai necessitar de um termo com uma $n = (D - p - 4)$ -brana.

1.4 Anomalias e o termo de Chern-Simons

Anomalias aparecem como divergências nos diagramas de Feynmann de um laço, onde não há mais conservação de uma corrente devido uma quebra de simetria. De fato há conservação no nível clássico da teoria mas tal conservação é quebrada através do processo de quantização. Se o grupo de simetria que gerou a carga e a corrente for global, então não há problemas mas quando a simetria de calibre é local a equação de conservação da corrente é alterada. Se antes tínhamos uma corrente J conservada, então

$$dJ = 0 \quad (1.44)$$

ou em termos de coordenadas

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.45)$$

Com a quebra da simetria, a corrente não será mais conservada, donde

$$dJ = aF_p \wedge F_q \quad (1.46)$$

onde a é uma constante. Note que a anomalia alterou a derivada da n -forma J_n ; tal relação é chamada identidade de *Bianchi* e logo, um dos efeitos das anomalias é alterar a relação de *Bianchi* dos campos.

Em geral, anomalias estão ligadas à violação de paridade com campos quirais, o que apenas ocorre em dimensões pares [1]. Logo, tomemos $p + q = 2n$.

Como tal variação do fluxo não se deve a variações do espaço ambiente, devemos estudar o surgimento desse novo termo usando aspectos não geométricos mas topológicos. Para isso, vamos estudar as chamadas *classes características* I_{2n} , que são classes de equivalência entre formas fechadas e invariantes de calibre, ou seja,

$$\begin{aligned} x \in I_{2n} &\iff dx = 0 \\ &\delta x = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Anomalias na teoria de Yang-Mills e na relatividade geral podem ser estudadas utilizando essas classes características. De fato, podemos escrever a 2-forma curvatura de calibre para o campo de Yang-Mills como:

$$F = dA + A \wedge A \quad (1.48)$$

tomando uma fator de calibre $\lambda = \lambda(x)$:

$$\delta A = d\lambda + [A, \lambda] \quad (1.49)$$

$$\delta F = [F, \lambda] \quad (1.50)$$

Enquanto que para a curvatura do grupo de Lorentz,

$$R = dw + w \wedge w \quad (1.51)$$

cujas transformações de calibre são, para um parâmetro θ :

$$\delta_\theta w = d\theta + [w, \theta] \quad (1.52)$$

$$\delta_\theta = [R, \theta] \quad (1.53)$$

Na ausência de fontes, $dF = 0$, $dR = 0$, conhecidas como *identidade de Bianchi* e afirmam que as 2-formas de curvatura são fechadas.

1.4.1 Classes características

Como as 2-formas são fechadas podemos localmente encontrar uma 1-forma α tal que:

$$F = d\alpha \quad (1.54)$$

Para estendermos tal resultado globalmente, tomemos duas curvaturas F e F' cuja integral sobre uma 2-variedade sem bordo - 2-ciclo - é igual a um constante real,

$$\int_M F = \int_M F' = k \quad (1.55)$$

Mais adiante veremos que tal integral está ligada a invariantes topológicos como a carga de monopólos e instantons. Pelo teorema de Stokes,

$$\int_M F - F' = 0 \Rightarrow \int_M F - F' = \int_M d\alpha \Rightarrow F - F' = d\alpha \quad (1.56)$$

Assim, para estudarmos as simetrias entre F e F' , tomemos o conjunto de todas as 2-formas fechadas $Z^2(M) = (w, dw = 0)$ e o conjunto de todas as 2-formas exatas $B^2(M) = (w, dw = d\alpha_1)$. O quociente

$$H^2(M) = Z^2/B^2 \quad (1.57)$$

é chamado o grupo de Cohomologia de dimensão dois. Sobre H^2 , tomemos um grupo de simetria G entre F e F' , de tal forma que:

$$F' = gFg^{-1} \Rightarrow F'g = gF \quad (1.58)$$

A equação acima afirma que podemos gerar todas as formas de curvatura sobre H^2 a partir da ação do grupo G sobre H^2 .

Contudo, o resultado acima é restrito a dimensão dois. Para expandí-lo, pode-se construir classes características a partir tanto de F como de R , tomando-se polinômios simétricos da forma:

$$I_k = tr(F \wedge \dots \wedge F) + tr(R \wedge \dots \wedge R) \quad (1.59)$$

A importância desses polinômios se deve ao teorema de *Chern-Weil* que afirma ser tais polinômios formas fechada e que mesmo tomando duas curvaturas de calibre F e F' , correspondente a dois potenciais A, A' , a diferença $I(F') - I(F)$ é uma forma exata, ou seja,

$$(I(F') - I(F))_{2n} = dw_{2n-1} \quad (1.60)$$

Existe então uma simetria entre tais potenciais e tal simetria pode ser medida tomando-se as classes de equivalência de todas as formas exatas que sejam a diferença entre duas formas fechadas,

Assim, dizemos que

$$I(F') \sim I(F) \Leftrightarrow I(F') - I(F) = dw_{2n-1} \quad (1.61)$$

Seja $Z^{2n}(M)$ o conjunto de todas as $2n$ -formas diferenciais fechadas e $B^{2n}(M)$ o conjunto de todas as $2n$ -formas exatas. Para estudarmos a simetria acima, tomemos o quociente

$$H^{2n} = Z^{2n}(M)/B^{2n}(M) \quad (1.62)$$

tal conjunto dotado de soma é o grupo de cohomologia de M . É sobre grupos de cohomologia que se constrói a teoria de Chern-Simons. Para cada tipo de curvatura, tomada sobre um certa fibra específica, temos diferentes classes características. Vamos estudar algumas que aparecem com frequência em supergravidade.

Em supergravidade é comum trabalharmos com a forma de anomalia sendo uma $(2n+2)$ -forma e satisfazendo as seguintes condições:

Vamos definir a $(2n + 2)$ -forma de anomalia a partir das equações

$$I_{2n+2} = d\omega_{2n+1} \quad (1.63)$$

$$\delta\omega_{2n+1} = dG_{2n} \quad (1.64)$$

Para isso, tomemos uma ação cuja variação de calibre tem a forma:

$$\delta S = \int G_{2n} \quad (1.65)$$

onde $2n$ é a dimensão da brana.

Tal sistema de condições é chamado *descent equations of Wess-Zumino*[\[42\]](#).

Classes de Chern-Simons

Um exemplo de classe característica são as classes de *Chern*, definidas como:

$$c(F) = \det \left(I + \frac{iF}{2\pi} \right) \quad (1.66)$$

$$= 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots \quad (1.67)$$

Note que sendo definida a partir de um determinante, as classes de Chern não dependem da representação escolhida. Calculando o determinante numa representação diagonalizada, ou seja, fazendo $A = gFg^{-1}$, temos:

$$c(F) = 1 + \text{tr} A + \frac{1}{2}((\text{tr} A)^2 - \text{tr} A^2) + \dots + \det A \quad (1.68)$$

Assim,

$$c_1 = \text{tr} A \quad (1.69)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}((\text{tr} A)^2 - \text{tr} A^2) \quad (1.70)$$

De uma forma geral, podemos representar a forma característica a partir de invariantes topológicos do volume mundo como a *característica de Chern* $ch(F, R)$, *característica de Euler* $e(R)$ e o *roof genus* \hat{A} . Para isso, divide-se o volume mundo em suas componentes tangentes e normais e toma-se a fórmula [33]:

$$I(F, R_T, R_N) = ch(F) \wedge ch(-F) \wedge \frac{A(\hat{R}_T)}{A(\hat{R}_T)} \wedge e(R_N) \quad (1.71)$$

Tal fórmula é oriunda do índice de Atiyah-Singer que caracteriza um fibrado de uma variedade a partir de invariantes topológicos da mesma e do núcleo de operadores diferenciais definidos sobre tal fibrado. Um exemplo que acontece em Física é a classificação das variedades que comportam uma estrutura de spin - um fibrado de spin - e que possamos definir um operador de Dirac - operador diferencial - atuando sobre as seções dessa fibra - funções de onda -.

Característica de Chern

Podemos definir outro polinômio simétrico a partir do traço da curvatura. Uma definição bastante comum da característica de Chern é:

$$\begin{aligned} ch(F) &= Tr \left(\exp \left(\frac{iF}{2\pi} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{i}{2\pi} F - \frac{1}{4\pi^2} \frac{F^2}{2!} + \dots + \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{F^n}{n!} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Como

$$ch(F) = ch_0 + ch_1 + \dots + ch_n \quad (1.73)$$

temos

$$ch_0 = 1 \quad (1.74)$$

$$ch_1 = \frac{i}{2\pi} F \quad (1.75)$$

$$ch_2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{F^2}{2!} \quad (1.76)$$

$$ch_n = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{F^n}{n!} \quad (1.77)$$

Lembrando as equações de Yang-Mills, na presença de uma carga magnética,

$$d * F = J_e \quad (1.78)$$

$$dF = J_m \quad (1.79)$$

Desta última equação, integrando-a, obtemos

$$\int_{S^2} F = \int_{S^2} ch_1(F) = g \quad (1.80)$$

Ou seja, a carga magnética é oriunda de um fluxo sobre uma 2-esfera que engloba a carga gerado pela primeira característica de Chern. Podemos então atrelar a característica de Chern a um monopólo magnético.

Repetindo o mesmo procedimento para a segunda característica de Chern, obtemos

$$N = \frac{1}{2} \int_{S^2} Tr \left(\frac{iF}{2\pi} \right)^2 = \int_{S^2} ch_2(F) \quad (1.81)$$

Assim, a segunda característica de Chern está relacionada com a carga de um instanton. Concluimos então que a característica total de Chern fornece a informação topológica necessária para caracterizarmos quais defeitos topológicos existem em determinadas variedade que suporta um campo com simetria de calibre dada.

A característica de *Chern* tem propriedades ainda interessantes no estudo de variedades que podem ser separadas, como:

$$\begin{aligned} ch(E \otimes F) &= ch(E) \wedge ch(F) \\ ch(E \oplus F) &= ch(E) \oplus ch(F) \end{aligned} \quad (1.82)$$

Roof genus

Até agora apenas relacionamos os polinômios gerados pela curvatura de calibre e não do espaço-tempo. As classes características para a variedade em questão é chamada de **Roof genus**¹, $\hat{A}(R)$, definida como:

$$\hat{A}(R) = \prod_{i=1}^k \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \quad (1.83)$$

$$= 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \frac{1}{967680}(-31p_1^3 + 44p_1p_2) \quad (1.84)$$

$$- 16p_3) \quad (1.85)$$

$$= 1 + \frac{1}{48}tr(R^2) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{248}(tr R^2)^2 + \frac{1}{360}tr(R)^4 \right) \quad (1.86)$$

Assim como a característica de Chern, o roof-genus também produz grandezas conservadas topologicamente. A integral da segunda forma está relacionada com a característica de Euler:

$$\int_M e(M) = \chi \quad (1.87)$$

onde

$$e(M)e(M) = p_n(A) \quad (1.88)$$

é a chamada classe de Euler. A identidade acima é chamada teorema de *Gauss-Bonnet* em quatro dimensões. Ela relaciona a integral de uma forma construída a partir do quadrado da curvatura com um invariante topológico, a característica de euler. Por esse motivo, as teorias topológicas de gravidade quando utilizam o termo de Chern-Simons ao invés do termo de Einstein-Hilbert são chamadas de Gauss-Bonnet.

Podemos expressar o termo de Chern-Simons em termos do *roof genus* e da característica de Chern:

$$S_{CS} = \frac{T_p}{2} \int_{\sigma_{p+1}} C \wedge ch(F) \wedge \sqrt{\frac{A(\hat{R}_T)}{A(\hat{R}_N)}} \quad (1.89)$$

¹O nome talvez venha do fato de que tal forma diferencial é a raiz - está relacionada com - o gênero da variedade

1.4.2 Branas dentro de branas

Considerando volumes mundo triviais, onde tomamos apenas o primeiro termo do *Roof genus*, $A(\hat{R}_N) = A(\hat{R}_T) = 1$, e a característica de Chern na forma exponencial, temos

$$S_{CS} = \frac{T_p}{2} \int (C \wedge \text{tr}(\exp(F/2\pi))) \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{T_p}{2} \int \left(\sum_p C^{p+1} \wedge \text{tr} \left(\frac{F^n}{(2\pi)^n} \right) \right) \\ &= \frac{NT_p}{2} \int C^{p+1} + \frac{T_p}{4\pi} \int (C^{(p-1)} \wedge \text{tr} F) \\ &+ \frac{T_p}{8\pi^2} \int (C^{(p-3)} \wedge \text{tr}(F \wedge F)) \\ &+ \dots + \frac{T_p}{(2k)!(2\pi)^k} \int (C^{(p+1-2k)} \wedge \text{tr}(F^k)) + \dots \end{aligned} \quad (1.91)$$

O primeiro termo da expansão acima é o fluxo total dos campos de calibre sobre a variedade e logo pode ser interpretado, usando uma espécie de lei de Gauss generalizada, como a carga dos campos de Ramond-Ramond gerado por uma pilha de N D-branas. Tal é a carga topológica da brana e será bastante importante no estudo da dualidade calibre-gravidade. Além disso, como $N \in \mathbb{N}$, e define a ordem do grupo de simetria, $SU(N)$, então podemos ter teorias de calibre para além do modelo padrão, cujo grupo de calibre é $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, cuja dinâmica seja descrita por teorias topológicas sobre branas.

O segundo termo pode ser interpretado como o acoplamento de um potencial de Ramond-Ramond C^{p-1} carregando uma carga $\frac{1}{2\pi} \int_{S_\infty^2} \text{tr} F$ de uma $(p-2)$ -brana, onde a 2-esfera utilizada para calcular a carga está imersa no volume mundo. Como tal carga é essencialmente a de um monopólo magnético, podemos ver tal termo como um vórtice ou monopólo imerso no volume mundo gerando tal carga. Vale a pena ressaltar que o termo de fluxo aparece naturalmente quando fazemos $p = 1$, ou seja, quando tomamos como fonte uma carga pontual. Note que a dimensão mínima para termos um defeito do tipo monopolo será três e do tipo vórtice será dois.

Já o terceiro termo descreve a interação de um campo vivendo em um espaço de no mínimo quatro dimensões, como em uma D3-brana com carga de um instanton. Tais defeitos aparecem em teorias de Yang-Mills em quatro dimensões e sua integral é o equivalente do teorema de *Gauss-Bonnet* para o campo de calibre de Yang-Mills. De uma modo geral, dada a classe de cohomologia de ordem k , $\text{tr}(F^k)$, existe um sistema de $(p-2k)$ -branas imersas na p -brana original e com carga topológica

$$\int_M \text{tr}(F^k) \quad (1.92)$$

Note que cargas topológicas se referem a campos vivendo em branas que vivem dentro do volume mundo de uma 9 – brana, logo dizemos que existem branas dentro de branas.

Para a teoria II-B, temos que $D = 10$ e p deve ser um inteiro par. Logo, tomemos a teoria como sendo tomada sobre o volume mundo de uma D9-brana teremos os seguintes termos:

$$\begin{aligned} S_{CS} = & \frac{T_9}{2} \int_{\sigma_{10}} \text{Tr}(C_{10} + C_8 \wedge F + C_6 \wedge \frac{F^2}{2} + C_4 \wedge \frac{F^3}{3!} \\ & + C_2 \wedge \frac{F^4}{4!} + C_0 \wedge \frac{F^5}{5!}) \end{aligned} \quad (1.93)$$

1.4.3 Anomalia na teoria heterótica

Como estamos trabalhando em dez dimensões, o termo de anomalia é uma 12-forma. Podemos fatorá-lo como:

$$I_{12} = Y_4 \wedge Y_8 \quad (1.94)$$

Tomando a ação de Chern-Simons, podemos definir a 4-forma de anomalia como:

$$Y_4 = \text{Tr}(F \wedge F) + \text{Tr}(R \wedge R) \quad (1.95)$$

enquanto

$$Y_8 = \text{Tr}(F \wedge F \wedge F \wedge F) + \text{Tr}(R \wedge R \wedge R \wedge R) \quad (1.96)$$

Como o termo de anomalia altera a identidade de *Bianchi* dos campos, fazemos considerar o caso onde Y_4 altera a identidade de Bianchi para H_3 . De fato, tal campo, antes definido por $H_3 = dB_2$, e que logo, satisfazia, $dH_3 = 0$, obedecerá:

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}_3 &= Y_4 \\ &= \text{Tr}(F \wedge F) + \text{Tr}(R \wedge R) \end{aligned} \quad (1.97)$$

Como,

$$\mathcal{L}_{CS} = A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A \Rightarrow d\mathcal{L}_{CS} = Tr(F \wedge F) \quad (1.98)$$

e

$$\mathcal{L}_{GB} = \omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega \Rightarrow d\mathcal{L}_{GB} = Tr(R \wedge R) \quad (1.99)$$

Então, redefinimos \mathcal{H} , agora com a introdução dos termos topológicos como feito na ação heterótica.

1.5 Teoria BF

Agora, se tomarmos F como:

$$\mathcal{F} = B + kF \quad (1.100)$$

onde B é a 2-forma de Kalb-Ramond, teremos para o termos de segunda ordem na curvatura:

$$Tr(\mathcal{F}^2) = Tr(B^2 + 2kBF + k^2F^2) \quad (1.101)$$

Note o aparecimento de um termo $Tr(B \wedge F)$. Como B é a forma que representa o campo eletromagnético gerado por uma corda - ou melhor, uma 1-brana- e F a forma de Maxwell que representa o campo eletromagnético gerado por uma partícula - ou uma 0-brana- então tal termo pode ser interpretado como representando o acoplamento entre uma corda e uma partícula no volume mundo da 9-brana.

O termo $tr(B \wedge B + B \wedge F)$ é bastante estudado devido ser um análogo para quatro dimensões do termo de Chern-Simons tridimensional

$$L_{CS} = tr(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A) \quad (1.102)$$

Como existe uma teoria topológica da gravidade em três dimensões utilizando o termo de Chern-Simons ao invés do termo de Einstein-Hilber-Cartan, a teoria BF é candidata a uma teoria

de gravitação topológica em quatro dimensões. Nesse sentido, o termo BB seria um análogo do termo de constante cosmológica [41].

Além disso, como o termo de Chern-Simons gera defeitos topológicos do tipo vórtices em três dimensões, sendo utilizado no estudo do efeito Hall quântico fracionário [27], a teoria BF seria um análogo quadridimensional de defeitos do tipo vórtice.

O termo BF tem ainda a característica interessante de acoplar o potencial de calibre de H_3 com a curvatura do fibrado de calibre F . Veremos que H_3 pode ser interpretado como um gerador topológico de torção, introduzindo uma conexão antisimétrica. Como

$$dtr(B \wedge F) = H_3 \wedge F_2 \quad (1.103)$$

Assim, podemos relacionar o termo BF em quatro dimensões com a classe característica $tr(H \wedge F)$ em cinco dimensões, assim como fazemos com a lagrangeana de Chern-Simons em três dimensões que relacionamos com a característica de Chern em quatro dimensões. Como

$$d(H_3 \wedge F_2) = 0 \quad (1.104)$$

então a cinco forma,

$$Y_5 = Tr(H_3 \wedge F_2) \quad (1.105)$$

pode ser considerada como uma classe de Chern em cinco dimensões. Note que a classe acima é um polinômio não só da curvatura de calibre como também da torção.

1.6 Curvatura no termo de Chern-Simons

Vamos agora analisar o papel que a curvatura do espaço tangente tem sobre o termo de Chern-Simons. Para isso, consideremos:

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= \frac{T_p}{2} \int tr(C \wedge \exp(\mathcal{F}/2\pi) \wedge A) \\
&= \frac{T_p}{2} \int tr(C \wedge (1 + \mathcal{F} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 + \frac{1}{3!}\mathcal{F}^3 + \frac{1}{4!}\mathcal{F}^4 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\mathcal{F}^5) \wedge A) \\
&= \frac{T_p}{2} \int tr(C_{10} + C_8 \wedge \mathcal{F} + C_6 \wedge (\mathcal{F}^2 + A_1) + C_4 \wedge \mathcal{F}^3 \\
&\quad + \mathcal{F} \wedge A_1) + C_2 \wedge (\mathcal{F}^4 + \mathcal{F}^2 \wedge A_1 + A_2) \\
&\quad + C_0 \wedge (\mathcal{F}^5 + \mathcal{F}^3 \wedge A_1 + \mathcal{F} \wedge A_2))
\end{aligned} \tag{1.106}$$

A identidade acima contém termos apenas com \mathcal{F} , termos cruzados $\mathcal{F} \wedge \mathcal{R}$ e outros termos apenas com \mathcal{R} . Vamos separar o termo de Chern-Simons nesses três termos:

$$S_{CS} = S_{CS}^{\mathcal{F}} + S_{CS}^{\mathcal{F}\mathcal{R}} + S_{CS}^{\mathcal{R}} \tag{1.107}$$

$$\begin{aligned}
S_{CS}^{\mathcal{F}} &= \frac{T_p}{2} \int tr(C_{10} + C_8 \wedge \mathcal{F} + \frac{C_6 \wedge \mathcal{F}^2}{2} + \frac{C_4 \wedge \mathcal{F}^3}{6} \\
&\quad + \frac{C_2 \wedge \mathcal{F}^4}{24} + \frac{C_0 \wedge \mathcal{F}^5}{120})
\end{aligned} \tag{1.108}$$

$$\begin{aligned}
S_{CS}^{\mathcal{F}\mathcal{R}} &= \frac{T_p}{2} \int tr(C_4 \wedge \mathcal{F} \wedge A_1 + \frac{C_2 \wedge \mathcal{F}^2 \wedge A_1}{2} \\
&\quad + C_0 \wedge \left(\frac{\mathcal{F}^3 \wedge A_1}{6} + \mathcal{F} \wedge A_2 \right))
\end{aligned} \tag{1.109}$$

$$S_{CS}^{\mathcal{R}} = \frac{T_p}{2} \int tr(C_6 \wedge A_1 + C_2 \wedge A_2) \tag{1.110}$$

Podemos diminuir o número de campos utilizando o operador *estrela de Hodge* em dez dimensões:

$$\star C_q = C_{10-q} \tag{1.111}$$

Logo,

$$C_{10} = \star C_0 \quad (1.112)$$

$$C_8 = \star C_2 \quad (1.113)$$

$$C_6 = \star C_4 \quad (1.114)$$

$$C_5 = \star C_5 \quad (1.115)$$

Assim, além de poder escrever a ação de Chern-Simons usando apenas os campos C_0 , C_2 e C_4 e seus respectivos duais, encontramos um campo auto-dual C_5 .

Reescrevendo as expressões de Chern-Simons, temos

$$\begin{aligned} S_{CS}^{\mathcal{F}} &= \frac{T_p}{2} \int tr(\star C_0 + \star C_2 \wedge \mathcal{F} + \frac{\star C_4 \wedge \mathcal{F}^2}{2} + \frac{C_4 \wedge \mathcal{F}^3}{6} \\ &+ \frac{C_2 \wedge \mathcal{F}^4}{24} + \frac{C_0 \wedge \mathcal{F}^5}{120}) \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} S_{CS}^{\mathcal{F}\mathcal{R}} &= \frac{T_p}{2} \int tr(C_4 \wedge \mathcal{F} \wedge A_1 + \frac{C_2 \wedge \mathcal{F}^2 \wedge A_1}{2} \\ &+ C_0 \wedge \left(\frac{\mathcal{F}^3 \wedge A_1}{6} + \mathcal{F} \wedge A_2 \right)) \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$S_{CS}^{\mathcal{R}} = \frac{T_p}{2} \int tr(\star C_4 \wedge A_1 + C_2 \wedge A_2) \quad (1.118)$$

Note que apenas o termos que contém termos cruzados é totalmente definido a partir unicamente de C_0, C_2 e C_4 .

Usando a identidade,

$$\int tr(\star \omega \wedge \mu) = \int tr(\omega \wedge \star \mu) \quad (1.119)$$

Podemos reescrever o termo

$$\begin{aligned}
S_{CS}^{\mathcal{F}} &= \frac{T_p}{2} \int tr(\star C_0 + C_2 \wedge \left(\star \mathcal{F} + \frac{\mathcal{F}^4}{24} \right) + C_4 \wedge \left(\frac{\star \mathcal{F}^2}{2} + \frac{\mathcal{F}^3}{6} \right) \\
&\quad + \frac{C_0 \wedge \mathcal{F}^5}{120})
\end{aligned} \tag{1.120}$$

O termo de anomalia geral ficará

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= \frac{T_p}{2} \int tr(\star C_0 + C_2 \wedge \left(\star \mathcal{F} + \frac{\mathcal{F}^4}{24} + \frac{1}{48} \mathcal{F}^2 \mathcal{R}^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{288} (\mathcal{R}^2)^2 + \frac{1}{360} \mathcal{R}^4 \right) \right)) \\
&\quad + C_4 \wedge \left(\frac{\star \mathcal{F}^2}{2} + \frac{\mathcal{F}^3}{6} + \frac{1}{48} \mathcal{F} \wedge \mathcal{R}^2 \right) + C_0 \wedge \left(\mathcal{F}^5 + \frac{1}{288} \mathcal{F}^3 \wedge \mathcal{R}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{16} \mathcal{F} \wedge \left(\frac{1}{288} (\mathcal{R}^2)^2 + \frac{1}{360} \mathcal{R}^4 \right)
\end{aligned} \tag{1.121}$$

Assim, a correção na ação efetiva pela adição de um termo de anomalia será da forma:

$$S_{ef} = k_1 \int C_2 \wedge Y_8 + k_2 \int C_4 \wedge Y_6 + k_3 \int C_0 \wedge Y_{10} \tag{1.122}$$

Onde,

$$Y_8 = \frac{1}{48} \mathcal{F}^2 \mathcal{R}^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{288} (\mathcal{R}^2)^2 + \frac{1}{360} \mathcal{R}^4 \right) \tag{1.123}$$

$$Y_6 = \frac{1}{48} \mathcal{F} \wedge \mathcal{R}^2 \tag{1.124}$$

2 O *Conifold*

Dentro do projeto de teoria unificadora das cordas está a capacidade de deduzir resultados do modelo padrão, o que ficou conhecido como fenomenologia de cordas. Como o espaço-tempo de supercordas tem dez dimensões propôs-se limitar as coordenadas extras. Tal procedimento leva o nome técnico de *compactificação*. A principal variedade escolhida para tal é uma sem torção, cujo tensor de Ricci é nulo - variedade Ricci-plana - e com uma estrutura complexa que a torna bastante simétrica e computacionalmente atraente, chamada variedades de *Kähler*, chamada espaços de *Calabi-Yau*. E dentre os espaços de *Calabi-Yau* o principal representante talvez seja o **conifold** devido ser um gerador de outras - e possivelmente todas - as variedades de *Calabi-Yau* através de transformações possibilitam transitar entre espaços topologicamente distintos, chamadas *transições cônicas*. O *conifold* tem a propriedade fenomenologicamente atraente de ser um *orbifold*, ou seja, uma variedade obtida de outra através de um quociente por um grupo de simetria e com isso, além de ser maximalmente simétrica, ter um número menor de supersimetria que a variedade original. Tal propriedade é interessante visto que em baixas energias os modelos devem quebrar supersimetria.

Além disso, sendo uma variedade compacta em cinco dimensões mas não-compacta em uma, o *conifold* abriu portas aos modelos de *mundo-brana*. Nesse capítulo vamos mostrar como o *conifold* aparece como variedade de *calabi-Yau* ressaltando suas simetrias e estudando seus componentes geométricos como a métrica, o potencial de *Kähler*, curvatura, torção, etc.

2.1 Espaços de *Calabi-Yau*

Um critério para a escolha da variedade extra é que ela gere um universo observável o mais simétrico possível em larga escala. Dentro as simetrias requeridas temos o número máximo de vetores de *Killing* bem como a supersimetria. Variedades com tensor de *Ricci* nulo e logo, com primeira classe de *Chern* nula satisfazem tal condição e são chamadas *espaços de Calabi-Yau*.

2.1.1 Conservação de supersimetria e espinores covariantemente constantes

Vamos considerar um variedade de dez dimensões \mathcal{M}_{10} que chamaremos *Bulk* e que pode ser separada em outras duas subvariedades, uma de quatro dimensões \mathcal{M}_4 que consideraremos ser o espaço-tempo usual da relatividade geral e que chamaremos *variedade externa* e outra de seis dimensões \mathcal{M}_6 que chamaremos variedade interna. Assim, o *bulk* é o produto direto entre a variedade interna e a variedade externa:

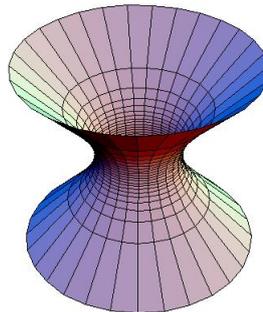
$$\mathcal{M}_{10} = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_6 \quad (2.1)$$

Consideremos que \mathcal{M}_4 tenha curvatura escalar constante e que seja uma variedade de máxima simetria. Logo, podemos ter 3 classes de equivalência entre as variedades [23]:

- $R = 0$ - Espaços de Minkowsky
- $R > 0$ - Espaços de Sitter (dS)
- $R < 0$ - Espaços Anti-de Sitter (AdS) Teceremos um breve comentário sobre o último espaço devido ser um dos focos de nosso estudo. Tal espaço é definido pela quádrlica:

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^q t_j^2 = -R^2 \quad (2.2)$$

Aqui escolhemos a forma mais geral de AdS_{D+1} , onde $D = p + q$. R é chamado o raio do espaço, x_i são as coordenadas do tipo espaço e t_j são as coordenadas do tipo tempo. Geralmente, estudamos um espaço com uma coordenada temporal imerso em um espaço com uma outra coordenada temporal. Com as duas coordenadas, tal espaço é hiperbolóide de duas folhas; fixando uma coordenada temporal, obtemos um hiperbolóide de uma folha, como mostrado na figura:



A métrica para o espaço anti de Sitter tem assinatura (1,D-1), logo,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^p dx_i^2 - dt^2 \quad (2.3)$$

Tal espaço é especialmente estudado devido ser uma solução maximalmente simétrica das soluções de vácuo de Einstein com constante cosmológica negativa. Além disso, tem sido utilizado em teoria de cordas, na chamada correspondência AdS-CFT, e em modelos de mundo brana, no estudo da hierarquia entre as formas nucleares e a gravidade.

Para que a variedade externa tenha máxima simetria, devemos desconsiderar os tensores intensidade de campo de Kalb-Ramond $H_{\mu\nu\rho} = 0$ e de Maxwell $F_{\mu\nu} = 0$. Se além disso, considerarmos que tais campos também são nulos na variedade interna, obtemos espinores covariante-mente constantes. De fato, as transformações de supersimetria sobre os férmions gravitino Ψ_μ e dilatino λ são:

$$\delta\Psi_a = \nabla_a\varepsilon - \frac{1}{4}\tilde{H}_a\varepsilon \quad (2.4)$$

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2}\Gamma^a\partial_a\Phi\varepsilon + \frac{1}{4}\tilde{H}\varepsilon \quad (2.5)$$

Vamos agora fazer $H_{abc} = 0$ e analisar a condição de supersimetria dos dois espinores acima. Para o dilatino,

$$\delta\lambda = 0 \Rightarrow \nabla_a\phi = 0 \quad (2.6)$$

logo, ϕ é constante e com ele a constante de acoplamento.

Para o gravitino,

$$\delta\Psi_a = 0 \Rightarrow \nabla_a\varepsilon = 0 \quad (2.7)$$

Tal identidade é chamada **equação espinorial de Killing**. Decompondo o espinor numa componente na variedade externa e outra na variedade interna, temos:

$$\varepsilon(x, y) = \xi(x) \otimes \eta(y) \quad (2.8)$$

Para a componente espinorial na variedade externa,

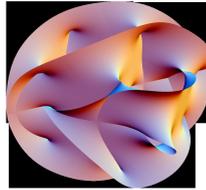
$$\nabla_\mu \xi = 0 \Rightarrow [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \xi = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma^{\rho\sigma} \xi = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

Logo, a consevação de supersimetria juntamente com o anulamento dos tensores intensidade de campo de Kalb-Ramond e Maxwell implica uma variedade externa de Minkowsky.

Pelo mesmo argumento, conclui-se que

$$R_{ab} = 0 \quad (2.10)$$

ou seja, a variedade externa é **Ricci-Plana**¹. Como não estamos assumindo que a variedade interna é maximalmente simétrica, o tensor de Riemann não é identicamente nulo e logo, a variedade não é necessariamente plana. Na verdade, estamos interessados em variedades que tenha tal propriedade mas que tenham ainda curvatura de Riemann não nula, ou seja, ainda tenham alguma curvatura.



2.1.2 Holonomia e consevação da supersimetria

Para que o espinor tenha sua supersimetria conservada no decorrer de um transporte paralelo pela variedade interna, devemos escolher um grupo de holonomia que preserve supersimetria. Para 6-variedades com spin, o grupo de rotação $Spin(6) = SU(4)$ conserva holonomia mas para conservar supersimetria, devemos tomar o subgrupo $SU(3)$. Em tal grupo podemos tomar um espinor com quiralidade bem definida. Além disso, podemos tomar a representação de $SU(4)$:

$$4 = 3 \oplus 1 \quad (2.11)$$

Um espinor com simetria $SU(4)$ tem 8 componentes e pode ser decomposto em duas componentes com quiralidade oposta:

¹Ricci-flat na literatura inglesa.

$$\mathbf{8} = \mathbf{4} \oplus \bar{\mathbf{4}} \quad (2.12)$$

Logo,

$$\eta = \eta_+ \oplus \eta_- \quad (2.13)$$

Como os espinores tem módulo covariante constante, podemos tomar:

$$\eta_+^\dagger \eta_+ = \eta_-^\dagger \eta_- = 1 \quad (2.14)$$

2.1.3 A forma fundamental

A partir dos espinores covariante constantes podemos definir o tensor de estrutura complexa J_n^m :

$$J_m^n = i\eta_+^\dagger \gamma_m^n \eta_+ \quad (2.15)$$

Usando a fórmula de transformação de *Fierz*[1] pode-se mostrar que:

$$J_m^n J_n^p = -\delta_m^p \quad (2.16)$$

Tomando o tensor contravariante $J_{mn} = g_{mk} J_n^k$, podemos definir a 2-forma $J = \frac{1}{2} J_{mn} dx^m \wedge dx^n$ que satisfaz:

$$J^2 = -1 \quad (2.17)$$

Como a variedade interna tem dimensão par (d=6) podemos vê-la como uma variedade complexa de dimensão (d=3). O tensor misto (1,1)-J fica então:

$$J = idz^a \otimes \frac{\partial}{\partial z^a} - id\bar{z}^a \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \quad (2.18)$$

Tal forma é chamada **forma fundamental** e tal condição faz da variedade interna uma *variedade quase-complexa*². Aplicando o tensor J na base do fibrado tangente da variedade interna, temos:

²*Almost complex manifold* na literatura inglesa.

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial z^a} \right) = i \frac{\partial}{\partial z^a} \quad (2.19)$$

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \quad (2.20)$$

Com essa propriedade, podemos definir uma métrica hermitiana sobre \mathcal{M}_6 na forma:

$$g(x, y) = g(Jx, Jy) \Rightarrow g = g_{m\bar{n}} dz^m \otimes d\bar{z}^n + g_{\bar{m}n} d\bar{z}^m \otimes dz^n \quad (2.21)$$

As componentes de J se relacionam com as componentes da métrica pela simples relação:

$$g_{mn} = J_m^k J_n^l g_{kl} \quad (2.22)$$

logo,

$$J_{m\bar{n}} = i g_{m\bar{n}} \quad (2.23)$$

O tensor J_{ab} é covariantemente constante, logo,

$$\nabla_a J_{bc} = \partial_a J_{bc} - \Gamma_{ab}^d J_{dc} - \Gamma_{ac}^d J_{bd} = 0 \quad (2.24)$$

Aplicando a mesma equação para a (1,1)-forma $J_{a\bar{b}}$, obtemos uma relação entre a conexão e J

$$(\partial - \bar{\partial}) J_{b\bar{c}} = \Gamma_{ab}^d g_{d\bar{c}} + \Gamma_{ac}^{\bar{d}} g_{d\bar{b}} \quad (2.25)$$

Se a conexão for compatível com a métrica, o que significa que $\nabla_X Y = 0$ através de um transporte paralelo, então:

$$dJ = \partial J + \bar{\partial} J = i \nabla_a g_{b\bar{c}} dz^a \wedge dz^b \wedge d\bar{z}^c + i \nabla_a g_{b\bar{c}} dz^a \wedge dz^b \wedge d\bar{z}^c = 0 \quad (2.26)$$

Variedades cuja forma fundamental é fechada são chamadas **variedades de Kähler** e J recebe o nome de **forma de Kähler**. Em variedades com conexão compatível com a métrica, também chamada de *conexão de Levi-Civita*, os coeficientes métricos são determinados a partir da métrica apenas. Contudo, nas lagrangeanas de supergravidade existem conexões que não provém da métrica e nesse caso teremos variedades com estrutura complexa mas não-Kähler.

Em uma variedade de *Kähler* é possível definir uma função $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada potencial de *Kähler*, de onde podemos obter a métrica e a forma de Kähler:

$$g_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K \quad (2.27)$$

$$J = i\partial\bar{\partial}K \quad (2.28)$$

2.1.4 Torção de \mathcal{M}_6

Nas seções anteriores vimos que uma variedade interna de *Kähler* é **livre de torção e Ricci-plana**. Vamos estudar detalhadamente tais propriedades.

A torção é definida como uma aplicação bilinear $T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$;³ [42]

$$T(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] \quad (2.29)$$

Tomando a base real, (∂_a) ,

$$[\partial_a, \partial_b] = 0 \Rightarrow T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \quad (2.30)$$

Assim, a torção mede a simetria dos símbolos de *Christoffel* associados com determinada base.

Tomando a base $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, temos:

$$T_{ab}^c = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^e}, T\left(\frac{\partial}{\partial z^a}, \frac{\partial}{\partial z^b}\right) \right\rangle = g^{\bar{d}c} (\partial_a g_{b\bar{d}} - \partial_b g_{a\bar{d}}) \quad (2.31)$$

Note que para determinarmos os coeficientes da torção precisamos apenas das derivadas primeiras da métrica. Assim, ela pode ser vista como uma taxa de variação de primeira ordem da variedade.

Para uma métrica de *Kähler*, temos $\partial_a g_{b\bar{d}} = \partial_d g_{a\bar{d}}$, e logo,

$$T_{ab}^c = 0 \quad (2.32)$$

Mostraremos agora que tal propriedade é o resultado de \mathcal{M} ter $H_3 = 0$: de fato, pela conservação de supersimetria dos espinores no regime de supergravidade, temos:

$$\tilde{\nabla}_M \varepsilon = \nabla_M \varepsilon - \frac{1}{8} H_{MAB} \Gamma^{AB} \varepsilon \quad (2.33)$$

³ $\chi(M)$ é o conjunto de todos os vetores tangentes de M .

onde, ∇ é a conexão de *Levi-Civita*. Mas a derivada covariante para um espinor é:

$$\tilde{\nabla}_M \varepsilon = \nabla_M \varepsilon + \frac{1}{4} \Gamma_{MAB} \gamma^{AB} \varepsilon \quad (2.34)$$

onde, $\gamma^{AB} = \gamma^A \gamma^B$ é o produto das matrizes de *Dirac* e Γ_{MAB} são os coeficientes da conexão. Assim, podemos definir uma nova conexão:

$$\tilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{4} \mathbf{H} \quad (2.35)$$

Tomando um sistema de 1-formas invariantes pela esquerda sob ação de um grupo, podemos relacionar as conexões de spin com os coeficientes das matrizes de onde tais formas tomam seu grupo de simetria. Isso permite conectar formas em pontos distintos da variedade e assim estudar suas taxas - derivadas covariantes -.

De fato, sendo G o grupo de simetria do espaço em questão, $g \in G$ um elemento fixo, e $v_p \in T_p M$, a ação de G sobre $T_p M$ pela esquerda é:

$$L_g(p) = gp \quad (2.36)$$

Sobre as formas $\omega \in T_p^* M$, podemos tomar a ação pela esquerda:

$$L_{g^{-1}}^* \omega_e = \omega_g \quad (2.37)$$

Tomando uma base de 1-formas invariantes pela esquerda, o conjunto satisfaz as chamadas equações de *Maurer-Cartan*:

$$d\sigma^A = -\frac{1}{2} C_{BC}^A d\sigma^B \wedge d\sigma^C \quad (2.38)$$

Assim, dado a base padrão de $T_p^* M$, podemos definir um conjunto de 1-formas invariantes pela esquerda chamado *vielbeins*:

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu, \quad e_\mu^a \in G \quad (2.39)$$

A partir das e_M^C são as *vielbeins*, definimos um conjunto de 1-formas chamadas *conexões de Spin*.

$$\omega_B^A = \Gamma_{CB}^A e_M^C dx^M \quad (2.40)$$

Logo, podemos a partir da nova conexão $\tilde{\nabla}$ definir novas conexões de spin relacionando com H_3 :

$$\tilde{\omega}_B^A = \omega_B^A - \frac{1}{2} H_{MB}^A dx^M \quad (2.41)$$

$$H_{MB}^A = \Gamma_{CB}^A e_M^C \quad (2.42)$$

Note que o campo H_3 gera um termo a mais na conexão. Tal termo não é oriundo da métrica mas sim do grupo de simetria G no qual as *vielbeins* tomam valores. Geralmente, $G = SU(n)$.

A torção pode ser vista como a taxa com que as tetradas variam sobre a variedade. Como esta foi definida como um operador linear sobre $\chi(M)$ podemos redefiní-la como:

$$T = T_{ab}^c (dx^a \wedge dx^b) \otimes e_c \quad (2.43)$$

Substituindo as *vielbeins* na definição de torção, obtemos:

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c - C_{ab}^c \quad (2.44)$$

Assim, mesmo tomando uma conexão de *Levi-civita*, podemos ter uma variedade cuja torção é oriunda dos coeficientes de estrutura do grupo sobre a variedade.

Vamos definir uma (2)-forma de torção, tomando valores sobre o grupo $\text{End}(G)$, dada por:

$$T = D_\omega \theta = d\theta + \omega \wedge \theta \Rightarrow T^A = d\theta^A + \omega_B^A \wedge \theta^B \quad (2.45)$$

onde, $\theta^A = e_B^A dx^B$. Escrevendo a 2-forma de torção em relação a base dx^A , temos

$$T^A = \frac{1}{2} H_{MN}^A dx^M \wedge dx^N \quad (2.46)$$

Vemos assim que, se $H_3 = 0 \Rightarrow T^a = 0 \Rightarrow T_{bc}^a = 0$, como dito no início. Nesse caso, a variedade é dita livre de torção.

Como o tensor J_{ab} de estrutura complexa é covariantemente invariante, usando a conexão $\tilde{\nabla}$, teremos:

$$\tilde{\nabla}_a J_{bc} = \nabla_a J_{bc} - \frac{1}{2}(H_{ab}^d J_{dc} + H_{ac}^d J_{bd}) = 0 \quad (2.47)$$

e logo,

$$H = (\partial - \bar{\partial})J \quad (2.48)$$

Assim,

$$dJ = 0 \Leftrightarrow H = 0 \quad (2.49)$$

De maneira geral, dado o campo H_3 podemos encontrar a forma fundamental e daí determinar a estrutura geométrica da variedade. Uma equação desse tipo será estudada no capítulo 5 no cenário heterótico quando formos estudar o *conifold* com torção.

2.1.5 Curvatura de \mathcal{M}_6

Além da torção, que nos dá informação sobre as derivadas primeiras de vetores sobre o espaço, definimos a curvatura como uma grandeza que mede a variação segunda de tais vetores. De fato, a curvatura de *Riemann* é definida como: $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - [x, y]z \quad (2.50)$$

Escolhendo uma base para TM, temos:

$$R(x, y)z = R_{abc}^d x^a y^b z^c e_d \quad (2.51)$$

onde $R_{abc}^d x^a y^b z^c$ é o chamado *Tensor de Riemann*.

A partir do tensor de Riemann podemos definir uma 2-forma de curvatura:

$$\mathcal{R}_b^a = R_{bcd}^a e^c \wedge e^d \quad (2.52)$$

Assim como a torção, podemos definir a 2-forma de curvatura como derivada covariante de uma 1-forma, no caso, as conexões de spin:

$$\mathcal{R} = D_\omega \omega = d\omega + [\omega, \omega] \Rightarrow \mathcal{R}_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma \quad (2.53)$$

Dotando \mathcal{M} com uma estrutura complexa, podemos relacionar tal forma com o determinante da métrica:

$$\mathcal{R} = i\mathcal{R}_{a\bar{b}}dz^a \wedge d\bar{z}^b = i\partial_a\partial_{\bar{b}}\ln(G)dz^a d\bar{z}^b \quad (2.54)$$

Como \mathcal{R} é uma diferencial exata então sua classe de cohomologia $[\mathcal{R}]$ é nula. Assim, a primeira classe característica de *Chern* também é identicamente nula, pois

$$c_1 = \frac{1}{2}[\mathcal{R}] = 0 \quad (2.55)$$

Espaços com característica de *Chern* nula são chamados **Espaços de Calabi-Yau**.

2.1.6 Equações de *Cartan*

A determinação da torção e da curvatura se dá através das equações:

$$\begin{aligned} de^a + \omega_b^a \wedge e^b &= T^a \\ d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c &= R_b^a \end{aligned} \quad (2.56)$$

Tais equações são chamadas *equações de estrutura de Cartan*. Note que o sistema de equações acima determina as vielbeins e as conexões de spin a partir da torção e da curvatura. No caso de uma variedade sem torção nula, as conexões de spin são riemanianas, ou seja,

$$\omega_{ab} = \omega_{ba} \quad (2.57)$$

Em relatividade geral, normalmente toma-se variedades livres de torção, o que possibilita escrevermos as conexões de spin em função das vielbeins. Tal condição pode ser deduzida tomando-se a variação funcional da ação de Einstein-Hilbert-Cartan[26]:

$$S = \int_{M_4} \epsilon^{abcd} R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \quad (2.58)$$

Contudo, fora da camada de massa, pode-se ter ω_b^a não riemaniana. Na verdade, em supergravidade, podemos ver o par (e^a, ω_b^a) como um multipletto na representação adjunta do grupo de Poincaré. Nesse sentido, podemos ver a curvatura como um tensor intensidade de campo para a

conexão de spin que pertence ao subgrupo de Lorentz, enquanto a torção é o tensor intensidade de campo das vielbeins que pertence ao subgrupo das translações do grupo de Poincaré.

Aplicando o operador derivada covariante exterior, podemos encontrar as identidades de *Bianchi* para a curvatura e torção:

$$\mathcal{D}\mathcal{R} = 0 \quad (2.59)$$

$$\mathcal{D}T = \mathcal{R} \wedge \hat{\theta} \quad (2.60)$$

Assim, espaços não Ricci-planos terão uma forma de torção não constante.

2.1.7 (3,0)-Forma holomórfica

Ainda a partir dos espinores covariantemente constantes podemos definir uma (3,0)-forma $\Omega_{(3,0)}$:

$$\Omega_{(3,0)} = \frac{1}{3!} \Omega_{abc} dz^a \wedge dz^b \wedge dz^c \quad (2.61)$$

onde

$$\Omega_{abc} = e^{-2\phi} \eta_-^T \gamma_{abc} \eta_- \quad (2.62)$$

$\Omega_{(3,0)}$ é holomórfica, ou seja,

$$\bar{\partial}\Omega = 0 \quad (2.63)$$

Se o dÍlaton for constante, Ω é fechada pois,

$$d\Omega = \nabla_a \Omega_{bcd} dz^a \wedge dz^b \wedge dz^c \wedge dz^d = 0 \quad (2.64)$$

visto que os espinores são covariantemente constantes. Contudo, Ω não é exata. De fato, $d\Omega = \partial\Omega + \bar{\partial}\Omega = 0$ mas como ela está relacionada a forma volume por $\Omega \wedge \bar{\Omega} = -i|\Omega|^2 dV$ ela não pode ser exata [?].

Uma característica importante de Ω_3 é sua relação com a forma de curvatura,

$$\mathcal{R} = -i\partial\bar{\partial} \ln |\Omega|^2 \quad (2.65)$$

Tal equação implica que a forma de curvatura é uma diferencial exata e como tal, tem *característica de Chern* nula.

2.1.8 Equações de *Strominger*

Para variedades com torção oriunda do tensor H_3 , podemos determinar sua estrutura geométrica através de equações de primeira ordem para a 2-forma fundamental J e para a 3-forma holomórfica Ω . Tais equações são chamadas Equações de *Strominger*.

O quadrado de Ω está relacionado com o dÍlaton por:

$$||\Omega||^2 = e^{-4\phi} \quad (2.66)$$

A relação entre o dÍlaton e Ω é mais geral, dada pela equação:

$$d(e^{-2\phi}\Omega) = 0 \quad (2.67)$$

Como o dÍlaton satisfaz

$$d(e^{-2\phi}J \wedge J) = 0 \quad (2.68)$$

então, obtemos uma equação que relaciona Ω e J

$$d(||\Omega||J \wedge J) = 0 \quad (2.69)$$

Como o quadrado de Ω é proporcional ao volume da variedade, teremos:

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = -\frac{4i}{3}J \wedge J \wedge J \quad (2.70)$$

Além disso,

$$J \wedge \Omega = 0 \quad (2.71)$$

As duas equações acima determinam a estrutura geométrica da variedade interna. A última equação está relacionada com a inexistência de $SU(3)$ vetores invariantes.

Nesse trabalhos iremos constantemente utilizar as equações de Strominger para determinarmos a métrica do espaço. Nos espaços ricci-planos, o dÍlton é feito constante de forma que tanto J como Ω são fechadas.

2.1.9 O espaço modular - Simetrias entre espaços de *Calabi-Yau*-

Classificação topológica dos espaços de *Calabi-Yau*

Dada uma variedade, podemos obter informações sobre sua topologia através dos grupos de homologia, homotopia, cohomologia, etc. Deste último definimos o número de *Betti* como a dimensão dos grupos de Cohomologia de M , ou seja,

$$b_k = H^k(M) \quad (2.72)$$

Tais números são invariantes topológicos e portanto descrevem uma classe de variedades que podem ser continuamente deformadas entre si. Determinam propriedades geométricas da variedade a partir da característica de *Euler*:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k \quad (2.73)$$

No caso de variedades complexas como é o caso dos espaços de *Calabi-Yau* podemos relacionar os números de *Betti* aos chamados números de *Hodge* $h^{p,q}$ através da relação:

$$b_k = \sum_{p=0}^k h^{p,k-p} \quad (2.74)$$

Tais números são determinados por características topológicas das variedades. Assim, se M for simplesmente conexa, $h^{1,0} = 0$. Fisicamente, também determinam o número de estados não massivos da corda.

Espaço Modular

O conjunto de todos os espaços de *Calabi-Yau* topologicamente simétricos - que possuem o mesmo número de *Hodge* - . O espaço modular de 3-variedades complexas - que é o caso dos espaços de *Calabi-Yau*- precisa apenas dos números $h^{1,1}$, $h^{2,1}$ e logo, pode ser fatorado como

o produto direto de um espaço onde todas as variedades tem número de *Hodge* $h^{1,1}$ e outro de todos com $h^{2,1}$:

$$\mathcal{M}(M) = \mathcal{M}^{2,1} \times \mathcal{M}^{1,1} \quad (2.75)$$

O primeiro fator é responsável pelo módulo da estrutura complexa e o outro o módulo da estrutura de *Kähler*. Para se ter uma descrição completa dos estados não-massivos gerados pela variedade interna, devemos acrescentar à forma de *Kähler* o campo B formando a forma de *Kähler* complexificada:

$$\mathcal{J} = B + iJ \quad (2.76)$$

Podemos definir uma métrica do espaço modular escrita como a soma de um termo correspondendo a deformação da estrutura complexa e outro descrevendo a deformação da forma de *Kähler* complexificada:

$$ds^2 = \frac{1}{2V} \int g^{a\bar{b}} g^{c\bar{d}} [\delta g_{ac} \delta g_{\bar{b}\bar{d}} + (\delta g_{a\bar{d}} \delta g_{c\bar{b}} - \delta B_{a\bar{d}} \delta B_{c\bar{b}})] \sqrt{g} d^6x \quad (2.77)$$

A métrica do espaço modular pode ser escrita como:

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = - \left(\frac{i \int \chi_\alpha \wedge \bar{\chi}_{\bar{\beta}}}{i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}} \right) \quad (2.78)$$

onde,

$$\chi_\alpha = \frac{1}{2} (\chi_\alpha)_{ab\bar{c}} dz^a \wedge dz^b \wedge dz^{\bar{c}} \quad (2.79)$$

é uma (2,1)-forma pertencente a $\mathcal{M}^{2,1}$ e:

$$(\chi_\alpha)_{ab\bar{c}} = -\frac{1}{2} \Omega_{ab}^{\bar{d}} \frac{\partial g_{\bar{c}\bar{d}}}{\partial t^\alpha} \quad (2.80)$$

$t^\alpha, \alpha \in 1, 2, \dots, h^{2,1}$ são as coordenadas do espaço modular. Sobre uma mudança na estrutura complexa, a (3,0)-forma Ω varia na forma:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t^\alpha} = K_\alpha \Omega + \chi_\alpha \quad (2.81)$$

onde $K_\alpha = -\partial_\alpha \mathcal{K}^{2,1}$. Daí, podemos definir uma derivada covariante em $\mathcal{M}^{2,1}$ como

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha + \partial_\alpha \mathcal{K}^{2,1} \quad (2.82)$$

A partir desta equação podemos deduzir o potencial de Kähler do espaço modular $\mathcal{M}^{2,1}$:

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}^{2,1} \Rightarrow K^{2,1} = -\ln(i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}) \quad (2.83)$$

Podemos tomar outras coordenadas de $\mathcal{M}^{2,1}$, chamadas *coordenadas especiais* a partir de períodos sobre 3-ciclos A^i :

$$X^i = \int_{A^i} \Omega \quad (2.84)$$

Tomemos uma base de 3-ciclos $A^i, B^j, j \in 1, 2, \dots, h^{2,1}$ satisfazendo as condições:

$$A^i \cap B_j = -B_j \cap A^i = \delta_j^i \quad (2.85)$$

A base dual pode ser definida de tal forma a satisfazer:

$$\int_{A^j} \alpha_i = \int \alpha_i \wedge \beta_j \quad (2.86)$$

O grupo de simetria desse conjunto de 3-ciclos é o grupo simplético modular $Sp(2h^{2,1} + 2; \mathbb{Z})$

Em relação a esse sistema de coordenadas podemos escrever a (3,0)-forma Ω na forma:

$$\Omega = X^i \alpha_i - F_i \beta^i \quad (2.87)$$

Os coeficientes F_i podem ser determinados a partir de uma função chamada **prepotencial**:

$$F^i = \frac{\partial F}{\partial X^i} \quad (2.88)$$

Outra característica importante do **prepotencial** é que ele determina o potencial de Kähler de \mathcal{M} :

$$e^{-\mathcal{K}^{2,1}} = -i \sum_i^{h^{2,1}} X^i \bar{F}_i - \bar{X}^i F_i \quad (2.89)$$

Quando uma das coordenadas X^i anula-se dizemos que há nesse ponto uma **singularidade cônica**. Próximo a singularidade temos:

$$\mathcal{K} \sim \ln(|X^1|^2 \ln(|X^1|^2)) \quad (2.90)$$

e logo a métrica é singular em $X^1 = 0$ o que está relacionado ao fato de que **nesse ponto certos campos massivos tornam-se sem massa**.

Já para o espaço modular $\mathcal{M}^{1,1}$, definimos uma métrica a partir do produto interno:

$$(\rho, \sigma) = \frac{1}{2V} \int_{\mathcal{M}} \rho \wedge \star \sigma \quad (2.91)$$

e o produto

$$\kappa(\rho, \sigma, \tau) = \int_{\mathcal{M}} \rho \wedge \sigma \wedge \tau \quad (2.92)$$

e logo,

$$G(\rho, \sigma) = -\frac{1}{2V} \kappa(\rho, \sigma, J) + \frac{1}{8V^2} \kappa(\rho, J, J) \kappa(\sigma, J, J) \quad (2.93)$$

Tomando uma base e_a de (1,1)-formas, definimos o *número de interseções*:

$$\kappa_{abc} = \kappa(e_a, e_b, e_c) \quad (2.94)$$

2.1.10 Subvariedades de *Calabi-Yau* do tipo $\mathbb{C}P^n$ geradas por polinômios

Podemos gerar espaços de *Calabi-Yau* a partir de subvariedades do espaço projetivo $\mathbb{C}P^n$. Dado $(z, w) \in C^{n+1}/0$ definimos uma relação de equivalência $z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}; z = \lambda w$. $\mathbb{C}P^n = [w]$. Tal espaço é uma variedade de *Kähler* pois admite uma métrica oriunda do potencial:

$$K = \ln(1 + \sum_{a=1}^n |w_a|^2) \quad (2.95)$$

Essa variedade é ideal no processo de compactificação pois além de ser simétrica a aplicação quociente leva retas em \mathbb{C}^{n+1} em pontos em $\mathbb{C}P^n$. No entanto, $\mathbb{C}P^n$ não é uma espaço de *Calabi-Yau* pois não é Ricci-Plano. Contudo, existem subvariedades $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{C}P^n$ que são. Tais variedades podem ser definidas como soluções de equações polinomiais sobre um dado anel, problema clássico de geometria algébrica. Por exemplo, no estudo das transições possíveis entre espaços de *Calabi-Yau* sobre $\mathbb{C}P^4$, toma-se um polinômio $G(z)$, invariante sobre o grupo Z_5^3 , da forma[2]

$$G(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \psi z_1^5 z_2^5 z_3^5 z_4^5 z_5^5 \quad (2.96)$$

onde,

$$z'_i \sim z_i \Leftrightarrow z'_i = e^{\frac{2\pi n_i}{5}} z_i \quad (2.97)$$

Podemos ainda escolher o polinômio definido sobre uma álgebra de *Lie* de um determinado grupo de simetria como o $SU(n)$. Para polinômios homogêneos de grau k , ou seja, para a função $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n; G(z) = G(z_1, \dots, z_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} c_i z^i$ satisfazendo:

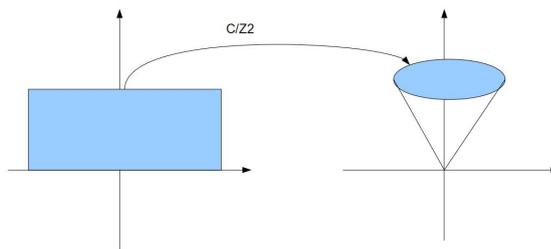
$$G(\lambda z) = \lambda^k G(z) \quad (2.98)$$

Pode-se mostrar que se $k = n + 2$ então a subvariedade é de Calabi-Yau [1]. Nessa referência também há uma discussão sobre vários espaços construídos com diferentes polinômios. Vamos agora ao caso de interesse, o *conifold*.

2.2 O conifold

O *conifold* é um espaço cônico, ou seja, um espaço com uma singularidade na origem, gerado no processo de compactificação de uma variedade através da ação de um grupo discreto. Parte-se de uma variedade \mathcal{M} e um grupo discreto G . A ação desse grupo sobre a variedade torna equivalentes certos pontos tornando-os simétricos. O espaço quociente M/G é um espaço cônico se houver um ponto fixo da ação do grupo sobre a variedade inicial. Tal ponto é chamado singularidade, ápice, nodo, etc. Espaços gerados dessa maneira são chamados *orbifolds* pois são a órbita da ação do grupo sobre o espaço inicial.

Como exemplo, se tomarmos o plano complexo, que é um espaço não-compacto, e definirmos a relação de equivalência $z \sim -z$, o resultado será a compactificação do plano superior num cone.



Note que $z = 0$ é um ponto fixo dessa aplicação, pois $0 \sim 0$. Tal ponto é a singularidade do cone.

Podemos definir o *conifold* $C_6 \subset \mathbb{C}^4$ como a solução para a equação quádrlica [?]:

$$G : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4; G(z) = \sum_{a=1}^4 w_a^2 = 0 \quad (2.99)$$

Como $G(z) = 0$, dizemos que a quádrlica é degenerada. Tal equação descreve um hipercone, pois, dado $w \in C_6 \Rightarrow \lambda w \in C_6$, ou seja, dado um ponto do cone, se multiplicarmos sua distância por um número continuaremos sobre o cone. Tal é uma característica peculiar dos cones que facilmente podemos ver para um 2-cone imerso em três dimensões. Nesse caso, a equação algébrica do 2-cone é:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \quad (2.100)$$

Para toda variedade cônica, temos um espaço-base. No caso, de um 2-cone cujo espaço-base é a 1-esfera - círculo - temos:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \quad (2.101)$$

Existe na literatura outras definições para os espaços cônicos, como:

$$Y^2 = XZ \quad (2.102)$$

ou ainda,

$$xy = uv \quad (2.103)$$

onde, $x, y, u, v \in \mathbb{C}$. Todas elas tomam parametrizações diferentes e portanto são equivalentes.

Podemos buscar uma representação matricial para o *conifold* tomando o produto $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ e como $SU(2) \subset \mathbb{C}^2$, tomemos uma parametrização do *conifold* onde $C_6 = SU(2) \times SU(2)$, donde $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$

$$\mathcal{W} = w_i \sigma^i + w_4 \mathbf{1} \quad (2.104)$$

onde, σ_i são as matrizes de *Pauli*, donde

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_3 + iw_4 & w_1 - iw_4 \\ w_1 + iw_2 & -w_3 + iw_4 \end{pmatrix}$$

com

$$\det(\mathcal{W}) = 0 \quad (2.105)$$

Fazendo $w = u + v$; $u = w_1 + iw_2$ e $v = w_3 + iw_4$, teremos:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} u & \bar{v} \\ v & -\bar{u} \end{pmatrix}$$

Como $\det(\mathcal{W}) = -(u\bar{u} + v\bar{v}) = -(\sum_{i=1}^4 w_i^2)$ então o anulamento do determinante é uma outra forma de escrever o *conifold*.

Outra forma de vermos o *conifold* é relacionando-o ao grupo $\mathbb{C}P^n$. De fato, partindo de uma $S^7 = w \in \mathbb{C}^4 |z| = 1$ e fazendo uma redução dimensional através da relação de equivalência $u \sim w \Leftrightarrow u = \lambda w$, obtemos a variedade $\mathbb{C}P^3 = S^6 = SU(2) \times SU(2)$.

A partir da matriz \mathcal{W} podemos também definir uma coordenada radial independente de representação, pois

$$r^2 = \text{tr}(\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger) \quad (2.106)$$

Satisfazendo a condição acima, podemos tomar a seguinte representação em $SU(2) \times SU(2)$ para \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = rL_1(\sigma_1 + i\sigma_2)L_2^\dagger \quad (2.107)$$

onde

$$L_j = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_j}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi_j+\phi_j)} & -\text{sen}\frac{\theta_j}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi_j-\phi_j)} \\ \text{sen}\frac{\theta_j}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi_j-\phi_j)} & \cos\frac{\theta_j}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi_j+\phi_j)} \end{pmatrix}$$

onde $L_j \in SU(2)$. \mathcal{W} fica então:

$$\mathcal{W} = re^{\frac{i}{2}\psi} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2}\text{sen}\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i}{2}(\phi_1-\phi_2)} & \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i}{2}(\phi_1+\phi_2)} \\ -\text{sen}\frac{\theta_1}{2}\text{sen}\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i}{2}(\phi_1+\phi_2)} & \text{sen}\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i}{2}(\phi_1-\phi_2)} \end{pmatrix}$$

Na representação acima, fizemos $\psi = \psi_1 + \psi_2$, ou seja, tomamos o quociente do espaço anterior $S(U) \times SU(2)$ pelo grupo $U(1)$. Essa operação permite definirmos uma coordenada radial r e um espaço perpendicular à essa coordenada. Tal espaço é chamado *espaço de base do conifold* e é o espaço quociente homogêneo:

$$\mathcal{T}^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1) \quad (2.108)$$

O estudo dos espaços homogêneos é bastante importante, principalmente no caso das variedades cônicas, visto que tais espaços são o quociente de um grupo de isometria de uma variedade pelo seu subgrupo que deixa pontos invariantes, como é o caso do *conifold*.

$\mathcal{T}^{1,1}$ é um espaço de *Einstein* homeomorfo à S^5 parametrizado por $w = (r, \phi, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$. Tal variedade servirá de extensão da correspondência *AdS-CFT*. Tais espaços cônicos de *Einstein* formados a partir de espaços homogêneos são chamados *espaços de Sasaki-Einstein*.

2.3 Métrica do *conifold*

Para um 2-cone imerso em \mathbb{R}^3 , cujo espaço base é S^1 , podemos tomar a seguinte parametrização:

$$w \in C_2 \Rightarrow w = (r \text{sen} \alpha \cos \phi, r \text{sen} \alpha \text{sen} \phi, \text{sen} \alpha) \quad (2.109)$$

onde, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, α constante.

Em relação a essa parametrização, o elemento de linha fica:

$$ds_2^2 = dr^2 + r^2 \text{sen}^2 \alpha d\phi^2 \quad (2.110)$$

Vamos buscar uma métrica que estenda a acima citada em seis dimensões. Tomemos a seguinte configuração para a métrica desse espaço cônico, anteriormente utilizada por *Cvetič et al* [21]:

$$ds_{C_6}^2 = h^2(r) dr^2 + \alpha^2(\rho) \sigma^2 + \beta^2(\rho) d\omega_1^2 + \gamma^2(\rho) d\omega_2^2 \quad (2.111)$$

onde,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 \\ d\omega_i^2 &= d\theta_i^2 + \text{sen}^2\theta_i d\phi^2\end{aligned}\tag{2.112}$$

O escalar de curvatura desse espaço é do tipo:

$$R = -\frac{g(r)}{\alpha\beta^2\gamma^2h^3}\tag{2.113}$$

onde $g(r)$ é uma função gerada pela combinação das funções α, β, γ, h . Assim, dependendo da combinação entre os fatores de warp, podemos ter uma métrica com ou sem singularidade na origem.

A partir da métrica acima, os autores definiram um sistema de *vielbeins*

$$\begin{aligned}e^1 &= h(r)dr \quad , \quad e^6 = \alpha(r)\sigma \\ e^2 &= \beta(r)d\theta^1 \quad , \quad e^3 = \beta(r)\text{sen}(\theta_1)d\phi^1 \\ e^4 &= \gamma(r)d\theta^2 \quad , \quad e^5 = \gamma\text{sen}(\theta_2)d\phi^2\end{aligned}\tag{2.114}$$

e propuseram uma 2-forma de estrutura quase-complexa da forma:

$$\begin{aligned}J_2 &= e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 - e^1 \wedge e^6 \\ &= \beta^2 \text{sen}(\theta_1) d\theta^1 \wedge d\phi^1 + \gamma^2 \text{sen}(\theta_2) d\theta^1 \wedge d\phi^2 - h\alpha dr \wedge \sigma\end{aligned}\tag{2.115}$$

Como $dJ_2 = 0$, temos uma forma de *Kähler*. Logo, o *conifold* é uma variedade de *Kähler* e assim, podemos definir uma métrica oriunda de um potencial de *Kähler* da forma:

$$g_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K(\rho)\tag{2.116}$$

Assim, o elemento de arco para o *conifold* singular fica:

$$\begin{aligned}ds_{C_6}^2 &= \partial_m \partial_{\bar{n}} K(\rho) dz^m dz^{\bar{n}} \\ &= K''(tr(\mathcal{W}^\dagger d\mathcal{W}))^2 + K'(tr(d\mathcal{W}^\dagger d\mathcal{W}))\end{aligned}\tag{2.117}$$

$$\begin{aligned}&= (\rho^2 K'' + K')d\rho^2 + \frac{1}{2}(\rho^4 K'' + \rho^2 K')(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 \\ &+ \frac{1}{4}K'\rho^2 (d\theta_1^2 + \text{sen}^2\theta_1 d\phi_2^2 + d\theta_1^2 + \text{sen}^2\theta_1 d\phi^2)\end{aligned}\tag{2.118}$$

Tomando $K(\rho^2) = 1$, temos:

$$ds_{C_6}^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{1}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^2 d\theta_i^2 + \text{sen}^2\theta_i d\phi_i^2 \right) \right) \quad (2.119)$$

Tal é a métrica do *conifold* sem torção cujo espaço-base é $\mathcal{T}^{1,1}$. Generalizações para espaços-bases do tipo $\mathcal{T}^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, têm a forma [31]:

$$ds_{\mathcal{T}}^2 = \lambda_1(d\psi + p\cos\theta_1 d\phi_1 + q\cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \lambda_2(d\theta_1^2 + \text{sen}^2\theta_1 d\phi_1^2) + \lambda_3(d\theta_2^2 + \text{sen}^2\theta_2 d\phi_2^2) \quad (2.120)$$

Tais espaços são ainda localmente homeomorfos a $S^3 \times S^2$ e se seus parâmetros satisfizerem:

$$\Lambda\lambda_1 = \frac{p^2}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{q^2}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^2 \quad (2.121)$$

então $\mathcal{T}^{p,q}$ será um espaço de *Einstein* com constante cosmológica Λ . Se $p = q = 1$ e $\lambda_1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{6}$ então $\mathcal{T}^{1,1}$ é *Ricci-plano*.

Note que o *ansatz* utilizado por *Cvetič et al* é o da generalização para um espaço-base $\mathcal{T}^{p,q}$. Tais espaços tem uma singularidade que não depende da parametrização escolhida, visto que o escalar de curvatura R é:

$$R = \frac{f(\theta_1)}{\lambda_2 r^2} \quad (2.122)$$

que obviamente diverge na origem.

Vamos agora escrever a métrica do *conifold* em função de *vielbeins*. Tal abordagem será útil na construção da forma quase-complexa e da forma de curvatura. Tomando uma base de 1-formas pertencentes ao grupo $SU(2) \times SU(2)$, satisfazendo as relações de Maurer-Cartan:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \sqrt{\rho^2 K'' + K'} d\rho \\
e_2 &= \frac{\sqrt{\rho^4 K'' + \rho^2 K'}}{2} (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2) \\
e_3 &= \frac{\rho\sqrt{K'}}{2} (\sin\psi \sin\theta_1 d\phi_1 + \cos\psi d\theta_1) \\
e_4 &= \frac{\rho\sqrt{K'}}{2} (-\cos\psi \sin\theta_1 d\phi_1 + \sin\psi d\theta_1) \\
e_5 &= \frac{\rho\sqrt{K'}}{2} (\sin\psi \sin\theta_2 d\phi_2 + \cos\psi d\theta_2) \\
e_6 &= \frac{\rho\sqrt{K'}}{2} (-\cos\psi \sin\theta_2 d\phi_2 + \sin\psi d\theta_2)
\end{aligned} \tag{2.123}$$

$$de^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^i e^j \wedge e^k \tag{2.124}$$

$$d\tilde{e}^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^i \tilde{e}^j \wedge \tilde{e}^k \tag{2.125}$$

podemos escrever a métrica do *conifold* na forma:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 e_i^2 \tag{2.126}$$

A partir das *vielbeins* podemos definir um conjunto de 1-formas complexificadas:

$$\begin{aligned}
E_1 &= e_1 + ie_2 \\
E_2 &= e_3 + ie_4 \\
E_3 &= e_5 + ie_6
\end{aligned} \tag{2.127}$$

A partir das *vielbeins* complexificadas podemos definir a (3,0)-forma holomórfica Ω :

$$\Omega_{3,0} = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \tag{2.128}$$

Pela equação de *Strominger*

$$d(e^{-2\phi}\Omega) = 0 \Rightarrow e^{-2\phi} d\Omega + d(e^{-2\phi})\Omega = 0 \tag{2.129}$$

Supondo que o dÍlaton seja constante sobre o espaço interno, temos:

$$d\Omega = 0 \quad (2.130)$$

Assim, para o *conifold* Ricci-plano, $\Omega_{3,0}$ deve ser fechada. Logo,

$$d\Omega_{3,0} = 0 \Rightarrow \rho^2 G' - G = 0 \quad (2.131)$$

onde, $G = \rho^2 K'(\rho^4 K'' + \rho^2 K')^{\frac{1}{2}}$. Integrando esta equação, obtemos:

$$K' = \left(\frac{3\lambda^2}{2\rho^2} + \frac{c}{\rho^6} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.132)$$

onde λ é uma constante positiva e c é uma constante de integração arbitrária.

Para $c = 0$, o potencial de Kähler tem a forma:

$$K(\rho) = \left(\frac{9\lambda}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \quad (2.133)$$

O potencial acima se anula na origem $\rho = 0$ o que implica que a métrica é singular neste ponto.

2.4 Branais sobre a singularidade do conifold e uma extensão da correspondência calibre-gravidade;

O *conifold* pode ser usado para estender a correspondência calibre-gravidade. Tomando um *bulk* da forma:

$$\mathcal{M}_{10} = \mathcal{M}_4 \times C_6 \quad (2.134)$$

com uma métrica [?]:

$$ds_{10}^2 = h(r)^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h(r)^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 ds_T^2) \quad (2.135)$$

Note que estamos escolhendo uma geometria não-fatorizável, pois a variedade interna interfere sobre as propriedades da variedade externa. Além disso, os fatores de *warp* tornam o espaço conformalmente Ricci-plano. onde,

$$h(r) = \left(1 + \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right) \quad (2.136)$$

Próximo a origem, ou seja, $r = 0$, o *bulk* converge para um espaço da forma $AdS_5 \times T^{1,1}$, pois sua métrica toma a forma:

$$ds_{10}^2 = \frac{r^2}{R^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2) + R^2 ds_{\mathcal{T}}^2 \quad (2.137)$$

O primeiro termo da métrica acima é o de um espaço AdS_5 com raio R , em coordenadas de *Poincaré*, enquanto o segundo termo é a métrica do espaço quociente $\mathcal{T}^{1,1}$, que por ser topologicamente idêntico à S^5 , também tem raio R .

O fator de *warp* escolhido é próprio de configurações do tipo *branas negras*⁴. Tais soluções são o análogo nas dimensões extras das soluções esfericamente simétricas, carregadas e com singularidade [39].

Ao invés de tomarmos um fator de *warp* a mão, podemos determiná-lo via equação de *Einstein*, se definirmos um tensor energia-momentum para campos vivendo na variedade interna. O fator fica então determinado pela cargas - inclusive topológicas - dos campos vivendo em branas.

Klebanov-Strassler [?] estudaram os efeitos que tal singularidade teria sobre uma teoria conforme via grupo de renormalização. Tomando um pilha de N D3-branas sobre a singularidade do *conifold*, o grupo de simetria é o $SU(N)$ e os autores concluíram que a teoria era conforme. Já introduzindo M D3-branas fracionárias, formadas ao colapsar um 2-ciclo de uma D5-brana, o grupo de simetria muda para $SU(N+M)$ e a invariância conforme é quebrada. De fato, o fator de *warp* fica em função das cargas na forma:

$$h(r) = 1 + \frac{Q(r)}{r^4} \quad (2.138)$$

onde,

$$Q(r) = c_1 g_s N + c_2 (g_s M)^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad (2.139)$$

O termo logarítmico indica a presença de uma singularidade nua em $r = 0$, chamado *regime infravermelho*. Já em largas distâncias, chamado *regime ultravioleta*, a variedade converge para um *conifold Ricci-plano*. Para manter tal simetria, deve-se suavizar o *conifold*. As técnicas utilizadas para esse objetivo serão desenvolvidas no próximo capítulo.

⁴*black branes* em inglês.

2.4.1 O conifold e os modelos de mundo-brana

Por ser uma variedade não-compacta em uma dimensão, o *conifold* serve de base para modelos de dimensões extras que sejam uma alternativa para a compactificação, como o modelo *Randall-Sundrum*[15]. Em tal modelo, há também um *bulk* de cinco dimensões não-fatorizável da forma [16]:

$$ds_5^2 = e^{-2kr_c\phi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (2.140)$$

A partir desse modelo, os autores conseguiram obter uma explicação geométrica para a hierarquia presente no modelo-padrão entre a escala eletrofraca e a gravitacional. Novamente o *bulk* tem uma geometria AdS_5 e fatores de *warp* dependentes apenas da dimensão extra.

Em seguida surgiram modelos propondo configurações de campos escalares na dimensão extra que gerassem uma geometria desse tipo além de extensões utilizando mais dimensões. Para uma dimensão extra é possível obter o modelo acima a partir de um defeito topológico do tipo parede de domínio. Para duas dimensões extras é possível termos um defeito do tipo vórtice, em três um monopolo magnético e em quatro um instanton. Gregory tomou um ansatz da forma:

$$ds_6^2 = e^{2A(r)} H^{-2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2 - C^2(r) d\theta^2 \quad (2.141)$$

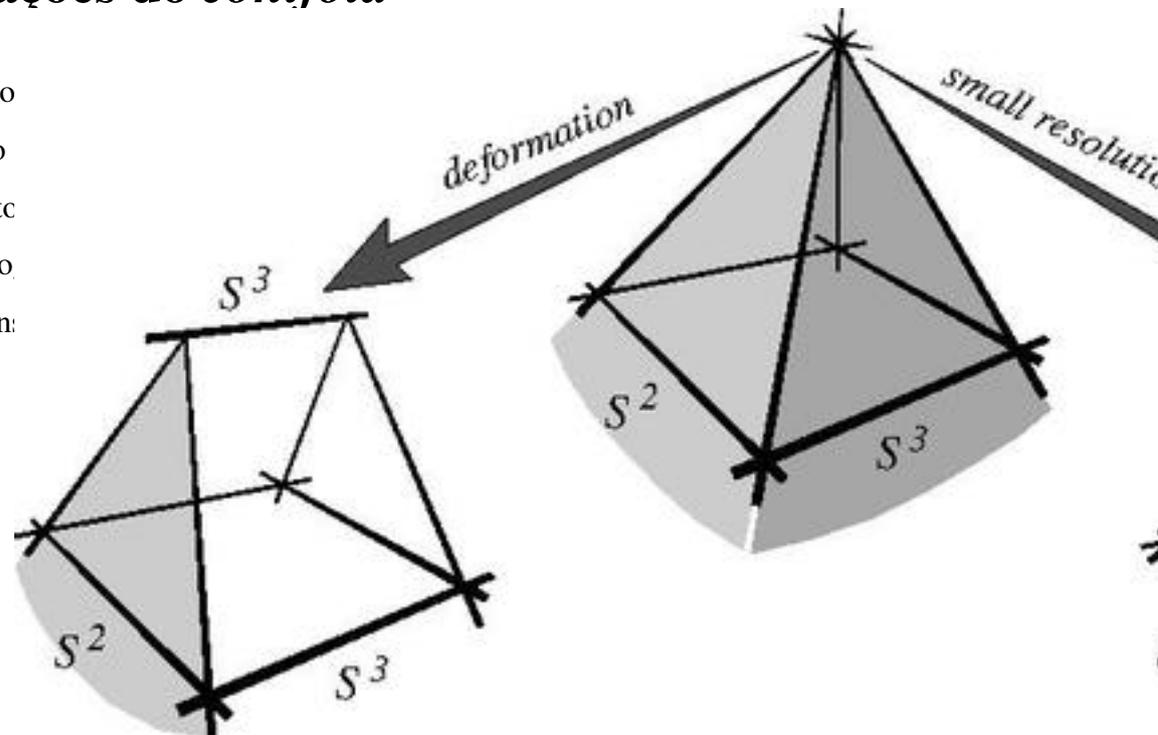
Ghergetta e Shaposhnikov escolheram:

$$ds_6^2 = \sigma^2(r) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2 - C^2(r) d\theta^2 \quad (2.142)$$

Assim como o *conifold*, tais configurações são conformemente Ricci-planas, com fatores de *warp* dependentes apenas da coordenada radial. No capítulo de suavizações por fluxo, veremos que é possível obter uma estimativa para o comprimento da dimensão extra em termos de fluxos sobre D-3 branas fracionárias.

3 Suavizações do *conifold*

Há dois métodos chamados *deformation* e *small resolution*. O primeiro é chamado *deformation* e o segundo é chamado *small resolution*. O *conifold* é topologicamente equivalente a uma expansão de uma esfera S^3 , enquanto o *conifold* é topologicamente equivalente a uma expansão de uma esfera S^3 .



As duas técnicas foram pioneiramente estudadas por *Candelas e De la Ossa* [?] e são na verdade versões de uma métrica mais geral construída sobre $T^*\mathbb{C}P^n$, o fibrado cotangente do espaço projetivo complexo, a chamada *métrica de Stenzel*.

Um espaço que tem métrica de *Stenzel* e que tanto a *resolution* como a *deformation* são representadas são os chamados espaços de *Eguchi-Hanson*. Tais variedades são as únicas nas quais se pode fazer uma incisão de uma esfera de raio a na vizinhança da singularidade, obtendo como contorno S^3/\mathbb{Z}_2 , pois identifica-se pontos opostos da esfera [1]. A métrica desse espaço é da forma:

$$ds_4^2 = \Delta^{-1} dr^2 + \frac{1}{4} r^2 \Delta (d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + \frac{1}{4} r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

onde $\Delta(r) = 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^4$. Tal métrica é própria das geradas por defeitos do tipo instantons. De fato, quando estudarmos a resolução do *conifold* utilizando fluxos veremos que tais fluxos são gerados por instantons.

Vamos estudá-los em detalhes apesar de darmos maior ênfase à *resolution* que será o objetivo principal de nosso estudo.

3.1 Deformation

Nessa técnica, buscamos suavizar o *conifold* modificando- *deformando*- o polinômio que define a variedade. Ao invés de $G(z) = 0$, teremos:

$$G(z) = \epsilon^2 \quad (3.2)$$

donde

$$\sum_{a=1}^4 (w^a)^2 = \epsilon^2 \quad (3.3)$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é uma constante real não negativa conhecida como *parâmetro de deformação*. Tal solução descreve uma variedade de Calabi-Yau tridimensional cônica cuja base é $S^2 \times S^3$.

Novamente, parametrizando C_6 por $SU(2)$, temos:

$$W = rL_1 Z_\epsilon^0 L_2^\dagger \quad (3.4)$$

e logo,

$$\det W = -\frac{1}{2}\epsilon^2 \quad (3.5)$$

Vamos decompor W^a em componentes reais e imaginárias:

$$w^a = x^a + iy^a \quad (3.6)$$

Definindo

$$\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y} = \rho^2 \quad (3.7)$$

logo, o polinômio do conifold se reduz ao sistema de equações $x^2 = \frac{1}{2}\rho^2$, $y^2 = \frac{1}{2}\rho^2$ e $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$ que podem ser interpretados como: a primeira equação descreve uma 3-esfera e as duas últimas descrevem uma 2-esfera fibrada sobre a 3-esfera.

Já no cone deformado, ao acrescentarmos a constante z , devemos adicionar a equação:

$$x^2 - y^2 = z \quad (3.8)$$

Como

$$z \leq \rho^2 < \infty \quad (3.9)$$

então para $z > 0$, a singularidade é removida. Quando $\rho \rightarrow z$, a 2- esfera vai se reduzindo sobrando apenas a 3-esfera e por isso diz-se que o método consiste em substituir a região em torno da singularidade por uma 3-esfera.

O *conifold* deformado têm a vantagem de ser suave próximo a origem e logo, no regime infravermelho, as teorias duais são conformes.

3.2 Resolution

Nesse método, ao invés de modificarmos o polinômio que define a variedade, vamos estender o conjunto solução da equação polinomial $G(z) = 0$, reinterpretando tal equação. De fato a equação polinomial é equivalente a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

onde,

$$\begin{aligned} X &= \omega_1 + i\omega_2 \\ Y &= \omega_1 - i\omega_2 \\ U &= \omega_3 + i\omega_4 \\ V &= -\omega_3 + i\omega_4 \end{aligned} \quad (3.11)$$

O polinômio que define o *conifold* pode agora ser estudado a partir das soluções da equação matricial acima.

Note que apesar da equação matricial acima ser equivalente à equação polinomial, introduzimos dois novos parâmetros complexos, as constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Assim, sobre a singularidade do conifold estamos definindo uma fibra CP^1 que será essencial na retirada da singularidade.

Se definirmos o parâmetro $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, podemos ainda reescrever a matriz \mathcal{W}

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} -\lambda U & U \\ -\lambda Y & Y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Para $w = (X, Y, U, V) = 0$, qualquer $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$ satisfaz a equação matricial. Logo, sobre o ponto onde havia a singularidade, definimos um parâmetro que toma valores sobre o grupo $CP^1 \cong S^2$. Como para descrever completamente a variedade precisamos encontrar \mathcal{W} e λ então, fixado o ponto, ainda resta determinar λ . Como tal solução é uma 2-esfera, dizemos que nesse processo estamos trocando a singularidade através de uma 2-esfera.

Note que além de não alterarmos a equação polinomial que define a variedade mas sim ampliarmos o conjunto solução, quando $|\lambda| \Rightarrow 0$, obtemos o *conifold* singular. Assim, tal método suaviza a variedade introduzindo um parâmetro de *resolução*, de onde provêm o nome da técnica.

3.2.1 Métrica do *resolved conifold*

Vamos considerar um potencial de Kähler para o conifold resolvido de forma que ele dependa de um *parâmetro de resolução* a e quando $a \rightarrow 0$, obtemos o conifold singular:

$$K(\rho, \lambda) = F(\rho^2) + 4a^2 \ln(1 + \lambda^2) \quad (3.13)$$

onde $a \geq 0$ e

$$\rho^2 = (1 + \lambda^2)(U^2 + Y^2) \quad (3.14)$$

Note que a métrica fica então parametrizada por a . No caso $a = 0$, temos o conifold singular.

Como o sistema tem simetria $SU(2) \times SU(2) \times SU(1)$, vamos tomar a seguinte representação para U, V, λ :

$$U = \rho e^{\frac{i}{2}(\psi + \phi_1 + \phi_2)} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (3.15)$$

$$Y = \rho e^{\frac{i}{2}(\psi - \phi_1 + \phi_2)} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (3.16)$$

$$\lambda = e^{-i\phi_2} \tan \frac{\theta_2}{2} \quad (3.17)$$

A métrica fica:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (\rho^2 F'' + F')d\rho^2 + \frac{1}{2}(\rho^4 F'' + \rho^2 F')(e^3 + \tilde{e}^3)^2 \\
&+ \frac{1}{4}F'\rho^2 ((e^1)^2 + (e^2)^2) + \frac{1}{4}(F'\rho^2 + 4a^2) ((\tilde{e}^1)^2 + (\tilde{e}^2)^2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Note que a métrica acima pode ser analisada segundo o *ansatz* de Cvetič *et al*[21] fazendo:

$$\begin{aligned}
h^2 &= \rho^2 F'' + F' \quad , \quad \alpha^2 = \rho^4 F'' + \rho^2 F' \\
\beta^2 &= F'\rho^2 \quad , \quad \gamma^2 = \frac{1}{4}(F'\rho^2 + 4a^2)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Supondo que $\lim_{\rho \rightarrow 0} F''(\rho) = 0$, então

$$R = \frac{g(r)}{a^2} \tag{3.20}$$

onde novamente, $g(r)$ é uma função de h, α, β, γ . Assim, o *conifold* resolvido não é singular na origem.

A partir da métrica acima podemos tomar o seguinte conjunto de formas diferenciais - *Vielbeins* -:

$$\begin{aligned}
e^1 &= \text{sen}\psi \text{sen}\theta_1 d\phi_1 + \text{cos}\psi d\theta_1 \\
e^2 &= -\text{cos}\psi \text{sen}\theta_1 d\phi_1 + \text{sen}\psi d\theta_1 \\
\tilde{e}^1 &= \text{sen}\psi \text{sen}\theta_2 d\phi_2 + \text{cos}\psi d\theta_2 \\
\tilde{e}^2 &= -\text{cos}\psi \text{sen}\theta_2 d\phi_2 + \text{sen}\psi d\theta_2 \\
e^3 + \tilde{e}^3 &= d\psi + \text{cos}\theta_1 d\phi_1 + \text{cos}\theta_2 d\phi_2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

E a partir dessas 1-formas básicas, podemos definir as formas próprias do *conifold* resolvido:

$$\begin{aligned}
E^1 &= \frac{1}{2}(\rho^2 F')^{\frac{1}{2}} e^1 \quad , \quad E^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 F')^{\frac{1}{2}} \\
E^3 &= \frac{1}{2}(\rho^2 F' + 4a^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{e}^1 \quad , \quad E^4 = \frac{1}{2}(\rho^2 F' + 4a^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{e}^2 \\
E^5 &= \frac{1}{2}(\rho^4 F'' + \rho^2 F')^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} d\rho \quad , \quad E^6 = \frac{1}{2}(\rho^4 F'' + \rho^2 F')^{\frac{1}{2}} (e^3 + \tilde{e}^3)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Em termos dessas formas, a métrica toma a forma:

$$ds_6^2 = \delta_{ab} E^a \otimes E^b \quad (3.23)$$

A partir das *Vielbeins* podemos definir a 3-forma holomórfica:

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= (E^1 + iE^2) \wedge (E^3 + iE^4) \wedge (E^5 + iE^6) \\ &= (E^{135} - E^{245} - E^{146} + E^{146}) + i(E^{145} + E^{235} + E^{136} - E^{246}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como estamos estudando *conifold* como espaços de *Calabi-Yau*, a forma acima deve ser fechada. Como

$$d\Omega = \nabla_a \Omega_{bcd} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d \quad (3.25)$$

então ao tomarmos a coordenada radial ρ , cuja forma diferencial respectiva é E^5 , devemos derivarmos apenas as componentes diferentes de $r = 5$. O número das componentes que têm coordenadas na direção ρ é igual a que não tem. Logo, após efetuar todas as derivações e agrupar os termos com fator E^5 , obtemos a equação

$$d\Omega = 0 \Rightarrow \rho^2 G' - G = 0 \quad (3.26)$$

onde,

$$G = G(r) = \sqrt{\rho^2 F' (\rho^2 F' + 4a^2) (\rho^4 F'' + \rho^2 F')} \quad (3.27)$$

Tomando

$$\frac{G}{\rho^2} = \lambda \quad (3.28)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, uma constante, obtemos a seguinte equação não-linear para F:

$$(\rho^2 F')^3 + 6a^2 (\rho^2 F')^2 = \frac{3}{2} \lambda^2 \rho^4 + c \quad (3.29)$$

Tal equação determina a forma do potencial de Kähler a menos de constantes de integração. Temos então uma família de soluções parametrizadas pelo fator a .

Para solucionarmos a equação acima vamos fazer a substituição:

$$x = \rho^2 F'(\rho) \quad (3.30)$$

A equação fica então na forma

$$x^3 + 6a^2x^2 - \frac{3}{2}\lambda^2\rho^4 = 0 \quad (3.31)$$

Na equação acima, fizemos $c = 0$ pois d'outra forma não teríamos a condição $x(\rho = 0) = 0$ e logo, $F'(\rho = 0) \times 0 = c \neq 0$, um absurdo.

Outra simplificação possível na equação cúbica é a mudança de coordenadas:

$$r = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho \quad (3.32)$$

O que faz a equação ficar na forma mais estética:

$$x^3 + 6a^2x^2 - r^4 = 0 \quad (3.33)$$

Utilizando o algoritmo de Tartaglia-Cardano para a obtenção das raízes de uma equação do terceiro grau, encontramos a expressão para x :

$$x(r) = -2a^2 + 4a^2N(r)^{-\frac{1}{3}} - N(r)^{\frac{1}{3}} \quad (3.34)$$

onde,

$$N(r) = \frac{1}{2} \left(r^4 - 16a^6 + \sqrt{r^8 - 32a^6r^4} \right) \quad (3.35)$$

A análise das soluções de uma equação do terceiro grau mostra que uma condição para termos três soluções distintas é:

$$r^8 - 32a^6r^4 < 0 \Rightarrow r^2 < 4\sqrt{2}a^3 \quad (3.36)$$

Tal condição impõe um vínculo sobre o método da retirada da singularidade: a resolução depende diretamente do ponto do conifold analisado e vice-versa.

Podemos expressar a métrica do 6-cone em função de x na forma:

$$ds_6^2 = x' dr^2 + ds_3^2 + ds_2^2 \quad (3.37)$$

$$= x' dr^2 + \frac{1}{4} x' r^2 e_\phi^2 + \frac{1}{4} x (e_{\theta_1}^2 + e_{\phi_1}^2) + \frac{1}{4} (x + 4a^2) (e_{\theta_2}^2 + e_{\phi_2}^2) \quad (3.38)$$

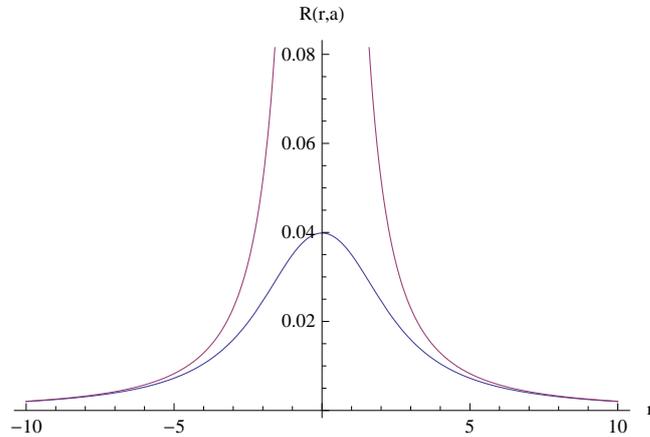
Fazendo uma mudança de variáveis para

$$\rho^2 = \frac{3}{2} x \quad (3.39)$$

a métrica fica na forma:

$$ds_6^2 = \left(\frac{\rho^2 + 6a^2}{\rho^2 + 9a^2} \right) d\rho^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{\rho^2 + 9a^2}{\rho^2 + 6a^2} \right) \rho^2 e_\phi^2 + \frac{1}{6} \rho^2 (e_{\theta_1}^2 + e_{\phi_1}^2) + \frac{1}{6} (\rho^2 + 6a^2) (e_{\theta_2}^2 + e_{\phi_2}^2) \quad (3.40)$$

Vamos mostrar o gráfico do escalar de curvatura em função da coordenada radial e parametrizado pelo fator de resolução a :



O gráfico azul é para $a = 1$ e o gráfico vermelho é para $a = 0$. Note que o escalar de curvatura é finito no primeiro caso e diverge no segundo caso.

A partir desta forma podemos analisar o comportamento da métrica nos casos limites $a \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$. De fato, definamos a função

$$f(\rho, a) = \left(\frac{\rho^2 + 6a^2}{\rho^2 + 9a^2} \right) \quad (3.41)$$

$$= \frac{1 + 6 \left(\frac{a}{\rho} \right)^2}{1 + 9 \left(\frac{a}{\rho} \right)^2} \quad (3.42)$$

Analisando o comportamento desta função para $\frac{a}{\rho} \rightarrow 0$, temos

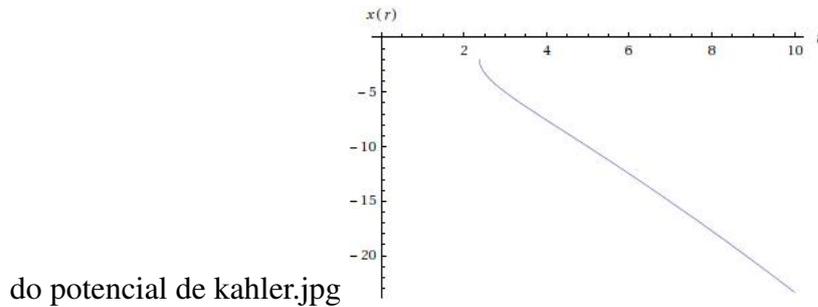
$$f\left(\frac{a}{\rho}\right) = 1 - 3 \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + 270 \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 + O\left(\left(\frac{a}{\rho}\right)^6\right) \quad (3.43)$$

Logo, para $a \rightarrow 0$, o que significa para o parâmetro de resolução indo a zero, ou para $\rho \rightarrow \infty$, o que significa que estamos analisando a métrica longe do ponto onde há singularidade, temos

$$ds_6^2 = d\rho^2 + g\left(\frac{a}{\rho}\right) ds_3^2 + \frac{1}{6}(\rho^2 + 6a^2) ds_2^2 + O\left(\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right) \quad (3.44)$$

Tal é a métrica de um 6-cone cujo espaço base é $S^3 \times S^2$. Note que quando fazemos $\rho \rightarrow 0$, o coeficiente da métrica da 2-esfera converge para um raio a . Assim, o 6-cone não tem mais a singularidade na origem.

Vamos analisar o gráfico de x para $a = 1$ é dado por:

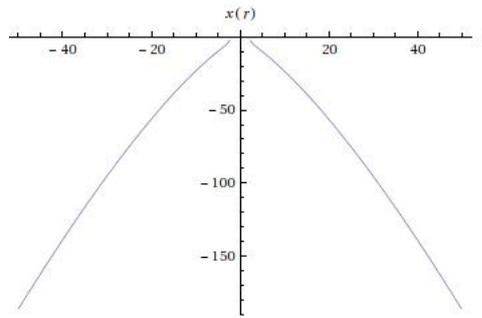


Há uma divergência desta função em torno de $r = 2.4$. Como para $a = 1$, $r^2 < 4\sqrt{2} \Rightarrow r = 2.4$.

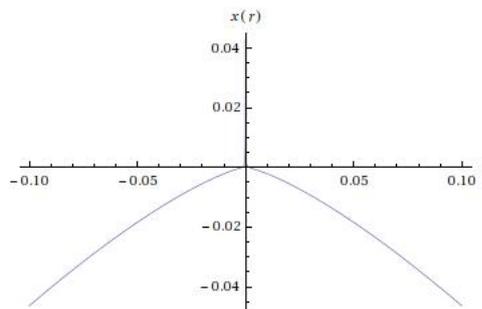
$$\sqrt{r^4 - 32a^6} \geq 0 \Rightarrow r^2 \geq 4\sqrt{2}a^3 \quad (3.45)$$

Veja como o comportamento da solução e logo a retirada da singularidade depende do intervalo tomado.

Para $a = 1$, num intervalo bem maior:



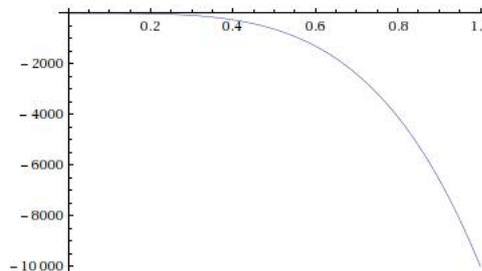
Já para um $a = 0.0001$, temos:



Analisando esse gráfico, onde a está muito próximo de zero vemos como ele se aproxima do valor exato de x para $a = 0$. De fato, tomando o polinômio de Taylor até segunda ordem para a função $x(r, a)$, em torno de zero, temos

$$x(r, a) = \frac{1}{\sqrt{6}a}r^2 - \frac{1}{72a^4}r^4 + O(r^6) \quad (3.46)$$

Escolhendo $a = 0.1$, temos



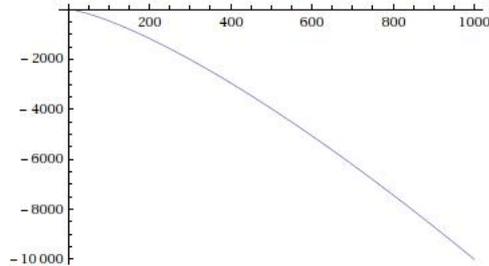
Já para $r \rightarrow \infty$,

$$x(r) = -r^{\frac{4}{3}} - 2a^2 + O(r^{-\frac{4}{3}}) \quad (3.47)$$

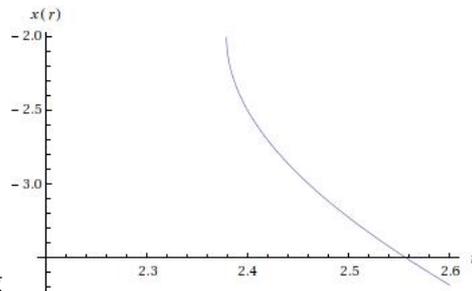
A solução para $a = 0$ é:

$$x(r, a = 0) = -r^{\frac{4}{3}} \quad (3.48)$$

cujo gráfico é

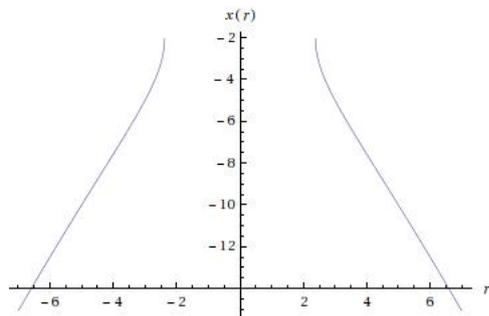


Logo, a solução resolvida se aproxima da solução singular - ou sem o método- para pontos distantes do nodo. Isso era de se esperar pois o método se destina apenas a alterar a geometria local numa vizinhança da singularidade.



do potencial de kahler mais precisa.jpg

Além disso há também um comportamento simétrico em relação a origem



A partir da função $x(r)$ é possível encontrar o potencial de Kähler, pois

$$x(r) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} r^2 F'(r) \quad (3.49)$$

e logo,

$$F(\rho) = F(\rho_0) + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \int_{r_0}^r \frac{x(r')}{r'^2} dr' \quad (3.50)$$

Com a expressão para o potencial de Kähler é possível termos uma descrição geométrica local completa do conifold resolvido, dado por:

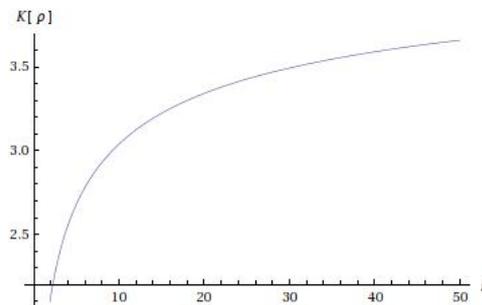
$$K(\rho, a, \lambda) = 4a^2 \ln(1 + \lambda^2) + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \int_{r_0}^r \frac{x(r')}{r'^2} dr' \quad (3.51)$$

onde acima fizemos $F(\rho_0) = 0$, pois como ρ_0 representa o potencial inicial para o conifold singular e a métrica depende apenas da derivada do potencial não se tem diferenças geométrica na escolha arbitrária do potencial inicial.

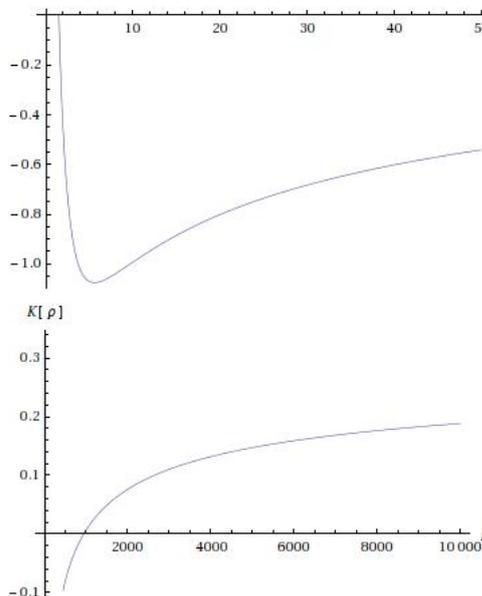
3.2.2 Configurações do potencial de Kähler

Vamos agora analisar algumas configurações do potencial de Kähler fixando $\lambda = 1$.

- Para $a = 0.5$

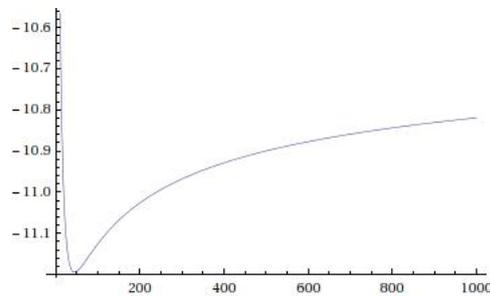
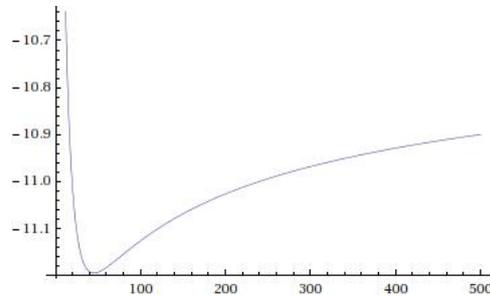


- Para $a = 1$

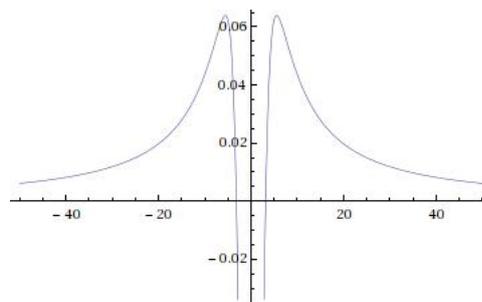


Note que a medida que aumentamos o intervalo de valores para ρ mais rapidamente o potencial decresce até um valor mínimo gerando assim uma espécie de "cúspide" ou vértice. Para $a = 2$ podemos ver melhor a formação do vértice

- $a = 2$



Tal comportamento pode vir do termo escrito na forma de integral na expressão de $F(\rho, a)$, cujo gráfico é:



Note que há uma divergência logarítmica na origem seguida de um crescimento rápido até um determinado ponto onde forma uma espécie de ponta; a partir daí a função decresce.

4 Brane-Deformation e Brane-Resolution

No capítulo anterior, vimos como suavizar o *conifold* usando métodos algébricos que alteravam a métrica. Mas qual a origem física dessa alteração? Deve haver algum campo modificando essa geometria! Nesse capítulo iremos estudar alguns modelos que se propõem explicar esse efeito a partir de campos que vivem em D-p branas.

4.1 Fluxos sobre o *conifold* na teoria II-B

Utilizando a ação da teoria de cordas do tipo II-B, Klebanov-Strassler[?], Pando-Zayas-Tseytlin [10], Cvetič *et al.* [21] estudaram o efeito que o fluxo gerado pelos campos dessa teoria poderiam gerar sobre o *conifold*.

Lembremos que nessa teoria, o termo de *Chern-Simons*, responsável pela transgressão da relação de *Bianchi*, é dado pela ação:

$$S_{CS} = \int C_4 \wedge dB_2 \wedge dC_2 \quad (4.1)$$

A equação de movimento para F_5 fica:

$$d(F_5) = dB_2 \wedge dC_2 \quad (4.2)$$

onde, em dez dimensões

$$\star_{10} F_5 = F_5 \quad (4.3)$$

ou seja, tal campo é auto-dual.

Como a ação possui um acoplamento com o potencial C_4 , então tomemos esse campo vivendo em uma D-3 brana. Adotando um *ansatz* para a métrica onde os fatores de *warp* deixem o espaço conformalmente equivalente ao produto de um espaço de Minkowsky com um *conifold*, temos:

$$ds_{10}^2 = H^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H^{\frac{1}{2}} ds_6^2 \quad (4.4)$$

De forma geral, para uma D-p brana com a configuração acima, a equação de Einstein leva a equação [25]:

$$e^{2\phi} = g_s^2 H_p^{\frac{(3-p)}{2}}(r) \quad (4.5)$$

Logo, para um D-3 brana, $e^{2\phi} = g_s^2$, que podemos assumir ser constante.

Além disso, o fator de warp deve ser da forma:

$$H_p(r) = 1 + \frac{a^{7-p}}{r^{7-p}} \quad (4.6)$$

Logo, para uma D-3 brana, temos:

$$H(r) = 1 + \frac{a^4}{r^4} \quad (4.7)$$

No capítulo passado ressaltamos que tal fator é próprio de um espaço de *Eguchi-Hanson* que é a solução gravitacional de um defeito do tipo instanton.

$$F_5 = d^4x \wedge dH^{-1} + \star_{10} dH \quad (4.8)$$

$$F_3 = G_3 + iH_3 = mL_3 \quad (4.9)$$

Fazendo a variação funcional da ação para a supergravidade do tipo II-B, obtemos as equações para os campos:

$$d \star_{10} F_3 = iF_5 \wedge F_3 \Rightarrow iL_3 = L_3 \quad (4.10)$$

$$dF_5 = -iF_3 \wedge \bar{F}_3 \Rightarrow \Delta H = -\frac{m^2}{12} |L_3|^2 \quad (4.11)$$

A primeira equação nos diz que L_3 é uma 3-forma auto-dual e harmônica. A segunda equação fornece uma ligação entre o fator de *warp* e os campos G_3 do setor de Ramond-Ramond e H_3 do setor de Neveu-Schwarz, ou seja, L_3 age como uma fonte para a função harmônica H.

Integrando a última equação no espaço interno, temos um fluxo gerado pelo termo de Chern-Simons

$$\int_{\delta X} F_5 = \int_X G_3 \wedge H_3 \quad (4.12)$$

Tal fluxo é responsável pelas propriedades da variedade interna pois é fonte para o fator de *warp*.

Nessa técnica de suavização por fluxos é essencial encontrarmos uma 3-forma harmônica L_3 para determinarmos o fator de *warp*.

Vamos analisar a configuração estudada por *Cvetic et al*:

$$ds_{C_6}^2 = h^2(r)dr^2 + \alpha^2(\rho)\sigma^2 + \beta^2(\rho)d\omega_1^2 + \gamma^2(\rho)d\omega_2^2 \quad (4.13)$$

onde,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 \\ d\omega_i^2 &= d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\phi^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

A partir da métrica acima, os autores definiram um sistema de *vielbeins*

$$\begin{aligned} e^1 &= h(r)dr \quad , \quad e^6 = \alpha(r)\sigma \\ e^2 &= \beta(r)d\theta^1 \quad , \quad e^3 = \beta(r)\sin(\theta_1)d\phi^1 \\ e^4 &= \gamma(r)d\theta^2 \quad , \quad e^5 = \gamma\sin(\theta_2)d\phi^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

e propuseram uma 2-forma de estrutura quase-complexa da forma:

$$\begin{aligned} J_2 &= e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 - e^1 \wedge e^6 \\ &= \beta^2 \sin(\theta_1) d\theta^1 \wedge d\phi^1 + \gamma^2 \sin(\theta_2) d\theta^2 \wedge d\phi^2 - h\alpha dr \wedge \sigma \end{aligned} \quad (4.16)$$

que por ser fechada é na verdade uma forma de *Kähler*. Os autores tomaram ainda uma 3-forma

$$\omega_3 = \sigma \wedge \Omega_1 - \sigma \wedge \Omega_2 \quad (4.17)$$

onde, $\Omega_i = \sin\theta_i d\theta^i \wedge d\phi^i$.

A partir dessa 3-forma podemos definir L_3 :

$$L_3 = \omega_3 + i \star_6 \omega_3 \quad (4.18)$$

Calculando o quadrado de L_3 e substituindo na equação do fator de warp, obtemos uma solução da forma:

$$H(r) = 1 + k \ln r + k' \ln(r^2 + 9a^2) \quad (4.19)$$

onde, k e k' dependem de m e a .

Próximo a origem,

$$H(r) = 1 - \frac{18m^2}{r^4} + \dots \quad (4.20)$$

Assintoticamente,

$$H(r) = 1 + \frac{81(b + 2m^2)}{4r^4} + \frac{162m^2 \ln r}{r^4} + \dots \quad (4.21)$$

Note que o fator de *warp* fica determinado a partir de m , uma espécie de carga resultante dos campos H_3 e F_3 e que pode ser obtida, via lei de *Gauss*, tomando-se um fluxo desses campos sobre um 3-ciclo no espaço interno.

4.1.1 Adição dos termos de curvatura

Levando em conta os termos contendo o campo de calibre F_2 e a curvatura, as equações ficam:

$$d \star_{10} F_3 = iF_5 \wedge F_3 + \frac{1}{48} \mathcal{F}^2 \mathcal{R}^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{288} (\mathcal{R}^2)^2 + \frac{1}{360} \mathcal{R}^4 \right) \quad (4.22)$$

A equação para F_5 fica inalterada pois para termos mais um termo deveríamos introduzir um termo de anomalia de ordem seis, ou seja, um termo na lagrangeana da forma:

$$C_4 \wedge tr \mathcal{R}^3 \quad (4.23)$$

4.1.2 Brane resolution em teoria M

Brito[29] estudou alterações na ação vinda de correções do termo de Chern-Simons oriundas de uma anomalia do modelo sigma no volume mundo da M5-brana. Tais variações são geralmente chamadas *transgressões*. A variação é dada por:

$$\Delta S_{11} = \int A \wedge \left(-\frac{1}{768} (tr R^2)^2 + \frac{1}{192} (tr R^4) \right) \quad (4.24)$$

4.1.3 Equações do movimento

Tal termo altera a equação de movimento do campo de calibre ficando da forma:

$$d * F = -\frac{1}{2} F \wedge F + (2\pi)^4 \beta \chi_8 \quad (4.25)$$

onde

$$\chi_8 = \left(-\frac{1}{768} (tr R^2)^2 + \frac{1}{192} (tr R^4) \right) \quad (4.26)$$

Estudaremos a ação do fluxo gerado por N M2-branas com simetria de Lorentz imergidas no bulk onze dimensional cujo espaço transversal é uma 4-variedade de Calabi-Yau cônica cujo espaço de base é da forma $S^2 \times S^3$.

Podemos utilizar uma métrica não-fatorizável com fatores de *warp* da forma [1]:

$$ds^2 = \alpha(y)^{-1} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \alpha^{\frac{1}{2}} g_{mn} dy^m dy^n \quad (4.27)$$

Pode-se escrever a 4-forma F_4 como[1]:

$$F_{\mu\nu\rho m} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} f_m(y) \quad (4.28)$$

Através do vínculo sobre os espinores,

$$\nabla_\mu \zeta = 0 \quad (4.29)$$

podemos deduzir a relação entre a componente do tensor intensidade de campo e o fator de *warp*:

$$f_m(y) = -\partial_m \alpha^{-\frac{3}{2}} \quad (4.30)$$

Substituindo tal expressão na equação do campo F, obtemos uma expressão para o fator de *warp* em função do próprio campo F com a adição do termo de anomalia:

$$d \star_8 d \ln \alpha = -\frac{1}{2} F \wedge F - 2\kappa_{11}^2 T_{M2} \chi_8 \quad (4.31)$$

$$\Delta_8 \ln \alpha = \frac{1}{3} F \wedge F + \frac{4}{3} \kappa_{11}^2 T_{M2} \chi_8 \quad (4.32)$$

Note que durante o processo de tomarmos o dual de F_4 e suas derivadas exteriores, apenas restou o dual em relação ao espaço interno M_8 e logo o laplaciano é tomado apenas nessa variedade transversal.

A equação acima determina o fator de *warp* e logo a geometria do espaço, tanto da brana como da variedade transversal, em termos do F e do termo de anomalia.

4.1.4 Fluxos sobre a 8-variedade

Integrando a equação acima em todo a 11-variedade, e usando o fato de que o lado esquerdo da equação se anula, obtemos uma relação entre o fluxo de F sobre a variedade e o termo de anomalia:

$$\int F \wedge F = \int \frac{4}{3} \kappa_{11}^2 T_{M2} \chi_8 \quad (4.33)$$

Como χ_8 pode ser relacionada com as características de Chern da variedade e esta com a característica χ de Euler temos:

$$\chi_8 = \frac{1}{192} (c_1^4 - 4c_1 c_2 + 8c_1 c_3 - 8c_4) \quad (4.34)$$

Mas, para espaços de Calabi-Yau, a primeira forma de Chern $c_1 = 0$, restando apenas a quarta forma, que relaciona-se com a característica de Euler através de

$$\int \chi_8 = -\frac{1}{24} \int c_4 = \frac{\chi}{24} \quad (4.35)$$

Logo, a condição do fluxo sobre a 8-variedade de Calabi-Yau é:

$$\frac{1}{4\kappa_{11}^2 T_{M2}} \int F \wedge F = \frac{\chi}{24} \quad (4.36)$$

Brito escolheu um chute para a métrica na forma:

$$ds^2 = \alpha^{-\frac{2}{3}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \alpha^{\frac{1}{3}} ds_8^2 \quad (4.37)$$

A relação entre o campo e a métrica é dada originalmente pela condição

$$F_{012r} = \partial_r \alpha^{-1} \quad (4.38)$$

A 4-forma F_4 é dividida em sua componente na M2-brana F_1 e sua componente no espaço transversal F_2 :

$$F_4 = F_1 + F_2 \quad (4.39)$$

A 4-forma F_1 deve conter um fator do 3-volume da brana e do fator de *warp*; **Brito** escolheu um *ansatz* da forma

$$F_1 = d^3x \wedge d\alpha^{-1} \quad (4.40)$$

Já a componente transversal tem sua existência devido a estrutura dos espinores no espaço interno. **Hawking e Taylor-Robinson**[32] representaram tal forma em relação às conexões de spin:

$$F_2 = \sum_i^{h_{2,2}} v^i \omega_4^i \quad (4.41)$$

Tal termo a mais oriundo do espaço transversal é chamado *termo de transgressão* pois altera as equações do movimento do campo.

Fazendo $F_2 = mG_4$, o tensor intensidade de campo é dado por:

$$F = d^3x \wedge dH^{-1} + mG_4 \quad (4.42)$$

Hawking e Taylor [32] mostraram que o campo preserva supersimetria se

$$\Delta H = -\frac{1}{48} m^2 G_4^2 + (2\pi)^4 \beta \chi_8 \quad (4.43)$$

onde Δ é o laplaciano na variedade transversal.

Para soluções de vácuo, $m = 0$ e para um sistema livre de anolalia, $\chi_8 = 0$, a função H é harmônica, ou seja,

$$\Delta H = 0 \tag{4.44}$$

Note então que a 4-forma G_4 é a fonte para o fator de *warp*. Dizemos então que tal termo advindo do espaço transversal induz sobre a M2-brana um fluxo que será responsável pela retirada da singularidade no conifold. Como a forma G_4 origina-se da estrutura de *spin* na variedade transversal, podemos ter várias formas de retirar a singularidade dependendo da variedade interna que escolhermos. Cada variedade terá seu grupo de *spin* e tal grupo também dependerá de que tipo de teoria de cordas estamos lidando.

A estrutura de *spin* depende crucialmente do grupo de holonomia da variedade em questão. Assim, se a holonomia da 8-variedade não é trivial, o fator de *warp* não é mais harmônico e logo, uma constante não é uma solução aceitável. Isso pode ser interpretado como resultado de uma distribuição de cargas topológicas sobre o espaço transversal que afeta a estrutura topológica e geométrica da brana.

Soluções regulares para o fator de *warp* podem ser encontradas mesmo sem a inclusão do termo de transgressão; contudo tais soluções não têm uma boa interpretação em termos da dualidade AdS-CFT, porque têm uma escala de curvatura da ordem do comprimento característico da brana, l_p [29]. Por outro lado, adicionando 4-formas anti-duais, pode-se obter soluções com escala de curvatura bem maior que o comprimento característico.

Brito escolheu como grupo de holonomia do espaço interno $spin(7)$ pois com esse calibre o espaço possui um espinor covariante e constante e a teoria de campos holograficamente correspondente na M2-brana tem supersimetria $\mathcal{N} = 1$. Em seguida, tomou a métrica:

$$ds_8^2 = h^2 dr^2 + a^2 (D\theta^i)^2 + b^2 \sigma^2 + c^2 d\Omega_4^2 \tag{4.45}$$

para o caso especial $a = b$, encontrou as soluções

$$h^2(r) = \left(1 - \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{10}{3}} \right)^{-1} \tag{4.46}$$

$$a^2 = b^2 = \frac{9}{100} \left(1 - \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{10}{3}} \right) \quad (4.47)$$

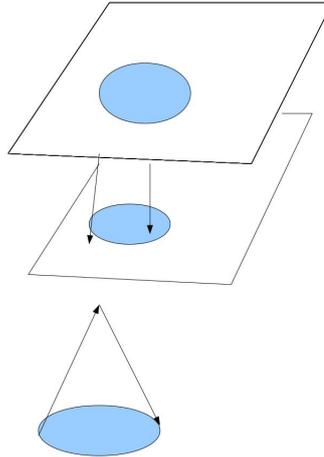
$$c^2 = \frac{9}{20} r^2 \quad (4.48)$$

Se $l = 0$, a métrica do espaço transversal fica:

$$ds_8^2 = dr^2 + r^2 ds_{S^7}^2 \quad (4.49)$$

ou seja, o espaço transversal é assintoticamente cônico cujo espaço de base é uma variedade de Einstein - uma 7-esfera - construídas como uma fibra S^3 sobre S^2 . **Note que utilizando esse procedimento surgem naturalmente o conifold e as fibras sobre sua singularidade que representam os processos de suavização.**

Tomando uma pilha de M2-branas sobre a singularidade do conifold e escolhendo um limite apropriado de escala, podemos encontrar uma correspondência entre uma teoria M em $AdS_4 \times S^7$ e uma teoria de campos supersimétrica vivendo no volume mundo das M2-branas.



De fato a inclusão das M2-branas acarretam o aparecimento de uma carga, fazendo que o fator de *warp* satisfaça:

$$\Delta H = c\delta(r) \quad (4.50)$$

cuja solução é $H(r) = \frac{32\pi^2 l_p N}{r^6}$. O espaço-tempo é então da forma $AdS_4 \times S^7$, com escala $R = (32\pi^2 N)^{\frac{1}{2}} l_p$.

4.2 Brane resolution no cenário heterótico

Vamos agora analisar o efeito do termo acima sobre um cone tomando o cenário heterótico da teoria de cordas pois nessa teoria aparece naturalmente a torção como efeito do campo H_3 .

A lagrangeana dessa teoria é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{het} = & \mathcal{R} \wedge \star 1 - \frac{1}{2} e^{-\phi} \star d\phi \wedge d\phi - \frac{1}{2} e^{-\phi} \star H_3 \wedge H_3 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\phi}{2}} \star \mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_2 \\ & - \frac{1}{2} e^{-\frac{\phi}{2}} B_2 \wedge Y_8 \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde, fazendo a troca $\mathcal{F}_2 = B_2 + kF_2$ como feito nas teorias do tipo II, temos

$$Y_8 = tr(\mathcal{R}_2^4 + \mathcal{R}_2^3 \wedge F_2 + \mathcal{R}_2^2 \wedge F_2^2 + \mathcal{R}_2 \wedge F_2^3 + F_2^4) \quad (4.52)$$

Como o termo de anomalia satstaz,

$$I_{12} = Y_4 \wedge Y_8 \quad (4.53)$$

teremos uma **transgressão da identidade de Bianchi do campo H_3** :

$$dH_3 = Y_4 \quad (4.54)$$

onde,

$$Y_4 = tr(\mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \wedge F_2 - k^2 F_2 \wedge F_2 - k(\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{H}_3 \wedge \mathbf{A}_1)) \quad (4.55)$$

logo, vamos redefinir o campo H_3 para \mathcal{H}_3 inserindo termos topológicos:

$$\mathcal{H}_3 = dB_2 + \mathcal{L}_{CS}(A) + \mathcal{L}_{GB}(w) + \mathbf{tr}(\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \quad (4.56)$$

onde,

$$\mathcal{L}_{CS}(A) = tr \left(A_1 \wedge F_2 - \frac{1}{2} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right) \quad (4.57)$$

é a 3-forma de Chern-Simons para a conexão de calibre A_1 e

$$\mathcal{L}_{GB}(w) = tr \left(\omega_1 \wedge \mathcal{R}_2 - \frac{1}{3} \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 \right) \quad (4.58)$$

é a 3-forma de Chern-Simons para conexão de spin ω_1 . Integrando a identidade de Bianchi sobre um 4-ciclo do conifold, temos:

$$\int_{M_4} dH_3 = \int_{M_4} \text{tr}(R_2 \wedge R_2) - \int_{M_4} \text{tr}(F_2 \wedge F_2 + B_2 \wedge F_2 + \mathcal{H}_3 \wedge A_1) \quad (4.59)$$

Como o termo de Gauss-Bonnet $\int_{M_4} R_2 \wedge R_2$ está ligado a característica de Euler χ temos

$$\chi = \int_{M_4} \text{tr}(F_2 \wedge F_2 + B_2 \wedge F_2 + \mathcal{H}_3 \wedge A_1) \quad (4.60)$$

podemos relacionar essa grandesa geométrica que é invariante topológica aos fluxos gerados por defeitos topológicos como a carga do instanton $\int_{M_4} F_2 \wedge F_2$ e dos termos $B \wedge F$ e $H \wedge A$. Vale lembrar que a característica de Euler está ligada ao número de estados não-massivos.

As equações de campo para a 3-forma \mathcal{H}_3 são:

$$d \star_{10} \mathcal{H}_3 = -(\star_{10} B_2 + k \star_{10} F_2) \quad (4.61)$$

$$d\mathcal{H}_3 = \text{tr}(R_2 \wedge R_2 - B_2 \wedge B_2 - 2kB_2 \wedge F_2 - k^2 F_2 \wedge F_2) \quad (4.62)$$

Note que há uma corrente que depende do dual de B_2 e de F_2 e que vem dos termos $\star_{10} B_2 \wedge B_2$ e $\star_{10} F_2 \wedge B_2$ que aparecem devido nossa extensão $\mathcal{F}_2 = B_2 + kF_2$.

Como tais fluxos estão definidos sobre um 4-ciclo, vamos estudar resoluções de 4-cones imersos em um espaço ambiente que é o *produto emaranhado*¹ de uma D-5 brana e um 4-cone, ou seja, $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^{1,5} \times C^4$ com uma métrica da forma

$$ds_{10}^2 = H^{-\frac{1}{4}}(r) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H^{\frac{3}{4}}(r) ds_4^2 \quad (4.63)$$

Vamos inicialmente seguir o trabalho pioneiro de *Cvetič et al*[21] que estudaram a resolução nesse cenário tomando apenas o termo de *instanton*, ficando com o sistema de equações:

$$d \star_{10} \mathcal{H}_3 = 0 \quad (4.64)$$

$$d\mathcal{H}_3 = k^2 \text{tr}(F_2 \wedge F_2) \quad (4.65)$$

Como o dual de \mathcal{H}_3 é fechado então *Cvetič et al*[21] escolheram o ansatz

$$e^{-\phi} \star_{10} H_3 = d^6 x \wedge dH^{-1} \quad (4.66)$$

¹warped product em inglês.

Assumiremos também o seguinte comportamento para o dflaton e o campo intensidade de campo de calibre

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{2} \ln H \\ F_2 &= mL_2\end{aligned}\tag{4.67}$$

A forma L_2 é importante no estudo feito em [21] porque é escolhida para ser auto-dual, visto estar relacionada com F_2 e este gerar defeitos do tipo instantons, isso com relação ao operador de *Hodge* em quatro dimensões. Usando os ansatz acima e a identidade de Bianchi para \mathcal{H}_3 , obtemos:

$$\Delta H = -\frac{m^2}{4} L_2^2\tag{4.68}$$

Cvetič et al [21] estudaram resoluções de cones a partir de soluções dessa equação de Poisson para vários espaços, dentre eles *Eguchi-Hanson*, *Taub-Nut*. Tais espaços são interessantes nessa perspectiva pois são soluções autoduais da equação de Einstein e logo existe uma simetria entre o campo gravitacional e o campo de calibre que gera soluções autoduais do tipo *instanton*.

O espaço de Eguchi-Hanson é uma variedade EH_4 que globalmente é topologicamente equivalente a

$$EH_4 = \mathbb{R}^+ \times S^3/\mathbb{Z}_2\tag{4.69}$$

Tomando a parametrização $x = (r, \theta, \phi, \psi)$, onde as coordenadas angulares são os ângulos de *Euler*, encontramos a seguinte métrica:

$$ds_4^2 = W(r)^{-1} dr^2 + \frac{r^2 W(r)}{4} (d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + \frac{r^2}{4} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\tag{4.70}$$

onde,

$$W(r) = 1 - \frac{a^4}{r^4}\tag{4.71}$$

Tal espaço tem uma singularidade na origem, pois

$$R = -\frac{2W(r)}{r^2}\tag{4.72}$$

As vielbeins desse espaço são:

$$\begin{aligned} e^1 &= W^{-\frac{1}{2}} dr \quad , \quad e^2 = \frac{r}{2} d\theta \\ e^3 &= \frac{r}{2} \text{sen}\theta d\phi \quad , \quad e^4 = \frac{rW^{\frac{1}{2}}(r)}{2} (d\psi + \cos\theta \wedge d\phi) \end{aligned} \quad (4.73)$$

A partir delas pode-se definir uma 2-forma fundamental J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3 \\ &= \frac{r}{2} dr \wedge (d\psi + \cos\theta d\phi) - \frac{r^2 \text{sen}\theta}{4} d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (4.74)$$

A 2-forma acima é fechada, logo é uma forma de *Kähler*.

Como o espaço de *Eguchi-Hanson* considerado aqui é de quatro dimensões, *Cvetič et al* consideraram a seguinte 2-forma auto-dual:

$$L_2 = \frac{2}{r^4} (e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \quad (4.75)$$

Em termo de coordenadas temos:

$$L_2 = r^{-3} dr \wedge (d\psi + \cos\theta d\phi) + \frac{r^{-2}}{2} \text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.76)$$

Auto-dualidades são características bem conhecidas dos espaços de *Eguchi-Hanson*. De fato, assim como os instantons são soluções autoduais para a ação de Yang-Mills, tais espaços são soluções autoduais para a ação de Einstein-Hilbert, tal que

$$\star_4 R_{abcd} = \pm R_{abcd} \quad (4.77)$$

Relacionando L_2 com F_2 , visto ambas as formas serem autoduais, através de:

$$F_2 = mL_2 = m(r^{-3} dr \wedge (d\psi + \cos\theta d\phi) + \frac{r^{-2}}{2} \text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi) \quad (4.78)$$

obtemos um *ansatz* para o tensor intensidade de campo eletromagnético. Note que em tal *ansatz*, o campo F_2 tem uma dependência radial na forma:

$$F_2 = \frac{2m}{r^4}(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \quad (4.79)$$

Logo, tal campo tem uma ação efetiva apenas próxima a brana, ou seja, à origem do *conifold*.

Substituindo tal campo na equação de *Bianchi* de H_3 , obtemos a equação diferencial para o fator de *warp* $H_3(r)$:

$$(r^3 W(r) H'(r))' = -\frac{4m^2}{r^5} \quad (4.80)$$

cuja solução é:

$$H(r) = 1 + \frac{(m^2 + a^4 b)}{4a^6} \ln \left(\frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2} \right) + \frac{m^2}{2a^4 r^2} \quad (4.81)$$

Note que a função acima tem uma singularidade logarítmica no ponto $r = a$. Para evitarmos isso, podemos escolher a constante de integração b como:

$$b = -\frac{m^2}{a^4} \quad (4.82)$$

e logo,

$$H(r) = 1 + \frac{m^2}{2a^4 r^2} \quad (4.83)$$

Tal solução tem agora um horizonte de eventos e logo é retirada a singularidade nua. O termo inversamente proporcional a r^2 é anulado com o produto de r^2 pelo elemento infinitesimal de linha referente ao espaço base do cone. Logo, a singularidade é totalmente retirada e o cone é agora suavizado.

4.2.1 Influência do termo BF

Vamos agora considerar a transgressão da identidade de *Bianchi* devido o termo BF, ou seja,

$$\mathcal{H}_3 = Tr(B_2 \wedge F_2) \quad (4.84)$$

Vamos supor que a configuração geométrica não seja alterada, ou seja, que ainda continuemos tendo uma variedade que conformalmente é um espaço de *Eguchi-Hanson*.

Baseando-nos no *ansatz* para o campo B utilizado por *Pando-Zayas e Tseytlin*[10] no estudo da resolução do *conifold* em teoria II-B:

$$B_2 = f_1(r)\text{sen}\theta_1 d\theta^1 \wedge d\phi^1 + f_2(r)\text{sen}\theta_2 d\theta^2 \wedge d\phi^2 \quad (4.85)$$

Note que o campo acima independe da variável angular ψ ; na verdade a 2-forma acima está definida sobre o espaço cotangente das 2-esferas, tendo uma dependência em r somente em módulo.

Em nosso caso, como apenas temos uma 2-esfera, escolhamos:

$$B_2 = f(r)\text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.86)$$

Logo,

$$B_2 \wedge F_2 = \frac{4m^2 f(r)}{r^4} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \quad (4.87)$$

Assim, a equação para o fator de *warp* será:

$$(r^3 W(r) H'(r))' = -\frac{4m^2 f(r)}{r} \quad (4.88)$$

Note que, se

$$f(r) = \frac{1}{r^4} \quad (4.89)$$

obteremos a mesma equação diferencial para $H(r)$ encontrada utilizando o termo de instanton. Logo, nessa situação, teremos uma resolução da variedade através do termo BF.

O *ansatz* escolhido para B_2 tem a característica de estar definido sobre a S^2 , que é a componente do espaço-base S^3/\mathbb{Z}_2 mais simétrica. Além disso, a escolha da dependência radial faz com que os efeitos desse campo estejam localizados próximo a D5-brana, ou seja, para $r \rightarrow 0$.

Um *ansatz* dessa forma foi anteriormente estudado por *Klebanov e Murugan* no estudo da dualidade calibre-gravidade sobre um *conifold* resolvido. Nesse trabalho os autores estudaram o fluxo do grupo de renormalização, obtendo a equação:

$$\frac{4\pi^2}{g_1^2} - \frac{4\pi^2}{g_1^2} = \frac{1}{g_s e^\phi} \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{S^2} B_2 - \pi \right) \quad (4.90)$$

Assim, se $B_2 \sim \text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi$, iremos satisfazer a condição acima.

Com o campo B acima, obtemos o campo H_3 :

$$H_3 = dB_2 = f'(r)\text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi = -4r^{-5}\text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.91)$$

e a partir dele a 2-forma de torção:

$$T^A = \frac{1}{2}H_{BC}^A dx^B \wedge dx^C = \frac{1}{2}g^{AI}H_{IBC}dx^B \wedge dx^C \quad (4.92)$$

Como o campo H_3 cai com r^{-5} , então assintoticamente a variedade é livre de torção.

É interessante notar também que como o campo B_2 tem uma dependência radial de r^{-4} , o termo $\mathbb{B}\mathbb{F}$ pode ser tomado como desprezível em uma primeira aproximação. Além disso, como seus efeitos só podem ser sentidos em uma vizinhança da origem, em um estudo global, tal solução, pelo menos na configuração estudada, pode ser descartada no sentido de estudarmos apenas a resolução do cone. Contudo, ela se torna interessante na busca por efeitos de torção, ainda que locais. No próximo capítulo, estudaremos como obter soluções mais gerais a partir das equações de *Strominger*.

5 Conifold com torção

O *conifold* e suas versões suavizadas estudadas até aqui foram tomadas como variedades *Ricci*-planas sem torção. Tais condições vinham da imposição da conservação de supersimetria sobre o espaço interno e a condição de máxima simetria sobre o espaço externo, o que fazia-se tomando-se $H_3 = 0$, ou seja, anulando o fluxo dos campos de calibre. Contudo, vimos no procedimento da *brane resolution* em teoria do tipo II B que tal campo tem papel fundamental: primeiro pelos fluxos sobre D-3 branas fracionárias responsáveis pela suavização do *conifold* e segundo pelo fato de que espaços com tais campos têm dÍlton não constante. Assim, é interessante considerar-se espaços com $H_3 \neq 0$ pois torna mais rica a física visto que o dÍlton está relacionado com constante de acoplamento. O fluxo dos campos de calibre também possibilita resolver o problema da estabilidade do espaço modular, essencial para explicarmos algumas propriedades do modelo padrão de partículas e campos, como o padrão de massas dos *quarks* e *leptons* e amplitude da hierarquia de caibre, a partir da teoria de cordas. A geometria também amplia-se pois com a introdução da torção nossa variedade interna não será mais um espaço de *Calabi-Yau*, visto não ser mais de *Kähler* e será dotada de torção. Abre-se então um horizonte para o estudo da correspondência AdS-CFT em espaços com torção. Assim, vamos pouco a pouco avançando do regime de baixas energias supersimétrico em supergravidade para regimes não-perturbativos, essenciais para um maior entendimento da teoria de supercordas.

A introdução de torção no espaço se faz mais facilmente nas teorias heteróticas a partir das condições de conservação de supersimetria da ação de supergravidade. Iremos nos basear nos trabalhos pioneiros de *Becker et al*[37] [38] e mais recentemente, de *Carlevaro e Isráel*[40].

Como visto no capítulo 2, a condição de conservação da supersimetria dos espinores na teoria heterótica gera o sistema de equações

$$\delta\Psi_a = 0 \Rightarrow \nabla_a \epsilon - \frac{1}{4} H_{abc} \Gamma^{bc} \epsilon = 0 \quad (5.1)$$

$$\delta\lambda = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \Gamma^a \nabla_a \phi + \frac{1}{4} H_{abc} \Gamma^{abc} = 0 \quad (5.2)$$

Logo, a inclusão do campo H_3 na variedade interna introduz:

- uma conexão não-oriunda da métrica na forma:

$$\tilde{\nabla}_a = \nabla_a - \frac{1}{2}H_a \quad (5.3)$$

onde, $H_a = H_{abc}\Gamma^{bc}$ e Γ^{bc} são as matrizes de *Dirac*. Buscaremos agora variedades que tenham espinores covariantemente constantes com respeito a $\tilde{\nabla}$, chamada conexão de *Strominger* :

$$\tilde{\nabla}\eta = 0 \quad (5.4)$$

- Um dÍlaton não-constante, pois

$$\partial_a\phi = -\frac{1}{2}H_{abc}g^{bc} \quad (5.5)$$

De um modo mais geral, a variação do dÍlaton obedece o sistema de equações de *Strominger* que discutimos no capítulo 2 e voltaremos a comentar em breve.

Antes de estudarmos os modelos com torção, vamos destacar alguns pontos sobre as chamadas *branas girantes*¹ que são soluções do tipo buraco negro, como estudado nas *branas negras*², mas que possuem momentum angular.

5.1 Branas girantes

Vamos agora buscar configurações de branas com mais um tipo de carga, o momento angular. Assim como as branas negras têm uma carga cuja solução assemelha-se ao buraco-negro carregado de *Reissner-Nordström*, as branas girantes têm uma métrica do tipo *Kerr*.

Em $\mathbb{R}^{1,3}$, a métrica de *Kerr* em coordenadas de *Boyer-Lindquist* é [23]:

$$ds_4^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{\Delta} dr^2 + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \text{sen}^2\theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \text{sen}^2\theta d\phi - dt)^2 \quad (5.6)$$

onde,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad , \quad \Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2 \quad (5.7)$$

¹*spinning branes* em inglês.

²*black brane* em inglês.

m é a massa da partícula e ma o momentum angular.

Note que a métrica acima tem termos cruzados, além de fatores do tipo

$$H(r) = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad (5.8)$$

Soluções desse tipo para branas estendem naturalmente os *ansatz* de *Klebanov-Strassler*. Além disso, a solução de *Kerr*, ao contrário da solução de *Schwarzschild*, não tem simetria esférica. De fato, como ela descreve corpos girantes existem direções privilegiadas na direção do eixo de rotação.

Em seis dimensões temos três planos independentes e logo, três eixos de rotações independentes. Tomando os ângulos θ, ψ como parametrização de S^2 , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq \pi$, podemos definir três cossenos diretores: $\mu_1 = \cos\theta$, $\mu_2 = \cos\theta \sin\psi$, $\mu_3 = \cos\theta \cos\psi$.

Em termos desses cossenos, temos ainda três ângulos ϕ_i . Em termos dessa parametrização, temos uma métrica da forma [39]:

$$ds_{10}^2 = H_3^{-\frac{1}{2}} \left(- \left[1 - \frac{r_H^4}{r^4 \Delta} \right] dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + H_3^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Delta}{H_1 H_2 H_3 - \frac{r_H^4}{r^4}} dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^3 H_i (d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) \right] \quad (5.9)$$

onde,

$$H_3 = 1 + \frac{k}{r^4} \quad (5.10)$$

$$H_i = 1 + \frac{l_i^2}{r^2} \quad (5.11)$$

Note que os fatores de *warp* acima são os mesmos utilizados por *Klebanov-Strassler* [?], *Pando-Zayas, Tseytlin* [10], na resolução do conifold. Estudaremos uma configuração análoga a acima.

5.2 Variedades com torção

Como discutido no capítulo 2, para determinarmos a estrutura geométrica da variedade interna com torção, precisamos determinar a (1,1)-forma J e a (3,0)-forma Ω , através das equa-

ções

$$d(e^{-2\phi}\Omega) = 0 \quad (5.12)$$

$$d(e^{-2\phi}J) = 0 \quad (5.13)$$

$$d(e^{-2\phi}J \wedge J) = 0 \quad (5.14)$$

Desta última equação dizemos que a variedade interna é conformalmente balanceada³. Para determinarmos J , lembremos que esta está relacionada com o campo H_3 através da relação:

$$H = (\partial - \bar{\partial})J \Rightarrow dH = \partial\bar{\partial}J \quad (5.15)$$

Mas, como visto no capítulo 1 e 4, a transgressão na relação de *Bianchi* para o campo H_3 é da forma $dH_3 = Y_4$, e logo:

$$\partial\bar{\partial}J = Y_4 \quad (5.16)$$

onde,

$$Y_4 = \text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R} - F \wedge F - B \wedge F - B \wedge B - H \wedge A) \quad (5.17)$$

A conservação de supersimetria sobre o espinor gaugino χ fornece vínculos sobre os campos de calibre. De fato,

$$\delta\chi = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}F_{ab}\Gamma^{ab}\epsilon = 0 \quad (5.18)$$

Daí,

$$g^{a\bar{b}}F_{a\bar{b}} = F_{ab} = F_{\bar{a}\bar{b}} = 0 \quad (5.19)$$

$$F^{a\bar{b}}J_{a\bar{b}} = 0 \quad (5.20)$$

A equação acima é chamada **equação de Yang-Mills hermitianas** e garante que o fibrado de calibre, onde F, A toma valores é holomórfico. Já a segunda equação assegura que tal fibrado é estável e é chamada **condição DUY**⁴. O conjunto de equações acima é chamado *equações de Strominger*. Note que $dJ \neq 0$ e logo, o espaço em questão não é uma variedade de *Kähler*. Como as equações acima são bastante complexas, vamos escolher uma configuração onde possamos introduzir a torção preservando a condição do espaço ser *Ricci-plano*.

³*conformally balanced* em inglês.

⁴Donaldson-Uhlenbeck-Yau

5.3 Métrica

Vamos procurar soluções que tenham a mesma estrutura das que foram estudadas recentemente por *Carlevaro e Isráel*[40]: Tomando a 6-tupla $(r, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \psi) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ como uma parametrização para o *conifold*, os autores tomaram o elemento de comprimento:

$$ds_{10}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{3}{2}H(r) \left(\frac{1}{f^2(r)} dr^2 + \frac{r^2}{6} (d\theta_1^2 + \text{sen}^2\theta_1 + d\theta_2^2 + \text{sen}^2\theta_2) + \frac{r^2}{9} f^2(r) (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 \right) \quad (5.21)$$

Agrupando os elementos infinitesimais:

$$ds_{10}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{3H(r)}{2f^2} dr^2 + \frac{r^2 H}{4} d^2\theta^1 + r^2 H \left(\frac{6\text{sen}^2\theta_1 + 4f^2 \cos^2\theta_1}{24} \right) d^2\phi^1 + \frac{r^2 H}{4} d^2\theta^2 + r^2 H \left(\frac{6\text{sen}^2\theta_2 + 4f^2 \cos^2\theta_2}{24} \right) d^2\phi^2 + \frac{r^2 H f^2}{3} \cos\theta_1 d\psi \otimes d\phi^1 + \frac{r^2 H f^2}{3} \cos\theta_2 d\psi \otimes d\phi^2 + \frac{r^2 H f^2}{3} \cos\theta_1 \cos\theta_2 d\phi^1 \otimes d\phi^2 + \frac{r^2 f^2 H}{6} d^2\psi \quad (5.22)$$

Note a semelhança da métrica acima com a métrica da brana girante devido os termos cruzados.

Logo, a matriz métrica para o espaço interno é então:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{H}{f^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2 H}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 H \left(\frac{6\text{sen}^2\theta_1 + 4f^2 \cos^2\theta_1}{24} \right) & 0 & \frac{r^2 H f^2}{3} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & \frac{r^2 H f^2 \cos\theta_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2 H}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2 H f^2}{6} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & 0 & r^2 H \left(\frac{6\text{sen}^2\theta_2 + 4f^2 \cos^2\theta_2}{24} \right) & \frac{r^2 H f^2 \cos\theta_2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{r^2 H f^2 \cos\theta_1}{3} & 0 & \frac{r^2 H f^2 \cos\theta_2}{3} & \frac{r^2 H f^2}{4} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Se definirmos uma variável ω , cuja diferencial é:

$$d\omega = \omega_1 = d\psi + \cos\theta_1 d\phi^1 + \cos\theta_2 d\phi^2 \quad (5.24)$$

podemos escrever a métrica em relação a parametrização $(r, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \omega)$, como:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{H}{f^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2 H}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 H \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2 H}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 H \frac{\text{sen}^2 \theta_2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r^2 H f^2}{4} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Nessa parametrização, o elemento de volume do *conifold* é dado por:

$$\begin{aligned} dV_6 &= \sqrt{g} dr \wedge d\theta^1 \wedge d\phi^1 \wedge d\theta^2 \wedge d\phi^2 \wedge \omega_1 \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2^5} H^3 r^6 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 dr \wedge d\theta^1 \wedge d\phi^1 \wedge d\theta^2 \wedge d\phi^2 \wedge \omega_1 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Colocando a métrica acima na forma proposta por *Cvetic et al* e estudada no capítulo 2, podemos escrever o escalar de curvatura na forma:

$$R = \frac{g(r)}{\frac{3}{4^3} \frac{r^5 H^4}{f^2}} \quad (5.27)$$

onde novamente, g é função dos fatores de warp. Assim, a retirada da singularidade dependerá da razão $\frac{H}{f}$.

Note que o *bulk* tem uma geometria fatorizável, ou seja, não temos fatores de *warp* sobre a 3-brana que tem simetria de *Lorentz*. Tal escolha é feita a fim de preservarmos a supersimetria $\mathcal{N} = 1$ do modelo.[40] Assim,

$$\mathcal{M}_{10} = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_6 \quad (5.28)$$

Já sobre a variedade interna temos um fator de *warp* interno $H(r)$ que traz uma dependência radial na métrica do espaço-base e torna o espaço conformalmente um cone *Ricci*-plano. Vale lembrar que os valores dos fatores $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{9}$ é próprio do conifold ricci-plano.

Contudo, incluímos um outro fator $f(r)$ que divide a métrica da base do cone. Tal fator tem a propriedade de incluir a torção no espaço .De fato, a métrica do *conifold Ricci*-plano é:

$$ds_6^2 = dr^2 + \frac{1}{6}(d\theta_1^2 + \text{sen}^2 \theta_1 + d\theta_2^2 + \text{sen}^2 \theta_2) + \frac{1}{9}(d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 \quad (5.29)$$

logo, $f(r)$ causa uma quebra de simetria entre as direções angulares.

Vamos procurar soluções que assintoticamente sejam *Ricci*-planas, ou seja, que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1 \quad (5.30)$$

e que tenham fator de warp $H(r)$ limitado no infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H(r) = H_0 \quad (5.31)$$

Para obtermos a resolução, esperamos uma solução que na origem tenha a forma:

$$H(r) = 1 - \frac{\alpha^4}{r^4} + \dots \quad (5.32)$$

5.3.1 Conexão

Vamos tomar uma conexão com dois termos:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} H_{ij}^k \quad (5.33)$$

o primeiro, oriundo da métrica, é a conexão de *Levi-Civita* e é obtida na forma:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \quad (5.34)$$

Já para o segundo termo, oriundo do tensor intensidade de campo de *Kalb-Ramond*, *Carlevaro e Isráel* propuseram o seguinte *ansatz*[40]:

$$\mathcal{H}_3 = \frac{\alpha k}{6} g_1^2(r) (\Omega_1 + \Omega_2) \wedge \omega_1 \quad (5.35)$$

Tomando as coordenadas de $SU(2)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = & \frac{\alpha k}{6} g_1^2(r) (\text{sen}\theta_1 d\theta_1 \wedge d\phi_1 \wedge d\psi + \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 d\theta_1 \wedge d\phi_1 \wedge \phi_2 + \text{sen}\theta_2 d\theta_2 \wedge d\phi_2 \wedge d\psi \\ & + \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 d\theta_2 \wedge \phi_2 \wedge \phi_1) \end{aligned} \quad (5.36)$$

logo, as componentes não-nulas de \mathcal{H} são:

$$\begin{aligned}
H_{\theta_1\phi_1\psi} &= H_{236} = a \operatorname{sen}\theta_1 \\
H_{\theta_1\phi_1\phi_2} &= H_{235} = a \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\
H_{\theta_2\phi_2\psi} &= H_{456} = a \operatorname{sen}\theta_2 \\
H_{\theta_2\phi_2\phi_1} &= H_{453} = a \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde $a = \frac{\alpha k}{6} g_1^2(r)$.

Em termo da coordenada ω , \mathcal{H} fica:

$$\begin{aligned}
H_{\theta_1\phi_1\omega} &= H_{236} = a \operatorname{sen}\theta_1 \\
H_{\theta_2\phi_2\omega} &= H_{456} = a \operatorname{sen}\theta_2
\end{aligned} \tag{5.38}$$

A solução proposta pelos autores diferem consideravelmente da utilizada na resolução do conifold sem torção estudada por *Pando-Zayas e Tseytlin*[10] que foi:

$$H_3 = dr \wedge [f'_1(r)\Omega_1 + f'_2(r)\Omega_2] \tag{5.39}$$

Note que \mathcal{H} proposta por *Carlevaro e Israël* não tem componentes na direção r . Assim, teremos termos não origundos da métrica na conexão apenas nas direções angulares.

5.3.2 Vielbeins

As 1-formas invariantes pela esquerda - *Vielbeins* - são:

$$\begin{aligned}
e^1 &= \sqrt{\frac{3H}{2}} \frac{1}{f} dr \quad , \quad e^2 = \frac{r\sqrt{H}}{2} \left(\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} d\theta_1 - \cos\frac{\psi}{2} \operatorname{sen}\theta_1 d\phi_1 \right) \\
e^3 &= -\frac{r\sqrt{H}}{2} \left(\cos\frac{\psi}{2} d\theta_1 + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2} \operatorname{sen}\theta_1 d\phi_1 \right) \quad , \quad e^4 = \frac{r\sqrt{H}}{2} \left(\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} d\theta_2 - \cos\frac{\psi}{2} \operatorname{sen}\theta_2 d\phi_2 \right) \\
e^5 &= -\frac{r\sqrt{H}}{2} \left(\cos\frac{\psi}{2} d\theta_2 + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2} \operatorname{sen}\theta_2 d\phi_2 \right) \quad , \quad e^6 = \frac{r\sqrt{H}f}{\sqrt{6}} \omega_1
\end{aligned} \tag{5.40}$$

onde

$$\omega_1 = d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2 \tag{5.41}$$

é uma 1-forma de S^3 . A partir dessas 1-formas definimos as 1-formas complexificadas:

$$\begin{aligned}
E^1 &= e^2 + ie^3 \quad , \quad E^2 = e^4 + ie^5 \\
E^3 &= e^1 + ie^6
\end{aligned} \tag{5.42}$$

E a partir dessas 1-formas definimos coordenadas complexas tais que

$$dz^i = E^i \quad , \quad d\bar{z}^i = \bar{E}^i \quad (5.43)$$

5.3.3 Forma fundamental

Podemos ainda definir a (1,1)-forma fundamental

$$J_{1,1} = \frac{i}{2} \sum_{a=1}^3 E^a \wedge \bar{E}^a = \frac{i}{2} (E^1 \wedge \bar{E}^1 + E^2 \wedge \bar{E}^2 + E^3 \wedge \bar{E}^3) \quad (5.44)$$

$$= e^2 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^6 + e^4 \wedge e^5 + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^3 e^n \wedge e^n \quad (5.45)$$

Tomando apenas a parte real temos:

$$J_{1,1} = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 \quad (5.46)$$

Tal expressão se aproxima da tomada por *Papadopoulos e Tseytlin*[10]:

$$J = d(r^2 K') \wedge \omega_1 + e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 \quad (5.47)$$

Nesse trabalho, os autores analisam o *conifold* Ricci-plano sem torção e logo a forma fundamental é a forma de Kähler. Em termos das coordenadas reais de $S(2)$, a solução com torção fica:

$$J_{1,1} = J_2 = \frac{rH}{2} \left[dr \wedge \omega_1 - \frac{r}{2} (\Omega_1 + \Omega_2) \right] \quad (5.48)$$

onde $\Omega_i = \text{sen}\theta_i d\theta^i \wedge d\phi^i$. Logo, as únicas componentes não nulas de J_2 são:

$$J_{r\omega_1} = \frac{rH}{2}$$

$$J_{\theta_1\phi_1} = -\frac{r^2 H}{4} \text{sen}\theta_1 \quad , \quad J_{\theta_2\phi_2} = -\frac{r^2 H}{4} \text{sen}\theta_2 \quad (5.49)$$

Note que a 2-forma obtida dessa forma é uma extensão da forma de *Kähler* utilizada anteriormente por *Cvetič et al* [21], onde consideramos um 2-ciclo a mais, pois estamos introduzindo duas novas coordenadas, θ_2, ϕ_2 .

Pela equação de *Strominger*,

$$d(e^{-2\phi} J \wedge J) = 0 \quad (5.50)$$

Como

$$\begin{aligned}
d(e^{-2\phi} J \wedge J) &= \nabla_a (e^{-2\phi} J_{bc} J_{de}) dx^a \wedge \dots \wedge dx^e \\
&= e^{-2\phi} \left[\partial_a (J_{bc} J_{de}) - 2\partial_a \phi - \left((\tilde{\Gamma}_{ab}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{ac}^i J_{bi}) J_{de} + (\tilde{\Gamma}_{ab}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{ac}^i J_{bi}) J_{de} \right) \right] \times \\
&\quad \times dx^a \wedge \dots \wedge dx^e
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Assim, a equação de *Strominger* fica:

$$\left[\partial_a (J_{bc} J_{de}) - 2\partial_a \phi - \left((\tilde{\Gamma}_{ab}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{ac}^i J_{bi}) J_{de} + (\tilde{\Gamma}_{ab}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{ac}^i J_{bi}) J_{de} \right) \right] dx^a \wedge \dots \wedge dx^e = 0 \tag{5.52}$$

Na direção radial, a equação fica:

$$(\partial_r (J_{bc} J_{de}) - 2\partial_r \phi J_{bc} J_{de} - (\tilde{\Gamma}_{rb}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{rc}^i J_{bi}) J_{de} + (\tilde{\Gamma}_{rb}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{rc}^i J_{bi}) J_{de}) dx^r \wedge \dots \wedge dx^e = 0 \tag{5.53}$$

Em termos de coordenadas, temos

$$J \wedge J = -\frac{r^3 H}{4} dr \wedge \omega \wedge (\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{r^4 H^2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2}{8} d\theta^1 \wedge d\phi^1 \wedge d\theta^2 \wedge d\phi^2 \tag{5.54}$$

Devido a antisimetria do produto exterior, devemos pegar apenas os termos de J nas direções angulares, donde

$$d(J \wedge J) = \frac{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2}{4} \partial_r (r^4 H^2) \tag{5.55}$$

Assim,

$$\partial_r (r^4 H) - 2(r^4 H) \partial_r \phi - \epsilon^{rbcde} \left[(\tilde{\Gamma}_{rb}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{rc}^i J_{bi}) J_{de} + (\tilde{\Gamma}_{rd}^i J_{ie} + \tilde{\Gamma}_{re}^i J_{di}) J_{bc} \right] = 0 \tag{5.56}$$

Como

$$\tilde{\Gamma}_{rj}^i = \Gamma_{rj}^i + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{rj}^i, \quad \mathcal{H}_{rj}^i = 0 \tag{5.57}$$

então,

$$\tilde{\Gamma}_{rj}^i = \Gamma_{rj}^i \tag{5.58}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\epsilon^{rjklm} \tilde{\Gamma}_{rj}^i J_{ik} J_{lm} &= \epsilon^{r\theta_1\phi_1\theta_2\phi_2} \Gamma_{r\theta_1}^{\theta_1} J_{\theta_1\phi_1} J_{\theta_2\phi_2} + \epsilon^{r\theta_2\phi_2\theta_1\phi_1} \Gamma_{r\theta_2}^{\theta_2} J_{\theta_2\phi_2} J_{\theta_1\phi_1} \\
&+ \epsilon^{r\phi_1\theta_1\theta_2\phi_2} \Gamma_{r\phi_1}^{\phi_1} J_{\phi_1\theta_1} J_{\theta_2\phi_2} + \epsilon^{r\phi_2\theta_2\theta_1\phi_1} \Gamma_{r\phi_2}^{\phi_2} J_{\phi_2\theta_2} J_{\theta_1\phi_1}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Como

$$\Gamma_{r\theta_1}^{\theta_1} = \Gamma_{r\phi_1}^{\phi_1} = \Gamma_{r\theta_2}^{\theta_2} = \Gamma_{r\phi_1}^{\phi_1} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{H'}{H} \right) \tag{5.60}$$

então

$$\begin{aligned}\epsilon^{rjklm}\tilde{\Gamma}_{rj}^i J_{ik} J_{lm} &= 4\epsilon^{r\theta_1\phi_1\theta_2\phi_2}\Gamma_{r\theta_1}^{\theta_1} J_{\theta_1\phi_1} J_{\theta_2\phi_2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\right)r^4 H^2 \text{sen}^2\theta_1 \text{sen}^2\theta_2\end{aligned}\quad (5.61)$$

e logo,

$$\epsilon^{rbcde}\left[\left(\tilde{\Gamma}_{rb}^i J_{ic} + \tilde{\Gamma}_{rc}^i J_{bi}\right)J_{de} + \left(\tilde{\Gamma}_{rd}^i J_{ie} + \tilde{\Gamma}_{re}^i J_{di}\right)J_{bc}\right] = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\right)r^4 H^2 \text{sen}^2\theta_1 \text{sen}^2\theta_2\quad (5.62)$$

a equação de *Strominger* para a 2-forma fundamental fornece a equação diferencial de primeira ordem:

$$2r^3 H^2 + r^4 H H' - 2r^4 H^2 \phi' = 0\quad (5.63)$$

Além disso, a forma fundamental deve satisfazer a equação:

$$e^{2\phi}d(e^{-2\phi}J) = \star_6\mathcal{H}\quad (5.64)$$

Como

$$\star_6\mathcal{H}_3 = \frac{\sqrt{g}}{(6-3)!}\epsilon_{lmn}^{ijk}H_{ijk}dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n\quad (5.65)$$

então, usando o *ansatz* de *Carlevaro-Israel*, obtemos:

$$\begin{aligned}\star_6\mathcal{H}_3 &= \frac{g_1^2\alpha k}{6}(\text{sen}\theta_1 dr \wedge d\theta^2 \wedge d\phi^2 + \text{sen}\theta_2 dr \wedge d\theta^1 \wedge d\phi^1) \\ &= \frac{g_1^2\alpha k}{r}dr \wedge (\text{sen}\theta_1 \wedge d\theta^1 \wedge d\phi^1 + \text{sen}\theta_2 \wedge d\theta^2 \wedge d\phi^2)\end{aligned}\quad (5.66)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}e^{2\phi}d(e^{-2\phi}J) &= e^{2\phi}\nabla_a(e^{-2\phi}J_{bc})dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &= (\nabla_a J_{bc} - 2\partial_a\phi J_{bc})dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c\end{aligned}\quad (5.67)$$

Na direção radial, temos

$$\begin{aligned}\nabla_r J_{bc}dr \wedge dx^b \wedge dx^c &= (\partial_r J_{\theta_1\phi_1} - \Gamma_{r\theta_1}^i J_{i\phi_1} - \Gamma_{r\phi_1}^i J_{\theta_1 i})dr \wedge d\theta_1 \wedge d\phi_1 \\ &\quad + (\partial_r J_{\theta_2\phi_2} - \Gamma_{r\theta_2}^i J_{i\phi_2} - \Gamma_{r\phi_2}^i J_{\theta_2 i})dr \wedge d\theta_2 \wedge d\phi_2 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\partial_r(r^2 H) - 2r^2 H\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\right)\right]dr \wedge (\text{sen}\theta_1 d\theta^1 d\phi_1 + \text{sen}\theta_2 d\theta^2 d\phi_2) \\ &= 0\end{aligned}\quad (5.68)$$

ou seja, J_2 é covariantemente constante em relação a esta conexão. Já para o dÍlaton,

$$\begin{aligned}\partial_r \phi J_{bc} dr \wedge dx^b \wedge dx^c &= \phi' dr \wedge (J_{\theta_1 \phi_1} d\theta_1 \wedge d\phi_1 + J_{\theta_2 \phi_2} d\theta_2 \wedge d\phi_2) \\ &= -\frac{1}{4}(r^2 H) \phi' dr \wedge (\text{sen}\theta_1 d\theta^1 \wedge d\phi^1 + \text{sen}\theta_2 d\theta^2 \wedge d\phi^2)\end{aligned}\quad (5.69)$$

Logo, obtemos a equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$H\phi' = -2\frac{\alpha k g_1^2}{r^3}\quad (5.70)$$

A equação acima relaciona o fator de *warp* com o módulo do tensor intensidade de campo de *Kalb-Ramond*.

Note que o fator de *warp* depende da taxa com que o dÍlaton varia no espaço. Vale ressaltar que se tivéssemos relacionado o dÍlaton com o campo \mathcal{H}_3 , através da relação de supersimetria:

$$\partial_a \phi = -\frac{1}{2} H_{abc} g^{bc}\quad (5.71)$$

obteríamos:

$$\partial_r \phi = 0\quad (5.72)$$

Assim, a equação de *Strominger* para J_2 ficaria:

$$\frac{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2}{4} \partial_r (r^4 H^2) = 0 \Rightarrow H(r) = \frac{\sqrt{c}}{r^2}\quad (5.73)$$

onde c é uma constante. Logo, teríamos uma singularidade na origem - nodo do *conifold* - e não obteríamos uma resolução do espaço.

5.3.4 Forma holomórfica

Como a (3,0)-forma homórfica $\Omega_{3,0}$ é proporcional à forma volume do *conifold* tomemos o seguinte *ansatz*, também anteriormente utilizado em [10]:

$$\Omega_{3,0} = E^1 \wedge E^2 \wedge E^3\quad (5.74)$$

Logo,

$$\Omega_{3,0} = (e^{124} - e^{135} - e^{256} - e^{346}) + i(e^{125} + e^{134} + e^{246} - e^{356})\quad (5.75)$$

onde $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$. Tomando o sistema de coordenadas de $SU(2)$, temos:

$$\begin{aligned}
Re(\Omega_{3,0}) &= \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{r^2 H^{\frac{3}{2}}}{f} dr \wedge \left(\left(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \text{cos}^2 \frac{\psi}{2} \right) d\theta_1 \wedge d\theta_2 - \text{sen}\psi (\text{sen}\theta_1 d\phi_1 \wedge d\theta_2 + \right. \\
&+ \text{sen}\theta_2 d\theta^1 \wedge d\phi^2 + \left. \left(\text{cos}^2 \frac{\psi}{2} - \text{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 d\phi_1 \wedge d\phi_2 \right) + \\
&+ \frac{f}{4\sqrt{6}} (r\sqrt{H})^3 \left[\text{sen}\psi d\theta_1 \wedge d\theta_2 - \text{sen}\psi \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 d\phi_1 \wedge d\phi_2 + \left(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \text{cos}^2 \frac{\psi}{2} \right) \times \right. \\
&\left. (\text{sen}\theta_2 d\theta_1 \wedge d\phi_2 - \text{sen}\theta_1 d\theta_2 \wedge d\phi_1) \right] \wedge \omega_1 \tag{5.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im(\Omega_{3,0}) &= -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{r^2 H^{\frac{3}{2}}}{f} dr \wedge \left(\text{sen}\psi d\theta^1 \wedge d\theta^2 + \left(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \text{cos}^2 \frac{\psi}{2} \right) \text{sen}\theta_2 d\theta^1 \wedge d\phi^2 + \right. \\
&+ \left. \left(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \text{cos}^2 \frac{\psi}{2} \right) \text{sen}\theta_2 d\theta^1 \wedge d\phi^2 - \text{sen}\psi \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 d\phi^1 \wedge d\phi^2 + \right) \\
&+ \frac{r^3 H^{\frac{3}{2}} f}{4\sqrt{6}} \left[\left(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \text{cos}^2 \frac{\psi}{2} \right) d\theta^1 \wedge d\theta^2 - \text{sen}\psi \text{sen}\theta_2 d\theta^1 \wedge d\phi^2 \right. \\
&\left. - \text{sen}\psi \text{sen}\theta_1 d\phi^2 \wedge d\theta^2 + \left(\text{cos}^2 \frac{\psi}{2} - \text{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 d\phi^1 \wedge d\phi^2 \right] \wedge \omega_1 \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Tal forma satisfaz a equação:

$$J \wedge \Omega = 0 \tag{5.78}$$

Tal condição está relacionada a ausência de vetores invariantes sobre o grupo $SU(3)$.

Pela equação de *Strominger* para a 3-forma holomórfica,

$$d(e^{-2\phi}\Omega_{3,0}) = 0 \tag{5.79}$$

logo, para a componente radial, temos:

$$\nabla_r(e^{-2\phi}\Omega_{bcd})dx^r \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d = e^{-2\phi} (\partial_r(\phi)\Omega_{bcd} + \nabla_r\Omega_{bcd}) dr \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d \tag{5.80}$$

Como o primeiro termo de Ω tem uma componente na direção r , após o produto por dr resta apenas o segundo termo e portanto,

$$\left[\partial_r(fr^3 H^{\frac{3}{2}}) - 2\partial_r\phi fr^3 H^{\frac{3}{2}} - \epsilon^{abcd}(\Gamma_{rb}^i\Omega_{icd} + \Gamma_{rb}^i\Omega_{icd} + \Gamma_{rb}^i\Omega_{icd}) \right] dr \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d = 0 \tag{5.81}$$

logo, a equação de *Strominger* fornece a equação diferencial de primeira ordem não-linear relacionando f, H e ϕ :

$$r^3 H f' + 3r^2 H f + \frac{3}{2} r^3 f H' - 2r^3 f H \phi' - (\Gamma_{rb}^i\Omega_{icd} - \Gamma_{rc}^i\Omega_{bid} - \Gamma_{rd}^i\Omega_{bci}) = 0 \tag{5.82}$$

Procedendo dessa forma, *Carlevaro-Israël* obtiveram o seguinte sistema de equações de primeira ordem que determinam a geometria do *conifold*:

$$f^2 H' = f^2 H \phi' = -\frac{2\alpha' g_1^2}{r^3} \quad (5.83)$$

$$r^3 H f f' + 3r^2 H (f^2 - 1) + \alpha' k g_1^2 = 0 \quad (5.84)$$

Para determinarmos f, H, ϕ e assim obtermos a forma exata da variedade, devemos utilizar ainda as condições DUY e a transgressão da identidade de Bianchi para \mathcal{H}_3 . Mas para isso, precisamos buscar um *ansatz* para os campos A_1, F_2 .

5.3.5 Campos

Os autores tomaram o seguinte *ansatz* para o potencial vetor e seu tensor intensidade de campo:

$$A_1 = \frac{1}{4} [(\cos\theta_1 d\phi_1 - \cos\theta_2 d\phi_2) \mathbf{p} + g_2(r) \omega_1 \mathbf{q}] \mathbf{H} \quad (5.85)$$

$$F_2 = -\frac{1}{4} [(\Omega_1 - \Omega_2) \mathbf{p} + (g_2(r)(\Omega_1 + \Omega_2) - g_2'(r)(dr \wedge \omega_1)) \mathbf{q}] \mathbf{H} \quad (5.86)$$

onde, $\mathbf{H} \in SO(16)$ subálgebra de *Cartan*. Nesse grupo, \mathbf{p}, \mathbf{q} são chamados *vetores de deslocamento*⁵. O nome vem do fato de que em um diagrama de *Dynkin*, que representa um espécie de teia que descreve tanto a dinâmica de orbifolds como a estrutura dos grupos de *Lie*, existem vetores que pela ação do grupo de simetria, levam de nodo a outro [1],[43].

Para determinar g_2 , os autores utilizaram a condição DUY:

$$F^{ab} J_{ab} = 0 \Rightarrow g_2 = \left(\frac{a}{r}\right)^4 \quad (5.87)$$

Para encontrar g_1 , os autores tomaram um vínculo sobre \mathbf{p}, \mathbf{q} :

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = k \quad (5.88)$$

⁵*shift vectors* em inglês.

Com essa condição, o termo de Chern-Simons - instanton - é o único relevante até primeira ordem. Assim, substituindo o ansatz para F_2 na equação de *Bianchi* para \mathcal{H}_3 , obtem-se:

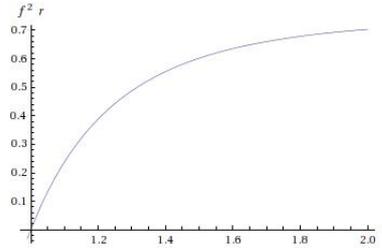
$$g_1^2 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \quad (5.89)$$

Note que g_1 anula-se em $r = a$ e que tal fator é da forma encontrado para os fatores da métrica de *Kerr* descrevendo buracos negros girantes.

No intervalo, $a^2 \leq r^2 \leq \alpha' k$, com $g_s \rightarrow 0$, $\mu = \frac{g_s \alpha'}{a^2}$, μ constante, podemos obter a solução

$$H(r) = \frac{2\alpha' k}{r^2} \quad , \quad f^2(r) = g_1^2(r) = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^8 \right] \quad (5.90)$$

O comportamento de $f^2(r)$ pode ser melhor analisado observando o gráfico:



Como os autores não fizeram nenhuma menção ao campo B_2 que não foi utilizado no seu trabalho, vamos nos inspirar no *ansatz* que *Becker et al* utilizaram [37]:

$$B_{z,\bar{z}} = aA_2 d\bar{z}^2 \wedge dz^3 + bA_2 dz^2 \wedge d\bar{z}^3 \quad (5.91)$$

Note que a solução acima é simétrica. Fazendo $a = b$ e $A_2 + A_2 = h(r)$, obtemos:

$$\begin{aligned} B &= h(r) \left(\frac{r\sqrt{H}}{2} (\text{sen} \frac{\psi}{2} d\theta_2 - \text{cos} \frac{\psi}{2} \text{sen} \theta_2 d\phi_2) \wedge \sqrt{\frac{3H}{2}} \frac{1}{f} dr \right. \\ &\quad - \frac{r\sqrt{H}}{2} [(\text{cos} \frac{\psi}{2} d\theta_2 + \text{sen} \frac{\psi}{2} \text{sen} \theta_2 d\phi_2) \wedge \frac{r\sqrt{H}f}{\sqrt{6}} \omega_1 \\ &\quad + (\text{sen} \frac{\psi}{2} d\theta_2 - \text{cos} \frac{\psi}{2} \text{sen} \theta_2 d\phi_2) \wedge \frac{r\sqrt{H}f}{\sqrt{6}} \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{3H}{2}} \frac{1}{f} dr \wedge (\text{cos} \frac{\psi}{2} d\theta_2 + \text{sen} \frac{\psi}{2} \text{sen} \theta_2 d\phi_2) \right] \quad (5.92) \end{aligned}$$

Como estamos interessados em *conifolds* resolvidos vamos comparar a expressão acima com o *ansatz* de *Pando-Zayas e Tseytlin* [10]: Nesse trabalho, os autores tomaram:

$$B_2 = f_1(r)\tilde{\Omega}_1 + f_2(r)\tilde{\Omega}_2 \quad (5.93)$$

onde $\tilde{\Omega}_i = \text{sen}\theta_i d\theta_i \wedge d\phi^i$. Note que o campo de *Kalb-Ramond* tem apenas componentes angulares sobre S^4 . Daí,

$$H_3 = dB_2 = dr \wedge [f_1'(r)\Omega_1 + f_2'(r)\Omega_2] \quad (5.94)$$

Assim, vamos tomar apenas as componentes angulares de nosso chute, donde

$$\begin{aligned} B &= \frac{r^2 H f}{2\sqrt{6}} \left[\left(\cos\frac{\psi}{2} d\theta_2 + \text{sen}\frac{\psi}{2} \text{sen}\theta_2 d\phi_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\text{sen}\frac{\psi}{2} d\theta_2 - \cos\frac{\psi}{2} \text{sen}\theta_2 d\phi_2 \right) \right] \wedge \omega_1 \end{aligned} \quad (5.95)$$

Note que em nessa configuração temos ciclos entre todas as coordenadas angulares do grupo $SU(2) \times S(2)/U(1)$ ao contrário do que se encontra em [10] onde B toma valores apenas sobre as S^2 . Tal solução deverá ser estudada futuramente com o objetivo de sabermos se o termo $B \wedge F$ também pode suavizar o *conifold* com torção.

6 Conclusões

A suavização do *conifold* através da técnica *brane resolution* é possível tanto no caso sem torção, amplamente estudado na literatura principalmente na teoria de supergravidade do tipo II-B, como no caso com torção, particularmente estudado aqui no cenário heterótico.

Enquanto na teoria II-B o papel fundamental é dado por uma 5-forma F_5 auto-dual e por uma 3-forma G_3 , no cenário heterótico focamos apenas na 3-forma de intensidade de campo de *Kalb-Ramond*, em particular na transgressão de sua identidade de Bianchi.

Analisando o trabalho de *Cvetič et al*, que estudaram a resolução de um espaço conformalmente de *Eguchi-Hanson* a partir de uma transgressão da identidade de *Bianchi* por um termo de *instanton*, vimos que, para uma configuração esfericamente simétrica do campo de *Kalb-Ramond*, podemos obter a resolução desse espaço com um termo topológico de anomalia do tipo BF. Como o campo B_2 tem uma dependência radial de r^{-4} , o termo BF pode ser tomado como desprezível em uma primeira aproximação. Além disso, como seus efeitos só podem ser sentidos em uma vizinhança da origem, em um estudo global, tal solução, pelo menos na configuração estudada, pode ser descartada no sentido de estudarmos apenas a resolução do cone. Contudo, ela se torna interessante na busca por efeitos de torção, ainda que locais.

Vale a pena salientar que os efeitos do termo BF são próprios para um escala de comprimento da ordem do comprimento característico das cordas. Assim, podemos ver a inclusão do termo BF como uma correção de anomalia para mais altas energias.

A partir das equações de Strominger, obtivemos os fatores de warp para uma métrica de um espaço cônico dotado de torção. De fato, tal espaço tem uma configuração de fatores de warp que quebra a simetria entre direções angulares. Repetindo o procedimento utilizado por *Carlevaro-Isráel*, obtivemos uma variedade cônica sem singularidade na origem e dependente de um fator de resolução, ou seja, obtivemos um *conifold* resolvido com torção. *Carlevaro-Isráel* obtiveram um campo de *Kalb-Ramond* que cai com r^{-4} , ou pouco mais forte que a solução encontrada por nós repetindo o procedimento estudado por *Cvetič et al*.

Embora a resolução a partir de um defeito do tipo BF foi tomada heurísticamente, utilizamos ansatz bastante conhecidos dos campos B e F e os resultados foram bem animadores. Contudo, não podemos esquecer que precisamos ainda estudar com mais detalhes as soluções

de todos os campos, inclusive as soluções gravitacionais, e conferir se o ansatz geométrico tomado é também válido no caso de um defeito do tipo BF. Além disso, o teorema de Green-Schwarz do cancelamento de anomalias não leva em conta acoplamentos entre B e F e logo, devemos ainda mostrar que tais soluções são livres de anomalia e preservam supersimetria.

7 Perspectivas

1. Deduzirmos os termos de anomalia contendo $B \wedge F, B \wedge B$ utilizando dualidade T e outros mecanismos discutidos em [36] e [37];
2. Utilizarmos o termo $B \wedge F$ na resolução do conifold com torção;
3. Buscarmos uma *deformation* ao invés de uma *resolution* do *conifold* com torção seguindo a análise feita por *Carlevaro-Israel*;
4. Buscarmos obtermos a resolução do *conifold* com torção a partir de um superpotencial;
5. **Localização de campos:** Estudar a localização do campo H_3 levando em conta a adição dos termos topológicos de Chern-Simons $A_1 \wedge F_2 - \frac{1}{3}A_1 \wedge A_1 \wedge A_1$, Gauss-Bonnet $\omega \wedge \mathcal{R} - \frac{1}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega, B \wedge F$ e $H_3 \wedge A_1$. O termo de *Chern-Simons* pode ser interpretado como um vórtice na dimensão extra. Existem alguns trabalhos utilizando soluções do tipo vórtice de *Nielsen-Olesen* em duas dimensões extras [34],[35]. Já o termo de *Gauss-Bonnet* pode ser interpretado como a inclusão de termos de mais alta ordem na ação de gravidade;
6. **Termo de Born-Infeld:** Utilizarmos o termo de *Born-Infeld* com o intuito de estudar os efeitos que termos de ordem mais alta $|H_3|^n, |F_3|^n$ teriam sobre a *brane resolution*.
7. **Fluxo de Ricci:** Estudar o fluxo de *Ricci* sobre o espaço modular do *conifold* de forma a obter continuamente, através da equação de *Ricci*, o *conifold* deformado e o *conifold* resolvido. No caso de um *conifold* Ricci-plano, uma outra equação possível que descreveria essa mudança seria a equação de *Lichnerowicz* [1]. De forma mais geral, poderíamos buscar um grupo de evolução - deformação - definido no *moduli space* - que geraria uma família de soluções entre as versões do *conifold*. Assim, poderíamos estudar a estabilidade dessas variedades. Qual seria a mais estável?
8. **Geometria não-comutativa:** As deformações que espaços de *Calabi-Yau* podem ser classificadas em *estados* no *moduli space*. Como em mecânica quântica, pode-se passar de um estado a outra através de um grupo descontínuo - o operador escada - [1]. Há então, um espectro discreto de variedades. Tal resultado também é conhecido quando se aplica geometria não-comutativa no estudo de entropia de buracos-negros. Como existem soluções do tipo buraco-negros em D-branas, poderíamos estender entropia a branas, que no

caso estudado seriam branas de Kerr. Poderíamos ainda estudar uma explicação microscópica para o espectro discreto da entropia dos buracos negros, usando deformação de cordas em um *conifold*.

9. **COSMOLOGIA:** Estudar soluções cosmológicas que a métrica do espaço-tempo oriunda do fator de *warp* do *conifold* possa fornecer. Neupane [42] encontrou soluções com aceleração do universo sobre *conifolds* resolvidos. Além disso, o termo $BF + BB$ são lagrangeanas topológicas para a relatividade geral em quatro dimensões. Podemos ainda estudar o papel que os campos de *Kalb-Ramond* oriundo de uma ação de *Born-Infeld* e o *dílaton* têm sobre modelos cosmológicos usando a métrica do *conifold*. O mais simples seria introduzir um termo de Constante cosmológica à ação de Einstein-Hilbert;
10. Estudar a relação entre o modelo Randall-Sundrum e parades de domínio construídas sobre a brana resolvida que localizam a gravidade;
11. **Branas não-BPS** As branas estudadas nesse trabalho são do tipo BPS, conservando metade das supersimetrias do *background* inicial. Em tal cenário, para mantermos tal número de supercargas, precisamos ter uma brana com métrica de Minkowsky representando nosso universo. Talvez se tomássemos branas não-BPS poderíamos obter métricas mais gerais, com geometria não-fatorizável, com termos de constante cosmológica, buracos-negros, etc.
12. Estudar os processos de suavização em outras subvariedades de $\mathbb{C}P^n$ geradas por outras quádricas;

Referências Bibliográficas

- [1] M.Becker, K.Becker, J.Schwarz ,String theory and M theory: a modern introduction ,cambridge university press (2007).
- [2] J.Polchinski, String theory,volume II, cambridge university press (1998).
- [3] J. M. Maldacena and C. Nunez, Phys. Rev. Lett. **86**, 588 (2001) [arXiv:hep-th/0008001].
- [4] Oh K., Tatar R.,Branes at Orbifolded Conifold Singularities and Supersymmetric Gauge Field Theories, JHEP10(1999)031, [arXiv:hep-th/9906012v2].
- [5] Dasgupta K., Mukhi S., Brane Constructions, Conifolds and M-Theory, arXiv:hep-th/9811139.
- [6] I. R. Klebanov and E. Witten, Nucl. Phys. B **536**, 199 (1998) [arXiv:hep-th/9807080].
- [7] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, JHEP **0008**, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].
- [8] I. R. Klebanov and A. Murugan, JHEP **0703**, 042 (2007) [arXiv:hep-th/0701064].
- [9] P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B **342**, 246 (1990).
- [10] G. Papadopoulos and A.A. Tseytlin,Complex geometry of conifolds and 5-brane wrapped on 2-sphere, 2001 Class. Quantum Grav. 18 1333, [arXiv:hep-th/0012034].
- [11] L. A. Pando Zayas and A. A. Tseytlin, JHEP **0011**, 028 (2000) [arXiv:hep-th/0010088].
- [12] H.Q.Lu, Z.G.Huang, W.Fang, K.F.Zhang, Dark energy and dilaton cosmology, [arXiv:hep-th/0409309].
- [13] M gasperini, Dilaton cosmology and phenomenology, [arXiv:hep-th/0702166].
- [14] S.SenGupta, S.Sur, accelerating universe without bigbang singularity in Kalb-Ramond cosmology, [arXiv:hep-th/0207065].
- [15] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [16] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].

- [17] B.de Carlos, J.M.Moreno, A cigar-like universe, JHEP11(2003)040 [arXiv:hep-th/0309259].
- [18] K.S.Stelle, BPS BRANES IN SUPERGRAVITY, [arXiv:hep-th/9803116 2009].
- [19] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, Commun. Math. Phys. **232**, 457 (2003) [arXiv:hep-th/0012011].
- [20] M.Cvetič, G.Gibbons, H.Lü , C.N.Pope, Hyper-Kähler Calabi Metrics, L^2 Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and AdS4 /CFT3 Correspondence, Nucl.Phys.B617:151-197,2001, [arXiv:hep-th/0102185].
- [21] M. Cvetič, H. Lu and C. N. Pope, Nucl. Phys. B **600**, 103 (2001) [arXiv:hep-th/0011023].
- [22] L. Carlevaro and D. Israel, JHEP **1001**, 083 (2010) [arXiv:hep-th/0910.3190].
- [23] S.Hawking,G. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge Press.
- [24] Mikio Nakahara, Geometry, topology and physics, institute of physics publishing.
- [25] E.Kiritsis, String theory in a nutshell, Princeton university press.
- [26] L.Castellani, R.D’Auria, P.Fré supergravity and superstrings, a geometric perspective, volume 1, mathematical foundations, World scientific.
- [27] C. A. S. Almeida, Braz. J. Phys. **31**, 277 (2001) [arXiv:hep-th/0105232].
- [28] R. Szabo, An introduction to branes and strings, Imperial college press, (2007)
- [29] F.A. Brito, M. Cvetič, A. Naqvi, Class. Quant. Grav. 20:285-301, (2003); [arXiv:hep-th/0206180v3].
- [30] M.Cvetič, supergravity domain walls, Phys.Rept.282:159-223,1997, [arXiv:hep-th/9604090].
- [31] R.Minasian, D.Tsimpis, On the geometry of non-trivially embedded branes, Nuclear Physics B 572 Z2000, 499–513 arXiv:hep-th/9911042, 2000.
- [32] Hawking S W and Taylor-Robinson M M 1998 Bulk charges in eleven dimensions Phys. Rev. D 58 025006, (Preprint hep-th/9711042).
- [33] Swapna Mahapatra, Eguchi-Hanson metric from various limits, Nucl.Phys. B572 (2000) 499-513, [arXiv:hep-th/9908048].

- [34] M.Gionvannini, H.Meyer, M.Shaposhnikov, Warped compactification on Abelian vortex in six dimensions, Nucl.Phys. B619 (2001) 615-645, [arXiv: hep-th/0104118].
- [35] S.Randjbar-Daemi, M.Shaposhnikov, QED from six-dimensional vortex and gauge anomalies, jhep042003016.
- [36] K.Becker, K.Dasgupta, Heterotic Strings with Torsion, arXiv:hep-th/0209077.
- [37] Katrin Becker , Melanie Becker , Keshav Dasgupta , Paul S. Green Compactifications of Heterotic Theory on Non-Kähler Complex Manifolds: I arXiv:hep-th/0301161v3 7 Apr 2003
- [38] Katrin Becker , Melanie Becker , Ji-Xiang Fu , Li-Sheng Tseng, Shing-Tung Yau Anomaly cancellation and smooth non-Kähler solution in heterotic string theory,Nucl.Phys.B 7512006
- [39] C.Johnson, D-branes, Cambridge monographs in mathematical physics.
- [40] L.Carlevaro, D.Israël, Heterotic resolved conifolds with torsion, from supergravity to CFT, 10.1007/JHEP01(2010)083
- [41] J.Baez, 4-dimensional BF theory with cosmological term as a topological quantum field theory, Lett.Math.Phys. 38 (1996) 129-143, [arXiv:q-alg/9507006].
- [42] I.P.Neupane Accelerating Universes from Compactification on a Warped Conifold, Phys.Rev.Lett.98:061301,2007, arXiv:hep-th/0609086 2007.
- [43] Hans Peter Nilles, Saul Ramos-Sánchez, Patrick Vaudrevange, Akin Wingerter, Exploring the $SO(32)$ heterotic string, JHEP04(2006)050.