



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**DANIEL BRANDÃO MENEZES**

**O USO DE DOBRADURAS COMO RECURSO PARA O**  
**ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: HISTÓRIA, TEOREMAS**  
**E PROBLEMAS**

**FORTALEZA**

**2014**

**DANIEL BRANDÃO MENEZES**

**O USO DE DOBRADURAS COMO RECURSO PARA O  
ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: HISTÓRIA, TEOREMAS  
E PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

**FORTALEZA**

**2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

M51u Menezes, Daniel Brandão  
O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana : história, teoremas e problemas / Daniel Brandão Menezes. – 2014.  
64 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Geometria plana. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Origami. I. Título.

---

CDD 516.22

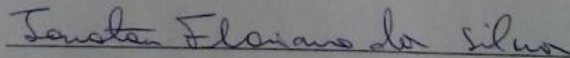
DANIEL BRANDÃO MENEZES

O USO DE DOBRADURAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DA  
GEOMETRIA PLANA: HISTÓRIAS, TEOREMAS E PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Matemática em Rede Nacional, do  
Departamento de Matemática da  
Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para a obtenção do  
Título de Mestre em Matemática. Área  
de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12 / 04 / 2014.

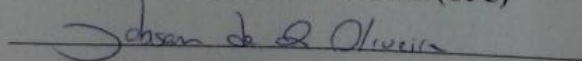
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

## **AGRADECIMENTOS**

**Agradeço a Deus por todo o suporte divino destinado a mim nesses últimos dois anos.**

**À minha família, em especial meu avô e minha avó, por todo carinho e atenção com minha educação desde criança.**

**À minha esposa, Lidiane, que sempre está no meu lado sabendo com muito discernimento me guiar pelos caminhos corretos.**

**Ao meu orientador por ter me feito acreditar que seria capaz de passar por esta etapa com louvor.**

**Aos meus professores de curso que puderam contribuir com minha formação sempre com muita dedicação.**

**Aos meus amigos que sempre estavam em contato, torcendo para que meu desempenho fosse sempre crescente.**

**À DEUS e à Minha família e minha  
amada esposa, Lidiane.**

**“É deixado bem claro, que as  
dobras por si nada representariam  
se não houvesse um arcabouço  
teórico que complementasse toda  
a metodologia a ser implantada:  
prática e teoria.”**

## RESUMO

A constante preocupação no desempenho do professor do ensino básico mediante a nova realidade da educação matemática brasileira motivou o início deste estudo, uma vez que a aprendizagem sofre constantes modificações e os detentores do conhecimento necessitam acompanhar as mudanças ocorridas em tal cenário. Diante disso, o objetivo deste trabalho é possibilitar uma fonte literária para o professor do ensino básico e aprofundar seu embasamento teórico para transmitir o conteúdo de Geometria Euclidiana Plana com o uso de materiais concretos em suas salas de aula. A metodologia utilizada foi o levantamento bibliográfico de obras que focam os principais resultados necessários ao aprendizado do tema de geometria ensinado por meio de dobras, bem como, os estudos realizados em artigos e trabalhos científicos buscando adaptar os conceitos matemáticos ao trabalho lúdico com as dobraduras de papel. Como resultado principal, pode-se citar a criação de um texto sobre a história das dobras, Teoremas e problemas que envolvem a geometria e o modo diverso de resolvê-los, por meio de uma forma lúdica e também teórica. Inúmeros modelos de trabalhos futuros podem ser discutidos como: utilização do software Geogebra para a aplicação das dobras, aplicação controlada das resoluções propostas em sala de aula juntamente com a obtenção dos resultados perante os alunos, gravação de vídeos da realização das dobras e criação de um livro texto para os alunos baseado nas conclusões retiradas desta obra.

**Palavras-Chave:** Geometria Plana. Matemática – Estudo e ensino. Origami.



## ABSTRACT

A constant concern in the school teacher's performance by the new reality of the Brazilian mathematics education motivated the beginning of this study, since learning undergoes constant modifications and holders of knowledge need to monitor the changes in such a scenario. Thus, the aim of this work is to enable a literary source for the school teachers and deepen their theoretical basis to transmit the contents of Euclidean Plane Geometry with the use of concrete materials in their classrooms. The methodology used was the literature survey of articles that focus on the main theme of the necessary geometry taught by folds learning outcomes as well as, studies and articles in scientific studies trying to adapt mathematical concepts to the playful work with the folding of paper. As major result, we can mention the creation of a text about history of folding, theorems and problems involving geometry and different ways to solve them through a playful and also theoretically. Numerous models of future work can be discussed: the use of Geogebra software for the application of the folds, controlled application of resolutions proposed in the classroom jointly with getting the results before the students, recording vídeos and performing the folds create a textbook for students based on conclusions drawn from this work.

**Keywords:** Plane Geometry. Mathematic - Studying and teaching. Origami.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Construção do Axioma 1 . . . . .	17
Figura 2 - Construção do Axioma 2 . . . . .	18
Figura 3 - Construção do Axioma 3 . . . . .	19
Figura 4 - Construção do Axioma 3 . . . . .	20
Figura 5 - Construção do Axioma 4 . . . . .	20
Figura 6 - Construção do Axioma 5 . . . . .	21
Figura 7 - Construção do Axioma 6 . . . . .	23
Figura 8 - Construção do Axioma 7 . . . . .	24
Figura 9 - Retas Concorrentes . . . . .	25
Figura 10- Reta que passa por dois pontos distintos . . . . .	26
Figura 11- Ponto Médio de um Segmento . . . . .	26
Figura 12- Ângulos Opostos pelo Vértice . . . . .	27
Figura 13- Dobras iniciais para a construção de Reta Perpendiculares. . . . .	28
Figura 14- Retas Perpendiculares . . . . .	28
Figura 15- Quadrado construído com dobras . . . . .	29
Figura 16- Construção do Triângulo . . . . .	29
Figura 17- Construção para a demonstração da soma dos ângulos internos 19. . . . .	30
Figura 18- Construção para a demonstração da soma dos ângulos internos. . . . .	31
Figura 19- Construção do Triângulo Equilátero . . . . .	31
Figura 20- Reta Bissetriz Interna . . . . .	32
Figura 21- Construção da Reta Mediatrix . . . . .	33
Figura 22- Construção do Incentro . . . . .	33
Figura 23- Construção do Circuncentro por meio de dobras . . . . .	34
Figura 24- Circuncentro do Triângulo . . . . .	34
Figura 25- Circuncentro do Triângulo . . . . .	35
Figura 26- Construção do Ortocentro . . . . .	35
Figura 27- Uso iniciais de dobras para inscrever um quadrado em um outro. . . . .	36
Figura 28- Um quadrado inscrito num quadrado . . . . .	36

Figura 29- Construção da divisão de um segmento em $2^k$ partes iguais . . . . .	37
Figura 30- Divisão de um segmento em $2^k$ partes iguais . . . . .	37
Figura 31- Divisão de um segmento em $2^k$ partes iguais . . . . .	38
Figura 32- Dobras iniciais para a construção do pentágono regular . . . . .	39
Figura 33- Dobras iniciais para a construção do pentágono regular . . . . .	39
Figura 34- Continuação das dobras para a construção do Pentágono Regular . . . . .	40
Figura 35- Construção do Pentágono Regular . . . . .	40
Figura 36- Construção do Pentágono . . . . .	41
Figura 37- Construção do Pentágono . . . . .	41
Figura 38- Pentágono Regular . . . . .	42
Figura 39- Pentágono Regular . . . . .	42
Figura 40- Construção do Hexágono regular . . . . .	43
Figura 41- Demonstração do Teorema de Pitágoras por meio de dobras . . . . .	44
Figura 42- Teorema de Pitágoras . . . . .	45
Figura 43- Dobras que formam o Teorema de Haga . . . . .	45
Figura 44- Demonstração do Teorema de Haga . . . . .	46
Figura 45- Construção das dobras iniciais para trisseccionar o lado do quadrado . . . . .	47
Figura 46- Trisseccção do Lado do quadrado . . . . .	48
Figura 47- Construção da Duplicação do Cubo por meio de dobras . . . . .	48
Figura 48- Dobras iniciais para a trisseccção do ângulo . . . . .	50
Figura 49- Trisseccção do ângulo . . . . .	51
Figura 50- Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de $54^\circ$ e $36^\circ$ . . . . .	52
Figura 51 Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de $54^\circ$ e $36^\circ$ . . . . .	53
Figura 52- Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de $54^\circ$ e $36^\circ$ . . . . .	53

Figura 53- Retângulos com Dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . . . . .	54
Figura 54- Dobras iniciais para a construção do Retângulo Áureo . . . . .	55
Figura 55- Construção do Retângulo Áureo . . . . .	56
Figura 56- Retângulo Áureo . . . . .	56
Figura 57- Construção da Parábola por meio de dobras . . . . .	57
Figura 58- Dobras iniciais para a construção da Elipse . . . . .	58
Figura 59- Construção da Elipse . . . . .	59
Figura 60- Elipse . . . . .	60
Figura 61- Construção da Hipérbole . . . . .	60

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	11
2.	DESCRIÇÃO AXIOMÁTICA .....	16
2.1.	Os Axiomas de Huzita-Hatori .....	17
3.	CONCEITOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO DOBRAS .....	25
3.1.	Construções Primitivas .....	25
3.2.	Construções de figuras geométricas .....	29
3.2.1.	<i>Triângulo</i> .....	29
3.2.2.	<i>Pontos Notáveis do triângulo</i> .....	33
3.2.3.	<i>Quadrado</i> .....	36
3.2.4.	<i>Pentágono Regular</i> .....	38
3.2.5.	<i>Hexágono Regular</i> .....	42
4.	O USO DE DOBRAS PARA A RESOLUÇÃO DE TEOREMAS E PROBLEMAS .....	44
4.1.	Teorema de Pitágoras .....	44
4.2.	Teorema de Haga .....	45
4.3.	Trissecção do lado de um Quadrado .....	46
4.4.	Problema de Duplicação do Cubo .....	48
4.5.	Trissecção do ângulo .....	49
4.6.	Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .....	51
4.7.	Retângulos com Dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .....	54
4.8.	Retângulo Áureo .....	54
4.9.	Cônicas .....	57
4.9.1.	<i>Parábola</i> .....	57
4.9.2.	<i>Elipse</i> .....	58
4.9.3.	<i>Hipérbole</i> .....	60
5.	CONCLUSÃO .....	61
	REFERÊNCIAS .....	63

## 1. INTRODUÇÃO

A formação dos professores do Ensino Básico tem sido motivo de discussões no cenário educacional brasileiro uma vez que os índices de qualificação escolar não apresentam resultados positivos, seja na aprovação anual para atingir a nova série, na tentativa de concursos ou vestibulares ou, até mesmo, no mercado de trabalho. Essa realidade se torna mais alarmante quando se trata da disciplina de Matemática quando os jovens por motivos diversos encontram dificuldades em seu aprendizado de acordo com Versa e Sousa (?, p.2). Muitas tentativas de sanar tais deficiências são propostas como realizar uma formação continuada com o docente a fim de que esteja sempre aprimorando as ferramentas de ensino utilizadas em sala de aula. Quando se trata de ensinar uma disciplina no ensino básico, muitos questionamentos devem ser feitos previamente: porquê? pra quê? o que? para quem? e tais dúvidas não envolvem somente os alunos como também o docente e, portanto, exigirá uma performance mais qualificada desse profissional.

O ensino de uma disciplina, qualquer que seja, não poderá suprimir tais questionamentos, pois envolvem uma amplitude de conhecimento que a atual sociedade tem cobrado no cotidiano. Ou seja, ensinar não significa mais só transmitir um determinado conhecimento por meio de uma aula tradicional e sim, criar mecanismos que naturalmente norteiam o aluno ao encontro da aprendizagem e situações que propiciem a aplicação da teoria na prática. Essa é uma situação preocupante para a disciplina de matemática, já que os professores não tiveram, quando estudavam ainda no ensino básico, um modelo educacional voltado para uma nova visão de ensino. Eis o maior desafio para a formação de formadores: formá-los com os novos moldes que a educação exige e, concomitantemente, torná-los aptos à aplicar o conhecimento com novas possibilidades em sua sala de aula.

“A situação ensinar/aprender é norteada pela satisfação que o indivíduo sente em usar a ciência para seu ajustamento ao meio, para suavizar suas lutas, para resolvendo problemas dar-lhe maior condição de cidadão.

É nessa direção que se providencia a formação de hábitos, atitudes e desenvolvimento de habilidades que lhe possibilitarão ultrapassar barreiras e desfrutar das oportunidades férteis que a vida moderna lhe apresenta." (BRITTO, 1984, p. 150)

Todos esses comentários se revelam consoantes ao o que preconizados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), pois o desenvolvimento da educação trouxe consigo a necessidade de que os estudantes tenham a capacidade de resolver problema, uma postura diferenciada na tomada de decisões e interpretação das mais variadas situações, bem como, aperfeiçoar os valores sociais e de trabalho em equipe. Segundo ainda os PCN's, a comunicação por meio de códigos e a interpretação e modelagem de uma realidade são percebidas por meio da matemática, ou seja, é nessa disciplina que os alunos poderão criar muitos elos com a realidade e ajudá-los em seu aprendizado que, a partir deste momento, não será mais pontual e sim interdisciplinar voltado para o cotidiano como, por exemplo, a leitura e compreensão do espaço e das figuras na geometria. Segundo D'Ambrósio (1997), a matemática em sala de aula atua como:

"[...] uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural." (D'Ambrosio, 1997, p.7)

A resolução de problemas, além de ser trabalhada pela parte algébrica da matemática, possui atuação na geometria a partir do momento em que exige a capacidade de visualização de figuras planas ou espaciais e suas propriedades geométricas dos corpos encontrados usualmente. Essa é uma das áreas mais antigas e que se tem revelado uma aliada no ensino da matemática, pois inúmeros estudos são realizados com a geometria e material concreto, ou seja, o uso de material didático manipulável tem sido muito utilizado nos estudos do conteúdo de geometria.

Segundo Deneca e Pires (?, p. 4), muitos foram os educadores que no transcorrer dos séculos falaram sobre a importância do material visual-tátil como ferramenta incentivadora do aprendizado, porém Carvalho (1990, p. 107)

colabora afirmando que o material didático que pode ser manipulado não exerce função apenas figurativa e sim deve ser dada ênfase às 3 operações que tais materiais podem desenvolver. Um interessante exemplo de material didático manipulável é o uso de dobraduras de papel em que o custo é acessível e a aplicabilidade é eficaz e que propicia uma ótima possibilidade de, além de obter a visualização dos resultados, pode usar o tato para realização dos trabalhos, o que quer mostrar o quão divertido pode ser o aprendizado da matemática utilizando uma folha de papel e algumas manobras orientadas pelo professor.

Essa preocupação com a formação dos professores do ensino básico e o uso de recursos diferenciados para o ensino da matemática formam o bojo desta dissertação, já que esta obra propicia uma ferramenta literária imprescindível para que o docente possa utilizar como material de estudos e, conseqüentemente, repassar em momento apropriado o conteúdo aprendido para seus alunos, ou seja, o objetivo principal deste trabalho é criar um material de apoio baseado no estudo da Geometria Euclidiana utilizando dobraduras de papel para mostrar alguns conceitos e teoremas matemáticos acompanhados de suas respectivas demonstrações algébricas justificando os movimentos das dobras. O público-alvo será o professor do ensino básico, preferencialmente, do 1º e 2º anos do nível médio, os quais já deram uma sólida apresentação dos conteúdos básicos matemáticos aos estudantes e são os docentes que trabalharão a Geometria de uma maneira mais axiomática e menos informal e intuitiva.

Os objetivos específicos são inicialmente criar uma obra completamente voltada para o estudo da geometria plana utilizando para seus aprendizados as dobras de papel, construir os principais conceitos e Teoremas da geometria plana por meio da manipulação do papel e fomentar a vontade de aprender geometria por meio de uma atividade Lúdica realizada pelos professores.

Este trabalho foi realizado sob a metodologia de levantamento bibliográfico e por meio de pesquisas exploratórias e descritivas, em que foi priorizada a aplicação dos temas desenvolvidos dirigida para a resolução de conceitos e Teoremas. A obra que deu início aos trabalhos foi a Dissertação de Liliana Cristina Nogueira Monteiro a qual foi apresentada para a obtenção



do título de Mestre na Universidade de Lisboa no ano de 2008, porém outros trabalhos acadêmicos, livros, artigos e literaturas eletrônicas foram utilizadas para complementar a pesquisa em tela.

A presente obra está dividida em três capítulos: Descrição Axiomática, Conceitos Geométricos Utilizando Dobras e Teoremas e O Uso de Dobras para a resolução de Teoremas e Problemas. No primeiro Capítulo, denominado Descrição Axiomática, o professor encontrará sedimentado o conteúdo teórico necessário para as aplicações que serão realizadas nos próximos capítulos por meio das dobras. Tal teoria está apresentada na forma de 7(sete) Teoremas denominados Teoremas de Huzita-Hatori e com eles um preâmbulo de História da Matemática sobre o surgimento dessa preocupação em axiomatizar as dobraduras realizadas no papel. Os conceitos aprendidos nessa parte inicial motivam o docente estar embasado matematicamente quanto às manipulações realizadas futuramente.

Dando sequência ao trabalho, encontram-se delineados no segundo capítulo, Conceitos Geométricos utilizando dobras, os primeiros passos para a construção da geometria euclidiana em sala de aula, pois são as definições primitivas dos conceitos geométricos mais comumente trabalhados e, logo após, a construção das figuras geométricas usuais: triângulo, quadrado, pentágono regular e hexágono regular e algumas de suas propriedades. Nesta etapa o professor dará os passos iniciais para que os alunos sejam conduzidos ao aprendizado mais amplo da geometria e fundamentará conceitos importantes para a resolução dos problemas propostos no próximo capítulo.

O terceiro capítulo, O Uso de Dobraduras para a resolução de Teoremas e Problemas, encontra-se o momento mais importante da dissertação e para o aprimoramento do professor de matemática que realiza um estudo sobre a Geometria Euclidiana, pois se encontram dois Teoremas importantes: Teorema de Pitágoras e Teorema de Haga, bem como problemas que atravessaram séculos para a sua resolução, ou seja, esse é o momento em que o docente pode aplicar o que fundamentado nos capítulos anteriores por meio das dobras, com o Teorema de Huzita- Hatori e os conceitos geométricos.

Este trabalho está pautado sob a proposta da Modalidade 1 do Banco Indutor de Trabalhos de Conclusão de Curso (B.I.T.) o qual orienta os trabalhos

acadêmicos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat). A dissertação conduz a uma proposta inovadora e cria uma ferramenta diferenciada para que o professor se aperfeiçoe e transmita para os alunos de acordo com sua peculiaridade acadêmica, ou seja, o material conduz o docente teoricamente, porém ele será o responsável em filtrar tal conhecimento de acordo com suas características próprias e de seus alunos.

## 2 DESCRIÇÃO AXIOMÁTICA

As técnicas de dobragem mostradas neste trabalho são realizadas em linhas retas, apesar de serem conhecidas também modelos que trabalham com linhas curvas. Segundo Liliane (2008, p. 08) foi em meados da década de 70 que as dobragens em origami foram objeto de estudos em que eram enumeradas suas possíveis combinações. Neste cenário destacou-se Humiaki Huzita, um matemático japonês-italiano (nasceu no Japão, porém viveu a maior parte de sua vida na Itália) que ficou conhecido por formular no final da década de 70 os primeiros seis axiomas, chamados inicialmente de operações básicas, para definir uma única dobra que pode alinhar várias combinações de pontos e retas já pré-existentes, ou seja, descrevia a matemática de dobrar o papel com o intuito de resolver problemas de construção geométrica. Ramirez e Lopez (2013, p.03) afirmam que estes axiomas também são relacionados, não somente com os conceitos da geometria euclidiana, como também, com problemas de cálculo diferencial e geometria analítica.

Anos mais tarde, em 1989, Jacques Justin ao publicar um artigo sugeriu que as combinações possíveis com uma única dobragem eram sete e não mais seis como os estudos de Huzita revelavam. Ainda de acordo com as pesquisas de Liliane (2008, p. 08), foi em 2002 que foi formalizado o sétimo axioma, ao apresentar uma dobragem que não era descrita nos estudos já realizados sobre o assunto e, então, os sete axiomas ficaram conhecidos como os Axiomas de Huzita-Hatori que mesmo em períodos diferentes trouxeram à tona a completude da lista. Alguns autores ainda ratificaram tais axiomas, como o físico americano Robert Lang que publicou em 2003 um estudo que demonstra a existência de apenas sete axiomas. Esses sete axiomas definem tudo que é possível de construir com uma única dobragem correlacionando retas e pontos.

## 2.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori

**Axioma 1: Dados dois Pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobra que passa pelos dois pontos.**

Essa única dobragem com esses dois pontos especificados nos eixos coordenados,  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , é equivalente a expressar uma reta que contém tais pontos, ou seja, resumir a situação em resolver equações de primeiro grau e calcular os coeficientes angular e linear. Isso remete ao primeiro postulado de Euclides citado por Santos e Viglioni (2011, p.15) em que pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

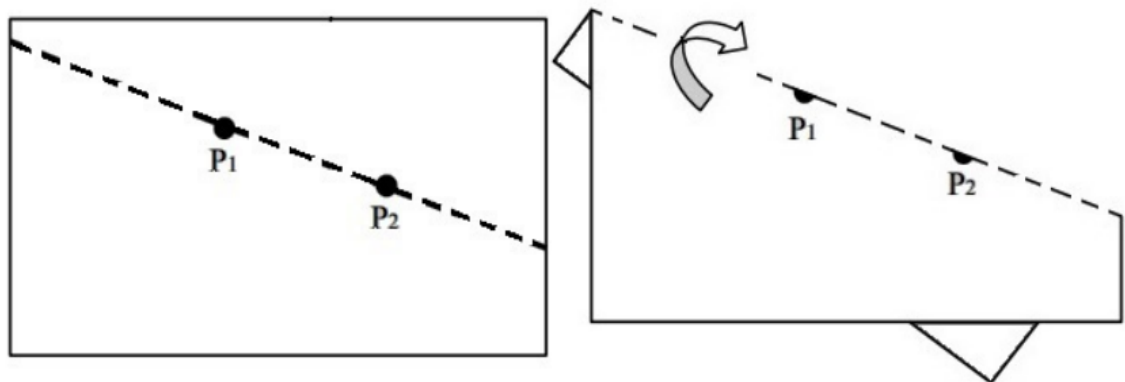
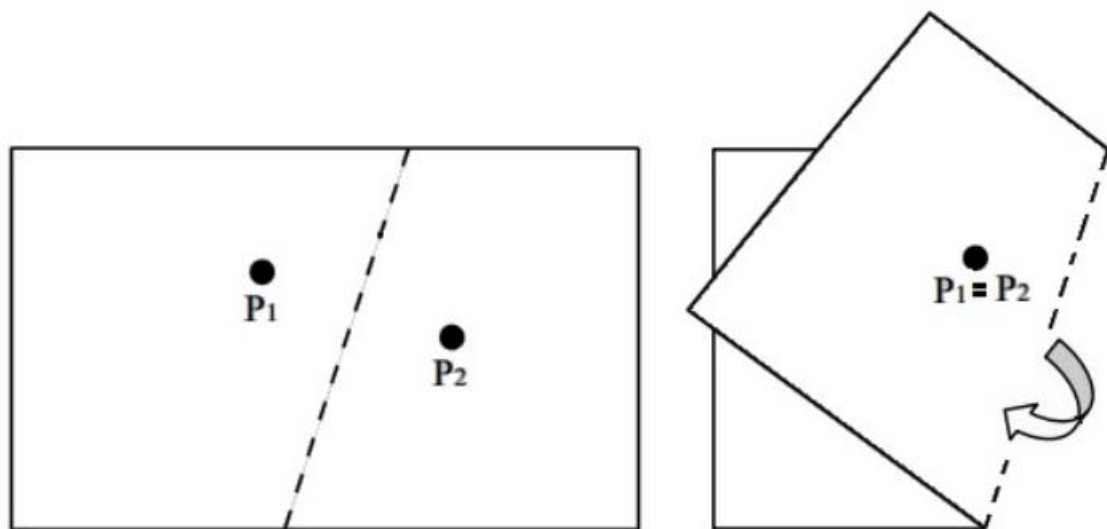


Figura 1: Construção do Axioma 1

**Axioma 2: Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobragem que os torna coincidentes.**

O axioma 2 também se resume em encontrar equações do primeiro grau, já que essa dobra que os torna coincidentes é a mediatriz do segmento  $\overline{P_1P_2}$ , e já oferece o ponto médio pertencente à reta perpendicular à mediatriz. Seja  $P \left( \frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2} \right)$ , com uma dobra encontra-se a reta  $\overline{P_1P_2}$ , caracterizada pela reta  $y = ax + b$  e a reta mediatriz que torna os pontos coincidentes após a dobragem é caracterizada pelo ponto  $P$  e o coeficiente angular  $m = \frac{-1}{a}$ .



**Figura 2:** Construção do Axioma 2

**Axioma 3:** Dadas duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe apenas uma dobra que faz coincidir  $r_1$  com  $r_2$ .

Consideremos inicialmente o caso em que tais retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam paralelas, daí façamos  $r_1 : y = ax + b$  e  $r_2 : y = a'x + b'$ . Nesse caso será preciso realizar uma dobra por uma reta paralela às retas  $r_1$  e  $r_2$  de tal modo que fique à mesma distância de cada uma. Seja um ponto da reta  $r_1$ ,  $P = (x_1, y_1)$ , tem-se dois casos que podem ser considerados  $a = 0$  ou  $a \neq 0$ .

Vejamos o primeiro caso, se  $a = 0$  e  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas então  $a' = 0$ , conclui-se que o ponto  $P = (x_1, y_1)$  e as retas  $r_1$  e  $r_2$  são definidas por  $y = b$  e  $y = b'$ , respectivamente. A reta perpendicular à  $r_1$  que passa pelo ponto  $P$  é da forma  $x = x_1$  e, portanto, sendo  $P' = (x_1, b')$  o ponto de interseção dessa reta perpendicular com  $r_2$ . Daí, tem-se dois pontos, e pelo axioma dois existe uma única dobra que os faz coincidir.

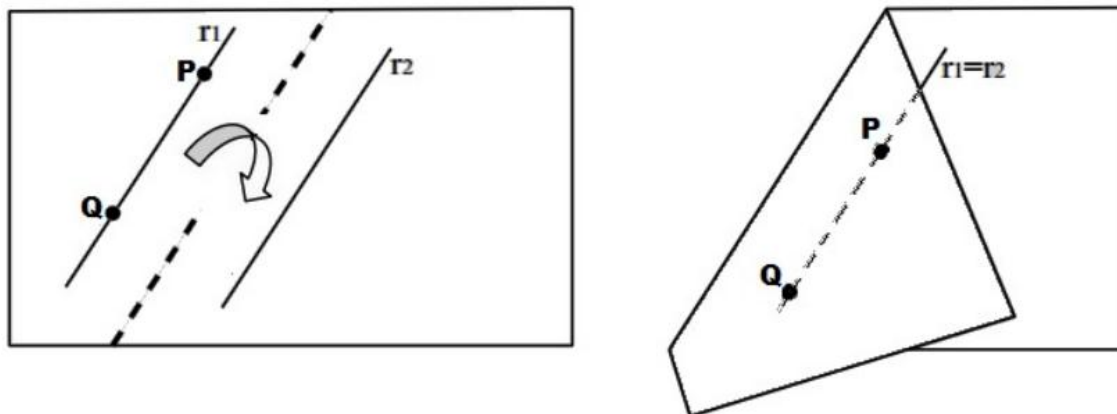


Figura 3: Construção do Axioma 3

Por outro lado, deve ser considerado o caso em que  $a \neq 0$ . Nesse caso a equação da reta  $r_1 : y = ax - ax_1 + y_1$  e a perpendicular a  $r_1$  é dada pela equação  $y = (-1)/ax + (-1/ ax_1 + y_1)$ . O ponto de interseção de dessa reta perpendicular com  $r_2$  será solução do sistema:

$$y = (-1)/ax + 1/ax_1 + y_1 \text{ e } y = a'x + b'$$

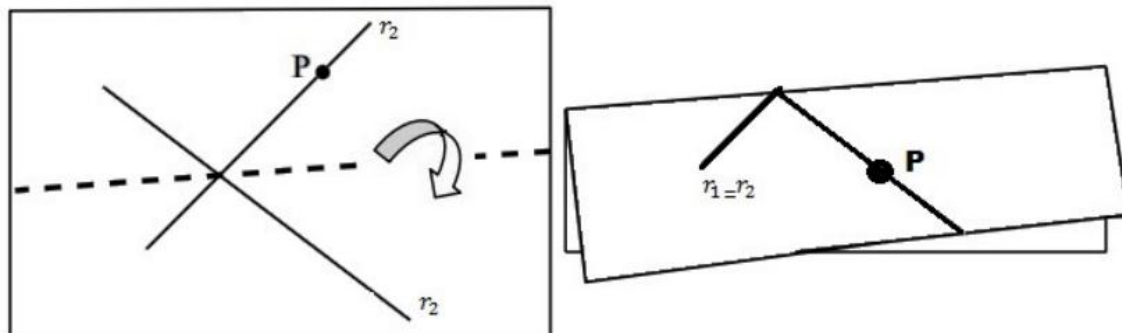
$$\text{Logo, } P' = ((x_1 + y_1 a' - b' a)/(a' a + 1), (x_1 a' + y_1 a' a + b')/(a' a + 1)).$$

Têm-se dois pontos, basta realizar a dobra utilizando o axioma 2.

Iremos agora trabalhar com a hipótese de que as retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam concorrentes e terá como saída a bissecção de um dos ângulos formados por tais retas. Deve-se calcular o ponto P de interseção entre as duas retas  $r_1$  e  $r_2$  através do sistema  $r_1 : y = ax + b$  e  $r_2 : y = a'x + b'$ , logo  $P = (x_0, y_0) = \left( \frac{b - b'}{a' - a}, \frac{a' b - ab'}{a' - a} \right)$ , observemos a condição de existência do denominador, já que as retas são não paralelas e os coeficientes angulares devem ser diferentes, então  $a \neq a'$ .

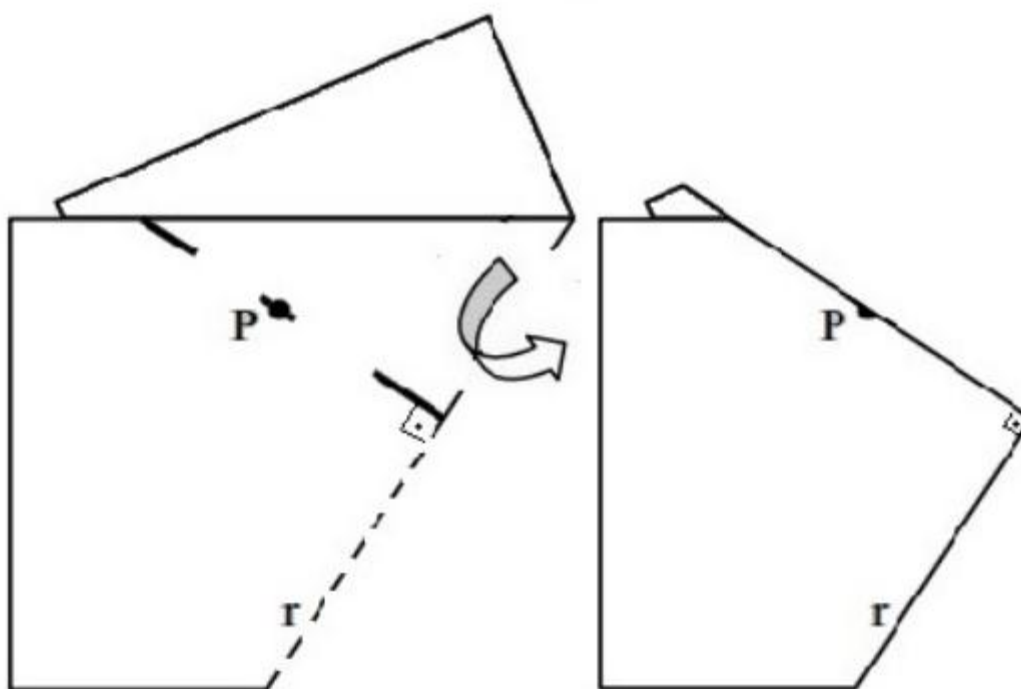
Seja uma circunferência não degenerada com centro em P e raio arbitrário  $r$ , sua equação é dada por  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ . Essa circunferência interceptará as duas retas concorrentes em quatro pontos distintos A, B, C e D. Sejam os segmentos AB e CD nos lados opostos da circunferência e tomemos seus pontos médios E e F e aplica-se novamente o axioma 2. Uma observação que deve ser analisada é o fato de existirem duas formas de dobrar quando as

retas são não paralelas, ou seja, podem ser escolhidos dentre dois ângulos, enquanto entre retas paralelas só existe uma maneira.



**Figura 4:** Construção do Axioma 3

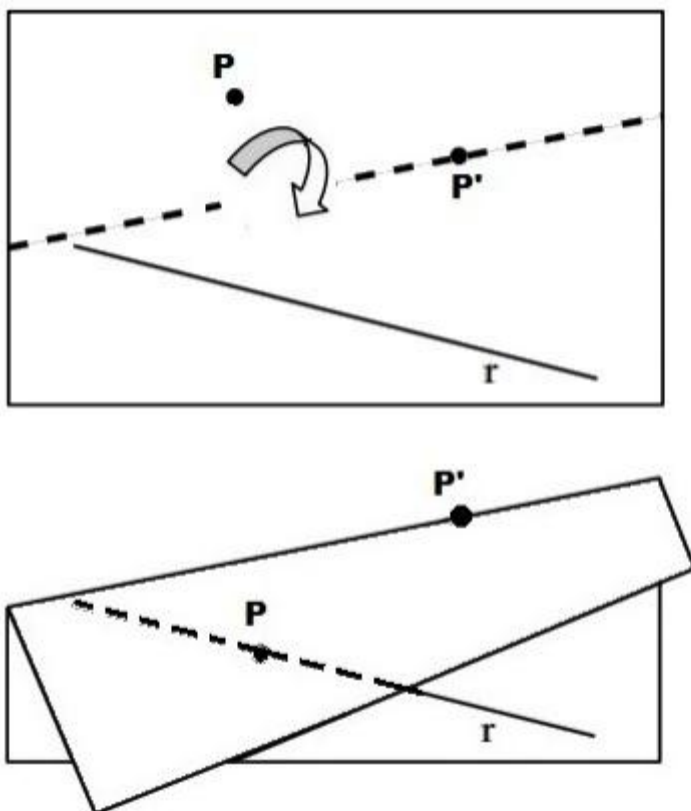
**Axioma 4:** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma única dobra que é perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .



**Figura 5:** Construção do Axioma 4

Seja  $P = (x, y)$  e  $r: y = ax + b$  e para encontrar a reta onde deverá ser realizada a dobra, utiliza-se uma circunferência com centro em  $P$  e raio maior do que a distância de  $P$  a  $r$ , com o intuito de gerar uma circunferência que tenha dois pontos de interseção  $A$  e  $B$ . Logo após, serão considerados duas circunferências com centros em  $A$  e  $B$ , respectivamente de tal modo que o raio de cada uma seja igual à distância entre seus centros. O próximo passo é seguir as orientações descritas no axioma 2 para finalizar a explicação do presente axioma.

**Axioma 5:** Dados dois pontos distintos,  $P$  e  $P'$  e uma reta  $r$ , existe uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r$  e que passa por  $P'$ .



**Figura 6:** Construção do Axioma 5

O objetivo da prova de tal axioma é encontrar a interseção da reta  $r$  com a circunferência  $C$  de centro  $P=(x, y)$  e raio  $PP'$ , em que  $P'=(x', y')$ . O cálculo de tal interseção se dará ao se resolver o sistema que envolve a reta  $r: y = ax + b$  e a circunferência de raio  $CD$ ,  $C : (x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2$ . Tal sistema



poderá zero, uma ou duas soluções, de acordo com o valor do discriminante da fórmula de resolução. Para o caso em que o discriminante seja menor do que zero não existe solução nos reais, ou seja, a circunferência não intercepta a reta  $r$  e não será possível realizar a dobragem pretendida. Caso o discriminante seja igual a zero, seria encontraríamos a distância de  $P$  a  $P'$  igual a  $P'$  a  $r$ . No caso em que o discriminante seja maior do que zero, existem dois pontos de interseção,  $A$  e  $B$ , entre a reta  $r$  e a circunferência  $C$  e gera duas soluções para o problema, sejam elas: Dobra perpendicular a  $PA$ , passando pelo seu ponto médio e Dobra perpendicular a  $PB$  e que também passa em seu ponto médio. Nas duas dobras em destaque, o dispositivo para sua construção é a utilizada no axioma 1.

Uma observação enfática que Monteiro (2008, p.18) destaca é a necessidade do efetivo cálculo para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau para a prova do axioma. Algo que chama atenção em sua explicação é o paralelo realizado com a cônica parábola, pois afirma em seu trabalho que a prova do deste axioma baseia-se em determinar uma reta tangente à parábola com foco em  $P$  e diretriz  $r$  que passa pelo ponto  $P'$ . Inicialmente, nota-se que ao realizar uma dobra em  $P'$  de forma que  $P$  coincida com  $r$ , uma parte de  $r$  ficará dobrada em outra direção que não a usual. Sejam  $s$  a reta que passa perpendicularmente por  $r$ , e  $P'$  não pertence a  $r$ , conclui-se que a direção de  $r$  após a dobragem não é paralela à reta de origem, logo  $s$  não é paralela à reta que foi dobrada e portanto a interseção de tais retas pode ser calculada. Pelo método construtivo a distância do ponto de interseção à reta  $r$  é igual à distância do ponto até  $P$  e além disso esta propriedade ocorre apenas com o ponto de interseção. Daí, conforme a definição de parábola que é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto e a uma reta concomitantemente, prova-se que a reta dobrada é tangente à parábola com foco em  $P$  e reta diretriz  $r$ .

**Axioma 6: Dados dois pontos distintos, P e P' e duas retas distintas r e r', existe uma dobra que faz incidir P sobre r e P' sobre r'.**

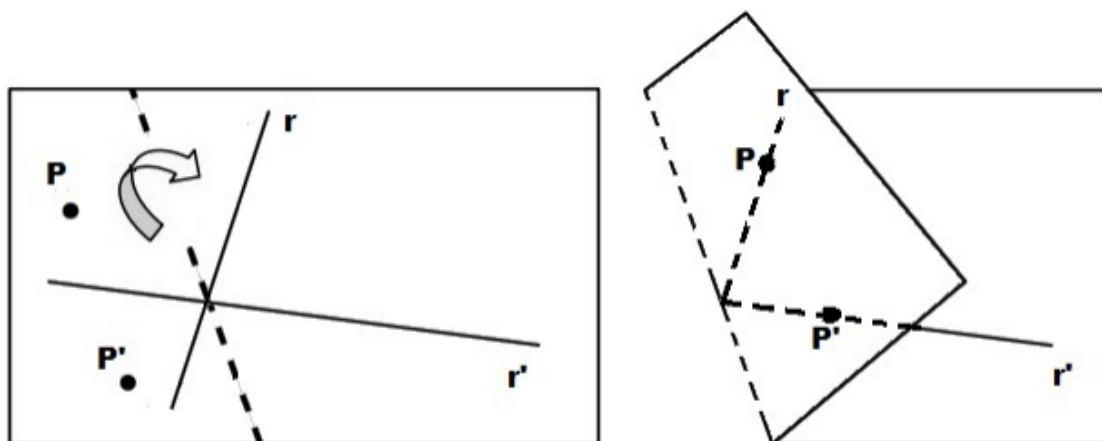
Recorrendo ao axioma anterior deve-se para ambos os pontos e suas respectivas retas de incidência realizar uma dobra em que será tangente a uma parábola de foco em um dos pontos e a diretriz sendo a reta correspondente de incidência e repete-se o processo no outro ponto. Logo, o objetivo principal do axioma 6 baseia-se em encontrar uma reta tangente simultaneamente a duas parábolas distintas. "Sem perda de generalidade, consideremos  $r: y = -1$  e  $P = (0, 1)$  e  $P' = (k, -1)$ , de modo que este ponto incida na reta  $r$  pela dobra determinada. Daí, conclui-se que a reta criada pela dobra é a mediatriz do segmento  $PP''$ , já que por construção todos os seus pontos são equidistantes de  $P$  e  $P'$ ." (Monteiro, 2008, p. 18).

O ponto médio desse segmento é  $(\frac{t}{2}, 0)$ , logo a equação da dobra

será  $y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$  e conforme estamos definindo a reta representada pela dobra

tem-se que o ponto médio de  $P'P^*$  pertence à dobra. Seja tal ponto médio a coordenada  $(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2})$ . Resumindo, ao substituir o ponto médio de  $P'P^*$  na equação do vinco e sabendo que os coeficientes angulares dos segmentos  $PP''$  e  $PP^*$  são iguais e realizando as devidas substituições encontra-se :

$$(y + b).(y - b)^2 = - (x^2 - a^2) (y - b) - 2(x - a)^2.$$



**Figura 7: Construção do Axioma 6**

**Axioma 7: Dados um ponto P e duas retas r e s, existe uma dobra que faz coincidir P em r e é perpendicular a s.**

Consideremos  $P = (x_1, y_1)$  e as retas  $r: y = ax + b$  e  $s: a'x + b'$ . Note que as retas  $r$  e  $s$  não podem ser paralelas, pois caso fossem não teríamos solução. Seja a reta paralela a  $s$  que passa por  $P$ ,  $t: y = a'x + (y_1 - a'x_1)$ , então as retas  $r$  e  $t$  se interceptam no ponto  $Q \left( \frac{y_1 - a'x_1 - b}{a - a'}, \frac{ay_1 - aa'x_1 - a'b'}{a - a'} \right)$ . Logo, a realização da dobragem que torna os pontos  $P$  e  $Q$  coincidentes deve seguir os passos do axioma 2.

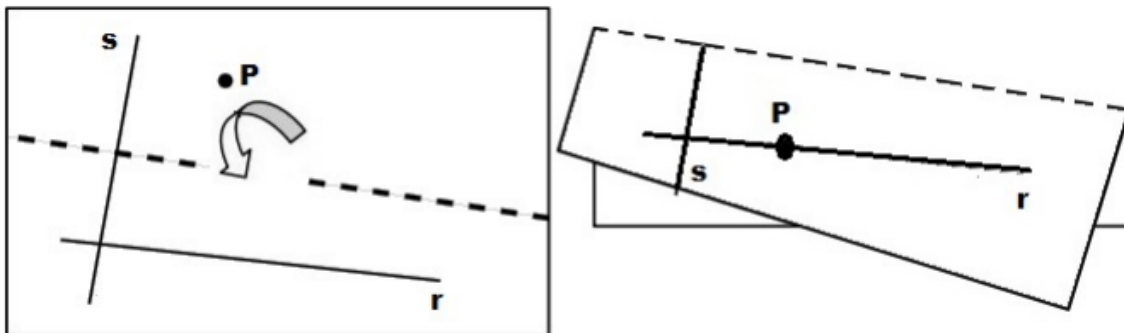


Figura 8: Construção do Axioma 7

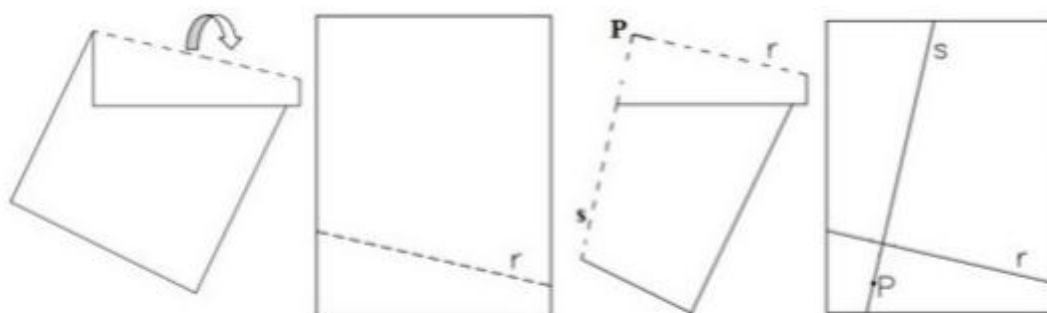
### 3 CONCEITOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO DOBRAS

Este capítulo verificará e fixará conceitos elementares estudados na geometria plana com o uso de dobraduras.

#### 3.1 Construções Primitivas

##### Construção 3.1.1: Retas Concorrentes

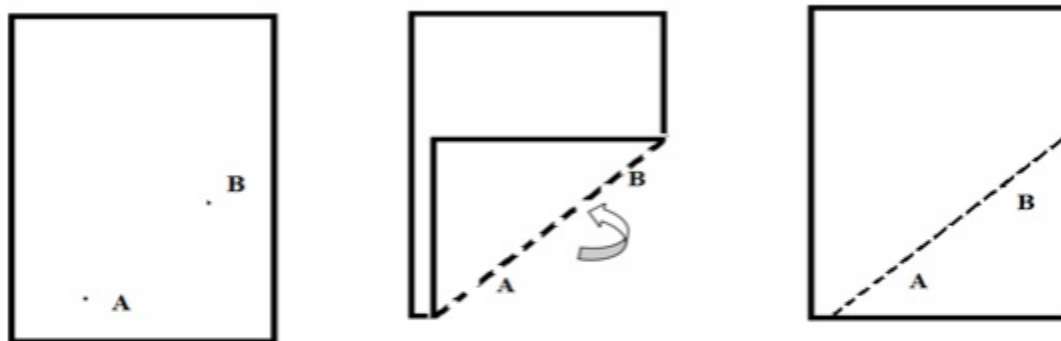
Duas retas são concorrentes quando se interceptam em um único ponto. Com uma dobradura qualquer na folha, deve ser construída uma reta  $r$  e fixado um ponto  $P$  sobre  $r$ , tal que a partir dele seja realizada uma nova dobra fazendo concorrer à semirreta  $s$  formada por  $P$  e a reta  $r$ . Ao desdobrar a folha, é verificada a existência de duas retas concorrentes em  $P$ .



**Figura 9:** Retas Concorrentes

**Construção 3.1.2: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém esses pontos.**

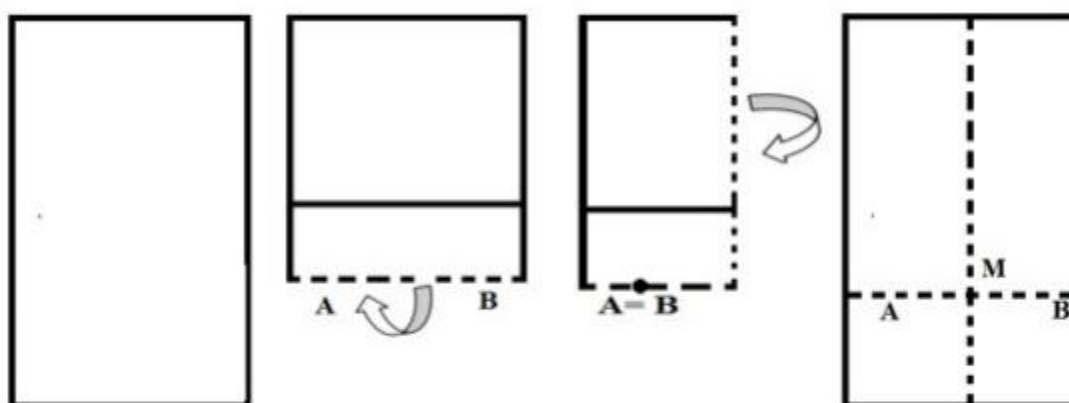
Marcam-se dois pontos  $A$  e  $B$  distintos em um papel e logo em seguida é feito uma dobradura passando concomitantemente pelos pontos. Ao desdobrar a folha, observa-se o resultado, ou seja, a dobradura construída exemplifica uma reta única que contém  $A$  e  $B$ .



**Figura 10:** Reta que passa por dois pontos distintos

### Construção 3.1.3: Ponto Médio de um segmento

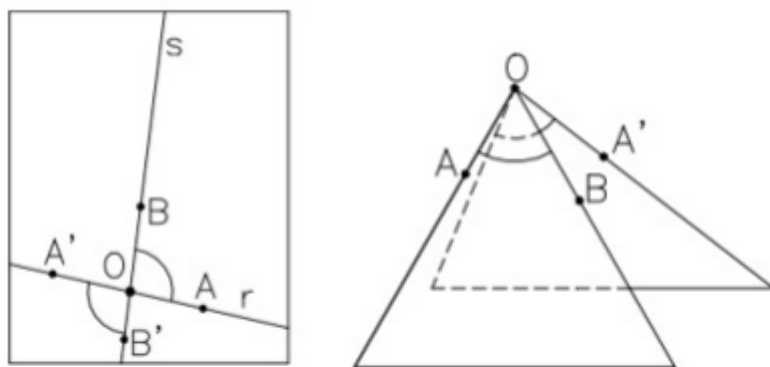
Será denominado ponto médio de um segmento de reta ao ponto equidistante das extremidades. Após a construção de uma reta qualquer, serão marcados dois pontos sobre a dobradura construída e logo após uma nova dobradura será feita, unindo o Ponto A com o B. Ao desdobrar deve-se marcar o ponto M de interseção das retas construídas pelas dobraduras. A partir do segundo passo AM e MB estão sobrepostos, ou seja, tais segmentos são iguais e o ponto M é o médio de AB.



**Figura 11:** Ponto Médio de um Segmento

### Construção 3.1.4: Ângulos opostos pelo vértice são congruentes

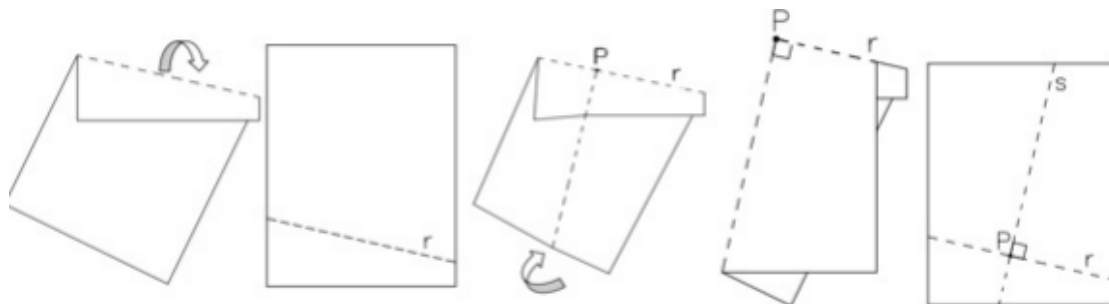
São construídas duas retas concorrentes  $r$  e  $s$  com interseção em  $O$  de tal maneira que  $A$  e  $A'$  estejam na reta  $r$ , e  $B$  e  $B'$  pertençam a  $s$ . Então os ângulos  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A'OB'}$  são opostos pelo vértice e será mostrado que eles são iguais. A partir da concorrência das retas  $r$  e  $s$ , dobre a folha sobre  $r$  e sobreponha as semirretas  $OA'$  e  $OB$  e outra dobradura com  $AO$  e  $OB'$ . Ao desdobrar percebe-se que os ângulos  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A'OB'}$  são congruentes, já que, conforme a figura, ficaram sobrepostos.



**Figura 12:** Ângulos Opostos pelo Vértice

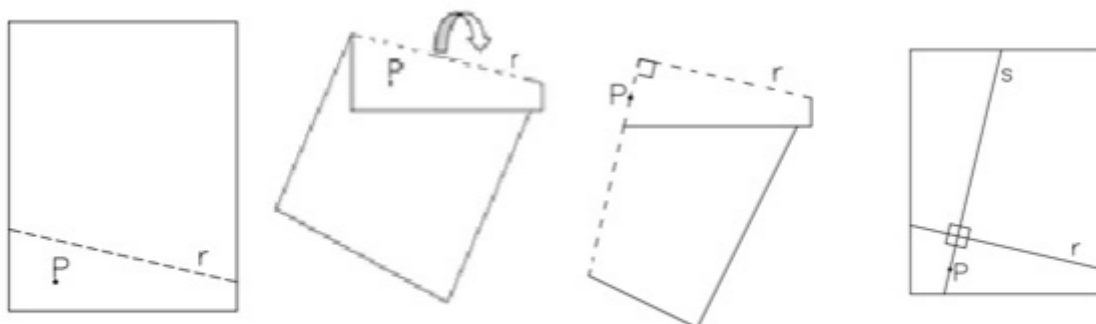
### Construção 3.1.5: Construção de retas perpendiculares por um ponto

Num plano, por um ponto  $P$  de uma reta  $r$  existe uma única reta  $s$  perpendicular a  $r$ . O caso será dividido em duas partes, sendo a primeira com o ponto  $P$  pertencendo à reta  $r$ : Será construída, através de uma dobradura, a reta  $r$  e marcado um ponto  $P$  sobre a reta. Logo após, será feita uma dobradura de tal modo que as semirretas formadas pelo ponto  $P$  coincidam e formem uma nova reta  $s$ . É observado, portanto, que os ângulos formados pelas retas  $r$  e  $s$  se sobrepõem, ou seja, são iguais e cada um vale  $90^\circ$ , então os ângulos formados pelas retas  $r$  e  $s$  resultam em ângulos retos.



**Figura 13:** Dobras iniciais para a construção de Retas Perpendiculares

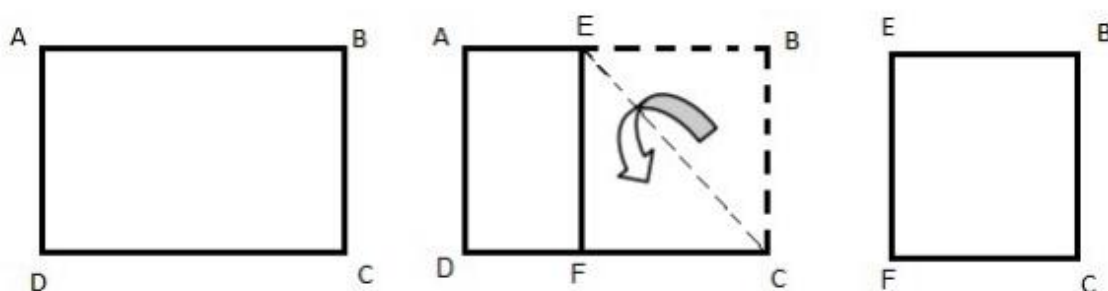
A próxima parte será mostrada com o ponto  $P$  sendo externo à reta  $r$ . Dessa vez o ponto  $P$  não pertencerá à reta  $r$ . Deve ser feita uma dobradura pela reta  $r$  de tal maneira que o ponto  $P$  fique exposto e logo após deve-se construir uma dobradura passando por  $P$  e interceptando as duas semirretas formadas pela dobra na reta  $r$ . Ao desdobrar é verificada a construção de duas retas perpendiculares.



**Figura 14:** Retas Perpendiculares

### 3.2 Construções de Figuras Geométricas

Para as construções com dobraduras que serão trabalhados alguns conceitos dos triângulos, será importante utilizarmos uma folha de papel na forma de um quadrado, que pode ser construído e provado com uma simples observação. (Nota-se que os triângulos  $\triangle EBC$  e  $\triangle EFC$  pelo critério LAL.)



**Figura 15:** Quadrado construído com dobras

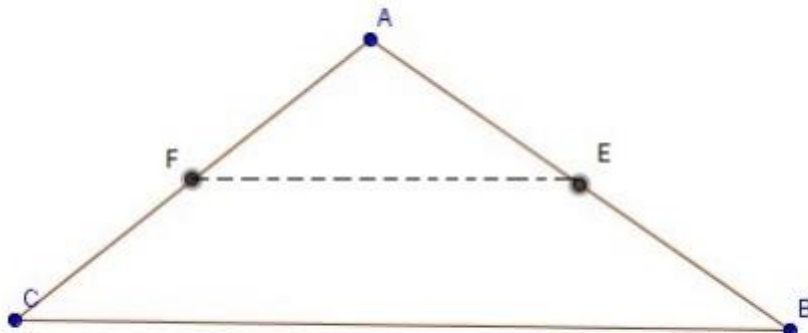
#### 3.2.1 Triângulo

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC, chama-se triângulo. Sejam três pontos A, B e C não colineares, ao serem construídas dobraduras que passem por AB, AC e BC, verifica-se que o lugar geométrico formado pela união de tais dobras, chamadas de lados, é um triângulo ABC.



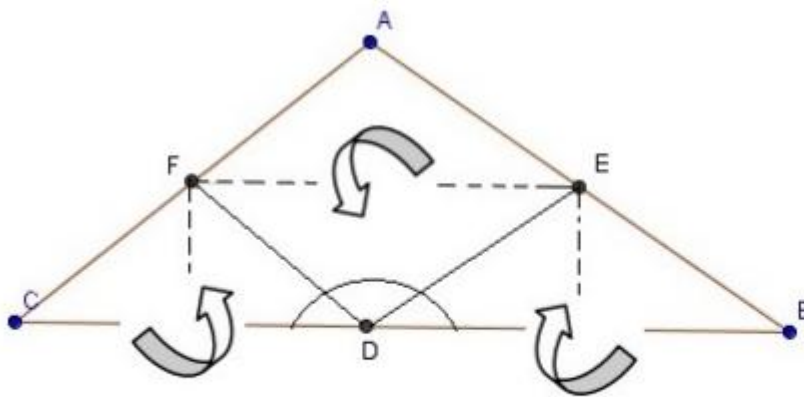
**Figura 16:** Construção do Triângulo



**Construção 3.2.1.1: Soma dos ângulos internos de um triângulo**

**Figura 17:** Construção para a demonstração da soma dos ângulos internos

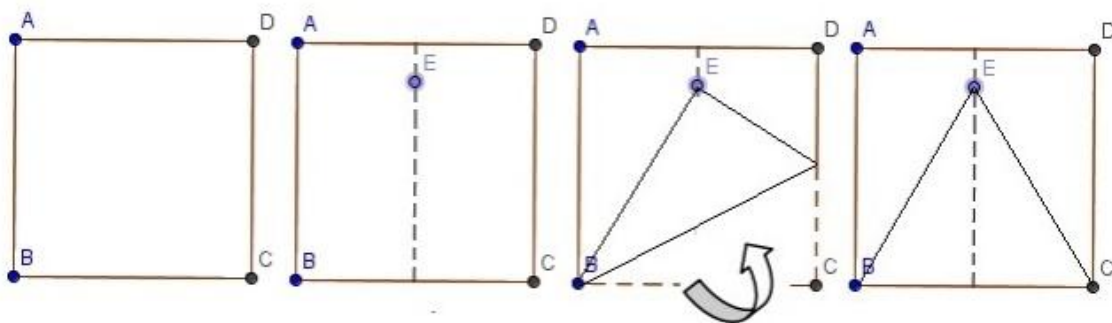
A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Esse resultado pode ser construído a partir de um triângulo qualquer formado com um papel. Será colocado de tal maneira que o vértice A com o maior ângulo fique em cima com o intuito de melhor visualizar o que será realizado. A partir daí, serão encontrados os pontos médios E e F respectivos dos lados AB e AC. É feita uma dobra no encontro de EF e o vértice A encontra o lado BC no ponto D. É relevante salientar que o segmento EF é paralelo ao lado BC, ou seja, base média do triângulo ABC. Logo após, os vértices B e C devem ir ao encontro do ponto D formando uma dobra perpendicular ao lado BC. Deve-se atentar para a congruência dos triângulos  $\triangle EDC$  e  $\triangle EDB$  pelo critério LLL.



**Figura 18:** Construção para a demonstração da soma dos ângulos internos

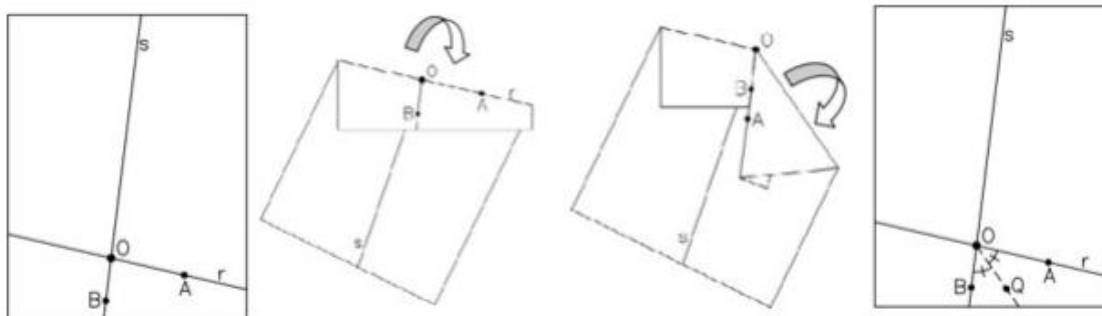
### Construção 3.2.1.2: Triângulo Equilátero

Um triângulo é dito Equilátero quando os seus três lados são congruentes, ou seja,  $AC = AB = BC$ . Seja um quadrado ABCD, dobremos o lado AB sobre o lado DC, o vértice representado pelo ponto C será levado ao encontro da dobra feita e será fixado um ponto E. De maneira análoga será feito com o vértice representado pelo ponto B. O triângulo BEC formado pelas três dobras é equilátero, uma vez que  $BE = BC$  e  $EC = BC$ .



**Figura 19:** Construção do Triângulo Equilátero

### Construção 3.2.1.3: Reta bissetriz interna

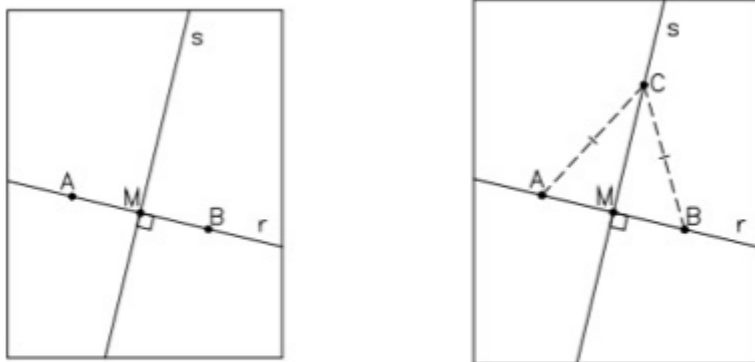


**Figura 20:** Reta Bissetriz Interna

Uma bissetriz interna de um triângulo é o segmento com extremidades num vértice e no lado oposto que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes. Considera-se, pois, duas retas  $r$  e  $s$  concorrentes e dois pontos  $A$  e  $B$  contidos respectivamente nessas retas. Com tal figura, será determinada a bissetriz do triângulo  $A\hat{O}B$ , daí, faz-se uma dobradura sobre a reta  $r$  e em seguida é realizada uma nova dobra com o intuito de sobrepor os segmentos  $AO$  e  $OB$ . Deve-se, desdobrar o papel, um ponto  $Q$  sobre a última dobradura realizada o que resulta os ângulos  $A\hat{O}Q$  e  $B\hat{O}Q$  serem congruentes, pois no segundo passo realizado, esses dois ângulos ficaram sobrepostos, logo a semirreta  $OQ$  divide o ângulo  $A\hat{O}B$  em dois ângulos congruentes e portanto é a bissetriz.

#### **Construção 3.2.1.4: Mediatriz**

Uma reta é dita mediatriz quando passa perpendicularmente pelo ponto médio de um segmento dado. Além disso, sejam os pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes ao segmento, então qualquer ponto pertencente à reta mediatriz que passa pelo ponto médio de  $AB$  será equidistante de  $A$  e  $B$ . Tome a reta  $r$  com os pontos  $A$  e  $B$  e seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Ao realizar uma dobradura de tal maneira que  $A$  intercepte  $B$ , houve a formação da reta  $s$ . Por fim, é feita uma dobradura passando por  $AC$  e outra por  $BC$  tal que os triângulos  $AMC$  e  $BMC$  são congruentes (LLL), logo a reta  $s$  é mediatriz do segmento  $AB$  e  $s$  é perpendicular à reta  $r$  interceptando-se em seu ponto médio.

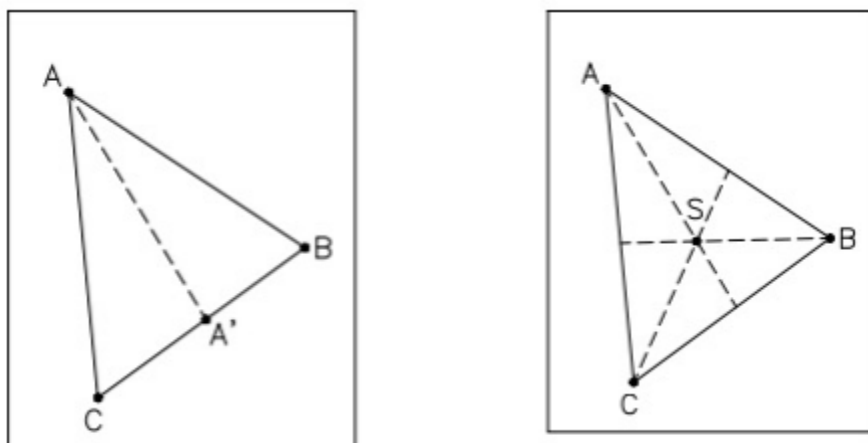


**Figura 21:** Construção da Reta Mediatriz

### 3.2.2 Pontos Notáveis do triângulo

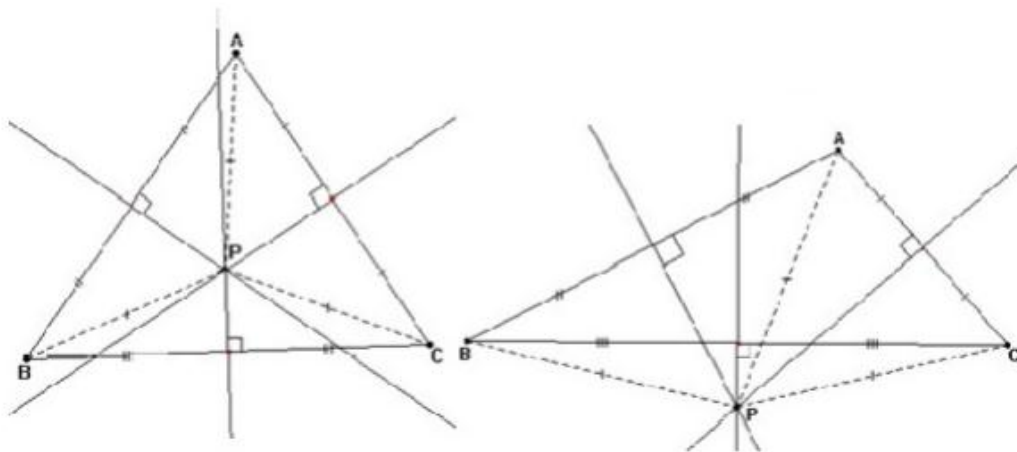
#### Construção 3.2.2.1: Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo e este ponto é dito incentro. São realizadas as dobras necessárias para ser encontrada a bissetriz do ângulo A e sucessivamente as bissetrizes dos ângulos B e C. As três bissetrizes encontrar-se-ão em um mesmo ponto S denominado incentro.



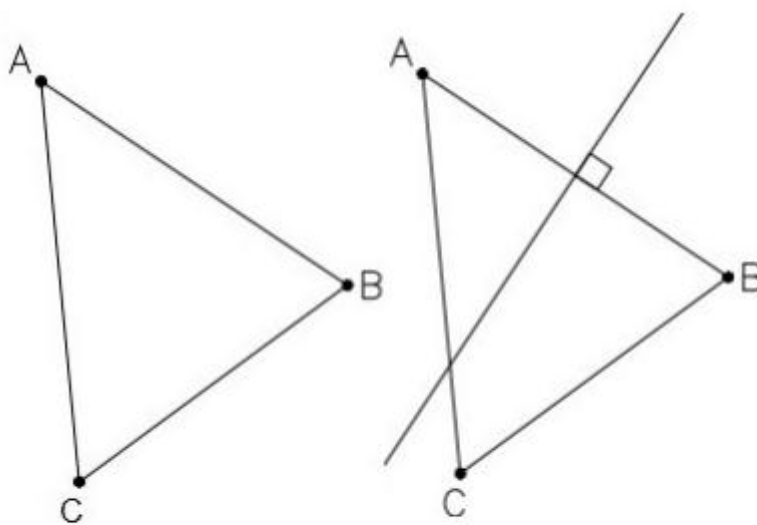
**Figura 22:** Construção do Incentro

#### Construção 3.2.2.2: Circuncentro



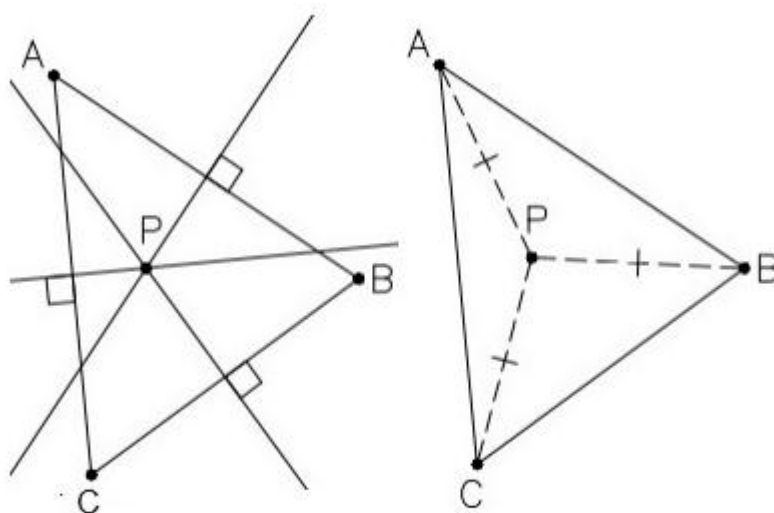
**Figura 23:** Construção do Circuncentro por meio de dobras

O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é denominado Circuncentro. O ponto P que representa o circuncentro do triângulo pode ser interno ou externo à figura.



**Figura 24:** Circuncentro do Triângulo

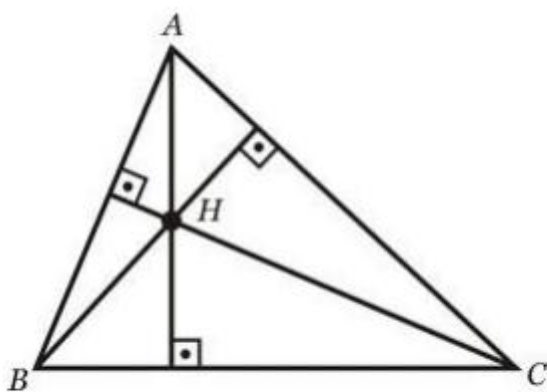
Deve-se construir um triângulo qualquer ABC e logo após traçam-se as retas mediatrizes dos lados AB, AC e BC. Ao desdobrar o papel, as respectivas dobras que representam as mediatrizes interceptam-se em um único ponto P que será marcado e denominado circuncentro.



**Figura 25:** Circuncentro do Triângulo

### Construção 3.2.2.3: Ortocentro

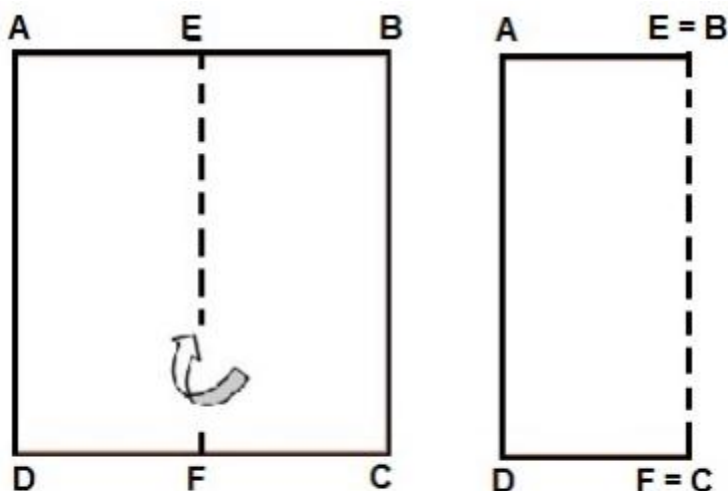
Em um triângulo  $ABC$ , as retas suporte das alturas se intersectam em um único ponto denominado Ortocentro do triângulo. Inicialmente, com as definições dadas anteriormente, é construído um triângulo  $ABC$  e, em seguida, traçadas suas respectivas alturas referentes aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . O ponto  $H$  de encontro das três alturas é o ortocentro do triângulo.



**Figura 26:** Construção do Ortocentro

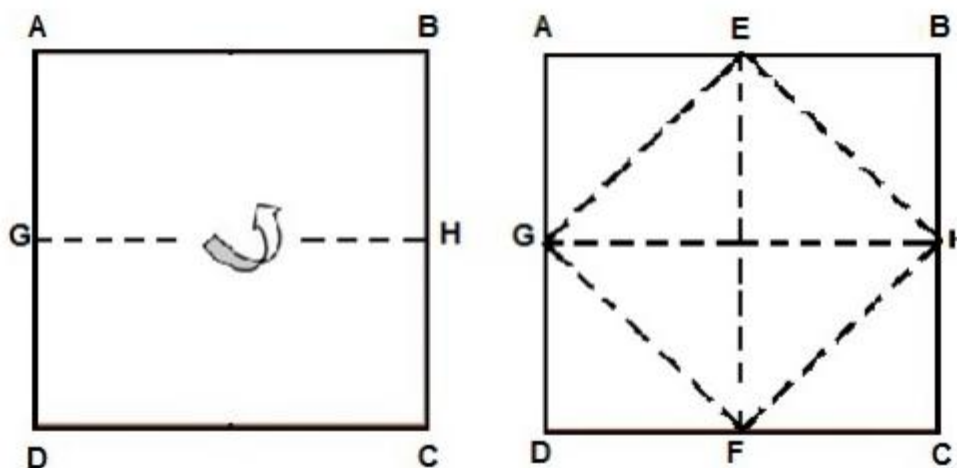
### 3.2.3 Quadrado

#### Construção 3.2.3.1: Quadrado inscrito em um outro quadrado



**Figura 27:** Uso iniciais de dobras para inscrever um quadrado em um outro

Seja ABCD um quadrado, é realizada uma dobra na mediatriz dos lados AB e CD, formando o segmento EF e de maneira análoga forma-se o segmento na horizontal GH. Ao unirmos os pontos EFGH obtemos um quadrado inscrito em outro quadrado.



**Figura 28:** Um quadrado inscrito num quadrado

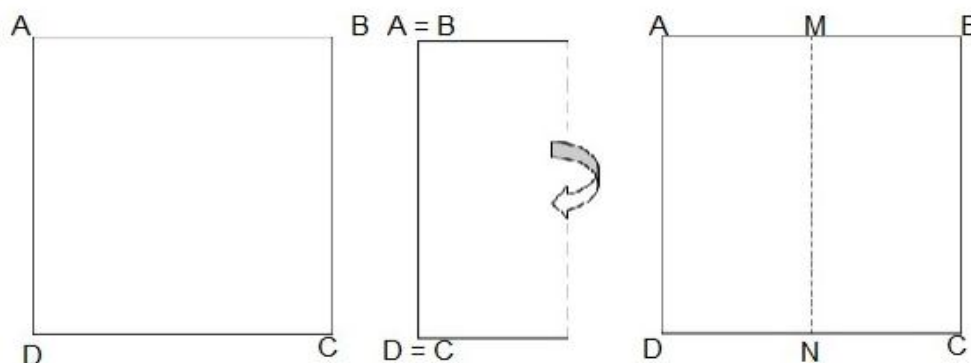
A figura formada com as dobraduras é um quadrado, pois os triângulos AGE, BHE, HCF e GDF são congruentes pelo critério LAL (lado - ângulo -

lado), pois os pontos E, F, G e H são pontos médios e dividem seus respectivos lados ao meio e o novo quadrado formado possuirá metade da área da figura inicial.

Então:

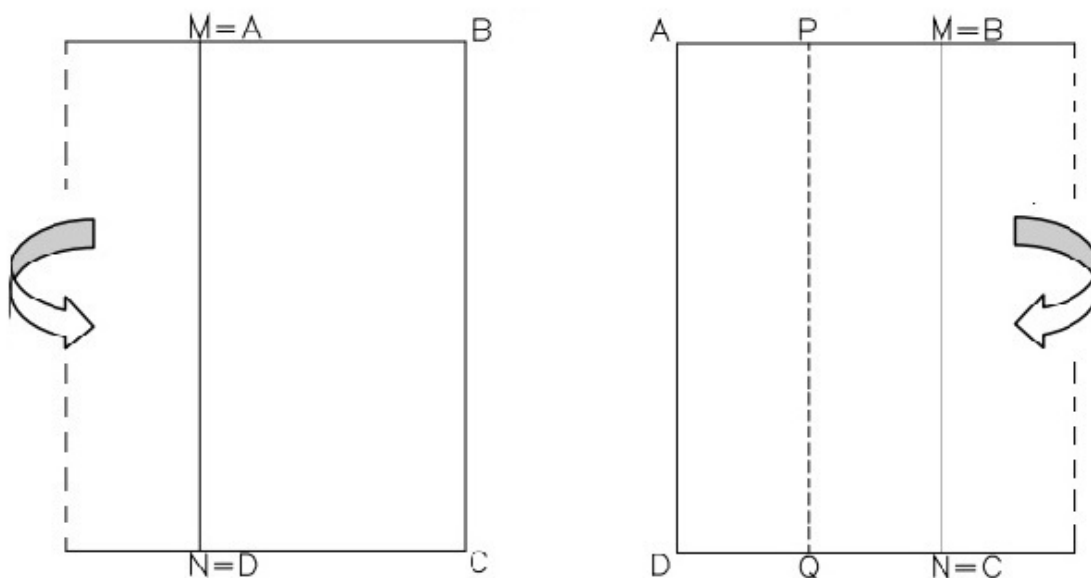
$$GE = HE = HF = FG.$$

### Construção 3.2.3.2: Divisão de um segmento em $2^k$ partes iguais



**Figura 29:** Construção da divisão de um segmento em  $2^k$  partes iguais

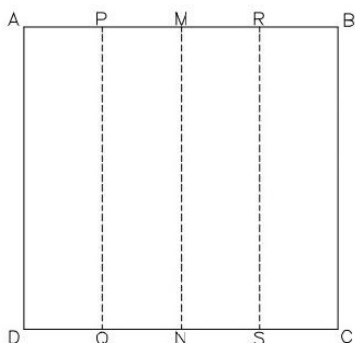
Dividir um segmento em  $2^k$  partes iguais significa encontrar o ponto médio dele para cada valor de K natural.



**Figura 30:** Divisão de um segmento em  $2^k$  partes iguais



A construção começará a partir de um quadrado de papel ABCD, e a primeira dobra será o segmento BC que irá ao encontro de AD formando o segmento MN formado pelos pontos médios dos lados AB e CD respectivamente. O mesmo processo será repetido agora fazendo coincidir os segmentos AD e MN de tal maneira a forma o segmento PQ dos novos pontos médios e da mesma forma o BC sobre MN. A partir de então é possível dividir cada parte dos segmentos AB e CD ao meio obtendo 8 partes iguais; ou seja, para 1 dobra realizada obtemos  $K = 1$  e o segmento dividido em duas partes; para mais duas dobras realizadas,  $k = 3$  e obtemos 8 partes iguais e assim por diante, verificando todas as potências de 2 até  $2^k$ .

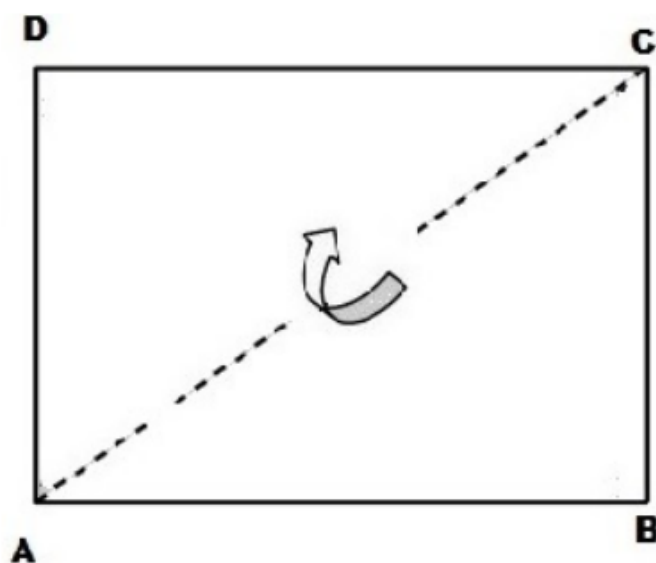


**Figura 31:** Divisão de um segmento em  $2^k$  partes iguais

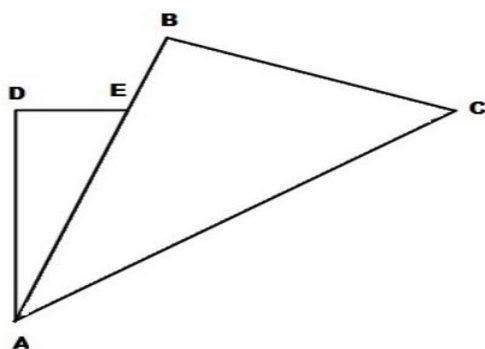
### 3.2.4 Pentágono Regular

Muitas são as maneiras de construir um pentágono regular por meio de dobras, neste trabalho serão citados os passos seguidos por Lucas (2013, p. 27) para a realização de tal construção a partir de um retângulo ABCD.

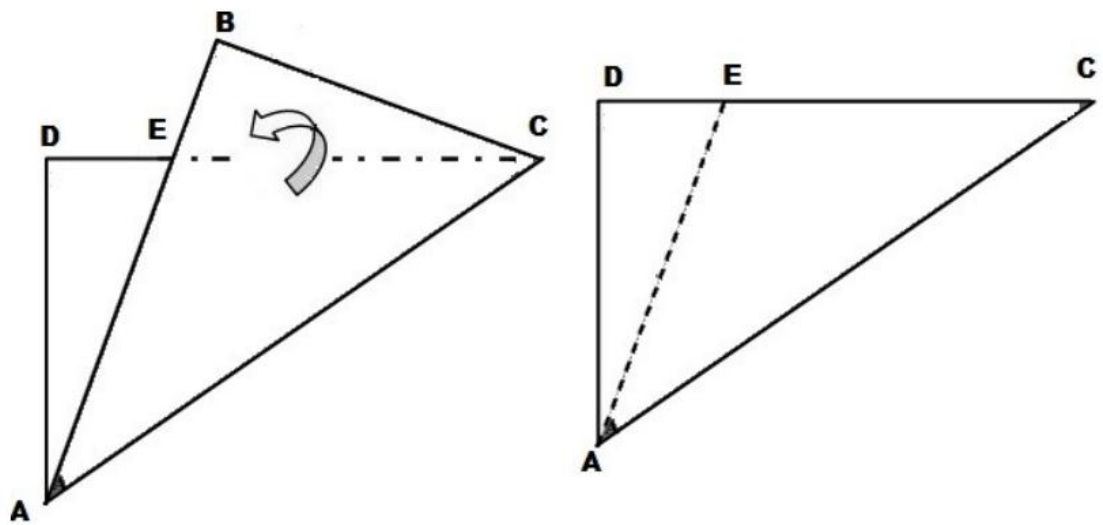
Com o retângulo ABCD, a diagonal AC deve ser dobrada. Marca-se um ponto E de interseção entre os segmentos AB com DC e o segmento BC é dobrado para dentro da figura. O lado AD também é dobrado por dentro de AE encaixando as abas internamente. O triângulo AEC é isósceles, pois os triângulos DEA e BEC são congruentes (lado, ângulo, ângulo oposto ao lado), então  $AE = EC$ .



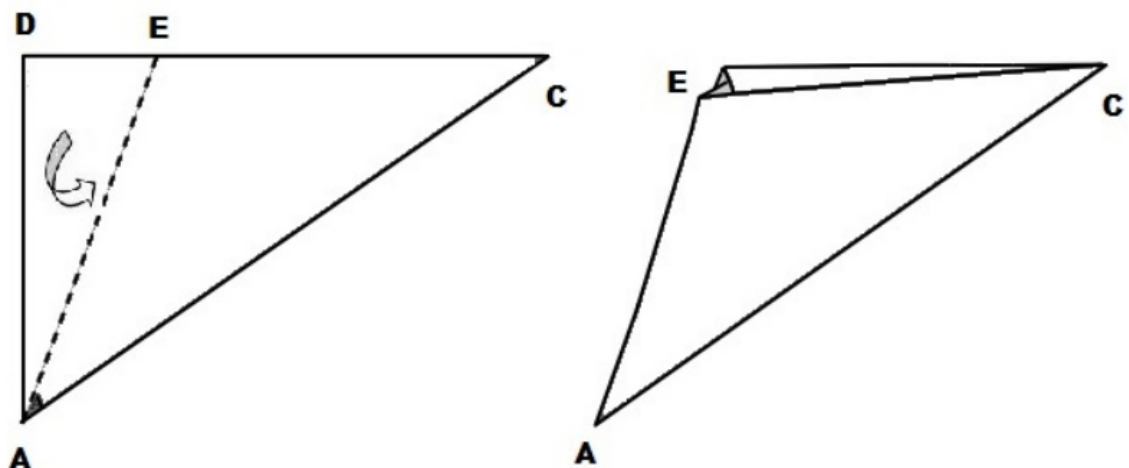
**Figura 32:** Dobras iniciais para a construção do pentágono regular



**Figura 33:** Dobras iniciais para a construção do pentágono regular



**Figura 34:** Continuação das dobras para a construção do Pentágono Regular



**Figura 35:** Construção do Pentágono Regular

O próximo passo é criar uma dobra que passe pela bissetriz do ângulo  $E\hat{A}C$ , obtendo o segmento  $AF$ , e ao ser desdobrado, deve-se realizar uma nova dobra,  $GH$ , levando o vértice  $A$  em direção ao ponto  $F$

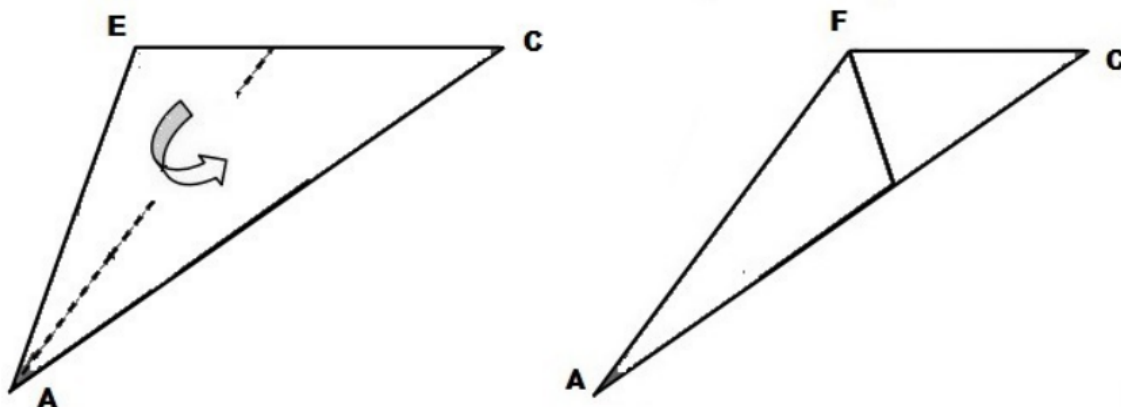


Figura 36: Construção do Pentágono

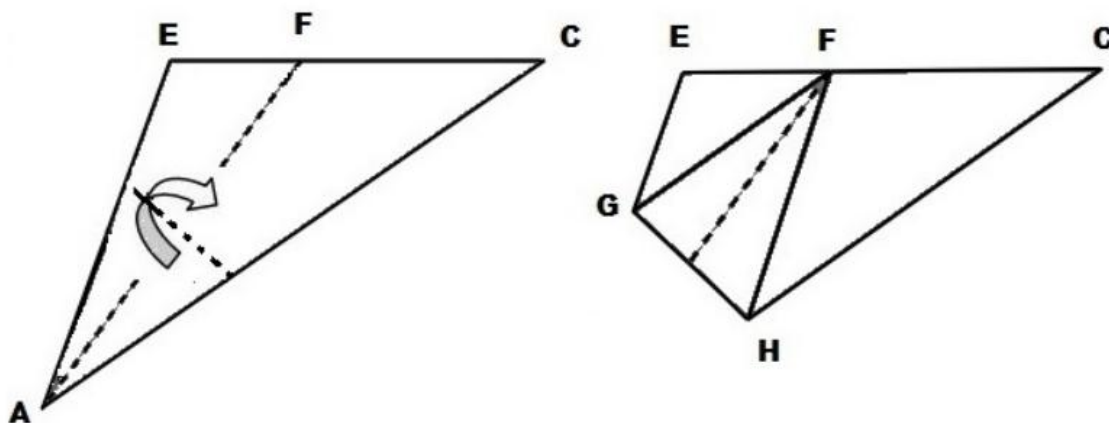


Figura 37: Construção do Pentágono

Por fim, deve ser feita a mesma dobra com o vértice C indo ao encontro do ponto G. Concluindo a construção de um pentágono regular.

O resultado é visto quando a figura é reaberta e é observado o vértice A do retângulo inicial. De acordo com a figura de Lucas (2013, p. 30), o ângulo A ficou dividido em 5 partes iguais, ou seja, cada ângulo medindo  $18^\circ$ .

O triângulo GAH é isósceles, pois os triângulos GAM e HAM são congruentes pelo critério LAL, já que AF e GH são perpendiculares pois GH é mediatriz de AF. Por ser isósceles, conclui-se que ângulos  $EGH = IHG = 108^\circ$ .

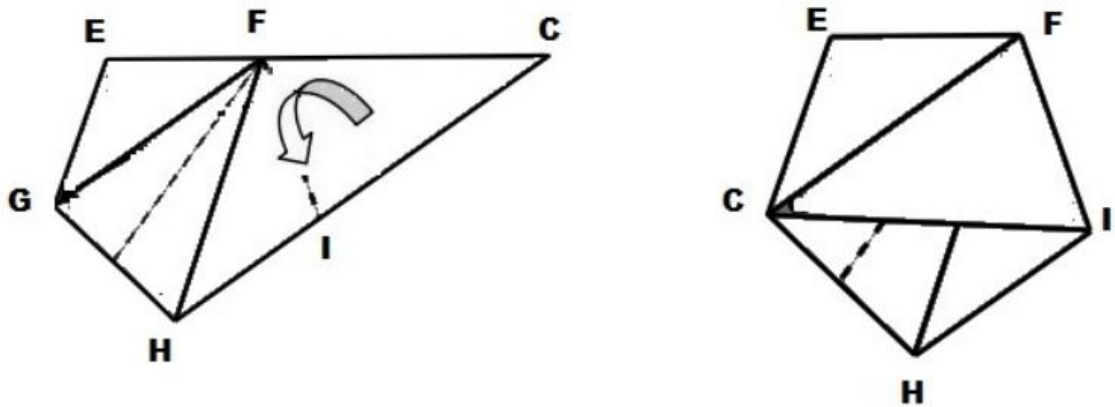


Figura 38: Pentágono Regular

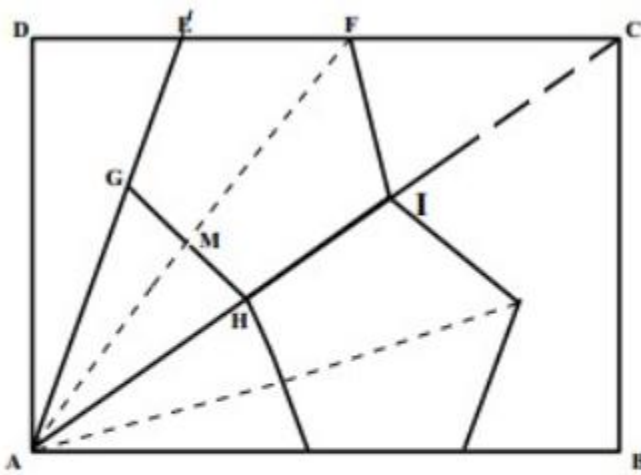
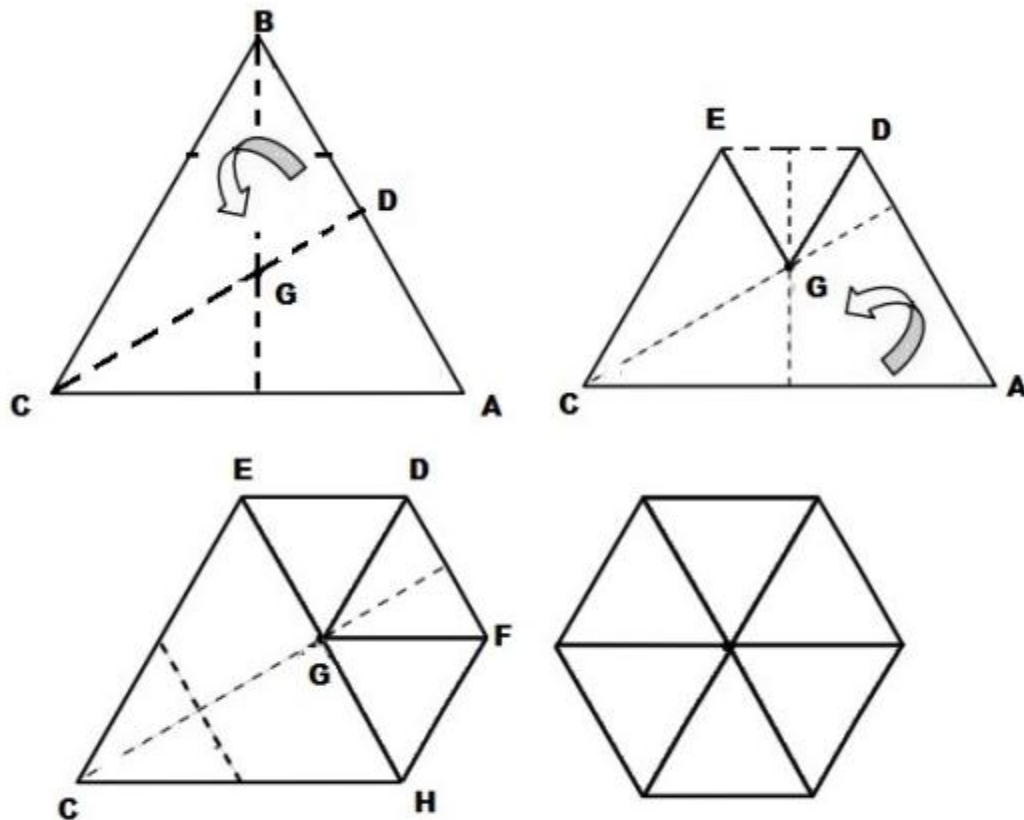


Figura 39: Pentágono Regular

### 3.2.5 Hexágono Regular

O hexágono regular será construído a partir do triângulo equilátero ABC já construído nas seções anteriores. O segmento CD, é a altura, bissetriz e mediana em relação ao lado AB se o ponto D for ponto médio. Da mesma maneira ocorre com os segmentos que passam por AC e BC, daí resulta um ponto G, que é definido como ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro do triângulo ABC. A realizarmos uma dobra levando o vértice B ao encontro do ponto G, o vértice A ao ponto G e também o C ao G, obtém-se um hexágono regular. A justificativa é simples para a construção de um hexágono regular,

pois os triângulos formados são equiláteros. Sabe-se que a dobra ED é paralela à base AC do triângulo, assim como as outras dobras também são paralelas às outras bases, daí os triângulos EGD e FGH são congruentes pelo caso ALA, e portanto o ângulo G é  $60^\circ$ , concluindo que os 6 triângulos construídos são equiláteros e portanto forma um hexágono regular.

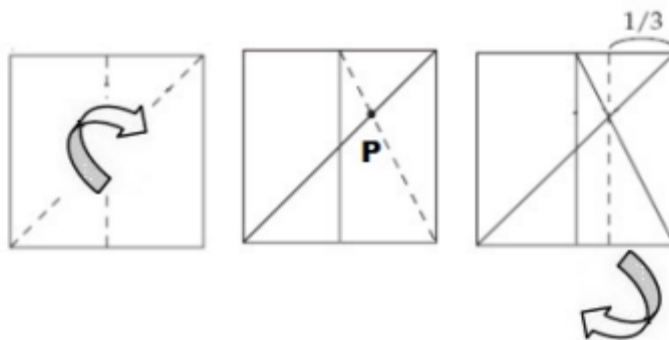


**Figura 40:** Construção do Hexágono regular

## 4 O USO DE DOBRADURAS PARA A RESOLUÇÃO DE TEOREMAS E PROBLEMAS

### 4.1 Teorema de Pitágoras

No triângulo retângulo o Teorema de Pitágoras fica definido como o quadrado da hipotenusa é a soma do quadrado dos catetos e para mais uma demonstração de tal teorema, agora através de dobraduras, será iniciado com um quadrado de papel ABCD. A ideia para a demonstração é inicialmente formar através de dobras um quadrado com 9 quadrados menores, como se fosse 9 por 9 (nove linhas e nove colunas de mesmo tamanho), e para isso começemos dividindo o quadrado em três partes verticais iguais. Dobra-se o quadrado por uma diagonal, depois ao meio verticalmente e, por fim, o ponto médio superior deve ser levado ao encontrando do vértice inferior direito, ao desdobrarmos o papel é encontrando um ponto P de interseção, no qual forma uma dobra perpendicular à base cujo comprimento ao lado direito é igual a um terço do comprimento total do lado do quadrado.



**Figura 41:** Demonstração do Teorema de Pitágoras por meio de dobras

Em seguida, após essas etapas serem feitas de tal modo a ser construído o quadrado com tal característica 9 x 9, serão realizadas mais quatro dobras nos segmentos GJ, JF, FK e KG, daí formou-se um novo quadrado GJFK inscrito sob o inicial. Analisando o triângulo DKG, sem perda de generalidade, temos:

A área do quadrado ABCD é  $(DG + DK)^2$

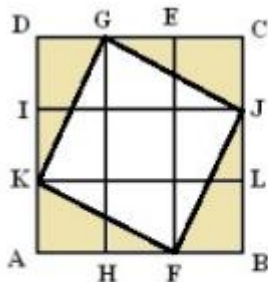
A área de cada um dos triângulos DGK, GCJ, JBF ou FAK é igual a  $\frac{DG \times DK}{2}$  e

a área do quadrado GJFK é  $KG^2$ .

Em suma, temos que a área do quadrado ABCD = área do quadrado GJFK + 4(área do triângulo DGK).

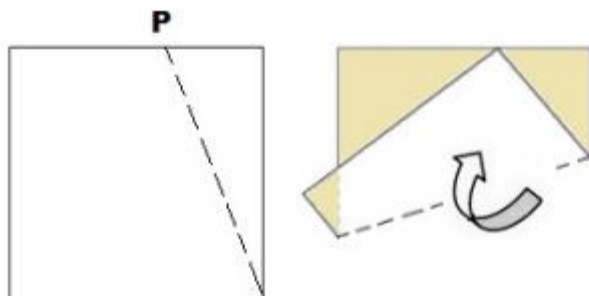
$$(DG + DK)^2 = KG^2 + 4\left(\frac{DG \times DK}{2}\right)$$

$$DG^2 + DK^2 = KG^2.$$



**Figura 42:** Teorema de Pitágoras

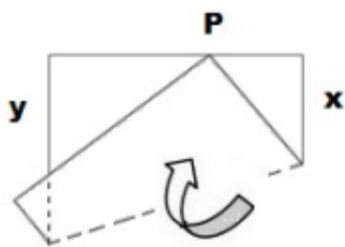
## 4.2 Teorema de Haga



**Figura 43:** Dobras que formam o Teorema de Haga



Conforme Monteiro (2009, p. 48), o teorema de Haga se caracteriza quando ao ser fixado um ponto P qualquer em um dos lados do quadrado, dobra-se o papel de forma que um dos vértices vá ao encontro desse ponto ficando sobreposto. Daí os triângulos formados por essa construção são semelhantes. A prova baseia-se nos ângulos obtidos em cada triângulo, que são  $90^\circ$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , logo os triângulos são semelhantes pelo caso AAA.



**Figura 44:** Demonstração do Teorema de Haga

Vejamos uma forte aplicação nos exercícios em sala quando o ponto P é o ponto médio de um dos lados de um quadrado de lado a unidade. O objetivo será calcular “x” e “y”. Ora, por Pitágoras o “x” é calculado com  $x^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1 - x)^2$  e o “y” basta usar o Teorema de Haga e a semelhança de triângulos. Caso o ponto P seja arbitrário o processo é idêntico ao mostrado anteriormente.

### 4.3 Trisseção do lado de um Quadrado

Seja um quadrado ABCD de lado medindo a unidade, sem perda de generalidade. Inicialmente, devem-se encontrar os pontos médios de AD e BC, denominados E e F, respectivamente, e então deve-se levar o vértice C ao encontro do ponto F. Teremos o ponto P e G em consequência da dobra e ao desdobrar observamos as seguintes conclusões: Os triângulos PFC e FGB são semelhantes pelo Teorema de Haga, então:

$$\frac{BF}{GB} = \frac{CP}{CF}$$

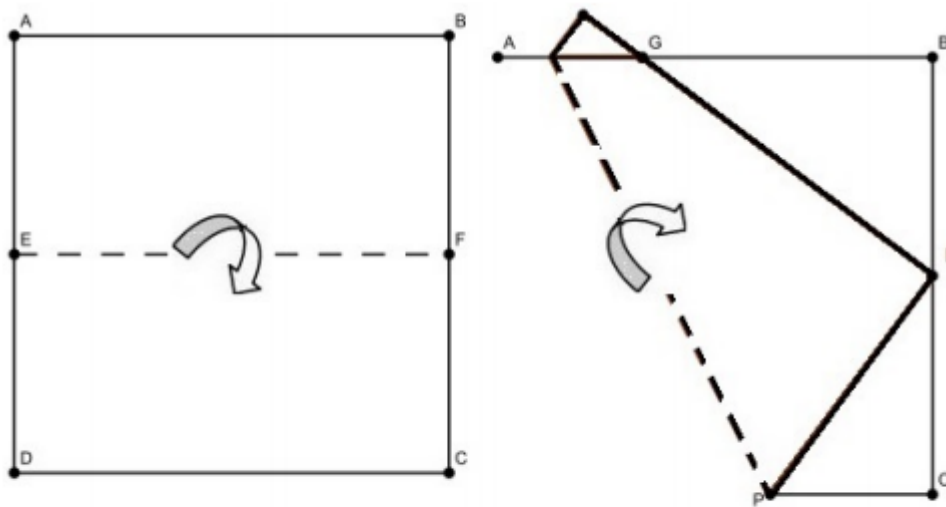
Logo, como  $BF = CF = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$GB \cdot CP = \frac{1}{4}$$

Ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo PFC, tem-se que  $PF^2 = CP^2 + FC^2$  e  $PF = 1 - CP$ , resulta:

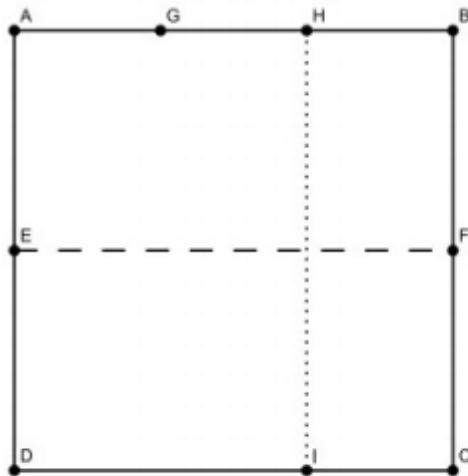
$CP = \frac{3}{8}$ , e, por conseguinte,  $GB = \frac{2}{3}$ . Conclui-se portanto que,

$$AG = \frac{1}{3}.$$



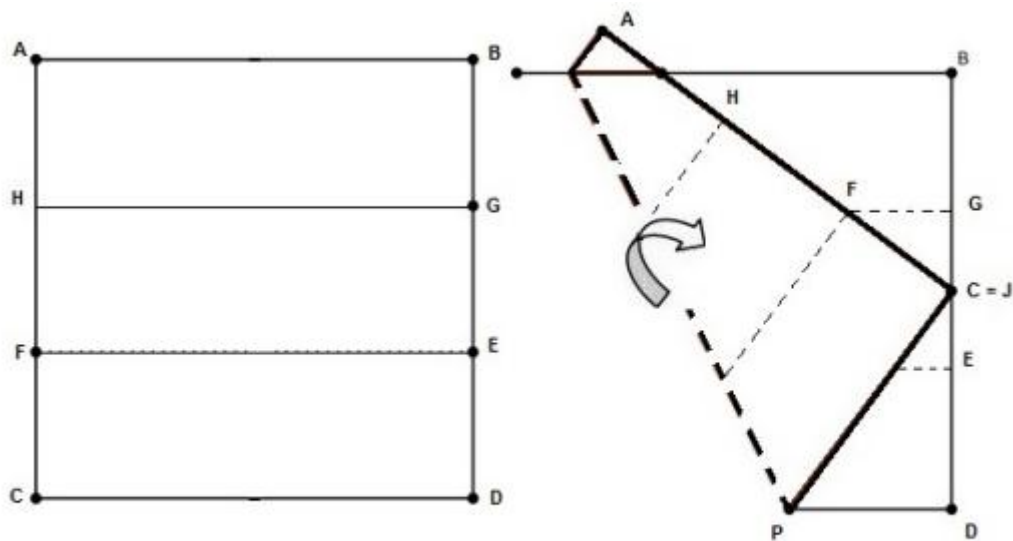
**Figura 45:** Construção das dobras iniciais para trisseccionar o lado do quadrado

Para finalizar a última parte, o processo é repetido com o vértice B até o G com o intuito de serem encontrados os pontos médios cujas medidas terão valores iguais a  $\frac{1}{3}$ .



**Figura 46:** Trisseção do Lado do quadrado

#### 4.4 Problema de Duplicação do Cubo



**Figura 47:** Construção da Duplicação do Cubo por meio de dobras

No 1º Colóquio de Matemática da Região Sul em 2010, um dos temas trabalhados foi o problema da duplicação do cubo, também conhecido por Problema Deliano de acordo com os estudos realizados por Monteiro (2008, p. 32), ou seja, construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado. Antes de ser iniciada tal construção, amparada pelos estudos dos

anais do Colóquio e as observações realizadas por Peter Messer para a resolução deste problema clássico, as entrelinhas do problema devem ser analisadas, pois suponhamos sem perda de generalidade que o cubo inicial tenha aresta "a", então seu volume seria  $a^3$ , daí o cubo que deverá ser construído possuirá o dobro do volume que quer dizer  $2a^3$ . Conclui-se que o novo cubo apresentará aresta igual a  $a\sqrt[3]{2}$ . Como "a" é dado, resta-nos apenas construir um segmento cuja medida seja a  $a\sqrt[3]{2}$ . A partir do quadrado com os lados já trisseccionados uniremos o vértice C ao lado BD de modo que o ponto F faça interseção com o segmento HG. Disso resulta,

$$BJ = JD \sqrt[3]{2}$$

A prova dessa afirmação começa com a utilização do Teorema de Pitágoras no triângulo CDP, ou seja,

$$CP^2 = CD^2 + DP^2 \rightarrow PJ^2 = CD^2 + DP^2.$$

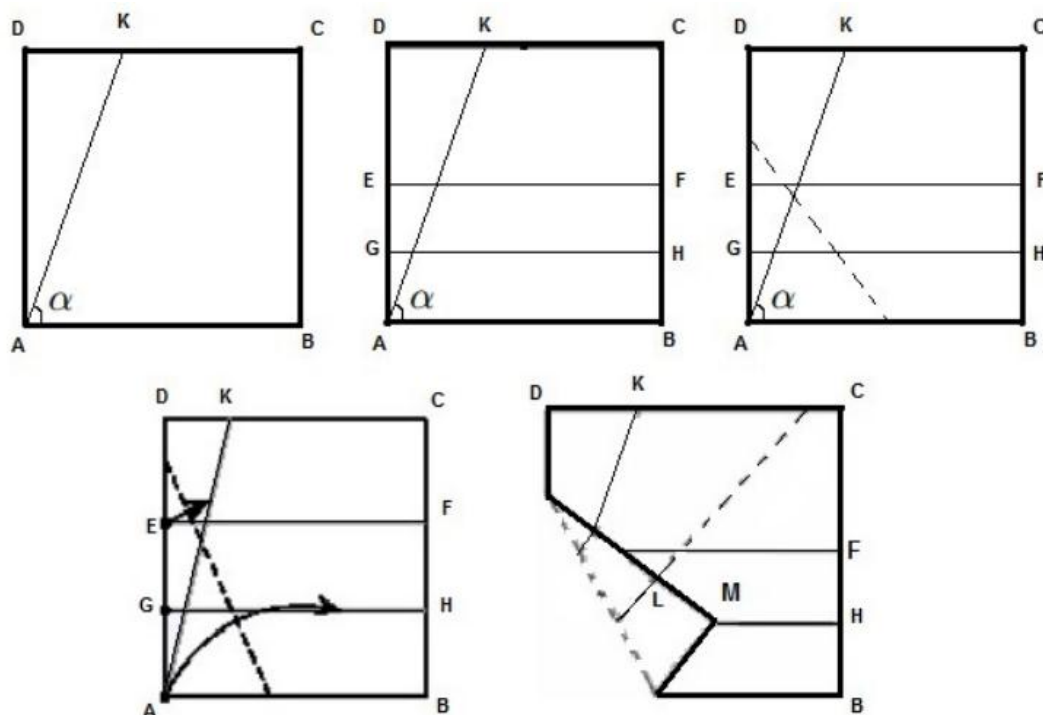
Temos a semelhança entre os triângulos CPD e CFG (AAA), portanto,

$$\frac{DP}{DJ} = \frac{PJ}{FJ}$$

Conclui-se das duas igualdades, após serem colocados os termos em função de JD, que  $(1 - JD)^3 = 2JD^3$ , ou seja,  $BJ = JD\sqrt[3]{2}$ .

#### 4.5 Trisseccção do ângulo

O método que será apresentado foi uma citação feita por Monteiro (2008, p. 29) ao H. Abe que, em 1980, realiza a trisseccção de um ângulo agudo a partir de uma folha quadrada de papel. Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelo lado AB e uma reta arbitrária (Existem outros utilizando semelhança de triângulos). Será realizada uma dobra nos pontos médios E e F dos lados AB e CD, respectivamente, e logo após uma nova dobra passando pelos pontos médios G e H de AE e BF. Será realizada uma dobra propiciada pelo axioma 6 de tal maneira que o vértice A vá ao encontro do segmento GH e o ponto E intercepte o AK. O ponto L formado pelo término do segmento GH será prolongado até atingir o lado superior do quadrado.



**Figura 48:** Dobras iniciais para a trisseção do ângulo

Ao ser desfeita a última dobra, o prolongamento realizado forma um ângulo de  $\frac{2}{3} \alpha$  com o lado inferior do quadrado de papel. Daí, para haver a trisseção do ângulo  $\alpha$ , basta fazer incidir essa dobra com o lado inferior do quadrado para haver a divisão em três partes iguais.

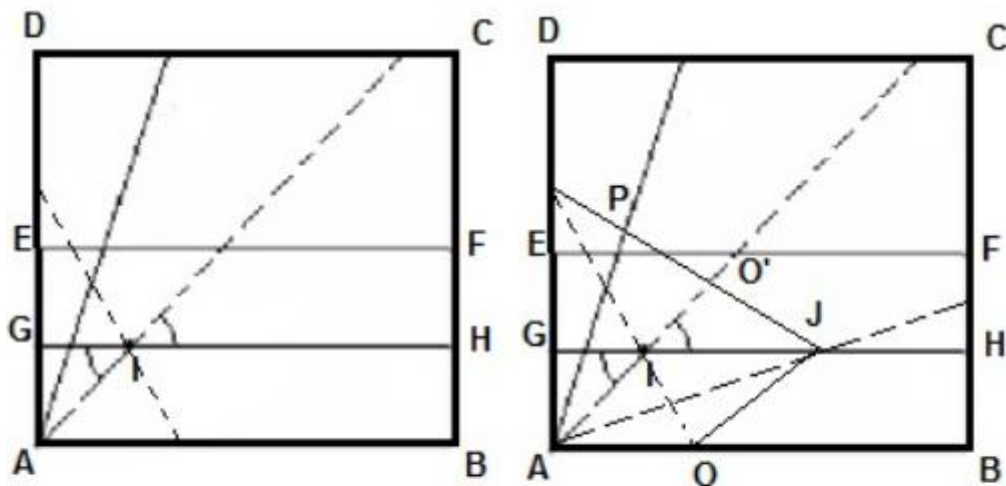
Deve-se observar que os segmentos IM e IA são os mesmos, logo o ângulo formado em LIH possui mesma amplitude em GIA, portanto o prolongamento realizado anteriormente possui seu início exatamente no vértice A. O próximo passo será levar o prolongamento construído ao encontro do lado AB.

Pode-se extrair após a dobra algumas conclusões, tais como:

1.  $AI = AO$ , pois são hipotenusas de dois triângulos congruentes;
2.  $IJ = JO$ , pela reflexão do vértice A sob o segmento IO após a última dobra. Por (1) e (2) conclui-se que o ponto J está na bissetriz do ângulo  $I\hat{A}O$ , logo  $I\hat{A}J = J\hat{A}O$ , então o ponto J pertence à última dobra realizada, daí  $J = M$ .

Os triângulos  $PAO'$  e  $JAO'$  são congruentes pelo caso LAL e, portanto, os ângulos  $P\hat{A}O' = J\hat{A}O'$  e por transitividade:

$$P\hat{A}O' = J\hat{A}O' = J\hat{A}O = \alpha$$

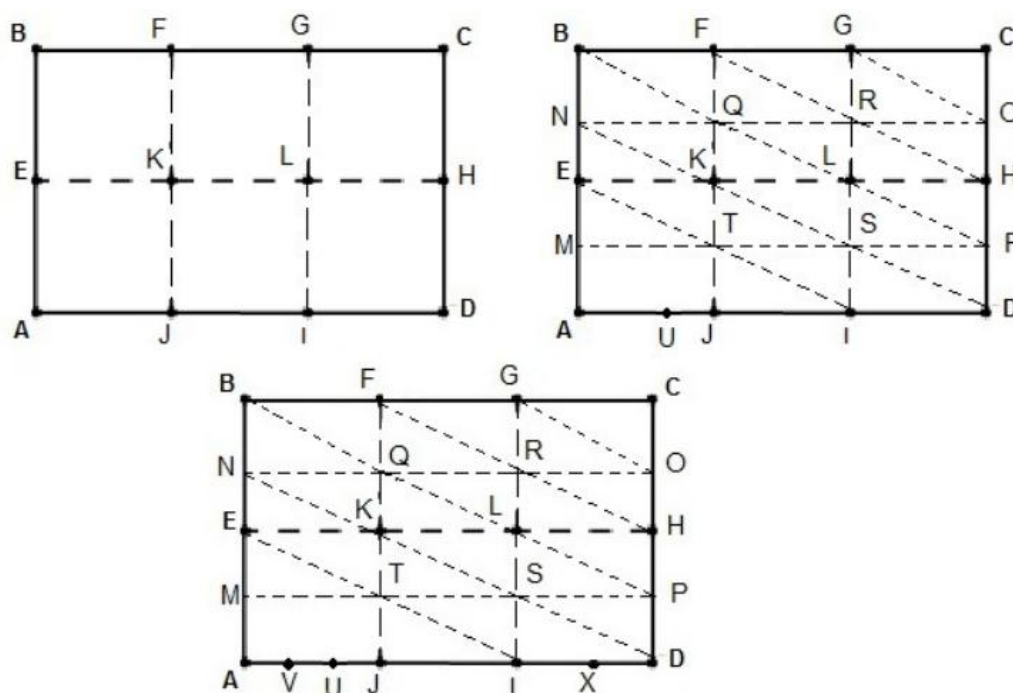


**Figura 49:** Trisseção do ângulo

#### 4.6 Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de $54^\circ$ e $36^\circ$

A construção da figura com tais propriedades se dará com a utilização de um retângulo com dimensões da razão de 3 para 2, o qual será obtido a partir de um retângulo com dimensões "a" e "b" e sem perda de generalidade façamos  $a < b$ , tal que o lado menor será dividido pela metade e levado para o lado de maior medida fixando um dos vértices. Com tal medida, será possível realizar a trisseção do lado maior. Porém três situações podem ocorrer:

1.  $\frac{3a}{2} > b$ , e então deve-se reduzir a dimensão de "a" da figura e repetir o procedimento.
2.  $\frac{3a}{2} = b$ , será obtido a figura desejada dividida em seis quadrados congruentes.
3.  $\frac{3a}{2} < b$ , bastará recortar o excesso de b.



**Figura 50:** Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de  $54^\circ$  e  $36^\circ$

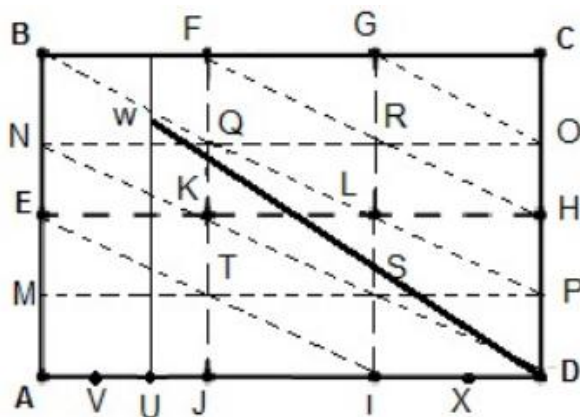
Deverão ser realizadas duas dobras tais que os segmentos BC e AD coincidam com EH, formando após desdobrar o papel 12 retângulos congruentes com uma dimensão duas vezes maior do que a outra. Os retângulos formados devem ser dobrados em suas diagonais de forma contínua formando 24 triângulos retângulos congruentes com as medidas dos catetos iguais a 2 e 1. Utilizando o  $\Delta JIT$  e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$IT^2 = JT^2 + IT^2$$

$$x^2 = 1^2 + 2^2$$

$$x = \sqrt{5}.$$

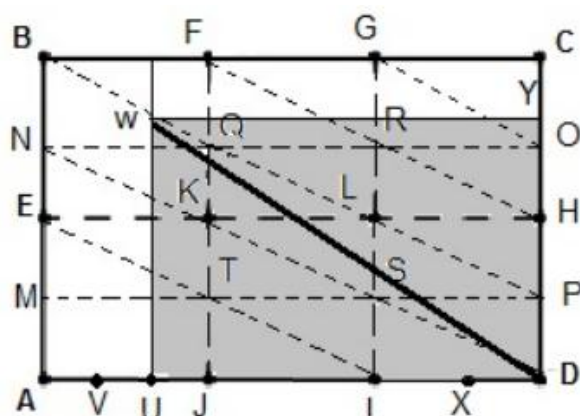
O próximo passo será dobrar a diagonal IT sob o lado AD do retângulo inicial, encontrando como interseção do ponto T sobre o lado inferior o ponto U. Observamos que  $DU = 2 + \sqrt{5}$ .



**Figura 51:** Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de  $54^\circ$  e  $36^\circ$

Em seguida deve ser feita uma dobra levando o ponto P ao encontro do lado AD fixando o vértice D e formando um ponto X. E, logo depois, dobra-se o lado AD sobre ele mesmo sobrepondo o ponto X sobre o U, desta maneira a projeção do vértice D formará um novo ponto denominado V. Concluímos que  $DV = 3 + \sqrt{5}$ , pois  $DX = UV = 1$ .

Deve ser traçada uma perpendicular aos lados superior e inferior interceptando o ponto U e determinado um ponto W equidistante  $3 + \sqrt{5}$  unidades de comprimento do vértice D.



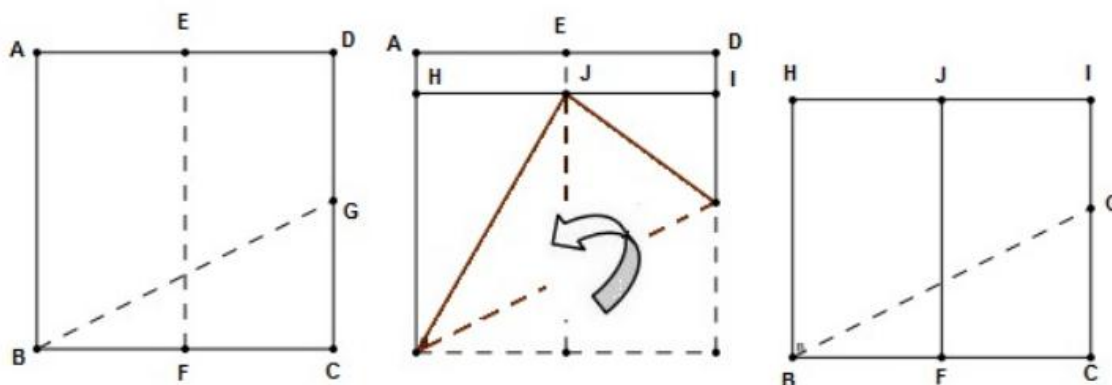
**Figura 52:** Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de  $54^\circ$  e  $36^\circ$



O segmento UW deve ser levado ao encontro do lado CD, sendo o ponto Y a transposição de W sobre o lado CD, resultando com o isso o retângulo YWUD, que divide o ângulo reto em  $54^\circ$  e  $36^\circ$ , pois:

$$\cos 36^\circ = \frac{DU}{DW} = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

#### 4.7 Retângulos com Dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$



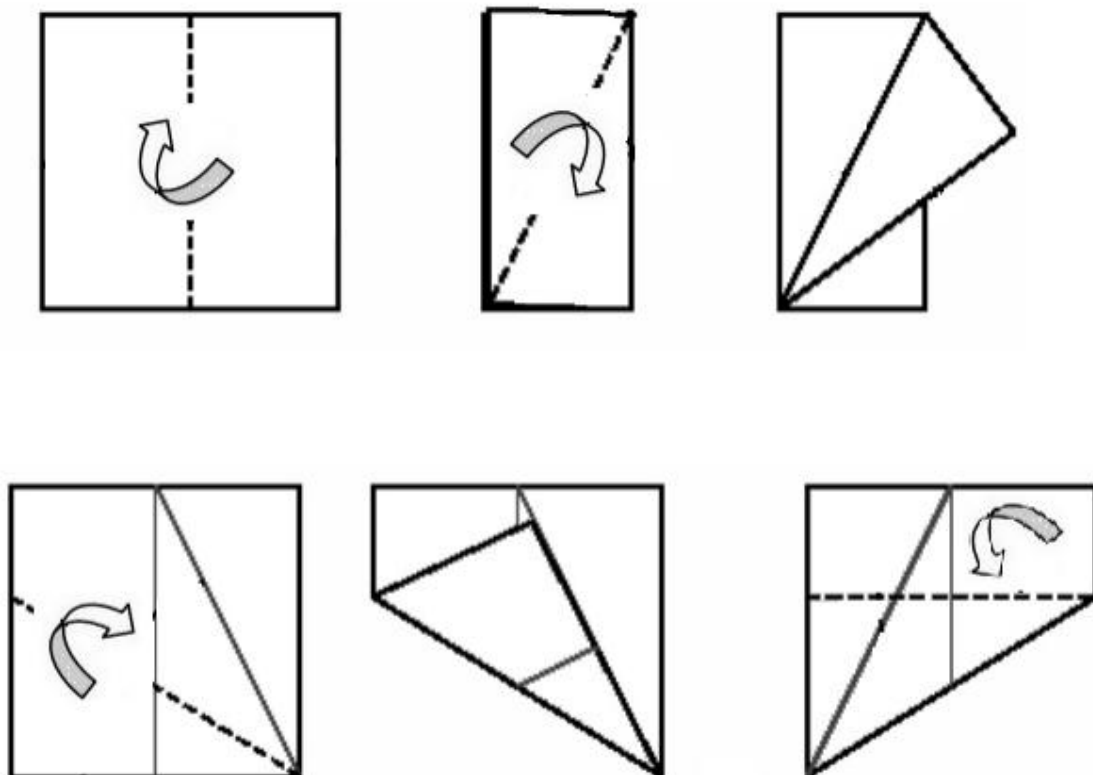
**Figura 53:** Retângulos com Dimensões na razão  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Continuemos trabalhando com um quadrado e sem perda de generalidade o que tenha lado medindo a unidade. A primeira dobra a ser feita é para encontrar os pontos médios E e F dos lados AD e BC, respectivamente. Em seguida, o vértice "C" deve ser levado ao encontro do segmento EF fazendo intersecá-lo no ponto J. No ponto J, existirá uma dobra perpendicular ao lado AD, formando dois pontos H e I, pertencentes, respectivamente, aos lados AB e CD. Logo o retângulo HICB possui dimensões na razão  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

#### 4.8 Retângulo Áureo

Essa seção foi baseada no trabalho de Silva e Santos (2007, p. 101) que constrói um retângulo com as proporções áureas a partir de um quadrado de papel. A primeira dobra é a vertical que divide o quadrado ao meio seguida de outra na diagonal do retângulo formado. Após desdobrar a folha, deve-se levar

o vértice inferior esquerdo ao encontro da última dobra realizada. Ao virarmos a folha dobrada ainda, devemos realizar uma dobradura na parte frontal de forma que o início do vinco à direita seja a interseção entre o lado direito do quadrado e a última dobra realizada. A afirmação é que após desdobrarmos a folha o retângulo formado tem as dimensões de um retângulo áureo.



**Figura 54:** Dobras iniciais para a construção do Retângulo Áureo

A afirmação é que após desdobrarmos a folha o retângulo formado tem as dimensões de um retângulo áureo.

O objetivo da prova será encontrar o quociente entre os lados do retângulo resultante construído. Os triângulos FEC e GDC são semelhantes pelo critério AAA o que fornece a razão:

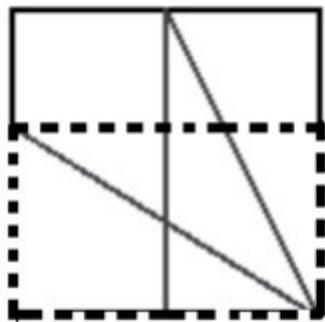
$$\frac{EC}{DC} = \frac{FE}{GD} = \frac{FC}{GC}$$

e, além disso, pelas propriedades de proporcionalidade:

$$\frac{EC}{DC} = \frac{FE + FC}{GD + GC}$$

Suponhamos, portanto, que o lado do quadrado inicial tenha lado  $l$ , então  $AD = EC = l$  e  $FE = \frac{l}{2}$ , aplica-se o Teorema de Pitágoras, no triângulo

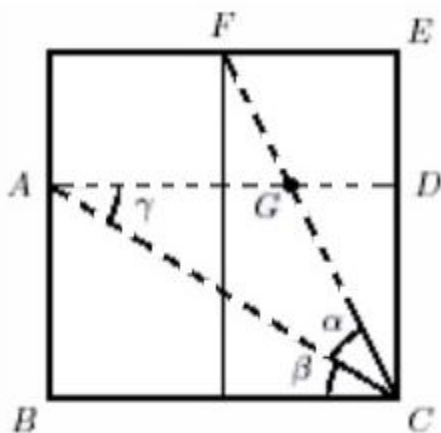
$$FEC: FC = \sqrt{FE^2 + EC^2} = \frac{l\sqrt{5}}{2}.$$



**Figura 55: Construção do Retângulo Áureo**

Verificamos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais pela construção da dobra  $AC$  e os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  também são iguais pois possuem a propriedades de serem alternos internos e por transitividade  $\alpha = \gamma$ . Logo, o triângulo  $AGC$  é isósceles, então  $GD + GC = GD + AG = l$ . Ao calcularmos o quociente entre os lados do retângulo obtemos:

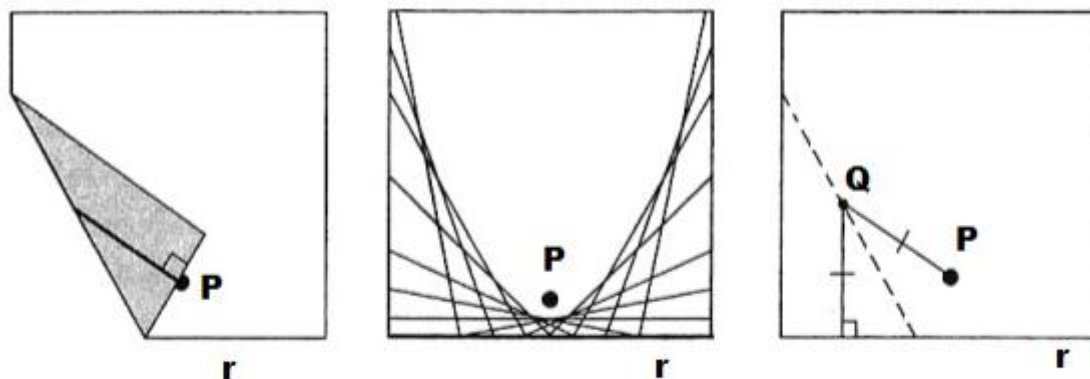
$$x = \frac{EC}{DC} = \frac{FE}{GD} = \frac{FC}{GC} = \frac{FE+FC}{GD+GC} = \frac{\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2}}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



**Figura 56: Retângulo Áureo**

## 4.9 Cônicas

### 4.9.1 Parábola



**Figura 57:** Construção da Parábola por meio de dobras

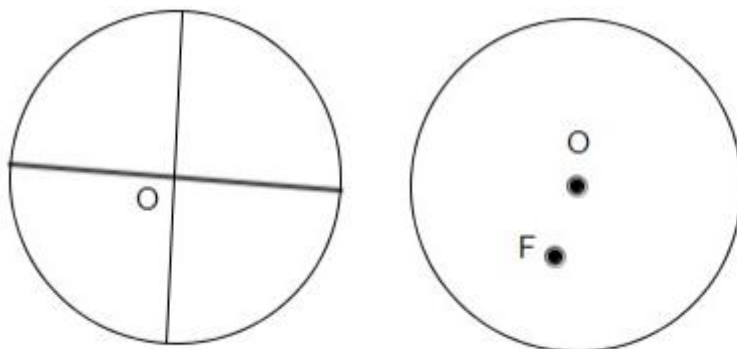
O processo de construção da Parábola foi citado no capítulo 1 quando os axiomas de Huzita- Hatori foram descritos e demonstrados, em especial, o axioma 5, que revela tal qual como a parábola é construída.

Axioma 5: Dados dois pontos distintos,  $P$  e  $P'$  e uma reta  $r$ , existe uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r$  e que passa por  $P'$ .

Conforme explicação de Monteiro (2008, p.62) sejam  $P$  e  $P'$ , o foco da parábola e um ponto de sua reta diretriz  $r$ . Ao ser feita uma dobra por  $P'$  tal que  $P$  incida na reta  $r$ , uma parte dessa reta não ficará na posição inicial e então será considerada a reta  $t$  perpendicular a  $r$  na direção da dobra que passa por  $P$ . Como  $P$  não pertence a  $r$ , conclui-se que a direção de  $r$  após a dobra não é paralela à posição inicial, logo  $r$  não é paralela à reta dobrada e pode, então, ser determinado o ponto de interseção  $Q$  entre as duas retas. Por construção a distância de  $Q$  a  $P$  é igual à de  $Q$  a  $P'$  e é o único ponto da dobra com tal propriedade. Portanto, foi provado que a reta obtida após a dobra é tangente à parábola de foco  $P$  e reta diretriz  $r$ , já que a parábola é lugar geométrico cujos pontos são equidistantes de um mesmo ponto e de uma reta. A figura acima adaptada de Monteiro (2008, p. 62), mostra que a parábola é obtida com a construção de diversas retas tangentes passando por diversos pontos da reta

diretriz e quanto maior for o padrão dos vincos melhor será a aproximação pretendida da figura.

#### 4.9.2 Elipse



**Figura 58:** Dobras iniciais para a construção da Elipse

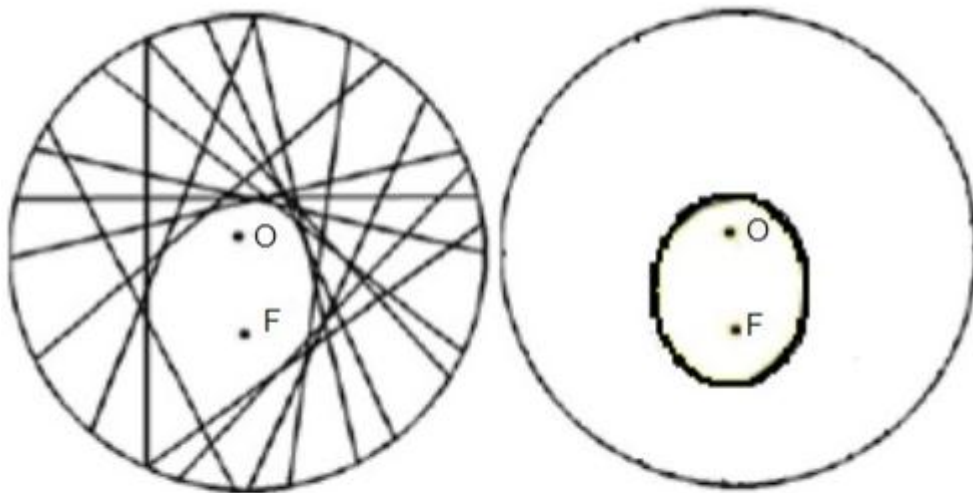
Seguindo o descrito nos estudos de Monteiro (2008, p.62), a elipse será construída a partir de um papel circular o qual será dobrado ao meio em dois locais distintos e o ponto de interseção de tais retas será o centro  $O$  e um dos focos da elipse. Em seguida basta escolher arbitrariamente o outro foco  $F$  para a elipse.

Logo em seguida, deve-se escolher um ponto  $P$  sobre a circunferência e dobrá-lo em direção ao ponto  $F$  e realizar este procedimento  $n$  vezes até que se obtenha com as dobras inúmeras retas que serão tangentes à uma elipse formada.

Ao lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos da circunferência possuem soma constante e mais precisamente soma igual ao raio do círculo inicial. Para a prova, denominaremos de ponto  $X$  a interseção da dobra com o segmento  $OP$ , por construções realizadas inicialmente temos que a dobra realizada é a bissetriz do  $DPXF$  isósceles, logo  $XP = XF$ .

O raio do círculo é dado então por:

$$R = CX + XP = CX + XF$$



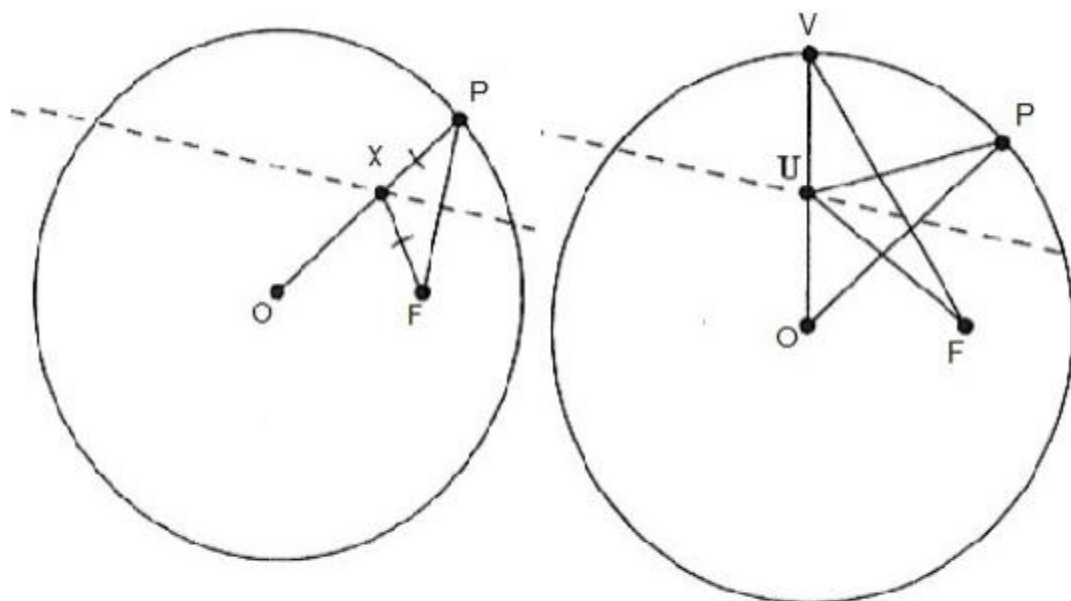
**Figura 59:** Construção da Elipse

Logo o ponto X pertence à elipse. Seja um outro ponto U pertencente à elipse que também pertence à reta de dobragem e seja o segmento OV como o raio do círculo que possui o ponto U. Como U pertence à elipse, então  $UF = UV$ , em contrapartida, como U pertence à reta de dobragem que sobrepõe F ao ponto P e  $UF = UP$ , tem-se que  $UV = UP$ .

Observa-se que,

$$CU + UP = R = CP$$

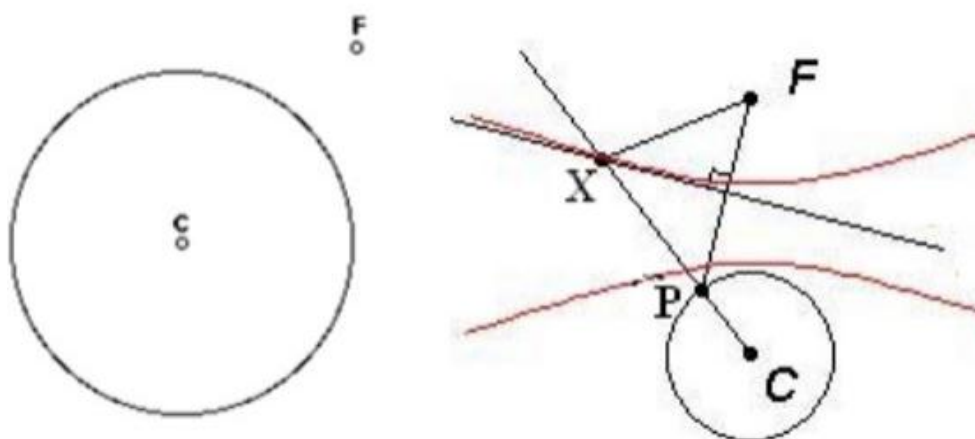
Daí, vem que U pertence ao segmento CP, logo  $U = X$ , provando ser o X o único ponto da reta de dobragem que pertence à elipse. Desta maneira, apenas um ponto da reta que foi dobrada pertence à elipse e tal reta é tangente à cônica, sendo todos os outros exteriores à figura.



**Figura 60:** Elipse

### 4.9.3 Hipérbole

A construção da Hipérbole segue os mesmos passos do da elipse, divergindo somente quanto ao ponto  $F$  que nesta situação, encontra-se exterior ao círculo. Daí, começaremos pelo mesmo círculo de papel, em que um dos focos da hipérbole é o centro do círculo e o outro é o ponto  $F$  fora da figura. Os passos conseguintes são os mesmos da seção anterior.



**Figura 61:** Construção da Hipérbole

## 5 CONCLUSÃO

Uma constante dificuldade em aplicar algo novo na sala de aula, encontra-se na rejeição de alguns professores em saírem de uma zona de conforto na qual já estão acostumados a vivenciar e partirem para novos rumos e formas de ensino. O ensino tradicional pautado em aulas expositivas em que somente o professor é o detentor do saber, faz com que o discente seja o polo passivo do conhecimento, em que somente recebe o conteúdo e em nenhum momento participa de sua construção, ou seja, procurar um meio (lúdico e inovador) de reduzir a resistência de determinadas matérias que muitos alunos apresentam, em especial, em determinados conteúdos matemático é, de longe, uma máxima seguida por parte de uma parcela de professores.

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de contribuir para a formação do professor de matemática na apropriação e transmissão do conteúdo de Geometria Euclidiana Plana no ensino básico para seus alunos e, para que esse objetivo fosse alcançado, o meio encontrado foi a utilização de material concreto, uma vez que trabalhar com ferramentas táteis torna o aprendizado lúdico e mais eficaz. Desta forma, foi elaborada uma proposta de ensino com instruções de fácil acesso ao docente e que possibilite sua prática, já que a matéria prima é comum no meio estudantil: folha de papel. Isto foi motivado pelo fato de acreditarmos que realizando trabalhos em sala de aula com materiais didáticos usando dobras de papel, levaria o aluno a realizar não somente descobertas como também criar um embasamento teórico para os futuros temas sobre geometria.

Os aprendizados obtidos com o ensino da geometria por meio de dobras vão além dos resultados visíveis na escola, como também, o desenvolvimento de habilidades como memória, concentração, criatividade e principalmente, interação com outras realidades dentro de sua própria sala. Tudo isso pode acontecer, através do empenho do professor e de suas peculiaridades como educador, uma vez que somente ele pode determinar o momento certo e o como trabalhar com tais experimentos práticos, já que conhece o nível e grau de interesse da turma.



Essa dissertação é uma contribuição literária que aborda história, problemas e Teoremas da Geometria para que os professores do ensino básico possam utilizar como apoio teórico com a finalidade de repassarem o conteúdo geométrico, transmitindo os problemas e Teoremas aqui abordados de uma forma lúdica que o aluno possa compreender. Como sugestão para futuros trabalhos, artigos ou projetos de doutorado na área de Educação Matemática, faz-se necessário provar a real eficiência da utilização de materiais manipuláveis com um adequado planejamento de aulas e a estruturação de um livro-texto, agora voltado para o discente, com uma linguagem bem simples e menos técnica para que possa haver o seu acompanhamento em sala e em casa.

Este trabalho também revela caminhos para o uso de tecnologias mais avançadas como a utilização do software Geogebra e também gravações de vídeo dos passos realizados com as manipulações das dobras, fazendo com que enriqueça o número e qualidade de recursos que podem ser disponibilizados para o aprendizado dos alunos.

Em suma, o trabalho desenvolvido mostra evidências de possuir elementos que podem contribuir para um real aprimoramento do professor em sala, demonstrando com isso, sua eficácia na aprendizagem da geometria plana uma vez que deve ser bem aceito pela classe docente como um instrumento de pesquisas e trabalhos futuros. É deixado bem claro, que as dobras por si nada representariam se não houvesse um arcabouço teórico que complementasse toda a metodologia a ser implantada: prática e teoria.

## REFERÊNCIAS

- BARRETO, Carlos Alberto A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica. 2013. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Sergipe. 2013.
- BORLIN, H. Resolução do problema da duplicação do volume do cubo utilizando o origami. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96619?show=full>>. Acesso em: 2 dez. 2012.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.. Brasília: MEC/SEF, 1998. 146 p.
- BRAZ, Lúcia Helena Costa Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami.. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Lavras. Faculdade de Matemática. 2013.
- BRITTO, Neyde Carneiro de Didática especial. São Paulo: Editora do Brasil, 1984.
- CARVALHO, Lian Milena Ramos. ROCHA, Jackeline Aparecida Aguiar Da. O Origami na Disciplina de Matemática como Recurso Didático para o Ensino de Geometria Plana e Espacial. Bahia. Anais do XIV Encontro Baiano de Educação Matemática. 2011.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005
- D'Ambrósio, Ubiratan Elo entre as tradições e a Modernidade.. São Paulo: Ática 2001.
- EDUARDO, CAVACAMI e YOLANDA, KIOKO SAITO FURUYA Explorando Geometria Euclidiana com Origami.. Oficina apresentada na IV Bienal da SBM, em Maringá - PR, 2008.
- FERREIRA, Fabrício Eduardo Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. 2013.
- IMENES, L. M. Geometria das dobraduras.. 5. ed. São Paulo: Scipione, 1994. 64 p. (Coleção Vivendo a Matemática).
- LANK, R. J. Huzita-Justin axioms.. Disponível em:<<http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>>. Acesso em: 1 nov.2013.
- LUCAS, E.S.C. Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origamis.. 2013. 81 f. Dissertação (Pós-

graduação Profissional em Matemática) -Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2013.

LUCAS, Eliane dos Santos Corsini Uma Abordagem Didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origamis.2013. 81 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Lavras. Faculdade de Matemática. 2013.

LUCERO, Jorge C. O problema Deliano. Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, <http://www.mat.unb.br/lucero/orig.html>, Brasil.2006

LUCERO, Jorge C. A trisseção de um ângulo. Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, <http://www.mat.unb.br/lucero/orig.html>, Brasil. 2006

MATOS, Francisco Roberto Pinto. YOKOYAMA, Leo Akio. Construções Geométricas por Dobraduras Origami.2004.Pernambuco.Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática Editora do Brasil.2004.

MATTOS, F.R.P. Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões.Dissertação(Mestrado em Matemática Aplicada), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2001, 295p.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira Origami: História de uma Geometria Axiomática.2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade de Lisboa.Faculdade de Ciências. 2008.

RAMIREZ, Z.M.S.; LÓPEZ, C.M.J. Producción de conocimiento geométrico através de la visualización de construcciones con doblado de papel.. In: I Congresso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, 1, 2013, Santo Domingo, Anais...Santo Domingo: 2013. Disponível em: <<http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/216-400-1-DR-C.pdf>>. Acesso em: 15 fev.2014.