

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WESLEY MARINHO LOZÓRIO

DESIGUALDADES DE PENROSE E UM TEOREMA
DA MASSA POSITIVA PARA BURACOS NEGROS
CARREGADOS

FORTALEZA
2014

WESLEY MARINHO LOZÓRIO

DESIGUALDADES DE PENROSE E UM TEOREMA
DA MASSA POSITIVA PARA BURACOS NEGROS
CARREGADOS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.

FORTALEZA
2014

A Deus por esta graciosa oportunidade.
Aos meus parentes e amigos pelo carinho
e incentivo que me deram ao longo desses
anos.

AGRADECIMENTOS

Ao bendito Deus e Pai de nosso Senhor Jesus Cristo, o qual nos abençoou com todas as bênçãos espirituais nos lugares celestiais em Cristo.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao professor Levi Lopes de Lima pela paciente orientação e esforço exaustivo para tornar possível este sonho.

Aos professores da banca: Levi Lopes de Lima, Frederico Vale Girão, Juscelino Pereira Silva, Newton Santos e Ivaldo Paz Nunes.

Aos colegas Renivaldo Sodré Sena, Josué Machado Mota, Luiz Antônio C. Monte e João Francisco S. Filho, pela importante ajuda na confecção do texto da tese.

Aos demais colegas de curso pelo ambiente agradável que proporcionaram.

A minha esposa Karoline B. dos Santos Lozório, pela paciência, compreensão e apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFC, pela oportunidade de realizar este trabalho.

Aos funcionários da UFC, em especial, Andrea Dantas.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A UNIFOR e seus colaboradores, especialmente ao professor Francisco Erivando A. Maia, pela oportunidade de trabalho, apoio e incentivo.

RESUMO

Apresentamos desigualdades do tipo Penrose e um Teorema da Massa Positiva para buracos negros carregados, isto é, dados iniciais para soluções tempo-simétricas das equações de Einstein-Maxwell, que podem ser isometricamente mergulhados no espaço euclidiano como gráficos. As demonstrações usam uma fórmula integral para a massa ADM de tais hipersuperfícies e o fluxo pela curvatura média inversa.

Palavras-chave: Buracos negros carregados, Fluxo pela curvatura média inversa, Desigualdades de Penrose.

ABSTRACT

We present Penrose-type inequalities and a Positive Mass Theorem to charged black holes, ie, initial data for time-symmetric solutions of the Einstein-Maxwell equations, which can be isometrically immersed in Euclidean space as graphics. The statements use an integral formula for the ADM mass of such hypersurfaces and the inverse mean curvature flow.

Keywords: Charged black holes, The inverse mean curvature flow, Penrose inequalities.

Sumário

1	Introdução	1
2	Buracos negros carregados em Relatividade Geral	6
2.1	A solução de Reissner-Nordström-Tangherlini	6
2.2	Conjuntos de dados iniciais para a equação de Einstein-Maxwell .	15
2.3	A massa de variedades assintoticamente planas	17
2.4	A desigualdade de Penrose para buracos negros carregados	19
3	A desigualdade de Penrose clássica para buracos negros	22
3.1	A geometria de gráficos euclidianos	22
3.2	A fórmula de Reilly para hipersuperfícies	26
3.3	A massa de hipersuperfícies assintoticamente planas na presença de um horizonte	28
3.4	O fluxo pela curvatura inversa: existência e comportamento assintótico	31
3.5	A desigualdade de Alexandrov-Fenchel	33
4	Desigualdades de Penrose e um Teorema da Massa Positiva para bu- racos negros carregados	37
4.1	Uma desigualdade de Penrose para buracos negros carregados . .	37
4.2	Um teorema da massa positiva para buracos negros carregados . .	39
	Bibliografia	43

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Relatividade Geral, desenvolvida por A. Einstein há quase um século atrás, constitui uma das mais bem sucedidas teorias físicas clássicas. Seu sucesso deve-se não somente ao indiscutível valor estético de seu arcabouço matemático, baseado na premissa de que fenômenos gravitacionais admitem uma explicação geométrica, mas também na notável concordância de suas predições com observações experimentais as mais variadas. Mais ainda, devido ao seu caráter predominantemente geométrico, a teoria desenvolveu estreita relação com métodos matemáticos os mais diversos, incluindo aí Geometria Riemanniana e Lorentziana, Equações Diferenciais Parciais, Topologia Diferencial, etc.

Apesar deste estrondoso sucesso, sabe-se que a teoria padece de problemas conceituais que, num sentido fundamental, qualificam-na como incompleta da perspectiva física. No sentido de explicar este ponto, convém recordar dois avanços cruciais no desenvolvimento conceitual da teoria.

O primeiro destes avanços, acontecido em 1952, resulta de um teorema de Choquet-Bruhat [CB] segundo o qual a teoria é bem posta do ponto de vista de Formulação de Valor Inicial (FVI). Mais precisamente, o resultado assegura que o comportamento global de uma solução das equações de Einstein, eventualmente acoplada a certas classes de campos de matéria, é completamente determinada pela prescrição de dados iniciais apropriados ao longo de uma hipersuperfície do tipo espaço, correspondente ao tempo inicial. Este resultado não somente sistematizou a busca de soluções para as equações de campo, anteriormente reduzida à procura de soluções explícitas, mas também confirmou que o Princípio da Causalidade, tão caro aos físicos, efetivamente aplica-se aos fenômenos gravitacionais conforme descritos pela Relatividade Geral.

Curiosamente, o segundo avanço a que nos referimos aponta na direção contrá-

ria e tem a ver com um corpo de teoremas demonstrados por Penrose e Hawking no final da década de sessenta [HE]. Estes resultados implicam, em particular, que para uma porção considerável de dados iniciais fisicamente razoáveis, a solução correspondente, cuja existência havia sido demonstrada por Choquet-Bruhat, desenvolve singularidades em tempo finito, no sentido que o espaço-tempo em questão é geodesicamente incompleto. Assim, em vizinhanças suficientemente pequenas destas singularidades, a teoria perde seu poder preditivo, o que a torna, conforme já mencionado, deveras insatisfatória do ponto de vista físico.

A fim de sanar este aspecto indesejável da teoria, Penrose formulou em 1969 a famosa Conjectura da Censura Cósmica (CCC) que, a grosso modo, assegura que singularidades permanecem indetectáveis a observadores situados a grandes distâncias, estando deles protegidas por um horizonte de eventos. Dito de outro modo, a formação de singularidades, notadamente no processo de colapso gravitacional de estrelas massivas, sempre viria acompanhada da formação de um buraco negro, que isolaria do resto do universo a região onde problemas de previsibilidade eventualmente aconteçam. Embora este cenário seja compatível com soluções especiais da teoria (Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e similares), parecem inexistir argumentos físicos convincentes que o justifiquem. Mais ainda, como a CCC diz respeito ao comportamento *global* de soluções das equações de Einstein, que são sabidamente não-lineares, uma solução matemática, e portanto satisfatória, da conjectura parece estar além da tecnologia atual. Este estado de coisas levou Penrose a formular um teste para a validade da CCC que admite uma formulação unicamente em termos dos dados iniciais. Mais precisamente, no caso do vácuo ele argumentou que se a formulação convencional da teoria de colapso gravitacional é satisfeita (incluindo aí a CCC), então a massa total do sistema, que é calculada assintoticamente ao longo do dado inicial, é limitada por baixo por uma expressão que depende da área do horizonte, que por sua vez pode ser definido como sendo a superfície mínima mais externa (outermost) contida no dado inicial. No caso tempo-simétrico, que corresponde à situação em que o dado inicial não possui geometria extrínseca (ou seja, é totalmente geodésico) esta conjectura pode ser formulada inteiramente em termos de sua geometria: *se (M, g) é um dado inicial assintoticamente plano que possui curvatura escalar não-negativa então vale a desigualdade*

$$m_{(M,g)} \geq \sqrt{\frac{|\Sigma_0|}{16\pi}}, \quad (1.1)$$

onde $|\Sigma_0|$ é a área do horizonte Σ_0 e $m_{(M,g)}$ é a massa ADM de (M, g) . Mais ainda, a igualdade acontece em (1.1) se e somente se (M, g) é isométrica à

solução de Schwarzschild.

Notemos que o invariante $m_{(M,g)}$ é fisicamente interpretado como a massa total do sistema determinado pelo dado inicial (M, g) ; veja Seções 2.2 e 2.3. Em todo caso, a existência de um dado inicial nas condições acima para o qual a desigualdade (1.1) seja violada inviabilizaria a CCC, ao passo que a sua verificação adicionaria evidência, ainda que indireta, à validade da conjectura.

Embora de enunciado simples, a desigualdade de Penrose (1.1) resistiu às investidas dos teóricos por duas décadas, somente sendo resolvida independentemente por Huisken-Ilmanen [HI] (para o caso em que Σ_0 é conexo) e Bray [B] (para horizontes quaisquer), por meios de técnicas matemáticas reconhecidamente sofisticadas (fluxos geométricos). Mais ainda, os métodos aí utilizados somente parecem funcionar para dados iniciais tri-dimensionais, embora o enunciado da conjectura faça sentido para variedades Riemannianas (M, g) de qualquer dimensão $n \geq 3$, caso em que expressa-se como

$$m_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (1.2)$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária de dimensão $n - 1$. Salientamos que a única classe de variedades para a qual se conhece, em *qualquer* dimensão $n \geq 3$, uma demonstração desta desigualdade é precisamente aquela constituída por dados iniciais que admitem mergulhos isométricos apropriados como um gráfico em algum espaço euclidiano. Mais precisamente, o caso de codimensão um foi tratado por Lam [L], e é aqui reproduzido no Teorema 3.5.5 abaixo, enquanto que o caso de codimensão qualquer foi considerado por Mirandola-Vitório [MV].

O objetivo deste trabalho é adaptar o argumento de Lam, como reinterpretado em [dLG], para buracos negros carregados, ou seja, dados iniciais correspondentes a soluções tempo-simétricas das equações de Einstein-Maxwell. Neste caso, conforme explicado na Seção 2.4, (1.2) incorpora um termo adicional que representa a contribuição da carga elétrica total Q do sistema à sua massa. Mais precisamente, sob condições apropriadas, conjectura-se que a desigualdade

$$m_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + Q^2 \left(\frac{\omega_{n-1}}{|\Sigma_0|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \right) \quad (1.3)$$

deve ser verdadeira.

É importante salientar que, na dimensão física $n = 3$, esta desigualdade de Penrose generalizada resulta dos métodos de Huisken-Ilmanen, tendo sido, por

consequente, verificada para horizontes *conexos*; uma demonstração nestas linhas pode ser encontrada em [DK]. Curiosamente, este resultado é o melhor possível no sentido que, nesta dimensão, existem contra-exemplos à validade da desigualdade para o caso de buracos negros desconexos [WY]. Dois de nossos principais resultados, a saber os Teoremas 4.1.1 e 4.2.1, conduzem a desigualdades do tipo

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + Q^2 \mathcal{J} \right), \quad \mathcal{J} > 0, \quad (1.4)$$

que pode ser considerada uma versão qualitativa de (1.3). No primeiro caso, \mathcal{J} é um invariante geométrico associado ao dado inicial como um todo, ao passo que no segundo caso o resultado é mais satisfatório no sentido que \mathcal{J} depende somente do horizonte. Devemos salientar, porem, que em todos os casos, (1.4) contém a importante informação de que a carga Q efetivamente contribui para a massa total do sistema. Em particular, sempre vale a desigualdade estrita

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} > \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (1.5)$$

ou seja, a massa total da solução efetivamente supera a contribuição que provem do horizonte.

Se tomado isoladamente, o mais relevante resultado deste trabalho é o Teorema 4.2.2: nas condições acima, a seguinte desigualdade da massa positiva vale para buracos negros carregados em qualquer dimensão $n \geq 3$:

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq |Q|. \quad (1.6)$$

Note que se $Q = 0$ isto reduz-se à desigualdade da massa positiva usual: $\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq 0$. No nosso contexto, a importância deste resultado deve-se basicamente a dois fatores. Primeiramente, a desigualdade acima representa a exata extensão de um resultado já conhecido em dimensão 3, demonstrado em [GHHP]. Por outro lado, o método aí utilizado, que recorre a spinors a la Witten, não se estende em geral para o caso $n \geq 4$. Deste ponto de vista, pode-se afirmar que a única classe de buracos negros carregados para os quais (1.6) é conhecida em *qualquer* dimensão $n \geq 4$ é precisamente aquela considerada neste trabalho, a saber, gráficos apropriadamente mergulhados no espaço euclidiano.

Esta tese é organizada da seguinte maneira. No capítulo 1 apresentamos os aspectos mais relevantes, para nossos propósitos, dos fundamentos matemáticos da Relatividade Geral. Isto é ilustrado derivando-se, na Seção 2.1, a famosa solução

de Reissner-Nordström-Tangherlini, que descreve buracos negros carregados rotacionalmente simétricos em qualquer dimensão $n + 1 \geq 3$. Apresentamos, na Seção 2.2, uma formulação do Problema de Valor Inicial para tais buracos negros e isolamos a Condição de Energia Dominante correspondente. As desigualdades de Penrose neste contexto são formuladas na Seção 2.4, onde se utiliza a importante noção de massa ADM de variedades assintoticamente planas, introduzida na Seção 2.3. No capítulo 3 consideramos gráficos assintoticamente planos e exibimos uma fórmula integral para a sua massa. Como aplicação, e à guisa de motivação, deduzimos a desigualdade de Penrose clássica para tais dados iniciais, seguindo um argumento de Lam [L]. Isto faz uso de propriedades globais do fluxo da curvatura média inversa, por meio da desigualdade de Alexandrov-Fenchel. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos os resultados principais desta tese, a saber, desigualdades de Penrose (Teoremas 4.1.1 e 4.2.1) e um Teorema da Massa Positiva (Teorema 4.2.2) para buracos negros carregados. As demonstrações apresentados constituem refinamentos consideráveis do argumento de Lam em [L], embora ainda sejam baseadas em propriedades globais do fluxo pela curvatura média inversa.

Capítulo 2

Buracos negros carregados em Relatividade Geral

O objetivo deste capítulo é oferecer uma modesta introdução à teoria dos buracos negros carregados em Relatividade Geral. Para tanto, faz-se necessário recordar os fundamentos básicos desta teoria, o que é realizado na Seção 2.1. Ainda nesta seção, apresentamos uma dedução da solução de Reissner-Nordström-Tangherlini, uma representação explícita de uma solução esfericamente simétrica das equações de Einstein-Maxwell. Na Seção 2.2 enunciamos o teorema fundamental na Formulação de Valor Inicial (FVI) da equação de Einstein-Maxwell, com ênfase para o caso em que os dados iniciais são *tempo-simétricos*. Em particular, a importante Condição de Energia Dominante (CED) é aí introduzida para tais dados. A Seção 2.3 contém uma discussão da noção de *massa ADM*, um invariante assintótico que não somente desempenha um papel relevante na análise geométrica das variedades Riemannianas assintoticamente planas, mas também admite uma notável interpretação física, a saber, ele corresponde precisamente à massa total da solução associada ao dado inicial sobre o qual é calculado. Finalmente, na Seção 2.4 apresentamos a formulação das desigualdades de Penrose neste contexto.

2.1 A solução de Reissner-Nordström-Tangherlini

Nesta seção esboçaremos a dedução da métrica de Reissner-Nordström-Tangherlini [Ta], que descreve uma solução esfericamente simétrica das equações de Einstein-Maxwell correspondente ao campo gravitacional determinado por um

corpo esfericamente simétrico de massa $m > 0$ que encontra-se carregado. Começaremos com uma revisão das noções básicas da Teoria da Relatividade Geral, formulada por A. Einstein em 1915; veja [Wa] para um tratamento detalhado do assunto.

O preceito fundamental desta teoria é que, quando observado em escala cósmica, o universo é descrito por uma variedade Lorentziana (\bar{M}, \bar{g}) . Aqui, \bar{M} é uma variedade diferenciável de dimensão 4 e \bar{g} é uma métrica Lorentziana em \bar{M} . Neste contexto, a métrica corresponde ao potencial gravitacional na Teoria da Gravitação Newtoniana e em particular determina a dinâmica das partículas livres, visto que estas deslocam-se ao longo de geodésicas de \bar{g} .

Num sentido mais fundamental, \bar{g} determina a estrutura causal do espaço-tempo (\bar{M}, \bar{g}) . Isto significa que, para cada $x \in \bar{M}$, um vetor tangente $v \in T_x \bar{M}$ pode ser classificado de acordo com seu caráter causal: v é dito ser *do tipo espaço*, (respectivamente, *do tipo luz*, *do tipo tempo*) se vale $\langle v, v \rangle > 0$ (respectivamente, $\langle v, v \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle < 0$). Aqui, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma bilinear, simétrica e não-degenerada correspondente a \bar{g} . Diz-se ainda que v é *causal* se é do tipo tempo ou do tipo luz. Esta classificação estende-se naturalmente para curvas parametrizadas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$: diz-se que γ é *do tipo espaço*, (respectivamente, *do tipo luz*, *do tipo tempo*, *causal*) se $\gamma'(t)$ goza da respectiva propriedade para qualquer $t \in I$. Como, pelo Princípio da Equivalência, em escalas infinitesimais a Teoria da Relatividade Espacial deve ser reproduzida, resulta que partículas descolam-se ao longo de curvas do tipo tempo (partículas massivas) ou do tipo luz (partículas não-massivas). Dito de outro modo, a nenhuma partícula concede-se a possibilidade de viajar ao longo de uma curva que não é causal, o que obviamente equivale ao princípio físico segundo o qual nenhum objeto (massivo ou não) pode mover-se a velocidade superior à da luz.

Nesta teoria, a métrica \bar{g} é, ela mesma, uma entidade dinâmica, no sentido que satisfaz as *equações de campo de Einstein*:

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \frac{R_{\bar{g}}}{2} \bar{g} = T, \quad (2.1)$$

onde $\text{Ric}_{\bar{g}}$ é o *tensor de Ricci* de \bar{g} , $R_{\bar{g}} = \text{tr}_{\bar{g}} \text{Ric}_{\bar{g}}$ é a *curvatura escalar* e T é o *tensor energia-momento*, que descreve a distribuição dos campos não-gravitacionais (matéria, radiação, etc.) na região do universo que estamos a considerar. É importante observar que o tensor energia-momento necessariamente possui divergência nula:

$$\text{div}_{\bar{g}} T = 0; \quad (2.2)$$

isto resulta de (2.1) e do fato que o *tensor de Einstein*

$$E_{\bar{g}} = \text{Ric}_{\bar{g}} - \frac{R_{\bar{g}}}{2}\bar{g} \quad (2.3)$$

goza desta propriedade, como um cálculo direto confirma.

Devido ao caráter manifestamente não-linear do sistema (2.1)-(2.2), soluções explícitas das equações de Einstein são consideravelmente raras. Notemos que as equações simplificam-se bastante no caso do *vácuo*, em que $T = 0$, pois então (2.2) é trivialmente satisfeita e (2.1) reduz-se a

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = 0, \quad (2.4)$$

mas mesmo neste caso a busca de soluções explícitas pode revelar-se deveras infrutífera, com poucos exemplos disponíveis. Felizmente, existem métodos alternativos, essencialmente analíticos, que permitem a exibição de uma grande variedade de soluções para as equações de campo. Descreveremos abaixo um resultado deste tipo (Teorema 2.2.2), que bastará para nossos propósitos, mas antes esboçemos como determinar a métrica de Reissner-Nordström-Tangherlini, uma solução explícita das equações de Einstein-Maxwell. Esta métrica estende, para qualquer dimensão $n + 1 \geq 4$, a famosa solução de Reissner-Nordström, independentemente encontrada por H. Reissner e G. Nordström.

A partir de agora, será conveniente denominar de *espaço-tempo* qualquer variedade Lorentziana (\bar{M}, \bar{g}) de dimensão $n + 1$, $n \geq 3$. Exigiremos ainda, como parte da definição, que \bar{M} é não somente orientável mas também *tempo-orientável* no sentido que existe uma maneira contínua e consistente de escolher, em cada $x \in \bar{M}$, vetores causais que apontam numa das duas possíveis direções determinadas pelo *cone de luz* $C_x = \{v \in T_x\bar{M}; \langle v, v \rangle = 0\}$. Se uma destas possíveis escolhas é fixada, diz-se então que (\bar{M}, \bar{g}) é *futuro-orientada*. Mais ainda, uma hipersuperfície $M \subset \bar{M}$ é dita ser do *tipo espaço* se qualquer vetor tangente a M goza desta propriedade. Em geral, suporemos que M é *futuro-orientada*, ou seja, existe um campo normal unitário e contínuo sobre M que sempre aponta na direção da orientação futura de \bar{M} . Note que a restrição de \bar{g} a M define uma métrica Riemanniana em M , usualmente denotada por g .

Começemos então observando que se (\bar{M}, \bar{g}) é um espaço-tempo de dimensão $n + 1$, com \bar{g} satisfazendo (2.1) para algum T , então tomando traço relativamente a \bar{g} , obtemos

$$R_{\bar{g}} = -\frac{\tau}{n-1}, \quad \tau = \text{tr}_{\bar{g}}T, \quad (2.5)$$

de modo que (2.1) torna-se

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = -\frac{\tau}{n-1}\bar{g} + T \quad (2.6)$$

Estaremos interessados em soluções de (2.6) para o caso em que T corresponde a um campo eletro-magnético desprovido de fontes. Lembremos que este tipo de campo é descrito por uma 2-forma diferencial F , definida sobre \bar{M} , que satisfaz as *equações de Maxwell*:

$$dF = 0, \quad \text{div}_{\bar{g}}F = 0. \quad (2.7)$$

Convém agora expressar o tensor-energia momento T^F associado a F . A prescrição usual [Kr] recomenda tomarmos T^F proporcional ao tensor

$$\tilde{T}_{ab}^F = F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}g_{ab}, \quad a, b, \dots = 1, \dots, n+1, \quad (2.8)$$

onde usamos a convenção de Einstein, que consiste em somar sobre índices de covariância distinta que encontram-se repetidos. Note que um cálculo direto, baseado em (2.7), fornece a identidade $\text{div}_{\bar{g}}T^F = 0$, o que é consistente com comentários feitos acima. Nosso propósito resume-se, então, a encontrar soluções esféricamente simétricas das *equações de Einstein-Maxwell*:

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = -\frac{\tau}{n-1}\bar{g} + T_F, \quad (2.9)$$

com F satisfazendo (2.7). Faz-se necessário, no entanto, precisar o que entendemos por uma solução esféricamente simétrica das equações de Einstein-Maxwell.

Definição 2.1.1. *Seja (\bar{M}, \bar{g}) um espaço-tempo e $\text{Iso}(\bar{M}, \bar{g})$ seu grupo de isometrias. Diremos que (\bar{M}, \bar{g}) é esféricamente simétrico se existe um mergulho de grupos de Lie $\text{SO}_n \subset \text{Iso}(\bar{M}, \bar{g})$ com a propriedade de que todas as órbitas da ação isométrica $\text{SO}_n \times \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ são esferas mergulhadas $\mathbb{S}^{n-1} \subset \bar{M}$ do tipo espaço.*

Um famoso argumento de Birkhoff [HE] [Wa] garante que qualquer espaço-tempo esféricamente simétrico é de fato *estático*, ou seja, num sistema de coordenadas apropriado $(t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times I \times \mathbb{S}^{n-1}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, a métrica expressa-se como

$$\bar{g} = -\psi^2 dt^2 + g, \quad g = \psi^{-2} dr^2 + r^2 h, \quad (2.10)$$

onde h é a métrica canônica na esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} , $\psi = \psi(r) > 0$ é uma função suave e g é a métrica Riemanniana definida em $P = I \times \mathbb{S}^{n-1}$. Este resultado autoriza-nos a buscar soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein-Maxwell na forma (2.10).

É natural supor que a 2-forma F , que descreve o campo eletro-magnético, é também esfericamente simétrica no sistema de coordenadas fixado. É ainda conveniente supor a ausência de campos magnéticos, de forma que, nas coordenadas (t, r, θ) , as únicas entradas não-nulas de F são $F_{rt} = -F_{tr} = \rho$, para alguma função suave $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, F assume a forma

$$F = \begin{pmatrix} \rho J & 0_{2 \times n-2} \\ 0_{(n-1) \times 2} & 0_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Um cálculo direto usando (2.8) nos leva então a

$$T^F = \alpha_n \rho^2 (\psi^2 dt^2 - \psi^{-2} dr^2 + r^2 h), \quad (2.12)$$

onde $\alpha_n > 0$ é uma constante dimensional a ser especificada posteriormente. Note que

$$\tau = (n - 3)\alpha_n \rho^3, \quad (2.13)$$

de modo que T_F somente possui traço nulo se $n = 3$.

Resulta de (2.10) que a primeira equação em (2.7) é automaticamente satisfeita. Por outro lado, a segunda equação leva facilmente à condição $\partial_r(r^{n-1}\rho) = 0$, de forma que

$$\rho = \frac{q}{r^{n-1}}, \quad (2.14)$$

onde

$$q = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}_r} \langle E, \nu_r \rangle d\mathbb{S}_r \quad (2.15)$$

é a *carga elétrica*. Aqui, ω_{n-1} é a área de (\mathbb{S}^{n-1}, h) , $\mathbb{S}_r = \{r\} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset P$, $\nu_r = \psi \partial_r$ é o campo unitário normal a \mathbb{S}_r e $E = \rho \nu_r$ é o *campo elétrico*. Note que a expressão para q em (2.15) é válida para qualquer $r \in I$, o que é consistente com o fato facilmente verificado que $\operatorname{div}_g E = 0$. Noutras palavras, q é uma quantidade *quase local* no sentido que pode ser calculada como o fluxo total (normalizado) de E sobre qualquer hipersuperfície $\mathcal{S} \subset P$ homóloga a alguma esfera \mathbb{S}_r .

A próxima etapa na dedução da métrica Reissner-Nordström-Tangherlini consiste em determinar ψ . Isto pode ser conduzido de diversas maneiras, mas acreditamos que o tratamento a seguir parece ser o mais satisfatório do ponto de vista

geométrico. Começemos observando que o campo ∂_t é Killing. Como consequência, a projeção natural $\pi : \overline{M} \rightarrow P$, $\pi(t, r, \theta) = (r, \theta)$, é uma submersão Lorentziana com folhas totalmente geodésicas. Neste caso, as equações fundamentais de O'Neill [On] simplificam-se substancialmente, tornando-se

$$\begin{cases} \text{Ric}_{\overline{g}}(\partial_t, \partial_t) &= \psi \Delta_g \psi \\ \text{Ric}_{\overline{g}}(\partial_t, X) &= 0 \\ \text{Ric}_{\overline{g}}(X, Y) &= \text{Ric}_g(X, Y) - \psi^{-1} \nabla_g^2(X, Y), \end{cases} \quad (2.16)$$

onde X e Y são campos horizontais (isto é, tangentes às folhas), ∇_g^2 é o operador Hessiano de g e $\Delta_g = \text{tr}_g \nabla_g^2$ é o Laplaciano de g . A primeira equação em (2.16), juntamente com (2.6), fornece

$$\Delta_g \psi = 2\alpha_n \frac{n-2}{n-1} \frac{q^2}{r^{n-1}} \psi, \quad (2.17)$$

e como

$$\Delta_g \psi = \frac{\psi}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \psi \partial_r \psi),$$

isto produz uma equação diferencial ordinária para ψ que pode ser facilmente resolvida se tomarmos

$$\alpha_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

A solução é

$$\psi(r) = \psi_{m,q}(r) = \sqrt{1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2n-4}}}, \quad (2.18)$$

onde m é um parâmetro real. Com esta expressão de ψ em mãos, um cálculo direto mostra que a equação de campo restante, que deriva de (2.6) e da terceira equação em (2.16), é também satisfeita. Resulta então que a solução de Reissner-Nordström-Tangherlini (RNT) é dada por

$$\overline{g}_{m,q} = -\psi_{m,q}^2 dt^2 + g_{m,q}, \quad g_{m,q} = \psi_{m,q}^{-2} dr^2 + r^2 h. \quad (2.19)$$

Conforme veremos na Seção 2.2, o parâmetro m pode ser identificado à massa total do sistema gravitacional descrito pela solução.

Resta ainda clarificar a natureza do intervalo I . Para tanto, é conveniente adotar a validade da desigualdade da massa positiva:

$$m > |q|, \quad (2.20)$$

de modo que o intervalo I é determinado pelos zeros da expressão dentro da raiz quadrada no lado direito de (2.18), a saber,

$$r_{\pm} = \left(m \pm \sqrt{m^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

É natural então tomar $I = (r_+, +\infty)$. Neste caso, é fácil verificar que a solução estende-se suavemente ao intervalo $\bar{I} = [r_+, +\infty)$.

Conforme veremos na seção seguinte, as equações de Einstein-Maxwell admitem uma formulação de valor inicial adequada (Teorema 2.2.2). Do ponto de vista da solução especial aqui discutida, isto é confirmado pelo fato que a solução RNT $\bar{g}_{m,q}$ em (2.19) é completamente determinada pela métrica Riemanniana $g_{m,q}$ obtida fazendo $t = 0$ em $\bar{g}_{m,q}$. Na linguagem daquela seção, $(P, g_{m,q})$ é um CDI (tempo-simétrico) para o espaço-tempo $(\bar{M}, \bar{g}_{m,q})$; veja ainda a Observação 2.2.5. Em função disso, é conveniente denominar, daqui por diante, de solução RNT a variedade Riemanniana $(P, g_{m,q})$, desconsiderando qualquer referência ao espaço-tempo subjacente. Isto motiva uma investigação mais aprofundada da geometria de $(P, g_{m,q})$, que passamos agora a conduzir.

Se considerarmos as coordenadas $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ em \mathbb{S}^{n-1} , um cálculo simples revela que as curvaturas sectionais de $(P, g_{m,q})$ são dadas por

$$K(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = -(n-2)\frac{m}{r^n} + (n-2)\frac{q^2}{r^{2n-2}}, \quad (2.21)$$

e

$$K(\partial_{\theta_i}, \partial_{\theta_j}) = \frac{2m}{r^n} - \frac{q^2}{r^{2n-2}}. \quad (2.22)$$

Como

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} K(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} K(\partial_{\theta_i}, \partial_{\theta_j}) = 0,$$

resulta que a geometria de $(P, g_{m,q})$ torna-se euclidiana no infinito. Isto é confirmado no nível métrico, pois um outro cálculo fornece

$$|g_{m,q} - \delta|_{\delta} + |dg_{m,q}|_{\delta} = O(r^{-(n-2)}), \quad (2.23)$$

onde $\delta = dr^2 + r^2h$ é a métrica euclidiana em P . Conforme veremos na Seção 2.3, (2.23) significa precisamente que $(P, g_{m,q})$ é uma variedade assintoticamente plana.

Resulta ainda de (2.21)-(2.22) que a curvatura escalar de $g_{m,q}$ é

$$R_{g_{m,q}} = (n-1)(n-2)\frac{q^2}{r^{2n-2}}. \quad (2.24)$$

Em termos do campo elétrico E , temos

$$R_{g_{m,q}} = (n-1)(n-2)|E|_g^2. \quad (2.25)$$

Vê-se ainda dos cálculos acima que a curvatura média das esferas $\mathbb{S}_r = \{r\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ é dada por

$$H_r = (n-1) \frac{\psi_{m,q}^2(r)}{r},$$

o que implica em particular que o *horizonte*

$$\mathbb{S}_{r_+} = \{r_+\} \times \mathbb{S}^{n-1}$$

é mínimo. Esta observação tem um significado físico profundo: a métrica RNT $g_{m,q}$ na verdade descreve uma solução do *tipo buraco negro*. Geometricamente, este buraco negro corresponde à região que encontra-se ‘dentro’ do horizonte \mathbb{S}_{r_+} , e que não é acessível, do ponto de vista causal, a observadores situados fora do horizonte, isto é, na região $r > r_+$. Note-se finalmente que se eliminarmos r_+ das expressões $\psi_{m,q}(r_+) = 0$ e $|\mathbb{S}_{r_+}| = \omega_{n-1} r_+^{n-1}$, a área do horizonte, descobrimos que o parâmetro m (a massa da solução RNT) pode ser descrita em termos da carga e da área do horizonte por meio de

$$m = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\mathbb{S}_{r_+}^{n-1}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + q^2 \left(\frac{\omega_{n-1}}{|\mathbb{S}_{r_+}|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \right). \quad (2.26)$$

Conforme veremos, a validade desta notável identidade é uma das razões que levam à formulação das *desigualdades de Penrose* para buracos negros carregados.

Observação 2.1.2. Se fizermos $q = 0$ na discussão acima, obtemos a famosa *solução de Schwarzschild*, a saber,

$$\bar{g}_m = -\psi_m^2 dt^2 + g_m, \quad g_m = \psi_m^{-2} dr^2 + r^2 h, \quad (2.27)$$

onde

$$\psi_m(r) = \sqrt{1 - \frac{2m}{r^{n-1}}}. \quad (2.28)$$

Esta é a única solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo; veja (2.4). Sob a condição $m > 0$, esta solução está definida para $r > r_+$, onde

$$r_+ = (2m)^{\frac{1}{n-2}},$$

o chamado *raio de Schwarzschild*. Em vista da discussão sobre a Formulação de Valor Inicial acima, é conveniente ainda chamar de solução de Schwarzschild a métrica Riemanniana g_m obtida fazendo-se $t = 0$ em \bar{g}_m . Salientamos que esta solução é também do tipo buraco negro, pois o horizonte $\mathbb{S}_{r_+}^{n-1}$ dado por $r = r_+$ continua sendo mínimo. Vê-se ainda, em razão de (2.24), que g_m é *escalar-plana* no sentido que

$$R_{g_m} = 0. \quad (2.29)$$

Finalmente, notemos que, em vista de (2.26), o parâmetro m , que neste caso também representa a massa total a solução, pode ser expresso em termos da área $|\mathbb{S}_{r_+}^{n-1}|$ do horizonte por meio de

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbb{S}_{r_+}^{n-1}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (2.30)$$

Observação 2.1.3. Notemos que a solução RNT $g_{m,q}$ em (2.19) admite um mergulho isométrico em \mathbb{R}^{n+1} como o gráfico associado à função radialmente simétrica $f :]r_+, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\left(\frac{df}{dr} \right)^2 = \frac{2mr^{n-2} - q^2}{r^{2n-4} - 2mr^{n-2} + q^2}. \quad (2.31)$$

Com efeito, isto pode ser reescrito como

$$1 + \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = \psi_{m,r}^{-2},$$

de modo que a afirmação é justificada pela fórmula (3.2) abaixo para a métrica induzida em gráficos. É claro ainda de (2.31) que

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \left| \frac{df}{dr} \right| = +\infty,$$

o que tem um significado geométrico óbvio: a interseção do gráfico com o hiperplano horizontal $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ é ortogonal ao longo do horizonte $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r_+\}$. Mais ainda, se $r = |x| \rightarrow +\infty$, temos

$$\left| \frac{df}{dr} \right| = O(r^{-\frac{n-2}{2}}), \quad \left| \frac{d^2f}{dr^2} \right| = O(r^{-\frac{n}{2}}).$$

Este tipo de configuração geométrica justifica o estudo da classe de hipersuperfícies considerada neste trabalho, conforme exemplificado na Definição 3.1.1 e no Teorema 3.3.1 abaixo. Finalmente, notemos que observações similares aplicam-se à solução de Schwarzschild, discutida na Observação 2.1.2.

2.2 Conjuntos de dados iniciais para a equação de Einstein-Maxwell

Na seção anterior, vimos como deduzir a solução RNT para a equação de Einstein-Maxwell. Obviamente, a hipótese de simetria esférica foi essencial para determinar o formato final da métrica em (2.19)-(2.18). No entanto, conforme já mencionamos acima, a busca de soluções explícitas em geral não produz muitos resultados. Por essa razão, é conveniente dispor de métodos analíticos que permitam a exibição de quantidades consideráveis de soluções. Descreveremos agora um método baseado na assim chamada *Formulação de Valor Inicial* (FVI) para a Relatividade Geral; maiores detalhes podem ser encontrados em [CB] [HE] [Ri] [Wa].

A idéia do método consiste basicamente em precever os dados iniciais (a métrica Riemanniana, a segunda forma fundamental e a distribuição de matéria) sobre uma variedade M de dimensão n e propagar no tempo esses dados usando certas componentes das equações de Einstein como um sistema de equações de evolução, de forma a obter um espaço-tempo (\bar{M}, \bar{g}) que seja solução das equações de campo. No intuito de evitar complicações desnecessárias, consideraremos somente dados iniciais do tipo *tempo-simétrico*, correspondentes ao caso em que a segunda forma fundamental se anula, de modo que o dado inicial (M, g) somente possui geometria intrínseca.

Definição 2.2.1. *Um conjunto de dados iniciais tempo-simétrico (CDI) para as equações de Einstein-Maxwell em dimensão $n + 1 \geq 4$ consiste de uma tripla (M, g, E) , onde:*

1. (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$;
2. E é um campo de vetores tangentes a M que possui divergência nula, ou seja,

$$\operatorname{div}_g E = 0. \quad (2.32)$$

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [CB] [CBCL], confirma a validade da FVI para a equação de Einstein-Maxwell no caso simétrico-temporal.

Teorema 2.2.2. *Seja (M, g, E) um CDI para as equações de Einstein-Maxwell. Então existem um espaço-tempo (\bar{M}, \bar{g}) , um mergulho $j : M \rightarrow \bar{M}$ e uma 2-forma F sobre \bar{M} satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $g = j^*\bar{g}$;
2. $j(M) \subset \bar{M}$ é totalmente geodésica;
3. (\bar{g}, F) satisfazem as equações de Einstein-Maxwell:

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = -\frac{\tau}{n-1}\bar{g} + T^F, \quad dF = 0, \quad \text{div}_{\bar{g}}F = 0; \quad (2.33)$$

onde

$$T_{ab}^F = \beta \left(F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}g_{ab} \right),$$

para algum $\beta > 0$.

4. Se N é o vetor normal futuro-orientado ao longo de $j(M) \subset \bar{M}$ então $E = j^*(i_N F)$, onde i_N denota o produto interior por N ;

Na verdade, este resultado admite uma formulação global (na categoria das variedades Lorentzianas globalmente hiperbólicas), o que essencialmente permite estabelecer uma correspondência entre soluções das equações de Einstein-Maxwell e CDIs; veja em particular [Ri] para discussões sobre este ponto. Uma consequência notável é que podemos utilizar as informações sobre o CDI para decidir quando a solução correspondente é razoável do ponto de vista físico, o que pode ser realizado por meio das chamadas *condições de energia*. Descreveremos agora aquela que é mais conveniente para nossos propósitos.

Definição 2.2.3. A densidade de energia de um CDI (M, g, E) é a função $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu = \frac{1}{2} (R_g - (n-1)(n-2)|E|_g^2).$$

Diz-se então que (M, g, E) satisfaz a condição de energia dominante (CED) se vale

$$\mu \geq 0. \quad (2.34)$$

Equivalentemente,

$$R_g \geq (n-1)(n-2)|E|_g^2. \quad (2.35)$$

Por conseguinte, um CDI somente qualifica-se como razoável do ponto de vista físico (no sentido que o espaço-tempo a ele associado através do Teorema 2.2.2 descreve uma solução fisicamente aceitável das equações de Einstein-Maxwell) se a CED (2.35) for satisfeita. Notemos que, por (2.25), $\mu = 0$ para o

CDI que gera a solução RNT. Isto não somente mostra que esta solução especial satisfaz a CED, mas também que a própria CED (2.35) pode ser reformulada como dizendo que a densidade de energia do CDI dado é maior ou igual do que aquela associada à solução RNT.

Observação 2.2.4. O campo E que aparece na Definição 2.2.1 é fisicamente interpretado como a *densidade de carga*. Desse modo, se $\Sigma \subset M$ é uma hipersuperfície compacta e mergulhada então a *carga* associada é

$$Q_\Sigma = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Sigma \langle E, \nu \rangle d\Sigma, \quad (2.36)$$

onde ν é um campo unitário normal a Σ . Observe que

$$Q_\Sigma = Q_{\Sigma'}, \quad (2.37)$$

para qualquer Σ' homóloga a Σ .

Observação 2.2.5. Decorre da demonstração do Teorema 2.2.1 que se fizermos $E = 0$ ou, equivalentemente, considerarmos apenas a variedade Riemanniana (M, g) como CDI, então $F = 0$, donde $T^F = 0$, ou seja, a métrica \bar{g} de fato é uma solução da equação de Einstein *no vácuo*, a saber, (2.4). O modelo para esta situação é, evidentemente, a solução de Schwarzschild (2.27)-(2.28), discutida na Observação 2.1.2. Note que, neste caso, a densidade de energia é essencialmente a curvatura escalar, pois $\mu = R_g/2$, e a CED (2.35) traduz-se na exigência de a curvatura escalar ser não-negativa, ou seja,

$$R_g \geq 0. \quad (2.38)$$

2.3 A massa de variedades assintoticamente planas

Em Relatividade Geral, os espaço-tempos mais investigados correspondem precisamente àqueles que modelam um sistema gravitacional isolado. Neste contexto, supõe-se em particular que o campo gravitacional, representado pela métrica Lorentziana \bar{g} , acha-se concentrado numa região limitada, tornando-se assim negligível em grandes escalas. Uma maneira mais precisa de expressar esta propriedade consiste em exigir que, em coordenadas apropriadas numa vizinhança do ‘infinito espacial’, \bar{g} converge para a métrica plana do espaço de Lorentz-Minkowski. Se adotarmos o ponto de vista da seção anterior, que baseia-se na

Formulação de Valor Inicial para substituir uma determinada solução das equações de campo pelo CDI correspondente, esta condição expressa-se então na definição abaixo.

Definição 2.3.1. Diz-se que uma variedade Riemannian (M, g) é assintoticamente plana se a curvatura escalar R_g de g é integrável e existem um compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo $\Psi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ tal que, no sistema de coordenadas x definido em $M \setminus K$ por Ψ , valem as seguintes expansões assintóticas:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}), \quad g_{ij,k} = O(r^{-\tau-1}), \quad \tau > \frac{n-2}{2}, \quad (2.39)$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ são os coeficientes de g relativamente ao sistema de coordenadas x , $g_{ij,k} = \partial_k g_{ij}$ e $r = |x|$.

Esta definição está ilustrada na Figura 2.1. O subconjunto $E = M \setminus K$ é usualmente chamado o *fim* de M e um sistema de coordenadas x em E no qual as expansões em (2.39) são válidas é denominado *assintoticamente plano*. Do ponto de vista físico, tal sistema de coordenadas corresponde a um observador instalado no infinito e as expansões em (2.39) descrevem matematicamente a observação feita acima, segundo a qual o campo gravitacional, representado por g , torna-se euclidiano numa vizinhança do infinito.

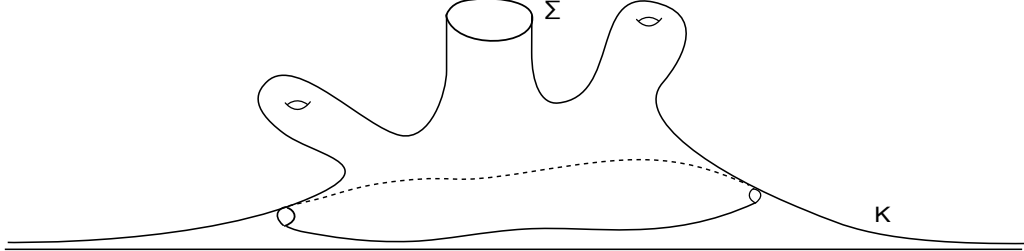


Figura 2.1:

É possível definir, para as variedades assintoticamente planas, um invariante geométrico que essencialmente mede a taxa segundo a qual a métrica Riemanniana converge para a métrica euclidiana no infinito.

Definição 2.3.2. Se (M, g) é uma variedade assintoticamente plana então sua massa ADM é definida por meio do limite

$$m_{(M,g)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} c_n \int_{S_r} \left(\sum_{ij} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \nu^i \right) dS_r, \quad (2.40)$$

onde x é uma sistema de coordenadas assintoticamente plano induzido no fim de M por uma carta Ψ , $\mathcal{S}_r = \Psi^{-1}(\mathbb{S}_r^{n-1})$ é uma esfera coordenada de raio r , $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ é o vetor unitário normal exterior a \mathcal{S}_r e

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}.$$

Observação 2.3.3. Note que estaremos usando, a partir de agora, as seguintes variações de índices: $i, j, \dots = 1, \dots, n$ e $a, b, \dots = 1, \dots, n+1$.

É possível verificar que, nas condições da Definição 2.3.1, o limite em (2.40) de fato existe e é finito. Mais ainda, este limite *não* depende do particular sistema de coordenadas assintoticamente plano usado em sua definição [LP]. Desta forma, a massa ADM (ou simplesmente, massa) de fato define um invariante da geometria assintótica de variedades assintoticamente planas; veja [LP] para as demonstrações destas afirmações. Adicionalmente, se pensarmos em (M, g) como a parte estritamente gravitacional do dado inicial para as equações de Einstein-Maxwell como no Teorema 2.2.2, então o invariante $\mathfrak{m}_{(M,g)}$ é fisicamente interpretado como sendo a massa total do sistema. Na verdade, se $(P, g_{m,q})$ é a solução RNT então um cálculo direto fornece

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} = m,$$

de modo que, conforme já observamos acima, o parâmetro m que aparece em (2.19) de fato corresponde à massa total da solução RNT.

2.4 A desigualdade de Penrose para buracos negros carregados

Com os conceitos apresentados nas seções anteriores à disposição, estamos finalmente em condições de formular a desigualdade de Penrose para buracos negros carregados. Esta desigualdade aparece, para o caso físico $n = 3$, num artigo clássico de Jang [J].

Consideremos então um dado inicial (M, g, E) para as equações de Einstein-Maxwell como no Teorema 2.2.2. Suporemos que M possui uma fronteira interna, ou seja, uma hipersuperfície mínima Σ_0 . Mais ainda, admitiremos que Σ_0 é a hipersuperfície mínima mais externa (outermost) em Σ_0 . Deste modo, é conveniente denominar Σ_0 de o *horizonte* do dado inicial¹. Como necessitamos dispor

¹Notemos que o horizonte não precisa ser conexo.

de uma noção de massa total para a solução que, de acordo com o Teorema 2.2.2, é gerada por (M, g, E) , é natural supor ainda que (M, g) é assintoticamente plana como na Definição 2.3.1. Assim,, podemos considerar $m_{(M,g)}$, a massa ADM de (M, g) ; veja a Definição 2.3.2. Finalmente, suporemos que o campo elétrico E satisfaz, relativamente a algum sistema de coordenadas assintoticamente plano x ,

$$E = O(r^{n-1}), \quad r = |x| \rightarrow +\infty,$$

de forma que a *carga elétrica* da solução correspondente é

$$Q = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathcal{S}_r} \langle E, \nu \rangle d\mathcal{S}_r, \quad (2.41)$$

onde \mathcal{S}_r é uma esfera coordenada de raio r com vetor unitário normal ν . Note, porém, que, em virtude de (2.32), resulta que

$$Q = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \langle E, \nu \rangle d\Sigma, \quad (2.42)$$

onde $\Sigma \subset M$ é qualquer hipersuperfície homóloga a alguma \mathcal{S}_r . Isto obviamente justifica a terminologia *buraco negro carregado*.

Conjectura 2.4.1. *Seja (M, g, E) é um dado inicial como acima, com horizonte Σ_0 conexo e satisfazendo a CED (2.35). Então, a seguinte desigualdade de Penrose vale:*

$$m_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + Q^2 \left(\frac{|\omega_{n-1}|}{|\Sigma_0|} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \right). \quad (2.43)$$

Em particular, tais buracos negros cumprem a desigualdade da massa positiva

$$m_{(M,g)} \geq |Q|. \quad (2.44)$$

Salientamos que a conexidade de Σ_0 é essencial em função do contra-exemplo em [WY]. Notemos ainda que (2.44) decorre de (2.43) por meio da desigualdade elementar

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

com

$$a = \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}, \quad b = |Q| \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}.$$

Para $n = 3$ estas desigualdades são propostas em [J], como consequência de um argumento heurístico, de natureza física, concebido por Penrose a partir da Conjectura da Censura Cósmica, conforme discutido na Introdução. Apesar deste argumento não fazer sentido em dimensão $n \geq 4$, a conjectura justifica-se em função da identidade (2.26), válida para a solução RNT. Os principais resultados deste trabalho, descritos no Capítulo 4 abaixo, contemplam versões destas desigualdades para o caso em que o dado inicial (M, g) pode ser isometricamente mergulhado como um gráfico em \mathbb{R}^{n+1} .

Capítulo 3

A desigualdade de Penrose clássica para buracos negros

Neste capítulo apresentamos, à guisa de ilustração, a demonstração de Lam [L] da clássica desigualdade de Penrose para buracos que pode ser isometricamente realizados como gráficos. Veja Teorema 3.5.5 abaixo. A demonstração faz uso do material desenvolvido nas seções anteriores, a saber, uma fórmula integral para a massa (Teorema 3.3.1) e a análise global de soluções do fluxo pela curvatura média inversa, além de uma de suas notáveis consequências, a saber, a desigualdade de Alexandrov-Fenchel. Estas técnicas serão utilizadas no próximo capítulo, na demonstração dos principais resultados deste trabalho.

3.1 A geometria de gráficos euclidianos

Fixemos no espaço euclidiano \mathbb{R}^n coordenadas ortonormais $x = (x_1, \dots, x_n)$ e sejam $e_i = \partial_i$, $i = 1, \dots, n$, os campos coordenados correspondentes. Consideremos ainda $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, com coordenadas (x, x_{n+1}) , $x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Deste modo, cada $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ define um hiperplano horizontal $\mathbb{R}_{x_{n+1}}^n = \mathbb{R}^n \times \{x_{n+1}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, que é totalmente geodésico, com $\mathbb{R}_{x_{n+1}}^n = \mathbb{R}^n$ isometricamente. Notemos ainda que $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$, com $e_{n+1} = \partial_{x_{n+1}}$, constitui um referencial ortonormal em \mathbb{R}^{n+1} . Usualmente, denotaremos por δ a métrica euclidiana em \mathbb{R}^n ou em \mathbb{R}^{n+1} , de forma que $\delta_{ab} = \langle e_a, e_b \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma bilinear e simétrica induzida por δ .

Definição 3.1.1. *Uma hipersuperfície isometricamente imersa $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ é assintoticamente plana se R_g é integrável e existem subconjuntos compactos*

$K \subset M$ e $K' \subset \mathbb{R}^n$ tais que $E_M = M \setminus K$, o fim de M , pode ser escrito como um gráfico sobre $\mathbb{R}^n \setminus K' \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, associado a uma função suave $f : \mathbb{R}^n \setminus K' \rightarrow \mathbb{R}$ que por sua vez satisfaz as seguintes expansões assintóticas quando $r = |x| \rightarrow +\infty$:

$$f_i(x) = O(r^{-\frac{\tau}{2}}), \quad f_{ij}(x) = O(r^{-\frac{\tau}{2}-1}), \quad \tau > \frac{n-2}{2}. \quad (3.1)$$

Aqui, $f_i = \partial_i f$ e $f_{ij} = \partial_{ij} f$.

Note que, ao longo do fim E_M de M , que é um gráfico sobre $\mathbb{R}^n \setminus K'$, a métrica induzida g , calculada em relação ao sistema de coordenadas x , é dada por

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j. \quad (3.2)$$

Assim, a Definição 3.1.1 implica que (M, g) , vista intrinsecamente como uma variedade Riemanniana, é assintoticamente plana no sentido da Definição 2.3.1. Mais ainda, o sistema de coordenadas induzido em E_M por meio da carta $\Psi_f : E_M \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus K'$, dada por $\Psi_f^{-1}(x) = (x, f(x))$, é assintoticamente plana. Em particular, abre-se a possibilidade de usar este sistema de coordenadas para calcular a massa de (M, g) . O objetivo desta seção é precisamente mostrar como isto pode ser realizado para o caso em que a hipersuperfície (M, g) possui um horizonte; veja a Seção 3.3.

Começemos recordando algumas definições. Se $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ é uma hipersuperfície e N é um campo unitário normal ao longo de M , definimos o operador de Weingarten $B : TM \rightarrow TM$ de M relativamente a N por

$$BX = -\bar{D}_x N, \quad X \in TM, \quad (3.3)$$

onde \bar{D} é a conexão riemanniana de $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$. Se $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ denotam os autovalores de B relativamente a g (as curvaturas principais), definamos

$$S_1 = \sum_i \kappa_i \quad (3.4)$$

e

$$S_2 = \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j. \quad (3.5)$$

Estas são, respectivamente, a *curvatura média* e a *curvatura escalar extrínseca* of M . Observe que da equação de Gauss resulta que

$$R_g = 2S_2, \quad (3.6)$$

onde R_g é a curvatura escalar (intrínseca) de g . Definimos ainda o *tensor de Newton* de M por

$$G = S_1 I - B, \quad (3.7)$$

sendo I o operador identidade em TM .

O prometido cálculo da massa de (M, g) envolve a determinação de alguns destes invariantes ao longo do fim E_M de M . Recordemos que E_M expressa-se como

$$E_M = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^n \setminus K'\},$$

onde f é a função que aparece na Definição 3.1.1. Em termos do referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+1}$ em \mathbb{R}^{n+1} fixado acima, TE_M é gerado por

$$Z_i = f_i e_{n+1} + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Assim, se D é a derivada usual em \mathbb{R}^n , podemos escolher

$$N = \frac{1}{W} (e_{n+1} - Df), \quad (3.9)$$

onde

$$W = \sqrt{1 + |Df|^2} = 1 + O(r^{-\tau}), \quad (3.10)$$

para ser o campo unitário normal a E_M . Além disso, a métrica induzida sobre E_M é

$$g_{ij} = \langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij} + f_i f_j \quad (3.11)$$

e os coeficientes do operador de Weingarten B de E_M com respeito ao referencial (3.8) são dados por

$$B_j^i = \frac{1}{W^3} (W^2 f_{ij} - f_i c_j), \quad c_j = \sum_k f_k f_{kj}. \quad (3.12)$$

A proposição abaixo representa um passo essencial no cálculo da massa de hipersuperfícies assintoticamente planas.

Proposição 3.1.2. *Se $E_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um gráfico assintoticamente plano como acima, G é seu tensor de Newton e e_{n+1}^\top é a componente tangencial de e_{n+1} ao longo de E_M então, relativamente ao referencial (3.8), os coeficientes de Ge_{n+1}^\top são dados por*

$$(Ge_{n+1}^\top)^i = \frac{1}{W^3} \sum_j (f_{jj} f_i - f_{ij} f_j) = O(r^{-\tau-1}). \quad (3.13)$$

Demonstração. Resulta de (3.7) que

$$(Ge_{n+1}^\top)^i = \sum_j (B_j^j (e_{n+1}^\top)^i - B_j^i (e_{n+1}^\top)^j), \quad (3.14)$$

com

$$e_{n+1}^\top = \sum_i (e_{n+1}^\top)^i Z_i = \left(\sum_i f_i (e_{n+1}^\top)^i \right) e_{n+1} + \sum_i (e_{n+1}^\top)^i e_i. \quad (3.15)$$

Por outro lado, como $\langle e_{n+1}, N \rangle = 1/W$,

$$\begin{aligned} e_{n+1}^\top &= e_{n+1} - \frac{1}{W} N \\ &= e_{n+1} - \frac{1}{W^2} \left(e_{n+1} - \sum_i f_i e_i \right) \\ &= \frac{W^2 - 1}{W^2} e_{n+1} + \sum_i \frac{f_i}{W^2} e_i, \end{aligned}$$

e comparando isto com (3.15), obtemos

$$(e_{n+1}^\top)^i = \frac{f_i}{W^2}. \quad (3.16)$$

Assim, substituindo (3.16) e (3.12) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} (Ge_{n+1}^\top)^i &= \frac{1}{W^3} \sum_j (W^2 f_{jj} - f_j c_j) \frac{f_i}{W^2} - \frac{1}{W^3} \sum_j (W^2 f_{ij} - f_i c_j) \frac{f_j}{W^2} \\ &= \frac{1}{W^5} \sum_j (W^2 f_{jj} f_i - f_i f_j c_j - W^2 f_{ij} f_j + f_i f_j c_j) \\ &= \frac{1}{W^3} \sum_j (f_{jj} f_i - f_{ij} f_j), \end{aligned}$$

como desejado. Finalmente, a taxa de decaimento em (3.13) resulta da expansão assintótica (3.1) na Definição 3.1.1. \square

3.2 A fórmula de Reilly para hipersuperfícies

Além da Proposição 3.1.2, um outro ingrediente fundamental no cálculo da massa de uma hipersuperfície assintoticamente plana é a chamada *fórmula de Reilly* [Re], uma espécie de lei de conservação para a curvatura escalar de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} . A demonstração que aqui apresentamos é extraída de [Ro].

Esta identidade é válida para qualquer hipersuperfície orientada $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o que significa que sobre M está definido um campo normal unitário N . Lembremos que sobre qualquer hipersuperfície deste tipo podemos definir o operador de Weingarten e o tensor de Newton de acordo com (3.3) e (3.7), respectivamente. Em particular, a curvatura média S_1 e a curvatura escalar extrínseca S_2 estão definidas sobre M . Começemos com o lema a seguir.

Lema 3.2.1. *Se $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ é uma hipersuperfície orientada então vale*

$$\operatorname{div}_g G = 0, \quad (3.17)$$

onde div_g representa o operador divergência relativamente a g .

Demonstração. Se $V, W \in TM$ são campos tangentes então um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned} (\nabla_V G)(W) &= \langle \nabla S_1, V \rangle W - (\nabla_V B)(W) \\ &= \langle \nabla S_1, V \rangle W - \nabla_V(BW) + B(\nabla_V W), \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita em M . Escolhamos agora um referencial ortonormal local $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ que é geodésico em $p \in M$, o ponto onde estamos fazendo o cálculo. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g G &= \sum_i (\nabla_{\tilde{e}_i} G)(\tilde{e}_i) \\ &= \sum_i (\langle \nabla S_1, \tilde{e}_i \rangle \tilde{e}_i - \nabla_{\tilde{e}_i} B \tilde{e}_i + B(\nabla_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_i)) \\ &= \nabla S_1 - \sum_i \nabla_{\tilde{e}_i} B \tilde{e}_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação de Codazzi, para cada j temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{e}_i} B \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{e}_j} B \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle \\ &= \tilde{e}_j \langle B \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle - \langle B \tilde{e}_i, \nabla_{\tilde{e}_j} \tilde{e}_i \rangle \\ &= \tilde{e}_j(S_1), \end{aligned}$$

ou seja, $\sum_i \nabla_{\tilde{e}_i} B e_i = \nabla S_1$, e portanto,

$$\operatorname{div}_g G = \nabla S_1 - \nabla S_1 = 0,$$

como desejado. \square

Podemos agora apresentar a demonstração da fórmula de Reilly.

Proposição 3.2.2. *Se $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ é uma hipersuperfície orientada então vale*

$$\operatorname{div}_g G e_{n+1}^\top = 2S_2 \langle e_{n+1}, N \rangle. \quad (3.18)$$

Demonstração. Como e_{n+1} é Killing, para quaisquer campos tangentes $Y, Z \in TM$, vale

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overline{D}_{GY} e_{n+1}, Z \rangle + \langle \overline{D}_Z e_{n+1}, GY \rangle \\ &= \langle \overline{D}_{GY} e_{n+1}^\top, Z \rangle + \langle e_{n+1}, N \rangle \langle \overline{D}_{GY} N, Z \rangle \\ &\quad + \langle \overline{D}_Z e_{n+1}^\top, GY \rangle + \langle e_{n+1}, N \rangle \langle \overline{D}_Z N, GY \rangle, \end{aligned}$$

e lembrando que $B = -\overline{D}N$ é auto-adjunto, isto pode ser reescrito como

$$\langle \overline{D}_{GY} e_{n+1}^\top, Z \rangle + \langle \overline{D}_Z e_{n+1}^\top, GY \rangle = 2 \langle e_{n+1}, N \rangle \langle B(GY), Z \rangle.$$

Seja agora $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortornormal como no Lema 3.17, que adicionalmente diagonaliza B em $p \in M$. É claro então que este referencial também diagonaliza G em p (digamos, $G\tilde{e}_i = \mu_i \tilde{e}_i$). Logo, para cada i ,

$$\langle \overline{D}_{G\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, \tilde{e}_i \rangle + \langle \overline{D}_{\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, G\tilde{e}_i \rangle = 2 \langle e_{n+1}, N \rangle \langle AG\tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle.$$

Ademais,

$$\langle \overline{D}_{\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, G\tilde{e}_i \rangle = \mu_i \langle \overline{D}_{\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, \tilde{e}_i \rangle = \langle \overline{D}_{\mu_i \tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, \tilde{e}_i \rangle = \langle \overline{D}_{G\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, \tilde{e}_i \rangle,$$

o que leva a

$$\langle \overline{D}_{\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, G\tilde{e}_i \rangle = \langle e_{n+1}, N \rangle \langle BG\tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle. \quad (3.19)$$

Como $\operatorname{tr}_g BG = 2S_2$, temos

$$\langle e_{n+1}, N \rangle \sum_i \langle BG\tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle = 2S_2 \langle e_{n+1}, N \rangle.$$

Por outro lado, do Lema 3.17 obtém-se

$$\sum_i \langle \overline{D}_{\tilde{e}_i} e_{n+1}^\top, G\tilde{e}_i \rangle = \operatorname{div}_g G e_{n+1}^\top,$$

e (3.18) resulta então de (3.19). \square

3.3 A massa de hipersuperfícies assintoticamente planas na presença de um horizonte

Nesta seção apresentamos o ingrediente fundamental na demonstração das desigualdades de Penrose para buracos negros carregados apresentadas no Capítulo 4, a saber, uma fórmula integral para a massa de hipersuperfícies assintoticamente planas na presença de um horizonte. Mais precisamente, consideremos uma hipersuperfície assintoticamente plana orientável $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ e escolhamos o vetor unitário normal N a M de tal modo que $N = \partial_t$ no infinito. Isto significa que, sobre o fim E_M de M , N é dado pela expressão em (3.9). Suporemos ainda que M contém uma fronteira interna compacta (não necessariamente conexa) e mergulhada, designada por Σ_0 . Mais ainda, suporemos que Σ_0 é a interseção de M com algum hiperplano horizontal $\mathbb{R}_{x_{n+1}} = \mathbb{R}^n \times \{x_{n+1}\}$, que denotaremos simplesmente por \mathcal{R} , e que a interseção de M com \mathcal{R} ao longo de Σ_0 é ortogonal. Note que isso implica em particular que Σ_0 é totalmente geodésica como uma hipersuperfície de M , de modo que se pensarmos em (M, g) como o dado Riemanniano de um CDI para as equações de Einstein-Mawell então Σ_0 é de fato um horizonte. Nestas condições, a fórmula de Reilly (3.18) pode ser usada como ponto de partida para a obtenção da prometida fórmula integral para a massa de (M, g) , que é descrita no teorema abaixo.

Teorema 3.3.1. *Seja $(M, g) \looparrowright (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ uma hipersuperfície assintoticamente plana munida de um horizonte Σ_0 como acima. Então a massa de (M, g) é dada por*

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} = c_n \int_M R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM + c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0, \quad (3.20)$$

onde H é a curvatura média do mergulho $\Sigma_0 \subset \mathcal{R}$.

Demonstração. Lembremos da Definição 3.1.1 que E_M , o fim de M , escreve-se como o gráfico associado a uma função $f : \mathbb{R}^n \setminus K' \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que as fórmulas para seus invariantes geométricos apresentados na Seção 3.1, incluindo aí a Proposição 3.1.2, são válidas. Fixemos então uma esfera \mathbb{S}_r^{n-1} de raio r contida em $\mathbb{R}^n \setminus K'$ e seja $\mathcal{S}_r = \Psi_f^{-1}(\mathbb{S}_r^{n-1})$ a esfera coordenada correspondente. Se aplicarmos a fórmula de Reilly (3.18) ao domínio $M_r \subset M$ cuja fronteira é $\Sigma_0 \cup \mathcal{S}_r$, teremos então pela fórmula da divergência que

$$\int_{M_r} R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM = \int_{\Sigma_0} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle d\Sigma_0 + \int_{\mathcal{S}_r} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle d\mathcal{S}_r, \quad (3.21)$$

onde ν é o vetor co-normal unitário exterior à fronteira de M_r . Vemos então que (3.20) estará demonstrada se verificarmos a validade das duas identidades a seguir:

$$\int_{\Sigma_0} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle d\Sigma_0 = - \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \quad (3.22)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} c_n \int_{\mathcal{S}_r} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle d\mathcal{S}_r = \mathfrak{m}_{(M,g)}. \quad (3.23)$$

Começemos demonstrando (3.23). Usando (3.11) temos

$$\begin{aligned} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle &= \sum_{im} g_{im} (Ge_{n+1}^\top)^i \nu^m \\ &= \sum_{im} \delta_{im} \nu^m (Ge_{n+1}^\top)^i + \sum_{im} f_i f_m \nu^m (Ge_{n+1}^\top)^i \\ &= \sum_i \nu_i (Ge_{n+1}^\top)^i + \sum_{im} f_i f_m \nu^m (Ge_{n+1}^\top)^i. \end{aligned}$$

No entanto, por (3.1) e pela Proposição 3.1.2, vale que

$$\sum_{im} f_i f_m \nu^m (Ge_{n+1}^\top)^i = O(r^{-2\tau-1}),$$

e como $d\mathcal{S}_r = O(r^{n-1})$, resulta que este termo se anula após integração sobre \mathcal{S} quando $r \rightarrow +\infty$, pois a integral correspondente é $O(r^{-2\tau+n-2})$ e, por hipótese, $-2\tau + n - 2 < 0$. Assim, por (3.13),

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{S}_r} \langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle d\mathcal{S}_r &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{S}_r} \left(\sum_i \nu_i (Ge_{n+1}^\top)^i \right) d\mathcal{S}_r \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{S}_r} \sum_{ij} \left(\frac{\nu^i}{W^3} (f_{jj} f_i - f_{ij} f_j) \right) d\mathcal{S}_r \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{S}_r} \sum_{ij} \left(\frac{\nu^i}{W^3} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \right) d\mathcal{S}_r, \end{aligned}$$

onde no último passo usamos (3.11). Como $W \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow +\infty$, vemos então que o último limite acima é precisamente $c_n^{-1} \mathfrak{m}_{(M,g)}$, o que demonstra (3.23).

Demonstremos agora (3.22). Começemos observando que, pela hipótese segundo a qual a interseção de M com \mathcal{R} ao longo de Σ_0 é ortogonal, temos que,

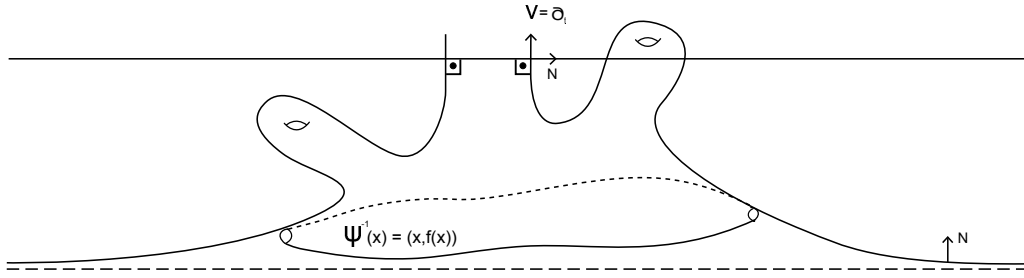


Figura 3.1:

ao longo de Σ , $e_{n+1} = e_{n+1}^\top = \pm\nu$, onde ν é o vetor normal a \mathcal{R} . Suporemos que $X = \nu$, como na Figura 3.1, visto que o outro caso pode ser tratado similarmente.

Assim,

$$\langle Ge_{n+1}^\top, \nu \rangle = S_1 - \langle A\nu, \nu \rangle. \quad (3.24)$$

Por outro lado, se X é tangente a Σ_0 , temos

$$\langle AX, \nu \rangle = -\langle \bar{D}_X N, \nu \rangle = \langle N, \bar{D}_X \nu \rangle = 0,$$

onde no segundo passo usamos que, ao longo de Σ_0 , $\langle N, \nu \rangle = 0$ e no último utilizamos que ν coincide com o vetor normal unitário de \mathcal{R} , que é totalmente geodésico. Mas isto significa que ν define uma direção principal em M com $\langle A\nu, \nu \rangle$ sendo a curvatura principal correspondente. Levando isto a (3.24) resulta então que $S_1 = -H$, o que completa a demonstração de (3.22) e, portanto, do Teorema 3.3.1. \square

A demonstração da fórmula da massa (3.20) baseia-se num resultado muito mais geral exibido em [dLG]. Lembramos ainda que, para o caso de gráficos, esta fórmula apareceu inicialmente em [L], tendo sido aí verificada por outros métodos. Em todo caso, apresentamos a seguir, a título de motivação, uma consequência imediata de (3.20), que aparece em [L], a saber, o Teorema da Massa Positiva para gráficos assintoticamente planos.

Teorema 3.3.2. *Seja $(M, g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um hipersuperfície assintoticamente plana que é um gráfico, ou seja,*

$$M = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^n\},$$

para alguma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que $R_g \geq 0$. Então, $\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq 0$.

Demonstração. Note que, neste caso, $\Sigma_0 = \emptyset$, de modo que (3.20) transforma-se em

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} = c_n \int_M R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM.$$

Como M é um gráfico, decorre que $\langle e_{n+1}, N \rangle > 0$, donde o resultado. \square

É importante salientar que este resultado deorre da famosa demonstração do Teorema da Massa Positiva para variedades spin [LP], visto que qualquer gráfico cumpre esta propriedade topológica. No nosso contexto, a sua relevância deriva de dois fatores, a saber, o caráter elementar da demonstração e a possibilidade de generalizar o argumento para outras situações. De fato, um dos resultados principais deste trabalho (o Teorema 4.2.2 abaixo) precisamente estabelece uma versão deste teorema para buracos negros carregados.

3.4 O fluxo pela curvatura inversa: existência e comportamento assintótico

Em conformidade com a terminologia introduzida na Seção 3.1, lembremos que se $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície orientada, ou seja, M está munida de um campo normal unitário ξ , então o *operador de Weingarten* de Σ com respeito a ξ é dado por

$$AX = -D_X \xi, \quad X \in T\Sigma, \quad (3.25)$$

onde D é a derivada covariante de \mathbb{R}^n . Assim, se $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ são os autovalores de A com respeito à métrica induzida, então definimos a *curvatura média* de Σ por

$$H = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}. \quad (3.26)$$

Note que, neste capítulo, estaremos usando a variação de índices $\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, n-1$. Mais ainda, a nossa convenção para a definição do operador de Weingarten é tal que as curvaturas principais de uma esfera são positivas se o vetor normal unitário aponta para dentro da região delimitada pela esfera. Finalmente, observemos que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, vale

$$|A|^2 \geq \frac{H^2}{n-1}, \quad (3.27)$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Σ é umbílica no ponto em questão.

Seja agora Σ_t , $t \in [0, \epsilon)$, uma família a um parâmetro de hipersuperfícies, que suporemos compactas e mergulhadas. Diremos que Σ_t é uma *solução do fluxo pela curvatura inversa* se as parametrizações $X = X(t, \cdot)$ de Σ_t satisfazem a equação de evolução

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\xi}{H}, \quad (3.28)$$

onde ξ denota o vetor normal unitário a Σ_t que aponta para seu interior.

Este é um exemplo típico de um fluxo geométrico para hipersuperfícies em \mathbb{R}^n . Tais fluxos, eventualmente definidos em variedades Riemannianas mais gerais, tem sido intensamente estudados nas últimas duas décadas, com ênfase na determinação do comportamento assintótico de soluções. Especificamente, o fluxo pela curvatura média inversa tem sido utilizado para estabelecer vários resultados notáveis em Análise Geométrica, incluindo aí a desigualdade de Penrose para dados iniciais tempo-simétricos em dimensão 3 [HI] e o cálculo do invariante de Yamabe de \mathbb{RP}^3 [BN]. Discutiremos aqui uma outra aplicação notável deste fluxo, a saber, a demonstração de uma desigualdade isoperimétrica do tipo Alexandrov-Fenchel para uma certa classe de hipersuperfícies mergulhadas em \mathbb{R}^n . Este resultado (Teorema 3.5.2) desempenha um papel fundamental no estabelecimento de desigualdades do tipo Penrose para dados iniciais tempo-simétricos que podem ser isometricamente mergulhados como gráficos em \mathbb{R}^n ; veja o Teorema 3.5.5 e o Capítulo 4 abaixo. Para tanto, precisamos isolar a classe de hipersuperfícies iniciais Σ_0 para as quais a equação de evolução (3.28) tem um comportamento assintótico bem determinado.

Definição 3.4.1. *Diremos que uma hipersuperfície compacta mergulhada $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é estritamente convexa na média se sua curvatura média é estritamente positiva.*

Definição 3.4.2. *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície compacta e mergulhada. Diremos que Σ é estrelada se o domínio V delimitado por Σ for estrelado no sentido usual, ou seja, existe $p \in V$ com a seguinte propriedade: qualquer $x \in \bar{V}$ pode ser ligado a p por um segmento de reta inteiramente contido em \bar{V} .*

Observação 3.4.3. Se Σ é estrelada então é conveniente escolher coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^n de tal modo que p corresponde à origem. Isto é o que sempre faremos a seguir.

O resultado a seguir, demonstrado independentemente por Gerhardt [Ge] e Urbas [Ur], determina o comportamento de soluções do fluxo pela curvatura média inversa para hipersuperfícies iniciais que são estreladas e estritamente convexas na média.

Teorema 3.4.4. *Seja $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície estrelada e estritamente convexa na média. Então existe uma única solução $X(t, \cdot)$ do fluxo pela curvatura média inversa (3.28) que tem Σ_0 como hipersuperfície inicial e está definida para todo $t > 0$. Mais ainda, para cada $t > 0$, a hipersuperfície correspondente Σ_t permanece estrelada e estritamente convexa na média. Além disso, o comportamento assintótico da solução é esférico no sentido que se definirmos*

$$\tilde{X}(t, \cdot) = e^{-(n-1)t} X(t, \cdot), \quad (3.29)$$

então, quando $t \rightarrow \infty$, $\tilde{X}(t, \cdot)$ converge, na topologia C^∞ , para uma esfera redonda centrada na origem.

Em palavras, o teorema acima afirma que, para qualquer hipersuperfície inicial Σ_0 que é estrelada e estritamente convexa na média, o fluxo pela curvatura média expande esta hipersuperfície ao longo do tempo, através de uma família $\{\Sigma_t\}_{t>0}$ de hipersuperfícies que permanecem estreladas e estritamente convexas na média. Mais ainda, quando $t \rightarrow +\infty$, estas hipersuperfícies tornam-se cada vez mais esféricas no sentido que, após experimentar a normalização definida por (3.29), elas de fato convergem para uma esfera redonda.

Observação 3.4.5. Resulta da demonstração do Teorema 3.4.4 que a família de hipersuperfícies $\{\Sigma_t\}_{t>0}$ de fato constitui uma *folheação* do exterior Ω de Σ . De posse desta informação, é imediato verificar que se definirmos $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\phi(x) = t$ se $x \in \Sigma_t$ então vale

$$|D\phi| = H, \quad (3.30)$$

onde D denota a derivada usual em \mathbb{R}^n e H representa a curvatura média das hipersuperfícies da folheação.

3.5 A desigualdade de Alexandrov-Fenchel

Nesta seção utilizaremos o Teorema 3.4.4 para demonstrar uma desigualdade isoperimétrica do tipo Alexandrov-Fenchel em \mathbb{R}^n . A demonstração aqui apresentada baseia-se num artigo recente de Guan e Li [GL], onde argumentos semelhantes são usados para verificar a validade das chamadas *desigualdades de Alexandrov-Fenchel* para uma ampla classe de hipersuperfícies.

Definição 3.5.1. *Diremos que uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é convexa na média se sua curvatura média é não-negativa.*

Teorema 3.5.2. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície estrelada e convexa na média. Então a seguinte desigualdade vale:*

$$2c_n \int_{\Sigma} H d\Sigma \geq \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (3.31)$$

onde $|\Sigma|$ é a área de Σ , $\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ e

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}.$$

Mais ainda, a igualdade vale em (3.31) se e somente se Σ é congruente a uma esfera redonda.

Para a demonstração, observemos inicialmente que, por um processo de aproximação explicado em [GL], podemos supor que Σ é *estritamente convexa na média*, ou seja, $H > 0$. O argumento consiste então em fazer $\Sigma = \Sigma_0$, a hipersuperfície inicial da solução do fluxo pela curvatura média inversa cuja existência é garantida pelo Teorema 3.4.4, e então investigar o comportamento do *quociente isoperimétrico*

$$t \in [0, +\infty) \mapsto \mathcal{I}(\Sigma_t) = \frac{\int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t}{|\Sigma_t|^{\frac{n-2}{n-1}}}.$$

ao longo desta solução. Note que \mathcal{I} é invariante por homotetias de \mathbb{R}^n no sentido que $\mathcal{I}(\Sigma) = \mathcal{I}(\lambda\Sigma)$, onde $\lambda\Sigma = \{\lambda x; x \in \Sigma\}$, $\lambda > 0$.

Proposição 3.5.3. *Se $\{\Sigma_t\}_{t>0}$ é uma solução do fluxo pela curvatura média inversa como no Teorema 3.4.4 então o elemento de área e a curvatura média das hipersuperfícies variam ao longo do tempo de acordo com*

$$\frac{\partial}{\partial t} d\Sigma_t = d\Sigma_t \quad (3.32)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta H^{-1} - \frac{|A|^2}{H}, \quad (3.33)$$

onde Δ é o Laplaciano de Σ_t . Como consequência,

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t| = |\Sigma_t| \quad (3.34)$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t \leq \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t, \quad (3.35)$$

com a igualdade acontecendo em (3.35) para algum t se e somente se Σ_t é congruente a uma esfera.

Demonstração. As identidades (3.32) e (3.33) são bastante conhecidas; veja [GL] para uma dedução. É claro ainda que (3.34) decorre imediatamente de (3.32). Por outro lado, resulta de (3.32) e (3.33) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t = \int_{\Sigma_t} \left(H - \frac{|A|^2}{H} \right) d\Sigma_t,$$

de forma que (3.35) decorre então de (3.27). \square

A proposição a seguir mostra que o quociente isoperimétrico \mathcal{I} é uma quantidade monótona ao longo de soluções do fluxo pela curvatura média inversa.

Proposição 3.5.4. *Ao longo de uma solução $\{\Sigma_t\}_{t>0}$ do fluxo pela curvatura média inversa como acima, temos*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}(\Sigma_t) \leq 0, \quad (3.36)$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Σ_t é uma esfera redonda.

Demonstração. Um cálculo direto usando (3.34) mostra que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}(\Sigma_t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n-2}{n-1}} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t - \frac{n-2}{n-1} \int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t \right),$$

de modo que a proposição decorre de (3.35). \square

De posse da Proposição 3.5.4, a demonstração do Teorema 3.5.2 é imediata. Com efeito, conforme já observamos, podemos supor sem perda de generalidade que Σ é estritamente convexa na média. Fazendo então $\Sigma = \Sigma_0$, a hipersuperfície inicial de uma solução do fluxo pela curvatura média inversa como no Teorema 3.4.4, decorre então de (3.36) que

$$\mathcal{I}(\Sigma) \geq \mathcal{I}(\Sigma_t),$$

para qualquer $t > 0$. Fazendo $t \rightarrow +\infty$ e combinando a invariância de \mathcal{I} por homotetias com o comportamento assintótico das soluções descrito no Teorema 3.4.4, resulta então que

$$\mathcal{I}(\Sigma) \geq \mathcal{I}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad (3.37)$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Σ é congruente a uma esfera redonda. Como

$$\mathcal{I}(\mathbb{S}^{n-1}) = (n-1)\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}},$$

vê-se então que (3.37) é equivalente a (3.31). Isto completa a demonstração do Teorema 3.5.2.

Novamente à guisa de motivação, apresentamos agora uma notável aplicação, descoberta por Lam [L] da fórmula da massa na presença de horizontes (3.20) e da desigualdade de Alexandrov-Fenchel 3.31, a saber, a desigualdade de Penrose para gráficos assintoticamente planos em qualquer dimensão $n \geq 3$.

Teorema 3.5.5. *Seja $(M, g) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ uma hipersuperfície assintoticamente plana munida de um horizonte Σ_0 como no Teorema 3.3.1. Suponhamos ainda que M é um gráfico, $R_g \geq 0$ e $\Sigma_0 \subset \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ é estrelada e convexa na média. Então a desigualdade de Penrose vale para (M, g) , ou seja,*

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (3.38)$$

Demonstração. Como $R_g \geq 0$ e M é um gráfico (ou seja, $\langle e_{n+1}, N \rangle > 0$), decorre de (3.20) que

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0,$$

de forma que (3.38) é consequência imediata de (3.31). □

Deve-se observar que é possível caracterizar a igualdade em (3.38). De fato, de acordo com [HW], isto acontece se e somente se (M, g) é congruente à realização gráfica da solução de Schwarzschild, descrita na Observação 2.1.3. Convém ainda salientar que a classe de dados iniciais (do tipo vácuo) que admite um mergulho isométrico em \mathbb{R}^{n+1} , conforme descrito no Teorema 3.5.5, é a única conhecida para a qual a desigualdade de Penrose (3.38) encontra-se efetivamente demonstrada em *qualquer* dimensão $n \geq 3$. Do nosso ponto de vista, a relevância deste resultado deve-se ao fato de que, nos Teoremas 4.1.1 e 4.2.1 abaixo, apresentamos extensões deste resultado para buracos negros carregados.

Capítulo 4

Desigualdades de Penrose e um Teorema da Massa Positiva para buracos negros carregados

Neste capítulo apresentaremos os resultados principais deste trabalho, a saber, os Teoremas 4.1.1, 4.2.1 e 4.2.2 abaixo. Os dois primeiros estabelecem desigualdades do tipo Penrose para dados iniciais tempo-simétricos para as equações de Einstein-Maxwell que admitem mergulhos isométricos apropriados como gráficos em \mathbb{R}^{n+1} , ao passo que o terceiro, que de fato é uma consequência imediata do segundo, fornece uma desigualdade da massa positiva para tais buracos negros.

4.1 Uma desigualdade de Penrose para buracos negros carregados

Consideremos um conjunto de dados iniciais (M, g, E) para as equações de Einstein-Maxwell, munido de um horizonte Σ_0 , como na Conjectura 2.4.1. Como pretendemos utilizar as técnicas introduzidas no Capítulo 3, suporemos que (M, g) pode ser isometricamente mergulhado como uma hipersuperfície assintoticamente plana em \mathbb{R}^{n+1} como na Definição 3.1.1. Além disso, admitamos que, por este mergulho, Σ_0 é a interseção de M com algum plano horizontal \mathcal{R} e que a interseção de M com \mathcal{R} ao longo de Σ_0 é ortogonal; veja Figura ... Estamos, assim, no contexto do Teorema 3.3.1, de modo que a fórmula da massa (3.20) é válida. Finalmente, suponhamos que M é de fato um gráfico, de forma que $\langle e_{n+1}, N \rangle > 0$.

Consideremos a *função altura* $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_{n-1}$. Pelo Teorema de Sard, para quase todo $s \in I$, onde $I = h(M)$ é um intervalo, $\mathcal{K}_s = h^{-1}(s) \subset M$ é uma hipersuperfície, que suporemos sempre ser compacta. Nestas condições, definamos então a quantidade

$$\Theta(M, g) = \frac{(n-2)\omega_{n-1}}{2} \int_I \frac{1}{\int_{\mathcal{K}_s} \langle e_{n+1}, N \rangle^{-1} |e_{n+1}^T| d\mathcal{K}_s} ds. \quad (4.1)$$

É fácil verificar que, nas condições acima, $0 < \Theta(M, g) < +\infty$. Note ainda que esta quantidade somente depende de (M, g) , pois na sua definição não há qualquer referência ao campo elétrico E .

O teorema a seguir apresenta uma desigualdade do tipo Penrose para buracos negros carregados com dados iniciais como descrito acima.

Teorema 4.1.1. *Seja (M, g, E) como acima e suponha que $\Sigma_0 \subset \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ é estrelada e convexa na média. Admitamos ainda que a CED (2.35) é satisfeita. Então,*

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + Q^2 \Theta(M, g), \quad (4.2)$$

onde Q é a carga de (M, g, E) .

Notemos que (4.2) não é inteiramente satisfatória, pois a quantidade $\Theta(M, g)$ depende do dado inicial como um todo e não apenas de seu horizonte, como esperado; compare com (2.43). No entanto, do ponto de vista qualitativo, a desigualdade (4.2) mostra que, nas condições acima, a carga elétrica efetivamente contribui para a massa do buraco negro. Em particular, vale sempre a desigualdade estrita

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} > \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (4.3)$$

ou seja, a massa é estritamente maior que aquela da solução de Schwarzschild com o horizonte de mesma área; veja Observação 2.1.2.

Para a demonstração do Teorema 4.1.1, observemos que a fórmula da massa (3.20) e a desigualdade de Alexandrov-Fenchel imediatamente implicam que

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + c_n \int_M R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM;$$

compare com a demonstração do Teorema 3.5.5. Assim, basta verificar que

$$c_n \int_M R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM \geq Q^2 \Theta(M, g). \quad (4.4)$$

Notemos inicialmente que, pela CED (2.35),

$$\int_M R_g \langle e_{n+1}, N \rangle dM \geq (n-1)(n-2) \int_M |E|_g^2 \langle e_{n+1}, N \rangle dM.$$

Neste estágio, podemos usar a fórmula da co-área [BN, I] para expressar a integral à direita em termos de integrais sobre as hipersuperfícies de nível $\{\mathcal{K}_s\}_{s \in I}$ de h . Desse modo, se μ é o vetor normal unitário a \mathcal{K}_s ,

$$\begin{aligned} \int_M |E|_g^2 \langle X, N \rangle dM &= \int_I \left(\int_{\mathcal{K}_s} |E|_g^2 \langle e_{n+1}, N \rangle |\nabla_g h|^{-1} d\mathcal{K}_s \right) ds \\ &\geq \int_I \left(\int_{\mathcal{K}_s} \langle E, \mu \rangle^2 \langle e_{n+1}, N \rangle |e_{n+1}^\top|^{-1} d\mathcal{K}_s \right) ds, \end{aligned}$$

onde no segundo passo usamos Cauchy-Schwarz e a identidade $\nabla_g h = e_{n+1}^\top$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy para integrais,

$$\int_{\mathcal{K}_s} \langle E, \mu \rangle d\mathcal{K}_s \leq \left(\int_{\mathcal{K}_s} \langle E, \mu \rangle^2 \langle e_{n+1}, N \rangle |e_{n+1}^\top|^{-1} d\mathcal{K}_s \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{K}_s} \langle e_{n+1}, N \rangle^{-1} |e_{n+1}^\top| d\mathcal{K}_s \right)^{1/2},$$

Observemos agora que, nas condições acima, cada \mathcal{K}_s é homóloga à esfera no infinito em M . Pela definição da carga Q em (3), decorre então que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_s} \langle E, \mu \rangle^2 \langle e_{n+1}, N \rangle |e_{n+1}^\top|^{-1} d\mathcal{K}_s &\geq \frac{\left(\int_{\mathcal{K}_s} \langle E, \mu \rangle d\mathcal{K}_s \right)^2}{\int_{\mathcal{K}_s} \langle e_{n+1}, N \rangle^{-1} |e_{n+1}^\top| d\mathcal{K}_s} \\ &= \frac{\omega_{n-1}^2 Q^2}{\int_{\mathcal{K}_s} \langle e_{n+1}, N \rangle^{-1} |e_{n+1}^\top| d\mathcal{K}_s}. \end{aligned}$$

Daí, (4.4) resulta imediatamente, o que conclui a demonstração do Teorema 4.1.1.

4.2 Um teorema da massa positiva para buracos negros carregados

Apresentamos nesta seção uma outra desigualdade do tipo Penrose para buracos negros carregados cujos dados iniciais admitem mergulhados apropriados como gráficos em \mathbb{R}^{n+1} (Teorema 4.2.1 abaixo). Como consequência imediata, obtemos um Teorema da Massa Positiva para tais buracos (Teorema 4.2.2 abaixo).

Consideremos então um dado inicial (M, g, E) , conforme descrito no primeiro parágrafo da seção anterior. Em particular, suporemos que a CDE (2.35) é satisfeita.

Teorema 4.2.1. *Nas condições acima, suponha que Σ_0 é estrelada e convexa na média. Então,*

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 + Q^2 \left(2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1} \right). \quad (4.5)$$

Em particular,

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_0|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + Q^2 \left(2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Note que (4.6) resulta de (4.5) e de (3.31).

Se comparada com (4.2), esta desigualdade é bem mais satisfatória no sentido que a quantidade que multiplica Q^2 somente depende do horizonte e não do dado inicial como um todo. Observamos ainda que (4.5) é o ponto de partida para estabelecer várias outras desigualdades do tipo Penrose; veja [dLG]. Para os propósitos deste trabalho, destacamos a seguinte consequência de (4.5), a saber, um Teorema da Massa Positiva para buracos negros carregados.

Teorema 4.2.2. *Nas condições do Teorema 4.2.1, vale*

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq |Q|. \quad (4.7)$$

Com efeito, isto decorre de (4.5) e da desigualdade elementar

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

com

$$a = \sqrt{2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0}, \quad b = |Q| \left(2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1/2}.$$

Para a demonstração do Teorema 4.2.1, notemos que se M é o gráfico associado a uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida no exterior Ω de Σ_0 então $\langle e_{n+1}, N \rangle = W^{-1}$, onde W é definido em (3.10). Mais ainda, o elemento volume de M é $dM = W d\Omega$, onde $d\Omega$ é o elemento de volume de \mathbb{R}^n restrito a Ω . Combinando isto com (2.35), obtemos então de (3.20) que

$$\mathfrak{m}_{(M,g)} \geq c_n \int_{\Sigma} H d\Sigma + (n-1)(n-2)c_n \int_{\Omega} |E|_g^2 d\Omega. \quad (4.8)$$

Relembremos da Observação 3.4.5 que Ω admite uma folheação pelas hipersuperfícies $\{\Sigma_t\}_{t>0}$ que constituem a solução do fluxo pela curvatura média inversa com hipersuperfície inicial Σ_0 . Recordemos ainda que, sem perda de generalidade, podemos supor que Σ_0 é estritamente convexa na média. Neste contexto, o lema a seguir desempenha um papel essencial na demonstração.

Lema 4.2.3. *Existe um campo de vetores \hat{E} em Ω satisfazendo $|E|_g \geq |\hat{E}|_{g_0}$ e $\operatorname{div}_{g_0} \hat{E} = 0$. Mais ainda, a carga \hat{Q} definida por*

$$\hat{Q} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_t} \langle \hat{E}, \nu_t \rangle d\Sigma_t$$

satisfaz $\hat{Q} = Q$. Aqui, ν_t é o vetor normal unitário a Σ_t .

Demonstração. No produto $M \times \mathbb{R}$ com métrica Lorentziana $\hat{g} = g - dt^2$, considere o gráfico vertical $\hat{\Omega}$ definido pela função f . A métrica induzida é

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} - u_i u_j = \delta_{ij} + u_i u_j - u_i u_j = \delta_{ij},$$

ou seja, $\hat{\Omega}$ é uma cópia isométrica de Ω . Podemos então aplicar [DK, Appendix A] para obter um campo de vetores \hat{E} em $\hat{\Omega}$ com as propriedades desejadas. Transplantando-o então para Ω , obtém-se o resultado. \square

Este lema é usado na proposição a seguir, que completa a demonstração do Teorema 4.2.1.

Proposição 4.2.4. *Nas condições do Teorema 4.2.1, vale*

$$(n-1)(n-2)c_n \int_{\Omega} |E|_g^2 d\Omega \geq \frac{Q^2}{2} \left(2c_n \int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1}. \quad (4.9)$$

Demonstração. Pela Lema 4.2.3, temos

$$(n-1)(n-2)c_n \int_{\Omega} |E|_g^2 d\Omega \geq \frac{n-2}{2\omega_{n-1}} \int_{\Omega} |\hat{E}|_{g_0}^2 d\Omega.$$

Sabemos da Observação 3.4.5 que a prescrição $\Sigma_t = \phi^{-1}(t)$ define uma função suave $\phi : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo $|D\phi| = H$, onde H denota a curvatura

média da folheação. Assim, podemos mais uma vez aplicar a fórmula da co-área e Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\hat{E}|_{g_0}^2 dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{|\hat{E}|^2}{H} d\Sigma_t \right) dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\langle \hat{E}, \nu_t \rangle^2}{H} d\Sigma_t \right) dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \left(\left(\int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t \right)^{-1} \left(\int_{\Sigma_t} \langle \hat{E}, \nu_t \rangle d\Sigma_t \right)^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Aqui, ν_t é o vetor unitário normal a Σ_t . Pelo Lema 4.2.3, $\int_{\Sigma_t} \langle \hat{E}, \nu_t \rangle_{g_0} d\Sigma_t = \omega_{n-1} Q$, de modo que

$$(n-1)(n-2)c_n \int_{\Omega} |E|_g^2 dx \geq \frac{1}{2}(n-2)\omega_{n-1}Q^2 \int_0^{+\infty} \left(\int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t \right)^{-1} dt. \quad (4.10)$$

Por outro lado, se integrarmos (3.35), decorre que

$$\left(\int_{\Sigma_t} H d\Sigma_t \right)^{-1} \geq \left(\int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1} e^{-\frac{n-2}{n-1}t}, \quad (4.11)$$

que substituído em (4.10) conduz a

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)c_n \int_{\Omega} |E|_g^2 d\Omega &\geq \frac{1}{2}(n-2)\omega_{n-1}Q^2 \left(\int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{n-2}{n-1}t} dt \\ &= \frac{Q^2}{4c_n} \left(\int_{\Sigma_0} H d\Sigma_0 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração de (4.5). □

Referências Bibliográficas

- [B] Bray, H., Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geom.* 59 (2001), no. 2, 177-267.
- [BN] Bray, H. L.; Neves, André Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than \mathbb{RP}^3 , *Ann. of Math. (2)* 159 (2004), no. 1, 407-424.
- [CB] Choquet-Bruhat, Y., *General relativity and the Einstein equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [CBCL] Choquet-Bruhat, Y., Chrusciel, P. T., Loizelet, J., Global solutions of the Einstein-Maxwell equations in higher dimensions, *Class. Quant. Grav.* 23 (2006) 7383-7394.
- [dLG] de Lima, L. L., Girão, F., The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces, *arXiv:1108.5474*, to appear in Transactions of the AMS.
- [DK] Disconzi, M. M., Khuri, M. A., On the Penrose inequality for charged black holes. *Classical Quantum Gravity* 29 (2012), no. 24, 245019, 18 pp.
- [Ge] Gerhardt, C., Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. *J. Differential Geom.* 32 (1990), no. 1, 299-314.
- [HE] Hawking, S. W.; Ellis, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1. Cambridge University Press, London-New York, 1973.
- [GHHP] Gibbons, G. W., Hawking, S. W., Horowitz, G. T., Perry, M. J., Positive mass theorems for black holes. *Comm. Math. Phys.* 88 (1983), no. 3.

- [GL] Guan, P.; Li, J. The quermassintegral inequalities for k -convex star-shaped domains. *Adv. Math.* 221 (2009), no. 5, 1725-1732.
- [HW] Huang, L.-H., Wu, D., The equality case of the Penrose inequality for asymptotically flat graphs, *arXiv:1205.2061*.
- [HI] Huisken, G., Ilmanen, T., The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.* 59 (2001), no. 3, 353-437.
- [J] Jang, P. S., Note on cosmic censorship, *Phys.Rev.* D20 (1979), 834-838.
- [Kr] Kriele, M., *Spacetime. Foundations of general relativity and differential geometry*. Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, 59. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [L] Lam, M.-K. G., The Graphs Cases of the Riemannian Positive Mass and Penrose Inequalities in All Dimensions, *arXiv:1010.4256*.
- [LP] Lee, J. M., Parker, T. H. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 17 (1987), no. 1, 37-91.
- [MV] Mirandola, H., Vitório, F., The positive mass Theorem and Penrose inequality for graphical manifolds, *arXiv:1304.3504*.
- [On] O'Neill, B., *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*. Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [Re] Reilly, R. C., Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *J. Differential Geometry* 8 (1973), 465-477.
- [Ri] Ringström, H., *The Cauchy problem in general relativity*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.
- [Ro] Rosenberg, H., Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sci. Math.* 117 (1993), no. 2, 211-239.
- [Ta] Tangherlini, F. R., Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem. *Nuovo Cimento* (10) 27 1963 636-65.

- [Ur] Urbas, J. I. E., On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. *Math. Z.* 205 (1990), no. 3, 355-372.
- [Wa] Wald, R. M., *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.
- [WY] Weinstein, G., Yamada, S., On a Penrose inequality with charge. *Comm. Math. Phys.* 257 (2005), no. 3, 703-723.