



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DOUTORADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL LOPES DO AMARAL

SINTONIA ROBUSTA DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO

FORTALEZA

2025

DANIEL LOPES DO AMARAL

SINTONIA ROBUSTA DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A513s Amaral, Daniel Lopes do.

Sintonia robusta do preditor Smith filtrado simplificado / Daniel Lopes do Amaral. – 2025.
100 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

Coorientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

1. Preditor Smith filtrado simplificado. 2. compensador de tempo morto. 3. processos
multivariáveis com atraso. 4. controle multivariável. 5. filtro de robustez.. I. Título.

CDD 621.3

DANIEL LOPES DO AMARAL

SINTONIA ROBUSTA DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da
Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial
à obtenção do título de doutor em Engenharia Elétrica.
Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em: _____ / _____ / _____ .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bismark Claure Torrico (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ph.D. Giórgio Valmórbida
Université Paris-Saclay (CentraleSupélec)

Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos
Universidade Federal da Bahia (UFBA)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
(UFRN)

À Maria Amélia Lopes do Amaral (*in memoriam*)
que me ensinou a criticar de forma verdadeira.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me conceder a felicidade de viver a vida sempre com boas esperanças e me acompanhar nos desafios inquietantes.

Aos meus pais que foram responsáveis por me transmitir o significado do amor desinteressado.

À minha esposa por me apoiar e suportar ao longo dos empreendimentos mais importantes de nossa caminhada.

Aos meus irmãos que me provocam diariamente o exercício da fraternidade verdadeira e companheirismo.

Aos amigos que cultivei pelo prazer em experimentar a diversidade nas formas de ser, pensar, expressar e agir.

Aos meus orientadores Professor Dr. Bismark Claire Torrico, Professor Dr. Fabrício Gonzales e Professor PhD. Giórgio Valmórbida pela confiança, compreensão e paciência ao longo da jornada para realização da pesquisa.

Aos membros da banca examinadora que expuseram suas críticas a respeito da pesquisa realizada visando a materialização de um projeto acadêmico, profissional e pessoal.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica que contribuíram para minha formação acadêmica e humana durante as disciplinas ministradas.

Aos funcionários que me apoiaram na caminhada durante o curso, compreendendo minha forma de ser e fazer.

Às instituições oficiais de apoio financeiro à pesquisa, tendo em vista que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, mediante concessão das bolsas de estudo 88887.597333/2021-00 e 88881.846095/2023-01.

"Resplandecente é a sabedoria, e sua beleza é inalterável: os que a amam, descobrem-na facilmente. Os que a procuram, encontram-na. Ela antecipa-se aos que a desejam. Quem, para possuí-la, levanta-se de madrugada não terá trabalho, porque a encontrará sentada à sua porta. Fazê-la objeto de seus pensamentos é a prudência perfeita, e quem por ela vigia, em breve não terá mais cuidado. Ela mesma vai à procura dos que são dignos dela; ela lhes aparece nos caminhos cheia de benevolência, e vai ao encontro deles em todos os seus pensamentos."

(Sabedoria, 6, 12-16.)

RESUMO

Neste documento é apresentada uma metodologia para síntese robusta do preditor Smith filtrado simplificado. A metodologia proposta é aplicável aos processos com uma única entrada e uma única saída (SISO) com atraso, assim como aos processos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) com múltiplos atrasos. A estratégia descrita preserva as propriedades do preditor Smith filtrado para processos estáveis, instáveis e integradores, simplificando o ajuste do controlador ao propor o desacoplamento por realimentação de estado para seguimento de referência, e, uma abordagem alternativa para a parametrização do filtro de robustez. A técnica de sintonia apresentada considera o modelo de perturbações na síntese do controlador no intuito de lidar com o compromisso entre o desempenho do sistema de controle em malha fechada e a condição de estabilidade robusta na presença de incertezas no modelo do processo. Os resultados das simulações ilustram a aplicação da metodologia e suas vantagens quando comparada com casos publicados recentemente na literatura. Adicionalmente, a aplicação da estratégia em um protótipo de uma Unidade Incubadora Neonatal amplia o potencial de aplicação da metodologia unificada de sintonia do preditor Smith filtrado simplificado aos processos industriais.

Palavras-chave: Preditor Smith filtrado simplificado; compensador de tempo morto; processos multivariáveis com atraso; controle multivariável; sistemas com múltiplos atrasos; filtro de robustez.

ABSTRACT

This document presents a robust synthesis methodology for the simplified filtered Smith predictor. The proposed unified tuning methodology for the simplified filtered Smith predictor is suitable for single-input single-output (SISO) processes with delay and multi-input multi-output (MIMO) processes with multiple delays. The proposed strategy preserves the filtered Smith predictor properties for stable, unstable, and integrative processes, simplifying the controller tuning by means of the state feedback decoupling for reference tracking and proposing an alternative method to the robustness filter parametrization. The procedure includes the disturbance model in the controller design to deal with the trade-off between the disturbance attenuation performance and the robust stability condition in the presence of the process model uncertainties. The simulation results illustrate the performance improvements when applying the proposed tuning compared to recently published cases. Furthermore, an experiment on a Neonatal Intensive Care Unity prototype effectively presents the potential of the unified tuning methodology when applied to an industrial process with practical features.

Keywords: Simplified filtered Smith predictor; dead-time compensator; multivariable processes with delay; multivariable control; multiple delays processes; robustness filter.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – SFSP caso SISO: estrutura analítica.	22
Figura 2 – SFSP caso SISO: estrutura de implementação.	23
Figura 3 – SFSP caso MIMO: estrutura analítica.	30
Figura 4 – SFSP caso MIMO: estrutura de implementação.	31
Figura 5 – SFSP caso SISO: representação M - Δ estrutura analítica.	46
Figura 6 – SFSP caso MIMO: representação M - Δ estrutura analítica.	47
Figura 7 – Representação M - Δ generalizada.	47
Figura 8 – Caso SISO: condição para estabilidade robusta.	57
Figura 9 – Caso SISO: resposta em malha fechada para o modelo do processo nominal.	58
Figura 10 – Caso SISO: resposta em malha fechada para o modelo do processo perturbado.	59
Figura 11 – Caso SISO: resposta em frequência para função de transferência $ \overline{H}_{yqu}(e^{j\Omega}) $	62
Figura 12 – Caso MIMO integrador: esquemático do processo.	64
Figura 13 – Caso MIMO integrador: condição para estabilidade robusta.	67
Figura 14 – Caso MIMO integrador: pressão de vapor $y_1(t)$ e fluxo de combustível para a câmara de combustão $u_1(t)$ - modelo do processo nominal.	68
Figura 15 – Caso MIMO integrador: concentração de oxigênio $y_2(t)$ e fluxo de ar na câmara de combustão $u_2(t)$ - modelo do processo nominal.	69
Figura 16 – Caso MIMO integrador: nível de água $y_3(t)$ e fluxo de entrada de água $u_3(t)$ - modelo do processo nominal.	69
Figura 17 – Caso MIMO integrador: pressão de vapor $y_1(t)$ e fluxo de combustível para a câmara de combustão $u_1(t)$ - modelo do processo perturbado.	70
Figura 18 – Caso MIMO integrador: concentração de oxigênio $y_2(t)$ e fluxo de ar na câmara de combustão $u_2(t)$ - modelo do processo perturbado.	71
Figura 19 – Caso MIMO integrador: nível de água $y_3(t)$ e fluxo de entrada de água $u_3(t)$ - modelo do processo perturbado.	71
Figura 20 – Caso MIMO instável: condição para estabilidade robusta.	76
Figura 21 – Caso MIMO instável: saída $y_1(t)$ e entrada $u_1(t)$ - modelo do processo nominal.	78
Figura 22 – Caso MIMO instável: saída $y_2(t)$ e entrada $u_2(t)$ - modelo do processo nominal.	78
Figura 23 – Caso MIMO instável: saída $y_1(t)$ e entrada $u_1(t)$ - modelo do processo perturbado.	79

Figura 24 – Caso MIMO instável: saída $y_2(t)$ e entrada $u_2(t)$ - modelo do processo perturbado.	80
Figura 25 – Caso Experimental: protótipo da Unidade Incubadora Neonatal.	82
Figura 26 – Caso Experimental: resposta em malha fechada para o protótipo da Unidade Incubadora Neonatal.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Caso SISO: parâmetros dos filtros e controladores.	56
Tabela 2 – Índice de desempenho IAE.	60
Tabela 3 – Índice de desempenho ITAE.	61
Tabela 4 – Caso MIMO integrador: parâmetros dos filtros e controladores.	67
Tabela 5 – Caso MIMO instável: parâmetros dos filtros e controladores.	76
Tabela 6 – Caso Experimental: parâmetros dos filtros e controladores.	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFSP	Decoupled Filtered Smith Predictor / Preditor Smith Filtrado Desacoplado
DR	Disturbance Rejection / Rejeição de Perturbação
DTC	Dead-time Compensator / Compensador de Tempo Morto
FIR	Finite Impulse Response / Resposta Finita ao Impulso
FSP	Filtered Smith Predictor / Preditor Smith Filtrado
IAE	Integral of the Absolute Value of the Error / Integral do Erro Absoluto
ITAE	Integral of the Time-weighted Absolute Value of the Error / Integral do Erro Absoluto Ponderado
LMI	Linear Matrix Inequality / Desigualde Matricial Linear
LTI	Linear Time-invariant / Linear Invariante no Tempo
MIMO	Multiple Input Multiple Output / Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
NICU	Neonatal Intensive Care Unity / Unidade de Terapia Intensiva Neonatal
PID	Proportional-Integral-Derivative / Proporcional-Integral-Derivativo
RT	Reference Tracking / Seguimento de Referência
SFSP	Simplified Filtered Smith Predictor / Preditor Smith Filtrado Simplificado
SISO	Single Input Single Output / Única entrada e Única Saída
SP	Smith Predictor / Preditor Smith

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, D	Matrizes de representação em espaço de estados do modelo do processo
A_o, B_o, C_o	Matrizes de representação em espaço de estados do modelo rápido do processo para compensação de atrasos na saída
A_e, B_e, C_e	Matrizes de representação do modelo de perturbação
d	Atraso em tempo discreto
d_i	Atraso efetivo referente a i -ésima saída
$ \delta P(\cdot) $	Norma da incerteza multiplicativa do modelo processo
$\overline{\delta P}(\cdot)$	Limite superior da norma da incerteza multiplicativa do modelo do processo
H_{yq_u}	Função de transferência de malha fechada da perturbação na entrada para a saída
H_{yr}	Função de transferência de malha fechada da referência para a saída
I	Matriz identidade de dimensão apropriada
$I_r(\omega)$	Índice de robustez caso monovariável
$\bar{I}_r(\omega)$	Índice de robustez caso multivariável
K	Matriz de ganho de realimentação de estado
k_r	Matriz de ganhos do filtro de referência
$L(z)$	Matriz de atrasos efetivos
m	Número de entradas e saídas do processo
m_o	Ordem do modelo de perturbação
n	Ordem do modelo do processo
n_o	Ordem do modelo rápido para compensação de atrasos na saída
m_{vi}	Ordem do i -ésimo modelo de perturbação
$P(\cdot)$	Modelo do processo nominal
$P_r(\cdot)$	Modelo do processo perturbado
q	Operador de deslocamento em avanço
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$\bar{\sigma}(\cdot)$	Função maior valor singular

t	Tempo discreto múltiplo do tempo de amostragem
T_I	Matriz de funções de transferência de sensibilidade complementar
T_s	Tempo de amostragem
$V(z)$	Matriz de funções de transferência do filtro de robustez
ω	Frequência angular
W_s	Matriz de funções de transferência de ponderação da incerteza
z	Variável complexa usada no domínio discreto Z
Z	Transformada Z
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos números inteiros positivos
ZOH	Segurador de ordem zero.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos	19
1.3	Trabalhos relacionados	19
1.4	Produção científica	20
1.5	Organização do documento	20
2	PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA PROCESSOS SISO DE ALTA ORDEM COM ATRASO	21
2.1	Descrição do modelo do processo para síntese do controlador	21
2.2	Estrutura de controle e relações de malha fechada	22
2.3	Sintonia dos parâmetros K e k_r	24
2.4	Sintonia do filtro de robustez $V(z)$	24
2.5	Condição para estabilidade robusta	25
3	SÍNTESE UNIFICADA DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA PROCESSOS SISO E MIMO DE ALTA ORDEM COM ATRASO	27
3.1	Descrição do modelo do processo para síntese do controlador	27
3.2	Estrutura de controle proposta	30
3.3	Relações de malha fechada	32
3.4	Sintonia unificada do preditor Smith filtrado simplificado	32
3.4.1	<i>Sintonia dos parâmetros K e k_r</i>	<i>33</i>
3.4.2	<i>Sintonia do filtro de robustez $V(z)$</i>	<i>38</i>
3.5	Condição para estabilidade robusta	40
3.5.1	<i>Sintonia de β_{γ_i} considerando a condição para estabilidade robusta</i>	<i>41</i>
4	SINTONIA DO FILTRO DE ROBUSTEZ DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO DE ALTA ORDEM COM ATRASO VIA OTIMIZAÇÃO	44
4.1	Condição de estabilidade robusta aplicada ao Preditor Smith Filtrado Simplificado	45
4.1.1	<i>Caracterização do modelo de incerteza aplicado ao SFSP</i>	<i>45</i>

4.1.2	<i>Função de ponderação da incerteza e limitação da incerteza multiplicativa relativa</i>	48
4.1.3	<i>Condição de estabilidade robusta a partir da função de ponderação da incerteza</i>	48
4.1.4	<i>Estrutura do filtro de robustez e rejeição de perturbações</i>	49
4.1.5	<i>Parametrização do filtro de robustez por meio de otimização</i>	50
4.2	Índice de robustez e condição de estabilidade robusta alternativa	52
5	ESTUDOS DE CASO	54
5.1	Metodologia para análise comparativa	54
5.2	Caso SISO: processo estável com perturbações tipo degrau e senoidal . .	55
5.3	Caso MIMO integrador: caldeira da planta Abbott em Champaign . . .	62
5.4	Caso MIMO instável: processo com dinâmicas instáveis	73
5.5	Caso Experimental: protótipo da Unidade Incubadora Neonatal	81
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
6.1	Conclusões	88
6.2	Trabalhos futuros	89
	REFERÊNCIAS	91
7	APÊNDICE A. FORMA CANÔNICA OBSERVÁVEL	95
7.1	Caso SISO	95
7.2	Caso MIMO	95

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O tempo morto, fenômeno associado ao intervalo de tempo entre o instante em que um sinal é aplicado à entrada de um processo e o momento em que esse sinal começa a afetar a saída do processo, é observado em vários processos industriais e é comumente relacionado à transferência de energia, massa ou informação. Adicionalmente, o tempo morto aparente é associado à acumulação de atrasos dos sistemas ou às dinâmicas rápidas não consideradas, como, por exemplo, as respostas dinâmicas de sensores ou atuadores, o fluxo de material ou a latência na comunicação em sistemas digitais (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007; ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Portanto, o tempo morto é uma característica física de sistemas dinâmicos e também pode ser resultante das limitações ou simplificações da modelagem do processo.

Os desafios relacionados à sintonia de controladores tradicionais para sistemas com atrasos dominantes são relevantes tanto para sistemas com uma única entrada e única saída (SISO) com atrasos, quanto para processos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) com múltiplos atrasos. O principal desafio para sintonia dos controladores tradicionais é calcular a ação de controle com base no erro gerado pelo efeito atrasado das perturbações, considerando, adicionalmente, o efeito atrasado do sinal de controle (NORMEY-RICO *et al.*, 2022).

Notadamente, a presença de tempo morto no controle de sistemas SISO implica em redução da margem de fase da malha direta no domínio da frequência. A redução na margem de fase tem implicações significativas no desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997; CAMACHO; ALBA, 2013). A presença do tempo morto altera o desempenho do sistema em malha fechada e, em condições extremas, resulta em instabilidade do sistema de controle. Para processos MIMO com múltiplos atrasos, a complexidade da sintonia do controlador é ampliada devido ao maior número de variáveis relacionadas, aos efeitos de acoplamentos internos e aos múltiplos atraso nas relações entre entradas e saídas dos sistemas (SANTOS *et al.*, 2016).

Como alternativa aos desafios impostos à sintonia de controladores tradicionais aplicados aos sistemas com atrasos dominantes, a introdução de estratégias específicas para

lidar com o tempo morto por meio de preditores aplicados às estruturas de controle emergiu como técnica amplamente aplicada ao controle em malha fechada de processos SISO e MIMO com atraso (SMITH, 1957; ARTSTEIN, 1982). Desde a proposição do preditor Smith (SP), a estrutura denominada compensador de tempo morto (DTC), incluiu o preditor na malha de controle, reduzindo ou eliminando o efeito dos atrasos no processo aparente.

Tendo em vista as vantagens dos DTCs aplicados aos processos com atrasos dominantes, o SP original foi aprimorado por meio de alterações na estrutura, adoção de modelos alternativos e extensões visando adaptá-lo aos processos instáveis, integradores e de alta ordem, por exemplo. Os avanços promovidos a partir da versão original do preditor Smith incluíram na síntese do controlador as condições de robustez considerando as características das incertezas, os critérios de desempenho em relação à rejeição de perturbações e rastreamento de referência, e considerações acerca da estabilidade interna, como explicitado em (NORMEY-RICO; CAMACHO, 1999; NORMEY-RICO; CAMACHO, 2008; GARCÍA; ALBERTOS, 2008; ALBERTOS; GARCÍA, 2009; TORRICO *et al.*, 2013; LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015; SANZ *et al.*, 2016; SANZ *et al.*, 2018; LIU *et al.*, 2018; LIU *et al.*, 2019; TORRICO *et al.*, 2019; TORRICO *et al.*, 2021; WU; WANG, 2021).

Concomitante ao desenvolvimento das estruturas de DTCs aplicadas aos sistemas SISO, progressos significativos foram atingidos no desenvolvimento de DTCs aplicados aos sistemas MIMO no intuito de incluir suas características específicas desde a formulação apresentada em (ALEVISAKIS; SEBORG, 1973). Estruturas particulares foram documentadas em (OGUNNAIKE; RAY, 1979; CHEN *et al.*, 2011; GARRIDO *et al.*, 2011; GARRIDO *et al.*, 2014; GIRALDO *et al.*, 2016), adicionalmente, estruturas gerais foram propostas em (GARCÍA; ALBERTOS, 2010; ALBERTOS; GARCÍA, 2010; FLESCHE *et al.*, 2011; FLESCHE *et al.*, 2012; SANTOS *et al.*, 2014; SANTOS *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2021; PANDEY *et al.*, 2022), por exemplo.

De forma complementar ao desenvolvimento de estruturas DTCs aplicadas aos sistemas MIMO com múltiplos atrasos representados por matrizes de funções de transferência de baixa ordem, em (ALBERTOS; GARCÍA, 2016; CORREIA *et al.*, 2017; LIMA *et al.*, 2023) a representação em espaço de estados do modelo do processo possibilitou lidar com plantas MIMO

de alta ordem. As proposições considerando a modelagem em espaço de estados combinadas às propriedades dos DTCs, além de explorar as vantagens da representação do processo em espaço de estados, disponibilizou alternativas aos controladores primários do tipo proporcional-integral-derivativo (PID) aplicados aos processos multivariáveis. Nesse contexto, é válido ressaltar que a modelagem de sistemas de alta ordem está associada à interconexão de sistemas de baixa ordem, à descrição de modelos de sistemas complexos (LIU; BARABÁSI, 2016), e, adicionalmente, às características do modelo de perturbação associado ao projeto do sistema de controle.

Dentre os controladores baseados no preditor Smith para processos de alta ordem com atraso, destaca-se o preditor Smith filtrado (FSP) como um controlador aplicado aos processos SISO (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009) e MIMO (SANTOS *et al.*, 2014) de alta ordem estáveis, instáveis e integradores. Posteriormente, o preditor Smith filtrado simplificado (SFSP), caracterizado pela proposta simplificada de sintonia do FSP, foi formalizado pela primeira vez em (TORRICO *et al.*, 2013).

Na primeira proposta de simplificação da sintonia do FSP, o controlador primário e o filtro de referência foram sintonizados por ganhos escalares. Apesar da simplificação, a abordagem foi proposta apenas para processos SISO de primeira ordem com atraso. A proposição simplificada do FSP foi estendida para processos multivariáveis com múltiplos atrasos em (SANTOS *et al.*, 2016). No trabalho (TORRICO *et al.*, 2016) foi descrita uma proposição para compensador de tempo morto simplificado para processos representados em espaço de estados com múltiplos atrasos. Na proposta para sistemas de ordem elevada, a estrutura de controle apropriou-se de filtros de resposta finita ao impulso (FIR) para simplificação da sintonia, outrossim, a ordem do filtro resultante é proporcional à ordem do modelo do processo.

Em (TORRICO *et al.*, 2021), uma formulação utilizando a modelagem em espaço de estados do SFSP para processos de alta ordem com atrasos foi apresentada. Na mais recente versão do SFSP, o processo foi descrito por um modelo em espaço de estados e a sintonia do controlador primário foi realizada por meio de um vetor de ganhos para realimentação de estados do modelo. O trabalho (TORRICO *et al.*, 2021) apresentou o ajuste do vetor de realimentação de estados do modelo, o ajuste do filtro de referência como um ganho escalar e o ajuste do filtro de robustez especificamente para processos SISO de alta ordem com atraso. A nova abordagem

permitiu a redução de parâmetros, simplificando a estrutura e a sintonia do controlador para sistema de alta ordem em malha fechada.

1.2 Objetivos

Tendo em vista o atual contexto de desenvolvimento das estruturas de controle baseadas no Preditor Smith, as contribuições descritas nessa tese visam em contexto geral propor uma estrutura e uma regra de sintonia dos parâmetros do controlador utilizando o preditor Smith filtrado simplificado aplicado aos processos MIMO de alta ordem com múltiplos atrasos. O objetivo geral é desmembrado conforme os objetivos específicos descritos a seguir:

- estender a estrutura de preditor Smith filtrado simplificado, apresentada em (TORRICO *et al.*, 2021), para os processos MIMO de alta ordem com múltiplos atrasos;
- aplicar técnica de desacoplamento por realimentação de estados, proposta em (FALB; WOLOVICH, 1967; SANKARAN; SRINATH, 1972), para o seguimento de referência, utilizando a estrutura do SFSP estendida ao caso multivariável;
- propor regra de sintonia direta para o filtro de robustez baseada no modelo de perturbação como alternativa às técnicas de sintonia apresentadas em (LIMA *et al.*, 2023), (TORRICO *et al.*, 2021), (SANTOS *et al.*, 2016) e (FLESCH *et al.*, 2011), por exemplo;
- apresentar uma condição simplificada para analisar estabilidade robusta do sistema em malha fechada decorrente da aplicação da regra de sintonia proposta;
- formalizar um procedimento de sintonia desacoplada para os parâmetros do filtro de robustez.

1.3 Trabalhos relacionados

Para o desenvolvimento deste documento foi realizado um levantamento bibliográfico conforme os trabalhos citados na seção 1.1 Motivação. Dentre os trabalhos referenciados, ressaltam-se as proposições contidas em (SANTOS *et al.*, 2016) e (TORRICO *et al.*, 2021) para construção de uma proposta de sintonia unificada do SFSP para processos SISO de alta ordem com atraso e processos MIMO de alta ordem com múltiplos atrasos.

1.4 Produção científica

O texto desta tese utiliza como base teórica os desenvolvimentos formalizados no artigo científico (AMARAL *et al.*, 2023) intitulado: “A unified tuning rule of the simplified filtered Smith predictor for SISO and square MIMO high-order dead-time processes”, publicado em *Control Engineering Practice* conforme <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2023.105697>.

O artigo citado no parágrafo anterior apresenta uma proposta de sintonia unificada de controladores baseados no preditor Smith filtrado simplificado para processos SISO e MIMO de alta ordem com atraso. Os principais resultados formalizados na publicação foram utilizados como a base para os desenvolvimentos apresentados neste documento.

1.5 Organização do documento

O texto está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo é apresentada a introdução ao tema do trabalho destacando a motivação do estudo proposto, os objetivos gerais e específicos almejados, os trabalhos relacionados e a produção científica decorrente do estudo; no segundo capítulo é apresentada uma revisão acerca do preditor Smith filtrado simplificado aplicado aos processos SISO de alta ordem com atraso; no terceiro capítulo é apresentada a sintonia unificada do SFSP para processos SISO e MIMO de alta ordem com atraso, incluindo parametrização para rastreamento de referência e atenuação de perturbações, considerando a condição de estabilidade robusta; no quarto capítulo é apresentada uma metodologia para parametrização do filtro de robustez na estrutura SFSP para processos de alta ordem por meio de um processo de otimização; no quinto capítulo são apresentados os estudos de caso por meio de simulações e resultados experimentais decorrentes da aplicação da estrutura e método de sintonia propostos; no sexto capítulo são apresentadas as conclusões e propostas para avanço da pesquisa.

2 PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA PROCESSOS SISO DE ALTA ORDEM COM ATRASO

Neste capítulo é apresentada uma revisão acerca da estrutura de controle baseada no preditor Smith filtrado simplificado para processos SISO de alta ordem com atraso. A recapitulação é realizada a partir da formulação apresentada em (TORRICO *et al.*, 2021), visando suporte conceitual para a proposta de uma sintonia unificada aplicada tanto aos processos SISO com atraso, quanto aos processos MIMO com múltiplos atrasos. Portanto, neste capítulo, é apresentada a estrutura e a sintonia do preditor Smith filtrado simplificado aplicada aos processos SISO, relacionando o modelo do processo, a estrutura do controlador, as relações de malha fechada, a parametrização do ganho de realimentação de estados do modelo e do ganho do filtro de referência, a sintonia do filtro de robustez e a condição para estabilidade robusta utilizada na síntese do controlador. A revisão torna-se fundamental tendo como foco a extensão dos conceitos e ferramentas para os processos multivariáveis com múltiplos atrasos conforme descrito na sessão 1.2 Objetivos do capítulo introdutório.

2.1 Descrição do modelo do processo para síntese do controlador

Para síntese do controlador baseado no preditor Smith filtrado simplificado para sistemas SISO de alta ordem, considera-se o modelo linear invariante no tempo (LTI) do processo com atraso de ordem n no domínio do tempo discreto representado por

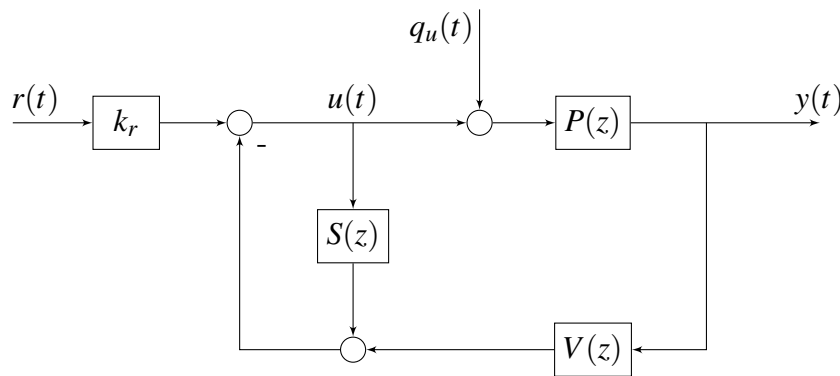
$$P(z) = z^{-d}C(zI - A)^{-1}B, \quad (2.1)$$

tal que d é o atraso de transporte, z é a variável complexa usada no domínio discreto Z , $(A_{n \times n}, B_{n \times 1}, C_{1 \times n})$ são as matrizes de representação em espaço de estados na forma canônica observável, conforme apresentado no Apêndice A, e $I_{n \times n}$ é uma matriz identidade com dimensão igual à ordem do processo. Considera-se nesta proposta que o par (A, B) é controlável e o par (A, C) é observável, isto é, a representação mínima do sistema em espaço de estados.

Destaca-se que a descrição do modelo por meio das matrizes (A, B, C) em espaço de estados adotada na abordagem SFSP para sistemas de alta ordem permite a representação compacta e formulação geral tendo em vista a representação matricial do modelo do processo.

Destaca-se a partir da lei de controle enunciada na Equação 2.2 e da representação por meio de diagrama de blocos na Figura 1, que a síntese do controlador baseado no SFSP requer a parametrização do ganho do filtro de referência, do vetor de realimentação de estados do modelo e do filtro de robustez. Adicionalmente, ressalta-se que devido à instabilidade interna da estrutura analítica apresentada na Figura 1 para os casos de plantas com dinâmicas integradoras ou instáveis, a estrutura de implementação conforme a Figura 2 deve ser utilizada para fins de aplicação aos sistemas de controle baseados no SFSP:

Figura 2 – SFSP caso SISO: estrutura de implementação.



Fonte: elaborada pelo autor.

tal que $S(z)$ é dado na forma mínima por:

$$S(z) = (K - z^{-d}V(z)C)(zI - A)^{-1}B. \quad (2.3)$$

Nessas condições, a estrutura de implementação representada na Figura 2 garante a estabilidade interna do controlador baseado no SFSP para plantas com dinâmicas estáveis, instáveis e integradoras. Por meio dos diagramas de blocos apresentados nas Figuras 1 e 2 são explicitadas as funções de transferência representadas conforme as Equações 2.4 e 2.5 para o caso de modelo ideal. As referidas funções de transferência fornecem as relações entrada-saída em malha fechada considerando o sinal de referência $r(t)$ e a perturbação de entrada $q_u(t)$ em relação à saída $y(t)$:

$$H_{yr}(z) = z^{-d}C(zI - A + BK)^{-1}Bk_r, \quad (2.4)$$

$$H_{yq_u}(z) = [1 - z^{-d}C(zI - A + BK)^{-1}BV(z)]z^{-d}C(zI - A)^{-1}B. \quad (2.5)$$

A partir da Equação 2.4 é possível depreender que a relação entre o sinal de referência e a saída da planta depende dos parâmetros de sintonia K e k_r , além dos parâmetros relacionados ao modelo do processo. Adicionalmente, nota-se que a função de transferência que relaciona

a saída com a referência é independente da parametrização do filtro de robustez no caso ideal. Em contraste, a partir da Equação 2.5, percebe-se a importância da parametrização do filtro de robustez $V(z)$ na estabilização e desempenho da resposta à perturbação de entrada, combinada aos parâmetros enumerados na resposta ao sinal de referência.

2.3 Sintonia dos parâmetros K e k_r

Observa-se a partir da função de transferência de malha fechada que relaciona a referência com a saída $H_{yr}(z)$, descrita na Equação 2.4, que o vetor de realimentação de estados do modelo K deve ser projetado para alocar os polos especificados em malha fechada conforme os autovalores da matriz Schur $(A - BK)$ para atendimento aos requisitos de desempenho relacionados ao seguimento de referência. Adicionalmente, o ganho do filtro de referência $k_r = [C(I - A + BK)^{-1}B]^{-1}$ é calculado de modo que o ganho estático da relação de malha fechada $H_{yr}(z)$ seja unitário.

A partir da Equação 2.5, nota-se que os polos alocados para a resposta ao seguimento de referência também influenciam a dinâmica de rejeição de perturbações conforme o termo explícito $C(zI - A + BK)^{-1}B$ presente na referida equação. Portanto, a resposta às perturbações de entrada são acopladas à dinâmica especificada para o seguimento de referência. Na mesma equação, percebe-se a influência do filtro de robustez $V(z)$ na especificação da dinâmica de rejeição às perturbações na entrada do processo.

2.4 Sintonia do filtro de robustez $V(z)$

Nota-se a função crítica que o filtro de robustez $V(z)$, apresentado de forma explícita na Equação 2.5, desempenha na resposta às perturbações de entrada, assim, conforme (TORRICO *et al.*, 2021), a estrutura do filtro de robustez utilizado no SFSP é definida como

$$V(z) = \frac{v_1 + v_2 z^{-1} + \dots + v_{n_s} z^{-(n_s-1)}}{(1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_2 z^{-1}) \dots (1 - \beta_{n_v} z^{-1})}, \quad (2.6)$$

tal que β_i , $i = 1, \dots, n_v$ são os parâmetros de ajuste livre relacionados ao compromisso entre o desempenho para rejeição de perturbações em malha fechada e critério enunciado na sessão 2.5 Condição para estabilidade robusta diante da presença de incertezas no modelo do processo. Os parâmetros v_i , $i = 1, \dots, n_v$ são constantes designadas para (i) garantir a rejeição de perturbações em regime estacionário e (ii) eliminar dinâmicas indesejadas na resposta em malha fechada,

evitando a instabilidade interna do sistema e dinâmicas lentas na função de transferência do sistema em malha fechada conforme a Equação 2.5.

O conjunto de parâmetros que definem o filtro $V(z)$ são obtidos conforme o método descrito em (FLESCH *et al.*, 2011; TORRICO *et al.*, 2013; TORRICO *et al.*, 2021) a partir da solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 + S(z) \big|_{z=p_i \neq 1} = 0, \\ 1 + S(z) \big|_{z=e^{\pm j\omega_k}} = 0, \\ \frac{d^k}{dz^k} (1 + S(z)) \big|_{z=1} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.7)$$

tal que p_i são polos simples, ω_k são frequências relacionadas às perturbações senoidais, m_1 é a quantidade de polos integradores da planta, m_2 é a ordem de dinâmicas integradoras associadas ao modelo da perturbação, e $m = m_1 + m_2$. Para sintonia do filtro de robustez apresentado na Equação 2.6, n_s corresponde ao número de equações do sistema (2.7) de modo que $n_s \geq n_v$. Assim, os parâmetros v_i são dados a partir da solução do sistema de Equações 2.7 tendo em vista a escolha prévia dos parâmetros livres β_i e a especificação das dinâmicas associadas ao desempenho do sistema em malha fechada representada pelos polos do modelo de perturbação. Destaca-se que na parametrização do filtro de robustez é necessária a inclusão dos polos instáveis do processo para a manutenção da condição de estabilidade interna da malha de controle.

2.5 Condição para estabilidade robusta

A partir da aplicação da estrutura apresentada do SFSP conforme (TORRICO *et al.*, 2021) ao teorema geral de estabilidade robusta (MORARI; ZAFIRIOU, 1989), é definido o índice de robustez $I_r(\omega)$ e a condição de estabilidade robusta em função da incerteza multiplicativa conforme a Equação 2.8 a seguir:

$$I_r(\omega) = \left| [V(e^{j\Omega})C(e^{j\Omega}I - A)^{-1}B]^{-1} [1 + K(e^{j\Omega}I - A)^{-1}B] \right| > \overline{\delta P}(\omega), \quad (2.8)$$

onde $\Omega = \omega T_s$, ω é a frequência na faixa $0 < \omega < \pi/T_s$, e $\overline{\delta P}(\omega) = |\delta P(e^{j\Omega})|$ corresponde à norma da incerteza multiplicativa dada por:

$$|\delta P(e^{j\Omega})| = \frac{|P_r(e^{j\Omega}) - P_n(e^{j\Omega})|}{|P_n(e^{j\Omega})|}. \quad (2.9)$$

Nota-se que a Equação 2.8 descreve uma condição de suficiência para estabilidade robusta $I_r(\omega) > \overline{\delta P}(\omega)$ considerando $P_n(z) = P(z)$ como a função de transferência discreta do processo nominal definida na Equação 2.1, e, $P_r(z)$ como a função de transferência do modelo incerto do processo. Assim, é notável a importância da escolha dos parâmetros β_i para condição expressa pela Equação 2.8 conforme a influência do filtro de robustez $V(z)$ no critério de estabilidade robusta.

Portanto, para a síntese do filtro de robustez conforme descrito nesta sessão, é considerado o compromisso entre a escolha dos parâmetros livres β_i e a especificação da incerteza do processo para assegurar a condição de estabilidade robusta conforme a Equação 2.8 e, adicionalmente, o desempenho na rejeição de perturbações tendo em consideração a saída do sistema em malha fechada.

Neste capítulo foram apresentados os principais aspectos relacionados aos controladores baseados na estrutura do preditor de Smith filtrado simplificado para processos SISO de alta ordem com atraso. Tendo em vista a extensão dos conceitos abordados para o caso MIMO com múltiplos atrasos nos capítulos subsequentes, foram detalhadas a estrutura do controlador, a descrição do modelo do processo para a síntese do controlador, a estrutura de controle e as principais relações de malha fechada, assim como as regras para a sintonia do controlador por meio da parametrização do ganho de realimentação de estados, do filtro de referência e do filtro de robustez. Por fim, foi apresentada a condição de estabilidade robusta utilizada na síntese do controlador tendo em consideração as incertezas associadas ao modelo do processo.

3 SÍNTESE UNIFICADA DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA PROCESSOS SISO E MIMO DE ALTA ORDEM COM ATRASO

Neste capítulo, a formulação do SFSP para processos de alta ordem formalizada em (TORRICO *et al.*, 2021) é estendida para o caso multivariável. Objetivando a extensão do controlador SFSP para processos MIMO de alta ordem com múltiplos atrasos, propõe-se uma estrutura unificada do SFSP baseada no modelo rápido para compensação de atrasos na saída a partir da representação em espaço de estados do modelo do processo e do modelo das perturbações. Adicionalmente, é apresentada uma metodologia para sintonia dos parâmetros do controlador tendo em vista o seguimento de referência, a atenuação de perturbações e o critério para estabilidade robusta.

A representação em espaço de estados do modelo do processo e do modelo das perturbações possibilita a formulação de uma abordagem unificada para sistemas de alta ordem, seja pela representação compacta de processos SISO e MIMO de ordem elevada, ou pela representação de modelos de perturbação considerando os mais diversos modos associados. A abordagem permite a descrição compacta da saída do modelo do processo em malha aberta, incluindo o modelo de perturbação para fins de projeto do controlador.

3.1 Descrição do modelo do processo para síntese do controlador

Nesta proposta, o modelo do processo para o projeto do controlador é obtido a partir da matriz de funções de transferência do processo representada pelo modelo rápido para compensação de atrasos na saída (output DTC fast model) e pela matriz de atrasos efetivos apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) para aplicação do FSP aos processos MIMO.

Para fins de projeto do controlador é apresentada uma abordagem unificada considerando os processos SISO com atraso como um caso particular de sistemas MIMO com múltiplos atrasos com o mesmo número de entradas e saídas. Assim, o modelo do processo nominal $P_n(z)$ para a sintonia unificada do SFSP para processos MIMO com m entradas e m saídas com múltiplos atrasos é escrito a partir da matriz de funções de transferência em tempo discreto:

$$P_n(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z)z^{-d_{11}} & G_{12}(z)z^{-d_{12}} & \dots & G_{1m}(z)z^{-d_{1m}} \\ G_{21}(z)z^{-d_{21}} & G_{22}(z)z^{-d_{22}} & \dots & G_{2m}(z)z^{-d_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(z)z^{-d_{m1}} & G_{m2}(z)z^{-d_{m2}} & \dots & G_{mm}(z)z^{-d_{mm}} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

tal que $G_{ij}(z)$ são funções de transferência livre de atraso estritamente próprias e d_{ij} são os atrasos discretos que relacionam a j -ésima entrada com a i -ésima saída.

Para efeito da modelagem proposta, é definido o atraso efetivo de saída d_i como o menor atraso da i -ésima linha dado por $d_i = \min_{j=1\dots m} d_{ij}$. Assim, a matriz de atrasos efetivos é dada por $L(z) = \text{diag}\{z^{-d_1}, z^{-d_2}, \dots, z^{-d_m}\}$ e o modelo rápido para compensação de atrasos na saída $G_o(z)$ conforme (SANTOS *et al.*, 2014), tal que o atraso efetivo de saída de cada linha está situado na diagonal principal, é dado por:

$$G_o(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z)z^{-d_{11}+d_1} & G_{12}(z)z^{-d_{12}+d_1} & \dots & G_{1m}(z)z^{-d_{1m}+d_1} \\ G_{21}(z)z^{-d_{21}+d_2} & G_{22}(z)z^{-d_{22}+d_2} & \dots & G_{2m}(z)z^{-d_{2m}+d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(z)z^{-d_{m1}+d_m} & G_{m2}(z)z^{-d_{m2}+d_m} & \dots & G_{mm}(z)z^{-d_{mm}+d_m} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Portanto, a matriz de funções de transferência do modelo do processo nominal dada na Equação 3.1 é reescrita como:

$$P_n(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-d_m} \end{bmatrix}}_{=L(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z)z^{-d_{12}+d_1} & \dots & G_{1m}(z)z^{-d_{1m}+d_1} \\ G_{21}(z)z^{-d_{21}+d_2} & G_{22}(z) & \dots & G_{2m}(z)z^{-d_{2m}+d_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(z)z^{-d_{m1}+d_m} & G_{m2}(z)z^{-d_{m2}+d_m} & \dots & G_{mm}(z) \end{bmatrix}}_{=G_o(z)}. \quad (3.3)$$

Conforme o modelo expresso na Equação 3.3, $P_n(z) = L(z)G_o(z)$, consequentemente, o modelo rápido para compensação de atrasos na saída pode ser obtido por meio da relação $G_o(z) = L^{-1}(z)P_n(z)$. Por tratar-se de uma modelagem considerando os atrasos efetivos para cada saída, observa-se que $G_o(z)$ pode conter múltiplos atrasos fora da diagonal principal na modelagem de processos MIMO com múltiplos atrasos.

Para fins de projeto do controlador, considera-se a saída do modelo do processo incluindo a matriz de atrasos efetivos, o modelo rápido para compensação de atrasos na saída e o modelo de perturbação conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{y}(t) = L(z)G_o(z)\mathbf{u}(t) + H(z)\mathbf{e}(t), \quad (3.4)$$

tal que $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T$ é o vetor de saídas do processo, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T$ é o vetor de entradas do processo, $\mathbf{e}(t) = [e_1(t) \dots e_m(t)]^T$ é o vetor de perturbações e $H(z)$ é a matriz de

funções de transferência do modelo de perturbações dada por:

$$H(z) = \begin{bmatrix} H_1(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_m(z) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

tal que $H_i(z)$ são funções de transferência próprias que descrevem o modelo dinâmico das perturbações, incluindo degraus, rampas, senoides, polos lentos e dinâmicas instáveis, por exemplo, associadas a cada saída do processo. O modelo de perturbação $H_i(z)$ pode ser escrito de forma geral como:

$$H_i(z) = \frac{\prod_{\gamma=1}^{n_{vi}} (z - \beta_{\gamma i})}{\prod_{\zeta=1}^{n_{di}} (z - 1) \prod_{\varepsilon=1}^{n_{pi}} (z - a_{\varepsilon i}) \prod_{\nu=1}^{n_{\omega i}} (z^2 - 2 \cos(\omega_{\nu i} T_s) z + 1)}, \quad (3.6)$$

tal que $a_{\varepsilon i} \in \mathbb{R}^+ | a_{\varepsilon i} \neq 1$ representa polos simples do modelo, $\omega_{\nu i}$ é a frequência associada às perturbações senoidais, n_{vi} é a ordem do i -ésimo modelo de perturbação dada por $n_{vi} = n_{di} + n_{pi} + 2n_{\omega i}$, n_{di} especifica o número de polos integradores, n_{pi} designa o número de polos simples, $n_{\omega i}$ define o número de modos senoidais e $\beta_{\gamma i}$ representa os zeros de transmissão primos em relação aos polos do modelo de perturbação.

A Equação 3.4 pode ser reescrita conforme a representação em espaço de estados dada segundo o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} x(t+1) = A_o x(t) + B_o u(t), \\ x_e(t+1) = A_e x_e(t) + B_e e(t), \\ y(t) = L(q) C_o x(t) + C_e x_e(t) + I e(t), \end{cases} \quad (3.7)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_o}$ é o vetor de estados do modelo rápido do processo para compensação de atrasos na saída, n_o é a ordem do modelo rápido do processo para compensação de atrasos na saída, $x_e(t) \in \mathbb{R}^{m_o}$ é o vetor de estados do modelo de perturbação e m_o é ordem do modelo de perturbação. Portanto, a equivalência entre as Equações 3.4 e 3.7 é dada considerando a representação das matrizes de funções de transferência $G_o(z)$ e $H(z)$ conforme as matrizes de representação em espaço de estados em notação compacta:

$$G_o(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_o & B_o \\ \hline C_o & \mathbf{0} \end{array} \right], H(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & I \end{array} \right], \quad (3.8)$$

tal que $\mathbf{0}_{m \times m}$ é matriz nula, (A_o, B_o, C_o) e (A_e, B_e, C_e, I) são matrizes de dimensões apropriadas. Para efeito desta proposta, consideram-se os pares (A_o, B_o) e (A_e, B_e) controláveis e os pares

(A_o, C_o) e (A_e, C_e) observáveis. Adicionalmente, as funções de transferência dos modelos de perturbação relacionadas a cada saída conforme a Equação 3.6 podem ser representada a partir das matrizes da representação em espaço de estados:

$$H_i(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{ei} & B_{ei} \\ \hline C_{ei} & 1 \end{array} \right], \quad (3.9)$$

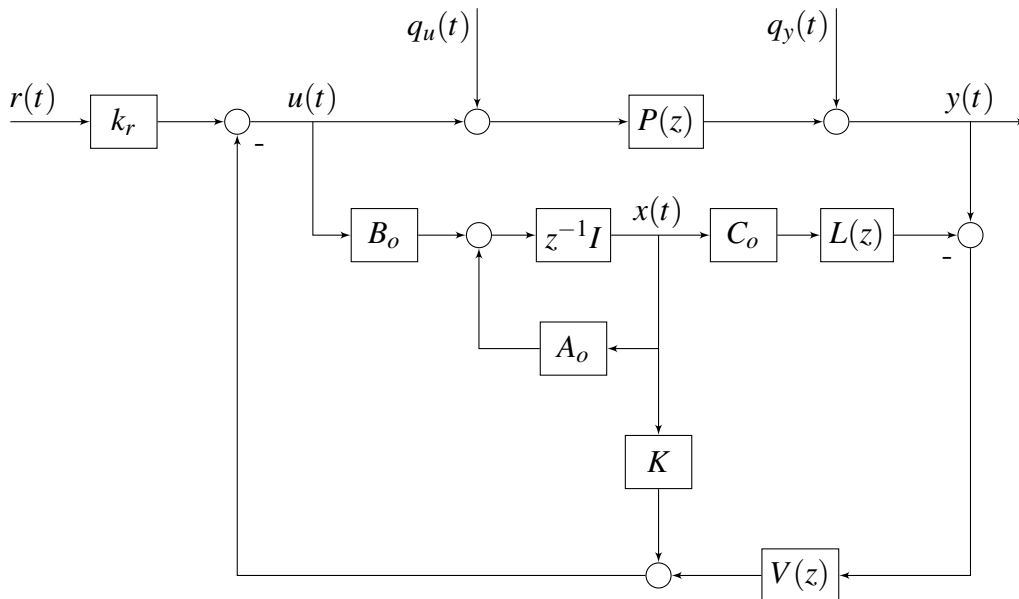
tal que $(A_{ei}, B_{ei}, C_{ei}, 1)$ são obtidas conforme o Apêndice A. A forma canônica sugerida no Apêndice A é indicada para garantir a reprodutibilidade deste trabalho, outrossim, representações minimais alternativas podem ser utilizadas indistintamente.

Nota-se que a representação da Equação 3.4 por meio das matrizes do modelo em espaço de estado viabiliza a notação compacta e a abordagem unificada de processos SISO e MIMO de alta ordem com atraso conforme a Equação 3.7. Para fins da sintonia proposta, as matrizes apresentadas nas Equações 3.8 e 3.9 serão aplicadas na parametrização do controlador SFSP unificado.

3.2 Estrutura de controle proposta

A estrutura de controle considerada na proposta para sintonia unificada do SFSP para processos de alta ordem é ilustrada na Figura 3:

Figura 3 – SFSP caso MIMO: estrutura analítica.

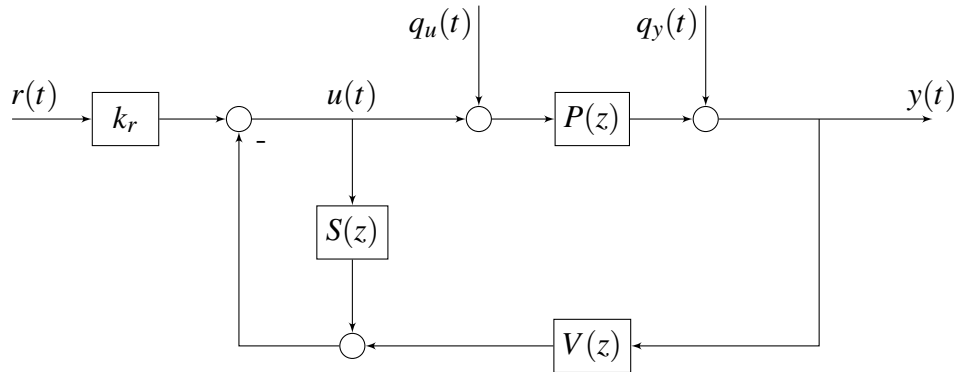


Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Para fins de análise, a partir da estrutura analítica apresentada na Figura 3, considere-se $P(z) = P_n(z)$ como o modelo nominal do processo MIMO com m -entradas e m -saídas, sendo (A_o, B_o, C_o) as matrizes da representação em espaço de estados na forma canônica observável do modelo rápido para compensação de atrasos na saída, $L(z)_{m \times m}$ a matriz de atrasos efetivos, k_r o filtro de referência dado pela matriz de ganhos escalares, K a matriz de ganho de realimentação de estados do modelo, $V(z)_{m \times m}$ a matriz de funções de transferência do filtro de robustez, $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), \dots, r_m(t)]^T$ o vetor de referência, $\mathbf{u}(t)$ o vetor de sinais de controle, $\mathbf{q}_u(t) = [q_{u1}(t), \dots, q_{um}(t)]^T$ o vetor de perturbação na entrada do processo, $\mathbf{q}_y(t) = [q_{y1}(t), \dots, q_{ym}(t)]^T$ o vetor de perturbação na saída do processo e $\mathbf{y}(t)$ o vetor de saídas.

A estrutura representada na Figura 3 é utilizada para fins de análise das relações em malha fechada e pode ser aplicada diretamente apenas ao controle de processos estáveis em malha aberta. De forma complementar à estrutura analítica, é proposta a estrutura de implementação apresentada na Figura 4. A estrutura de implementação é aquela recomendada para o controle em malha fechada tanto de processos estáveis em malha aberta, quanto para processos instáveis e integradores,

Figura 4 – SFSP caso MIMO: estrutura de implementação.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

tal que a estrutura de implementação inclui a representação mínima de $S(z)$ definido de forma análoga em (TORRICO *et al.*, 2021) como $S(z) = (K - V(z)L(z)C_o)(zI - A_o)^{-1}B_o$, onde $I_{n_o \times n_o}$ é uma matriz identidade da ordem do modelo rápido para compensação de atraso na saída. A representação mínima proposta garante a estabilidade interna da estrutura proposta em conjunto com a parametrização adequada do controlador.

3.3 Relações de malha fechada

A partir da estrutura analítica apresentada na Figura 3, são estabelecidas as relações de malha fechada em termos das matrizes de funções de transferência do sistema para o caso nominal. As Equações 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13 descrevem por meio das matrizes de funções de transferência as relações entre o vetor de referência $\mathbf{r}(t)$, o vetor de distúrbio na entrada $\mathbf{q}_u(t)$ e o vetor de distúrbio de saída ou vetor de ruído de medição $\mathbf{q}_y(t)$ e o vetor saída $y(t)$, além do efeito de $\mathbf{q}_y(t)$ sobre o sinal de controle $u(t)$, respectivamente:

$$\bar{H}_{yr}(z) = L(z)C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_ok_r, \quad (3.10)$$

$$\bar{H}_{yq_u}(z) = [I - L(z)C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z)]L(z)C_o(zI - A_o)^{-1}B_o, \quad (3.11)$$

$$\bar{H}_{yq_y}(z) = I - L(z)C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z), \quad (3.12)$$

$$\bar{H}_{uq_y}(z) = -[I + K(zI - A_o)^{-1}B_o]^{-1}V(z), \quad (3.13)$$

tal que I representa matrizes identidades de dimensões apropriadas. Tendo em vista as relações de malha fechada apresentadas nas Equações 3.11, 3.12 e 3.13, nota-se a importância da sintonia de $V(z)$ para o desempenho do sistema em malha fechada considerando os diversos sinais de entrada e saída caracterizados na estrutura do sistema de controle.

3.4 Sintonia unificada do preditor Smith filtrado simplificado

Para sintonia unificada do SFSP três características fundamentais são consideradas: (i) o desempenho do sistema em malha fechada para o seguimento de referência por meio da parametrização dos ganhos da matriz de realimentação de estados do modelo do processo K e dos ganhos do filtro de referência k_r ; (ii) o desempenho do sistema de controle em malha fechada considerando a atenuação de perturbações; e, (iii) a robustez do sistema de controle em malha fechada considerando as incertezas do processo, sendo as duas últimas características associadas à parametrização do filtro de robustez $V(z)$.

Nesta proposta, o desacoplamento por realimentação de estados conforme os procedimentos apresentados em (FALB; WOLOVICH, 1967; SANKARAN; SRINATH, 1972; TOLEDO; LEON, 2015) são adaptados ao SFSP para parametrização de K e k_r , resultando no desacoplamento da matriz de transferência de malha fechada segundo a Equação 3.10. Portanto, a sintonia resulta em um processo em malha fechada desacoplado que relaciona cada saída $y_i(t)$

com a referência $r_i(t)$ conforme a dinâmica associada aos polos especificados em malha fechada. A proposta é utilizada para reduzir o número de parâmetros de projeto, e, simultaneamente, simplificar a sintonia do controlador nos casos multivariáveis para atendimento às especificações de desempenho em malha fechada para seguimento de referência. Adicionalmente, valendo-se da representação do modelo do processo em espaço de estados, a estratégia é aplicável aos sistemas MIMO de alta ordem, assim como para o caso SISO conforme a estrutura apresentada em (TORRICO *et al.*, 2021).

Na sequência, a sintonia do filtro de robustez $V(z)$ é apresentada de forma unificada para processos SISO e MIMO a partir do modelo de perturbação especificado para cada saída do processo. A sistemática proposta permite lidar simultaneamente com a dinâmica de perturbações modeladas para fins de controle e com o critério de estabilidade robusta para o sistema em malha fechada. Para tanto, a sintonia do filtro de robustez é dada em função das matrizes da representação em espaço de estados do modelo rápido para compensação de atrasos na saída, das matrizes de representação do modelo de perturbação, da matriz de atrasos efetivos, dos parâmetros K e k_r e, por fim, da relação entre o desempenho associado à atenuação de perturbações e a condição de estabilidade robusta designada por meio dos zeros dos modelos de perturbação.

3.4.1 Sintonia dos parâmetros K e k_r

Os parâmetros $K \in \mathbb{R}^{m \times n_o}$ e $k_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$ estabelecem a relação de malha fechada para o desempenho associado ao seguimento de referência. Assim, a Equação 3.10 é escrita de forma compacta em função das matrizes da representação em espaço de estados do modelo rápido para compensação de atrasos como:

$$\bar{H}_{yr}(z) \sim L(z) \left[\begin{array}{c|c} A_o - B_o K & B_o k_r \\ \hline C_o & 0 \end{array} \right]. \quad (3.14)$$

Nessa proposta, conforme a Equação 3.14, a matriz de realimentação de estados e a matriz de ganhos do filtro de referência são parametrizadas considerando o seguimento de referência desacoplado para cada par entrada/saída do sistema em malha fechada conforme adaptação do método apresentado em (FALB; WOLOVICH, 1967; SANKARAN; SRINATH, 1972; TOLEDO; LEON, 2015) à estrutura proposta para o preditor Smith filtrado simplificado.

Para a sintonia do sistema desacoplado em malha fechada considera-se ϕ_i para $i = 1, \dots, m$ tal que ϕ_i representa a menor ordem κ que torna $C_{oi}A_o^\kappa B_o \neq 0_{1 \times m}$, para $\kappa = 0, 1, \dots, n_o - 1$, ou $\phi_i = n_o - 1$, caso $C_{oi}A_o^\kappa B_o = 0_{1 \times m}$ para $\kappa = 0, 1, \dots, n_o - 1$, tal que C_{oi} é a i -ésima linha da matriz C_o . Escrevendo ϕ_i em representação composta:

$$\phi_i = \begin{cases} \min\{\kappa : C_{oi}A_o^\kappa B_o \neq 0_{1 \times m}, \kappa = 0, 1, \dots, n_o - 1\} \\ n_o - 1, \quad C_{oi}A_o^\kappa B_o = 0_{1 \times m}, \kappa = 0, 1, \dots, n_o - 1 \end{cases}, \quad (3.15)$$

de modo que ϕ_i é definido para cada par entrada/saída do sistema. Dados os valores de ϕ_i , os parâmetros K e k_r que desacoplam a resposta ao seguimento de referência em malha fechada $\bar{H}_{yr}(z)$ com ganho unitário são dados pelo Teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.1 (Desacoplamento por realimentação de estados). *Sejam as matrizes $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n_o}$ e $B^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dadas por:*

$$A^* = \begin{bmatrix} C_{o1}A_o^{\phi_1+1} \\ C_{o2}A_o^{\phi_2+1} \\ \vdots \\ C_{om}A_o^{\phi_m+1} \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} C_{o1}A_o^{\phi_1}B_o \\ C_{o2}A_o^{\phi_2}B_o \\ \vdots \\ C_{om}A_o^{\phi_m}B_o \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

caso B^ seja não singular, a matriz de funções de transferência do sistema em malha fechada definida em (3.14) pode ser dinamicamente desacoplada com o ganho de realimentação de estados K dado por:*

$$K = B^{*-1}A^*, \quad (3.17)$$

com o filtro de referência $k_r = B^{-1}$ para ganho unitário em regime permanente. A matriz de transferência desacoplada resultante é dada por*

$$\bar{H}_{yr}(z) = L(z) \begin{bmatrix} \frac{1}{z^{\phi_1+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{z^{\phi_m+1}} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Nesse caso, a não singularidade de B^ é uma condição necessária e suficiente para o desacoplamento do sistema.*

Demonstração. Veja (FALB; WOLOVICH, 1967) para uma prova completa para sistemas contínuos no tempo e (TOLEDO; LEON, 2015) para literatura recente referenciando sistemas

regulares desacoplados. A prova geral para sistemas lineares variantes no tempo (LTV) é dada em (SANKARAN; SRINATH, 1972). Uma versão especializada de (SANKARAN; SRINATH, 1972) aplicada aos sistemas lineares invariantes no tempo discreto (LTI) é apresentada nesta demonstração. A prova considera que cada saída depende apenas da respectiva entrada de referência. Portanto, a i -ésima saída $y_i(t)$ considerando a Equação 3.14 é dada por

$$y_i(t) = C_{oi}A_o^tX(0) + C_{oi} \sum_{\eta=0}^{t-1} (A_o - B_oK)^{t-\eta-1} B_o k_r R(\eta), \quad (3.19)$$

onde $R(\eta)_{m \times 1} = L(z)r(\eta) = [r_1(\eta - d_1) \cdots r_m(\eta - d_m)]^T$ é o vetor de referência atrasado. Expandindo o somatório (3.19) e considerando a condição inicial $X(0) = 0_{n_o \times 1}$, por simplicidade, tem-se:

$$y_i(t) = C_{oi}[(A_o - B_oK)^{t-1}B_o k_r R(0) + (A_o - B_oK)^t B_o k_r R(1) + \dots \\ \dots + (A_o - B_oK)^{\phi_i} B_o k_r R(t - \phi_i - 1) + \dots + (A_o - B_oK)^0 B_o k_r R(t - 1)]. \quad (3.20)$$

Adicionalmente, considerando

$$C_{oi}(A_o - B_oK)^\eta = \begin{cases} C_{oi}A_o^\eta = 0_{1 \times n_o}, & \eta = 0, 1, \dots, \phi_i - 1 \\ C_{oi}A_o^{\phi_i}(A_o - B_oK)^{\eta - \phi_i}, & \eta = \phi_i, \phi_i + 1, \dots, t - 1 \end{cases}, \quad (3.21)$$

então a Equação 3.20 pode ser reescrita como:

$$y_i(t) = C_{oi}[(A_o - B_oK)^{\phi_i} B_o k_r R(t - \phi_i - 1) + \dots \\ \dots + (A_o - B_oK)^{\phi_i+1} B_o k_r R(t - \phi_i - 2) + \dots \\ \dots + (A_o - B_oK)^{t-1} B_o k_r R(0)]. \quad (3.22)$$

Computando (3.21) para $\eta = \phi_i + 1$, obtém-se:

$$C_{oi}A_o^{\phi_i}(A_o - B_oK) = C_{oi}A_o^{\phi_i+1} - C_{oi}A_o^{\phi_i}B_oK. \quad (3.23)$$

Portanto, escolhendo K tal que $C_{oi}(A_o - B_oK)^{\phi_i+1} = 0_{1 \times n_o}$, tem-se:

$$C_{oi}A_o^{\phi_i+1} = C_{oi}A_o^{\phi_i}B_oK, \quad (3.24)$$

assim, a Equação 3.22 é escrita como:

$$y_i(t) = C_{oi}(A_o - B_oK)^{\phi_i} B_o k_r R(t - \phi_i - 1) = C_{oi}A_o^{\phi_i} B_o k_r R(t - \phi_i - 1) \\ = B_i^* B^{*-1} R(t - \phi_i - 1) = r_i(t - \phi_i - 1 - d_i). \quad (3.25)$$

Uma vez que $B_i^* B^{*-1}$ é um vetor linha de dimensão $1 \times m$ com elemento unitário na i -ésima posição e zero nas demais posições, $y_i(t)$ depende apenas da entrada de referência

atrasada $r_i(t - \phi_i - 1 - d_i)$. Assim, o sistema em malha fechada que relaciona as referências com as respectivas saídas é dado pela matriz de funções de transferência em malha fechada (3.18).

Adicionalmente, a partir da Equação 3.24, para $i = 1, \dots, m$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{o1}A_o^{\phi_1+1} \\ C_{o2}A_o^{\phi_2+1} \\ \vdots \\ C_{om}A_o^{\phi_m+1} \end{bmatrix}}_{A^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{o1}A_o^{\phi_1}B_o \\ C_{o2}A_o^{\phi_2}B_o \\ \vdots \\ C_{om}A_o^{\phi_m}B_o \end{bmatrix}}_{B^*} K \implies K = B^{*-1}A^* \quad (3.26)$$

□

Portanto, utilizando o Teorema 3.4.1, ao aplicar a lei de controle $\mathbf{u}(t) = k_r \mathbf{r}(t) - K\mathbf{x}(t)$, com B^{*-1} não singular, a função de transferência de malha fechada conforme a Equação 3.18 resulta em uma resposta de seguimento de referência desacoplada tipo *deadbeat*. Adicionalmente, uma matriz de funções de transferência de malha fechada para o seguimento de referência desacoplada com alocação de polos para cada par $(y_i(t), r_i(t))$ na forma

$$\bar{H}_{yr}(z) = L(z) \begin{bmatrix} \frac{1 + \sum_{v=1}^{\phi_1+1} \alpha_{1,v}}{z^{\phi_1+1} + \dots + \alpha_{1,\phi_1+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1 + \sum_{v=1}^{\phi_m+1} \alpha_{m,v}}{z^{\phi_m+1} + \dots + \alpha_{m,\phi_m+1}} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

pode ser obtida. Nesse caso, o grau dos polinômios da Equação 3.27 são limitados a $\phi_i + 1$, assim $m + \sum_{j=1}^m \phi_j$ polos podem ser especificados arbitrariamente. Os coeficientes $\alpha_{i,v}$ em cada um dos polinômios $z^{\phi_i+1} + \alpha_{i,1}z^{\phi_i} + \dots + \alpha_{i,\phi_i+1}$ podem ser projetados com base em métodos de alocação de polos. Para especificação de polos é definida uma matriz F^* onde a i -ésima linha é dada por $F_i^* = C_{oi}(A_o^{\phi_i+1} + \alpha_{i,1}A_o^{\phi_i} + \dots + \alpha_{i,\phi_i+1}I)$, assim:

$$F^* = \begin{bmatrix} C_{o1}(A_o^{\phi_1+1} + \alpha_{1,1}A_o^{\phi_1} + \dots + \alpha_{1,\phi_1+1}I) \\ \vdots \\ C_{om}(A_o^{\phi_m+1} + \alpha_{m,1}A_o^{\phi_m} + \dots + \alpha_{m,\phi_m+1}I) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Considerando B^* e F^* , as matrizes de realimentação de estados K e de ganho de referência k_r são dadas por

$$K = B^{*-1}F^*, \quad k_r = B^{*-1} \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=v}^{\phi_1+1} \alpha_{1,v} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \sum_{v=1}^{\phi_m+1} \alpha_{m,v} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Nota-se que a parametrização de K e k_r por desacoplamento por realimentação de estados é equivalente ao procedimento de alocação de polos conforme descrito em (3.27) com $m = 1$ para $\phi_1 + 1$ polos, tal que $n_o - \phi_1 - 1$ polos são projetados para cancelar os zeros do modelo de saída rápida no caso SISO. Por outro lado, a principal vantagem da aplicação da parametrização por desacoplamento por realimentação de estados é obtida quando se desacopla um processo MIMO com alocação de polos para cada par $(r_i(t), y_i(t))$. A matriz de funções de transferência de malha fechada resultante é diagonal e relaciona cada saída $y_i(t)$ apenas à referência $r_i(t)$ com $\phi_i + 1$ polos desejados em malha fechada, em que $\phi_i + 1$ representa a ordem relativa ro_i de cada elemento diagonal da matriz de transferência de malha fechada para o seguimento de referência.

Portanto, a sintonia considerando o desacoplamento por realimentação de estados reduz o número de parâmetros de projeto e assegura que o ajuste do controlador seja realizado de forma independente em relação a cada par entrada/saída do sistema em malha fechada. Adicionalmente, a sintonia proposta leva a uma formulação explícita para os ganhos de realimentação de estados e referência como mostrado na Equação 3.29, o que permite o ajuste da especificação de desempenho de forma independente para cada par $(r_i(t), y_i(t))$.

Por tratar-se de um método de alocação de polos com cancelamento de polos e zeros, é importante observar que os zeros de transmissão na diagonal principal da matriz da função de transferência do modelo rápido de saída devem estar no interior do círculo unitário para evitar instabilidade interna devido ao cancelamento de polos instáveis do controlador equivalente com os zeros de fase não mínima do modelo processo. Portanto, a presença de zeros de fase não mínima na diagonal principal impõe uma restrição ao método apresentado. Como alternativa, sugere-se considerar a reorganização da sequência entrada/saída na modelagem do processo para evitar zeros de fase não mínima na diagonal principal ou utilizar técnica alternativa para parametrização do ganho de realimentação de estados que garanta que $(A_o - B_o K)$ seja Schur e, simultaneamente, evite a presença de polos instáveis no controlador equivalente.

3.4.2 Sintonia do filtro de robustez $V(z)$

Nesta seção é apresentada uma proposta de sintonia unificada de $V(z)$ para processos SISO e MIMO de alta ordem. O método proposto para parametrização de $V(z)$ considera a representação em espaço de estados do modelo de perturbação e a sintonia dos parâmetros livres $\beta_{\gamma i}$ conforme o modelo apresentado na Equação 3.6 e o critério para estabilidade robusta. A parametrização do filtro de robustez é dada conforme o Teorema 3.4.2 enunciado a seguir.

Teorema 3.4.2 (Sintonia robusta do Preditor Smith Filtrado Simplificado). *Sejam o modelo rápido para compensação de atrasos na saída $G_o(z)$ e o modelo de perturbação $H(z)$ dados segundo a Equação 3.8, a matriz de ganhos do filtro de referência k_r e a matriz de ganho de realimentação de estados do modelo K , tal que $A_o - B_o K$ seja Schur e K desacople $\bar{H}_{yr}(z)$, a matriz de funções de transferência do filtro de robustez $V(z)$ que cancela a dinâmica da perturbação modelada em malha aberta de $\bar{H}_{yqu}(z)$ conforme a Equação 3.11 é dada por:*

$$V(z) \sim [C_o(I - z^{-1}(A_o - B_o K))^{-1} B_o k_r]^{-1} k_r \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{V}_m(z) \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

tal que

$$\tilde{V}_i(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i} & B_{e_i} \\ \hline C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} (A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i}) & C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} B_{e_i} \end{array} \right], \quad (3.31)$$

e $\bar{d}_i = d_i + r_{o_i} - 1$. Adicionalmente, a matriz de funções de transferência $\bar{H}_{yqu}(z)$ é desacoplada da matriz de funções de transferência $\bar{H}_{yr}(z)$.

Demonstração. A prova considera que todos os polos de $H(z)$, expressos como autovalores de A_e , são zeros de transmissão da matriz de função de transferência de malha fechada da perturbação de entrada para saída $\bar{H}_{yqu}(z)$, isto é, para cada autovalor λ de A_e , $\bar{H}_{yqu}(z)|_{z=\lambda} = 0$ para sistemas SISO, ou, a matriz de Rosenbrock de $\bar{H}_{yqu}(z)$ em $z = \lambda$ reduz o seu posto normal para sistemas MIMO conforme (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). A substituição da Equação 3.30 na Equação 3.11 resulta em:

$$\bar{H}_{yqu}(z) = \underbrace{[I - L(z) C_e A_{ed} (zI - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e]}_{\Psi(z)} L(z) C_o (zI - A_o)^{-1} B_o, \quad (3.32)$$

em que $A_{ed} = \text{diag} [A_{e1}^{\bar{d}_1}, \dots, A_{em}^{\bar{d}_m}]$, $\Psi(z) = \text{diag} [\Psi_1(z), \dots, \Psi_m(z)]$, k_r é uma matriz diagonal e $ro_i = 1$ implica em $\bar{d}_i = d_i$, por simplicidade. Considerando as matrizes $(A_{Li}, B_{Li}, C_{Li}, 0)$ como a representação em espaço de estados de z^{-d_i} de cada elemento diagonal da matriz de atrasos efetivos $L(z)$ e o atraso em série com $C_{ei}A_{ei}^{d_i}(zI - A_{ei} + B_{ei}C_{ei})^{-1}B_{ei}$ na Equação 3.32, a representação em espaço de estados de $\Psi_i(z)$ na forma compacta é dada por:

$$\Psi_i(z) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_{ei} - B_{ei}C_{ei} & B_{ei}C_{Li} & 0 \\ 0 & A_{Li} & B_{Li} \\ \hline -C_{ei}A_{ei}^{d_i} & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (3.33)$$

tal que os zeros de $\Psi_i(z)$ são dados em termos de λ por:

$$\det \left[\begin{array}{cc} \lambda I - (A_{ei} - B_{ei}C_{ei}) & -B_{ei}C_{Li} \\ -B_{Li}C_{ei}A_{ei}^{d_i} & \lambda I - A_{Li} \end{array} \right] = 0. \quad (3.34)$$

O polinômio em λ resultante de (3.34) não depende explicitamente das matrizes de representação em espaço de estados de z^{-d_i} conforme a equação a seguir:

$$p(\lambda) = \det \left[\lambda I - A_{ei} + B_{ei}C_{ei} - \frac{B_{ei}C_{ei}A_{ei}^{d_i}}{\lambda^{d_i}} \right] \lambda^{d_i}. \quad (3.35)$$

Considerando $d_i = 0$ na Equação 3.35 e calculando as raízes do polinômio característico:

$$\det \left[\lambda I - A_{ei} + B_{ei}C_{ei} - \frac{B_{ei}C_{ei}A_{ei}^0}{\lambda^0} \right] \lambda^0 = \det [\lambda I - A_{ei}] = 0, \quad (3.36)$$

portanto, para o caso particular $d_i = 0$, os zeros de $\Psi_i(z)$ são os autovalores de A_{ei} conforme as raízes da Equação 3.36 e, conseqüentemente, são zeros de (3.32). Para $d_i > 0$, a Equação 3.35 pode ser escrita na forma fatorada:

$$\det \left[\lambda^{d_i} I + B_{ei}C_{ei} \sum_{\eta=0}^{d_i-1} A_{ei}^{\eta} \lambda^{d_i-\eta-1} \right] \det [\lambda I - A_{ei}] = 0. \quad (3.37)$$

Assim, para o caso geral, isto é $d_i \geq 0$, nota-se que $\det [\lambda I - A_{ei}]$ é sempre um fator de (3.37), logo, todos os autovalores de A_{ei} são zeros de $\Psi_i(z)$. Portanto, todas as dinâmicas descritas no modelo de perturbação expressas em A_e são eliminadas de $\bar{H}_{yqu}(z)$ considerando a estrutura diagonal de $\Psi(z)$. Adicionalmente, a partir da Equação 3.32 pode-se notar que a matriz de função de transferência resultante da substituição de $V(z)$ proposto em $\bar{H}_{yqu}(z)$ não depende dos parâmetros de sintonia do rastreamento de referência.

□

A sintonia proposta de $V(z)$ assegura a atenuação do efeito da perturbação com base no modelo de perturbação descrito por matrizes da representação em espaço de estados para fins de controle segundo o Teorema 3.4.2. O modelo de perturbação descrito na equação de saída do modelo do processo (3.4) inclui a matriz de funções de transferência do modelo de perturbação $H(z)$, tal que, para cada saída, o modelo de perturbação $H_i(z)$ é uma função de transferência própria que descreve as dinâmicas da perturbação, incluindo dinâmicas lentas ou instáveis e perturbações como degraus, rampas e senóides.

Considerando as condições enunciadas no teorema, uma vez que $H(z)$ é diagonal por construção, os parâmetros $\beta_{\gamma i}$ de $H_i(z)$, conforme a Equação 3.6, são zeros de transmissão de $H(z)$, onde $\beta_{\gamma i}$ são parâmetros de sintonia livre selecionados considerando o compromisso entre o desempenho designado para atenuação de perturbação em malha fechada e a condição de estabilidade robusta requerida conforme detalhado na seção 3.5 a seguir.

3.5 Condição para estabilidade robusta

Nesta seção são apresentados o índice de robustez e a condição para estabilidade robusta resultante da aplicação da metodologia proposta em analogia à condição descrita na seção 2.5. A condição de estabilidade robusta é apresentada como uma ferramenta para projeto do filtro de robustez tendo em vista a sintonia de $\beta_{\gamma i}$ como parâmetros que estabelecem o compromisso entre o desempenho em relação à rejeição de perturbações e a condição de estabilidade robusta ante as incertezas consideradas no projeto do controlador.

Para o caso SISO, a aplicação da sintonia proposta conforme o critério para estabilidade robusta apresentado na Equação 2.8 resulta em:

$$I_r(\omega) = |C_e A_e^d (e^{j\Omega} I - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e|^{-1} > \overline{\delta P}(j\omega), \quad (3.38)$$

tal que os autovalores de $A_e - B_e C_e$ são dados pelos parâmetros de sintonia livre do modelo de perturbação $\beta_{\gamma i}$ na Equação 3.6 e correspondem aos polos do filtro $V(z)$. Portanto, $\beta_{\gamma i}$ pode ser sintonizado para assegurar que a condição expressa na Equação 3.38 seja atendida para uma dada incerteza multiplicativa limitada pela norma. Adicionalmente, a condição de estabilidade robusta resultante da aplicação da sintonia proposta não depende dos parâmetros K e k_r de sintonia para seguimento de referência. Portanto, uma vez que a condição expressa na Equação 3.38 é atendida

para todos os valores de Ω , diz-se que o sistema atende ao critério de estabilidade robusta dada a condição de incerteza especificada.

Para o caso MIMO, a condição de estabilidade robusta é analisada utilizando a estrutura M - Δ (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), em que $\Delta(z)$ é uma matriz complexa de incertezas com norma limitada e $M(z)$ é uma matriz de funções de transferência estável que contém o controlador, a planta nominal e informações de incerteza. A condição de estabilidade robusta em função da estrutura M - Δ é dada por:

$$\bar{\sigma}(M(z)) < 1, z = e^{j\Omega}, 0 < \Omega < \pi, \quad (3.39)$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ é a função maior valor singular, $M(z) = -W_s(z)T_I(z)V(z)$, $W_s(z)$ é a matriz de função de transferência de ponderação da incerteza multiplicativa de entrada e $T_I(z)$ é a matriz de função de transferência de sensibilidade complementar de entrada. Pelo teorema do pequeno ganho, a condição apresentada na Equação 3.39 é suficiente para qualquer $M(z)$ estável e matriz de função de transferência da incerteza $\Delta(z)$ estável, tal que $\bar{\sigma}(\Delta(e^{j\Omega})) < 1$. Portanto, aplicando a Equação 3.30 na condição expressa na Equação 3.39, a condição de estabilidade robusta é escrita como:

$$\bar{\sigma}(W_s(e^{j\Omega})C_e A_{ed}(e^{j\Omega}I - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e) < 1. \quad (3.40)$$

Considerando $\bar{\sigma}(\mathbf{X})\bar{\sigma}(\mathbf{W}) \geq \bar{\sigma}(\mathbf{XW})$, o critério para estabilidade robusta para sistemas MIMO apresentado na Equação 3.40 pode ser reescrito como:

$$\bar{I}_r(\omega) = \bar{\sigma}^{-1}(C_e A_{ed}(e^{j\Omega}I - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e) > \bar{\sigma}(W_s(e^{j\Omega})), \quad (3.41)$$

tal que $C_e A_{ed}(e^{j\Omega}I - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e$ é uma matriz diagonal composta por elementos $C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} (e^{j\Omega}I - A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i})^{-1} B_{e_i}$ na diagonal principal e zeros nas demais posições. De forma análoga ao caso SISO, por tratar-se de uma matriz diagonal, os autovalores de $A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i}$ são os zeros de $H(z)$ dados pelos parâmetros de sintonia livre β_{γ_i} , ajustáveis conforme a condição de estabilidade robusta apresentada na Equação 3.41.

3.5.1 Sintonia de β_{γ_i} considerando a condição para estabilidade robusta

Como apresentado na seção anterior, a condição de estabilidade robusta depende explicitamente das matrizes de espaço de estados do modelo de perturbação em malha aberta

para fins de controle conforme o modelo apresentado na Equação 3.9. Nota-se que os zeros de $H_i(z)$ correspondem aos parâmetros livres $\beta_{\gamma i}$ na Equação 3.6, e, também, aos polos de $V(z)$, dados pelos autovalores de $A_{e_i} - B_{e_i}C_{e_i}$. Assim, os parâmetros $\beta_{\gamma i}$ do modelo de perturbação são escolhidos avaliando o critério de estabilidade robusta dada a incerteza multiplicativa limitada pela norma para processos SISO como apresentado na Equação 3.38, ou dada a matriz de função de transferência de ponderação da incerteza multiplicativa de entrada para processos MIMO como apresentado na Equação 3.41.

Para lidar com o compromisso entre a atenuação de perturbações associadas às dinâmicas do modelo de perturbação, características do ruído, desempenho de rejeição de perturbação e a robustez em malha fechada, os parâmetros $\beta_{\gamma i}$ podem ser parametrizados com valores no intervalo $0 < \beta_{\gamma i} < 1$ como proposto em (TORRICO *et al.*, 2021). Para atenuação mais agressiva de perturbação, os parâmetros $\beta_{\gamma i}$ devem ser parametrizados tal que $\beta_{\gamma i} \rightarrow 0$; complementarmente, caso maior robustez em malha fechada seja requerida, os parâmetros $\beta_{\gamma i}$ devem ser sintonizados tal que $\beta_{\gamma i} \rightarrow 1$. Portanto, os sentidos opostos para sintonia de $\beta_{\gamma i}$ caracterizam o compromisso entre a condição de estabilidade robusta e o desempenho para atenuação de perturbações. Para uma sintonia simplificada, é proposto considerar valores iguais de $\beta_{\gamma i}$, de modo que $\beta_{1i} = \dots = \beta_{n_{vi}i} = \beta_i$ na Equação 3.6, reduzindo o número de parâmetros de sintonia e tendo como objetivo principal o compromisso entre o desempenho relacionado à atenuação de perturbação e à condição de estabilidade robusta.

Para processos MIMO, a sintonia simplificada de β_i é proposta levando em consideração a estrutura diagonal em bloco de $C_e A_{ed}(e^{j\Omega}I - A_e + B_e C_e)^{-1} B_e$ na Equação 3.41. Como o máximo valor singular de uma matriz diagonal corresponde ao máximo valor absoluto entre os elementos da diagonal principal, o índice apresentado na Equação 3.41 pode ser reescrito como

$$|C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} (e^{j\Omega}I - A_{e_i} + B_{e_i} C_{e_i})^{-1} B_{e_i}|^{-1} > \bar{\sigma}(W_s(e^{j\Omega})), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.42)$$

onde β_i pode ser sintonizado para cada linha da matriz de funções de transferência de maneira independente, de modo que a condição apresentada na Equação 3.42 seja satisfeita como a condição de estabilidade robusta SISO apresentada na Equação 3.38 para um dado W_s para cada $i = 1, \dots, m$.

Portanto, a condição apresentada na Equação 3.41 é atendida se a condição apresentada na Equação 3.42 for satisfeita para cada saída do sistema considerando o modelo de perturbação adotado. Como consequência, o critério de estabilidade robusta MIMO apresentado na Equação 3.41 é transformado em um sistema de m -condições de estabilidade robusta tipo SISO associado ao máximo valor singular da incerteza prescrita. Portanto, a condição apresentada na Equação 3.42 resulta em um critério simplificado para a escolha de parâmetros do filtro de robustez, assim como viabiliza uma análise desacoplada dos modelos de perturbação adotados na modelagem da saída para fins de controle.

Ao longo desse capítulo foi apresentada uma estrutura de controle e uma metodologia de sintonia unificada de controlador baseada no SFSP para processos SISO de alta ordem com atraso e MIMO com múltiplos atrasos. O procedimento de sintonia proposto preservou as propriedades e vantagens do SFSP, simplificando a parametrização do controlador para sistemas de ordem elevada. Ao final do capítulo, uma proposta simplificada para sintonia do filtro de robustez baseado no modelo das perturbações foi apresentada considerando o critério de estabilidade robusta. Conforme a proposta, o ajuste dos parâmetros do filtro de robustez é desacoplado da dinâmica de seguimento de referência e a sintonia dos parâmetros do filtro foi realizada de forma desacoplada para cada par entra/saída do sistema, explorando a estrutura bloco diagonal da matriz de funções de transferência do filtro de robustez.

4 SINTONIA DO FILTRO DE ROBUSTEZ DO PREDITOR SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO DE ALTA ORDEM COM ATRASO VIA OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo, um método para a síntese do filtro de robustez por meio de otimização é proposto tendo em vista a estrutura de controle baseada no Preditor Smith Filtrado Simplificado. O método de síntese proposto considera simultaneamente as incertezas do processo e a capacidade de rejeição de distúrbios na parametrização do filtro de robustez. Diferentemente da abordagem apresentada no capítulo 3, que apresentou a síntese do filtro de robustez por meio do ajuste manual dos parâmetros livres conforme descrito na seção 3.5, a síntese do filtro de robustez baseada em otimização apresentada neste capítulo consiste na avaliação da condição de estabilidade robusta via Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) para projetar os parâmetros livres do filtro de robustez mediante um procedimento de otimização convexa. Desse modo, a síntese automática do filtro de robustez é realizada assegurando a estabilidade em malha fechada na presença de incertezas no modelo do processo e a regulação em malha fechada considerando os distúrbios especificados.

A atenuação de distúrbios e a condição de estabilidade robusta na presença de incertezas do modelo do processo consiste em um notável compromisso para problemas de controle práticos (YUAN *et al.*, 2021). Nesses casos, distúrbios operacionais e determinísticos associados ao processo podem ser considerados na síntese do controlador, juntamente com as informações disponíveis sobre a discrepância entre o modelo utilizado para fins de controle e o processo que se deseja controlar. No contexto dos sistemas com atrasos de transporte, lidar com incertezas, seja em relação aos parâmetros da planta ou referente aos valores de atraso, tem se mostrado um problema desafiador (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, capítulo 2), (de Oliveira; KARIMI, 2013, capítulo 4). Tendo em vista o desafio inerente devido às incertezas nos parâmetros dos modelos e a problemática da regulação mediante distúrbios operacionais do processo, a atrativa simplicidade do Preditor Smith (NORMEY-RICO *et al.*, 2022) é perdida, e o filtro de robustez é introduzido para lidar com a discrepância entre a planta e a perturbação (DIAB *et al.*, 2022).

Tendo em vista a presença de perturbações e incertezas, a principal dificuldade está relacionada à parametrização do filtro de robustez conforme as alterações na estrutura original proposta para compensação de atrasos. Em (SANZ *et al.*, 2018), (LIMA *et al.*, 2021), (AMARAL *et al.*, 2023) e (YEGGIN; OZBAY, 2023) são apresentadas estratégias para a parametrização

do filtro de robustez considerando as perturbações e incertezas nos parâmetros do modelo do processo. Notavelmente, a sintonia dos parâmetros livres do filtro de robustez por tentativa e erro é considerada para assegurar a estabilidade em malha fechada e o desempenho quanto a atenuação de perturbações.

Levando em consideração o papel crítico que filtro de robustez desempenha na estrutura do Preditor Smith Filtrado, este capítulo apresenta como principal contribuição uma síntese alternativa do filtro de robustez para processos com atraso baseado nas incertezas do modelo do processo e nas especificações de distúrbios aplicadas à estrutura do Preditor Smith Filtrado Simplificado. A síntese do filtro de robustez é obtida pela solução computacional da condição de estabilidade robusta, considerando simultaneamente as especificações relacionadas às perturbações e às incertezas do modelo do processo.

Portanto, ao longo do capítulo, uma forma alternativa de sintonia do filtro de robustez é apresentada a partir da estrutura SFSP proposta em (TORRICO *et al.*, 2021) e generalizada para o caso multivariável.

Para efeito de notação, neste capítulo, $\mathbb{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^\top\}$ corresponde a uma matriz simétrica com entradas reais. Para $A \in \mathbb{S}^n$, $B \in \mathbb{S}^m$, considera-se $\text{diag}(A, B) \in \mathbb{S}^{n+m}$ para denotar uma matriz bloco diagonal formada pelos blocos A e B em sua diagonal principal. A matriz hermitiana $He(X) = X + X^\top$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. I_m corresponde a matriz identidade com dimensão $m \times m$, e $\mathbf{0}_{m \times p}$ corresponde à matriz nula de dimensão $m \times p$.

4.1 Condição de estabilidade robusta aplicada ao Preditor Smith Filtrado Simplificado

4.1.1 Caracterização do modelo de incerteza aplicado ao SFSP

A formulação baseada na estrutura do Preditor Smith Filtrado em tempo discreto apresentada em (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007, capítulo 12) é adaptada à estrutura do Preditor Smith Filtrado Simplificado e generalizada para o caso MIMO. Assim, o processo $P_r(z)$ é representado por meio de uma incerteza multiplicativa $\delta(z)$ conforme a Equação 4.1:

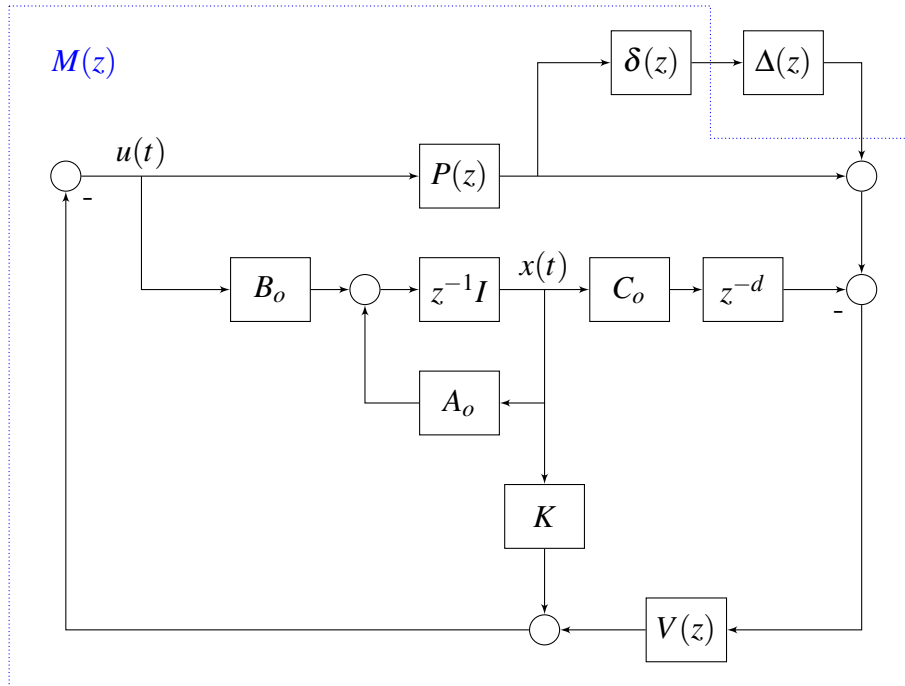
$$P_r(z) = [I + \Delta(z)\delta(z)]P(z), \quad (4.1)$$

tal que $P(z)$ é o modelo nominal do processo, e $\Delta(z)\delta(z)P(z)$ é matriz de funções de transferência que descreve a discrepância entre o modelo nominal e o processo. Nesse caso, a incerteza multiplicativa relativa é dada por:

$$\delta(z) = P^{-1}(z)[P_r(z) - P(z)], \quad (4.2)$$

onde $\Delta(z)$ é uma matriz de funções de transferência estável que atende a condição $\|\Delta(e^{j\Omega})\|_{\infty} \leq 1$ conforme explicitado em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, capítulo 7), adicionalmente, segundo a Equação 4.1, nota-se que Δ é um ponderador da incerteza multiplicativa relativa. A estrutura analítica do SFSP documentada em (TORRICO *et al.*, 2021), incluindo a incerteza multiplicativa relativa $\delta(z)$ e o ponderador $\Delta(z)$, é estendida para o caso SISO e caso MIMO conforme as Figuras 5 e 6, respectivamente:

Figura 5 – SFSP caso SISO: representação M - Δ estrutura analítica.



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme os diagramas analíticos apresentados para o SFSP incluindo as incertezas descritas, o modelo nominal do processo é dado por:

$$P(z) = z^{-d}G_o(z) = z^{-d}C_o(zI_n - A_o)^{-1}B_o \quad (4.3)$$

para o caso SISO, e

$$P(z) = L(z)G_o(z) = L(z)C_o(zI_n - A_o)^{-1}B_o \quad (4.4)$$

para o caso MIMO.

4.1.2 Função de ponderação da incerteza e limitação da incerteza multiplicativa relativa

Avaliando a Equação 4.1, nenhuma suposição foi feita sobre a parametrização da incerteza multiplicativa relativa. No entanto, para efeito de descrição da condição de estabilidade robusta, assume-se a existência de uma função de ponderação racional $W_s(z)$ com representação mínima em espaço de estado $(A_{w_s}, B_{w_s}, C_{w_s}, D_{w_s})$, onde $A_{w_s} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B_{w_s} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $C_{w_s} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, e $D_{w_s} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tal que

$$\|W_s(e^{j\Omega})\|_{\infty} \geq \|\delta(e^{j\Omega})\|_{\infty}, \quad \forall \Omega \in [0, \pi], \quad (4.7)$$

Portanto, a função de ponderação W_s limita a incerteza multiplicativa relativa. A partir da Equação 4.7, é válida a relação para os casos SISO e MIMO:

$$\bar{\sigma}^{-1}(W_s(e^{j\Omega})) \leq \bar{\sigma}^{-1}(\delta(e^{j\Omega})) \quad (4.8)$$

tal que $\bar{\sigma}(\cdot)$ corresponde ao maior valor singular do argumento para cada frequência. No caso SISO, a Equação 4.8 pode ser simplificada utilizando o módulo da função de ponderação e o módulo da incerteza multiplicativa relativa:

$$|W_s(e^{j\Omega})|^{-1} \leq |\delta(e^{j\Omega})|^{-1}. \quad (4.9)$$

Portanto, a função de ponderação da incerteza multiplicativa $W_s(z)$ limita a incerteza do sistema por meio de uma expressão racional e inclui todo o conjunto de incertezas que satisfazem a referida condição.

4.1.3 Condição de estabilidade robusta a partir da função de ponderação da incerteza

Considerando a função de ponderação $W_s(z)$ no lugar da incerteza multiplicativa relativa $\delta(z)$ na expressão de $M(z)$ nas Equações 4.5 e 4.6, a condição de estabilidade robusta é derivada a partir do teorema do pequeno ganho aplicado à estrutura M - Δ associada ao SFSP:

$$\|W_s(e^{j\Omega})C_o(e^{j\Omega}I_n - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(e^{j\Omega})\|_{\infty} < 1, \quad \|\Delta(e^{j\Omega})\|_{\infty} \leq 1, \quad \forall \Omega \in [0, \pi]. \quad (4.10)$$

A função de ponderação da incerteza é escolhida de modo a limitar a incerteza multiplicativa relativa segundo a Equação 4.8. Assim, $W_s(z)$ impõe uma condição para a síntese do filtro de robustez $V(z)$, tal que o mesmo deve garantir a estabilidade robusta para todo o conjunto de sistemas que verificam a Equação 4.1 conforme a condição expressa na Equação 4.10.

Portanto, a função de ponderação da incerteza é utilizada para limitar a incerteza do processo e substituir a expressão da incerteza multiplicativa relativa, expressando todos os possíveis modelos considerados para o processo, ao passo que o filtro de robustez é sintonizado para assegurar a condição de estabilidade robusta conforme o teorema do pequeno ganho para todo o conjunto possível de modelos para o processo incerto.

4.1.4 Estrutura do filtro de robustez e rejeição de perturbações

Nessa sessão é descrita a estrutura do filtro de robustez para incluir em sua síntese a capacidade de rejeitar perturbações especificadas na fase de projeto. Nesse caso, além de lidar com as incertezas do modelo do processo, o filtro é projetado para simultaneamente garantir a rejeição de perturbações descritas por modelos lineares. Para a síntese, são considerados distúrbios de entrada conforme a equação de saída a seguir.

$$Y(z) = L(z)G_o(z)(U(z) + Q_u(z)), \quad (4.11)$$

onde Y corresponde as saídas do modelo do processo para fins de controle, U é o vetor de entradas do processo e Q_u . A função de transferência em malha fechada que relaciona a saída e o distúrbio de entrada para SFSP no caso do modelo nominal é dada por:

$$\bar{H}_{yqu}(z) = [I_m - L(z)C_o(zI_n - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z)]L(z)C_o(zI_n - A_o)^{-1}B_o. \quad (4.12)$$

Para modelagem da perturbação é assumido modelo linear gerador do sinal de distúrbio representado na forma mínima em espaço de estados (A_e, B_e, C_e, I) , em que $A_e \in \mathbb{R}^{e \times e}$, $B_e \in \mathbb{R}^{e \times m}$ e $C_e \in \mathbb{R}^{m \times e}$ e I é a matriz identidade de ordem m . Nota-se que os autovalores de A_e especificam a dinâmica do distúrbio considerada como uma condição de entrada para o projeto, e os parâmetros B_e e C_e são parâmetros a definir que estabelecerão a relação entre a incerteza do modelo do processo e desempenho quanto à rejeição de perturbações.

Assim, a estrutura do filtro de robustez que permite o cancelamento das dinâmicas da perturbação representadas pelos autovalores de A_e na matriz de funções de transferência $\bar{H}_{yqu}(z)$ é dada conforme o Teorema 3.4.2:

$$V(z) \sim [C_o(I - z^{-1}(A_o - B_o K))^{-1} B_o k_r]^{-1} k_r \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{V}_1(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{V}_m(z) \end{bmatrix}}_{\tilde{V}(z)}, \quad (4.13)$$

tal que

$$\tilde{V}_i(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i} & B_{e_i} \\ \hline C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} (A_{e_i} - B_{e_i} C_{e_i}) & C_{e_i} A_{e_i}^{\bar{d}_i} B_{e_i} \end{array} \right]. \quad (4.14)$$

A matriz de funções de transferência $\overline{H}_{yqu}(z)$ resultante que relaciona a saída com a perturbação de entrada é desacoplada da matriz de funções de transferência $\overline{H}_{yr}(z)$ que relaciona a saída do sistema com o sinal de referência. Nota-se que a matriz de funções de transferência do filtro de robustez é bloco diagonal tendo em vista o desacoplamento por K e a estrutura proposta.

Nesse caso, todo distúrbio gerado por um modelo dinâmico linear com matriz dinâmica A_e é rejeitado conforme a parametrização sugerida para o filtro de robustez seguindo o princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976).

Em sùmula, por meio do Teorema 3.4.2, é demonstrado que o filtro de robustez parametrizado conforme nas Equações 4.13 e 4.14 introduz zeros no numerador de $\overline{H}_{yqu}(z)$ que cancelam todos os polos do modelo de perturbação especificados por meio dos autovalores da matriz dinâmica.

4.1.5 Parametrização do filtro de robustez por meio de otimização

Nessa sessão é apresentada a parametrização completa do filtro de robustez considerando um processo de otimização para o cômputo dos parâmetros livres a partir da solução da condição de estabilidade robusta apresentada na Equação 4.10, considerando a estrutura apresentada nas Equações 4.13 e 4.14. Nesse caso, os parâmetros livres são computados considerando a função de ponderação da incerteza e a estrutura do filtro de robustez, garantindo o critério de estabilidade robusta ante às incertezas limitadas por $W_s(z)$ e, concomitantemente, a rejeição de perturbações especificadas pelos autovalores de A_e .

A substituição das Equações 4.13 e 4.14 na condição de estabilidade robusta descrita conforme a Equação 4.10 resulta em:

$$\|W_s(z)\tilde{V}(z)\|_\infty < 1, \quad (4.15)$$

expressando, portanto, a condição de estabilidade em termos de $W_s(z)$ e $\tilde{V}(z)$. Assim, a partir da Equação 4.15, observa-se que a parametrização das matrizes B_e e C_e em $\tilde{V}(z)$ deve satisfazer o critério da norma H_∞ , levando em consideração a função de ponderação da incerteza do modelo do processo $W_s(z)$ e o modelo de perturbação considerado na síntese do filtro de robustez.

Tendo em vista a condição de estabilidade robusta expressa na Equação 4.15 para a sintonia proposta do SFSP, a representação em espaço de estados da conexão em série $W_s(z)\tilde{V}(z)$ é dada por:

$$W_s(z)\tilde{V}(z) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_e - B_e C_e & \mathbf{0}_{e \times p} & B_e \\ B_w C_e A_e^d & A_w & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \hline D_w C_e A_e^d & C_w & \mathbf{0}_{m \times m} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{w_s \tilde{v}} & B_{w_s \tilde{v}} \\ \hline C_{w_s \tilde{v}} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{array} \right], \quad (4.16)$$

onde $A_{w_s \tilde{v}} \in \mathbb{R}^{(e+p) \times (e+p)}$, $B_{w_s \tilde{v}} \in \mathbb{R}^{(e+p) \times m}$, $C_{w_s \tilde{v}} \in \mathbb{R}^{m \times (e+p)}$. A síntese do filtro de robustez é baseada na versão em tempo discreto do *Bounded Real Lemma* adaptada de (BOYD *et al.*, 1994, capítulo 2) apresentada no Teorema 4.1.1 a seguir.

Teorema 4.1.1. *Dadas as representações em espaço de estado do filtro de ponderação da incerteza ($A_{w_s}, B_{w_s}, C_{w_s}, D_{w_s}$) e a dinâmica das perturbações representadas pelos autovalores de A_e e fixada a matriz C_e , caso existam as matrizes $P_1 \in \mathbb{S}^e$, $P_2 \in \mathbb{S}^p$, $P_1 \succ 0$, $P_2 \succ 0$, $W \in \mathbb{R}^{e \times m}$ e um escalar $\gamma \in (0, 1)$ tais que*

$$He \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}P & \Pi & \mathbf{0}_{(e+p) \times m} & C_{w_s \tilde{v}}^\top \\ \mathbf{0}_{(e+p) \times (e+p)} & \frac{1}{2}P & \begin{bmatrix} W_{e \times m} \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{(e+p) \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & \frac{1}{2}\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \succ 0, \quad (4.17)$$

com

$$\Pi = \begin{bmatrix} A_e^\top P_1 - C_e^\top W^\top & A_{ed}^\top C_e^\top B_w^\top P_2 \\ \mathbf{0}_{p \times m} & A_w^\top P_2 \end{bmatrix},$$

onde $P = \text{diag}(P_1, P_2)$, então $B_e = P_1^{-1}W$ satisfaz a condição de estabilidade robusta descrita na Equação 4.15 e, conseqüentemente, a condição de suficiência expressa na Equação 4.10.

Demonstração. Considera-se a realização da relação entrada-saída $Y_{w_s\tilde{v}}(z) = W_s(z)\tilde{V}(z)U_{w_s\tilde{v}}(z)$, dada por

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{w_s\tilde{v}}x(k) + B_{w_s\tilde{v}}u_{w_s\tilde{v}}(k), \\ y_{w_s\tilde{v}}(k) = C_{w_s\tilde{v}}x(k), \end{cases} \quad (4.18)$$

conforme o *Bounded Real Lemma* aplicado a sistemas discretos, caso exista uma matriz $P \in \mathbb{S}^{e+p}$, $P \succ 0$ e um escalar γ tal que

$$\begin{bmatrix} A_{w\tilde{v}}^\top P A_{w\tilde{v}} - P + C_{w\tilde{v}}^\top C_{w\tilde{v}} & A_{w\tilde{v}}^\top P B_{w\tilde{v}} \\ B_{w\tilde{v}}^\top P A_{w\tilde{v}} & B_{w\tilde{v}}^\top P B_{w\tilde{v}} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.19)$$

então a norma H_∞ da função da conexão em série $W_s(z)\tilde{V}(z)$ é limitada por γ . Aplicando duas vezes o complemento de Schur na Equação 4.19, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P & A_{w\tilde{v}}^\top P & \mathbf{0}_{(e+p) \times m} & C_{w\tilde{v}}^\top \\ P A_{w\tilde{v}} & P & P B_{w\tilde{v}} & \mathbf{0}_{(e+p) \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & B_{w\tilde{v}}^\top P & \gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C_{w\tilde{v}} & \mathbf{0}_{m \times (e+p)} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4.20)$$

Impondo a estrutura $P = \text{diag}(P_1, P_2)$ na matriz expressa na Equação 4.20 e introduzindo a variável $W = P_1 B_e$, resulta na expressão descrita na Equação 4.17. \square

Portanto, na condição de projeto do filtro de robustez proposta, foi imposta uma estrutura de bloco diagonal para P , de modo que a matriz B_e é calculada a partir da solução da Desigualdade Matricial Linear expressa no Teorema 4.1.1. Uma vez que o ganho é computado, o *Bounded Real Lemma* pode ser aplicado sem impor condição de estrutura à matriz P para calcular o ganho ótimo γ .

4.2 Índice de robustez e condição de estabilidade robusta alternativa

Seja o índice de robustez do SFSP $I_r(\omega)$ definido como:

$$I_r(\omega) := \bar{\sigma}(C_o(e^{j\Omega}I_n - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(e^{j\Omega})). \quad (4.21)$$

Uma condição suficiente resultante da Equação 4.10 pode ser escrita como:

$$I_r(\omega) < \bar{\sigma}^{-1}(W_s(e^{j\Omega})) \leq \bar{\sigma}^{-1}(\delta(e^{j\Omega})), \quad \forall \Omega \in [0, \pi]. \quad (4.22)$$

Dados (A_o, B_o, C_o) , $W_s(z)$ e $V(z)$ a condição de estabilidade robusta conforme a Equação 4.22 pode ser representada graficamente para verificar a condição expressa na Equação 4.10. Salienta-se que a condição expressa na Equação 4.22 pode ser mais conservadora quando comparada àquela descrita conforme a Equação 4.10. Ressalta-se que a condição expressa conforme (4.22) é suficiente para (4.10), uma vez que $\|W_s(z)C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z)\|_\infty \leq \|W_s(z)\|_\infty \|C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z)\|_\infty$ e a condição expressa em (4.22) é uma condição suficiente para $\|W_s(z)\|_\infty \|C_o(zI - A_o + B_oK)^{-1}B_oV(z)\|_\infty < 1$. A condição (4.22) foi utilizada para ilustrar graficamente a condição de estabilidade robusta no estudo de caso 5.4 no capítulo 5, enquanto que a condição de estabilidade robusta expressa na Equação 4.10 foi utilizada para síntese do filtro de robustez conforme o Teorema 4.1.1.

A sintonia do filtro de robustez conforme o teorema proposto garante estabilidade em malha fechada na presença de incertezas no modelo do processo expressas por meio de uma matriz de funções de transferência racionais de ponderação que limita a incerteza associada ao processo. A abordagem proposta foi realizada tendo em vista a parametrização do filtro de robustez considerando simultaneamente a incerteza no modelo do processo e a especificação do modelo de perturbações de entrada. Por meio da metodologia proposta neste capítulo, o projeto do filtro de robustez não requer ajustes por tentativa e erro, assim como em outros métodos presentes na literatura. No caso proposto, a definição dos parâmetros livres do filtro é feita por otimização baseada na LMI decorrente da aplicação do *Bounded Real Lemma*.

5 ESTUDOS DE CASO

Com o objetivo de apresentar a aplicação da metodologia proposta para a sintonia do SFSP, quatro estudos de caso são discutidos neste capítulo. No primeiro estudo de caso, o controlador SFSP proposto é aplicado a um processo SISO com atraso e comparado ao controlador FSP apresentado em (LIMA *et al.*, 2021). No segundo estudo de caso, o controlador SFSP proposto é aplicado a um processo MIMO com dinâmica integradora com múltiplos atrasos e comparado ao controlador preditor Smith filtrado desacoplado (DFSP) apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018). No terceiro estudo de caso, a metodologia apresentada no capítulo 4 é utilizada na síntese do filtro de robustez do controlador SFSP aplicado a um processo MIMO com dinâmica instável com múltiplos atrasos e comparado aos controladores FSP apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023). No quarto estudo de caso, resultados experimentais são apresentados a partir da aplicação da metodologia proposta para sintonia do SFSP ao controle da umidade relativa e da temperatura interna da câmara de um protótipo de uma unidade incubadora de tratamento intensivo neonatal (NICU).

5.1 Metodologia para análise comparativa

Nesta seção é explicitada a metodologia para análise dos estudos de caso apresentados. Para fins da análise comparativa, são definidos os critérios para avaliação qualitativa e quantitativa. Dessa forma, ao longo desta seção são expostas as condições e métricas necessárias para equiparação de metodologias de sintonia e os critérios para análise quantitativa dos indicadores de desempenho propostos para a avaliação dos resultados.

A análise de estabilidade robusta dos casos SISO e MIMO é realizada conforme os conceitos apresentados nas seções 3.5 e 4.2 segundo respectivos estudos de caso. O desempenho dos sistemas descritos nesse capítulo é analisado de forma equiparável por meio da condição e índices apresentados nas Equações 3.38, 3.40 e 4.22. Assim, além de atender ao critério de estabilidade robusta, os sistemas em estudo são avaliados considerando índices de robustez similares. Portanto, os sistemas controlados a partir da sintonia proposta para o SFSP foram parametrizados para atingir índices de robustez compatíveis com aqueles referenciados na literatura citados para cada estudo de caso.

A análise quantitativa dos casos simulados e do caso experimental é realizada com base no seguimento de referência (RT) e na atenuação de perturbação (DR) por meio dos índices de desempenho Integral do Erro Absoluto (IAE) e Integral do Erro Absoluto Ponderado (ITAE). Os referidos índices são dados, respectivamente, por:

$$IAE = \sum_{t=t_o}^{t_{ss}} |e_r(t)|, \quad (5.1)$$

$$ITAE = \sum_{t=t_o}^{t_{ss}} t |e_r(t)|, \quad (5.2)$$

em que t_o é o instante inicial para o cálculo do índice, t_{ss} é o instante final para o cálculo do índice, e $|e_r(t)|$ é o valor absoluto da diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência. Os índices para o seguimento de referência são calculados a partir do instante em que o sinal de referência é alterado, até o momento em que as saídas do sistema atingem o regime permanente. Para a atenuação de perturbação, o cômputo dos índices são realizados desde o instante da aplicação da perturbação de entrada, até o momento em que as saídas do sistema atingem o regime permanente.

5.2 Caso SISO: processo estável com perturbações tipo degrau e senoidal

Neste primeiro estudo de caso, a metodologia de sintonia apresentada para o SFSP é comparada ao método de ajuste para o FSP descrito em (LIMA *et al.*, 2021). O modelo do processo nominal $P_n(s)$ é dado por:

$$P_n(s) = \frac{1}{3s+1} e^{-2s}, \quad (5.3)$$

e o modelo do processo perturbado $P_r(s)$ é assumido como:

$$P_r(s) = \frac{1,10}{3,3s+1} e^{-2s}. \quad (5.4)$$

A partir das Equações 5.3 e 5.4, nota-se uma diferença de +10% no ganho estático e na constante de tempo entre o modelo do processo nominal e o modelo do processo perturbado. Para efeito de comparação, as especificações para o controle em malha fechada assumidas em (LIMA *et al.*, 2021) são replicadas para a parametrização do controlador SFSP.

A sintonia proposta para o SFSP considera o tempo de amostragem $T_s = 0,10[s]$ e o tempo de acomodação iguais aos documentados em (LIMA *et al.*, 2021). Portanto, o polo de

malha fechada para rastreamento de referência do SFSP foi alocado em $z = 0,90$, consequentemente, o ganho de realimentação de estado do modelo foi sintonizado como $K = 2,0503$ e o ganho do filtro de referência como $k_r = 3,0503$. Assim como mencionado em (LIMA *et al.*, 2021), o filtro de robustez para a sintonia do SFSP considera perturbações tipo degrau e senoidal na entrada do processo. Dessa forma, o modelo de perturbação de alta ordem $H(z)$ foi descrito incluindo o polo do modelo do processo em $z = 0,9672$, um integrador $z = 1$, uma senoide com $\omega = 0,70 \text{ [rad/s]}$ e os parâmetros de ajuste livre $\beta_1 = \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{51} = 0,80$ foram ajustados para uma condição equivalente segundo o índice de estabilidade robusta apresentado para a sintonia documentada para o FSP. Uma vez que as condições de projeto foram descritas, a equação de saída do modelo para síntese do controlador é dada pelo modelo discreto do processo nominal obtido a partir de (5.3), adicionado ao modelo de perturbação como segue:

$$y(t) = \underbrace{\frac{0,0328}{(z - 0,9672)}}_{G_o(z)} u(t - 20) + \underbrace{\frac{(z - \beta_1)^5}{z(z - 1)(z - 0,9672)(z^2 - 1,995z + 1)}}_{H(z)} e(t). \quad (5.5)$$

As matrizes para representação em espaço de estados na forma canônica observável do modelo rápido para compensação de atrasos na saída $G_o(z)$ e do modelo de perturbação $H(z)$ apresentados na Equação 5.5 são obtidas conforme o Apêndice A, na seção referente ao caso SISO. Dessa forma, considerando as matrizes de representação em espaço de estados na forma canônica observável, o filtro de robustez obtido de acordo com o ajuste proposto é calculado através da Equação 3.30 conforme o Teorema 3.4.2. Os parâmetros dos filtros e controladores projetados conforme a metodologia proposta para o SFSP, assim como os parâmetros aplicados ao FSP propostos em (LIMA *et al.*, 2021) são sumarizados na Tabela 1 para o caso SISO:

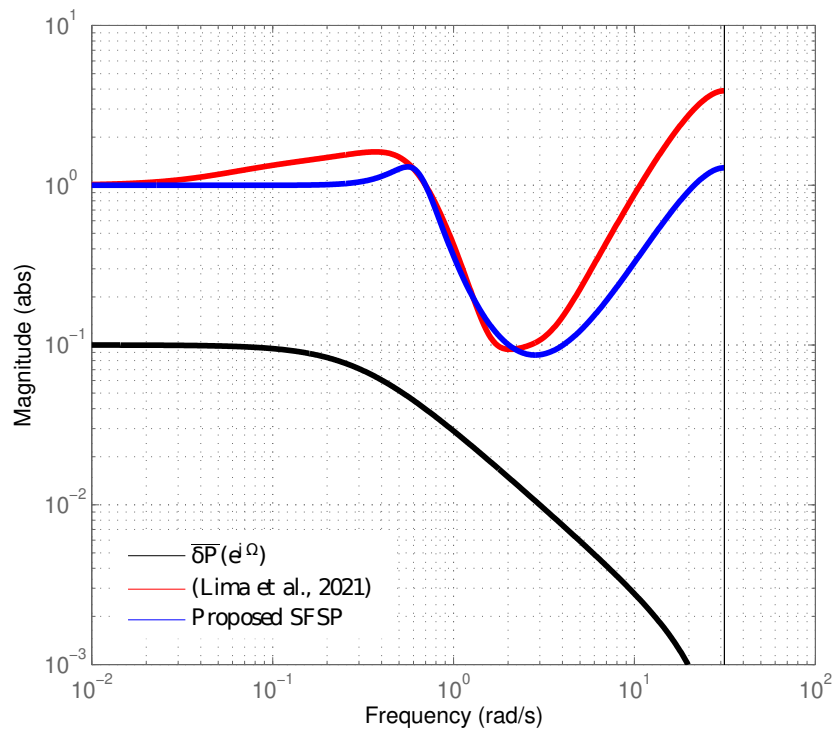
Tabela 1 – Caso SISO: parâmetros dos filtros e controladores.

	(LIMA <i>et al.</i> , 2021)	SFSP
Filtro de Referência	–	$k_r = [3,0503]$
Controlador Primário	$C(z) = \frac{4,7844(z - 0,9048)(z - 0,9512)^2}{(z - 1)(z^2 - 1,995z + 1)}$	–
Ganho de Realimentação	–	$K = [2,0503]$
Filtro de Robustez	$F_r(z) = \frac{4,9238z(z - 0,9929)(z^2 - 1,93z + 0,9329)}{(z - 0,9951)(z - 0,7377)(z^2 - 1,619z + 0,7105)}$	$V(z) = \frac{58,231z(z - 0,90)(z - 0,9575)(z^2 - 1,961z + 0,9645)}{(z - 0,80)^5}$

Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Nota-se que o parâmetro $\beta_1 = 0,80$, no denominador de $V(z)$, conforme exibido na Tabela 1, foi projetado de acordo com o método proposto para o SFSP com base no índice de estabilidade robusta do sistema de controle apresentado em (LIMA *et al.*, 2021). O ajuste visa garantir imparcialidade na comparação de desempenho, uma vez que o índice de estabilidade robusta é compatível para ambos projetos de controle em malha fechada. Tanto o índice de estabilidade robusta, como a condição de estabilidade robusta apresentados na Equação 3.38 para o caso SISO podem ser interpretados graficamente na Figura 8 a seguir:

Figura 8 – Caso SISO: condição para estabilidade robusta.

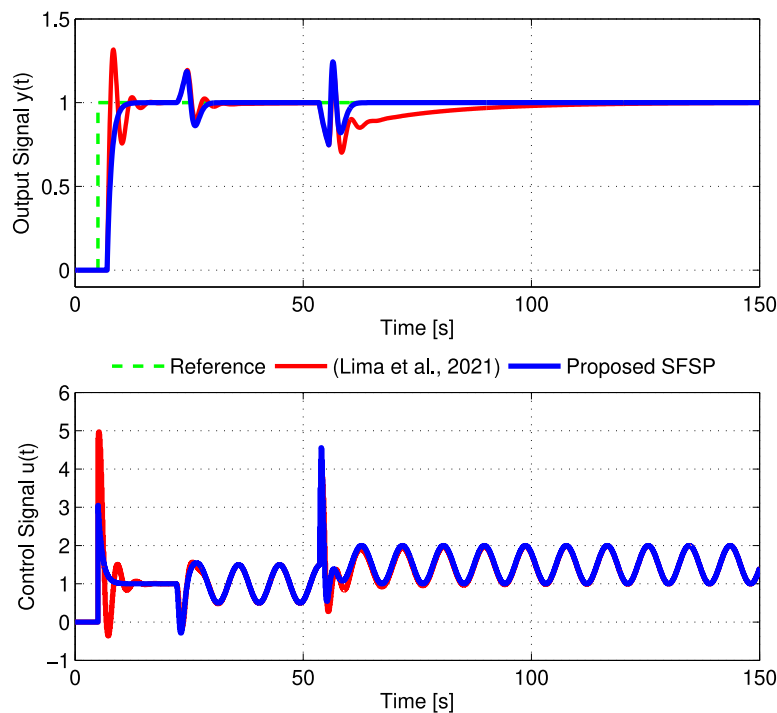


Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Conforme ilustrado na Figura 8, as curvas em azul e em vermelho correspondem à representação gráfica do índice de estabilidade robusta, tal que a curva em azul está associada à sintonia do SFSP e a curva em vermelho correspondente à sintonia proposta em (LIMA *et al.*, 2021) para o FSP. Nota-se que há uma equiparação entre os valores da magnitude para as referidas curvas, e, adicionalmente, ambas estão situadas acima da linha em preto que representa $\overline{\delta P}(e^{j\Omega})$ para todas as frequências em estudo, condição que caracteriza graficamente o critério suficiente para estabilidade robusta com base no módulo da incerteza multiplicativa prescrita.

Uma vez que o critério de estabilidade é atendido e que os índices de robustez são compatíveis, a avaliação dos índices de desempenho IAE e ITAE é realizada através da simulação em malha fechada de ambos os sistemas de controle. No início da simulação, os sistemas partiram do repouso. Em $t = 5[s]$, uma mudança de referência na forma de degrau de 0 para 1 foi realizada. Em seguida, em $t = 20[s]$, uma perturbação senoidal de entrada com frequência angular $\omega = 0,70 [rad/s]$ e amplitude de 0,50 foi adicionada. Finalmente, em $t = 51,5[s]$, uma perturbação do tipo degrau com amplitude de 0,50 foi adicionada à perturbação de entrada senoidal previamente aplicada. A simulação se estendeu até que ambos sistemas atingissem regime permanente após a aplicação das perturbações.

Figura 9 – Caso SISO: resposta em malha fechada para o modelo do processo nominal.

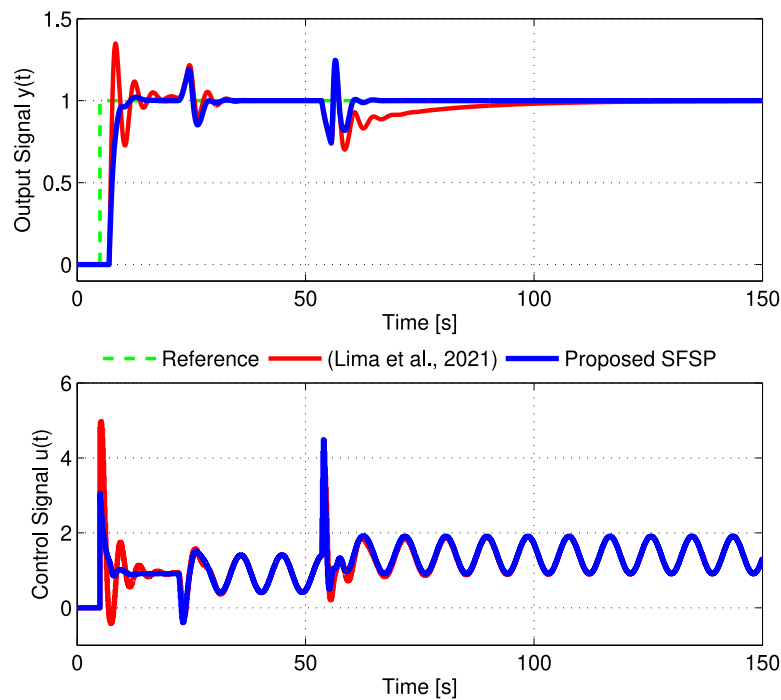


Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Na Figura 9 são apresentados os resultados da simulação em malha fechada utilizando o modelo do processo nominal. Conforme ilustrado, o ajuste proposto do SFSP para seguimento de referência resulta em uma resposta típica de sistemas de primeira ordem, portanto isento de sobressinal e oscilações na variável controlada conforme a curva em azul no gráfico do sinal de saída. Em contraste, com o controlador proposto em (LIMA *et al.*, 2021), a resposta conforme a linha em vermelho apresenta sobressinal superior a 25% e uma resposta oscilatória. Adicionalmente, ambos controladores asseguram o mesmo tempo de acomodação para o caso

nominal. Avaliando a rejeição de perturbação senoidal de entrada a partir de $t = 20[s]$, a variável controlada apresenta menos oscilações quando o sistema é sintonizado conforme o SFSP proposto. Para a perturbação tipo degrau de entrada a partir de $t = 51,5[s]$, o ajuste proposto do SFSP resulta em uma rejeição de perturbação mais rápida e com menos oscilações quando comparado à sintonia proposta em (LIMA *et al.*, 2021). Por meio da simulação, percebe-se que a saída do sistema em malha fechada conforme o ajuste proposto do SFSP atinge 96% do valor de estado estacionário em $t = 60[s]$ para perturbação em degrau, enquanto a saída do sistema em malha fechada, conforme o controlador apresentado em (LIMA *et al.*, 2021) e representado pela linha em vermelho, alcança a mesma condição em $t = 81[s]$. Portanto, o sistema parametrizado conforme (LIMA *et al.*, 2021) apresenta uma resposta lenta em relação ao sistema sintonizado conforme a proposta apresentada para o SFSP.

Figura 10 – Caso SISO: resposta em malha fechada para o modelo do processo perturbado.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Na Figura 10 são apresentadas as respostas em malha fechada para o caso em que é considerado o modelo do processo perturbado. Ambas respostas em malha fechada permanecem estáveis, preservando a capacidade de seguimento de referência e atenuação de perturbações, por outro lado, apresentam mais oscilações em comparação aos respectivos casos nominais dado o modelo do processo com as incertezas prescritas.

Para efeito da análise quantitativa das simulações em malha fechada, os índices de desempenho IAE e ITAE são calculados conforme os resultados apresentados nas simulações tanto para o caso do modelo do processo nominal, quanto para o modelo do processo perturbado. Os índices são apresentados na linha “Caso SISO” nas Tabelas 2 e 3, tal que os melhores resultados são destacados em negrito para facilitar a comparação.

Tabela 2 – Índice de desempenho IAE.

		Variável	Processo Nominal		Processo Perturbado	
Caso			Seguimento de Referência	Rejeição de Perturbação	Seguimento de Referência	Rejeição de Perturbação
SISO	SFSP (LIMA <i>et al.</i> , 2021)	y	3,0000	1,4695	3,0029	1,5349
		y	3,1683	4,5516	3,4522	4,5669
MIMO integrador	SFSP	y ₁	102,0000	54,5684	100,1419	49,6076
		y ₂	388,7748	58,7785	1,047,3844	138,5006
		y ₃	158,9943	15,9270	200,7733	23,7981
	(GIRALDO <i>et al.</i> , 2018)	y ₁	128,5562	59,9768	222,5773	89,7710
		y ₂	320,9539	61,9130	1.175,5462	285,9976
		y ₃	323,5258	42,5362	445,0917	69,3047
MIMO instável	SFSP	y ₁	4,8750	1,2543	5,4686	2,2365
		y ₂	1,9250	0,8677	2,0461	1,2961
	(FLESCHE <i>et al.</i> , 2011)	y ₁	5,0856	2,1698	5,5827	2,6902
		y ₂	2,1806	2,2262	2,3775	2,1590
	(LIMA <i>et al.</i> , 2023)	y ₁	5,0856	2,2115	7,3165	6,0763
		y ₂	2,1806	1,6941	2,7109	2,7984
Experimental	SFSP	y ₁	-	-	$3,5640 \cdot 10^3$	$1,1656 \cdot 10^3$
		y ₂	-	-	$1,7228 \cdot 10^3$	$0,1175 \cdot 10^3$

Os números em negrito indicam os melhores índices para cada variável.

Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

A partir das Tabelas 2 e 3, observa-se que a sintonia proposta para o SFSP resulta em melhores índices de desempenho para o seguimento de referência e para rejeição de perturbações em todos os cenários quando comparada com (LIMA *et al.*, 2021). Considerando os casos nominal e perturbado, o ajuste proposto do SFSP melhorou significativamente entre 5% a 13% o índice IAE e de 12% a 23% o ITAE para o seguimento de referência. A melhoria do índice foi de pelo menos 66% para o IAE e no mínimo 81% para o ITAE no caso de rejeição de perturbações. Atribui-se a notável melhoria percebida no índice ITAE, à ponderação temporal do comportamento oscilatório do rastreamento de referência e à ponderação temporal do comportamento lento da rejeição de perturbações tipo degrau de (LIMA *et al.*, 2021) quando comparado ao ajuste proposto do SFSP tanto para a caso nominal, quanto para o caso perturbado.

Tabela 3 – Índice de desempenho ITAE.

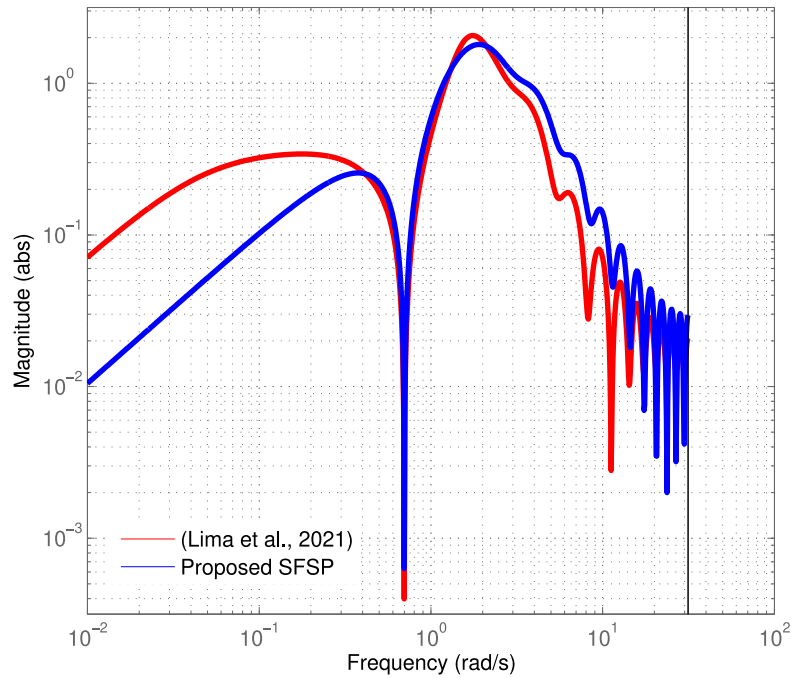
		Variável	Processo Nominal		Processo Perturbado	
Caso			Seguimento de Referência	Rejeição de Perturbação	Seguimento de Referência	Rejeição de Perturbação
SISO	SFSP (LIMA <i>et al.</i> , 2021)	y	19,8000	36,5442	20,0420	38,4770
		y	22,5394	213,0890	26,3608	207,2886
MIMO integrador	SFSP	y ₁	95,3040 · 10³	6,3638 · 10³	93,6333 · 10³	5,4531 · 10³
		y ₂	319,2305 · 10 ³	8,7684 · 10 ³	918,5168 · 10³	14,1633 · 10³
		y ₃	193,9260 · 10³	2,4082 · 10³	234,5988 · 10³	2,7636 · 10³
	(GIRALDO <i>et al.</i> , 2018)	y ₁	124,9763 · 10 ³	21,0227 · 10 ³	223,6662 · 10 ³	23,6787 · 10 ³
		y ₂	258,1128 · 10³	7,0032 · 10³	1.056,7835 · 10 ³	41,1986 · 10 ³
		y ₃	414,5573 · 10 ³	7,2436 · 10 ³	560,3823 · 10 ³	11,4469 · 10 ³
	SFSP	y ₁	41,8875	29,9182	56,2851	57,2556
		y ₂	83,1075	28,9602	89,4250	51,4144
	MIMO instável (FLESCHE <i>et al.</i> , 2011)	y ₁	48,8932	50,9424	58,0932	65,5150
		y ₂	97,2360	83,6992	107,1053	81,0324
	(LIMA <i>et al.</i> , 2023)	y ₁	48,8932	33,4490	128,2800	186,6124
		y ₂	97,2360	74,9812	114,6620	122,7933
Experimental	SFSP	y ₁	-	-	177,4531 · 10 ³	19,6458 · 10 ³
		y ₂	-	-	49,0782 · 10 ³	2,3642 · 10 ³

Os números em negrito indicam os melhores índices para cada variável.

Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

De forma complementar ao estudo da condição para estabilidade robusta e da análise quantitativa do desempenho dos sistemas em malha fechada, é apresentada uma análise de resposta em frequência para avaliar o comportamento de ambos sistemas em malha fechada ao lidar com frequências além de $\omega = 0,70[\text{rad/s}]$, especificada como a frequência da perturbação senoidal em (LIMA *et al.*, 2021). A análise é fundamentada na resposta em frequência da função de transferência em malha fechada $\bar{H}_{y_{qu}}(z)$ conforme Equação 3.11 ilustrada na Figura 11, tal que a curva em vermelho corresponde à resposta conforme a sintonia do FSP e a curva em azul refere-se à resposta associada à sintonia proposta do SFSP. Segundo apresentado no gráfico de resposta em frequência, a sintonia proposta para o SFSP promove maior atenuação em frequências abaixo de $0,40[\text{rad/s}]$ quando comparada a (LIMA *et al.*, 2021). Observa-se que, para frequências acima de $0,40[\text{rad/s}]$, intervalo que inclui a frequência especificada da perturbação de entrada, a aplicação de ambos controladores resulta em níveis similares de atenuação de perturbações.

Figura 11 – Caso SISO: resposta em frequência para função de transferência $|\overline{H}_{yqu}(e^{j\Omega})|$.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

5.3 Caso MIMO integrador: caldeira da planta Abbott em Champaign

Neste segundo estudo de caso, a metodologia de sintonia proposta para o SFSP é comparada a uma estratégia para sintonia de controladores do tipo FSP aplicada aos sistemas MIMO conforme apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018). A estratégia recentemente publicada, denominada preditor Smith filtrado desacoplado (DFSP), utiliza o desacoplamento direto do processo MIMO quadrado com múltiplos atrasos por meio de um desacoplador dinâmico. A sintonia do DFSP implica na sintonia descentralizada do controlador primário e do filtro de robustez a partir do processo aparente mediante a aplicação do desacoplador.

O processo apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018) é descrito como uma caldeira com capacidade de combustão de óleo ou gás utilizada na produção de vapor para aquecimento e geração de energia elétrica na usina Abbott em Champaign. A descrição detalhada do processo foi realizada em (PELLEGRINETTI; BENTSMAN, 1996) e o modelo MIMO quadrado 3×3 foi apresentado em (PAWLOWSKI *et al.*, 2016) conforme as matrizes de funções de transferência na Equação (5.6) a seguir:

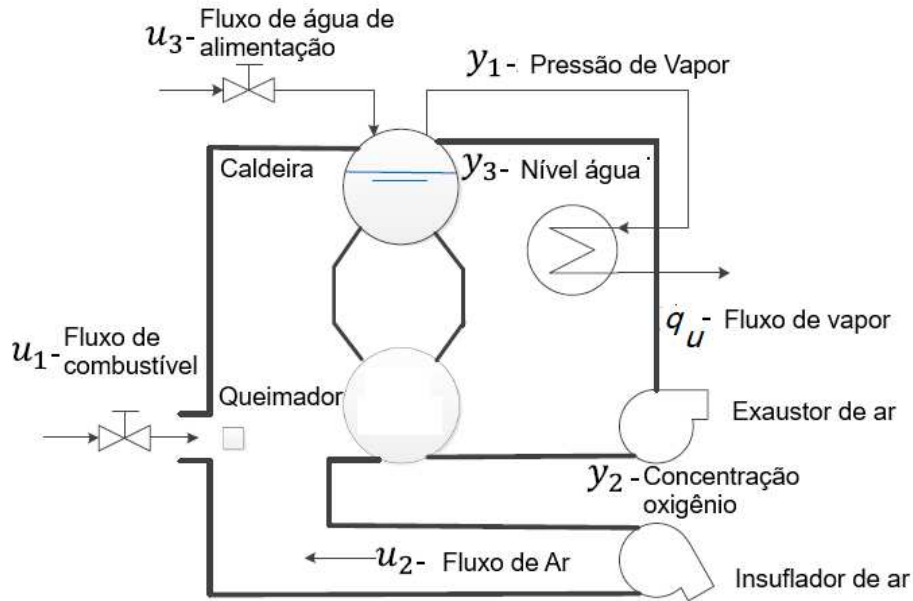
$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,355}{31s+1}e^{-8s} & 0 & -\frac{0,169}{150s+1}e^{-10s} \\ -\frac{6,36}{5,5s+1}e^{-6,2s} & \frac{5,8}{6s+1}e^{-8s} & 0 \\ \frac{0,92s-0,0057}{s(23,7s+1)}e^{-2,5s} & 0 & \frac{0,0107}{s}e^{-6,5s} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$P_{q_u}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{0,712}{195,8s+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{q_y}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0,15s-0,0015}{s(14,36s+1)}e^{-5,32s} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

onde $P(s)$ é a matriz de função de transferência do processo nominal, $P_{q_u}(s)$ é a matriz de função de transferência de perturbação de entrada, $P_{q_y}(s)$ é a matriz de função de transferência de perturbação de saída, e $Y(s) = P(s)U(s) + P_{q_u}(s)q_u(s) + P_{q_y}(s)q_y(s)$ é a expressão de saída do processo. O vetor de saída $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)]^T$ descreve as saídas do processo dadas por $y_1(t)$: a pressão do vapor na câmara de armazenamento, $y_2(t)$: a concentração de oxigênio na câmara de combustão, e $y_3(t)$: o nível de água no tanque da caldeira. O vetor de entrada $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]$ concatena as entradas associadas ao processo dadas por $u_1(t)$: o fluxo de combustível para a câmara de combustão, $u_2(t)$: o fluxo de ar para a câmara de combustão, e $u_3(t)$: o fluxo de água para alimentação do tanque da caldeira.

O objetivo do sistema em malha fechada aplicado ao processo é regular a pressão de vapor mantendo o nível de água e a concentração de oxigênio da câmara de combustão segundo os parâmetros de segurança do processo. Nota-se que a regulação é necessária, uma vez que o processo é sujeito à variação do fluxo de vapor demandado $q_u(t)$ para o sistema de aquecimento ou para o sistema de geração de energia. Os valores das variáveis modeladas do processo foram representados em escala na faixa entre 0% e 100% com base nos valores mínimos e máximos de segurança para cada variável. Um esquemático adaptado da caldeira apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018) é reproduzido na Figura 12.

Figura 12 – Caso MIMO integrador: esquemático do processo.



Fonte: adaptado de (GIRALDO *et al.*, 2018).

Para o estudo da condição de estabilidade robusta, considera-se a matriz de funções de transferência do processo perturbado $P_r(s) = 1,1L_u(s)P(s)$, tal que $L_u(s)$ representa a matriz de perturbação de atrasos:

$$P_r(s) = 1,1 \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-6s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6s} \end{bmatrix}}_{L_u(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0,355}{31s+1}e^{-8s} & 0 & -\frac{0,169}{150s+1}e^{-10s} \\ -\frac{6,36}{5,5s+1}e^{-6,2s} & \frac{5,8}{6s+1}e^{-8s} & 0 \\ \frac{0,92s-0,0057}{s(23,7s+1)}e^{-2,5s} & 0 & \frac{0,0107}{s}e^{-6,5s} \end{bmatrix}}_{P(s)}. \quad (5.8)$$

Portanto, para o estudo relacionando à robustez, considera-se uma discrepância de pelos menos +75% nos atrasos do processo e +10% nos ganhos estáticos entre o modelo do processo nominal $P(s)$ e o modelo do processo perturbado $P_r(s)$.

O modelo do processo nominal em tempo discreto obtido a partir da Equação 5.6 com segurador de ordem zero (ZOH) e tempo de amostragem $T_s = 1[s]$ é dado por:

$$P_n(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-7} \end{bmatrix}}_{L(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0,01127}{z-0,9683} & 0 & -\frac{0,00112}{z-0,9934}z^{-2} \\ -\frac{1,0573}{z-0,8338}z^{-1} & \frac{0,8904}{z-0,8465} & 0 \\ \frac{0,03789(z-1,006)}{(z-1)(z-0,9587)}z^{-1} & 0 & \frac{0,0107}{z-1} \end{bmatrix}}_{G_o(z)}. \quad (5.9)$$

É importante notar a diferença entre os atrasos do modelo do processo nominal em tempo contínuo conforme Equação 5.6 e os respectivos atrasos do modelo do processo nominal em tempo discreto apresentados na Equação 5.9. A diferença é justificada pela realizabilidade do desacoplamento e pelo arredondamento de atrasos com base no tempo de amostragem especificado em (GIRALDO *et al.*, 2018), igualmente considerada para a parametrização do SFSP.

Para lidar com as especificações de seguimento de referência, assim como a condição de estabilidade robusta assumida em (GIRALDO *et al.*, 2018), a sintonia proposta considera o desacoplamento por realimentação de estados, conforme Seção 3.4.1, para ajustar K e k_r . A sintonia resulta em tempos de acomodação semelhantes aos apresentados em (GIRALDO *et al.*, 2018) para cada saída do sistema. Os polos do sistema em malha fechada para o seguimento de referência foram alocados em $z = 0,96$, $z = 0,85$ e $z = 0,97$, respectivamente, para cada par $(r_i(t), y_i(t))$, com $i = 1, 2, 3$, conforme a Equação 3.29. A sintonia do filtro de robustez conforme a metodologia proposta para o SFSP considera perturbações do tipo degrau e visa anular os efeitos indesejados das dinâmicas lentas e integrativas adicionais do modelo nominal $P_n(z)$, conforme descrito em (GIRALDO *et al.*, 2018). Sendo assim, para fins de sintonia do controlador, os modelos de perturbação de alta ordem $H_1(z)$, $H_2(z)$ e $H_3(z)$ foram definidos incluindo os polos indesejados do modelo nominal $z = 0,9683$ e $z = 0,9934$ para y_1 ; $z = 0,8338$ e $z = 0,8465$ para y_2 ; $z = 1$ e $z = 0,9587$ para y_3 ; e um integrador $z = 1$ para cada saída. Os parâmetros de sintonia livre $\beta_1 = \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0,965$, $\beta_2 = \beta_{12} = \beta_{22} = \beta_{32} = 0,84$ e $\beta_3 = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{33} = 0,96$ foram selecionados com objetivo de obter uma condição de estabilidade robusta equiparável àquela do controlador sintonizado em (GIRALDO *et al.*, 2018) para o sistema em malha fechada.

Portanto, as saídas do modelo são obtidas a partir da matriz de funções de transferência em tempo discreto dada conforme a Equação 5.9 e do modelo de perturbação especificado:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{0,01127}{z-0,9683}u_1(t-8) - \frac{0,00112}{z-0,9934}u_3(t-10) + \frac{(z-\beta_1)^3}{(z-1)(z-0,9683)(z-0,9934)}e_1(t), \\ y_2(t) &= -\frac{1,0573}{z-0,8338}u_1(t-9) + \frac{0,8904}{z-0,8465}u_2(t-8) + \frac{(z-\beta_2)^3}{(z-1)(z-0,8338)(z-0,8465)}e_2(t), \\ y_3(t) &= \frac{0,0379(z-1,006)}{(z-1)(z-0,9587)}u_1(t-8) + \frac{0,0107}{z-1}u_3(t-7) + \frac{(z-\beta_3)^3}{(z-1)^2(z-0,9587)}e_3(t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

As matrizes para representação em espaço de estados na forma canônica observável do modelo rápido do processo $G_o(z)$ e dos modelos de perturbação $H_1(z)$, $H_2(z)$ e $H_3(z)$, segundo a Equação 5.10, são obtidas conforme o Apêndice A. Assim, a partir das matrizes de espaço de estados do modelo rápido e dos modelos de perturbação definem-se as matrizes de realimentação de estados do modelo K , os ganhos do filtro de referência k_r e a matriz de funções de transferência do filtro de robustez $V(z)$, obtida conforme a Equação 3.30, segundo a sintonia unificada proposta para o SFSP. De forma sumária, os parâmetros utilizados para fim de comparação dos dois controladores são apresentados na Tabela 4.

Os parâmetros β_1 , β_2 e β_3 dos modelos de perturbação foram selecionados resultando em um índice de condição de estabilidade robusta similar ao do sistema em malha fechada apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018). Assim, a escolha dos parâmetros garante equidade na comparação considerando o desempenho dos sistemas em malha fechada. A condição de estabilidade robusta conforme a Equação 3.40 é representada graficamente na Figura 13.

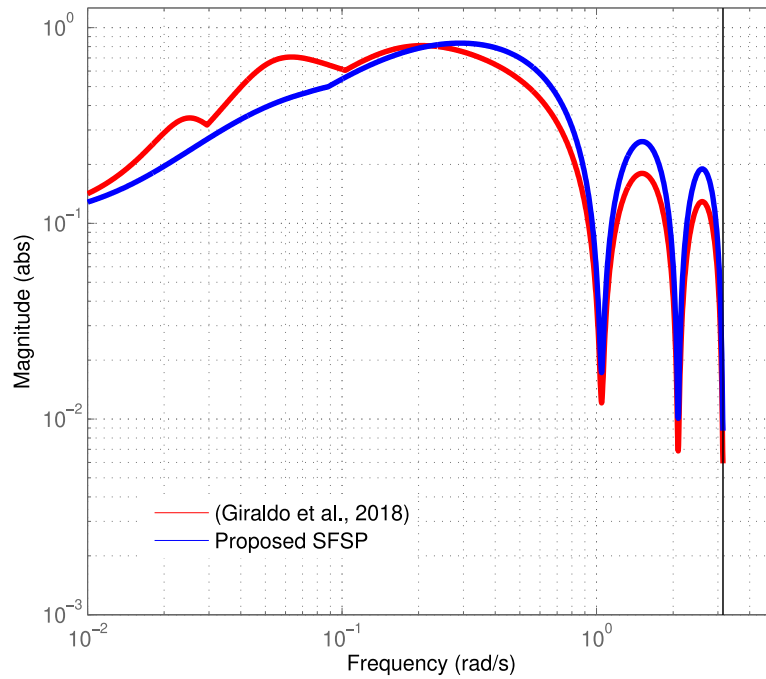
Observa-se por meio da representação gráfica o índice de estabilidade robusta e a condição de estabilidade robusta representados pelas linhas vermelha e azul. Nesse caso, tanto a linha vermelha, que representa o maior valor singular do lado esquerdo da Equação 3.40 segundo a sintonia do DFSP proposta em (GIRALDO *et al.*, 2018), quanto a linha azul, que representa a sintonia SFSP proposta, estão abaixo da linha horizontal de magnitude unitária para todas as frequências estudadas. Portanto, trata-se de uma condição suficiente para assegurar a estabilidade robusta com base na incerteza prescrita associada ao modelo do processo perturbado $P_r(s)$ apresentado na Equação 5.8. Adicionalmente, percebe-se que ambas linhas representam máximos valores singulares equiparáveis ao longo de todas as frequências representadas no referido gráfico.

Tabela 4 – Caso MIMO integrador: parâmetros dos filtros e controladores.

(GIRALDO <i>et al.</i> , 2018)		SFSP	
Filtro de Referência	–	$k_r = \begin{bmatrix} 3,5496 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1685 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8037 \end{bmatrix}$	
Desacoplador	$D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{0,099648(z-0,9683)}{(z-0,9934)}z^{-2} \\ \frac{1,1875(z-0,8465)}{(z-0,8338)} & 1 & \frac{0,11833(z-0,9683)(z-0,8465)}{(z-0,9934)(z-0,8338)}z^{-2} \\ \frac{-3,5413(z-1,006)}{(z-0,9587)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–	
Controlador Primário	$C(z) = \begin{bmatrix} \frac{1,0331(z-0,8341)}{(z-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,13364(z-0,7737)}{(z-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1,0228(z-0,9545)}{(z-1)} \end{bmatrix}$	–	
Ganho de Realimentação	–	$K = \begin{bmatrix} 88,8830 & 88,740 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 2} & 0,9324 & 1,1231 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 92,4003 & 93,4579 \end{bmatrix}$	
Filtro de Robustez	$F_r(z) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \frac{4,1960(z-0,968)(z-0,9254)}{(z-0,90)^2} \\ \frac{0,9800(z-0,8469)}{(z-0,85)} \\ \frac{1,30(z-0,9615)}{(z-0,95)} \end{bmatrix}^T \right)$	$V(z) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \frac{6,5404(z-0,96)(z-0,9683)(z-0,9817)}{(z-0,965)^3} \\ \frac{0,1801(z-0,85)(z-0,8337)(z-0,8464)}{(z-0,84)^3} \\ \frac{8,367(z-0,97)(z-0,9587)(z-0,9827)}{(z-0,96)^3} \end{bmatrix}^T \right)$	

Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

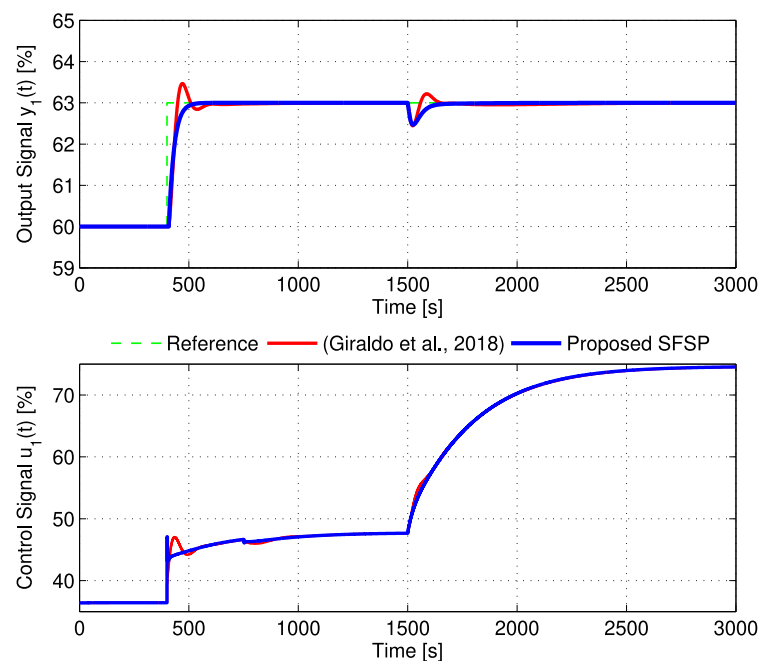
Figura 13 – Caso MIMO integrador: condição para estabilidade robusta.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Para simulação do processo em malha fechada foram consideradas condições semelhantes àsquelas apresentadas em (GIRALDO *et al.*, 2018). Nesse caso, a simulação iniciou com as variáveis controladas regulando em torno das referências 60%, 50% e 50% para pressão de vapor na câmara, concentração de oxigênio na câmara de combustão e nível de água na caldeira, respectivamente. Em $t = 100[s]$, a referência da concentração de oxigênio na câmara de combustão foi reduzida de 50% para 40%. Em $t = 400[s]$, a referência para a pressão de vapor foi aumentada de 60% para 63%. Em $t = 750[s]$, a referência para o nível de água na caldeira foi alterada de 50% para 47%. Finalmente, em $t = 1500[s]$, um degrau unitário na demanda de vapor foi aplicado.

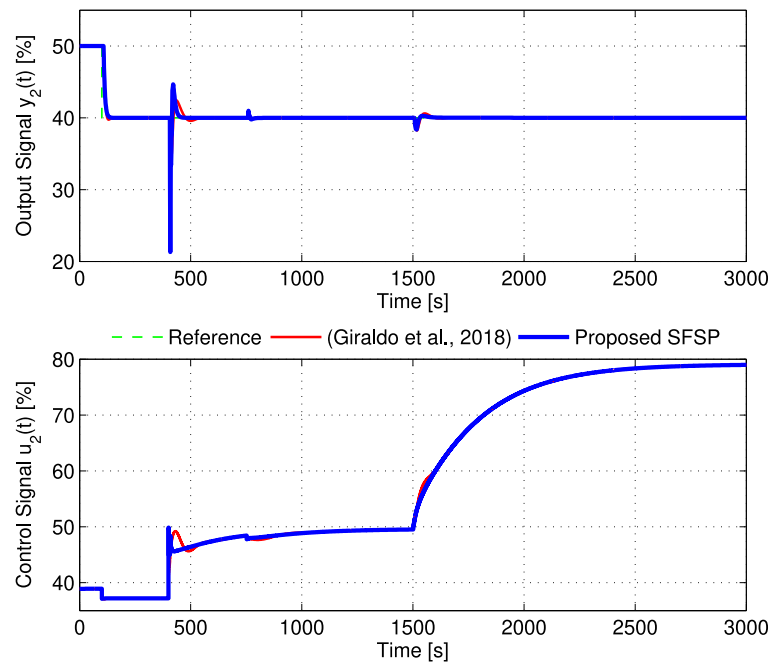
Figura 14 – Caso MIMO integrador: pressão de vapor $y_1(t)$ e fluxo de combustível para a câmara de combustão $u_1(t)$ - modelo do processo nominal.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

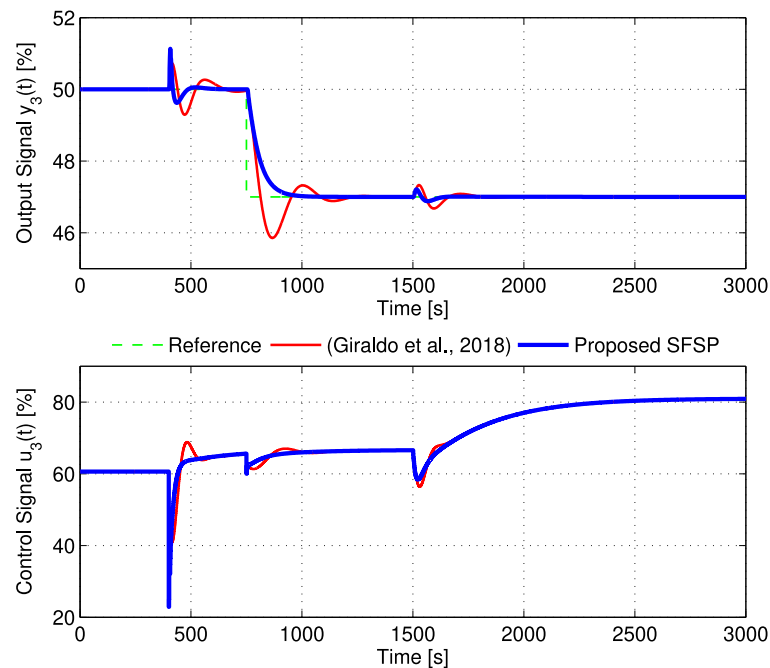
Nota-se a partir dos resultados da simulação apresentados nas Figuras 14, 15 e 16 que a sintonia proposta para o SFSP apresenta respostas com comportamento de sistema de primeira ordem, sem sobressinal e sem oscilações para o seguimento de referência para todas as variáveis controladas conforme as linhas azuis. Adicionalmente, para o controlador parametrizado em (GIRALDO *et al.*, 2018), as saídas do sistema em malha fechada apresentam sobressinais maiores que 15% até 30%, para y_1 e y_3 , respectivamente, conforme as linhas vermelhas. Ambos

Figura 15 – Caso MIMO integrador: concentração de oxigênio $y_2(t)$ e fluxo de ar na câmara de combustão $u_2(t)$ - modelo do processo nominal.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Figura 16 – Caso MIMO integrador: nível de água $y_3(t)$ e fluxo de entrada de água $u_3(t)$ - modelo do processo nominal.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

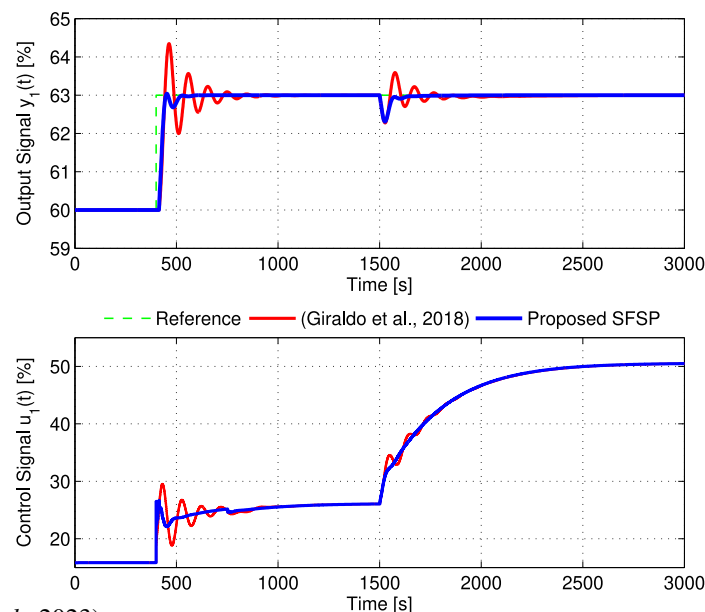
sistemas em malha fechada resultam em tempos de acomodação semelhantes para o seguimento de referência considerando as três variáveis controladas. Adicionalmente, percebe-se a ocorrên-

cia de interações residuais entre as variáveis controladas para ambas sintonias. O acoplamento deu-se devido à discrepância entre os atrasos do modelo nominal do processo contínuo e os atrasos considerados no modelo discreto do processo assumindo a condição de realizabilidade do desacoplamento estabelecida em (GIRALDO *et al.*, 2018). Nota-se que não ocorrem interações residuais nas respostas da pressão de vapor segundo $y_1(t)$, pois a saída é a única modelada conforme a descrição do processo nominal. A sintonia proposta para o SFSP resulta em menores oscilações e rápida atenuação de perturbações quando comparado ao resultado utilizando o controlador apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018) para as interações residuais associadas à concentração de oxigênio e ao nível da água na caldeira. Por outro lado, notam-se picos de interação mais intensos quando considerados os resultados oriundos da simulação aplicando a sintonia proposta para o SFSP.

Avaliando a atenuação de perturbações a partir de $t = 1500[s]$ até $t = 3000[s]$ devido à variação na demanda de fluxo de vapor, observa-se que a sintonia proposta para o SFSP resulta em uma atenuação mais rápida e menos oscilatória da perturbação em todas as três variáveis controladas quando comparado ao controlador proposto em (GIRALDO *et al.*, 2018).

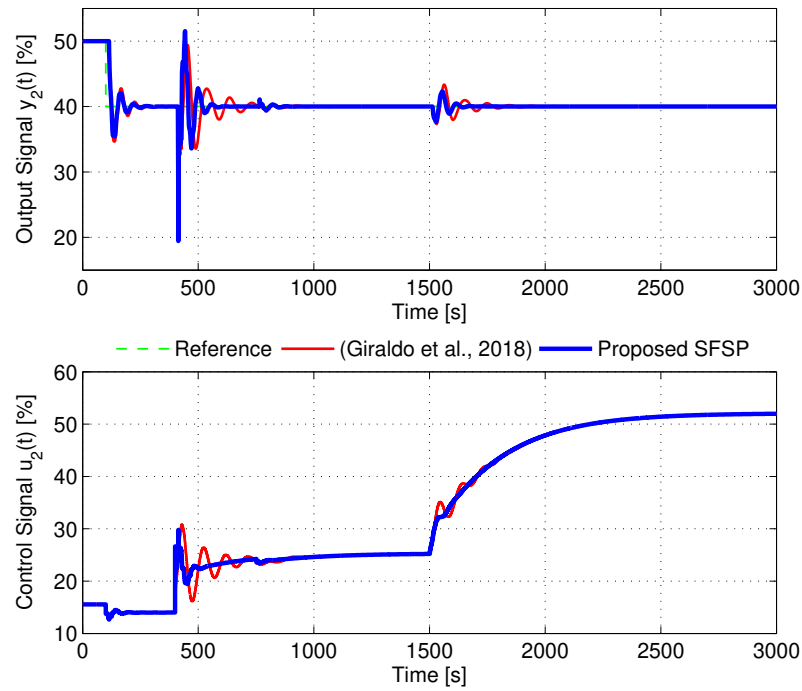
Os resultados das simulações utilizando o modelo do processo perturbado são apresentados nas Figuras 17, 18 e 19 a seguir:

Figura 17 – Caso MIMO integrador: pressão de vapor $y_1(t)$ e fluxo de combustível para a câmara de combustão $u_1(t)$ - modelo do processo perturbado.



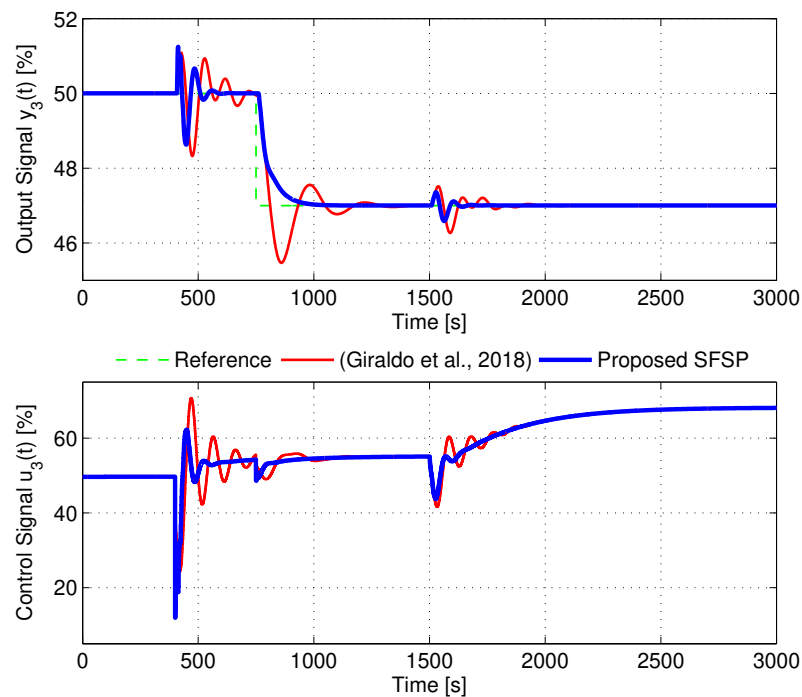
Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Figura 18 – Caso MIMO integrador: concentração de oxigênio $y_2(t)$ e fluxo de ar na câmara de combustão $u_2(t)$ - modelo do processo perturbado.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Figura 19 – Caso MIMO integrador: nível de água $y_3(t)$ e fluxo de entrada de água $u_3(t)$ - modelo do processo perturbado.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

A partir dos gráficos apresentados nas Figuras 17, 18 e 19, nota-se que as respostas em malha fechada para o modelo do processo perturbado permaneceram estáveis, porém apresentaram mais oscilações quando comparadas a cada uma das respectivas respostas do caso nominal para ambos controladores. As respostas em malha fechada dos sistemas aplicando a sintonia proposta para o SFSP atingem regime permanente mais rapidamente avaliando o seguimento de referência, as interações residuais e a rejeição de perturbações quando comparados àquelas decorrentes do controlador apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018).

A partir dos resultados da simulação em malha fechada, os índices de desempenho IAE e ITAE foram calculados tanto para o caso nominal, quanto para o caso perturbado, tendo em vista a análise quantitativa. Os resultados computados conforme os indicadores citados são dispostos nas Tabelas 2 e 3 na linha “Caso MIMO”, tal que os melhores índices de desempenhos para cada variável controlada foram destacados em negrito

Observa-se como resultado da computação dos índices de desempenho que o sistema em malha fechada utilizando a sintonia proposta para o SFSP apresenta melhores índices tanto para o rastreamento de referência quanto para a rejeição de perturbações na maioria dos cenários.

Em todos os cenários, os índices associados ao sistema com SFSP considerando as variáveis controladas y_1 e y_3 , são melhores quando comparado aos índices associados ao controlador apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018). Considerando os casos de estudo utilizando o modelo nominal e modelo perturbado do processo, a sintonia proposta do SFSP melhorou significativamente os índices para seguimento de referência de 20% até 58% para y_1 , e de 50% até 58% para y_3 .

Adicionalmente, os índices associados à atenuação de perturbação utilizando o SFSP apresentaram melhorias de 9% até 76% para y_1 , e de 62% até 75% para y_3 . Considerando y_2 , a sintonia proposta do SFSP resultou em uma melhoria para o seguimento de referência de 10% até 13%, e, para atenuação de perturbações, de 51% até 73%, para o caso do modelo do processo perturbado. Nota-se que a aplicação do controlador sintonizado em (GIRALDO *et al.*, 2018) resultou em melhores índices associados ao rastreamento de referência de 17% até 19% para y_2 , e, para atenuação de perturbações, o índice ITAE foi melhorado em 20% no caso nominal.

Os picos de interação na concentração de oxigênio conforme a variável controlada y_2 nas respostas resultantes da aplicação de ambos controladores ampliam os valores dos índices de desempenho para todos os cenários relacionados à variável controlada concentração de oxigênio. Vale destacar que os valores mais elevados dos índices de desempenho estão relacionados às discrepâncias em relação ao modelo adotado para sintonia dos controladores e à dinâmica em malha aberta mais rápida relacionada à variável y_2 em relação as demais variáveis controladas.

5.4 Caso MIMO instável: processo com dinâmicas instáveis

Neste terceiro estudo de caso, o processo MIMO instável, originalmente descrito em (FLESCH *et al.*, 2011) e posteriormente em (LIMA *et al.*, 2023), foi utilizado para demonstrar o processo de síntese do controlador SFSP proposto aplicado a processos com dinâmicas instáveis. O estudo de caso considera a sintonia dos parâmetros livres do filtro de robustez computados via otimização conforme descrito no capítulo 4. A matriz de funções de transferência do processo é dada por:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,6}{-2,6s+1}e^{-4s} & \frac{0,6}{2,5s+1}e^{-6s} \\ \frac{0,7}{3s+1}e^{-5s} & \frac{1,7}{-2,2s+1}e^{-3s} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Para efeito de análise de robustez, considera-se o processo perturbado $P_r(s) = 1,05P(s)$:

$$P_r(s) = 1,05 \begin{bmatrix} \frac{1,6}{-2,6s+1}e^{-4s} & \frac{0,6}{2,5s+1}e^{-6s} \\ \frac{0,7}{3s+1}e^{-5s} & \frac{1,7}{-2,2s+1}e^{-3s} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Portanto, é considerada uma diferença +5% nos ganhos estáticos entre o modelo do processo nominal $P(s)$ e o modelo do processo perturbado $P_r(s)$.

O modelo do processo nominal em tempo discreto utilizando um segurador de ordem zero e período de amostragem $T_s = 0,2[s]$ obtido a partir do modelo descrito na Equação 5.11 é dado por:

$$P_n(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-20} & 0 \\ 0 & z^{-15} \end{bmatrix}}_{L(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-0,1279}{z-1,08} & \frac{0,0461}{z-0,9231} z^{-10} \\ \frac{0,0451}{z-0,9355} z^{-10} & \frac{-0,1618}{z-1,095} \end{bmatrix}}_{G_o(z)}, \quad (5.13)$$

tal que $L(z)$ representa a matriz de atrasos comuns e $G_o(z)$ é o modelo rápido para compensação de atrasos na saída do processo.

Considerando as especificações de seguimento de referência, assim como a condição de estabilidade robusta descritas em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023), a sintonia do controlador primário é realizada por meio do desacoplamento por realimentação de estados, conforme Seção 3.4.1, para o ajuste K e k_r . A sintonia resulta em tempos de acomodação semelhantes aos apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023) para cada saída do sistema. Os polos do sistema em malha fechada para o seguimento de referência foram alocados em $z = 0,92$ e $z = 0,92$, respectivamente, conforme a Equação 3.29, resultando em tempo de acomodação de aproximadamente de $12[s]$.

A sintonia do filtro de robustez conforme a metodologia proposta para o SFSP considerou perturbações tipo de degrau e visa garantir a estabilidade interna do controlador da mesma forma como observado em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023). Portanto, para fins de sintonia do controlador, os modelos de perturbação $H_1(z)$ e $H_2(z)$ foram parametrizados incluindo os polos instáveis do modelo nominal $z = 1,08$ para y_1 ; e, $z = 1,0953$ para y_2 , além de um polo integrador $z = 1$ para cada saída. Os parâmetros de sintonia livre $\beta_{11} = 0,7442$, $\beta_{21} = 0,5260$, $\beta_{12} = 0,6690$ e $\beta_{22} = 0,4913$ foram obtidos conforme o procedimento descrito do capítulo 4 e a sintonia resultou em uma condição de estabilidade robusta equiparável àquela dos controladores sintonizados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023) para o sistema em malha fechada.

Neste estudo de caso, os parâmetros livres do filtro de robustez foram computados considerando a função de ponderação da incerteza dada conforme a Equação 5.14 a seguir:

$$W_s(z) = \begin{bmatrix} 51,784 \cdot 10^{-3} \frac{z-0.9868}{z-0.9932} & 0 \\ 0 & 51,784 \cdot 10^{-3} \frac{z-0.9868}{z-0.9932} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Segundo os critérios de desempenho descritos nos parágrafos anteriores, as saídas do modelo são obtidas a partir da matriz de funções de transferência em tempo discreto dada conforme a Equação 5.13 e do modelo de perturbação especificado:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\frac{0,1279}{z-1,08}u_1(t-20) - \frac{0,0461}{z-0,9231}u_2(t-30) + \frac{(z-\beta_{11})(z-\beta_{12})}{(z-1)(z-1,08)}e_1(t), \\ y_2(t) &= \frac{0,0451}{z-0,9355}u_1(t-25) - \frac{0,1618}{z-1,095}u_2(t-15) + \frac{(z-\beta_{21})(z-\beta_{22})}{(z-1)(z-1,095)}e_2(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

As matrizes de representação em espaço de estados do modelo rápido do processo $G_o(z)$ e dos modelos de perturbação $H_1(z)$ e $H_2(z)$, segundo a Equação 5.15, são obtidas conforme o Apêndice A. A partir das matrizes de espaço de estados do modelo rápido e dos modelos de perturbações, definem-se as matrizes de realimentação de estados do modelo K , os ganhos do filtro de referência k_r e a matriz de funções de transferência do filtro de robustez $V(z)$, essa última obtida conforme o Teorema 4.1.1. Os parâmetros utilizados para fim de comparação com os controladores apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023) são sumarizados na Tabela 5.

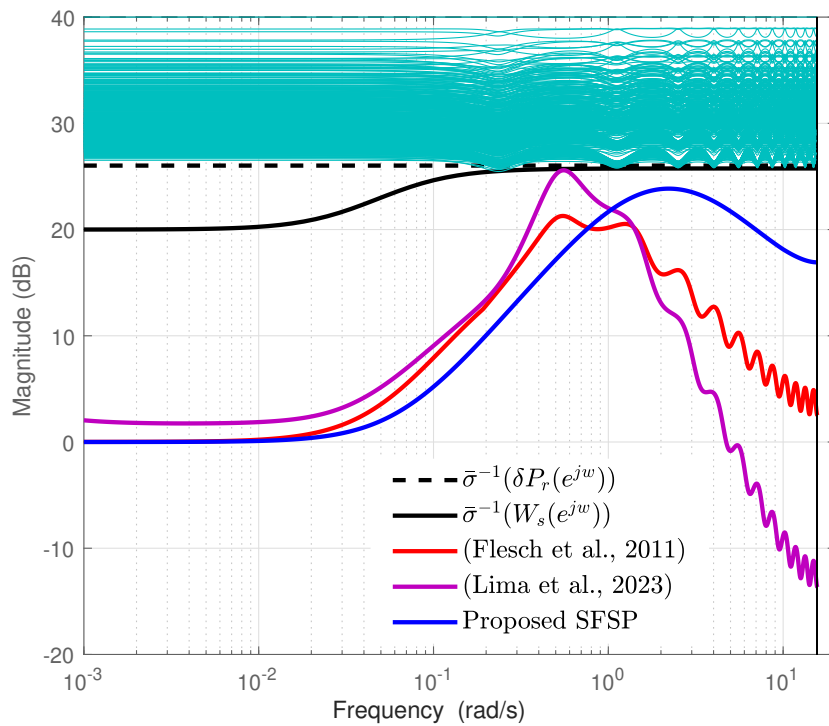
Os parâmetros β_{11} , β_{12} , β_{21} e β_{22} dos modelos de perturbação foram obtidos conforme o procedimento descrito no capítulo 4 segundo a condição de estabilidade robusta expressa na Equação 4.10, e a condição de estabilidade conforme a Equação 4.22 foi utilizada para representação gráfica apresentada na Figura 20. A partir da representação gráfica dos índices de

Tabela 5 – Caso MIMO instável: parâmetros dos filtros e controladores.

SFSP	
Filtro de Referência	$k_r = \begin{bmatrix} -0,6253 & 0 \\ 0 & -0,4945 \end{bmatrix}$
Ganho de Realimentação	$K = \begin{bmatrix} -8,4659 & -7,8165 & \mathbf{0}_{2 \times 10} & 0 & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 10} \\ 0 & 0 & & -6,8650 & -6,1809 & \end{bmatrix}$
Filtro de Robustez	$V(z) = \begin{bmatrix} \frac{-72,824(z-0,987)(z-0,92)}{(z-0,7442)(z-0,526)} & 0 \\ 0 & \frac{-54,424(z-0,9809)(z-0,92)}{(z-0,669)(z-0,4913)} \end{bmatrix}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 20 – Caso MIMO instável: condição para estabilidade robusta.



Fonte: elaborada pelo autor.

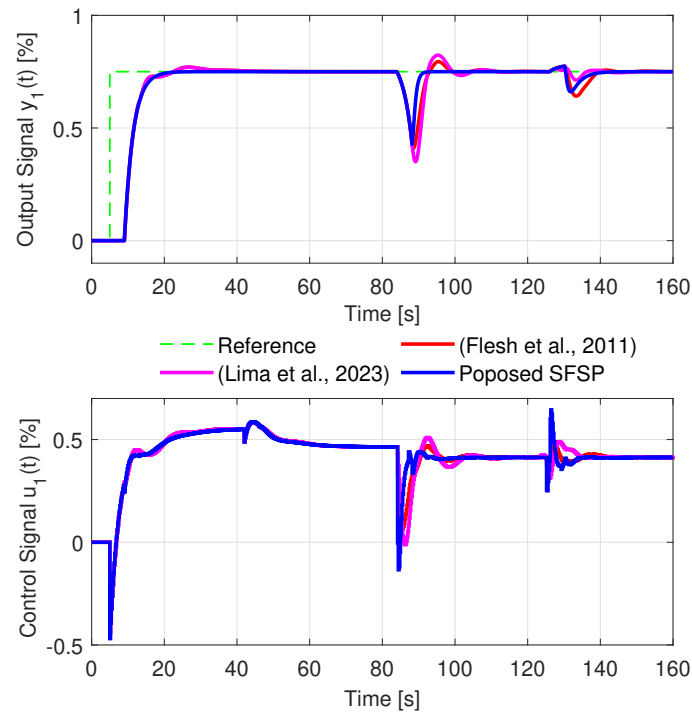
robustez, observa-se que a sintonia proposta para o SFSP conforme o filtro de robustez obtido por otimização atendeu a condição de estabilidade robusta descrita segundo a Equação 4.22. Nesse caso, as linhas referentes aos índices de robustez nas cores vermelho conforme a sintonia

proposta em (FLESCH *et al.*, 2011); rosa, obtida segundo a parametrização descrita em (LIMA *et al.*, 2023); e, azul resultante da parametrização conforme proposto no capítulo 4, estão abaixo da linha na cor preta referente ao inverso da ponderação da incerteza $\bar{\sigma}^{-1}(W_s(e^{j\Omega}))$. Observa-se que as linhas citadas estão todas abaixo das linhas em azul-claro, que representam o inverso da incerteza multiplicativa considerando variações entre $\pm 5\%$ em ganho estático de cada entrada da matriz do modelo do processo. Percebe-se que as linhas incluem P_r conforme a Equação 5.12, representada pela linha preta tracejada $\bar{\sigma}^{-1}(\delta P_r(e^{j\Omega}))$. Portanto, as sintonias em comparação asseguram estabilidade robusta mediante a incerteza proposta. Adicionalmente, satisfazem a condição de suficiência para estabilidade robusta considerando incertezas limitadas pela curva de ponderação conforme a Equação 5.14, tal que $\bar{\sigma}^{-1}(W_s(e^{j\Omega})) \leq \bar{\sigma}^{-1}(\delta(e^{j\Omega}))$, $\forall \Omega \in [0, \pi]$.

Para simulação do processo em malha fechada foram utilizadas as mesmas condições documentadas em (FLESCH *et al.*, 2011) e (AMARAL *et al.*, 2023). Nesse caso, a simulação iniciou com as variáveis controladas a partir do repouso. Para fins de análise do desempenho considerando o seguimento de referência, uma mudança tipo degrau com amplitude 0,75 foi aplicada em $t = 5[s]$ na variável y_1 . A seguir, no instante $t = 40[s]$, uma mudança na referência tipo degrau com amplitude 0,35 foi aplicada na variável y_2 . Para análise da regulação mediante perturbações, foram consideradas duas perturbações de entrada tipo degrau com amplitude 0,05 nos instantes $t=80[s]$ na entrada u_1 , e, em $t=120[s]$ na entrada u_2 , respectivamente. Para efeito de simulação, tanto o modelo nominal como o modelo perturbado da planta foram avaliados.

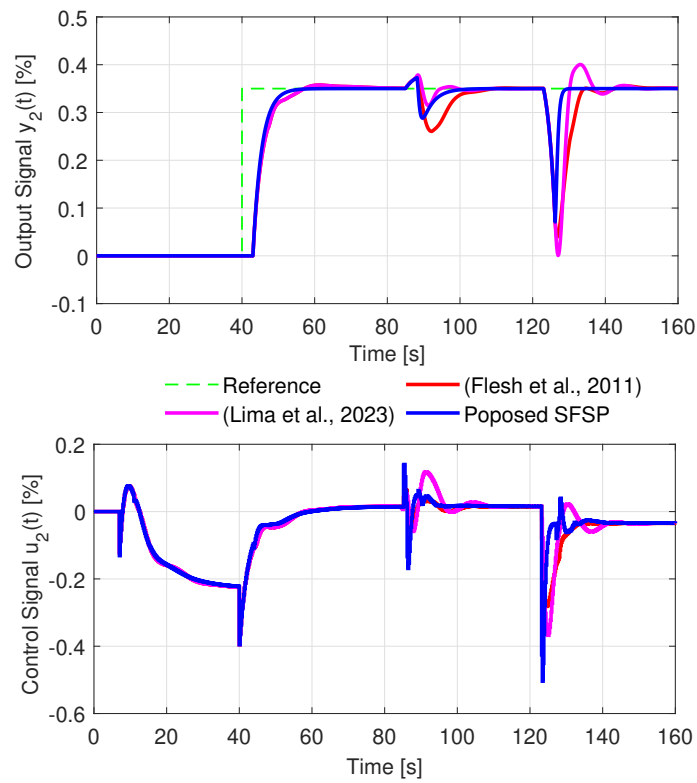
Nota-se a partir dos resultados da simulação apresentados nas Figuras 21 e 22 que a sintonia proposta para o SFSP apresenta respostas com comportamento de sistema de primeira ordem, sem sobressinal e sem oscilações para o seguimento de referência para as variáveis controladas conforme as linhas azuis para o caso nominal. Adicionalmente, para os controladores parametrizados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023), representados pelas linhas vermelha e rosa, respectivamente, as saídas do sistema em malha fechada se sobrepõem tendo em vista que ambos utilizaram o mesmo controlador primário, apresentando sobressinais e oscilação antes de atingir o regime permanente. Para todos os casos, os controladores promoveram desacoplamento ideal para os sistemas em malha fechada, adicionalmente, todos os sistemas em teste resultaram em tempos de acomodação semelhantes para o seguimento de referência em torno de 12[s] conforme especificado nos requisitos de desempenho em malha fechada. Avaliando a

Figura 21 – Caso MIMO instável: saída $y_1(t)$ e entrada $u_1(t)$ - modelo do processo nominal.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 22 – Caso MIMO instável: saída $y_2(t)$ e entrada $u_2(t)$ - modelo do processo nominal.

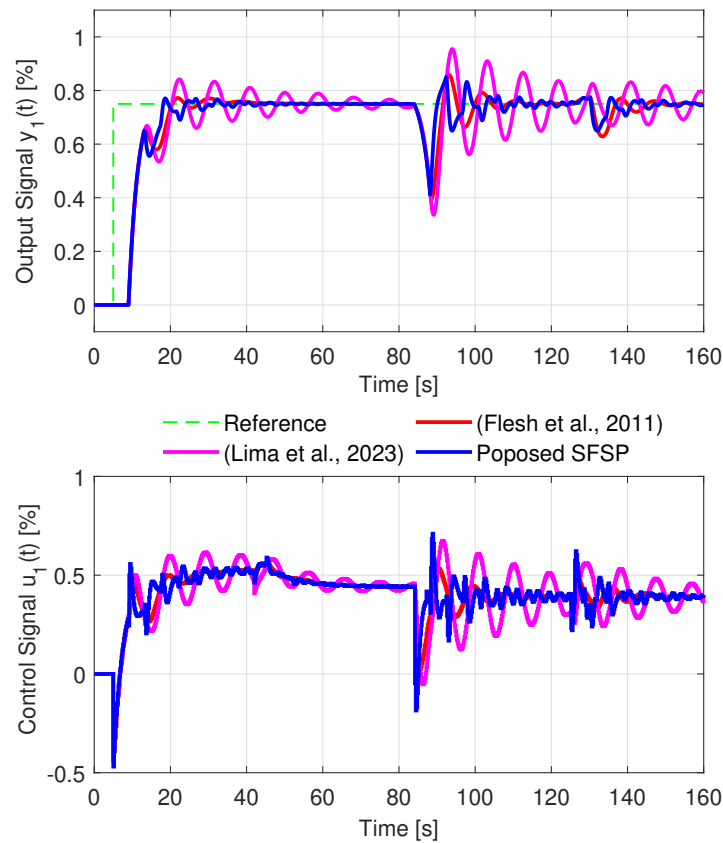


Fonte: elaborada pelo autor.

atenuação de perturbações a partir de $t = 80[s]$ e $t = 120[s]$ até o final da simulação, percebe-se que a sintonia proposta para o SFSP resulta em atenuação de perturbações de entrada mais rápidas e com menos oscilações quando comparadas ao resultado utilizando os controladores apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023).

Os resultados das simulações utilizando o modelo do processo perturbado são apresentados nas Figuras 23 e 24.

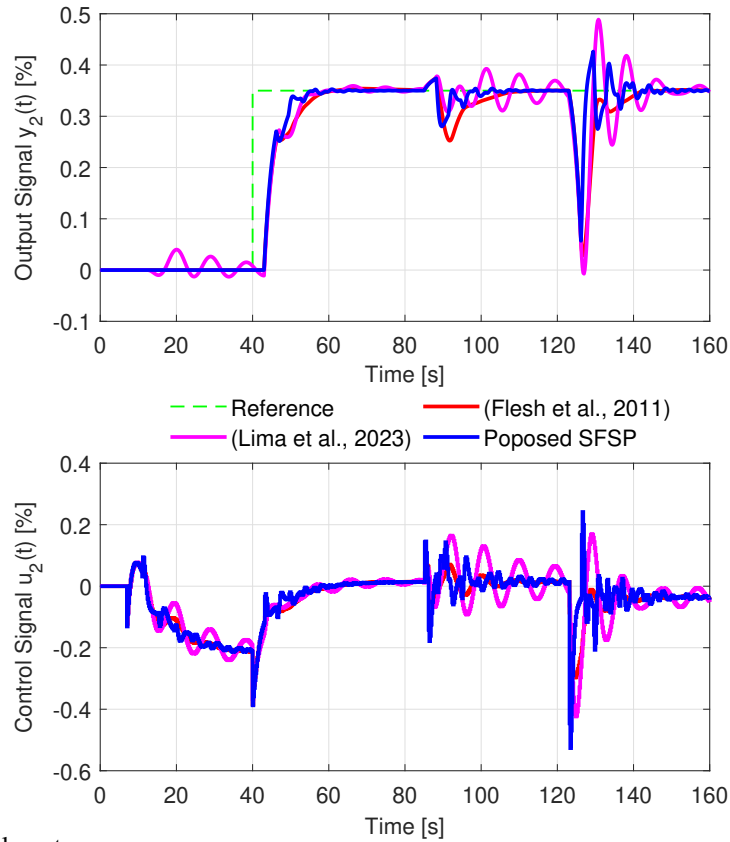
Figura 23 – Caso MIMO instável: saída $y_1(t)$ e entrada $u_1(t)$ - modelo do processo perturbado.



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir dos resultados apresentados nos referidos gráficos, observa-se que os controladores asseguraram a estabilidade em malha fechada considerando o modelo perturbado do processo P_r . Adicionalmente, nota-se que as respostas ao seguimento de referência dos controladores apresentados em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023) não se sobrepõem devido à ação distinta dos respectivos filtros de robustez. Nesses casos, os parâmetros dos filtros de robustez impactam na dinâmica de malha fechada para o seguimento de referência. Nota-se

Figura 24 – Caso MIMO instável: saída $y_2(t)$ e entrada $u_2(t)$ - modelo do processo perturbado.



Fonte: elaborada pelo autor.

que as oscilações resultantes da sintonia em (LIMA *et al.*, 2023) são ampliadas em comparação aos demais controladores e respectivas dinâmicas para o caso da planta nominal.

Para análise quantitativa a partir dos resultados da simulação em malha fechada, os índices de desempenho IAE e ITAE foram calculados para o caso do modelo nominal e modelo perturbado do processo conforme registrado nas Tabelas 2 e 3 na linha “Caso MIMO instável”. Observa-se como resultado da computação dos índices de desempenho que o sistema em malha fechada resultante da sintonia proposta para o SFSP apresenta melhores índices tanto para o rastreamento de referência quanto para a rejeição de perturbações em todos os cenários. Os índices de desempenho calculados para o sistema em malha fechada controlado via sintonia do SFSP proposta são melhores em todos os cenários considerados quando comparados aos índices associados aos controladores descritos em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023).

A sintonia proposta do SFSP resultou em melhoria substancial dos índices para seguimento de referência, superando em 14,33% e 14,53%, respectivamente, para y_1 e y_2 , os

índices calculados utilizando o modelo nominal do processo. Para a rejeição de perturbação no cenário nominal, a sintonia do SFSP resultou em melhoria em 41,20% para y_1 e 65,40% para y_2 comparada ao processo controlado em (FLESCH *et al.*, 2011), e em 10,56% para y_1 e 65,40% para y_2 considerando o controlador descrito em (LIMA *et al.*, 2023). Portanto, no caso nominal, os maiores benefícios resultaram da comparação com (FLESCH *et al.*, 2011).

Para as simulações no caso do modelo perturbado do processo, a aplicação do controlador SFSP proposto resultou em melhoria de 3,11% para y_1 e 16,51% para y_2 comparada ao processo controlado em (FLESCH *et al.*, 2011) para o seguimento de referência, e em 56,12% para y_1 e 22,01% para y_2 considerando o controlador descrito em (LIMA *et al.*, 2023). Para o critério de rejeição de perturbações, o processo controlado via SFSP resultou em melhoria de 12,61% para y_1 e 36,55% para y_2 comparada com (FLESCH *et al.*, 2011), e em 69,32% para y_1 e 58,13% para y_2 considerando o controlador descrito em (LIMA *et al.*, 2023). Assim, os maiores benefícios no caso do processo perturbado foram obtidos quando o processo controlado por meio do SFSP proposto e comparado aquele descrito em (LIMA *et al.*, 2023).

5.5 Caso Experimental: protótipo da Unidade Incubadora Neonatal

Neste quarto estudo de caso, a metodologia proposta para sintonia unificada do SFSP foi aplicada visando regular a umidade relativa do ar e temperatura no interior da câmara de um protótipo de uma Unidade Incubadora Neonatal. O protótipo utilizado para aplicação experimental da metodologia é ilustrado conforme a Figura 25. Uma foto destacando os principais componentes do processo é apresentada na Figura 25a, enquanto que na Figura 25b, o processo é apresentado por meio do diagrama esquemático.

Para fins de modelagem do processo, a matriz $P(z)$ de funções de transferência discretas com período de amostragem $T_s = 12[s]$ é parametrizada a partir de um experimento de identificação em malha aberta, conforme a Equação 5.16:

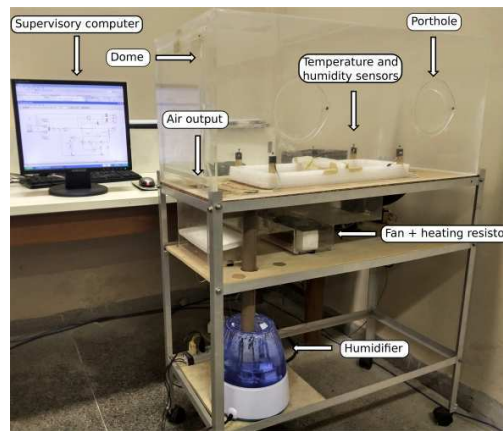
$$P(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,6065}{z - 0,9754} z^{-4} & \frac{-0,1687}{z - 0,9879} z^{-17} \\ \frac{-0,0579}{z - 0,9742} z^{-15} & \frac{0,08129}{z - 0,9821} z^{-14} \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

tal que $y(z) = P(z)u(z)$ representa a equação de saída do sistema. O vetor de saídas do modelo do

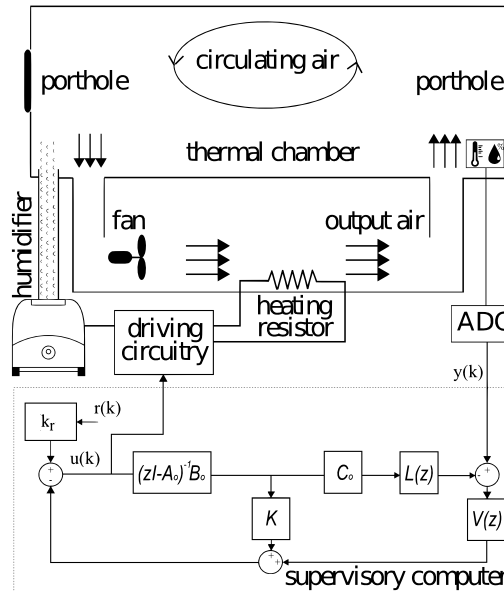
processo $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ é composto por $y_1(t)$, que corresponde ao percentual de umidade relativa no ar e $y_2(t)$, que indica a temperatura em graus Celsius, ambas medidas no interior da câmara do protótipo. O vetor de entradas do modelo do processo $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]$ é composto por $u_1(t)$, que representa o percentual de potência associado ao umidificador acoplado à câmara da Unidade Incubadora Neonatal, e $u_2(t)$, que relaciona o percentual de potência do sistema atuador do aquecedor acoplado ao sistema de circulação de ar da câmara do protótipo.

Figura 25 – Caso Experimental: protótipo da Unidade Incubadora Neonatal.

(a) Foto da bancada experimental.



(b) Esquemático da bancada experimental.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

O objetivo do sistema de controle é regular a umidade relativa e a temperatura no interior da câmara da Unidade Incubadora Neonatal por meio do ajuste das potências associadas à unidade umidificadora e ao sistema de aquecimento do ar sujeitos às variações das condições ambientais externas, assim como às perturbações decorrentes da abertura das portinholas da Unidade Incubadora Neonatal e simplificações no modelo adotado, por exemplo. Os sinais de controle associados aos atuadores são normalizados no intervalo [0-1] por razões de segurança, tal que os limites da escala correspondem aos níveis mínimo e máximo de ajuste de potência das unidades de umidificação e aquecimento.

O controle em malha fechada do protótipo da Unidade Incubadora Neonatal representa uma aplicação prática de um sistema MIMO com múltiplos atrasos, incluindo forte acoplamento entre as variáveis de controle, a presença de perturbações desconhecidas devido à abertura de portinholas de acesso ao interior da câmara e erros de modelagem, aos ruídos de instrumentação e às perturbações externas.

Tendo em vista a aplicação da metodologia proposta de sintonia do SFSP, o modelo do processo nominal é obtido a partir do modelo discreto do processo apresentado na Equação 5.16. Assim, o modelo nominal pode ser escrito a partir da matriz de atrasos comuns $L(z)$ e do modelo rápido para compensação de atrasos de saída $G_o(z)$ conforme a Equação 5.17:

$$P_n(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-4} & 0 \\ 0 & z^{-14} \end{bmatrix}}_{L(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0,6065}{z-0,9754} & \frac{-0,1687}{z-0,9879} z^{-13} \\ \frac{-0,0579}{z-0,9742} z^{-1} & \frac{0,08129}{z-0,9821} \end{bmatrix}}_{G_o(z)}. \quad (5.17)$$

Na sintonia proposta do SFSP, considerou-se um tempo de acomodação aproximado de 12[*min*] para a umidade relativa e 12[*min*] para a temperatura no interior da câmara da Unidade Incubadora Neonatal. O critério de desempenho foi obtido a partir da alocação dos polos em malha fechada em $z = 0,96$ para ambas variáveis, tendo em vista o seguimento de referência conforme a Equação 3.29 para a parametrização do ganho de realimentação de estados do modelo K e dos ganhos do filtro de referência k_r . A alocação proporcionou uma dinâmica mais rápida

em malha fechada quando comparadas às variáveis de controle em malha aberta para cada par $(r_i(t), y_i(t))$, para $i = 1, 2$, tendo em consideração o seguimento de referência de ambas variáveis controladas.

A sintonia do filtro de robustez considerou os efeitos dos polos do processo e perturbações tipo degrau. Portanto, os modelos de perturbação de alta ordem $H_1(z)$ e $H_2(z)$ foram descritos incluindo os polos indesejados do modelo do processo e ação integradora em $z = 0,9754$, $z = 0,9879$ e $z = 1$ para y_1 , e $z = 0,9742$, $z = 0,9821$ e $z = 1$ para y_2 . Os parâmetros de ajuste livre $\beta_1 = \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0,98$ e $\beta_2 = \beta_{12} = \beta_{22} = \beta_{32} = 0,98$ foram sintonizados com base nos requisitos de atenuação de perturbações para lidar com o compromisso entre robustez e desempenho, e atenuando a interação residual devido ao acoplamento de malhas e às discrepâncias entre o modelo adotado e as características reais do processo experimental em avaliação. As saídas modeladas para fins de sintonia do SFSP são obtidas a partir da função de transferência discreta do processo nominal dadas por (5.17), somada às funções de transferência dos modelos de perturbação para cada saída conforme a Equação 5.18 a seguir:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{0,6065}{z-0,9754}u_1(t-4) - \frac{0,1678}{z-0,9879}u_2(t-17) + \frac{(z-\beta_1)^3}{(z-1)(z-0,9754)(z-0,9879)}e_1(t), \\ y_2(t) &= \frac{-0,05795}{z-0,9742}u_1(t-15) + \frac{0,08129}{z-0,9821}u_2(t-14) + \frac{(z-\beta_2)^3}{(z-1)(z-0,9742)(z-0,9821)}e_2(t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

As matrizes para representação em espaço de estados na forma canônica observável do modelo $G_o(z)$ e dos modelos de perturbação $H_1(z)$ e $H_2(z)$ da Equação 5.18 são obtidas conforme o procedimento descrito no Apêndice A. Assim, dadas as matrizes da representação em espaço de estados e os critérios de desempenho para o sistema em malha fechada, os parâmetros K e k_r foram calculados a partir da Equação 3.29 e o filtro de robustez foi obtido a partir da Equação 3.30 para a sintonia do SFSP para o protótipo da Unidade Incubadora Neonatal. A matriz de ganho de realimentação do modelo, a matriz de ganhos do filtro de referência e a matriz de funções de transferência do filtro de robustez utilizados no controle em malha fechada são apresentados na Tabela 6 com o tempo de amostragem $T_s = 12[s]$.

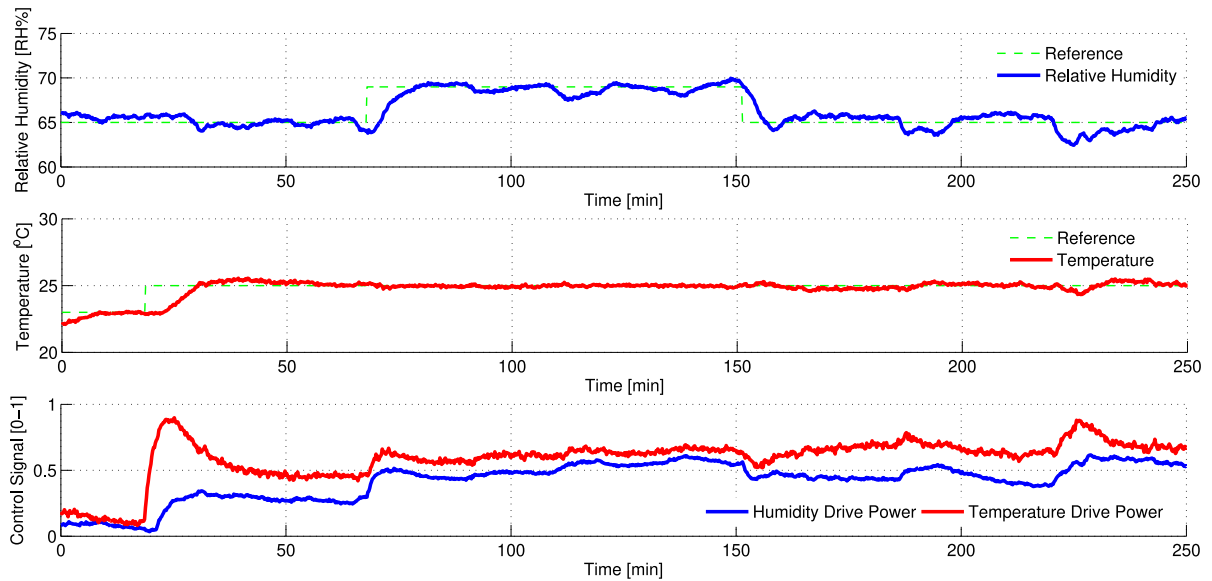
Os resultados experimentais em malha fechada utilizando a metodologia proposta para a sintonia do SFSP aplicada ao protótipo da Unidade Incubadora Neonatal são apresentados na Figura 26.

Tabela 6 – Caso Experimental: parâmetros dos filtros e controladores.

SFSP	
Filtro de Referência	$k_r = \begin{bmatrix} 0,0660 & 0 \\ 0 & 0,4921 \end{bmatrix}$
Ganho de Realimentação	$K = \begin{bmatrix} 1,6542 & 1,6488 & \mathbf{0}_{2 \times 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,2561 & 12,3016 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Filtro de Robustez	$V(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,0039(z-0,96)(z-0,9751)(z-0,9863)}{(z-0,98)^3} & 0 \\ 0 & \frac{0,2043(z-0,96)(z-0,9732)(z-0,9821)}{(z-0,98)^3} \end{bmatrix}$

Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

Figura 26 – Caso Experimental: resposta em malha fechada para o protótipo da Unidade Incubadora Neonatal.



Fonte: (AMARAL *et al.*, 2023).

No início do experimento, as variáveis de controle foram reguladas em torno das respectivas referências, tal que a umidade relativa do ar no interior da câmara manteve-se em torno de 65[RH%], e a temperatura interna em torno de 23[°C]. Em $t = 25[\text{min}]$, uma mudança de referência na temperatura foi aplicada na forma de degrau, passando de 23[°C] para 25[°C], enquanto a referência de umidade relativa foi mantida constante conforme o mesmo valor inicial do experimento. Em $t = 65[\text{min}]$, uma mudança de referência na umidade relativa foi aplicada na forma de degrau, tal que o valor inicial 65[RH%] foi alterado para 69[RH%]. Em $t = 150[\text{min}]$, a referência de umidade relativa foi alterada de 69[RH%] para 65[RH%]. Em

$t = 105[min]$ e $t = 180[min]$, duas perturbações foram aplicadas ao processo pela abertura da portinhola esquerda da NICU durante $5[min]$. Por fim, e em $t = 215[min]$, ambas portinholas foram abertas simultaneamente durante $10[min]$. O experimento foi encerrado no momento em que as variáveis de controle atingiram os respectivos valores de referência. É válido ressaltar que durante a realização do experimento, as grandezas ambientais da sala, tais como temperatura e umidade relativa, não foram controladas, incorrendo em perturbações ao longo de todo o tempo de experimentação do processo, além das perturbações especificadas no experimento.

A partir da Figura 26, pode-se afirmar que ambas variáveis controladas mantiveram-se em torno de suas respectivas referências e o controle em malha fechada atenuou as variações ambientais desconhecidas da sala, compensou as perturbações devido à abertura de portinholas e reduziu as interações residuais mesmo considerando as discrepâncias entre o modelo adotado para fins de controle e a planta. Para fins de análise do desempenho, percebeu-se que as variáveis de controle, no quesito de regulação em torno da referência em malha fechada, não apresentaram oscilações e atingiram tempo de acomodação semelhante em torno de $12[min]$ para o incremento do valor da referência para ambas variáveis de controle. Em contraste, percebeu-se resposta mais rápida para o degrau de descida no valor de referência de umidade relativa de $69[RH\%]$ para $65[RH\%]$ a partir de $t = 150[min]$.

Para análise quantitativa, os índices calculados IAE e ITAE a partir dos dados do experimento foram registrados na linha “Caso Experimental” nas colunas Processo Perturbado conforme as Tabelas 2 e 3. Para o seguimento de referência, os índices consideraram o intervalo de tempo entre $t = 7[min]$ e $t = 105[min]$, calculando o rastreamento de referência e a interação residual; e, para a rejeição de perturbações, os índices consideraram o intervalo de tempo entre $t = 105[min]$ e $t = 250[min]$ para a análise da perturbação de abertura das portinholas. Conforme resumido nas Tabelas 2 e 3, os índices relativos à variável controlada temperatura no interior do protótipo da Unidade Incubadora Neonatal são menores em comparação aos respectivos índices referentes à umidade relativa do ar no interior da câmara. Os índices refletem uma oportunidade de melhoria na sintonia do controlador no intuito de buscar melhorar o desempenho de atenuação de perturbações em malha fechada da variável de controle umidade relativa do ar por meio de nova sintonia do parâmetro livre β_1 , reajustando a relação de compromisso entre a atenuação de perturbação e o índice de robustez em novos experimentos.

Neste capítulo foi apresentada a aplicação da metodologia de sintonia proposta para o SFSP em quatro estudos de caso. No primeiro estudo, o controlador SFSP foi aplicado a um processo SISO com atraso e comparado ao controlador FSP conforme descrito em (LIMA *et al.*, 2021) garantindo melhor desempenho em todos os índices avaliados. No segundo estudo de caso, foi apresentada a aplicação da sintonia proposta para o SFSP considerando um processo MIMO integrador com múltiplos atrasos. No segundo caso, a comparação foi realizada considerando o controlador preditor Smith filtrado desacoplado apresentado em (GIRALDO *et al.*, 2018). No caso MIMO integrador, 87,50% dos índices calculados refletiram o melhor desempenho em malha fechada para o processo controlado com a sintonia proposta descrita neste documento. No terceiro estudo de caso, a sintonia do SFSP via otimização resultou em melhoria de desempenho em todos os cenários quando comparada aos controladores propostos em (FLESCH *et al.*, 2011) e (LIMA *et al.*, 2023). Resultados experimentais obtidos a partir da aplicação da metodologia de sintonia do SFSP no controle da umidade relativa e da temperatura interna da câmara de um protótipo de uma Unidade Incubadora Neonatal foram apresentados no quarto estudo de caso. Os estudos de caso evidenciaram a generalidade da metodologia mediante a sua aplicação em diferentes contextos de controle.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi proposta uma estrutura de controle e uma metodologia de sintonia unificada de controlador baseada no SFSP para processos SISO de alta ordem com atraso e MIMO com múltiplos atrasos. A proposta foi apresentada considerando a comparação com outras técnicas recentes da literatura por meio de simulações e da aplicação experimental em um protótipo de uma Unidade Incubadora Neonatal. O procedimento de sintonia proposto preservou as propriedades e vantagens do SFSP conforme apresentado no capítulo 5 Estudos de caso, simplificando a parametrização do controlador para sistemas de ordem elevada.

Dentre as vantagens da aplicação da metodologia proposta, destacou-se a simplicidade no ajuste do ganho de realimentação de estados do modelo para atendimento aos requisitos relacionados ao seguimento de referência por alocação de polos ou desacoplamento por realimentação de estados. Adicionalmente, uma alternativa para a sintonia do filtro de robustez com base no modelo de perturbação foi apresentada. A sintonia do filtro de robustez considerou o compromisso entre o desempenho do sistema em malha fechada quanto à atenuação de perturbações e a condição de estabilidade robusta. Conforme a proposta, o ajuste dos parâmetros do filtro de robustez é desacoplado da dinâmica de seguimento de referência e a sintonia dos parâmetros $\beta_{\gamma i}$ foi realizada de forma desacoplada para cada par entra/saída do sistema conforme o índice de robustez apresentado. Conforme apresentado no capítulo 4, um procedimento de otimização foi apresentado para o cômputo dos parâmetros livres do filtro de robustez como uma alternativa à parametrização manual dos mesmos.

Observou-se nos casos comparativos, obedecendo a índices de estabilidade robusta equiparáveis, que o ajuste proposto do SFSP proporcionou melhores resultados na maioria dos cenários em termos dos índices IAE e ITAE. A sintonia proposta do SFSP resultou em melhoria de desempenho para todos os índices calculados no caso SISO e melhoria em 87,50% dos índices calculados nos casos MIMO.

A aplicação experimental da sintonia proposta foi realizada por meio de ensaios em um protótipo de uma Unidade Incubadora Neonatal. Nesse caso, a sintonia foi aplicada à

regulação da umidade relativa e temperatura do ar no interior da câmara de unidade Incubadora Neonatal. O experimento foi apresentado para caracterizar questões de implementação práticas associadas à sintonia do SFSP. Com o ajuste proposto, o efeito de acoplamento das variáveis controladas foi atenuado em malha fechada e as respostas para o seguimento de referência foram mais rápidas que as respectivas dinâmicas em malha aberta. Adicionalmente, a regulação e a atenuação de perturbações foi verificada mediante as variações das condições ambientais da sala onde foram realizados os experimentos, as perturbações devido à abertura das portinholas de acesso e as perturbações em função das discrepâncias entre o modelo utilizado para fins de sintonia do controlador e a planta experimental.

A parametrização simplificada com foco em critérios de desempenho para o seguimento de referência, rejeição de perturbações e condição de estabilidade robusta aumenta o potencial da aplicação do SFSP para o controle de processos SISO com atraso e MIMO com múltiplos atrasos em escala industrial.

6.2 Trabalhos futuros

Uma vez que a formalização da estrutura e sintonia de parâmetros do controlador proposta considerou o modelo rápido para compensação de atrasos de saída (output-DTC fast model) conforme (SANTOS *et al.*, 2014), a extensão da metodologia de ajuste utilizando modelo rápido para compensação completa de atrasos (full-DTC fast model) e suas implicações é considerado um próximo passo para estudo da metodologia proposta.

Para fins de generalização da proposta, considera-se a extensão do método de sintonia para sistemas multivariáveis com o número de entradas diferente do número de saídas como uma oportunidade de pesquisa complementar às atividades realizadas. A proposição é citada tendo em vista que a metodologia descrita no documento apresentou formalidade e exemplos para sistemas multivariáveis de processos modelados com mesmo número de entradas e saídas.

Uma proposição futura a ser citada remete-se ao fato de que na metodologia proposta, a matriz de funções de transferência do filtro de robustez é definida bloco diagonal, nesse caso o estudo de estruturas baseadas em uma matriz que considerada os efeitos cruzados das perturbações de entrada pode ser desenvolvido para avaliar possíveis alternativas para melhoria

de desempenho quanto à rejeição de perturbações.

Adicionalmente, o estudo da saturação do sinal de controle e suas implicações para os sistemas de controle SISO e MIMO sintonizados conforme a proposta neste documento constitui um campo de pesquisa a ser explorado. Por tratar-se de restrições de ordem prática nos processos industriais, o efeito das restrições nas variáveis de controle apresenta-se como um campo de estudo futuro considerando a estabilidade e o desempenho de sistemas de controle em malha fechada com atrasos.

REFERÊNCIAS

- ALBERTOS, P.; GARCÍA, P. Robust control design for long time-delay systems. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 10, p. 1640–1648, 2009.
- ALBERTOS, P.; GARCÍA, P. Decoupling mimo systems with multiple input/output time delays. In: **2010 11th International Conference on Control Automation Robotics and Vision**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1957–1962.
- ALBERTOS, P.; GARCÍA, P. State feedback control of mimo systems with multiple time delays. In: **2016 35th Chinese Control Conference (CCC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 229–234.
- ALEVISAKIS, G.; SEBORG, D. An extension of the smith predictor method to multivariable linear systems containing time delays. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 17, n. 3, p. 541–551, 1973.
- AMARAL, D. L.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G.; PEREIRA, R. D.; SANTOS, T. L. A unified tuning rule of the simplified filtered smith predictor for siso and square mimo high-order dead-time processes. **Control Engineering Practice**, v. 141, p. 105697, 2023. ISSN 0967-0661. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066123002666>.
- ARTSTEIN, Z. Linear systems with delayed controls: a reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 27, n. 4, p. 869–879, 1982.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**. [S.l.]: ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society, 1995. ISBN 1-55617-516-7.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled systems: theory and design**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1997.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X.
- CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. **Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer London, 2013. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).
- CHEN, C. T. **Linear System Theory and Design**. 3rd. ed. USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778.
- CHEN, J.; HE, Z. F.; QI, X. A new control method for mimo first order time delay non-square systems. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 538–546, 2011.
- CORREIA, W. B.; TORRICO, B. C.; PEREIRA, R. D. O. Optimal control of mimo dead-time linear systems with dead-time compensation structure. **Dyna**, 2006, Revista DYNA, v. 84, n. 200, p. 62–71, 2017.
- de Oliveira, V.; KARIMI, A. Robust smith predictor design for time-delay systems with h_∞ performance. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 46, n. 3, p. 102–107, 2013. ISSN 1474-6670. 11th Workshop on Time-Delay Systems. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015340362>.

DIAB, A.; PASILLAS-LÉPINE, W.; VALMORBIDA, G. A Steer-by-Wire Control Architecture Robust to High Assistance Gains and Large Transmission Delays. In: **The 15th International Symposium on Advanced Vehicle Control**. Kanagawa, Japan: Society of Automotive Engineers of Japan, 2022. (Proceeding of the 15th International Symposium on Advanced Vehicle Control). Disponível em: <https://centralesupelec.hal.science/hal-03798214>.

FALB, P.; WOLOVICH, W. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 12, n. 6, p. 651–659, 1967.

FLESCHE, R. C.; TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E.; CAVALCANTE, M. U. Unified approach for minimal output dead time compensation in MIMO processes. **Journal of Process Control**, v. 21, n. 7, p. 1080–1091, 2011. ISSN 0959-1524.

FLESCHE, R. C. C.; SANTOS, T. L. M.; NORMEY-RICO, J. E. Unified approach for minimal output dead time compensation in MIMO non-square processes. In: **2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2376–2381.

FRANCIS, B.; WONHAM, W. The internal model principle of control theory. **Automatica**, v. 12, n. 5, p. 457–465, 1976. ISSN 0005-1098. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109876900066>.

GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time. **Automatica**, v. 44, n. 4, p. 1062–1071, 2008.

GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. Dead-time-compensator for unstable MIMO systems with multiple time delays. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 20, n. 7, p. 877–884, 2010.

GARRIDO, J.; VAZQUEZ, F.; MORILLA, F. Inverted decoupling internal model control for square stable multivariable time delay systems. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1710–1719, 2014.

GARRIDO, J.; VAZQUEZ, F.; MORILLA, F.; HÄGGLUND, T. Practical advantages of inverted decoupling. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, v. 225, n. 7, p. 977–992, 2011.

GIRALDO, S. A. C.; FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E.; SEJAS, M. Z. P. Decoupling filtered smith predictor design for multivariable systems with multiple time delays. In: **2016 12th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–8.

GIRALDO, S. A. C.; FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E.; SEJAS, M. Z. P. A method for designing decoupled filtered smith predictor for square MIMO systems with multiple time delays. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 54, n. 6, p. 6439–6449, Nov 2018. ISSN 0093-9994.

LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; PLESTAN, F.; GLUMINEAU, A.; CHRIETTE, A. New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances. **Automatica**, v. 52, p. 179 – 184, 2015. ISSN 0005-1098.

LIMA, D. M.; LIMA, B. M.; NORMEY-RICO, J. E. A predictor for dead-time systems based on the Kalman filter for improved disturbance rejection and robustness. **Journal of Process Control**, v. 105, p. 108–116, 2021. ISSN 0959-1524.

- LIMA, D. M.; LIMA, B. M.; NORMEY-RICO, J. E. A predictor for square multivariable dead-time systems with multiple delays based on the Kalman filter. **Journal of Process Control**, v. 124, p. 105–117, 2023. ISSN 0959-1524.
- LIU, T.; GARCÍA, P.; CHEN, Y.; REN, X.; ALBERTOS, P.; SANZ, R. New predictor and 2DOF control scheme for industrial processes with long time delay. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 65, n. 5, p. 4247–4256, May 2018. ISSN 0278-0046.
- LIU, T.; HAO, S.; LI, D.; CHEN, W. H.; WANG, Q. G. Predictor-based disturbance rejection control for sampled systems with input delay. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 27, p. 772–780, 2019.
- LIU, Y. Y.; BARABÁSI, A. L. Control principles of complex systems. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 88, p. 035006, Sep 2016.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **Robust Process Control**. [S.l.]: Prentice Hall, 1989.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Smith predictor and modifications: A comparative study. In: **1999 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 2257–2263.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. **Control of dead-time processes**. [S.l.]: Springer, 2007.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Dead-time compensators: A survey. **Control Engineering Practice**, v. 16, n. 4, p. 407 – 428, 2008.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 1, p. 38 – 47, 2009.
- NORMEY-RICO, J. E.; SANTOS, T. L. M.; FLESCHE, R. C. C.; TORRICO, B. C. Control of dead-time process: From the smith predictor to general multi-input multi-output dead-time compensators. **Frontiers in Control Engineering**, v. 3, 2022.
- OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. Multivariable controller design for linear systems having multiple time delays. **AIChE Journal**, v. 25, n. 6, p. 1043–1057, 1979.
- PANDEY, S. K.; DEY, J.; BANERJEE, S. Generalized discrete decoupling and control of MIMO systems. **Asian Journal of Control**, v. 24, n. 6, p. 3326–3344, 2022.
- PAWLOWSKI, A.; GUZMÁN, J. L.; BERENGUEL, M.; NORMEY-RICO, J. E.; DORMIDO, S. Multivariable GPC for processes with multiple time delays: Implementation issues. In: **2016 IEEE 21st International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–6.
- PELLEGRINETTI, G.; BENTSMAN, J. Nonlinear control oriented boiler modeling-a benchmark problem for controller design. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 4, n. 1, p. 57–64, 1996.
- SANKARAN, V.; SRINATH, M. D. Decoupling of linear discrete time systems by state variable feedback. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 39, p. 338–345, 1972.
- SANTOS, T. L. M.; FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. On the filtered Smith predictor for MIMO processes with multiple time delays. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 24, n. 4, p. 383–400, 2014.

- SANTOS, T. L. M.; FRANKLIN, T. S.; TORRICO, B. C. Anti-windup strategy for processes with multiple delays: A predictor-based approach. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 358, n. 3, p. 1812–1838, 2021.
- SANTOS, T. L. M.; TORRICO, B.; NORMEY-RICO, J. E. Simplified filtered Smith predictor for MIMO processes with multiple time delays. **ISA Transactions**, v. 65, 09 2016.
- SANZ, R.; GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay. **Automatica**, Elsevier, v. 72, p. 205–208, 2016.
- SANZ, R.; GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. A generalized Smith predictor for unstable time-delay SISO systems. **ISA Transactions**, v. 72, p. 197 – 204, 2018. ISSN 0019-0578.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: Analysis and Design**. Hoboken, US-NJ: John Wiley, 2005.
- SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.
- TOLEDO, E. C.; LEON, J. J. R. Feedback decoupling of linear multivariable systems. **IEEE Latin America Transactions**, v. 13, n. 8, p. 2529–2537, 2015.
- TORRICO, B. C.; CAVALCANTE, M. U.; BRAGA, A. P.; NORMEY-RICO, J. E.; ALBUQUERQUE, A. A. Simple tuning rules for dead-time compensation of stable, integrative, and unstable first-order dead-time processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, ACS Publications, v. 52, n. 33, p. 11646–11654, 2013.
- TORRICO, B. C.; CORREIA, W. B.; NOGUEIRA, F. G. Simplified dead-time compensator for multiple delay SISO systems. **ISA Transactions**, v. 60, p. 254–261, 2016.
- TORRICO, B. C.; FILHO, M. P. A.; LIMA, T. A.; SANTOS, T. L.; NOGUEIRA, F. G. New simple approach for enhanced rejection of unknown disturbances in LTI systems with input delay. **ISA Transactions**, v. 94, p. 316–325, 2019. ISSN 0019-0578.
- TORRICO, B. C.; PEREIRA, R. D. O.; SOMBRA, A. K. R.; NOGUEIRA, F. G. Simplified filtered Smith predictor for high-order dead-time processes. **ISA Transactions**, v. 109, p. 11–21, 2021.
- WU, A. G.; WANG, Y. Prediction schemes for disturbance attenuation of discrete-time linear systems with input-delay. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 31, n. 3, p. 772–786, 2021.
- YEGGIN, M.; OZBAY, H. On smith predictor based controllers for plants with time delay and multiple unstable modes. **Systems & Control Letters**, v. 172, p. 105453, 2023. ISSN 0167-6911. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691122002304>.
- YUAN, M.; LYU, L.; LIU, X. Disturbance rejection performance of adaptive robust control. In: **2021 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)**. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1–5.

7 APÊNDICE A. FORMA CANÔNICA OBSERVÁVEL

7.1 Caso SISO

Para o caso SISO, o modelo em função de transferência $G(z)$ pode ser representado como:

$$G(z) = \frac{b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \dots + b_2 z + b_1}{z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1} + d_o = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (7.1)$$

em que $A_{n \times n}$, $B_{n \times 1}$, $C_{1 \times n}$, $D_{1 \times 1}$ e I é a matriz identidade $n \times n$. Logo, a representação em espaço de estados na forma canônica observável é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], D = d_o. \quad (7.2)$$

Para funções de transferência estritamente próprias $D = d_o = 0$ em (7.1). Caso o numerador e o denominador em (7.1) sejam coprimos, então a realização em espaço de estados na forma canônica observável é mínima conforme (CHEN, 1998).

7.2 Caso MIMO

Para a i -ésima saída $y_i(z)$ do sistema MIMO m -entradas \times m -saídas:

$$y_i(t) = G_{i,1}(z)u_1(t) + \dots + G_{i,m}(z)u_m(t) \quad (7.3)$$

em que $G_{i,j}(z)$ é a função de transferência da entrada $u_j(t)$ para a saída $y_i(t)$ dada por:

$$G_{i,j}(z) = \frac{b_{i,j,n_i} z^{n_i-1} + b_{i,j,n_i-1} z^{n_i-2} + \dots + b_{i,j,2} z + b_{i,j,1}}{z^{n_i} + a_{i,n} z^{n_i-1} + \dots + a_{i,2} z + a_{i,1}} + d_{o,i,j}. \quad (7.4)$$

Assim, a representação em espaço de estados para a i -ésima saída é dada na forma canônica observável escrevendo (7.4) como (7.2) :

$$\begin{aligned}
A_i &= \begin{bmatrix} -a_{i,n_i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{i,n_i-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i,2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{i,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & B_i &= \begin{bmatrix} b_{i,1,n_i} & \cdots & b_{i,m,n_i} \\ b_{i,1,n_i-1} & \cdots & b_{i,m,n_i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,1,2} & \cdots & b_{i,m,2} \\ b_{i,1,1} & \cdots & b_{i,m,1} \end{bmatrix} \\
C_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & D_i &= \begin{bmatrix} d_{o,i,1} & \cdots & d_{o,i,m} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{7.5}$$

em que A_i $n_i \times n_i$, B_i $n_i \times m$, C_i $1 \times n_i$ e D_i $1 \times m$. Logo, a representação do sistema MIMO em espaço de estados dada forma canônica observável é escrita como:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C_m \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

em que $\mathbf{0}$ são matrizes nulas de dimensões apropriadas. Note que a decomposição de Kalman pode ser aplicada para a realização mínima em espaço de estados apresentada na Equação 7.6.

