



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA (DEMA)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS
QUANTITATIVOS
MESTRADO ACADÊMICO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS

FRANCISCO VICTOR DO NASCIMENTO NETO

**META-HEURÍSTICA DE BUSCA DE VIZINHANÇA PARA O PROBLEMA DO
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS NO TRANSPORTE ESCOLAR COM FROTA
HOMOGÊNEA**

FORTALEZA
2024

FRANCISCO VICTOR DO NASCIMENTO NETO

META-HEURÍSTICA DE BUSCA DE VIZINHANÇA PARA O PROBLEMA DO
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS NO TRANSPORTE ESCOLAR COM FROTA
HOMOGÊNEA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos.

Orientador: Prof. Dr. Bruno de Athayde Prata

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N195m Nascimento Neto, Francisco Victor do.

Meta-heurística de busca de vizinhança para o problema de roteamento de veículos no transporte escolar com frota homogênea / Francisco Victor do Nascimento Neto. – 2025.

67 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Bruno de Athayde Prata.

1. Roteamento de veículos. 2. Transporte escola. 3. Heurísticas. 4. GRASP. 5. Busca local iterada. I.
Título.

CDD 510

FRANCISCO VICTOR DO NASCIMENTO NETO

META-HEURÍSTICA DE BUSCA DE VIZINHANÇA PARA O PROBLEMA DO
ROTEAMENTO DE VEÍCULOS NO TRANSPORTE ESCOLAR COM FROTA
HOMOGÊNEA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos.

Aprovada em: 12/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno de Athayde Prata (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luciano Carlos Azevedo da Costa
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. Jesus Ossian da Cunha
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luciano Perdigão Cota
Instituto Tecnológico Vale (ITV)

À minha amada família, cujo amor e apoio foram fundamentais para tornar esta jornada possível e significativa. Em especial, à minha mãe, por seu amor incondicional, apoio constante e incentivo em cada passo do caminho.

AGRADECIMENTOS

À Prefeitura Municipal de Fortaleza, que, por meio do Observatório da Educação, viabilizou a parceria com a Universidade Federal do Ceará (UFC), permitindo o desenvolvimento deste projeto.

À Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), pela concessão do afastamento, que foi essencial para que eu pudesse me dedicar integralmente a este trabalho.

À minha mãe, fonte inesgotável de amor, força e inspiração, por estar sempre ao meu lado, incentivando-me a buscar o melhor em todas as etapas desta jornada.

Ao Prof. Dr. Bruno Athayde Prata, pela excelente dedicação, orientação e paciência ao longo de todo o processo. Sua sabedoria e apoio foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora, Luciano Perdigão Cota, Luciano Carlos Azevedo da Costa e Jesus Ossian da Cunha, pelo tempo dedicado e pelas valiosas colaborações e sugestões, que enriqueceram significativamente esta Dissertação.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões ao longo do curso, com especial gratidão àqueles que contribuíram diretamente para este trabalho.

“Não existe problema que não possa ser resolvido, só é necessário mudar a maneira de pensar.”

(Albert Einstein)

RESUMO

O problema de roteamento de veículos no transporte escolar é um problema de otimização combinatória relevante, envolvendo custos operacionais e qualidade do serviço. Este trabalho propõe uma meta-heurística híbrida GRASP-ILS, aplicada a um estudo de caso em uma escola de Fortaleza, com dados reais de localização de alunos e paradas de ônibus. Duas formulações matemáticas foram propostas, considerando restrições de capacidade dos veículos e distância máxima de caminhada. Para a geração da solução inicial utilizada na meta-heurística, foi empregada uma heurística construtiva baseada na fase de construção da meta-heurística GRASP. As abordagens foram testadas em 51 instâncias da literatura, bem como em instâncias reais provenientes de uma pesquisa realizada em uma escola da rede municipal, na qual 118 alunos utilizam o transporte no período da manhã e 85 no período da tarde. Os resultados demonstram que a meta-heurística proposta superou o algoritmo de busca em vizinhança variável, alcançando reduções de até 35% no custo total em alguns casos, respeitando todas as restrições. Este estudo evidencia o potencial das técnicas avançadas de otimização para tornar o transporte escolar mais eficiente e acessível.

Palavras-chave: roteamento de veículos; transporte escolar; heurísticas; GRASP; meta-heurísticas; busca local iterada.

ABSTRACT

The School bus routing problem is a relevant combinatorial optimization problem, involving operational costs and service quality. This work proposes a hybrid GRASP-ILS metaheuristic, applied to a case study in a school in Fortaleza, using real data on student locations and bus stops. Two mathematical formulations were proposed, considering vehicle capacity constraints and maximum walking distance: one based on a Mixed-Integer Linear Programming and the other on the p -center problem. To generate the initial solution used in the metaheuristic, a constructive Greedy Randomized Adaptive Search Procedure heuristic was employed.

The approaches were tested on 51 instances from the literature, as well as on real instances from a study conducted in a municipal school, where 118 students use school transportation in the morning and 85 in the afternoon. The results show that the proposed metaheuristic outperformed the variable neighborhood search algorithm, achieving cost reductions of up to 35% in some cases while respecting all constraints. This study highlights the potential of advanced optimization techniques to make school transportation more efficient and accessible.

Keywords: vehicle routing; School transportation; heuristics; GRASP; metaheuristics; iterated local search.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de um <i>School Bus Routing Problem</i> (SBRP) com a sua rota ótima.	27
Figura 2 – Rotas dos veículos obtidas no modelo de p -centros.	29
Figura 3 – Fluxograma da meta-heurística híbrida GRASP-ILS proposta.	38
Figura 4 – Exemplo com uma solução para a seguinte instância: s10-100-c50-w10	41
Figura 5 – Resultados do modelo p -centros.	44
Figura 6 – Comparação entre os resultados das heurísticas construtivas avaliadas.	47
Figura 7 – Comparação dos DPR's entre as heurísticas.	48
Figura 8 – Comparação dos DPR's entre as meta-heurísticas	50
Figura 9 – Comparação entre os resultados das meta-heurísticas analisadas.	52
Figura 10 – Instâncias com 5 e 10 paradas.	54
Figura 11 – Instâncias com 50 e 100 estudantes.	54
Figura 12 – Capacidades 25 e 50 estudantes.	55
Figura 13 – Distância máxima caminhada 5 e 10.	55
Figura 14 – Disposição dos alunos em relação à escola	58
Figura 15 – Rotas do período da manhã.	59
Figura 16 – Rotas do período da tarde.	59
Figura 17 – Aplicação do modelo p -centros aplicado aos alunos no período da tarde.	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Contribuições ao longo dos anos.	22
Tabela 2 – Valores obtidos pelo modelo para minimização da distância percorrida pelos ônibus.	42
Tabela 3 – Valores obtidos pelo modelo para minimização da distância máxima de caminhada	43
Tabela 4 – Valores obtidos pelos métodos abordados na fase de construção da solução inicial.	46
Tabela 5 – Valores obtidos pelo GRASP-ILS em diferentes limites de tempo.	49
Tabela 6 – Valores obtidos pelo GRASP-ILS em comparação com o VND.	51
Tabela 7 – Resultados obtidos para os turnos manhã e tarde	59
Tabela 8 – Resultados obtidos pelo GRASP-ILS no cenário hipotético para diferentes limites de tempo.	60
Tabela 9 – Resultados do modelo para a minimização da distância caminhada.	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARL	<i>Allocation–Routing–Location</i>
DPR	Desvio Padrão Relativo
GRASP	<i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i>
ILS	<i>Iterated Local Search</i>
LAR	<i>Location–Allocation–Routing</i>
LCR	lista de candidatos restrita
MILP	<i>Mixed-Integer Linear Programming</i>
MTZ	<i>Miller-Tucker-Zemlin</i>
SBRP	<i>School Bus Routing Problem</i>
SME	Secretaria Municipal de Ensino
TSP	<i>Traveling Salesman Problem</i>
UFC	Universidade Federal do Ceará
VND	<i>Variable Neighborhood Descent</i>
VRP	<i>Vehicle Routing Problem</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Distancia entre as paradas e os alunos
K	Capacidade de uma parada
a	Número de alunos
w	Distancia percorrida por um aluno até chegar na sua parada
n	Número de paradas
C	Capacidade dos veículos
x	Variável que indica se há uma aresta entre os nós
Q	Maior distância percorrida por todos os alunos a uma parada
V	Conjunto de paradas
S	Conjunto de alunos
k	Número de ônibus utilizados
c	Custo de cada rota
y	Indica se um nó está sendo utilizado
z	Indica a coleta de um aluno por um ônibus em uma determinada parada
u	Representa a posição do nó na rota em questão
S_0	Solução da heurística GRASP na fase de construção
α	Parâmetro que equilibra a ganância e a aleatoriedade na fase de construção do GRASP

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Problemática e justificativa	15
1.2	Objetivos	17
1.2.1	<i>Objetivos Gerais</i>	17
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3	MÉTODOS DE SOLUÇÃO	24
3.1	Modelo para minimização da distância percorrida pelos ônibus	24
3.2	Modelo para a minimização da distância de caminhada pelos alunos	28
3.3	Heurísticas construtivas propostas	29
3.3.1	<i>Modelo para alocação dos alunos aos pontos de parada</i>	29
3.3.2	<i>Heurística construtiva baseada no algoritmo de Gillett e Miller</i>	31
3.3.3	<i>Fase de construção do GRASP</i>	32
3.4	GRASP-ILS	35
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	40
4.1	Configurações Experimentais	40
4.2	Resultados do modelo para a minimização da distância percorrida pelos ônibus.	42
4.3	Resultados do modelo para minimização da distância de caminhada	43
4.4	Resultados das heurísticas construtivas para a minimização da distância percorrida pelos ônibus	44
4.4.1	<i>Análise dos Resultados</i>	47
4.5	Resultados das meta-heurísticas para a minimização da distância percorrida pelos ônibus	48
4.5.1	<i>Resultados do GRASP-ILS nos diferentes limites de tempo.</i>	48
4.5.2	<i>Comparação entre os valores obtidos pelo GRASP-ILS e VND</i>	49
4.6	Análise de sensibilidade	53
4.6.1	<i>Número de paradas</i>	53
4.6.2	<i>Número de estudantes</i>	54
4.6.3	<i>Capacidade dos veículos</i>	55

4.6.4	<i>Distância máxima caminhada por cada estudante</i>	55
5	ESTUDO DE CASO	57
5.1	Aplicação Prática do Problema em Estudo	57
6	CONCLUSÕES	63
6.1	Verificação dos objetivos previamente estabelecidos	63
6.2	Benefícios das abordagens propostas	63
6.3	Limitações do estudo	64
6.4	Sugestões para estudos futuros	64
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO

1.1 Problemática e justificativa

O roteamento de veículos é um problema amplamente estudado na Pesquisa Operacional, dedicada à otimização da atribuição de recursos de transporte para minimizar custos ou maximizar sua eficiência. Dentro desse campo, destacam-se dois paradigmas distintos: o problema de roteamento de veículos clássico Toth e Vigo (2002), Laporte (1992) e o problema de roteamento de veículos escolares Park e Kim (2010), Schittekat *et al.* (2013). Embora partilhem semelhanças essenciais, esses problemas apresentam diferenças substanciais em termos de complexidade, aspectos práticos e aplicabilidade.

Em Fortaleza, a não eficácia das rotas e o alto custo operacional do transporte escolar demonstram a necessidade de soluções mais eficientes e adaptáveis às limitações locais de frotas reduzidas e problemas de infraestrutura urbana, por exemplo. Sendo assim, esta dissertação pretende investigar métodos e estratégias para lidar com o problema de roteamento de veículos escolares, analisando suas características, desafios e implicações operacionais. Para isso, é essencial compreender a essência de cada problema e como suas peculiaridades moldam o desenvolvimento de estratégias de otimização.

Diante desse cenário, este estudo propõe uma abordagem baseada em uma meta-heurística híbrida para a resolução do problema de roteamento de veículos escolares, visando minimizar a distância total percorrida pelos ônibus. Para isso, são desenvolvidos dois modelos de Programação Linear Inteira Mista: o primeiro busca minimizar a distância máxima percorrida pelos veículos, enquanto o segundo, baseado no problema de p-centros, visa minimizar a distância máxima que um aluno pode caminhar até sua parada. Esses modelos servem não somente para a obtenção de soluções exatas em instâncias menores, mas também como referência para a avaliação da meta-heurística proposta.

Além da modelagem matemática, a pesquisa investiga a implementação da meta-heurística híbrida para otimizar a alocação dos alunos às paradas e a geração de rotas dos veículos. O método proposto considera múltiplas restrições operacionais, como capacidade dos veículos, distância máxima de caminhada e a necessidade de evitar sub-rotas, garantindo a viabilidade e a eficiência das soluções obtidas. Para validar os resultados, a abordagem será aplicada a um estudo de campo utilizando dados reais de uma escola da rede pública, com informações sobre a localização dos estudantes e das paradas de ônibus.

No contexto do roteamento de veículos clássico, o objetivo primordial é identificar os percursos mais eficientes para uma frota de veículos, atendendo a um conjunto de pontos de demanda e reduzindo o custo total de transporte. Esta classe de problemas abarca diversas variantes, como o *Traveling Salesman Problem (TSP)* e *Vehicle Routing Problem (VRP)*, que podem divergir em termos de restrições adicionais, tais como capacidade de carga dos veículos, janelas de tempo para atendimento das demandas e múltiplos depósitos de origem. Por outro lado, o problema de roteamento de veículos escolares destaca-se por sua especificidade, concentrando-se na otimização das rotas para o transporte seguro e eficiente de alunos entre suas residências e as instituições de ensino. Esse cenário envolve considerações adicionais, como a necessidade de cumprir horários escolares, a distância máxima que cada aluno pode percorrer até uma parada de ônibus, limitações de capacidade dos veículos em relação ao número de estudantes e restrições específicas de segurança e acessibilidade para crianças em idade escolar. Assim, enquanto o roteamento de veículos clássico prioriza predominantemente a minimização dos custos operacionais, o roteamento de veículos escolares incorpora uma dimensão social e educacional, enfatizando não apenas a eficiência, mas também a segurança e o bem-estar dos alunos.

A otimização do roteamento dos ônibus escolares surge como um campo crucial na ampla área da otimização combinatória, que se dedica à busca por soluções para problemas de roteamento, considerando uma variedade de restrições e objetivos específicos. Um marco importante nessa área foi estabelecido por Laporte (1992), que definiu os fundamentos teóricos e práticos para uma série de problemas de otimização de roteamento, incluindo o roteamento de veículos para transporte escolar, que será o foco desta pesquisa.

O presente estudo visa minimizar os custos do transporte escolar dos alunos matrículados no município de Fortaleza, por meio da aplicação de uma meta-heurística híbrida. É importante ressaltar que o modelo matemático adotado como referência é baseado em Schittekat *et al.* (2013). O enfoque desse estudo está na resolução do problema de roteamento de veículos escolares com a seleção de paradas de ônibus por meio de uma abordagem meta-heurística. No contexto deste estudo, o foco está na compreensão fundamental do problema e no desenvolvimento de um modelo para minimizar a distância total percorrida. O foco está em decisões simultâneas como:

1. A atribuição de cada aluno a uma parada específica é feita de forma otimizada, baseada na distância euclidiana entre a casa do aluno e as paradas ao redor, não podendo essa distância

ser superior a um determinado valor pré-definido.

2. A determinação de rotas que atendam às paradas selecionadas deve considerar a quantidade de estudantes em cada uma e a capacidade de cada veículo.

Destaca-se que este estudo se diferencia pela incorporação de distintas restrições para tratar o fluxo e evitar sub-rotas, garantindo uma implementação eficiente. Além disso, propõe-se uma formulação para minimizar a distância máxima de caminhada de um aluno até uma parada, baseada no problema de p -centros. Essas medidas, em conjunto, asseguram uma conectividade mais eficaz entre as rotas, eliminam a ocorrência de subciclos que inviabilizam a solução e visam o bem-estar dos estudantes.

Este trabalho visa atender à crescente demanda por soluções inovadoras voltadas à otimização das rotas de veículos escolares, proporcionando benefícios às instituições educacionais, operadoras de transporte, estudantes e à comunidade em geral. Ao concentrar-se em veículos com características similares aos empregados pela Secretaria Municipal de Ensino (SME), a pesquisa propõe realizar um estudo de campo junto aos alunos de uma escola pertencente à rede de ensino, utilizando dados reais referentes às localizações dos estudantes e das paradas de ônibus. A presente abordagem busca suprir uma lacuna específica nas pesquisas locais, contribuindo para o desenvolvimento de um sistema de transporte escolar mais eficiente, seguro e sustentável.

No cenário educacional atual, a eficiência no transporte de estudantes é essencial não apenas pela conveniência e segurança, mas também pelas implicações financeiras. A implementação de algoritmos avançados de roteamento, considerando distâncias de caminhada dos alunos até as paradas de ônibus e a capacidade de cada veículo, pode reduzir custos operacionais, minimizar o consumo de combustível, diminuir a necessidade de manutenção e otimizar a utilização dos recursos disponíveis. Além disso, avaliar a contribuição do modelo proposto para a redução do impacto ambiental, considerando a diminuição do consumo de combustível e das emissões de gases poluentes, é fundamental para alinhar eficiência logística a práticas sustentáveis.

1.2 Objetivos

1.2.1 *Objetivos Gerais*

Esta dissertação tem como objetivo propor uma meta-heurística híbrida de busca de vizinhança para resolução do problema de roteamento de veículos no transporte escolar com

frota homogênea, considerando dados reais do sistema de transporte de estudantes da cidade de Fortaleza.

1.2.2 *Objetivos específicos*

Os objetivos específicos da dissertação são:

- a) Analisar as características operacionais do sistema de transporte escolar no município de Fortaleza, considerando restrições reais, como a capacidade dos veículos e a distância máxima de caminhada dos alunos.
- b) Desenvolver dois modelos matemáticos para o problema de roteamento de veículos escolares, um para minimizar os custos associados ao transporte escolar e outro para minimizar a maior distância caminhada por um aluno.
- c) Implementar uma meta-heurística de busca de vizinhança na qual se utiliza o *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) na fase de construção do algoritmo e o *Iterated Local Search* (ILS) para refinar essa solução, visando melhorar a qualidade do resultado.
- d) Avaliar e comparar o desempenho da meta-heurística proposta com outros métodos, como o *Variable Neighborhood Descent* (VND) proposto por Schittekat *et al.* (2013), por meio de experimentos computacionais realizados em instâncias reais e da literatura.
- e) Aplicar as abordagens desenvolvidas a um estudo de caso com dados reais, validando sua aplicabilidade prática e verificando os benefícios operacionais no contexto do transporte escolar de Fortaleza.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As abordagens aos subproblemas do *School Bus Routing Problem* (SBRP) variam dependendo do enfoque adotado em cada estudo. No entanto, toda abordagem começa com a preparação dos dados, que envolve a estruturação da rede viária percorrida pelos veículos, ligando as paradas às escolas dos alunos, bem como a determinação da distância que cada aluno precisa percorrer até chegar à sua parada e a capacidade de carga de cada veículo. Esses dados são organizados em uma matriz na qual é possível analisar os tempos de viagem e as distâncias mínimas entre os pares de nós, conforme descrito por Park *et al.* (2012). Nesse sentido, esta seção se destina à realização de uma revisão bibliográfica abrangente dos diversos subproblemas apresentados na literatura, sendo o primeiro passo para a comparação e análise da eficiência das soluções propostas.

A literatura sobre o VRP e suas diversas variações, como as janelas de tempo que restringem horários de atendimento, é extensa. No entanto, há uma quantidade limitada de pesquisas dedicadas ao SBRP. Algumas pesquisas abordam considerações diversificadas sobre esse problema. Por exemplo, Applegate (2006) em seu livro sobre o TSP menciona as rotas de ônibus escolares como uma das aplicações do TSP, embora não abordem a seleção de paradas para coleta dos estudantes em seu trabalho.

Um fator adicional a ser considerado no contexto do SBRP é o tempo máximo que cada aluno leva para completar sua viagem até a escola. Como ressaltado por Bowerman *et al.* (1995) e Braca *et al.* (1997), enquanto Bennett e Gazis (1972) focaram na minimização do tempo total de viagem para todas as crianças.

As disparidades geográficas podem introduzir novos desafios ao problema, como destacado por Thangiah *et al.* (0), que trataram as aplicações desse tipo de problema em regiões rurais de difícil acesso e terrenos acidentados. Outra contribuição significativa para o SBRP foi realizada por Park e Kim (2010), onde estudantes de uma mesma escola eram recolhidos por diferentes veículos, tornando o problema de difícil resolução.

Um estudo mais detalhado, conduzido por Park *et al.* (2012), abordou cinco subproblemas relacionados ao SBRP. Entre eles estão: a preparação dos dados, a seleção das paradas dos ônibus, a geração das rotas dos ônibus, o ajuste do horário de início das aulas na escola e o agendamento dos ônibus. Os autores ressaltaram a importância da integração desses subproblemas. O presente trabalho se concentra na seleção de pontos de ônibus e na geração de rotas de ônibus simultaneamente, sendo uma das poucas abordagens que tratam dessa questão

conjuntamente. Uma exceção recente é o estudo de Riera-Ledesma e Salazar-González (2013), que considera a seleção de paradas como parte integrante do problema de otimização.

Schittekat *et al.* (2013) propuseram uma abordagem inovadora para resolver o problema de roteamento de ônibus escolares com seleção de pontos de parada. O modelo proposto, juntamente com a meta-heurística, visa minimizar a distância total percorrida pelos ônibus escolares, abordando simultaneamente a geração de rotas e a seleção de pontos de parada. O estudo destaca a importância da integração entre a seleção de pontos de parada e a geração de rotas de ônibus, propondo um método eficaz e simples de implementar, sem a necessidade de especificar parâmetros. A meta-heurística consiste em duas fases: uma fase de construção baseada em ideias do GRASP e uma fase de melhoria baseada em um método VND. Os resultados obtidos demonstram a eficácia da meta-heurística em encontrar soluções ótimas ou próximas do ótimo para grandes instâncias do problema de roteamento de ônibus escolares, em tempos de computação limitados. As semelhanças entre as características do trabalho de Schittekat *et al.* (2013) e desta pesquisa foram determinantes para usá-lo como referência. Por exemplo, assim como na presente pesquisa, apenas uma escola é selecionada e a frota utilizada no estudo de caso é homogênea, o que também ocorre na SME de Fortaleza.

Em Dulac *et al.* (1980), os estudantes são encaminhados para interseções de ruas próximas, formando assim um conjunto de paradas com suas respectivas interseções, e o VRP é resolvido. Uma contribuição semelhante é apresentada por Chapleau *et al.* (1985), onde as potenciais paradas são inicialmente agrupadas e, posteriormente, selecionadas para maximizar o número de alunos atendidos em cada parada. Bowerman *et al.* (1995) acrescentam uma nova abordagem ao considerar a distância máxima que um aluno pode percorrer até chegar a uma parada.

A maioria das técnicas de solução desenvolvidas para o SBRP com seleção de pontos de ônibus segue uma abordagem sequencial. Em outras palavras, um procedimento de seleção de paradas de ônibus e um procedimento de roteamento são executados em sequência. As estratégias comumente adotadas são denominadas de *Location–Allocation–Routing* (LAR) e *Allocation–Routing–Location* (ARL), respectivamente. Essas estratégias estão intimamente relacionadas com abordagens semelhantes desenvolvidas para problemas de localização-roteamento por Laporte (1992).

Em síntese, é perceptível que os estudos sobre o SBRP podem ser aprimorados com o desenvolvimento de meta-heurísticas que integrem, de forma consistente, o subproblema de

alocação dos alunos, a definição de suas paradas e a geração de rotas eficientes. Adicionalmente, esta dissertação propõe a elaborar uma meta-heurística híbrida eficaz e de implementação simplificada atendendo aos requisitos mencionados.

Na Tabela 1, é apresentada uma síntese das contribuições ao longo do período investigado e os principais temas de pesquisa abordados:

Tabela 1 – Contribuições ao longo dos anos.

Referências	Estratégia	Objetivo	Frota Heterogênea	Custo da frota	Custo da rota	Janela de tempo	Múltiplas esco- las	Múltiplas para- das	Distância má- xima cami- nhada
Newton e Thomas (1969)	Heurística	Minimizar o tempo de viagem	–	–	–	X	–	X	–
Bennett e Gatzis (1972)	Heurística	Minimizar o tempo de viagem e estudantes	X	–	–	–	–	X	–
Verderber (1974)	Heurística	Minimizar o tempo de viagem	X	–	–	X	–	X	–
Newton e Thomas (1974)	Heurística	Minimizar o tempo de viagem e rotas	X	–	–	X	X	X	–
Gavish e Shlifer (1979)	Programação Inteira	Minimizar a frota e custos das rotas	–	X	X	X	–	–	–
Dulac <i>et al.</i> (1980)	Heurística	Minimiza a duração da viagem dos ônibus e o número de rotas	X	–	–	X	–	X	X
Chapleau <i>et al.</i> (1985)	Heurística	Minimizar as rotas	X	–	–	–	–	–	X
Bowerman <i>et al.</i> (1995)	Heurística	Minimizar o número de rotas, tempo de viagem, distância a pé máxima, e variações no número de alunos e na duração total da viagem dos ônibus	–	–	–	–	–	–	X
Fügenschuh (2009)	Programação linear	Minimizar número de ônibus e as viagens inúteis	–	–	–	X	–	–	X
Park <i>et al.</i> (2012)	Programação inteira mista	Minimizar número de ônibus	X	–	–	X	X	–	–
Riera-Ledesma e Salazar-Gonzalez (2012)	Programação inteira mista	Minimizar o número de rotas, tamanho da viagem do ônibus e suas variações	–	–	X	–	–	–	X
Riera-Ledesma e Salazar-González (2013)	Programação inteira mista	Minimizar o número de rotas e a distância total percorrida por cada estudante	–	–	X	–	–	–	X
Schittekat <i>et al.</i> (2013)	Meta-heurística	Minimizar o tamanho das viagem dos ônibus	–	–	X	–	–	–	X
Lima <i>et al.</i> (2016)	Heurística	Minimizar a frota e o custo de cada rota	–	–	X	–	–	–	X
Caceres <i>et al.</i> (2017)	Programação dinâmica	Minimizar o número de ônibus e o de viagens	–	–	X	X	X	–	X

Referências	Estratégia	Objetivo	Frota Heterogênea	Custo da frota	Custo da rota	Janela de tempo	Múltiplas escolas	Múltiplas paradas	Distância máxima caminhada
Sales <i>et al.</i> (2018)	Meta-heurística	Minimizar o número de ônibus e o de viagens	X	X	X	–	–	X	X
Xie <i>et al.</i> (2021)	Meta-heurística	Minimizar o custo total de transporte	X	X	X	X	X	X	X
Guo e Samaranayake (2022)	Técnica de decomposição	minimizar o custo global da utilização dos ônibus	–	X	–	–	–	X	X
Muzulon <i>et al.</i> (2022)	Heurística	Minimizar a distância total percorrida	–	X	–	–	–	X	X
Sciortino <i>et al.</i> (2022)	Heurística	Minimizar o nº de ônibus, tempo e dist.	X	–	–	–	X	X	X
Melo e Kramer (2024)	Meta-heurística	Minimizar o custo	X	–	X	X	X	X	X
Silva <i>et al.</i> (2025)	Programação linear inteira, meta-heurística	minimizar o custo total das rotas	–	–	X	–	–	X	
Presente Estudo	Programação linear inteira, heurísticas e meta-heurísticas	Minimizar a distância percorrida pelos ônibus e a distância máxima de caminhada pelos alunos	–	–	X	–	–	X	X

Fonte: Adaptada de Sales *et al.* (2018).

A tendência identificada nos estudos mais recentes, revela um avanço notável na abordagem para otimização de sistemas de transporte escolar. Recentemente, percebe-se um aumento considerável na consideração de restrições e objetivos, que antes eram difíceis de serem abordados. Essa progressão é evidenciada pela inclusão de aspectos como diversidade na frota, variação nos custos associados às rotas e à frota, janelas de tempo para atendimento, múltiplas escolas e paradas, além de restrições relacionadas à distância máxima de caminhada. Essa evolução reflete ainda avanços notáveis na aplicação de técnicas avançadas, tais como meta-heurísticas, programação dinâmica e algoritmos meméticos, que possibilitam uma análise mais abrangente e eficiente desses sistemas complexos. A integração dessas restrições adicionais não apenas aprimora a qualidade das soluções propostas, mas também demonstra a crescente habilidade da comunidade científica em lidar com desafios práticos complexos no contexto do transporte escolar.

3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

3.1 Modelo para minimização da distância percorrida pelos ônibus

A seguir, apresenta-se a formulação do *Mixed-Integer Linear Programming* (MILP), utilizado para abordar o problema de roteamento de transportes escolares, conhecido na literatura como *School Bus Routing Problem* (SBRP). É importante ressaltar que, neste modelo, os veículos possuem capacidade uniforme, uma única escola é designada como destino, e tanto os estudantes quanto os veículos são idênticos em termos de modelo, resultando em uma frota homogênea. Em contraste com Schittekat *et al.* (2013), algumas restrições foram ajustadas para garantir o fluxo eficiente das rotas e, consequentemente, a eliminação de sub-circuitos, uma questão comum em problemas dessa natureza que podem se tornar inviáveis quando não tratados adequadamente.

O critério de otimização busca minimizar a distância percorrida por cada veículo até a escola designada como destino. É relevante destacar que o problema de roteamento de veículos escolares descrito neste contexto representa uma ampliação do VRP, sendo, portanto, categorizado como NP-difícil, conforme previamente estabelecido por Karp (1972). Adicionalmente, presume-se que a formulação do problema ocorre em um grafo direcionado.

Conjuntos

- V : Conjunto de paradas.
- S : Conjunto de alunos.
- A : $\{(i, j) \mid i, j \in V \text{ e } i \neq j\}$.

Parâmetros

- k : Índice que representa os ônibus.
- n : Representa o número de paradas.
- C : Capacidade máxima de cada veículo.
- c_{ij} : Custo associado ao percorrer o arco $(i, j) \in A$.
- s_{ij} : Matriz que indica a existência de aluno no percurso (i, j) .
- w : Distância máxima caminhada por cada estudante até sua parada.

Variáveis de decisão

- $x_{i,j,k}$: Variável binária que indica se há uma aresta entre os nós i e j em uma rota.
- y_{ik} : Variável binária que indica se o nó i está em uma rota.
- z_{ilk} : Variável binária que indica se o aluno l é pego na parada i pelo ônibus k .
- u_{ik} : Variável contínua que representa a posição do nó i em uma rota.

A variável de decisão x_{ijk} apresenta três índices, tornando a estimativa do número de ônibus crucial para o desempenho do modelo. A quantidade mínima de ônibus necessária pode ser determinada a partir da relação entre o número total de estudantes e a capacidade máxima dos veículos, conforme definido pela equação:

$$k = \left\lceil \frac{\text{estudantes}}{C} \right\rceil \quad (3.1)$$

Se houver uma quantidade excessiva e desnecessária de ônibus, o desempenho do modelo será impactado negativamente devido ao aumento da complexidade computacional. Por outro lado, se o número de ônibus for insuficiente para acomodar todos os estudantes, o modelo retornará uma solução inviável. Portanto, essa equação estabelece um limite inferior para o número de ônibus necessário, garantindo a viabilidade da solução.

Portanto, tem-se a seguinte formulação matemática:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k=1}^n c_{ij} \cdot x_{ijk}, \quad (3.2)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = \sum_{j \in V} x_{jik} \quad \forall i \in V, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{1\}} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{1\}} x_{jik} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.5)$$

$$\sum_{k \in S} \sum_{i \in V} z_{ilk} = 1 \quad \forall l \in S, \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in S} z_{ilk} \leq s_{il} \quad \forall i \in V, \forall l \in S, \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = y_{ik} \quad \forall i \in V, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{l \in S} z_{ilk} \leq C \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.10)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + 1 \leq (n-1) \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i \in V, \forall j \in V, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}; i \neq 1 \text{ e } j \neq 1, \quad (3.11)$$

$$z_{ilk} \leq y_{ik} \quad \forall i \in V, \forall l \in S, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.12)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.13)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.14)$$

$$z_{ilk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall l \in S, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.15)$$

$$u_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.16)$$

A função objetivo 3.2, representa a minimização da distância total percorrida pelos ônibus. O conjunto de restrições do tipo 3.3 impõe que a quantidade de fluxo de saída de cada nó seja igual à quantidade de fluxo de entrada, para todas as rotas. O conjunto de restrições do tipo 3.4 e 3.5 garantem que, para todos os nós, exceto o nó 1, o número de entradas e saídas em uma rota não exceda 1. O conjunto de restrições do tipo 3.6 impõe que cada aluno seja atendido em exatamente uma parada. O conjunto de restrições do tipo 3.7 assegura que o número de alunos apanhados em uma parada i por um ônibus em uma rota não exceda a capacidade da parada para esse aluno. O conjunto de restrições do tipo 3.8 relacionam as variáveis de atribuição y às variáveis de aresta x , garantindo que $y_{i,k}$ seja 1 se o nó i estiver na rota k , e 0 caso contrário. O conjunto de restrições do tipo 3.9 impõe que cada nó (exceto o nó 1) seja visitado por no máximo uma rota. O conjunto de restrições do tipo 3.10 garantem que o número total de alunos em todos

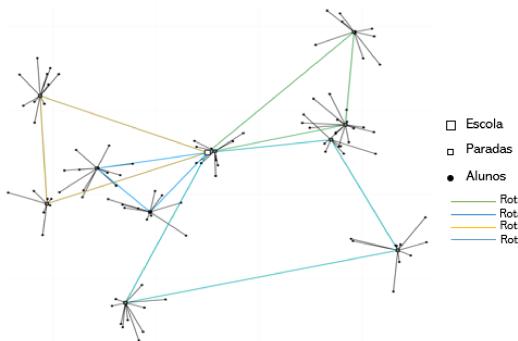
os ônibus em uma rota não exceda a capacidade total do ônibus.

O conjunto de restrições do tipo 3.11 são as restrições de *Miller-Tucker-Zemlin* (MTZ) que garantem que cada nó, exceto o nó 1, seja visitado exatamente uma vez em cada rota. É importante destacar que esta restrição, em conjunto com as restrições 3.4 e 3.5, substitui a restrição para eliminação de sub-circuitos presente no artigo original Schittekat *et al.* (2013). Essa modificação apresentou um diferencial em termos complexidade bem como de tempo computacional. As restrições do tipo 3.12 asseguram que um aluno só possa ser apanhado em uma parada por um ônibus se esse ônibus visitar essa parada. Por fim, as restrições 3.13, 3.14 e 3.15 garantem que as variáveis de decisão x , y e z sejam binárias. Além disso, a restrição do tipo 3.16 assegura a não negatividade da variável u .

No modelo proposto, a alocação de um aluno a uma parada ocorre durante o preenchimento da matriz s . Essa matriz é uma representação binária na qual cada linha denota uma parada e cada coluna representa um aluno. Se $s_{i,j} = 1$, indica que o aluno j pode ser alocado à parada i , enquanto 0 indica o contrário. Essa determinação é realizada calculando a distância entre a residência do aluno e a parada. Se essa distância for menor ou igual ao raio de alcance w , o aluno pode ser alocado àquela parada. Vale ressaltar que os valores disponíveis w foram os mesmos adotados no artigo proposto por Schittekat *et al.* (2013).

A seguir, apresenta-se um exemplo desse tipo de problema com a sua respectiva resolução, observando as rotas feitas por cada ônibus, cada uma indicada por diferentes cores.

Figura 1 – Exemplo de um SBRP com a sua rota ótima.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 1, é apresentado um exemplo do problema proposto, onde os círculos menores representam os alunos em suas respectivas residências, os quadrados menores representam as paradas de ônibus, e o quadrado maior localizado no centro representa a escola à qual os alunos deverão ser destinados. A rota de cada veículo está representada por uma cor diferente.

Note-se que, conforme ilustrado, mesmo que um aluno resida próximo à escola, o modelo ainda o incluirá na rota de transporte, pois busca atender a todos os estudantes de maneira integral.

3.2 Modelo para a minimização da distância de caminhada pelos alunos

Como já mencionado na sessão 3.1, o transporte escolar eficiente é crucial para garantir que os alunos cheguem à escola de maneira segura e pontual. A logística envolvida neste processo impacta diretamente a satisfação dos alunos e de seus pais, além de influenciar significativamente os custos operacionais. A localização estratégica das paradas de ônibus é um aspecto fundamental para otimizar este sistema, minimizando o tempo de viagem e a distância que os alunos precisam caminhar.

Neste contexto foi implementado um modelo baseado no problema de p -centros. Este modelo, originalmente introduzido por Hakimi (1964), visa minimizar a distância máxima que cada aluno precisa caminhar até sua respectiva parada de ônibus, priorizando a qualidade de vida dos alunos ao invés de focar apenas na minimização dos custos. A escolha do modelo p -centros é particularmente adequada, ao permitir identificar a melhor localização das paradas de ônibus considerando a distribuição geográfica dos alunos e outras restrições específicas. Essa abordagem garante que o principal beneficiado seja o aluno, promovendo um acesso mais fácil e seguro ao transporte escolar.

A formulação do problema de p -centros, conforme ampliada por Toregas *et al.* (1971) e Handler e Mirchandani (1979), destaca-se por seu foco em minimizar a maior distância entre um usuário e o centro mais próximo, uma característica essencial para problemas que envolvem equidade no acesso.

O modelo apresentado a seguir preserva os mesmos parâmetros e conjuntos do MILP descrito na Seção 3.1, com as seguintes adaptações:

A função objetivo é definida como:

$$\text{Minimizar } Z = Q \quad (3.17)$$

Em que Q representa, entre todos os alunos considerados, a maior distância percorrida para chegar a sua parada.

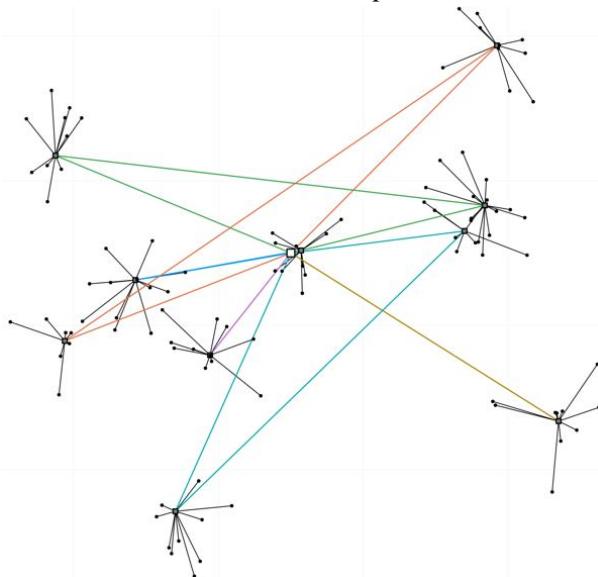
As demais restrições permanecem inalteradas, exceto pelo conjunto de restrições do tipo 3.9, que foi substituída pelo conjunto de restrições abaixo:

$$\sum_{i \in V} s_{i,l} \cdot z_{i,l,k} - Q \leq 0 \quad \forall l \in S, \forall k \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (3.18)$$

Essa restrição assegura que, para cada ônibus k , a distância máxima Q percorrida por um aluno até uma parada de ônibus não seja excedida.

Com essas modificações, foi possível identificar eficientemente as paradas de ônibus que deveriam ser ativadas para atender a todos os alunos, promovendo maior equidade e bem-estar. Contudo, pode-se observar que algumas rotas podem apresentar menor eficiência em comparação ao modelo para minimização da rota percorrida pelos ônibus, devido à priorização exclusiva da minimização das distâncias de caminhada dos alunos na função objetivo, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Rotas dos veículos obtidas no modelo de p -centros.



Fonte: elaborada pelo autor.

3.3 Heurísticas construtivas propostas

3.3.1 *Modelo para alocação dos alunos aos pontos de parada*

A alocação eficiente dos alunos é fundamental para o bom desempenho dos modelos matemáticos, heurísticas e meta-heurísticas propostos neste trabalho. Por essa razão, nesta seção, apresentamos o modelo matemático desenvolvido para resolver o problema de alocação dos alunos às paradas de ônibus escolares. Esse modelo foi implementado utilizando programação matemática, visando minimizar a distância total percorrida pelos alunos, respeitando restrições

de capacidade e distância máxima permitida. Além disso, o modelo foi empregado na fase de construção das heurísticas utilizadas e da meta-heurística proposta, garantindo uma alocação inicial eficiente que contribui para a qualidade das soluções geradas. A seguir, detalhamos os conjuntos, variáveis de decisão, restrições e a função objetivo do modelo.

Conjuntos

- V : Conjunto das paradas disponíveis.
- S : Conjunto de alunos que precisam ser alocados.

Parâmetros

- $d_{i,j}$: Matriz que representa a distância entre a parada i e o aluno j .
- w : Vetor que define a distância máxima permitida para o aluno j .
- K : Capacidade máxima de cada parada.
- n : Número total de paradas.
- a : Número total de alunos.

Variáveis de decisão

- $p_{i,j} \in \{0, 1\}$: Variável binária que assume valor 1 se o aluno j for alocado à parada i , e 0 caso contrário.
- $t_i \in \{0, 1\}$: Variável binária que assume valor 1 se a parada i for utilizada, e 0 caso contrário.

Função objetivo:

$$\min \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^q d_{ij} \cdot p_{ij}, \quad (3.19)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=2}^n p_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, a\}, \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^q p_{ij} \leq K, \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}, \quad (3.21)$$

$$p_{ij} \cdot d_{i,j} \leq w, \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, a\}, \quad (3.22)$$

$$p_{ij} \leq t_i, \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, a\}. \quad (3.23)$$

A função objetivo busca minimizar a distância total percorrida pelos alunos. O conjunto de restrições do tipo (3.20) assegura que cada aluno seja alocado a exatamente uma parada, garantindo que não haja alunos sem parada designada. O conjunto de restrições do tipo (3.21) impõe que cada parada tenha sua capacidade respeitada, limitando o número de

alunos alocados a cada parada. O conjunto de restrições do tipo (3.22) garante que os alunos só sejam alocados a paradas cuja distância esteja no limite máximo que podem percorrer. Por fim, o conjunto de restrições do tipo (3.23) estabelece que uma parada só pode receber alunos se estiver ativa, ativando as paradas conforme a necessidade.

3.3.2 *Heurística construtiva baseada no algoritmo de Gillett e Miller*

A heurística proposta por Gillett e Miller (1974) é uma das estratégias mais conhecidas para a resolução do VRP, sendo amplamente utilizada devido à sua simplicidade computacional e eficiência na geração de soluções viáveis. O método, baseado em uma abordagem geométrica para a organização das rotas, aplica-se em diversos contextos, incluindo problemas com restrições de capacidade e múltiplos depósitos. Estudos como os de Clarke e Wright (1964) e Golden *et al.* (1977) demonstraram a eficácia dessa abordagem ao combiná-la com técnicas de clusterização para otimizar a alocação de demandas em veículos. Além disso, trabalhos recentes, como os de Toth e Vigo (2002) e Cordeau *et al.* (2007), aprimoraram a metodologia ao integrá-la a modelos híbridos que combinam heurísticas construtivas e métodos de busca local.

Neste estudo, a heurística de Gillett e Miller (1974) foi estendida para a resolução do SBRP, com dois objetivos principais: gerar soluções viáveis para instâncias nas quais o modelo de minimização da distância máxima percorrida pelos veículos, apresentado na Seção 3.1, não convergiu no tempo limite estabelecido, e permitir a comparação entre soluções exatas e heurísticas nas etapas iniciais da pesquisa. A abordagem baseia-se na definição da escola como ponto central e na ordenação das paradas conforme os ângulos formados entre esse ponto e os locais de embarque e desembarque, representados no Algoritmo 1 por S .

Após a definição das paradas, as rotas são construídas respeitando as restrições de capacidade dos veículos, representadas por C . Sempre que essa capacidade é excedida, o veículo retorna à escola antes de continuar. O custo total da rota é então calculado a partir da matriz c , considerando tanto os deslocamentos diretos quanto os retornos ao ponto de referência.

Embora a heurística de Gillett e Miller (1974) seja eficiente para encontrar soluções válidas em tempo computacional aceitável, suas soluções podem ser subótimas para instâncias mais complexas, tornando-a uma opção pouco adequada para utilização na fase de construção de outros métodos. Nesses casos, refinamentos adicionais são necessários para melhorar a qualidade das soluções. Assim, essa abordagem se mostra adequada como estratégia inicial para problemas

com restrições logísticas mais simples ou como base para métodos mais sofisticados.

A seguir, apresentamos o pseudocódigo da heurística proposta, detalhando suas etapas principais e a lógica empregada na construção das soluções.

Algoritmo 1: Heurística de Gillet e Miller

Input: S, C, c

Output: Melhor rota e custo total

Calcular os ângulos de cada ponto em relação ao ponto de referência e ordenar;

Iniciarizar a melhor rota e o melhor custo;

for cada ponto no conjunto ordenado **do**

if capacidade restante \geq demanda do ponto **then**

 Adicionar ponto à rota e atualizar capacidade e custo;

else

 Retornar ao ponto de referência, reiniciar capacidade e continuar rota;

end

end

Retornar ao ponto de referência e atualizar custo final;

return Melhor rota e custo total;

3.3.3 Fase de construção do GRASP

Conforme discutido ao longo desta pesquisa, a roteirização eficiente de veículos escolares representa um desafio essencial no campo da logística, ao impactar diretamente a redução de custos operacionais, a qualidade do serviço prestado e o bem-estar dos estudantes. Dada a relevância desse tema, nesta seção exploramos uma heurística amplamente utilizada na literatura para tratar esse tipo de problema, a qual se destaca por sua abordagem construtiva. O método busca gerar soluções viáveis e de alta qualidade ao estruturar as rotas de maneira sequencial, respeitando as restrições de capacidade dos veículos e minimizando a distância percorrida. Além disso, essa heurística apresenta um tempo de execução computacionalmente eficiente, tornando-se uma alternativa prática para instâncias de grande escala.

O GRASP, ou *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*, é uma heurística bem estabelecida, inicialmente apresentada por Feo e Resende (1989), que constrói soluções iterativamente, partindo de uma solução inicial vazia e adicionando elementos gradualmente até alcançar uma solução completa. Um dos principais componentes do GRASP é a lista de candidatos restrita (LCR), que consiste em um subconjunto dos elementos candidatos, selecionados de acordo com um critério de ganância. No contexto de problemas de minimização, a LCR inclui elementos que causam o menor aumento (ou maior redução) no valor da função objetivo

ao serem incorporados à solução parcial. Após a formação da LCR, um elemento é escolhido aleatoriamente, a solução é atualizada e o processo é repetido até que uma solução viável seja construída.

O balanceamento entre a ganância e a aleatoriedade no processo de construção é controlado por um parâmetro α , que regula a inclusão de elementos na LCR. Para um problema de minimização, valores de α próximos de zero tornam o algoritmo predominantemente guloso, priorizando as opções que oferecem os menores custos incrementais. Em contrapartida, valores mais elevados de α promovem uma maior diversidade, aumentando a aleatoriedade na seleção dos elementos.

Os fundamentos teóricos e práticos do GRASP foram posteriormente ampliados e consolidados por Resende e Ribeiro (2010), que destacaram sua eficácia em diversos problemas de otimização combinatória e sua capacidade de balancear exploração e intensificação no espaço de busca.

A fase construtiva do GRASP neste trabalho baseia-se na formulação descrita por Schittekat *et al.* (2013), que utiliza a abordagem da heurística de economias proposta por Clarke e Wright (1964), uma técnica amplamente reconhecida para a resolução do VRP. Essa abordagem inicia com uma solução onde cada parada é atendida por uma rota independente. Posteriormente, constrói-se uma matriz de economias que avalia, para cada par de paradas, a redução de custo resultante de sua conexão, permitindo a fusão das rotas correspondentes. Contudo, para que duas paradas sejam conectadas, é necessário estarem em rotas distintas, sendo uma delas a primeira parada e a outra a última da respectiva rota. Além disso, a soma das demandas das rotas envolvidas não pode exceder a capacidade do veículo. A cada iteração, o par de paradas que oferece o maior benefício em termos de economia é selecionado de forma gulosa.

De maneira semelhante à abordagem de Clarke e Wright (1964), o algoritmo construtivo inicializa com uma solução onde cada parada é atendida individualmente. Em seguida, alunos são alocados às paradas, resolvendo o subproblema de alocação de estudantes. Se nenhuma alocação viável puder ser encontrada, a instância será considerada inviável. Caso contrário, o algoritmo avança, aplicando uma variante randomizada da heurística de Clarke e Wright (1964), que conecta pares de paradas e funde rotas iterativamente. No entanto, a verificação da viabilidade após a conexão de paradas é mais complexa no contexto do problema de roteamento escolar, ao poder demandar a realocação de alunos entre diferentes rotas, utilizando o algoritmo específico do subproblema de alocação.

Diferentemente de algumas implementações alternativas que utilizam métodos sem parâmetros, como a seleção por roleta aplicada por Drexl (1991), o algoritmo construtivo empregado neste trabalho utiliza o parâmetro α para ajustar dinamicamente a lista de candidatos. Isso assegura um equilíbrio eficaz entre escolhas gulosas e aleatórias. Além disso, a verificação da viabilidade é realizada apenas após a seleção de pares de paradas, otimizando o tempo computacional. Quando um par selecionado resulta em uma solução inviável, a movimentação é descartada e o par correspondente é removido da lista de candidatos, garantindo maior eficiência ao processo.

A seguir, é apresentado o pseudocódigo que descreve a implementação do algoritmo construtivo utilizado neste trabalho. Ele ilustra as principais etapas do algoritmo, incluindo a construção da LCR, a seleção de pares viáveis e a fusão das rotas, considerando as restrições de capacidade. Este pseudocódigo sintetiza a lógica adotada para resolver o problema onde n representa as paradas dos ônibus e C a capacidade dos veículos.

Algoritmo 2: Algoritmo construtivo

```

Input: Pontos, custos,  $n$ ,  $C$ ,  $\alpha$ 
Output: Rotas, custo
Initialize rotas e capacidades;
Calcule ganhos e pares possíveis;
while pares possíveis do
    Construa a LCR;
    if LCR vazia then
        | break
    end
    Seleccione um par;
    if par inviável then
        | Remova par e continue
    end
    if capacidade válida then
        | Una rotas e atualize;
        | Atualize pares possíveis;
    end
    else
        | Remova par
    end
end
Adicione o ponto base às rotas;
Calcule custo total;
return rotas, custo

```

3.4 GRASP-ILS

A meta-heurística híbrida, GRASP-ILS, proposta neste trabalho para a resolução do SBRP, combina a construção de soluções iniciais baseada na fase de construção do GRASP com a capacidade de refinamento e intensificação de soluções do ILS. Essa abordagem foi projetada para equilibrar a diversificação global e a intensificação local, explorando eficientemente o espaço de busca para encontrar soluções de alta qualidade. A partir dessas soluções, o ILS aplica perturbações estratégicas e busca local iterativa para escapar de mínimos locais e melhorar progressivamente a qualidade da solução.

A escolha do ILS é fundamentada em sua capacidade de lidar com problemas combinatórios complexos e com múltiplas restrições, como destacado em trabalhos como Lourenço *et al.* (), que enfatizam o papel das heurísticas construtivas em combinação com técnicas iterativas, e Lourenço *et al.* (2019), que detalham o funcionamento do ILS em cenários aplicados. Além disso, Laporte *et al.* () reforçam a relevância de métodos iterativos em problemas de roteamento, mostrando sua eficácia na obtenção de soluções robustas.

A hibridização de metodologias, como a proposta neste trabalho, tem sido amplamente utilizada ao longo dos anos. Júnior *et al.* (2007), por exemplo, propuseram um método para a resolução do problema de sequenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção, baseado na hibridização das metodologias GRASP, ILS e VND. Da mesma forma, Pereira (2010) desenvolveu uma heurística híbrida GRASP-ILS para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo, demonstrando a eficácia dessa abordagem em diferentes contextos de otimização.

Neste contexto, o GRASP-ILS não apenas busca soluções factíveis, mas também explora diferentes regiões do espaço de busca por meio das perturbações do ILS, garantindo uma exploração sistemática e adaptada às características específicas do SBRP. Essa abordagem, aliada à simplicidade e robustez do método, justifica sua aplicação neste trabalho.

O processo iterativo do GRASP-ILS proposto é estruturado em etapas que visam, desde a alocação eficiente dos alunos em suas respectivas paradas, passando pelo refinamento da solução inicial viável, até a exploração eficiente do espaço de busca. A seguir, são descritas as etapas do algoritmo em detalhes.

1. Geração da Solução Inicial: O algoritmo inicia a partir de uma solução inicial viável, gerada por uma heurística construtiva, baseada na fase de construção do GRASP. Essa solução serve como ponto de partida, oferecendo uma solução viável e de boa qualidade para as

iterações subsequentes. A escolha do GRASP como método construtivo foi motivada pelo seu potencial de gerar soluções de qualidade, o que é crucial para a convergência do GRASP-ILS.

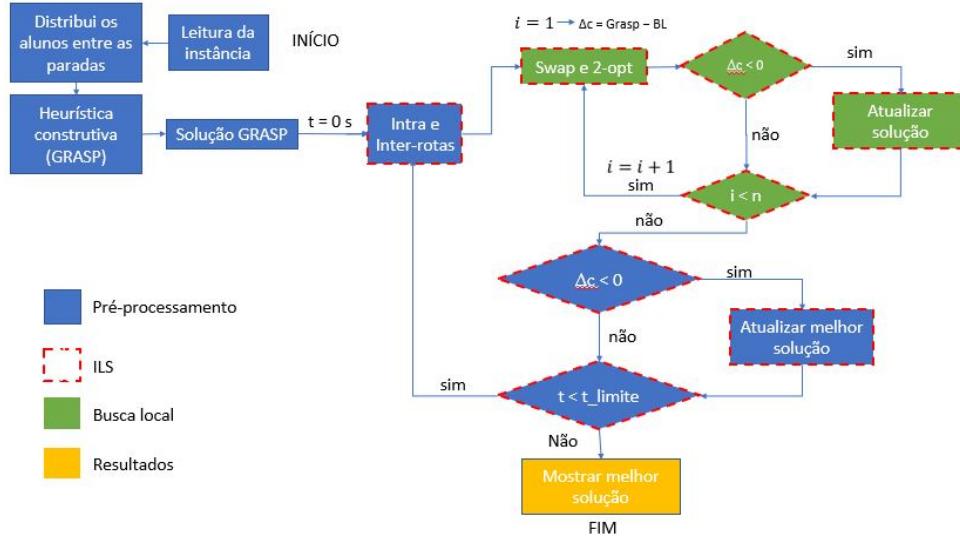
2. Perturbação: A etapa de perturbação modifica a solução atual com o objetivo de escapar de mínimos locais e explorar novas regiões do espaço de busca. No modelo implementado, são utilizadas duas estratégias de perturbação, sendo a escolha entre elas realizada de forma aleatória.
 - Perturbação intra-rotas: reorganiza os elementos em uma mesma rota. Isso pode incluir a inversão da sequência de paradas ou o reposicionamento de elementos, mantendo-os dentro da mesma rota. Essa abordagem é particularmente eficaz para explorar pequenas variações em rotas já estabelecidas, permitindo refinamentos locais rápidos e precisos.
 - Perturbação inter-rotas: realiza trocas de elementos entre diferentes rotas, redistribuindo paradas ou demandas. Essa estratégia promove maior diversificação, explorando soluções em áreas mais distantes do espaço de busca. É especialmente útil em cenários onde rotas podem estar desequilibradas em termos de carga ou eficiência.
3. Busca local: Após a perturbação, a nova solução gerada passa por uma etapa de busca local, que explora vizinhanças próximas para aprimorar sua qualidade. A escolha do operador de busca local foi definida com base em experimentos preliminares, que demonstraram a eficácia de diferentes estratégias conforme o tamanho da instância. Para instâncias com até 10 paradas, foi utilizado o operador *swap*, enquanto para instâncias com mais de 10 paradas, a busca local foi realizada por meio do *2-opt*, devido ao seu melhor desempenho em cenários de maior complexidade.
 - *Swap*: troca de pares de elementos em uma mesma rota ou entre rotas diferentes. Esse operador é eficiente para instâncias menores, onde alterações pontuais podem resultar em melhorias significativas no custo.
 - *2-opt*: baseado na proposta de Kernighan e Lin (1970), esse operador remove dois arcos consecutivos de uma rota e reinsere os pontos em uma nova ordem, criando uma solução mais eficiente. Essa abordagem é particularmente adequada para instâncias maiores, ao explorar melhorias estruturais nas rotas, aumentando a qualidade das soluções geradas.
4. Sistema de reinicialização: após β iterações consecutivas sem melhorias na solução, a

solução atual é reinicializada para a solução inicial gerada pelo GRASP. Esse mecanismo garante maior diversificação global e previne a estagnação do algoritmo em mínimos locais, promovendo a exploração de novas áreas do espaço de busca.

5. Validação da Solução: após a aplicação das perturbações, busca local e possíveis reinicializações, cada solução gerada é validada para garantir o cumprimento das restrições do problema, como limites de capacidade e conectividade. Soluções inviáveis são descartadas, evitando desperdício de recursos computacionais em análises posteriores.
6. Atualização da melhor solução: caso a solução resultante da busca local seja válida e apresente um custo inferior ao da melhor solução conhecida, ela é armazenada como a nova melhor solução. O tempo necessário para encontrar essa solução também é registrado, permitindo avaliar a eficiência do processo.
7. Critério de Parada: o algoritmo itera até que seja atingido um critério de parada predefinido, como um limite de tempo.
8. Resultado: Após o término das iterações, o algoritmo retorna a melhor solução encontrada, juntamente com o custo associado. Essa solução reflete o resultado do processo de intensificação e diversificação promovido pelo GRASP-ILS.

Na Figura 3, é apresentado um fluxograma que ilustra as etapas descritas anteriormente, fornecendo uma visão clara e sistemática do processo abordado.

Figura 3 – Fluxograma da meta-heurística híbrida GRASP-ILS proposta.



Fonte: elaborada pelo autor.

O GRASP-ILS demonstrou diversas propriedades que justificam sua seleção como método de otimização para este estudo. Um dos principais benefícios é a combinação de estratégias de diversificação e intensificação. A etapa de perturbação desempenha um papel crucial ao permitir que o algoritmo escape de mínimos locais, um problema recorrente em métodos de busca local pura. As perturbações intra e inter-rotas equilibram melhorias locais e mudanças estruturais, explorando amplamente o espaço de soluções.

A busca local, por sua vez, é projetada para explorar as vizinhanças próximas à solução corrente, refinando-a para alcançar mínimos locais mais profundos. A escolha dos operadores *swap* e *2-opt* reflete uma abordagem adaptativa: enquanto o *swap* é eficiente em instâncias menores, o *2-opt* proporciona melhorias mais substanciais em problemas de maior escala.

Outro benefício relevante é a flexibilidade do ILS, que permite sua adaptação a diferentes tipos de problemas e restrições. Essa propriedade, aliada à simplicidade do método, reduz a necessidade de parametrizações complexas e facilita sua implementação. Além disso, o ILS apresenta boa eficiência computacional, tornando-se adequado para problemas de grande escala, como o SBRP abordado neste trabalho.

Por fim, a integração desses dois métodos confere maior robustez à meta-heurística proposta. A sinergia resultante dessa combinação potencializa a obtenção de soluções otimizadas

e de alta qualidade, evidenciando a eficácia e a eficiência da abordagem apresentada.

No Algoritmo 3, é apresentado o pseudocódigo do GRASP-ILS proposto nesta dissertação. No algoritmo, S_0 representa a solução inicial gerada pela heurística construtiva GRASP, c corresponde à matriz de custos associada às rotas, C denota a capacidade máxima dos veículos, e o critério de parada é baseado em um limite de tempo t previamente definido. O pseudocódigo ilustra claramente as etapas iterativas do GRASP-ILS, incluindo as operações de perturbação, busca local, validação de soluções, sistema de reinicialização e a integração com o GRASP.

Algoritmo 3: GRASP-ILS

Input: S_0, c, C, t

Output: Melhor solução e custo

Inicializar a melhor solução e seu custo;

Registrar o tempo inicial.;

while tempo atual < limite de tempo **do**

Gerar uma nova solução a partir da solução atual por meio de uma perturbação;

Validar a nova solução;

if a solução é viável **then**

Aplicar uma busca local na nova solução;

Validar a solução resultante;

if a solução resultante é viável e possui menor custo **then**

Atualizar a melhor solução e o custo;

end

end

end

return melhor solução e custo associado;

4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

4.1 Configurações Experimentais

No âmbito desta dissertação, foram conduzidos experimentos minuciosos e rigorosos visando avaliar a eficácia de uma meta-heurística híbrida aplicada ao problema de roteamento de veículos escolares. Para validar o método proposto, utilizou-se um MILP, que serviu de referência para comparação com os resultados gerados pela meta-heurística. Para avaliar a robustez do método, foram testadas 51 instâncias com variações no número de paradas, estudantes, capacidade dos veículos e distâncias máximas permitidas. Os resultados mostram que a abordagem integrada proposta supera os métodos sequenciais tradicionais, gerando soluções de alta qualidade em tempos computacionais reduzidos.

As instâncias empregadas seguem a nomenclatura **sX-XX-cXX-wX**, conforme descrito por Schittekat *et al.* (2013), onde:

- **sX** representa o número de paradas potenciais;
- **XX** refere-se ao número total de estudantes;
- **cXX** indica a capacidade máxima dos veículos;
- **wX** denota a distância máxima que um estudante pode caminhar até a parada mais próxima.

Os experimentos foram realizados em um ambiente computacional configurado com um processador *Intel(R) Celeron(R) CPU N3350 @ 1.10GHz* e 3,83 GB de RAM, utilizando a versão 22.1.1 do solver *IBM ILOG CPLEX*. A linguagem de programação empregada foi *Julia* versão 1.7.2, desenvolvida no ambiente de desenvolvimento integrado *VSCode* versão 1.96.4. Essa configuração foi escolhida para garantir que os resultados obtidos sejam reproduutíveis e confiáveis, respeitando padrões de rigor científico. O código completo, incluindo os modelos descritos, heurísticas e meta-heurísticas, está acessível no repositório: <<https://github.com/Victorneto12/GRASP-ILS>>, onde também foram disponibilizadas as instâncias utilizadas para facilitar o acesso e a replicação dos experimentos.

Adicionalmente, foi realizada uma análise detalhada do impacto das restrições sobre o desempenho do modelo. Observou-se que as restrições de distância e capacidade têm impacto direto no desempenho do modelo, evidenciando a importância de integrá-las no processo decisório. Esta abordagem integrada reduz significativamente os custos de transporte em comparação com a separação das decisões de alocação e roteamento.

Destaca-se que as instâncias avaliadas abarcaram uma ampla gama de cenários,

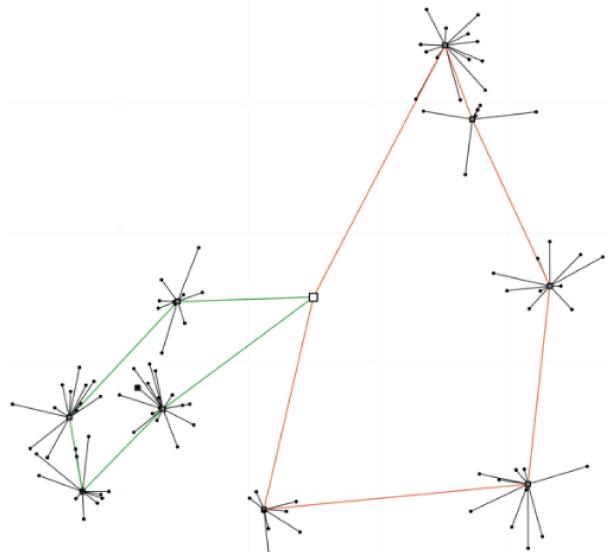
variando desde conjuntos de parâmetros moderados, exemplificados por **s5-25-c25-w5**, até configurações mais desafiadoras, como **s80-1600-c50-w40**. A validação das abordagens foi conduzida através da análise de 51 instâncias, entretanto, a partir da instância **s80-400-c50-w10**, os modelos exatos não obtiveram soluções ótimas dentro do limite de tempo estabelecido de 3600 segundos.

Além disso, os experimentos foram realizados sob diferentes restrições de tempo computacional, considerando limites de 300, 600, 900 e 1800 segundos. Essa variação permitiu avaliar o comportamento do modelo em diferentes condições, analisando sua capacidade de encontrar soluções de qualidade em tempos reduzidos e seu desempenho em execuções mais longas.

As instâncias apresentam as seguintes estruturas:

- Paradas = {5,10,80}
- Estudantes = {25,50,100,400,800,1600}
- Capacidade = {25,50}
- Distância máxima que um aluno pode caminhar até sua parada = {5,10,20,40}

Figura 4 – Exemplo com uma solução para a seguinte instância: **s10-100-c50-w10**



4.2 Resultados do modelo para a minimização da distância percorrida pelos ônibus.

Neste estudo, foi realizada uma análise detalhada dos resultados obtidos pelo MILP para avaliar a qualidade e a eficiência das soluções geradas. Na Tabela 2, são apresentados os valores experimentais da função objetivo para diferentes configurações de instâncias, considerando variáveis-chave como: número de paradas, número de estudantes, capacidade dos veículos e a distância máxima permitida para cada estudante até a parada designada.

Os resultados destacam a robustez do modelo, especialmente em instâncias de menor porte, evidenciando sua capacidade de fornecer soluções otimizadas e alinhadas com os objetivos do problema. A análise demonstra que o modelo é eficiente ao equilibrar as restrições impostas e a minimização da distância total percorrida pelos ônibus, corroborando sua adequação para aplicações práticas no contexto do problema de roteamento escolar. Na Tabela abaixo, N representa o número da instância, n o número de paradas, $Stud$ o número de estudantes na instância testada e w a distância máxima que um aluno pode percorrer até sua parada.

Tabela 2 – Valores obtidos pelo modelo para minimização da distância percorrida pelos ônibus.

N	n	$Stud$	C	w	MILP	$time_{(s)}$	gap (%)
1	5	25	25	5	141,01	0,325	0
2	5	50	50	5	197,20	0,402	0
3	5	50	25	10	193,55	0,480	0
4	5	50	50	10	215,85	0,416	0
5	5	50	25	20	130,52	0,548	0
6	5	50	50	20	96,26	0,625	0
7	5	50	25	40	12,88	0,869	0
8	5	50	50	40	30,24	0,508	0
9	5	100	25	5	360,34	0,203	0
10	5	100	50	5	304,23	0,458	0
11	5	100	25	10	294,20	2,331	0
12	5	25	50	5	161,62	0,206	0
13	5	100	50	10	229,41	0,919	0
14	5	100	25	20	134,96	6,022	0
15	5	100	50	20	144,40	1,508	0
16	5	100	25	40	58,96	10,622	0
17	5	100	50	40	39,44	2,366	0
18	10	50	25	5	242,84	10,443	0
19	10	50	50	5	282,12	0,410	0
20	10	50	25	10	244,54	5,937	0
21	10	50	50	10	288,33	1,502	0
22	10	50	25	20	108,99	3,158	0
23	5	25	25	10	182,15	0,396	0
24	10	50	50	20	157,47	1,266	0
25	10	50	25	40	32,26	6,278	0
26	10	50	50	40	36,66	1,928	0
27	10	100	25	5	403,18	58,249	0
28	10	100	50	5	296,54	148,708	0
29	10	100	25	10	288,87	201,951	0
30	10	100	50	10	294,80	23,901	0

Fonte: elaborada pelo autor.

4.3 Resultados do modelo para minimização da distância de caminhada

Nesta seção, são analisados os resultados obtidos pelo modelo baseado no problema de p -centros para a minimização da distância máxima de caminhada dos alunos até suas respectivas paradas de ônibus.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados obtidos dentro do limite de tempo de 300s para as trinta instâncias nas quais o modelo de minimização da distância percorrida pelos ônibus encontrou soluções dentro do tempo estabelecido. Os testes foram realizados considerando diferentes limites de tempo 300s, 900s, 1800s e 3600s. Observou-se que, mesmo com a variação do tempo, os resultados permaneceram constantes.

Os resultados indicam que, nas instâncias com até 50 estudantes, o modelo conseguiu encontrar soluções de forma rápida. No entanto, em instâncias maiores, com 100 estudantes, houve um aumento no tempo de processamento, ainda que não significativo, especialmente quando o número de paradas e a capacidade dos veículos também aumentaram. Apesar disso, o modelo demonstrou eficiência na obtenção das soluções, conforme evidenciado pelo *gap* zero em todas as instâncias analisadas.

Tabela 3 – Valores obtidos pelo modelo para minimização da distância máxima de caminhada

<i>N</i>	<i>n</i>	<i>Stud</i>	<i>C</i>	<i>p</i> – <i>centros</i>	<i>t_s</i>
1	5	25	25	4,67	0,15
2	5	50	50	4,56	0,16
3	5	50	25	8,74	1,34
4	5	50	50	9,93	0,29
5	5	50	25	19,92	1,4
6	5	50	50	18,61	0,15
7	5	50	25	39,74	0,54
8	5	50	50	39,73	0,15
9	5	100	25	4,97	25,87
10	5	100	50	4,94	2,67
11	5	100	25	10	89,15
12	5	25	50	4,99	0,1
13	5	100	50	9,99	2,23
14	5	100	25	19,61	37,59
15	5	100	50	19,84	2,92
16	5	100	25	39,49	1,51
17	5	100	50	39,87	0,43
18	10	50	25	4,94	2,76
19	10	50	50	4,94	0,38
20	10	50	25	9,62	3,41
21	10	50	50	9,99	0,76
22	10	50	25	19,66	3,81
23	5	25	25	9,44	0,29
24	10	50	50	19,71	1,15
25	10	50	25	38,05	2,29
26	10	50	50	36,74	0,54
27	10	100	25	4,97	107,06
28	10	100	50	4,76	9,88
29	10	100	25	9,82	180,13
30	10	100	50	9,98	7,24

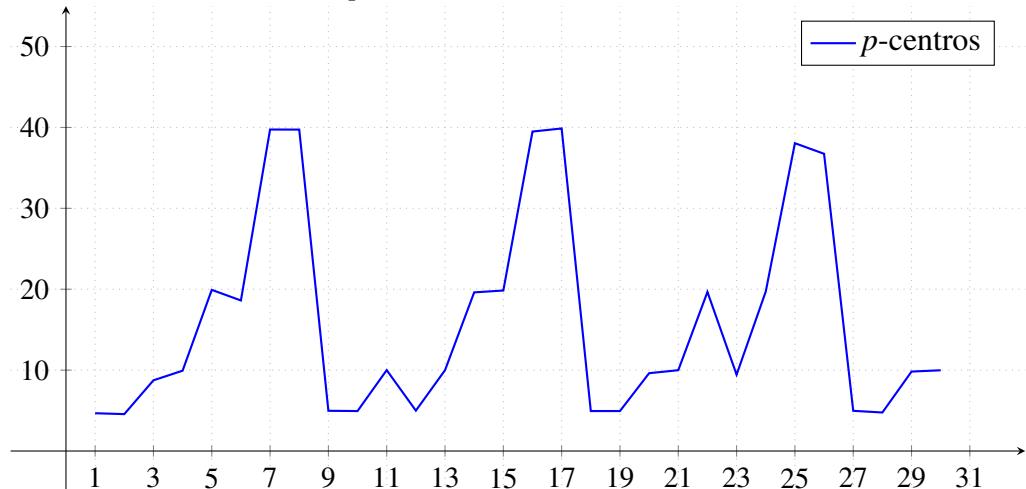
Fonte: elaborada pelo autor

A Figura 5 apresenta os resultados alcançados a partir da formulação do problema de p -centros por meio do MILP, destacando a influência do número de paradas candidatas e da capacidade dos veículos na redução da distância máxima caminhada pelos alunos.

Observa-se que as instâncias com menos paradas e veículos de menor capacidade tendem a resultar em valores mais baixos para a distância máxima de caminhada, indicando que uma quantidade reduzida de paradas favorece essa minimização. No entanto, conforme o número de paradas aumenta, há uma tendência de crescimento na distância máxima de caminhada, sugerindo que a distribuição das paradas impacta diretamente na distância percorrida pelos alunos.

Além disso, o tempo computacional varia significativamente entre as instâncias, sendo maior para aquelas com mais paradas e veículos de maior capacidade. Em alguns casos, o tempo de processamento ultrapassa 180 segundos, evidenciando o impacto do aumento da complexidade computacional conforme o espaço de busca cresce, ainda que esse tempo permaneça em um limite aceitável.

Figura 5 – Resultados do modelo p -centros.



Fonte: elaborada pelo autor.

4.4 Resultados das heurísticas construtivas para a minimização da distância percorrida pelos ônibus

No presente trabalho, foram avaliadas três heurísticas construtivas para a geração de soluções iniciais, visando a aplicação de meta-heurísticas subsequentes. As heurísticas analisadas incluem o método baseado na formulação de Gillett e Miller (1974) aqui tratado como *GM*,

o GRASP tal qual descrito por Schittekat *et al.* (2013) em seu trabalho, tratado aqui como *GRASP_1* e uma abordagem com a calibração do parâmetro α , chamada *GRASP_2*. O objetivo principal foi avaliar a eficiência dessas abordagens na construção de soluções iniciais viáveis e de alta qualidade para o problema de roteamento escolar.

O *GRASP_1*, conforme descrito por Schittekat *et al.* (2013), baseia-se em uma LCR, composta pelos pares de clientes que geram as maiores economias no problema. A seleção dos pares é realizada utilizando uma estratégia de roleta, onde as probabilidades de escolha são proporcionais às economias calculadas. Essa abordagem combina elementos de aleatoriedade e ganância, permitindo a construção de soluções iniciais viáveis sem a necessidade de parametrização manual.

Por outro lado, o *GRASP_2*, apresentado neste trabalho, adapta a estrutura básica do *GRASP_1* para atender às particularidades do problema de roteamento escolar. A principal diferença está na calibração do modelo, que ajusta as probabilidades de seleção dos pares na LCR. Esse ajuste visa aumentar a diversidade das soluções iniciais e melhorar sua qualidade. Apesar de não incorporar uma busca local, o *GRASP_2* introduz uma maior robustez ao processo de construção, tornando-o mais adequado às características específicas do problema abordado. Para calibrar o parâmetro α e garantir a robustez do algoritmo, foram realizados testes em que cada instância foi executada 10 vezes. Esse procedimento permitiu validar os resultados e identificar configurações adequadas para o equilíbrio entre a qualidade das soluções e o tempo computacional.

A avaliação do desempenho das heurísticas construtivas, foi realizada por meio de testes em 51 instâncias distintas. Cada instância foi resolvida 10 vezes, para garantir consistência nos resultados. A Tabela 4 apresenta as médias das soluções obtidas por cada heurística, bem como os respectivos tempos de execução.

Os resultados demonstram que ambas as heurísticas, *GRASP_1* e *GRASP_2*, conseguiram gerar soluções iniciais viáveis e de alta qualidade. No entanto, o *GRASP_2* destacou-se ao produzir soluções com custo médio inferior ao do *GRASP_1* em várias instâncias, evidenciando a eficácia da calibração proposta. Além disso, a análise do tempo de execução mostrou que a introdução do ajuste dinâmico no *GRASP_2* não comprometeu significativamente sua eficiência computacional.

Com base nesses resultados, o *GRASP_2* apresenta-se como uma abordagem mais robusta para a construção de soluções iniciais no problema de roteamento escolar, servindo como

base promissora para a aplicação de meta-heurística GRASP-ILS proposta neste estudo.

Na Tabela abaixo, C representa a capacidade dos veículos, GM refere-se ao valores obtidos pela heurística de Gillet e Miller.

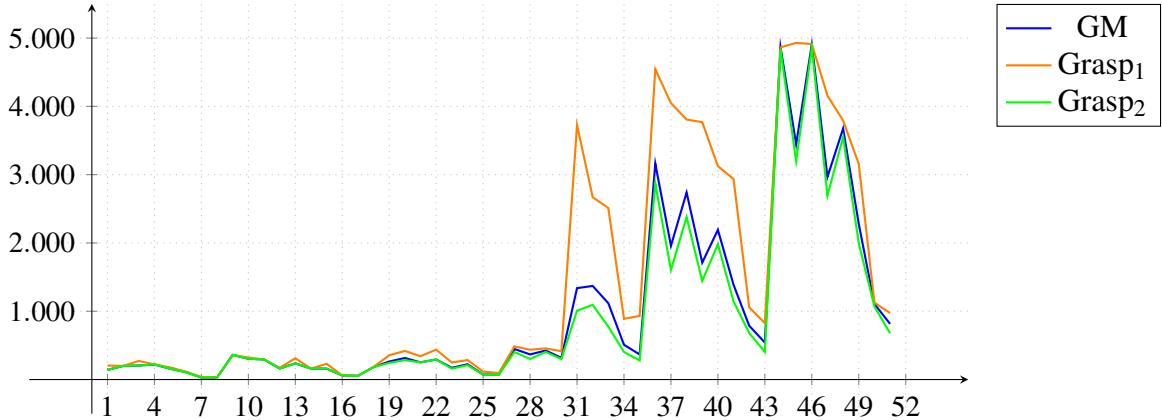
Tabela 4 – Valores obtidos pelos métodos abordados na fase de construção da solução inicial.

N	n	$Stud$	C	w	GM	$GRASP_1$	$GRASP_2$	$t_{GM}(\text{s})$	$t_{Grasp_1}(\text{s})$	$t_{Grasp_2}(\text{s})$
1	5	25	25	5	141,01	204,52	141,01	0,01	0,07	0,08
2	5	50	50	5	199,24	199,24	199,24	0,00	0,00	0,00
3	80	400	50	10	1338,52	3727,17	1008,24	0,01	0,08	0,02
4	80	400	25	20	1370,55	2670,49	1093,16	0,01	0,02	0,03
5	80	400	50	20	1117,54	2511,73	774,34	0,01	0,03	0,02
6	80	400	25	40	509,20	888,57	403,01	0,01	0,04	0,04
7	80	400	50	40	366,90	932,17	279,47	0,01	0,03	0,02
8	80	800	25	5	3162,27	4543,15	2869,70	0,01	0,14	0,10
9	80	800	50	5	1958,97	4048,11	1606,40	0,01	0,03	0,02
10	80	800	25	10	2738,59	3807,19	2379,09	0,01	0,12	0,08
11	80	800	50	10	1712,27	3768,67	1443,83	0,01	0,03	0,02
12	80	800	25	20	2191,96	3125,57	1981,66	0,01	0,12	0,09
13	5	50	25	10	204,97	271,63	204,97	0,00	0,00	0,00
14	80	800	50	20	1387,15	2935,64	1144,74	0,01	0,05	0,04
15	80	800	25	40	787,40	1056,83	680,81	0,01	0,10	0,10
16	80	800	50	40	541,75	826,82	404,86	0,01	0,03	0,03
17	80	1600	25	5	4869,10	4863,40	4834,64	0,01	0,41	0,61
18	80	1600	50	5	3445,23	4929,52	3198,55	0,01	0,12	0,08
19	80	1600	25	10	4906,77	4912,75	4859,42	0,01	1,26	0,57
20	80	1600	50	10	2967,59	4157,28	2694,61	0,01	0,09	0,08
21	80	1600	25	20	3674,82	3793,06	3550,37	0,01	0,84	0,42
22	80	1600	50	20	2279,25	3155,96	1996,06	0,01	0,10	0,07
23	80	1600	25	40	1106,65	1126,71	1069,13	0,01	1,68	0,49
24	5	50	50	10	219,82	222,79	222,79	0,00	0,00	0,00
25	80	1600	50	40	815,24	972,84	677,99	0,01	0,07	0,08
26	5	50	25	20	158,38	177,32	158,38	0,00	0,00	0,00
27	5	50	50	20	109,64	116,41	105,98	0,00	0,00	0,00
28	5	50	25	40	29,53	37,24	29,53	0,00	0,00	0,00
29	5	50	50	40	30,38	30,83	30,41	0,00	0,00	0,00
30	5	100	25	5	360,34	360,34	360,34	0,00	0,00	0,00
31	5	100	50	5	304,23	322,33	304,23	0,00	0,00	0,00
32	5	100	25	10	294,20	294,20	294,20	0,00	0,00	0,00
33	5	25	50	5	161,62	171,13	161,62	0,00	0,00	0,00
34	5	100	50	10	236,87	311,31	236,87	0,00	0,00	0,00
35	5	100	25	20	161,02	161,02	161,02	0,00	0,00	0,00
36	5	100	50	20	159,57	229,84	159,57	0,00	0,00	0,00
37	5	100	25	40	59,74	59,74	59,74	0,00	0,00	0,00
38	5	100	50	40	54,40	53,48	53,48	0,00	0,00	0,00
39	10	50	25	5	263,88	355,68	243,12	0,00	0,00	0,00
40	10	50	50	5	315,20	418,52	284,10	0,00	0,00	0,00
41	10	50	25	10	251,58	341,10	251,58	0,00	0,00	0,00
42	10	50	50	10	293,46	437,69	293,46	0,00	0,00	0,00
43	10	50	25	20	171,58	249,59	159,32	0,00	0,00	0,00
44	5	25	25	10	182,58	185,38	182,58	0,00	0,00	0,00
45	10	50	50	20	223,91	285,56	210,35	0,00	0,00	0,00
46	10	50	25	40	73,94	116,88	71,24	0,00	0,00	0,00
47	10	50	50	40	72,23	94,84	70,06	0,00	0,00	0,00
48	10	100	25	5	446,94	485,23	403,18	0,00	0,00	0,00
49	10	100	50	5	368,18	436,42	301,13	0,00	0,00	0,00
50	10	100	25	10	424,89	455,83	404,09	0,00	0,00	0,00
51	10	100	50	10	317,50	415,05	300,24	0,00	0,00	0,00

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 6, é ilustrado uma comparação os resultados das heurísticas analisadas neste estudo.

Figura 6 – Comparação entre os resultados das heurísticas construtivas avaliadas.



Fonte: elaborada pelo autor.

4.4.1 Análise dos Resultados

Os resultados indicaram que o GRASP_2 apresentou soluções iniciais de maior qualidade na maioria das instâncias, destacando-se como uma abordagem promissora para a meta-heurística proposta neste estudo. Além disso, a análise estatística demonstrou que o GRASP_2 apresentou menor variabilidade no Desvio Padrão Relativo (DPR), com a mediana muito próxima de 0%, indicando soluções consistentemente mais próximas do ótimo ou do melhor resultado conhecido. Essa análise foi realizada comparando três abordagens: o GRASP_2, o GRASP_1 e a heurística de Gillet e Miller, permitindo uma avaliação abrangente da qualidade das soluções geradas por cada método.

O DPR foi calculado conforme a seguinte equação:

$$DPR = \frac{S_{\text{método}} - S_{\text{melhor}}}{S_{\text{melhor}}} \times 100\% \quad (4.1)$$

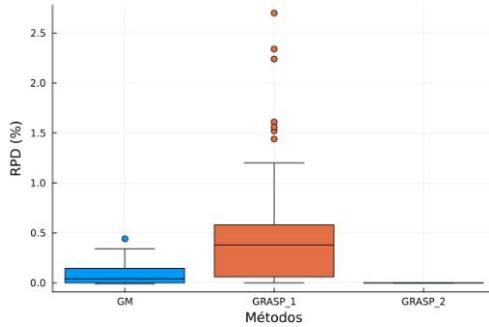
Onde $S_{\text{método}}$ representa a solução obtida pelo método avaliado e S_{melhor} corresponde à melhor solução encontrada para a instância.

Em contraste, o GRASP_1 apresentou maior variabilidade nos resultados, com uma mediana consideravelmente superior e a presença de diversos *outliers* acima de 150%, evidenciando instâncias nas quais o desempenho foi significativamente inferior, como apresentado na Figura 7.

Embora o tempo de execução do GRASP_2 tenha sido levemente superior ao do GRASP_1, a calibração introduzida no GRASP_2 permitiu uma exploração mais eficiente do espaço de soluções, reduzindo a ocorrência de desvios substanciais. A heurística de Gillet e Miller, apesar de apresentar tempos computacionais reduzidos, mostrou limitações na qualidade

das soluções iniciais, especialmente em instâncias mais complexas. Estes resultados reforçam a superioridade do GRASP_2 na geração de soluções iniciais de alta qualidade, com maior estabilidade em relação ao GRASP_1 e à referência estabelecida pela heurística de Gillet e Miller.

Figura 7 – Comparação dos DPR's entre as heurísticas.



Fonte: elaborada pelo autor.

4.5 Resultados das meta-heurísticas para a minimização da distância percorrida pelos ônibus

4.5.1 Resultados do GRASP-ILS nos diferentes limites de tempo.

Nesta seção, são apresentadas as médias dos resultados obtidos pelo algoritmo GRASP-ILS sob diferentes limites de tempo computacional, especificamente 180, 300 e 600 segundos, conforme detalhado na Tabela 5. Cada instância foi testada 10 vezes para assegurar a consistência dos resultados.

A análise foca na avaliação da eficiência e da qualidade das soluções geradas pelo GRASP-ILS em diferentes tempos de execução, conforme mencionado anteriormente. Semelhante aos testes realizados na fase de construção, cada instância foi executada 10 vezes nos tempos estipulados, e os valores médios obtidos foram considerados para a análise. Os resultados demonstram a capacidade do GRASP-ILS, para um limite de tempo de 180 segundos, de identificar soluções de alta qualidade em diversos cenários, evidenciando sua robustez e adaptabilidade em problemas caracterizados por restrições complexas e configurações variáveis.

Na Tabela abaixo, N representa o número da instância, n o número de paradas, $Stud$ o número de estudantes, C a capacidade dos veículos e w a distância máxima que um aluno pode percorrer até sua parada.

Tabela 5 – Valores obtidos pelo GRASP-ILS em diferentes limites de tempo.

<i>N</i>	<i>n</i>	<i>Stud</i>	<i>C</i>	<i>w</i>	180(s)	300(s)	600(s)
1	5	25	25	5	141,01	141,01	141,01
2	5	50	50	5	199,07	199,07	199,07
3	80	400	50	10	652,15	613,66	609,66
4	80	400	25	20	513,27	459,17	540,92
5	80	400	50	20	472,39	470,96	470,94
6	80	400	25	40	157,52	161,21	161,21
7	80	400	50	40	171,26	172,07	164,01
8	80	800	25	5	761,45	799,64	737,86
9	80	800	50	5	664,64	719,45	728,86
10	80	800	25	10	651,22	650,33	694,09
11	80	800	50	10	638,71	644,24	641,29
12	80	800	25	20	546,63	554,38	508,32
13	5	50	25	10	180,91	186,25	180,91
14	80	800	50	20	462,49	506,51	482,04
15	80	800	25	40	170,32	164,84	163,88
16	80	800	50	40	170,01	190,66	159,92
24	5	50	50	10	219,82	219,82	219,82
26	5	50	25	20	127,2	131,97	127,2
27	5	50	50	20	100,34	100,34	100,34
28	5	50	25	40	23,17	23,17	23,17
29	5	50	50	40	30,3	30,3	30,3
30	5	100	25	5	226,59	226,59	226,59
31	5	100	50	5	237,42	237,42	237,42
32	5	100	25	10	124,45	124,45	124,45
33	5	25	50	5	161,62	161,62	161,62
34	5	100	50	10	201,39	201,39	201,39
35	5	100	25	20	84,03	84,03	84,03
36	5	100	50	20	123,17	123,17	123,17
37	5	100	25	40	35,06	35,06	35,06
38	5	100	50	40	36,71	36,71	36,71
39	10	50	25	5	230,49	230,49	222,76
40	10	50	50	5	282,45	282,45	282,45
41	10	50	25	10	226,9	226,9	226,9
42	10	50	50	10	293,33	293,33	293,33
43	10	50	25	20	136,45	143,6	136,45
44	5	25	25	10	182,58	182,58	182,58
45	10	50	50	20	188,7	188,7	188,7
46	10	50	25	40	57,17	63,89	57,17
47	10	50	50	40	70,02	70,02	70,02
48	10	100	25	5	252,82	254,78	268,88
49	10	100	50	5	237,86	237,86	237,86
50	10	100	25	10	286,64	260,19	257,79
51	10	100	50	10	251,24	251,24	251,24

Fonte: elaborada pelo autor.

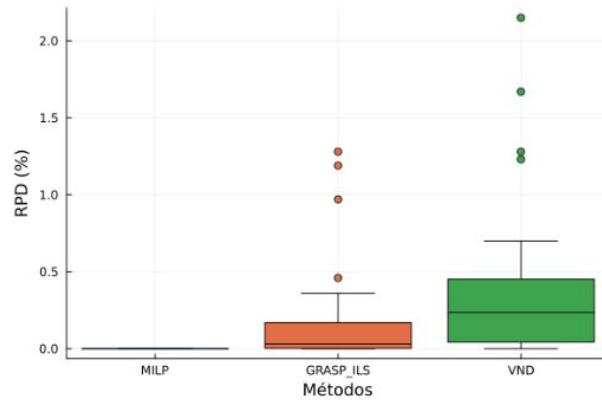
4.5.2 Comparação entre os valores obtidos pelo GRASP-ILS e VND

Nesta seção, reportamos os resultados obtidos por duas meta-heurísticas: o GRASP-ILS, a qual é a meta-heurística desenvolvida nesta dissertação, e o VND, implementado conforme descrito no trabalho de Schittekat *et al.* (2013). O GRASP-ILS foi testado 10 vezes para cada instância, com um limite de tempo de 900 segundos para instâncias com mais de 100 paradas e 180 segundos para instâncias menores, considerando a eficiência da meta-heurística na obtenção de soluções viáveis em menor tempo.

Os resultados mostram que o GRASP-ILS gerou soluções consistentes e de alta qualidade em todas as instâncias, demonstrando ser robusto e eficaz no contexto do problema de roteamento escolar. A análise estatística dos resultados revelou que, em termos de DPR,

o GRASP-ILS apresentou menor variabilidade e maior proximidade em relação à solução de referência gerada pelo MILP, cujo objetivo foi minimizar as distâncias percorridas pelos veículos. Por outro lado, embora competitivo, o VND apresentou maior dispersão nos valores de DPR. Esses resultados estão apresentados detalhadamente na Figura 8, que ilustra as diferenças estatísticas entre as meta-heurísticas analisadas.

Figura 8 – Comparação dos DPR's entre as meta-heurísticas



Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar do tempo computacional considerável para algumas instâncias, o desempenho geral do GRASP-ILS reflete a adequação da meta-heurística para problemas de grande escala. O VND forneceu soluções competitivas, mas, em geral, não superou o GRASP-ILS em qualidade de solução, especialmente em instâncias maiores.

Para fins de comparação, o tempo de execução utilizado para cada instância no GRASP-ILS foi o mesmo que o VND levou para encontrar sua solução, garantindo uma comparação justa entre as abordagens e permitindo avaliar o desempenho de ambos os métodos sob as mesmas condições.

Os resultados são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores obtidos pelo GRASP-ILS em comparação com o VND.

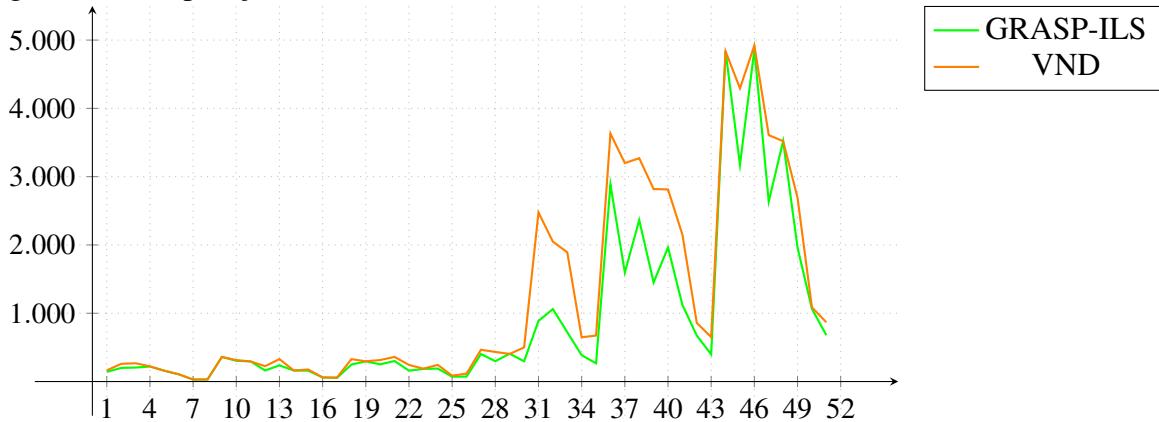
<i>N</i>	<i>n</i>	<i>Stud</i>	<i>C</i>	<i>w</i>	<i>GRASP – ILS</i>	<i>VND</i>	<i>t_(s)</i>
1	5	25	25	5	141,01	141,01	2,75
2	5	50	50	5	199,07	199,07	0,13
3	5	50	25	10	204,97	207,92	0,30
4	5	50	50	10	219,82	222,79	0,14
5	5	50	25	20	158,39	158,39	0,19
6	5	50	50	20	105,99	105,99	0,04
7	5	50	25	40	29,42	29,42	0,02
8	5	50	50	40	30,30	30,32	0,11
9	5	100	25	5	360,35	360,35	0,10
10	5	100	50	5	304,23	313,90	0,12
11	5	100	25	10	294,21	294,21	0,08
12	5	25	50	5	161,62	225,04	0,09
13	5	100	50	10	236,87	328,61	0,05
14	5	100	25	20	161,01	161,01	0,02
15	5	100	50	20	159,58	176,14	0,47
16	5	100	25	40	59,73	59,73	0,35
17	5	100	50	40	53,49	59,04	0,29
18	10	50	25	5	248,79	328,09	0,34
19	10	50	50	5	295,72	296,01	0,07
20	10	50	25	10	251,58	314,73	0,24
21	10	50	50	10	300,84	360,62	0,14
22	10	50	25	20	159,30	243,12	0,19
23	5	25	25	10	184,91	188,53	0,3
24	10	50	50	20	189,73	243,82	0,06
25	10	50	25	40	70,81	85,99	0,17
26	10	50	50	40	72,26	115,51	0,67
27	10	100	25	5	403,18	465,19	0,54
28	10	100	50	5	297,58	433,51	0,39
29	10	100	25	10	407,41	404,10	0,43
30	10	100	50	10	296,50	499,91	0,58
31	80	400	50	10	887,56	2475,31	720,85
32	80	400	25	20	1061,02	2048,40	1274,70
33	80	400	50	20	722,49	1893,12	895,13
34	80	400	25	40	386,01	648,01	4203,23
35	80	400	50	40	267,03	673,49	4089,73
36	80	800	25	5	2883,17	3631,19	3602,44
37	80	800	50	5	1597,40	3198,57	3600,60
38	80	800	25	10	2364,57	3270,46	3601,44
39	80	800	50	10	1451,09	2818,79	3600,53
40	80	800	25	20	1962,62	2812,94	3601,23
41	80	800	50	20	1122,78	2151,79	3600,72
42	80	800	25	40	673,10	858,91	4039,26
43	80	800	50	40	397,44	651,24	4595,44
44	80	1600	25	5	4834,62	4834,62	4762,75
45	80	1600	50	5	3172,83	4293,70	762,25
46	80	1600	25	10	4859,39	4919,31	4892,81
47	80	1600	50	10	2635,80	3608,19	872,50
48	80	1600	25	20	3521,37	3520,17	4822,44
49	80	1600	50	20	1961,40	2693,02	761,07
50	80	1600	25	40	1065,28	1086,10	4792,23
51	80	1600	50	40	678,62	868,58	707,31

Fonte: elaborada pelo autor.

O gráfico abaixo, Figura 9, apresenta de forma clara e objetiva os resultados comparativos entre as meta-heurísticas analisadas neste estudo.

Visando validar o desempenho do algoritmo GRASP-ILS em comparação com o VND, foi conduzida uma análise estatística utilizando o teste de *Wilcoxon Signed-Rank*. Este teste é amplamente empregado para comparar dois métodos em condições pareadas, como no presente estudo, onde ambas as técnicas foram avaliadas sobre o mesmo conjunto de instâncias do problema em questão.

Figura 9 – Comparação entre os resultados das meta-heurísticas analisadas.



Fonte: elaborada pelo autor.

A decisão de utilizar o Teste de *Wilcoxon Signed-Rank* foi baseada nos resultados das análises de normalidade realizadas anteriormente. O teste estatístico aplicado, *Shapiro-Wilk*, indicou que os dados dos métodos GRASP-ILS e VND não seguem uma distribuição normal, violando um pressuposto essencial para a aplicação de testes paramétricos, como o ANOVA.

Dessa forma, optou-se pelo uso do Teste de *Wilcoxon Signed-Rank*, que não requer a suposição de normalidade e avalia se a distribuição das diferenças pareadas entre os métodos apresenta um desvio sistemático em relação a zero. Essa abordagem garante uma análise estatística mais robusta e apropriada à natureza dos dados avaliados.

Além disso, a mediana foi utilizada como métrica de comparação devido a algumas características dos dados e da análise realizada:

- Robustez contra outliers: Como os dados apresentavam distribuições assimétricas e possíveis valores extremos, a mediana foi preferida à média, pois é menos sensível a *outliers*.
- Tendência central em distribuições não normais: Em distribuições não normais, a mediana é um melhor indicador da centralidade dos dados, refletindo de forma mais confiável o desempenho típico de cada método.
- Interpretação do DPR: Como a análise comparava a qualidade das soluções em termos de DPR, a mediana dos DPR's foi usada para avaliar qual método produzia soluções mais próximas do ótimo ou do melhor valor conhecido.

Portanto, a escolha da mediana como parâmetro de comparação foi justificada pelas características dos dados e pela necessidade de uma métrica mais robusta para avaliar o desempenho dos métodos analisados. O objetivo principal da análise foi verificar se o GRASP-ILS apresenta desempenho estatisticamente superior ao VND. A formulação das hipóteses foi realizada da seguinte maneira:

- Hipótese nula (H_0): As medianas dos resultados do GRASP-ILS e do VND são estatisticamente equivalentes.
- Hipótese alternativa (H_1): A mediana dos resultados do GRASP-ILS é significativamente menor que a do VND, indicando desempenho superior.
- Estatística do teste: 8.0
- p -valor: 9.84×10^{-9}

Com base no p -valor extremamente pequeno, rejeitou-se a hipótese nula (H_0) em favor da hipótese alternativa (H_1). Assim, é possível afirmar, com elevado grau de confiança estatística, que o GRASP-ILS supera significativamente o VND em termos de desempenho.

Os resultados obtidos permitem concluir que:

1. O GRASP-ILS apresenta desempenho estatisticamente superior ao VND em termos de custo para as instâncias avaliadas, conforme demonstrado pela diferença significativa nas medianas.
2. O p -valor extremamente baixo ($p < 0.05$) indica que a superioridade do GRASP-ILS não é atribuível ao acaso, reforçando a confiabilidade dos resultados obtidos.
3. A aplicação do teste de *Wilcoxon Signed-Rank*, uma técnica robusta para comparações pareadas, assegura que as conclusões possuem validade estatística e científica.

4.6 Análise de sensibilidade

Uma análise detalhada foi realizada para observar quais parâmetros têm maior influência nos resultados, em comparação com o MILP e o GRASP-ILS apresentados neste trabalho. Os parâmetros considerados foram: número de paradas, número de estudantes, capacidade de cada veículo e distância máxima percorrida.

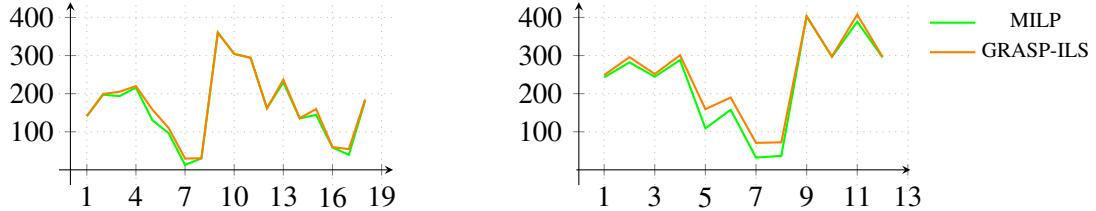
4.6.1 Número de paradas

Conforme ilustrado na Figura 10, observa-se que, à medida que o número de paradas no problema aumenta, tanto o MILP quanto a meta-heurística híbrida proposta mantêm um comportamento estável em termos de esforço computacional.

Além disso, a meta-heurística conseguiu obter soluções de qualidade equivalente às do MILP, demonstrando sua eficiência na resolução do problema sem demandar alto custo computacional. Assim, os resultados indicam que ambos os métodos apresentam um desempenho

consistente, garantindo soluções de boa qualidade nas instâncias analisadas, dentre as quais o MILP obteve soluções dentro do limite de tempo estabelecido.

Figura 10 – Instâncias com 5 e 10 paradas.



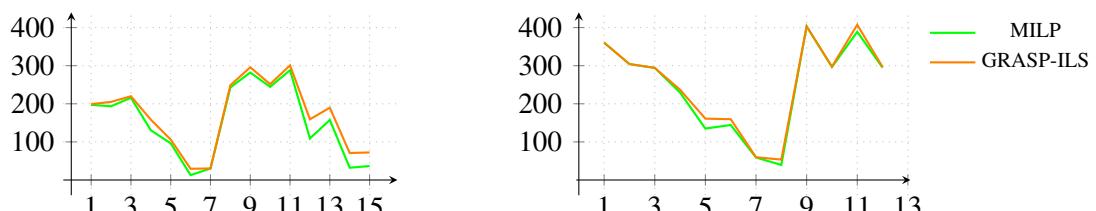
Fonte: elaborada pelo autor.

4.6.2 Número de estudantes

Na Figura 11, é possível observar uma maior variabilidade nos resultados entre o MILP e a meta-heurística. Essa divergência sugere que a eficácia de cada método pode depender das características específicas de cada instância, como a complexidade do roteamento. Isso ressalta a sensibilidade dos métodos às particularidades das instâncias e destaca a necessidade de uma avaliação abrangente e comparativa para determinar a melhor abordagem para o problema em questão, considerando métricas como tempo de execução, qualidade da solução e robustez do método.

É válido ressaltar que, mesmo com as divergências observadas nas instâncias com 50 estudantes, essa disparidade diminui nas instâncias com 100 estudantes, tornando os resultados mais homogêneos. Esse comportamento reforça a eficácia da abordagem proposta nesta dissertação, demonstrando sua capacidade de gerar soluções consistentes à medida que a escala do problema aumenta.

Figura 11 – Instâncias com 50 e 100 estudantes.

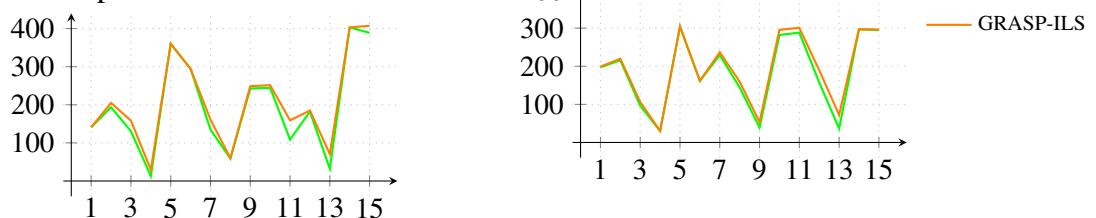


Fonte: elaborada pelo autor.

4.6.3 Capacidade dos veículos

Os resultados gerais obtidos em instâncias com as mesmas capacidades, como observado na Figura ??, revelam uma proximidade entre as soluções do MILP e da meta-heurística GRASP-ILS, indicando a eficácia de ambos os métodos na resolução do problema em questão. Consequentemente, pode-se inferir que tanto o MILP quanto a meta-heurística representam opções viáveis para a abordagem do problema em estudo nas instâncias testadas neste trabalho de pesquisa, sendo a seleção entre eles influenciada por diversos fatores, incluindo a disponibilidade de recursos computacionais.

Figura 12 – Capacidades 25 e 50 estudantes.

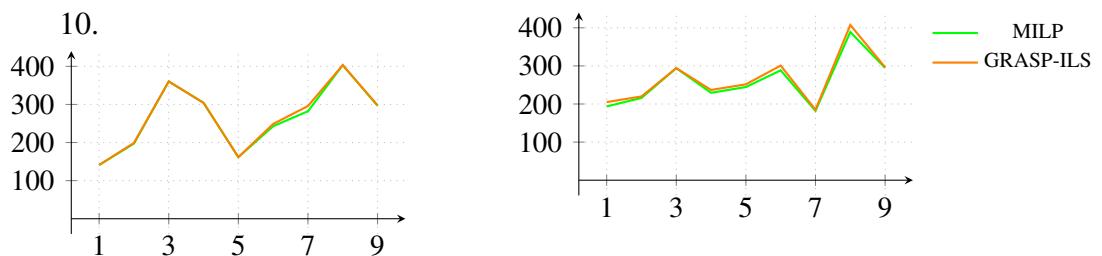


Fonte: elaborada pelo autor.

4.6.4 Distância máxima caminhada por cada estudante

Considerando que a alocação dos alunos é realizada de forma otimizada por meio da resolução de um subproblema, conforme mencionado anteriormente, a análise comparativa ilustrada na Figura ?? revela uma homogeneidade nos resultados entre o modelo para minimizar a distância percorrida pelos veículos e a meta-heurística aplicada. Esse comportamento reforça, mais uma vez, a eficácia do método proposto nesta pesquisa, bem como sua regularidade na obtenção das soluções.

Figura 13 – Distância máxima caminhada 5 e



Fonte: elaborada pelo autor.

Nas vinte e uma instâncias subsequentes, observou-se um aumento significativo no número de alunos a serem coletados, no número de paradas e na distância percorrida por

cada aluno até sua respectiva parada. Nessas condições, o modelo de otimização implementado encontrou grande dificuldade em obter uma solução viável dentro do limite de tempo estabelecido de 3600 segundos.

É relevante destacar que, em uma das instâncias onde uma solução foi encontrada dentro do tempo estipulado, o *gap* calculado foi de 93%, evidenciando uma considerável discrepância em relação ao valor ótimo. Especificamente, essa instância envolvia 80 paradas, 400 estudantes e ônibus com capacidade para 25 passageiros, considerando uma distância máxima de caminhada de 20 km para cada aluno até sua respectiva parada.

5 ESTUDO DE CASO

5.1 Aplicação Prática do Problema em Estudo

Este estudo de caso aborda o problema de roteamento do transporte escolar, um problema de otimização combinatória de grande importância para garantir o acesso à educação básica, especialmente em áreas periféricas e regiões metropolitanas. A pesquisa foi realizada em uma escola de educação básica localizada no bairro Ancuri, na periferia de Fortaleza, Ceará. A escola atende alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental II, com idades entre 11 e 15 anos. Situada próxima à divisa com a região metropolitana de Fortaleza, a escola enfrenta desafios adicionais relacionados à distância das residências de alguns alunos em relação à escola, tornando o transporte escolar indispensável para assegurar sua frequência às aulas. Para preservar a privacidade dos envolvidos, a escola e os alunos não são identificados neste estudo.

Conforme o Censo Escolar de Fortaleza (Fortaleza, 2024), o transporte escolar atende atualmente 118 alunos no período matutino e 85 no período vespertino. O número reduzido de estudantes beneficiados está diretamente relacionado à diretriz da Prefeitura Municipal de Fortaleza, que determina que os alunos sejam matriculados em escolas próximas às suas residências. Segundo essa orientação, apenas estudantes que residem a uma distância superior a 1 km da escola terão prioridade ao transporte escolar, critério mais rigoroso que a orientação geral fundamentada no parágrafo único do Artigo 208 da Constituição Federal e em decisões judiciais.

De acordo com essas disposições constitucionais, o transporte escolar é obrigatório para alunos que residem a mais de 2 km da escola ou do ponto de embarque/desembarque, tanto em áreas urbanas quanto rurais. Até esse limite, a responsabilidade de conduzir os alunos é dos pais ou responsáveis. Essa diferença entre os critérios locais e constitucionais reflete uma adaptação à realidade municipal, buscando priorizar o acesso próximo às escolas.

A frota de ônibus escolares da cidade de Fortaleza é homogênea, com cada veículo tendo capacidade máxima de 42 passageiros. As paradas de ônibus são estrategicamente localizadas para garantir segurança e acessibilidade, respeitando um limite máximo de caminhada de 3 km até o ponto de embarque. Essa distribuição segue o disposto no Artigo 71 da Lei Ordinária n.º 9.217, de 26 de abril de 2007, que estabelece:

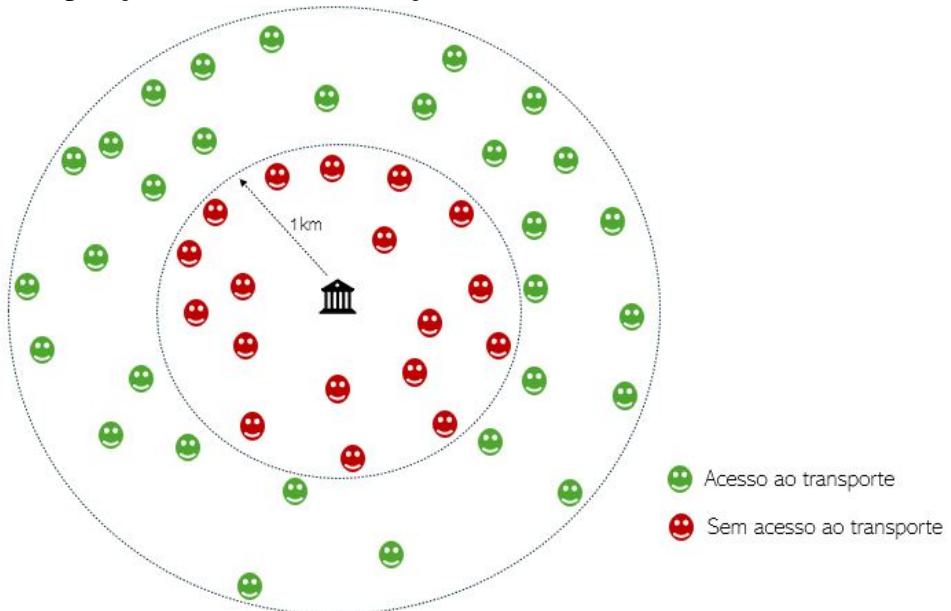
Art. 71. Os pontos de parada do transporte escolar, quando não estiverem em área interna dos estabelecimentos de ensino, deverão estar localizados próximos ao portão de entrada dos escolares, devidamente

sinalizados, em acordo com as normas do Código de Trânsito Brasileiro e legislação pertinente.

Parágrafo único. A Prefeitura Municipal de Fortaleza, por meio de seus órgãos gestores de transporte e trânsito, mediante regulamentação da presente Lei, estabelecerá as condições de criação, alteração, transferência e utilização dos pontos de parada do transporte escolar, em função da segurança dos usuários e conveniência técnico-operacional.

Embora o limite máximo de caminhada de 3 km não esteja explicitamente definido em legislações específicas, ele foi adotado com base em critérios técnicos e no bem-estar estudantil, visando evitar trajetos excessivamente longos. Na Figura 14, é ilustrada uma distribuição dos pontos de parada e a acessibilidade garantida aos alunos.

Figura 14 – Disposição dos alunos em relação à escola



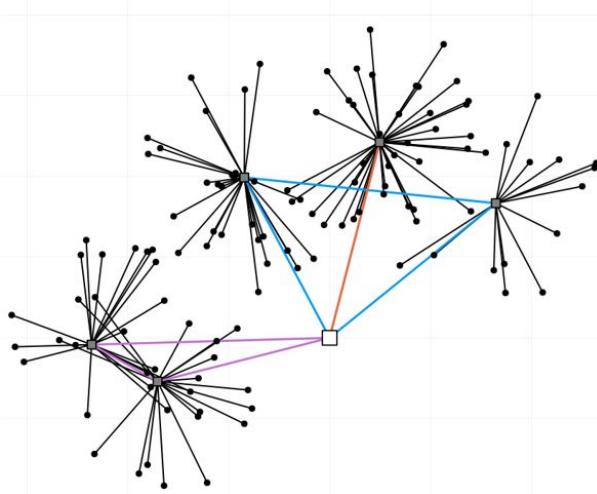
Fonte: elaborada pelo autor.

Após a obtenção legal dos endereços dos alunos, fornecidos pela secretaria da escola, as coordenadas geográficas foram adquiridas por meio de um processo integrado e automatizado. Utilizou-se uma rotina em *Python* integrada à API *Positionstack*, responsável por converter os endereços em coordenadas geográficas. Em seguida, essas coordenadas foram transformadas em um sistema bidimensional utilizando uma rotina desenvolvida na linguagem *Julia*. A integração entre essas ferramentas computacionais garantiu precisão e eficiência na modelagem e resolução do problema, otimizando o fluxo de trabalho e assegurando a qualidade dos resultados obtidos. Além disso, a reproduibilidade da meta-heurística híbrida proposta pode ser realizada de forma simples e com poucas instruções, facilitando sua aplicação em diferentes cenários e contribuindo

para a melhoria do transporte escolar ao permitir ajustes e refinamentos conforme as necessidades específicas de cada localidade.

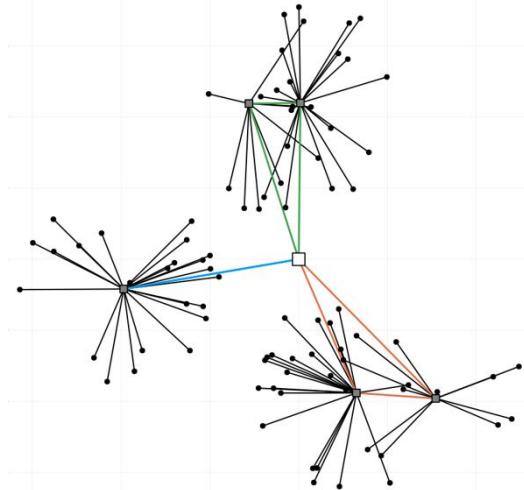
No caso das soluções obtidas para o período da manhã usando o MILP para minimizar a distância percorrida pelos ônibus, o valor da solução foi de 38,24 km, com um *gap* de 0,0, resolvido em apenas 1,21 segundos. Para o período da tarde, o valor encontrado foi 32,29 km, também com *gap* de 0,0, e o problema foi solucionado em 0,43 segundos. É válido ressaltar que em ambos os casos, as paradas de ônibus foram distribuídas conforme a necessidade e demanda dos alunos, assegurando que os alunos fossem atendidos no limite de caminhada de 3 km. O mesmo número de paradas foi utilizado em ambos os turnos, otimizando o uso da frota de ônibus escolares. Nas Figuras 15 e 16 são ilustradas as rotas planejadas para os períodos da manhã e da tarde, respectivamente.

Figura 15 – Rotas do período da manhã.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 16 – Rotas do período da tarde.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 7, são apresentados os valores obtidos pelo modelo para minimização da distância percorrida pelos ônibus nos dois turnos analisados.

Tabela 7 – Resultados obtidos para os turnos manhã e tarde

Turno	<i>n</i>	Stud	<i>C</i>	<i>w</i>	MILP	<i>t_(s)</i>	<i>gap</i>
M	5	118	42	3	38,24	1,21	0,0
T	5	85	42	3	32,29	0,43	0,0

Fonte: elaborada pelo autor.

Embora o número de alunos que utilizam o transporte escolar seja relativamente

pequeno, o problema foi resolvido de forma rápida e eficaz utilizando o modelo MILP. As características do problema real possibilitaram a obtenção de soluções ótimas em tempos computacionais reduzidos. Contudo, para que o tema desta dissertação fosse explorado em maior profundidade, foi elaborado um cenário hipotético no qual todos os 857 alunos matriculados na escola utilizassem o transporte. Nesse cenário, 475 alunos seriam transportados no período da manhã e 382 no período da tarde.

A simulação desse cenário hipotético manteve as mesmas condições e restrições do cenário real. No entanto, devido ao aumento do número de alunos, foi necessário incrementar o número de paradas de ônibus. Além disso, constatou-se que alguns alunos residiam próximos à escola, mas fora do raio de alcance de uma parada de ônibus. Dessa forma, foi necessário ajustar o limite máximo de caminhada para 5 km, garantindo que todos tivessem acesso ao transporte.

Para a instância hipotética, o MILP não conseguiu encontrar uma solução inteira viável no limite de 3600 segundos, reforçando a relevância da meta-heurística GRASP-ILS desenvolvida nesta dissertação. Na Tabela 8, são apresentados os resultados obtidos pela abordagem proposta nos turnos da manhã e da tarde. Esses resultados evidenciam consistência, destacando a eficácia e a robustez do método na resolução do problema.

Além disso, os valores do DPR também estão incluídos na tabela, permitindo uma análise quantitativa da qualidade das soluções geradas.

É importante ressaltar que o tempo computacional utilizado pelo VND corresponde ao tempo que o próprio método leva para encontrar uma solução, seguindo todas as suas etapas. Esse mesmo tempo foi adotado para a execução do GRASP-ILS, garantindo uma comparação justa entre as abordagens.

Tabela 8 – Resultados obtidos pelo GRASP-ILS no cenário hipotético para diferentes limites de tempo.

Turno	<i>n</i>	<i>Stud</i>	<i>C</i>	<i>w</i>	<i>GRASP – ILS</i>	<i>VND</i>	<i>DPR(%)</i>	<i>t_(s)</i>
Manhã	20	475	42	5	160,05	168,89	4	22,97
Tarde	20	382	42	5	143,06	178,28	19	17,97

Fonte: elaborada pelo autor.

A simulação desse cenário hipotético é de grande valor, ao possibilitar investigar soluções para problemas mais complexos e em maior escala, destacando a importância de estudos como este para a melhoria do bem-estar dos estudantes. Além disso, os resultados obtidos podem servir como referência para outros municípios, especialmente aqueles situados

em regiões afastadas das capitais, onde o acesso ao transporte escolar é ainda mais essencial. Para escolas localizadas em áreas interioranas, este estudo apresenta ainda maior aplicabilidade, considerando que, nessas regiões, as escolas frequentemente estão mais afastadas das residências dos alunos. Esse fator torna o planejamento de transporte escolar um elemento indispensável para garantir o acesso à educação e otimizar os recursos disponíveis.

Considerando o modelo para a minimização da distância máxima de caminhada pelos alunos, esta função objetivo também foi considerada no estudo de caso. Na Tabela 9, são apresentados os resultados obtidos pelo modelo nas instâncias do estudo de caso. Com base nos resultados obtidos, é possível observar que o modelo para minimização da distância máxima de caminhada é apto para retornar a solução ótima em tempo computacional admissível para ambos os cenários estabelecidos.

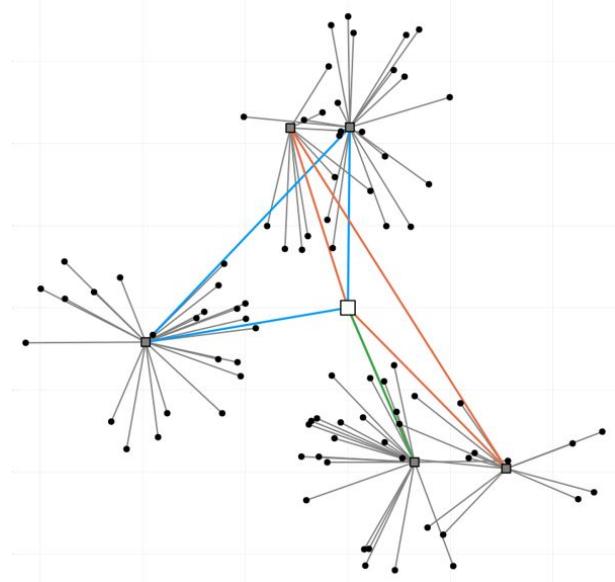
Tabela 9 – Resultados do modelo para a minimização da distância caminhada.

<i>Turno</i>	<i>n</i>	<i>Stud</i>	<i>C</i>	<i>w</i>	<i>MILP</i>	<i>t_s</i>	<i>gap</i>
Manhã	6	118	42	3	28,04	3,12	0.0
Tarde	6	85	42	3	29,40	2,68	0.0

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 17, são apresentadas as rotas realizadas pelos veículos após a aplicação do MILP, baseado no problema de *p*-centros, para os alunos do período da tarde. Destaca-se que essas rotas não estão otimizadas em termos de percurso realizado pelos ônibus, uma vez que o principal objetivo do modelo é garantir o bem-estar dos alunos, mesmo que isso resulte em uma rota menos eficiente do ponto de vista da distância percorrida pelos veículos.

Figura 17 – Aplicação do modelo p -centros aplicado aos alunos no período da tarde.



Fonte: elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÕES

6.1 Verificação dos objetivos previamente estabelecidos

Esta dissertação teve como objetivo apresentar o desenvolvimento da meta-heurística híbrida GRASP-ILS para o Problema de Roteamento de Veículos no Transporte Escolar. Os objetivos propostos foram amplamente atingidos, demonstrando a eficiência, escalabilidade e qualidade das soluções obtidas pelo algoritmo proposto. Ao longo do estudo, o método foi validado por meio de um estudo comparativo com o VND, proposto por Schittekat *et al.* (2013). Os resultados evidenciaram que a meta-heurística híbrida proposta não apenas superou o VND em termos de custo total das soluções, mas também demonstrou maior robustez em diferentes instâncias e configurações. Tal desempenho superior foi atribuído à estrutura iterativa do GRASP-ILS, que combina perturbações intra e inter-rotas com busca local, utilizando operadores como *swap* e *2-opt*, garantindo uma exploração ampla do espaço de busca e mitigando a estagnação em mínimos locais.

O estudo de caso, aplicado ao sistema de transporte escolar da SME de Fortaleza, reforçou a capacidade prática do modelo em lidar com condições reais. Este trabalho enfrentou desafios importantes, como a adaptação de dados reais às restrições do modelo e a complexidade de otimizar rotas para conjuntos maiores de paradas.

Adicionalmente, a inclusão do estudo sobre a minimização da distância máxima caminhada pelos alunos destacou o foco deste trabalho no bem-estar dos estudantes, configurando um diferencial importante. Embora essa questão não tenha sido diretamente integrada ao modelo principal, ela abre perspectivas promissoras para estudos futuros.

6.2 Benefícios das abordagens propostas

O uso do GRASP-ILS trouxe contribuições importantes para o campo do SBRP. A abordagem proposta mostrou-se capaz de gerar soluções de alta qualidade em tempos computacionais reduzidos, mesmo para instâncias de grande escala. No estudo de caso em Fortaleza, a eficiência do método foi comprovada ao lidar com os desafios específicos do transporte escolar, demonstrando que a metodologia é aplicável em cenários reais. A capacidade do método proposto de refinar soluções iniciais e explorar o espaço de busca de forma estruturada resultou em melhorias substanciais na qualidade das rotas e na experiência dos estudantes, assegurando o

cumprimento das restrições de capacidade e distância máxima de caminhada.

O trabalho também ressaltou o potencial de aplicação em outras realidades, contribuindo para a formulação de políticas públicas voltadas à otimização do transporte escolar. É fundamental destacar que a adoção do modelo pela SME demandaria treinamento das equipes e integração com sistemas de monitoramento de frota. No entanto, o modelo apresenta uma interface simples e um algoritmo de fácil compreensão, facilitando sua utilização. Além disso, sua implementação promete gerar uma economia significativa no médio prazo.

6.3 Limitações do estudo

Apesar dos avanços, o estudo apresentou algumas limitações que devem ser consideradas. A dependência de dados precisos e completos, como a localização das paradas e a demanda de transporte dos alunos, é um fator crítico que pode influenciar os resultados. Adicionalmente, o modelo assumiu uma frota homogênea e condições estáticas, restringindo sua aplicabilidade em contextos mais dinâmicos e variados. Outra limitação identificada foi a necessidade de ajustes manuais nos parâmetros do GRASP-ILS, como a intensidade das perturbações e o tempo limite de execução, o que pode comprometer a replicabilidade do modelo em cenários práticos mais amplos.

Além disso, sugere-se para estudos futuros uma análise comparativa entre o modelo proposto para a minimização da distância percorrida pelos veículos e a formulação de Schittekat *et al.* (2013), que adota um número exponencial de sub-circuitos, conforme a abordagem originalmente proposta por Dantzig *et al.* (1954). Essa comparação pode proporcionar uma compreensão mais aprofundada do desempenho de ambas as formulações, contribuindo para o aprimoramento dos métodos aplicados a esse tipo de problema.

6.4 Sugestões para estudos futuros

A pesquisa desenvolvida abre caminhos para diversas direções de estudo futuro. Uma oportunidade promissora seria a proposição de um modelo bi-objetivo que considerasse concomitantemente a distância percorrida pelos ônibus e a distância máxima de caminhada pelos alunos. Outra possibilidade seria a extensão do modelo para considerar frotas heterogêneas, incluindo veículos com diferentes capacidades e custos. A inclusão de dados dinâmicos, como condições de tráfego em tempo real e variações sazonais, também poderia aumentar a aplicabilidade.

dade prática e a precisão das soluções geradas. Adicionalmente, o desenvolvimento de métodos de otimização multiobjetivo, que considerem custos, tempos de percurso e impacto ambiental, poderia gerar soluções mais equilibradas e robustas.

Nesse contexto, a combinação dos modelos surge como uma direção promissora para pesquisas futuras, permitindo integrar a eficiência das rotas à redução das distâncias percorridas pelos usuários. No entanto, um estudo mais aprofundado é necessário para alcançar um equilíbrio adequado entre esses objetivos, por meio da atribuição de pesos ou outros mecanismos que possibilitem priorizar de forma balanceada cada critério na função objetivo.

As validações em diferentes contextos geográficos e institucionais, além de colaborações com outras Secretarias de Educação, podem ampliar o impacto deste trabalho, consolidando as abordagens propostas como metodologias robustas para a gestão do transporte escolar. Além disso, a implementação de abordagens que dispensem ajustes manuais de parâmetros, como meta-heurísticas autodidáticas ou adaptativas, poderia facilitar o uso do modelo em contextos diversos.

REFERÊNCIAS

- APPLEGATE, D. L. **The traveling salesman problem:** a computational study. [S.l.]: Princeton University Press, 2006. v. 17.
- BENNETT, B. T.; GAZIS, D. C. School bus routing by computer. **Transportation Research** United Kingdom, v. 6, n. 4, 1972.
- BOWERMAN, R.; HALL, B.; CALAMAI, P. A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: formulation and solution method. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, United States, v. 29, n. 2, p. 107–123, 1995.
- BRACA, J.; BRAMEL, J.; POSNER, B.; SIMCHI-LEVI, D. A computerized approach to the new york city school bus routing problem. **IIE Transactions**, v. 29, p. 693–702, 1997.
- CACERES, H.; BATTA, R.; HE, Q. School bus routing with stochastic demand and duration constraints. **Transportation science**, United States, v. 51, n. 4, p. 1349–1364, 2017.
- CHAPLEAU, L.; FERLAND, J.-A.; ROUSSEAU, J.-M. Clustering for routing in densely populated areas. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 20, n. 1, p. 48–57, 1985.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations research**, United States, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964.
- CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G.; SAVELSBERGH, M. W.; VIGO, D. Vehicle routing. **Handbooks in operations research and management science**, Amsterdam, v. 14, p. 367–428, 2007.
- DANTZIG, G.; FULKERSON, R.; JOHNSON, S. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. **Journal of the operations research society of America**, United States, v. 2, n. 4, p. 393–410, 1954.
- DREXL, A. Scheduling of project networks by job assignment. **Management Science**, United States, v. 37, n. 12, p. 1590–1602, 1991.
- DULAC, G.; FERLAND, J. A.; FORGUES, P. A. School bus routes generator in urban surroundings. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 7, n. 3, p. 199–213, 1980.
- FEO, T. A.; RESENDE, M. G. A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem. **Operations research letters**, Amsterdam, v. 8, n. 2, p. 67–71, 1989.
- FORTALEZA. **Fortaleza é a capital com maior cobertura de atendimento em tempo integral no Ensino Fundamental, diz Censo Escolar 2022.** Fortaleza, 2024. Disponível em: <https://www.fortaleza.ce.gov.br/noticias/fortaleza-e-a-capital-com-maior-cobertura-de-atendimento-em-tempo-integral-no-ensino-fundamental-diz-censo-escolar-2022>. Acesso em 12 de jan. de 2024.
- FÜGENSCHUH, A. Solving a school bus scheduling problem with integer programming. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 193, n. 3, p. 867–884, 2009.
- GAVISH, B.; SHLIFER, E. An approach for solving a class of transportation scheduling problems. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 3, n. 2, p. 122–134, 1979.

- GILLETT, B. E.; MILLER, L. R. A heuristic algorithm for the vehicle-dispatch problem. *Operations research*, INFORMS, v. 22, n. 2, p. 340–349, 1974.
- GOLDEN, B. L.; MAGNANTI, T. L.; NGUYEN, H. Q. Implementing vehicle routing algorithms. *Networks*, New Jersey, v. 7, n. 2, p. 113–148, 1977.
- GUO, X.; SAMARANAYAKE, S. Shareability network based decomposition approach for solving large-scale single school routing problems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Amsterdam, v. 140, p. 103691, 2022.
- HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations research*, United States, v. 12, n. 3, p. 450–459, 1964.
- HANDLER, G. Y.; MIRCHANDANI, P. B. Location on networks: the m-center and m-median problems. *Operations Research*, United States, v. 27, n. 5, p. 857–872, 1979.
- JÚNIOR, A. d. C. G.; CARVALHO, C. R. V. de; MUNHOZ, P. L. A.; SOUZA, M. J. F. **Um método heurístico híbrido para a resolução do problema de seqüenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção.** 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/NVEA-7B7M9F>. Acesso em: 15 set. 2024.
- KARP, R. M. Reductions in combinatorial analysis. *Complexity of Computer Computations*, v. 41, p. 85–103, 1972.
- KERNIGHAN, B. W.; LIN, S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *The Bell system technical journal*, Unites States, v. 49, n. 2, p. 291–307, 1970.
- LAPORTE, G. The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate algorithms. *European journal of operational research*, Amsterdam, [S.I.], v. 59, n. 3, p. 345–358, 1992.
- LAPORTE, G.; ROPKE, S.; VIDAL, T. Heuristics for the vehicle routing problem. In: TOTH, Paolo; VIGO, Daniele (ed.). **Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications**, 2nd ed, [S.I.]: SIAM, 2014. cap. 4, p. 87-116.
- LIMA, F. M. S.; PEREIRA, D. S.; CONCEIÇÃO, S. V.; NUNES, N. T. R. A mixed load capacitated rural school bus routing problem with heterogeneous fleet: algorithms for the Brazilian context. *Expert systems with applications*, Amsterdam, v. 56, p. 320–334, 2016.
- LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search. In: GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. A. (Ed.). **Handbook of Metaheuristics**, [S.I.]: Springer, 2003, p. 320-353.
- LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search: framework and applications. *Handbook of metaheuristics*, Germany, [S.I.], p. 129–168, 2019.
- MELO, I. E. S. de; KRAMER, R. Mathematical model and matheuristic algorithm for the multi-period school bus routing problem. *Annals of Operations Research*, Germany, p. 1–47, 2024.
- MUZULON, N. Z.; FERRARI, G. N.; TURRA, A. E.; LEAL, G. C. L.; LIMA, R. H. P. Proposal of a method for routing school buses in a small-sized county. *Acta Scientiarum: Technology*, Brazil, v. 44, 2022.

- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Design of school bus routes by computer. **Socio-Economic Planning Sciences**, Amsterdam, v. 3, n. 1, p. 75–85, 1969.
- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Bus routing in a multi-school system. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 1, n. 2, p. 213–222, 1974.
- PARK, J.; KIM, B.-I. The school bus routing problem: a review. **European Journal of operational research**, Amsterdam, v. 202, n. 2, p. 311–319, 2010.
- PARK, J.; TAE, H.; KIM, B.-I. A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 217, n. 1, p. 204–213, 2012.
- PEREIRA, D. L. **Heurísticas e algoritmo exato para o problema de roteamento de veículos com coleta e entrega simultâneas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/SLSS-85BJG5/1/dilson.pdf>. Acesso em: 17 out. 2024.
- RESENDE, M. G.; RIBEIRO, C. C. Greedy randomized adaptive search procedures: advances and applications. **Handbook of metaheuristics**, New York, v. 146, p. 281–317, 2010.
- RIERA-LEDESMA, J.; SALAZAR-GONZALEZ, J.-J. Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: a branch-and-cut approach. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 39, n. 2, p. 391–404, 2012.
- RIERA-LEDESMA, J.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. A column generation approach for a school bus routing problem with resource constraints. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 40, n. 2, p. 566–583, 2013.
- SALES, L. d. P. A.; MELO, C. S.; BONATES, T. d. O. e.; PRATA, B. d. A. Memetic algorithm for the heterogeneous fleet school bus routing problem. **Journal of urban planning and development**, Virginia, v. 144, n. 2, p. 04018018, 2018.
- SCHITTEKAT, P.; KINABLE, J.; SÖRENSEN, K.; SEVAUX, M.; SPIEKSM, F.; SPRINGAEL, J. A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 229, n. 2, p. 518–528, 2013.
- SCIORTINO, M.; LEWIS, R.; THOMPSON, J. A school bus routing heuristic algorithm allowing heterogeneous fleets and bus stop selection. **SN Computer Science**, Heidelberg, Germany, v. 4, n. 1, p. 74, 2022.
- SILVA, I. da Costa e; TEIXEIRA, E.; KRAMER, R.; BULHÕES, T.; SUBRAMANIAN, A. A matheuristic algorithm for the school bus routing problem. **Journal of the Operational Research Society**, United Kingdom, p. 1–14, 2025.
- THANGIAH, S. R.; NYGARD, K. E.; JUELL, P. L. Gideon: a genetic algorithm system for vehicle routing with time windows. In: **PROCEEDINGS The Seventh IEEE Conference on Artificial Intelligence Application**, [S.I.]: IEEE, 1991. p. 322–323.
- TOREGAS, C.; SWAIN, R.; REVELLE, C.; BERGMAN, L. The location of emergency service facilities. **Operations research**, United States, v. 19, n. 6, p. 1363–1373, 1971.

TOTH, P.; VIGO, D. **The vehicle routing problem.** [S.l.]: SIAM, 2002.

VERDERBER, W. J. Automated pupil transportation. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 1, n. 2, p. 235–245, 1974.

XIE, Y.; KONG, Y.; XIANG, H.; HOU, Y.-e.; HAN, D. A metaheuristic with learning mechanism for solving the multi-school heterogeneous school bus routing problem. **IAENG International Journal of Computer Science**, Hong Kong, v. 48, n. 4, p. 884–892, 2021.