UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALISSON DA CONCEIÇÃO PEREIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO

FORTALEZA

2024

ALISSON DA CONCEIÇÃO PEREIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Yuri Gomes Lima.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P489u Pereira, Alisson da Conceição.
Unicidade de Estados de Equilíbrio / Alisson da Conceição Pereira. – 2024.
58 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Yuri Gomes Lima.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Entropia topológica. 4. Princípio Variacional. 5. Estados de equilíbrio. I. Título.

CDD 370.7

ALISSON DA CONCEIÇÃO PEREIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos.

Aprovada em: 14/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Yuri Gomes Lima (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mauricio José Poletti Merlo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Juan Carlos Mongez Duran
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família e amigos, por estarem sempre ao meu lado e serem minha fonte de inspiração, motivação e confiança.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rita de Cássia e Amilton Pereira, ao meu irmão Rafael Rocha, e a minha família por serem o meu suporte e por acreditarem nos meus sonhos.

Aos meus amigos de infância do "Vale dos Lagos", vocês acompanharam a minha jornada, e sempre me incentivaram para persistir no que eu acreditava, aprendi muito com todos vocês,e espero levar esta amizade pelo resto da vida.

Aos amigos que fiz em Fortaleza, Breno, Jônatas, Ernandes. As incontáveis tardes de estudo, entre cafés e boas risadas, foram cruciais para que que hoje eu esteja aqui, finalizando esta etapa da vida, agradeço muito a vocês.

Aos meus professores Yuri Lima, Mauricio Poletti, Cristina Lizana, por todo suporte, dedicação e comprometimento que tiveram comigo, especialmente ao professor Yuri, pela impecável orientação.

A minha companheira Kelly Brandão, pelo amor que você dedicou ao longo de todos esses anos, em momentos de maiores dificuldades em minha vida, você foi a luz que eu pude encontrar, grato por sua existência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A mudança não virá se esperarmos por outra pessoa ou outros tempos. Nós somos aqueles por quem estávamos esperando. Nós somos a mudança que procuramos"

(Obama)

RESUMO

Este trabalho se dedica ao estudo da unicidade de estados de equilíbrio, para uma classe de homeomorfismos que possuem especificação. O resultado principal foi obtido por Rufus Bowen no artigo *Some systems with unique equilibrium states.* Inicialmente, estudamos condições gerais para a existência de estados de equilíbrio. Duas ferramentas serão utilizadas: a noção de expansividade e o princípio variacional. Em seguida, estudamos o tema principal da dissertação, que consiste em estabelecer a unicidade de estados de equilíbrio, assumindo que o homeomorfismo satisfaz uma propriedade de especificação e o potencial satisfaz uma propriedade de somabilidade.

Palavras-chave: especificação; estado de equilíbrio; expansividade; princípio variacional.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of the uniqueness of equilibrium states, for a class of homeomorphisms that posses specification. The main result was obtained by Rufus Bowen in the article *Some systems with unique equilibrium states.* Firstly, we study general conditions for the existence of equilibrium states. Two tools we be used: the notion of expansivity and the variational principle. In the sequel, we study the main theme of the dissertation, which consists on establishing the uniqueness of equilibrium states, assuming that the homeomorphism satisfies a specification property and the potential satisfies a summability property.

Keywords: specification; equilibrium state; expansivity; variational principle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é discutir condições para existência e unicidade de estados de equilíbrio. Dado um potencial φ, um estado de equilíbrio de φ é uma medida de probabilidade μ que atinge o supremo no princípio variacional:

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P(f, \varphi).$$

No capítulo 2, estudaremos as ferramentas básicas e necessárias para o desenvolvimento do trabalho, incluindo as definições de medida invariante, ergódica e alguns resultados básicos da teoria de entropia, incluindo a definição de Andrey Kolmogorov e Yakov Sinai da entropia métrica e a de entropia topológica.

No capítulo 3, generalizando o conceito de entropia topológica, introduzimos a pressão (topológica) de um potencial. Apresentaremos alguns resultados da teoria, assim como a *boa definição* da pressão topológica (via coberturas abertas, conjuntos geradores e conjuntos separadores). Enunciaremos um resultado clássico da teoria ergódica, conhecido como princípio variacional. Por fim, introduzimos formalmente a noção de estado de equilíbrio, e estudamos sua existência sob condições de expansividade do homeomorfismo.

No capítulo 4, cumilnamos com a demonstração de um teorema devido a Rufus Bowen, que garante a unicidade de estados de equilíbrio para homeomorfismo expansivos com especificação e potencias admissíveis. Todas as noções envolvidas são introduzidas. Para a prova do teorema, estabelecemos diversas estimativas sobre conjuntos separados e somas de Birkhoff. Ao fim do capítulo, fornecemos a prova do teorema de Bowen.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo iremos apresentar algumas definições e resultados elementares da Teoria Ergódica que serão necessários para o desenvolvimento das próximas seções. Ao longo do texto iremos considerar um espaço de probabilidade $(M,\mathcal{B},\mu)$, onde M é um espaço métrico compacto, $\mathcal{B}$ é uma σ–álgebra em M e μ é uma medida de probabilidade. A principal referência que seguiremos neste capítulo é [3, Capítulos 1, 4, 9 e 10].

2.1 Ferramentas Básicas

Definição 2.1.1 *Seja $(M,\mathcal{B},\mu)$ um espaço de probabilidade e seja $f : M \to M$ uma transformaçao mensurável. Dizemos que a medida μ é **invariante** por f se $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo conjunto $E \in \mathcal{B}$. Neste caso, dizemos também que f preserva μ.*

No que segue, diremos que f é transformação em $(M,\mathcal{B},\mu)$ que preserva medida.

Proposição 2.1.2 *Seja f uma transformação mensurável em $(M,\mathcal{B},\mu)$. Então f preserva μ se e somente se*

$$\int \varphi d\mu = \int (\varphi \circ f) d\mu$$

para toda função μ–integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

Dizemos que uma função mensurável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é *invariante* se $\varphi = \varphi \circ f$ em μ–quase todo ponto. Dizemos que $B \in \mathcal{B}$ é *invariante* se a sua função característica χ_B é uma função invariante. Isso ocorre se e somente se $\mu(B \Delta f^{-1}(B)) = 0$.

Definição 2.1.3 *Seja f uma transformação em $(M,\mathcal{B},\mu)$ que preserva medida. Dizemos que μ é **ergódica** se todo conjunto invariante tem medida 0 ou 1.*

Existem maneiras alternativas de definir ergodicidade, consulte [3, Capítulo 4]. Uma sequência $(a_n)_n$ em $[-\infty,+\infty)$ é *subaditiva* se $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ para todos $m,n \geq 1$.

Lema 2.1.4 (Lema de Fekete) *Se $(a_n)_n$ é subaditiva, então*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty,+\infty). \tag{2.1}$$

Demonstracão: Se $a_m = -\infty$ para algum m, então pela subaditividade temos que $a_n = -\infty$ para todo $n > m$ e daí os dois lados de 2.1 são iguais a $-\infty$. Logo, podemos supor que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo n. Seja $L = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, +\infty)$ e seja $B > L$. Vamos mostrar que $\limsup_n \frac{a_n}{n} \leq B$. Isso completará a prova.

Por hipótese, existe $k \geq 1$ tal que $\frac{a_k}{k} < B$. Para $n > k$, podemos escrever $n = kp + q$, onde p e q são inteiros tais que $p \geq 1$ e $1 \leq q \leq k$. Pela subaditividade,

$$a_n \leq a_{kp} + a_q \leq pa_k + a_q \leq pa_k + b$$

onde $b = \max\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$. Logo,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{kp}{n}\frac{a_k}{k} + \frac{b}{n}.$$

Observe que $\frac{pk}{n} \to 1$ e $\frac{b}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $\frac{a_n}{n} < B$ para todo n suficientemente grande. Isso prova que $\limsup_n \frac{a_n}{n} \leq B$, como queríamos.

$\square$

Definição 2.1.5 *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma **partição** $\mathcal{P}$ do espaço M é uma família enumerável (finita ou infinita) de subconjuntos mensuráveis de M disjuntos dois a dois e cuja união tem medida total. Denotamos por $\mathcal{P}(x)$ o elemento da partição que contém um dado ponto $x \in M$. A **soma** $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição cujos elementos são as interseções $P \cap Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Mais geralmente, dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos*

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n, \forall n \right\}. \tag{2.2}$$

Seja f uma transformação em $(M, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva medida. Dada uma partição finita $\mathcal{P}$, para cada $n \geq 1$ denotamos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Observe que $\mathcal{P}^n(x) = \mathcal{P}(x) \cap f^{-1}(\mathcal{P}(f(x))) \cap \ldots \cap f^{-n+1}(\mathcal{P}(f^{n-1}(x)))$. Quando f é bi-mensurável, definimos também

$$\mathcal{P}^{\pm n} = \bigvee_{i=-n}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

O *diâmetro* de uma partição $\mathcal{P}$, denotado por $\mathrm{diam}(\mathcal{P})$ ou simplesmente $\|\mathcal{P}\|$, é o supremo dos diâmetros dos seus elementos.

Definição 2.1.6 *Dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é **mais fina** do que $\mathcal{P}$, e denotamos por $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, para todo elemento $Q \in \mathcal{Q}$ existe um elemento $P \in \mathcal{P}$ que o contém, a menos de medida nula.*

Observe que $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}^n$ para todo $n \geq 1$.

2.2 Noções básicas de topologia fraca-estrela

Nesta seção M sempre será um espaço métrico compacto e denotaremos por $\mathcal{M}_1$ o espaço das medidas de probabilidade borelianas em M.

Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1$, um conjunto finito $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ de funções contínuas limitadas $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ e um número $\epsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \varphi, \epsilon) = \left\{\nu \in \mathcal{M}_1 : \left|\int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu\right| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, N\right\}. \tag{2.3}$$

Observe que a interseção de dois conjuntos desta forma contém algum conjunto desta forma. Isto assegura que a família $\{V(\mu, \varphi, \epsilon) : \varphi, \epsilon\}$ pode ser tomada como base de vizinhanças de cada $\mu \in \mathcal{M}_1$.

A *topologia fraca-estrela* é a topologia definida por esta base de vizinhanças. Podemos notar também que esta topologia depende apenas de M e não da sua distância.

Lema 2.2.1 *Uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1$ na topologia fraca-estrela se, e somente se,*

$$\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua limitada $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [3, Capítulo 2].

Podemos também definir outras noções de vizinhanças na topologia fraca-estrela. Dada qualquer família finita $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_N\}$ de conjuntos fechados de M e dado $\epsilon > 0$, considere

$$V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1 : \nu(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, N\}. \tag{2.4}$$

A construção seguinte é análoga, apenas substituindo fechados por abertos: dada qualquer família finita $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ de abertos de M e $\epsilon > 0$, considere

$$V_a(\mu, \mathcal{A}, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1 : \nu(A_i) > \mu(A_i) - \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, N\}. \tag{2.5}$$

Chamamos *conjunto de continuidade* de μ qualquer conjunto boreliano B tal que $\mu(\partial B) = 0$. Dada uma família finita $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ de conjunto de continuidade de μ e $\epsilon > 0$, considere

$$V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1 : |\mu(B_i) - \nu(B_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, N\}. \tag{2.6}$$

Relembre que duas topologias são *equivalentes* se elas contêm exatamente os mesmos abertos.

Teorema 2.2.2 *As topologias definidas pelas bases de vizinhanças (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) são todas equivalentes.*

Teorema 2.2.3 *Se M é um espaço métrico compacto, então $\mathcal{M}_1$ munido da topologia fraca-estrela é um espaço compacto metrizável.*

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser vistas em [3, Capítulo 2].

Proposição 2.2.4 *Seja M um espaço métrico compacto e seja $(\mu_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{M}_1$. As seguintes condições abaixo são equivalentes:*

(1) $(\mu_n)_n$ *converge para* $\mu \in \mathcal{M}_1$ *na topologia fraca-estrela.*

(2) $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *para todo fechado* $F \subset M$.

(3) $\liminf_n \mu_n(A) \geq \mu(A)$ *para todo aberto* $A \subset M$.

(4) $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$ *para todo conjunto de continuidade* B *de* μ.

Demonstracão: As condições (1), (2), (3) e (4) significam que a sequência $(\mu_n)_n$ converge nas topologias (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6), respectivamente. De acordo com o Teorema 2.2.2, as topologias definidas por cada uma das bases de vizinhanças listadas são todas equivalentes, logo elas têm as mesmas sequências convergentes.

$\square$

Dada $f : M \to M$ mensurável, denotaremos por $\mathcal{M}_f$ o conjunto das probabilidades invariantes por f. Abaixo, enunciamos um resultado clássico em Teoria Ergódica, cuja demonstração pode ser encontrada em [3, Capítulo 2].

Teorema 2.2.5 *Seja $f : M \to M$ uma função contínua, onde M é um espaço métrico compacto. Então $\mathcal{M}_f$ é não-vazio e compacto na topologia fraca-estrela.*

2.3 Entropia

Continuamos assumindo que $(M,\mathcal{B},\mu)$ é um espaço de probabilidade.

Definição 2.3.1 *Dada uma partição $\mathcal{P}$, sua* ***entropia*** *é definida por*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)\log\mu(P). \tag{2.7}$$

Definição 2.3.2 *Sejam $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ partições com entropia finita. A* ***entropia condicional*** *de $\mathcal{P}$ com respeito a $\mathcal{Q}$ é definida por*

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = -\sum_{P\in\mathcal{P}}\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \mu(P\cap Q)\log\left(\frac{\mu(P\cap Q)}{\mu(Q)}\right). \tag{2.8}$$

Note que $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{M}) = H_\mu(\mathcal{P})$ para todo $\mathcal{P}$, onde $\mathcal{M} = \{M\}$ denota a partição trivial.

Lema 2.3.3 *Sejam $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ partições com entropia finita. Então:*

(a) $H_\mu(\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}|\mathcal{R}) = H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}\vee\mathcal{R})$;

(b) Se $\mathcal{P}\prec\mathcal{Q}$, então $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) \le H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R})$ e $H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P}) \ge H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q})$;

(c) $\mathcal{P}\prec\mathcal{Q}$ se, e somente se, $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0$.

A demonstração pode ser encontrada em [3, Capítulo 9]. Um fato importante é que a sequência $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é subaditiva, como diz o resultado abaixo.

Lema 2.3.4 *Para todos $m,n\ge 1$ vale que $H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) \le H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$.*

A demonstração pode ser encontrada em [3, Capítulo 9]. Observamos que ela utiliza a invariância da medida. Segue dos Lemas 2.1.4 e 2.3.4 que o limite

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) \tag{2.9}$$

existe. Chamamos $h_\mu(f,\mathcal{P})$ de *entropia de f com respeito a $\mathcal{P}$*.

Lema 2.3.5 *Dadas partições $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ com entropia finita, vale que*

$$h_\mu(f,\mathcal{Q}) \le h_\mu(f,\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}).$$

A demonstração pode ser encontrada em [3, Capítulo 9].

Definição 2.3.6 *A **entropia** do sistema (f,μ) é definida por*

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f,\mathcal{P}) \tag{2.10}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições com entropia finita.

Ao longo do texto, trabalharemos apenas com partições finitas, não apenas por uma questão de simplicidade, mas em razão de dois resultados que nos garantem que o supremo em (2.10) é realizado por partições finitas, conforme veremos.

Lema 2.3.7 *Toda partição finita tem entropia finita. De fato, $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log \#\mathcal{P}$.*

A demonstração pode ser encontrada em [3, Capítulo 9].

Proposição 2.3.8 *A entropia de (f,μ) é igual a $h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ finita$\}$.*

Demonstracão: É claro que $h_\mu(f) \geq \sup\{h_\mu(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ finita$\}$. Para provar a outra desigualdade, vamos aproximar partições enumeráveis infinitas por partições finitas. Seja $\mathcal{P} = \{P_k : k \geq 1\}$ partição infinita com entropia finita. Considere a sequência de partições finitas $\mathcal{P}_k = \{P_1,\ldots,P_k,Q_k\}$ onde $Q_k = \cup_{j>k} P_j$. Temos $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{P}$, logo $\mathcal{P}_1^n \prec \mathcal{P}_2^n \prec \cdots \prec \mathcal{P}^n$ para todo $n \geq 1$ e portanto $H_\mu(\mathcal{P}_k^n) \leq H_\mu(\mathcal{P}^n)$ para todos $n,k \geq 1$. Pelo Lema 2.3.5, segue que

$$h_\mu(f,\mathcal{P}_k) \leq h_\mu(f,\mathcal{P}) \leq h_\mu(f,\mathcal{P}_k) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_k). \tag{2.11}$$

Resta verificarmos que $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Temos

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_k) &= -\sum_{n\geq 1}\sum_{P\in\mathcal{P}_k} \mu(P_n\cap P)\log\frac{\mu(P_n\cap P)}{\mu(P)} \\
&= -\sum_{n\geq 1}\sum_{m=1}^{k} \mu(P_n\cap P_m)\log\frac{\mu(P_n\cap P_m)}{\mu(P_m)} - \sum_{n>k}\mu(P_n\cap Q_k)\log\frac{\mu(P_n\cap Q_k)}{\mu(Q_k)} \\
&= -\sum_{n>k}\mu(P_n\cap Q_k)\log\frac{\mu(P_n\cap Q_k)}{\mu(Q_k)} \\
&= -\sum_{n>k}\mu(P_n)\log\frac{\mu(P_n)}{\mu(Q_k)} \\
&= -\sum_{n>k}\mu(P_n)\log\mu(P_n) + \sum_{n>k}\mu(P_n)\log\mu(Q_k) \\
&= -\sum_{n>k}\mu(P_n)\log\mu(P_n) + \mu(Q_k)\log\mu(Q_k).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}$ tem entropia finita e $\mu(Q_k) \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{P}_k) \to 0$ quando $k \to \infty$ e portanto $h_\mu(f,\mathcal{P}) \leq \sup h_\mu(f,\mathcal{P}_k)$. Como a partição $\mathcal{P}$ é arbitrária, concluímos a prova.

$\square$

Na sequência, enunciamos três resultados de grande importância para a teoria de entropia, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3, Capítulo 9].

Lema 2.3.9 *Se $\mathcal{P}$ é uma partição finita, então $h_\mu(f,\mathcal{P}) = h_\mu(f,\mathcal{P}^k)$ para todo $k \geq 1$. Se f é invertível, temos também $h_\mu(f,\mathcal{P}) = h_\mu(f,\mathcal{P}^{\pm k})$ para todo $k \geq 1$.*

Proposição 2.3.10 *Vale $h_\mu(f^k) = kh_\mu(f)$ para todo $k \geq 1$. Se f é invertível, então $h_\mu(f^k) = |k|h_\mu(f)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Enunciaremos agora um dos principais resultados da Teoria Ergódica.

Teorema 2.3.11 (Kolmogorov-Sinai) *Seja $\mathcal{P}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{P}_n \prec \cdots$ uma sequência de partições com entropia finita tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ gera a σ–álgebra de Borel. Então*

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f,\mathcal{P}_n).$$

Finalizamos essa seção fornecendo um exemplo concreto do cálculo da entropia métrica.

Exemplo 2.3.12 (Entropia do Deslocamento) *Seja $\Sigma = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}}$ o shift unilateral completo com d símbolos e seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o mapa deslocamento, igual a $\sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$. Consideramos uma medida de Bernoulli $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ em Σ, $\nu = (p_1,\ldots,p_d)$. Seja $\mathcal{P}$ a partição de Σ nos cilindros de tamanho 1 na posição zero $[0;a]$, $a \in \{1,\cdots,d\}$. Então $\mathcal{P}^n$ é a partição de Σ em cilindros $[0;a_1,\cdots,a_n]$ de comprimento n começando na posição zero. A entropia de $\mathcal{P}^n$ é*

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{P}^n) &= -\sum_{a_1,\ldots,a_n} p_{a_1}\cdots p_{a_n} \log(p_{a_1}\cdots p_{a_n}) \\
&= -\sum_{a_1,\ldots,a_n} p_{a_1}\ldots p_{a_n} \sum_j \log\ p_{a_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \sum_{a_1,\ldots,a_n} p_{a_1}\cdots p_{a_n} \log\ p_{a_j} \\
&= -\sum_j \sum_{a_j} p_{a_j} \log\ p_{a_j} \sum_{a_j, i\neq j} p_{a_1}\cdots p_{a_{j-1}} p_{a_{j+1}}\cdots p_{a_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} H_\mu(\mathcal{P}) \sum_{a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n} p_{a_1}\cdots p_{a_{j-1}} p_{a_{j+1}}\cdots p_{a_n}
\end{aligned}$$

O somatório mais interno é igual a $\sum p_{a_1} \cdots \sum p_{a_{j-1}} \sum p_{a_j} \cdots \sum p_{a_n} = 1$*, logo*

$$H_\mu(\mathcal{P}^n) = \sum_{j=1}^{n} H_\mu(\mathcal{P}) = nH_\mu(\mathcal{P}) = -n\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i.$$

Consequentemente,

$$h_\mu(\sigma,\mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$$

Como a união dos iterados $\mathcal{P}^n$ *gera a* $\sigma-$*álgebra de Borel de* Σ*, então pelo Lema 2.3.9 e Teorema 2.3.11 concluímos que*

$$h_\mu(\sigma) = \lim_n h_\mu(\sigma,\mathcal{P}^n) = h_\mu(\sigma,\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i.$$

2.4 Entropia Topológica

Seja M um espaço métrico compacto. Chamamos *cobertura aberta* de M qualquer família α de abertos cuja união é todo o espaço M. Dada uma cobertura aberta α, dizemos que γ é uma *subcobertura* de α, se γ é uma subfamília de α que ainda assim é uma cobertura de M. Note que, como o espaço M é compacto, isso implica que toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita, isto é, uma subfamília de abertos com apenas um número finito de elementos.

Definição 2.4.1 *Chamamos de* ***entropia da cobertura*** *de* α *ao número*

$$H(\alpha) = \log N(\alpha)$$

onde $N(\alpha)$ *é o menor número tal que* α *admite alguma subcobertura finita com esse número de elementos.*

Dadas duas coberturas abertas α e β, dizemos que α é *menos fina* que β, e escrevemos $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α. Por exemplo, se β é uma subcobertura de α, então $\alpha \prec \beta$.

Proposição 2.4.2 *Se* α *e* β *são coberturas abertas de* M *tais que* $\alpha \prec \beta$*, então* $H(\alpha) \leq H(\beta)$*.*

Demonstracão: Seja $\gamma = \{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ uma subcobertura finita de β. Como β é mais fina do que α, segue que para cada $A_i \in \gamma$, existe $B_i \in \alpha$ tal que $A_i \subset B_i$, logo $\{B_i\}_{1\leq i\leq n}$ é uma subcobertura finita de α. Consequentemente, $N(\alpha) \leq N(\beta)$, e portanto $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

$\square$

Proposição 2.4.3 *Se α e β são coberturas abertas de M, então $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.*

Demonstracão: Sejam $\mathcal{A} = \{A_i\}_{1 \leq i \leq r}$ uma subcobertura finita de α e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{1 \leq j \leq s}$ uma sucobertura finita de β, então $\mathcal{U} = \{A_i \cap B_j : 1 \leq i \leq r \ e \ 1 \leq j \leq s\}$ é subcobertura finita de $\alpha \vee \beta$, com no máximo rs elementos. Isso implica que, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$., consequentemente $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

□

Dadas coberturas abertas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, denotamos por $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ a sua *soma*, isto é, a cobertura cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$, para cada j. Note que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ para todo j.

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua. Se α é uma cobertura aberta de M, então qualquer pré-imagem $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta de M. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)$$

Para o caso em que $f : M \to M$ for um homeomorfismo definimos

$$\alpha^{\pm n} = \bigvee_{j=-n}^{n-1} f^{-j}(\alpha)$$

Pela Proposição 2.4.3, vemos que $H(\alpha^{m+n}) \leq H(\alpha^m) + H(\alpha^n)$ para todo $m, n \geq 1$, e para qualquer cobertura aberta de M. Ou seja, $H(\alpha^n)$ é uma sequência subaditiva. Consequentemente, pelo Lema 2.1.4, o limite

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n)$$

sempre existe e é finito. Ele é chamado *entropia de f* com respeito à cobertura α. Agora, pela Proposição 2.4.2, implica que $\alpha \prec \beta \Longrightarrow h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Definição 2.4.4 *Chamamos de **entropia topológica** de f como sendo*

$$h(f) = \sup\{h(f, \alpha) : \alpha \text{ é } cobertura\ aberta\ de\ M\}.$$

Em particular, se β é subcobertura de α, então $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$. Portanto, a definição acima não muda se restringirmos o supremo às coberturas finitas.

Definição 2.4.5 *O **diâmetro** de uma cobertura aberta α, o qual denotaremos por $\|\alpha\|$, é definido como o supremo dos diâmetros dos seus elementos (conjuntos abertos).*

Proposição 2.4.6 *Seja $(\beta_k)_k$ qualquer sequência de coberturas abertas de M tal que $\|\beta_k\|$ converge para zero. Então*

$$h(f) = \sup_k h(f,\beta_k) = \lim_k h(f,\beta_k).$$

Demonstracão: Ver [3, Capítulo 10].

□

Corolário 2.4.7 *Seja $f : M \to M$ contínua, onde M é espaço métrico compacto. Seja β uma cobertura aberta satisfazendo alguma das duas propriedades abaixo:*

(1) $\|\beta^k\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

(2) f é um homeomorfismo e $\|\beta^{\pm k}\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Então $h(f) = h(f,\beta)$.

Demonstracão: Ver [3, Capítulo 10].

□

Definição 2.4.8 (Conjunto gerador e conjunto separado) *Dados $\epsilon > 0$ um número real qualquer e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que G é um **conjunto** (n,ϵ)–**gerador** de M se para todo $x \in M$ existe $a \in G$ tal que $d(f^i(x), f^i(a)) < \epsilon$ para todo $i = 0,1,\dots,n-1$. Dizemos que E é um **conjunto** (n,ϵ)–**separado** se para todos $x,y \in E$ existe $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \epsilon$.*

Denotaremos por $g_n(f,\epsilon)$ a menor cardinalidade de um conjunto (n,ϵ)–gerador de M, e $s_n(f,\epsilon)$ a maior cardinalidade de um conjunto (n,ϵ)–separado. Definimos,

$$\begin{aligned} g(f,\epsilon) &= \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f,\epsilon) \\ s(f,\epsilon) &= \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f,\epsilon). \end{aligned}$$

É claro que se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, então todo conjunto (n,ϵ_2)–separado também é (n,ϵ_1)–separado. Portanto, $s_n(f,\epsilon_1) \geq s_n(f,\epsilon_2)$ para todo $n \geq 1$, e passando o limite $s(f,\epsilon_1) \geq s(f,\epsilon_2)$, de maneira análoga podemos concluir que $g(f,\epsilon_1) \geq g(f,\epsilon_2)$. Logo, podemos definir o limite

$$\begin{aligned} g(f) &= \lim_{\epsilon \to 0} g(f,\epsilon) \\ s(f) &= \lim_{\epsilon \to 0} s(f,\epsilon). \end{aligned}$$

A proposição abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [3, Capítulo 10], fornece a boa definição para entropia topológica.

Proposição 2.4.9 *Seja $f : M \to M$ transformação contínua em um espaço métrico compacto M, então $h(f) = g(f) = s(f)$.*

Proposição 2.4.10 *Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaços métricos compactos. Se existir uma aplicação $\psi : M \to N$ contínua e injetiva tal que $\psi \circ f = g \circ \psi$, então $h(f) \le h(g)$.*

Demonstracão: Inicialmente, vemos que $\psi(M)$ é um conjunto compacto, e daí a sua inversa $\psi^{-1} : \psi(M) \to M$ é (uniformemente) contínua. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $E \subset M$ é (n,ϵ)–separado para f, então $\psi(M) \subset N$ é (n,δ)–separado para g. Com efeito, denotaremos por d^M e d^N as distâncias respectivas nos espaços métricos M e N, dados $x, y \in E$, então existe $j = 0, \cdots, n-1$ tal que $d^M(f^j(x), f^j(y)) \ge \epsilon$. Agora, pelo fato de que ψ^{-1} é uniformemente contínua, então $d^N(\psi(f^j(x)), \psi(f^j(y))) \ge \delta$. De acordo com a hipótese, $\psi \circ f = g \circ \psi$, temos que $d^N(g^j(\psi(x)), g^j(\psi(y))) \ge \delta$.

Sendo ψ uma aplicação injetiva, concluímos que $s_n(f,\epsilon) \le s_n(g,\delta)$ para qualquer $n \ge 1$. Passando o limite, obtemos $s(f) \le s(g)$, em particular $h(f) \le h(g)$.

□

Exemplo 2.4.11 (Entropia topológica do mapa deslocamento) *Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o deslocamento unilateral em $\Sigma = \{1, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$, introduzido no Exemplo 2.3.12. Vimos nesse referido exemplo que se μ é a medida de Bernoulli definida pelo vetor de probabilidade $p = (p_1, ..., p_d)$, então $h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{d} p_i \log p_i$. Observe que todo cilindro é aberto, logo $mathcal P = \{[0; a] : a = 1, \dots, d\}$ é cobertura aberta de Σ. Para cada n, $\mathcal{P}^n$ é formada pelos cilindros de comprimento n começando na posição zero. Temos $H(\mathcal{P}^n) = \log \#\mathcal{P}^n = \log d^n$ e consequentemente $h(\sigma, \mathcal{P}) = \log d$.Consideramos uma métrica canônica em Σ definida por*

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \theta^N \tag{2.12}$$

onde $\theta \in (0,1)$ está fixado e $N = N((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) \ge 0$ é o maior inteiro tal que $x_i = y_i$ para todo $|i| < N$. É fácil notar que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) \to 0$ *quando $n \to \infty$, portanto pelo Corolário 2.4.7 segue que $h(\sigma) = \log d$. O mesmo vale para o mapa deslocamento bilateral definido em $\{1, \dots, d\}^{\mathbb{Z}}$.*

Exemplo 2.4.12 (Homeomorfismo do Círculo) *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo do círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Seja α uma cobertura do círculo formada por um número finito de* *intervalos abertos. Seja* $\partial\alpha$ *o conjunto formado pelos pontos extremos desses intervalos. Para cada* $n \geq 1$*, a cobertura* α^n *está formada por intervalos cujos extremos estão em*

$$\partial\alpha^n \subseteq \partial\alpha \cup f^{-1}(\partial\alpha) \cup \cdots \cup f^{-(n-1)}(\partial\alpha).$$

Pela unidimensionalidade de S^1*, temos* $\#\alpha^n \leq \#\partial\alpha^n \leq n\#\partial\alpha$*. Portanto,*

$$h(f,\alpha) = \lim_n \frac{1}{n} \log \#\alpha^n \leq \lim_n \frac{1}{n} \log n = 0.$$

Escolhendo uma sequência de coberturas α_k *com* $\mathrm{diam}(\alpha_k) < 1/k$*, concluímos pela Proposição 2.4.6 que* $h(f) = 0$*.*

3 PRESSÃO E ESTADOS DE EQUILÍBRIO

3.1 Pressão

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua definida em um espaço métrico compacto (M,d). Chamaremos de *potencial* qualquer função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a *n–ésima soma de Birkhoff* $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ por $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$. Dada uma cobertura aberta α de M, definimos

$$P_n(f,\varphi,\alpha) = \inf\left\{ \sum_{U\in\gamma} \sup_{x\in U} e^{\varphi_n(x)} : \gamma \text{ é } \textit{subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \tag{3.1}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\sum_{U\in\gamma} \sup e^{\varphi_{m+n}(U)} &= \sum_{U\in\gamma} \sup e^{\varphi_m(U)+\varphi_n(f^m(U))} \\
&\leq \left(\sum_{U\in\gamma} \sup e^{\varphi_m(U)} \right) \cdot \left(\sum_{V\in f^m(\gamma)} \sup e^{\varphi_n(f^m(V))} \right).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$P_{m+n}(f,\varphi,\alpha) \leq P_m(f,\varphi,\alpha) \cdot P_n(f,\varphi,\alpha).$$

Aplicando a função logarítma em ambos membros da desigualdade acima tem-se

$$\log P_{m+n}(f,\varphi,\alpha) \leq \log P_m(f,\varphi,\alpha) + \log P_n(f,\varphi,\alpha).$$

Portanto, a sequência $\Big(\log P_n(f,\varphi,\alpha)\Big)_n$ é subaditiva, logo pelo Lema 2.1.4, garantimos a existência do limite

$$P(f,\varphi,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f,\varphi,\alpha). \tag{3.2}$$

Definição 3.1.1 *Chamaremos de **pressão** do potencial φ relativamente à transformação f ao limite*

$$P(f,\varphi) = \lim_{\|\alpha\|\to 0} P(f,\varphi,\alpha). \tag{3.3}$$

A existência deste limite é garantida em razão da proposição abaixo.

Proposição 3.1.2 *Existe o limite $P(f,\varphi) \in [0,\infty]$, com*

$$P(f,\varphi) = \lim_{k\to\infty} P(f,\varphi,\alpha_k)$$

para toda sequência $(\alpha_k)_k$ de coberturas com $\|\alpha_k\| \to 0$.

Demonstracão: Ver [3, Capítulo 10].

□

Abaixo listamos algumas consequências da própria definição de pressão.

1. Ao considerarmos o potencial nulo $\varphi = 0$, podemos ver que $P_n(f,0,\alpha) = N(\alpha^n)$, onde $N = N(\alpha^n)$ é o menor número tal que α^n admite alguma subcobertura finita com N elementos. Logo, $P(f,0,\alpha) = h(f,\alpha)$ para toda cobertura aberta α e portanto

$$P(f,0) = h(f). \tag{3.4}$$

2. Dada qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, temos $P_n(f,\varphi+c,\alpha) = e^{nc}P_n(f,\varphi,\alpha)$ para todo $n \geq 1$ e daí $P(f,\varphi+c,\alpha) = P(f,\varphi,\alpha)+c$ para toda cobertura aberta α. Logo,

$$P(f,\varphi+c) = P(f,\varphi)+c.$$

3. Similarmente, se $\varphi \leq \psi$ então $P_n(f,\varphi,\alpha) \leq P_n(f,\psi,\alpha)$ para todo $n \geq 1$ e, portanto, $P(f,\varphi,\alpha) \leq P(f,\psi,\alpha)$ para toda cobertura aberta α, donde

$$\varphi \leq \psi \implies P(f,\varphi) \leq P(f,\psi).$$

   Em particular, como $\inf\varphi \leq \varphi \leq \sup\varphi$, temos

$$h(f)+\inf\varphi \leq P(f,\varphi) \leq h(f)+\sup\varphi. \tag{3.5}$$

Uma consequência imediata de 3.5 é que se $h(f)$ é finita então $P(f,\varphi) < \infty$ para todo potencial φ. Vejamos no exemplo abaixo que podemos obter um sistema com $P(f,\varphi) = \infty$, em virtude da entropia topológica não ser finita.

Exemplo 3.1.3 *Considere o deslocamento* $\sigma : [0,1]^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}$*. Munimos o espaço topológico compacto* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *com a distância*

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|x_n - y_n|, \tag{3.6}$$

onde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *e* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*. Considere um conjunto discreto* $A \subset [0,1]$ *com* n *elementos, e considere a distância em* $A^{\mathbb{Z}}$ *definida no Exemplo 2.4.11 com* $\theta = 1/2$*, denote-a por* ρ*. Afirmamos que* ρ *e a restrição de* d *acima ao conjunto* $A^{\mathbb{Z}}$ *são equivalente. Dados* $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in A^{\mathbb{Z}}$*, seja* $N \geq 0$ *o maior inteiro tal que* $x_n = y_n$ *para todo* $|n| < N$*.*

Então,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|x_n-y_n| &= \sum_{n\leq -N} 2^{-|n|}|x_n-y_n| + \sum_{n\geq N} 2^{-|n|}|x_n-y_n| \\
&\leq \sum_{n\leq -N} 2^{-|n|} + \sum_{n\geq N} 2^{-|n|} \\
&= 2\sum_{n\geq N} 2^{-|n|} \\
&= 2^{-N+1}\sum_{n\geq 0} 2^{-|n|} \\
&\leq 2^{-N+2} \\
&= 4\rho(x,y)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, seja $c = min\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{Z}\}$*, recorde de que o conjunto* A *é finito. Com isso, vemos que*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|x_n-y_n| &= \sum_{n\leq -N} 2^{-|n|}|x_n-y_n| + \sum_{n\geq N} 2^{-|n|}|x_n-y_n| \\
&\geq 2c2^{-N}\sum_{n\geq N} 2^{-|n|} \\
&= 4c2^{-N} \\
&= 4c\rho(x,y)
\end{aligned}
$$

Diante das duas desigualdades que obtemos, segue que $4c\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq 4\rho(x,y)$*, provando a equivalência entre as métricas. Consequentemente a entropia topológica do sistema* $(\sigma, A^{\mathbb{Z}}, d)$ *é igual a* $\log n$*. Agora, considere a aplicação inclusão* $i : A^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}$*. Podemos ver que dado* $(x_n)_n \in A^{\mathbb{Z}}$ *tem-se*

$$
i\circ\sigma|A^{\mathbb{Z}}((x_n)_n) = \sigma\circ i((x_n)_n)
$$

Diante da proposição 2.4.10, concluímos que $h(\sigma|A^{\mathbb{Z}}) = \log n \leq h(\sigma)$*. Como* A *é arbitrário, segue que* $h(\sigma) = \infty$*.*

Podemos definir a pressão através de duas outras maneiras, em termos de conjuntos *geradores* e conjuntos *separados.*

Defina

$$
\begin{aligned}
G_n(f,\varphi,\epsilon) &= \inf\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \text{ é } (n,\epsilon)\text{–gerador}\right\} \\
S_n(f,\varphi,\epsilon) &= \sup\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \text{ é } (n,\epsilon)\text{–separado}\right\}.
\end{aligned}
$$

Em seguida, defina

$$\begin{aligned} G(f,\varphi,\epsilon) &= \limsup_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,\epsilon) \\ S(f,\varphi,\epsilon) &= \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon) \end{aligned}$$

e também

$$G(f,\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} G(f,\varphi,\epsilon) \tag{3.7}$$

$$S(f,\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} S(f,\varphi,\epsilon). \tag{3.8}$$

A seguinte proposição fornece a boa definição.

Proposição 3.1.4 *Para todo potencial φ vale que $P(f,\varphi) = G(f,\varphi) = S(f,\varphi)$.*

Demonstracão: Provaremos que $P(f,\varphi) \geq S(f,\varphi) \geq G(f,\varphi) \geq P(f,\varphi)$. Considere $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. A partir da Definição (2.4.8), podemos concluir que todo conjunto (n,ϵ)-separado maximal é (n,ϵ)-gerador. Então

$$\begin{aligned} S_n(f,\varphi,\epsilon) &= \sup\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \text{ é } (n,\epsilon)\text{–separado}\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \text{ é } (n,\epsilon)\text{–separado maximal}\right\} \qquad (3.9) \\ &\geq \inf\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \text{ é } (n,\epsilon)\text{–gerador}\right\} \\ &= G_n(f,\varphi,\epsilon). \end{aligned}$$

Consequentemente $S(f,\varphi,\epsilon) \geq G(f,\varphi,\epsilon)$. Passando ao limite quando $\epsilon \to 0$, obtemos $S(f,\varphi) \geq G(f,\varphi)$. Provaremos agora que $P(f,\varphi) \geq S(f,\varphi)$. Seja α uma cobertura aberta qualquer de M com $\|\alpha\| < \delta$, sendo δ um número real positivo e seja $E \subset M$ um conjunto qualquer (n,δ)-separado. Dada qualquer subcobertura finita γ de α^n, é claro que todo ponto de E pertence a algum elemento de γ. Além disso, como $\|\gamma\| < \delta$, cada elemento de γ só pode conter um único elemento de E. Portanto,

$$\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} \leq \sum_{U\in\gamma} \sup_{y\in U} e^{\varphi_n(y)}.$$

Tomando o supremo em E e o ínfimo em γ, temos que

$$S_n(f,\varphi,\delta) \leq P_n(f,\varphi,\alpha), \quad \forall n \geq 1.$$

Segue que $S(f,\varphi,\delta) \leq P(f,\varphi,\alpha)$. Fazendo $\delta \to 0$ (logo $\|\alpha\| \to 0$) concluímos que $S(f,\varphi) \leq P(f,\varphi)$.

Agora nos resta verificar que $G(f,\varphi) \geq P(f,\varphi)$. Por continuidade uniforme (relembre que M é compacto e φ é contínua), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) \leq \delta$ implica $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$. Seja α uma cobertura aberta de M com $\|\alpha\| < \delta$, seja $\rho > 0$ um número de *Lebesgue* de α e seja E um conjunto (n,ρ)–gerador qualquer de M. Para cada $x \in E$ e $i = 0,\ldots,n-1$, existe $A_{x,i} \in \alpha$ tal que $B(f^i(x),\rho) \subset A_{x,i}$, onde $B(f^i(x),\rho)$ é a bola aberta de centro $f^i(x)$ e raio ρ.

Defina,

$$\gamma(x) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}),$$

que é um elemento de α^n que contém

$$B(x,n,\rho) := \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B(f^i(x),\rho)) = \{y \in M : d(f^i(y), f^i(x)) < \rho,\ i = 0,\ldots,n-1\}.$$

O conjunto $B(x,n,\rho)$ é a *bola dinâmica* de ordem n centrada no ponto x e de raio ρ. Note que se defirmos a métrica d_n por

$$d_n(x,y) := \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : k = 0,\ldots,n-1\} \tag{3.10}$$

então obtemos uma métrica equivalente a d e tal que $B(x,n,\rho)$ é a bola de centro x e raio ρ com respeito a d_n.

Como E é um conjunto (n,ρ)–gerador, então $\gamma = \{\gamma(x) : x \in E\}$ é uma subcobertura finita de α^n. Note também que

$$\sup_{y \in \gamma(x)} \varphi_n(y) \leq n\epsilon + \varphi_n(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.11}$$

De fato, dado $x \in E$, seja $y \in \gamma(x)$. Para todo $i = 0,\ldots,n-1$ tem-se $y \in f^{-i}(A_{x,i})$ com $A_{x,i} \in \alpha$, logo $d(f^i(x), f^i(y)) < \delta$ e portanto $|\varphi(f^i(x)) - \varphi(f^i(y))| < \epsilon$. Somando em i, obtemos que

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(f^i(x)) - \varphi(f^i(y))| < n\epsilon.$$

Diante disso, vemos que $\varphi_n(y) \leq n\epsilon + \varphi_n(x)$, o que prova (3.11). Logo,

$$\sum_{U \in \gamma} \sup_{y \in U} e^{\varphi_n(y)} \leq e^{n\epsilon} \sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x)}.$$

Isso nos garante que $P_n(f,\varphi,\alpha) \leq e^{n\epsilon} G_n(f,\varphi,\rho)$ para todo $n \geq 1$ e consequentemente

$$\frac{1}{n}\log P_n(f,\varphi,\alpha) \leq \epsilon + \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,\rho)$$

para todo $n \geq 1$. Por (3.2), segue que

$$P(f,\varphi,\alpha) \leq \epsilon + \liminf_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,\rho) \leq \epsilon + G(f,\varphi,\rho). \tag{3.12}$$

Fazendo $\rho \to 0$ vemos que $P(f,\varphi,\alpha) \leq \epsilon + G(f,\varphi)$. Finalmente, fazendo $\delta \to 0$ temos $\epsilon \to 0$ e portanto

$$P(f,\varphi) = \lim_{\delta \to 0} P(f,\varphi,\alpha) \leq \lim_{\epsilon \to 0}(\epsilon + G(f,\varphi)) = G(f,\varphi).$$

Isso conclui a prova.

$\square$

A conclusão da Proposição 3.1.4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(f,\varphi) = \lim_{s\to 0}\limsup_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,s) = \lim_{s\to 0}\limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,s) \tag{3.13}$$

Diante das relações (3.9) e (3.12) na demonstração, podemos obter também as seguintes estimativas

$$P(f,\varphi) \leq \lim_{s\to 0}\ \liminf_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,s) \leq \lim_{s\to 0}\ \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,s).$$

Comparando com (3.13), obtemos que

$$P(f,\varphi) = \lim_{s\to 0}\liminf_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\varphi,s) = \lim_{s\to 0}\liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,s). \tag{3.14}$$

3.2 Estados de Equilíbrio

Continuaremos considerando $f: M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto M. Seja $\mathcal{M}_f$ o conjunto de todas as medidas de *Borel invariantes* por f. Um dos principais resultados da Teoria Ergódica é o *Princípio Variacional*, demonstrado por Walters no contexto aqui considerado.

Teorema 3.2.1 (Princípio Variacional) *Seja $f: M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{M}_f$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por f. Então, para toda função contínua $\varphi: M \to \mathbb{R}$,*

$$P(f,\varphi) = \sup\left\{h_\nu(f) + \int \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{M}_f\right\}. \tag{3.15}$$

Demonstracão: Ver [3, Capítulo 10]

$\square$

Em particular, f possui entropia topológica nula se e somente se $h_\nu(f) = 0$ para toda $\nu \in \mathcal{M}_f$.

Finalmente, podemos definir a noção de *estado de equilíbrio.*

Definição 3.2.2 (Estado de equilíbrio) *Dado um potencial $\varphi : M \to \mathbb{R}$, dizemos que $\mu \in \mathcal{M}_f$ é um* ***estado de equilíbrio*** *de φ se*

$$h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu = P(f, \varphi).$$

Denotaremos por $\mathcal{E}(f, \varphi)$ o conjunto dos estados de equilíbrio de φ. Quando $\varphi \equiv 0$, os elementos de $\mathcal{E}(f, \phi)$ também são chamados de *medidas de máxima entropia.*

Exemplo 3.2.3 *Se $f : M \to M$ tem entropia topológica nula, então toda medida de probabilidade f–invariante μ é de máxima entropia, pois $h_\mu(f) = 0 = h(f)$. Para um potencial qualquer $\varphi : M \to \mathbb{R}$, temos*

$$P(f, \varphi) = \sup\left\{ \int \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{M}_f \right\}$$

e portanto ν é estado de equilíbrio de φ se, e somente se, ν maximiza a integral de φ.

Exemplo 3.2.4 *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo no círculo. Vimos no Exemplo 2.4.12 que $h(f) = 0$. Consequentemente, toda probabilidade invariante é medida de máxima entropia.*

Exemplo 3.2.5 *No Exemplo 2.4.11, vimos que $h(\sigma) = \log d$. Tomando μ a medida de Bernoulli associada ao vetor de probabilidade $(\frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d})$, temos do Exemplo 2.3.12 que $h_\mu(\sigma) = \log d$. Portanto, μ é medida de máxima entropia.*

A partir dos exemplos acima, surge a seguinte questão: quando podemos garantir a existência dos estados de equilíbrio? Veremos agora uma condição que nos garantirá que o conjunto $\mathcal{E}(f, \varphi)$ é compacto e não-vazio. Em seguida, discutiremos situações em que essa condição é satisfeita.

Definição 3.2.6 (Função entropia) *A* ***função entropia*** *de $f : M \to M$ é definida pela função $\nu \in \mathcal{M}_f \mapsto h_\nu(f)$, onde $\mathcal{M}_f$ é o conjunto das medidas de probabilidade f–invariantes.*

Lema 3.2.7 *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto tal que a função entropia é semicontínua superiormente. Então, para toda $\varphi : M \to \mathbb{R}$ contínua, o conjunto $\mathcal{E}(f,\varphi)$ é um compacto (na topologia fraca-estrela) e não-vazio.*

Demonstracão: Assumiremos o fato de que $\mathcal{M}_f$ é um conjunto compacto na topologia fraca-estrela, vide [3, Capítulo 2]. Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{M}_f$ tal que

$$h_{\mu_n}(f) + \int \varphi d\mu_n \xrightarrow{n} P(f,\varphi). \tag{3.16}$$

A convergência acima faz sentido em virtude do Teorema 3.2.1. Por compacidade do espaço $\mathcal{M}_f$, existe uma subsequência $(\mu_{n_k})_k$ que converge na topologia fraca-estrela para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_f$. Pela definição da topologia fraca-estrela (ver [3, Capítulo 2]), temos que $\int \varphi d\mu_{n_k} \to \int \varphi d\mu$. Pela hipótese de semicontinuidade da função entropia, temos que $h_\mu(f) \geq \limsup_k h_{\mu_{n_k}}(f)$. De acordo com as propriedades de $\limsup$ de uma sequência de números reais, obtemos

$$\limsup_k h_{\mu_{n_k}}(f) + \limsup_k \int \varphi d\mu_{n_k} \geq \limsup_k \left(h_{\mu_{n_k}}(f) + \int \varphi d\mu_{n_k} \right)$$

Portanto,

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \geq \limsup_k \left(h_{\mu_{n_k}}(f) + \int \varphi d\mu_{n_k} \right) = P(f,\varphi).$$

Logo, $\mu \in \mathcal{E}(f,\varphi)$. A compacidade de $\mathcal{E}(f,\varphi)$ é verificada pelo mesmo argumento utilizado acima.

$\square$

O próximo resultado nos dirá que a existência de partições boas implicará na semicontinuidade superior da função entropia.

Proposição 3.2.8 *Suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que toda partição finita $\mathcal{P}$ com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon_0$ satisfaz $\lim_n \|\mathcal{P}^n\| = 0$. Então a função entropia, definida sobre as medidas de probabilidade e invariantes por f é semicontínua superiormente. Em particular, f possui uma medida de máxima entropia.*

Demonstracão: Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon_0$. Por hipótese, $\lim_n \|\mathcal{P}^n\| = 0$.

Afirmação 3.2.1 $\bigcup_n \mathcal{P}^n$ *gera a σ–álgebra de Borel.*

Demonstração da Afirmação: Seja U um aberto qualquer de M. Para cada x em U existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}^{n(x)}(x)$ está contido em U. É claro que $\mathcal{P}_x$ pertence à álgebra gerada por $\bigcup_n \mathcal{P}^n$. Observe também que esta álgebra é enumerável, em particular o conjuntos dos valores tomados por $\mathcal{P}_x$ é enumerável. Segue que $U = \bigcup_{x\in U} \mathcal{P}_x$ também está na álgebra gerada por $\bigcup_n \mathcal{P}^n$. Isto prova que a σ–álgebra gerada por $\bigcup_n \mathcal{P}^n$ contém todos os abertos e, portanto, contém todos os conjuntos borelianos.

Voltando à prova da proposição, fixe $\mu \in \mathcal{M}_f$. Podemos escolher uma partição $\mathcal{P}$ com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon_0$ de modo que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Para cada $x \in M$ escolha um número $r_x \in (0, \epsilon_0)$ tal que o bordo da bola de centro x e raio r_x tem medida nula (isso é possível pois μ é uma medida de probabilidade). Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura finita de M por tais bolas escolhidas anteriormente. Seja $\mathcal{P}$ a partição associada a $\mathcal{U}$, ou seja, a partição cujos elementos são os conjuntos *maximais* que, para cada $U \in \mathcal{U}$, estão contidos em U ou no complementar U^c.

Em outras palavras, cada elemento de $\mathcal{P}$ é um conjunto de continuidade. Recorde que a topologia fraca-estrela coincide com a topologia gerada a partir de conjuntos de continuidade da seguinte maneira: dada uma família finita $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ de conjuntos de continuidade para uma medida de probabilidade ω e dado $\epsilon > 0$, consideramos a vizinhança

$$V_c(\omega, \mathcal{B}, \epsilon) = \{\nu \text{ medida de probabilidade} : |\omega(B_i) - \nu(B_i)| < \epsilon, i = 1, \ldots, N\}.$$

Logo, se B é conjunto de continuidade então a função $\nu \mapsto \nu(B)$ é contínua na topologia fraca-estrela. Em particular, vemos que a função $\nu \mapsto \nu(P)$ é contínua para todo $P \in \mathcal{P}$ e consequentemente a função

$$\nu \mapsto H_\nu(\mathcal{P}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} -\nu(P)\log\nu(P)$$

também é contínua. Observe que

$$\partial\mathcal{P} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \partial P$$

Consequentemente, temos que

$$\partial\mathcal{P}^n \subset \partial\mathcal{P} \,\cup\, f^{-1}(\partial\mathcal{P}) \,\cup\, \cdots \,\cup\, f^{-n+1}(\partial\mathcal{P})$$

Como μ é uma medida invariante e $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$, temos que $\mu(\partial\mathcal{P}^n) = 0$. Daí, $h_\nu(f, \mathcal{P}) = \inf \frac{1}{n} H_\nu(\mathcal{P}^n)$ é o ínfimo de uma família de funções contínuas, logo é semicontínua superiormente, Consequentemente, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança V de μ tal que

$$h_\nu(f,\mathcal{P}) \leq h_\mu(f,\mathcal{P}) + \epsilon, \quad \forall \nu \in V.$$

Como $\bigcup_n \mathcal{P}^n$ gera a σ–álgebra de Borel, segue do Lema 2.3.9 e do Teorema 2.3.11 que $h_\nu(f) = h_\nu(f,\mathcal{P})$ e $h_\mu(f) = h_\mu(f,\mathcal{P})$ e portanto

$$h_\nu(f) \leq h_\mu(f) + \epsilon, \quad \forall \nu \in V.$$

Isso nos garante que a função entropia é semicontínua superiormente. Em particular, como $\mathcal{M}_f$ é compacto, a função entropia atinge seu supremo, ou seja, existe $\mu \in \mathcal{M}_f$ medida de máxima entropia.

□

Definição 3.2.9 (Transformações expansivas) *Uma transformação contínua $f : M \to M$ em um espaço métrico compacto é dita **expansiva** se existe $\epsilon_0 > 0$, chamado **constante de expansividade**, tal que para todos $x, y \in M$ distintos existe $n \in \mathbb{N}$ com $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$. Quando f é invertível, dizemos que f é **expansiva** se para todos $x, y \in M$ distintos existe $n \in \mathbb{Z}$ com $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$.*

Ou seja, quaisquer duas órbitas distintas podem ser distinguidas, de forma macroscópica, em algum momento da iteração.

Exemplo 3.2.10 (Expansão decimal) *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$, definida por*

$$f(x) = 10x - [10x]$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa a função parte inteira. Em outras palavras, f associa a cada $x \in [0,1]$ a parte fracionária de $10x$. Afirmamos que f é expansiva. Escolha $\epsilon = 1/20$. Sejam $x \neq y$ em $[0,1]$ e considere $x = 0, x_1 \cdots x_n \cdots$ e $y = 0, y_1 \cdots y_n \cdots$ as suas respectivas expansões decimais. Se existir $k \geq 1$ tal que $|x_k - y_k| \geq 2$ então

$$|f^k(x) - f^k(y)| > \frac{1}{10} > \epsilon.$$

Agora suponha que $\mid x_n - y_n \mid \leq 1$ para todo n. Escolha $k = \min\{n : x_n \neq y_n\} \geq 1$. Como $\mid x_n - y_n \mid \leq 1$ para todo $n < k$ segue que

$$|f^k(x) - f^k(y)| \geq \frac{1}{10} > \epsilon$$

Portanto, f é expansiva.

A próxima proposição garante que toda transformação expansiva tem função entropia semicontínua superiormente.

Proposição 3.2.11 *Seja $f : M \to M$ expansiva e $\epsilon_0 > 0$ uma constante de expansividade de f. Para toda partição finita $\mathcal{P}$ com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon_0$ tem-se $\lim_n \|\mathcal{P}^n\| = 0$.*

Demonstracão: Fixe $\mathcal{P}$ partição finita com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon_0$. Suponha, por contradição, que $\lim_n \|\mathcal{P}^n\| = \delta > 0$. Então, para cada $n \geq 1$ existem pontos x_n e y_n tais que $d(x_n, y_n) > \frac{\delta}{2}$ e x_n, y_n pertencem ao mesmo elemento da partição $\mathcal{P}^n$, logo satisfazem

$$d(f^k(x_n), f^k(y_n)) \leq \|\mathcal{P}^n\| < \epsilon_0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Por compacidade, existe uma subsequência $(n_j)_j$ tal que $x_{n_j} \to x$ e $y_{n_j} \to y$ onde $x, y \in M$ satisfazem $d(x, y) \geq \frac{\delta}{2}$. Fixe k. Dado $\epsilon > 0$, tomamos j grande de modo que

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(f^k(x), f^k(x_{n_j})) + d(f^k(x_{n_j}), f^k(y_{n_j})) + d(f^k(y), f^k(y_{n_j})) < 2\epsilon + \epsilon_0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos que $d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon_0$. Obtemos assim x, y distintos tais que $d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, um absurdo, pois f é uma transformação expansiva.

$\square$

A mesma prova se aplica para a noção de expansividade quando f é invertível, basta substituir $\mathcal{P}^n$ por $\mathcal{P}^{\pm n}$.

Corolário 3.2.12 *Suponha que $f : M \to M$ é uma transformação contínua e expansiva em um espaço métrico compacto. Então todo potencial contínuo admite um estado de equilíbrio.*

Demonstracão: Basta combinar o Lema 3.2.7 e as Proposições 3.2.8 e 3.2.11.

$\square$

4 UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO PARA HOMEOMORFISMOS EXPANSIVOS COM ESPECIFICAÇÃO

Como vimos no capítulo anterior (Corolário 3.2.12), homeomorfismos expansivos possuem estados de equilíbrio para qualquer potencial contínuo. O objetivo principal deste capítulo é garantir a unicidade dos estados de equilíbrio para uma subclasse dos sistemas dinâmicos expansivos. Relembramos que os homeomorfismos considerados estão definidos em espaços métricos compactos. Além da expansividade, assumiremos que os homeomorfismos satisfazem a *especificação* e que os potenciais são *admissíveis*. Os resultados desse capítulo foram provados por Bowen no artigo *Some systems with unique equilibrium states* [1].

4.1 Especificação e Propriedade de Bowen

Iremos sempre considerar medidas borelianas de probabilidade invariantes pelo homeomorfismo $f : M \to M$, onde M é um espaço métrico compacto.

Definição 4.1.1 (Especificação) *Dizemos que f possui* ***especificação*** *se para cada $\delta > 0$ existe um inteiro $p(\delta) > 0$ para o qual vale a seguinte condição: se $I_1, \ldots, I_k$ são intervalos de números inteiros, contidos em um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{Z}$ com $d(I_i, I_j) \geq p(\delta)$ para quaisquer $i \neq j$, e se $x_1, \ldots, x_k \in M$ são arbitrários, então existe um ponto periódico $x \in M$ com $f^{b-a+p(\delta)}(x) = x$ e $d(f^\ell(x), f^\ell(x_i)) < \delta$ para todo $\ell \in I_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

Note que estamos fazendo um abuso de notação, pois representamos a distância entre pontos em M e a distância entre intervalos inteiros da reta como a mesma notação d. Existem outras maneiras de definir a propriedade de especificação. Um ponto em comum a todas as definições é a existência de pontos periódicos que *sombream* partes de órbitas do nosso espaço.

Definição 4.1.2 (Potencial admissível) *Dizemos que $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é* ***admissível*** *se existem constantes $\epsilon > 0$ e $L \geq 0$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\textit{se } d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon \ \ \textit{para todo } 0 \leq k < n \implies |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq L.$$

O potencial nulo é claramente admissível. O principal resultado desse capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 4.1.3 (Bowen) *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo expansivo com especificação, onde M é um espaço métrico compacto.Então todo potencial admissível φ possui um único estado de equilíbrio μ_φ.*

A fim de verificarmos o Teorema acima, procederemos da seguinte maneira. Para cada $n \geq 1$, seja $\mathrm{Per}_n = \{x \in M : f^n(x) = x\}$ e

$$Z_n(\varphi) = \sum_{x \in \mathrm{Per}_n} e^{\varphi_n(x)}. \tag{4.1}$$

Definimos a seguinte medida

$$\mu_{\varphi,n} = \frac{1}{Z_n(\varphi)} \sum_{x \in \mathrm{Per}_n} e^{\varphi_n(x)} \delta_x. \tag{4.2}$$

Observe que (4.1) e (4.2) estão bem definidos, visto que f é uma aplicação expansiva e portanto Per_n é finito. Com efeito, assuma por absurdo que Per_n é infinito, e considere uma sequência $(x_n)_n$ de pontos distintos em Per_n. Por compacidade, a menos de uma subsequência convergente, podemos assumir que $(x_n)_n$ converge e daí, para todo $\delta > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_s, x_m) < \delta$ para todos $s, m > k$. Seja $\epsilon > 0$ uma constante de expansividade de f, e tome $\delta > 0$ pequeno o suficiente de modo que

$$d(y,z) < \delta \implies d(f^i(y), f^i(z) < \epsilon, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Em particular, $d(f^i(x_s), f^i(x_m)) < \epsilon$ para todos $s, m > k$ e $i = 0, \ldots, n-1$. Como x_s, x_m são periódicos de período n, segue que $d(f^i(x_s), f^i(x_m)) < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, o que contraria a expansividade de f.

Podemos ver também que $\mu_{\varphi,n}$ é uma medida de probabilidade f-invariante. De fato, como $\delta_x(f^{-1}(E)) = \delta_{f(x)}(E)$, segue que $\mu_{\varphi,n}(f^{-1}(E)) = \mu_{\varphi,n}(E)$. Como $\mathcal{M}_f$ é compacto na topologia fraca-estrela, então existe uma subsequência $(\mu_{\varphi,m_k})_k$ que converge na topologia fraca-estrela para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_f$. Nas próximas seções, verficaremos que μ assim obtido é o único estado de equilíbrio de φ.

4.2 Estimativas

O objetivo central desta seção é obter estimativas da pressão topológica e consequentemente da medida $\mu = \lim \mu_{\varphi,n_k}$ construída na seção anterior. Faremos repetido uso das seguintes distâncias.

Definição 4.2.1 (Distância d_n) *Para cada $n \geq 0$, definimos as distâncias $d_{|n|}$ e d_n em M pondo*

$$
\begin{aligned}
d_{|n|}(x,y) &= \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : |k| \leq n\} \\
d_n(x,y) &= \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : 0 \leq k < n\}.
\end{aligned}
$$

Começamos com um resultado auxiliar sobre homeomorfismos expansivos. No que segue, tomamos $\epsilon_0 > 0$ uma constante de expansividade de f.

Proposição 4.2.2 *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo expansivo em um espaço métrico compacto M com constante de expansividade ϵ_0. Dado $\delta > 0$, existe $N > 0$ tal que se $d_{|N|}(x,y) \leq \epsilon_0$ então $d(x,y) \leq \delta$.*

Demonstracão: A prova é por absurdo. Suponha que para todo $n \geq 1$ existem $x_n, y_n \in M$ com $d(x_n, y_n) > \delta$ e tais que $d_{|n|}(x_n, y_n) \leq \epsilon_0$. Por compacidade, existe uma subsequência $(n_j)_j$ tal que $\lim x_{n_j} = x$ e $\lim y_{n_j} = y$. Em particular, $d(x,y) \geq \delta$. Agora, como f é um homeomorfismo, obtemos $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Isso é uma contradição, pois ϵ_0 é uma constante de expansividade.

□

Agora, iniciaremos às estimativas. No que segue, fixamos um potencial admissível φ.

Lema 4.2.3 *Para quaisquer $\epsilon < \epsilon_0/2$ e $\delta > 0$, existe uma constante $C_{\delta,\epsilon} > 0$ tal que*

$$S_n(f, \varphi, \delta) \leq C_{\delta,\epsilon} S_n(f, \varphi, \epsilon), \quad \textit{para todo } n \geq 0.$$

Demonstracão: Usando a Proposição 4.2.2, tome $N = N(\delta) \geq 0$ tal que se $d_{|N|}(x,y) \leq \epsilon_0$ então $d(x,y) \leq \delta$. Reciprocamente, como f é um homeomorfismo, existe $\alpha > 0$ tal que se $d(x,y) \leq \alpha$ então $d_{|N|}(x,y) \leq \delta$.

Sejam F um conjunto (n,ϵ)–separado maximal e E um conjunto (n,δ)–separado qualquer. Como F é maximal, para todo $x \in E$ existe $a(x) \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(a(x))) \leq \epsilon$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Isso define uma função $\alpha : E \to F$. No que segue, obteremos uma conta superior para a cardinalidade dos conjuntos

$$E_a = \alpha^{-1}(a) = \{x \in E : a(x) = a\}, \quad a \in F.$$

Vejamos a seguinte a afirmação.

Afirmação 4.2.1 *Se $x,y \in E_a$ são distintos, então $d(x,y) > \alpha$ ou $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$.*

Demonstracão: É claro que

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq 2\epsilon < \epsilon_0 \quad para \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{4.3}$$

Por absurdo, suponha que $d(x,y) \leq \alpha$ e $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$. Temos três casos a serem analisados.

Caso 1: $n < N$.

Usando que $d(x,y) \leq \alpha$, temos $d_{|n|}(x,y) \leq d_{|N|}(x,y) \leq \delta$, o que contraria o fato de E ser (n,δ)–separado.

Caso 2: $n \in [N, 2N]$.

Usando que $d(x,y) \leq \alpha$ e $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, obtemos que $d_{|N|}(x,y) \leq \delta$ e $d_{|N|}(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$. Como $[-N, N] \cup [n-N, n+N] \supset [0,n]$, segue que $d_n(x,y) \leq \delta$, contrariando o fato de E ser (n,δ)–separado.

Caso 3: $n > 2N$.

De (4.3), temos que $d_{|N|}(f^i(x), f^i(y)) \leq 2\epsilon$ para $i = N, \dots, n-N$ e portanto $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \delta$ para $i = N, \dots, n-N$. Como $d(x,y) \leq \alpha$, temos que $d_N(x,y) \leq \delta$, ou seja $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \delta$ para $i = 0, \dots, N$. Similarmente, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ implica que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \delta$ para $i = n-N, \dots, n$. Assim, $d(f^i(x)), f^i(y)) \leq \delta$ para $i = 0, \dots, n$, o que contraria o fato de E ser (n,δ)–separado.

□

Em seguida, seja $R > 0$ o maior número de pontos que podemos escolher em $M \times M$ de modo que a distância entre quaisquer dois deles é maior do que α (como M é um espaço métrico compacto, tal número existe). O conjunto $\{(x, f^n(x)) : x \in E_a\}$ satisfaz tal condição, logo $\# E_a \leq R$.

Para cada $x \in E_a$, por definição temos $d(f^k(x), f^k(a)) \leq \epsilon$ para $k = 0, \dots, n-1$. Escolhendo $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, existe $L > 0$ tal que $\mid \varphi_n(x) - \varphi_n(a) \mid \leq L$, uma vez que φ satisfaz a Definição 4.1.2. Com isso, obtemos que

$$\sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x)} = \sum_{a \in F} \sum_{x \in E_a} e^{\varphi_n(x)} \leq \sum_{a \in F} \# E_a e^{\varphi_n(a) + L} \leq Re^L \sum_{a \in F} e^{\varphi_n(a)} \leq Re^L S_n(f, \varphi, \epsilon).$$

Definindo $C_{\delta,\epsilon} = Re^L$ e tomando o supremo sobre todos os conjuntos (n,δ)–separados, concluímos que

$$S_n(f, \varphi, \delta) \leq C_{\delta,\epsilon} S_n(f, \varphi, \epsilon)$$

□

Uma consequência desse último lema é o seguinte resultado.

Proposição 4.2.4 *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$P(f,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(f,\varphi,\epsilon).$$

Noutras palavras: a pressão pode ser calculada fixando ϵ pequeno.

Demonstracão: Tome $\epsilon < \epsilon_0/2$ e seja $0 < \delta < \epsilon$. Pelo Lema 4.2.3, existe $C_{\delta,\epsilon} > 0$ tal que $S_n(f,\varphi,\delta) \leq C_{\delta,\epsilon} S_n(f,\varphi.\epsilon)$ para todo $n \geq 1$, logo

$$\frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\delta) \leq \frac{1}{n}\log C_{\delta,\epsilon} + \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon), \quad \forall n \geq 1.$$

Consequentemente,

$$\inf_{k\leq n} \frac{1}{k}\log S_k(f,\varphi,\delta) \leq \inf_{k\leq n}\{\frac{1}{k}\log C_{\delta,\epsilon} + \frac{1}{k}\log S_k(f,\varphi,\epsilon)\} \quad \forall n \geq 1$$

Daí,

$$\begin{aligned} \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\delta) &\leq \liminf_n\{\frac{1}{n}\log C_{\delta,\epsilon} + \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon)\} \\ &= \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon) \end{aligned}$$

Agora, em virtude de (3.14), podemos escrever a pressão da seguinte maneira

$$P(f,\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon).$$

Lembre-se de que ambas as convergências acima são monótonas. Diante isso, temos então que

$$\begin{aligned} P(f,\varphi) &\leq \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\delta) \\ &\leq \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\delta) \\ &\leq P(f,\varphi). \end{aligned}$$

Portanto, como $\delta > 0$ foi escolhido arbitrariamente como sendo menor do que $\epsilon > 0$ fixado, concluímos que

$$P(f,\varphi) = \lim_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varphi,\epsilon)$$

desde que $\epsilon > 0$ seja suficientemente pequeno.

$\square$

Lema 4.2.5 *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $E_\epsilon, D_\epsilon > 0$ tais que*

$$\prod_{j=1}^{k} E_\epsilon S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon) \leq S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \leq \prod_{j=1}^{k} D_\epsilon S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon)$$

para todos $n_1,\ldots,n_k \geq 1$.

Demonstracão: Seja E $(n_1+\cdots+n_k,\epsilon)$–separado, para cada $j=1,\cdots,k$, seja F_j um conjunto $(n_j,\frac{\epsilon}{2})$–separado maximal. Para cada $x \in E$, seja $g(x) = (g_1(x),\ldots,g_k(x)) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tal que

$$\begin{aligned}
d_{n_1}(x, g_1(x)) &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \\
d_{n_2}(f^{n_1}(x), g_2(x)) &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \\
d_{n_3}(f^{n_1+n_2}(x), g_3(x)) &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \\
&\vdots \\
d_{n_k}(f^{n_1+\cdots+n_{k-1}}(x), g_k(x)) &\leq \tfrac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

A escolha acima é possível pois cada F_j é separado maximal, em particular é um conjunto gerador.

Afirmação 4.2.2 *A função $g : E \to F_1 \times \cdots \times F_k$ é injetiva.*

Com efeito, se $g(x) = g(y)$ então pela desigualdade triangular temos

$$d_{n_j}(f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(x), f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(y)) \leq \epsilon$$

para todo $j=1,\ldots,k$, o que implica que $d_{n_1+\cdots+n_k}(x,y) \leq \epsilon$, contradizendo o fato de E ser $(n_1+\cdots+n_k,\epsilon)$–separado.

Dado $\epsilon > 0$ pequeno, seja $L > 0$ satisfazendo a Definição 4.1.2. Então

$$\left| \varphi_{n_1+\cdots+n_k}(x) - \sum_{j=1}^{k} \varphi_{n_j}(g_j(x)) \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \mid \varphi_{n_j}(f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(x)) - \varphi_{n_j}(g_j(x)) \mid \leq kL.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in E} e^{\varphi_{n_1+\cdots+n_k}(x)} &\le \sum_{x\in E} e^{kL} e^{\varphi_{n_1}(g_1(x))}\cdots e^{\varphi_{n_k}(g_k(x))}\\
&\le \sum_{y_1,\dots,y_k\in F_1\times\cdots\times F_k} e^{kL} e^{\varphi_{n_1}(y_1)}\cdots e^{\varphi_{n_k}(y_k)}\\
&= e^{kL}\Bigg(\sum_{y_1\in F_1} e^{\varphi_{n_1}(y_1)}\Bigg)\cdots\Bigg(\sum_{y_k\in F_k} e^{\varphi_{n_k}(y_k)}\Bigg)\\
&\le e^{kL} S_{n_1}(f,\varphi,\epsilon/2)\cdots S_{n_k}(f,\varphi,\epsilon/2)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.3, obtemos que

$$\sum_{x\in E} e^{\varphi_{n_1}+\cdots+\varphi_{n_k}(x)} \le e^{kL}\prod_{j=1}^{k} C_{\epsilon/2,\epsilon} S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon) = \prod_{j=1}^{k} D_\epsilon S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon)$$

onde $D_\epsilon = e^L C_{\epsilon/2,\epsilon}$. Tomando o supremo sobre E, concluímos a desigualdade

$$S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \le \prod_{j=1}^{k} D_\epsilon S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon). \tag{4.4}$$

Verificaremos agora a outra desigualdade. Para cada $j = 1,\dots,k$, seja E_j um conjunto $(n_j, 3\epsilon)$–separado. Considere os intervalos de números inteiros $I_j = [a_j, a_j + n_j - 1]$, onde $a_j = n_1 + \cdots + n_{j-1} + (j-1)p(\epsilon)$ e $p(\epsilon)$ é um inteiro satisfazendo a definição da especificação (Definição 4.1.1) para $\epsilon > 0$. É claro que $d(I_i, I_j) \ge p(\epsilon)$ para todos $i \ne j$. Para cada $z = (z_1,\dots,z_k) \in E_1\times\cdots\times E_k$, pela propriedade de especificação existe um ponto periódico $x = x(z)$ tal que $d(f^i(x), f^{i-a_j}(z_j)) < \epsilon$ para todo $i \in I_j$, para todo $j = 1,\dots,k$, ou equivalentemente:

$$d(f^{a_j+i}(x), f^i(z_j)) < \epsilon, \quad \forall i \in [0, n_j), \forall j = 1,\dots,k. \tag{4.5}$$

Seja $m = a_k + n_k = n_1 + \cdots + n_k + (k-1)p(\epsilon)$.

Afirmação 4.2.3 *O conjunto $E = \{x(z) : z \in E_1\times\cdots\times E_k\}$ é (m,ϵ)–separado.*

Com efeito, sejam $x(z) \ne x(w) \in E$ arbitrários. Existem $j \in \{1,\dots,k\}$ e $t_j \in [0, n_j)$ tais que $d(f^{t_j}(z_j), f^{t_j}(w_j)) > 3\epsilon$, logo

$$\begin{aligned}
&d(f^{a_j+t_j}(x(z)), f^{a_j+t_j}(x(w)))\\
&\ge d(f^{t_j}(z_j), f^{t_j}(w_j)) - d(f^{t_j}(z_j), f^{a_j+t_j}(x(z))) - d(f^{a_j+t_j}(x(w)), f^{t_j}(w_j))\\
&> 3\epsilon - \epsilon - \epsilon = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui a afirmação acima.

Agora, dado $x(z) \in E$, observe que $a_{j+1} = a_j + n_j + p(\epsilon)$, temos

$$\varphi_m(x(z)) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(f^i(x(z))) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{n_j}(f^{a_j}(x(z))) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_{p(\epsilon)}(f^{a_j+n_j}(x(z)))$$
$$\geq \sum_{j=1}^{k} (\varphi_{n_j}(z_j) - L) - kp(\epsilon)\|\varphi\| = -k(L + p(\epsilon)\|\varphi\|) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_{n_j}(z_j)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{x(z)\in E} e^{\varphi_m(x(z))} &\geq e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \sum_{z\in E_1\times\cdots\times E_k} e^{\varphi_{n_1}(z_1)} \cdots e^{\varphi_{n_k}(z_k)} \\
&= e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{x\in E_j} e^{\varphi_{n_j}(x)} \right).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre os conjuntos (m,ϵ)–separados, segue que

$$S_m(f,\varphi,\epsilon) \geq e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{x\in E_j} e^{\varphi_{n_j}(x)} \right).$$

Agora, tomando o supremo sobre todos os conjuntos $(n_j, 3\epsilon)$—separados, obtemos

$$S_m(f,\varphi,\epsilon) \geq e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \prod_{j=1}^{k} S_{n_j}(f,\varphi,3\epsilon). \tag{4.6}$$

Pela primeira parte deste lema,

$$\begin{aligned}
S_m(f,\varphi,\epsilon) &= S_{(n_1+\cdots+n_k)+(k-1)p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon) \\
&\leq D_\epsilon S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \prod_{j=1}^{k-1} D_\epsilon S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon) \\
&= D_\epsilon^k S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon)[S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)]^{k-1}
\end{aligned}$$

e daí

$$S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \geq \frac{S_m(f,\varphi,\epsilon)}{D_\epsilon^k [S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)]^{k-1}}$$

Aplicando a estimativa (4.6), tem-se

$$S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \geq \frac{e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)}}{D_\epsilon^k [S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)]^{k-1}} \prod_{j=1}^{k} S_{n_j}(f,\varphi,3\epsilon).$$

Aplicando o Lema 4.2.3, existe $C_{\epsilon,3\epsilon} > 0$ tal que $S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon) \leq C_{\epsilon,3\epsilon} S_{n_j}(f,\varphi,3\epsilon)$, logo

$$S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \geq \frac{e^{-k(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)}}{(D_\epsilon C_{\epsilon,3\epsilon})^k [S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)]^{k-1}} \prod_{j=1}^{k} S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon). \tag{4.7}$$

Observe que:

1. se $S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon) \geq 1$ então
$$\frac{1}{S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)^{k-1}} \geq \frac{1}{S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)^{k}}.$$
2. se $S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon) < 1$ então
$$\frac{1}{S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)^{k-1}} > 1.$$

Portanto, definindo
$$E_\epsilon = \frac{e^{-(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)}}{D_\epsilon C_{\epsilon,3\epsilon} \max\{1, S_{p(\epsilon)}(f,\varphi,\epsilon)\}},$$

podemos reescrever a desigualdade (4.7) como
$$S_{n_1+\cdots+n_k}(f,\varphi,\epsilon) \geq E_\epsilon^k \prod_{j=1}^{k} S_{n_j}(f,\varphi,\epsilon).$$

□

Lema 4.2.6 *Se* $\epsilon > 0$ *é suficientemente pequeno e* D_ϵ, E_ϵ *são dadas pelo Lema* 4.2.5*, então*
$$\frac{1}{D_\epsilon} e^{nP(f,\varphi)} \leq S_n(f,\varphi,\epsilon) \leq \frac{1}{E_\epsilon} e^{nP(f,\varphi)}, \quad \forall n \geq 1.$$

Demonstracão: Fixe $\epsilon > 0$ pequeno. Pela Proposição 4.2.4, temos $P(f,\varphi) = \lim \frac{1}{n} \log S_n(f,\varphi,\epsilon)$. Por absurdo, suponha que exista $n \geq 1$ tal que
$$S_n(f,\varphi,\epsilon) > \frac{1}{E_\epsilon} e^{nP(f,\varphi)}.$$

Logo,
$$\frac{1}{n} \log S_n(f,\varphi,\epsilon) + \frac{1}{n} \log E_\epsilon > P(f,\varphi).$$

Decorre do 4.2.5, que para todo $k \geq 1$ temos
$$S_{kn}(f,\varphi,\epsilon) = S_{n+\cdots+n}(f,\varphi,\epsilon) \geq E_\epsilon^k S_n(f,\varphi,\epsilon)^k$$

e daí
$$P(f,\varphi) = \lim_k \frac{1}{kn} \log S_{kn}(f,\varphi,\epsilon) \geq \lim_k \frac{1}{kn} \log E_\epsilon^k + \lim_k \frac{1}{kn} \log S_n(f,\varphi,\epsilon)^k$$
$$= \frac{1}{n} \log E_\epsilon + \frac{1}{n} \log S_n(f,\varphi,\epsilon) > P(f,\varphi),$$

contradição. Assim, $S_n(f,\varphi,\epsilon) \leq \frac{1}{E_\epsilon} e^{nP(f,\varphi)}$ para todo $n \geq 1$. A outra desigualdade é verificada de maneira totalmente análoga.

□

Recorde que

$$Z_n(\varphi) = \sum_{x \in \mathrm{Per}_n} e^{\varphi_n(x)}.$$

Lema 4.2.7 *Existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que*

$$d_1 e^{nP(f,\varphi)} \leq Z_n(\varphi) \leq d_2 e^{nP(f,\varphi)}$$

para todo n suficientemente grande.

Note que o lema acima e o Teorema 3.2.1, quando aplicados a $\varphi = 0$, nos dizem que

$$d_1 e^{nh(f)} \leq \#\mathrm{Per}_n \leq d_2 e^{nh(f)}$$

para todo n suficientemente grande. Consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \#\mathrm{Per}_n = h(f),$$

ou seja, a entropia topológica é igual à taxa de crescimento do número de pontos periódicos.
Demonstracão: Fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Afirmamos que o conjunto Per_n é (n,ϵ)–separado. Com efeito, escolhemos $\epsilon > 0$ pequeno, de modo que seja uma constante de expansividade. Daí, se existirem $x, y \in Per_n$ tais que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \epsilon$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$, como $f^n(x) = x$, assim como $f^n(y) = y$, segue que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, pela expansividade de f, isso implica que $x = y$. Assim,

$$Z_n(\varphi) \leq S_n(f,\varphi,\epsilon) \leq \frac{1}{E_\epsilon} e^{nP(f,\varphi)},$$

onde na segunda passagem usamos o Lema 4.2.6. Isso fornece o lado direito da desigualdade requerida, tomando $d_2 = E_\epsilon^{-1}$. Note que esse lado da desigualdade vale para todo $n \geq 1$.

Por outro lado, tome $n > p(\epsilon)$, onde $p(\epsilon)$ é dado pela especificação. Seja E um conjunto $(n - p(\epsilon), 3\epsilon)$–separado. Pela especificação, para cada $z \in E$ existe $x(z) \in \mathrm{Per}_n$ tal que $d_{n-p(\epsilon)}(z, x(z)) < \epsilon$. Em particular, se $z, \overline{z} \in E$ são distintos, pela desigualdade triangular temos $x(z) \neq x(\overline{z})$.

Note que se $z \in E$ então

$$\varphi_n(x(z)) = \varphi_{n-p(\epsilon)}(x(z)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{n-p(\epsilon)}(x(z))) \geq \varphi_{n-p(\epsilon)}(z) - L - p(\epsilon)\|\varphi\|.$$

Com isso,

$$e^{\varphi_n(x(z))} \geq e^{-(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} e^{\varphi_{n-p(\epsilon)}(z)}$$

e daí

$$\sum_{z\in E} e^{\varphi_n(x(z))} \geq e^{-(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \sum_{z\in E} e^{\varphi_{n-p(\epsilon)}(z)} \tag{4.8}$$

Relembrando que $x(z) \in \mathrm{Per}_n$, para todo $z \in E$, segue que

$$Z_n(\varphi) \geq \sum_{z\in E} e^{\varphi_n(x(z))} \geq e^{-(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} \sum_{z\in E} e^{\varphi_{n-p(\epsilon)}(z)}. \tag{4.9}$$

Tomando o supremo sobre os conjuntos $(n - p(\epsilon), 3\epsilon)$–separados,

$$Z_n(\varphi) \geq e^{-(L+p(\epsilon)\|\varphi\|)} S_{n-p(\epsilon)}(f, \varphi, 3\epsilon).$$

Novamente pelo Lema 4.2.6, temos $S_{n-p(\epsilon)}(f, \varphi, 3\epsilon) \geq \frac{1}{D_{3\epsilon}} e^{(n-p(\epsilon))P(f,\varphi)}$. Assim, tomando $d_1 = e^{-[L+p(\epsilon)(\|\varphi\|+P(f,\varphi))]}/D_{3\epsilon}$, obtemos finalmente que $Z_n(\varphi) \geq d_1 e^{nP(f,\varphi)}$.

$\square$

Relembre que a *bola dinâmica* para $x \in M$, $n \geq 1$, $\epsilon > 0$ é o conjunto

$$B(x, n, \epsilon) = \{y \in M : d_n(x, y) < \epsilon\}.$$

Recorde também que a medida μ foi obtida a partir da convergência na topologia fraca-estrela de uma subsequência de medidas de probabilidade invariantes definidas da seguinte maneira

$$\mu_{\varphi,n} = \frac{1}{Z_n(\varphi)} \sum_{x\in \mathrm{Per}_n} e^{\varphi_n(x)} \delta_x.$$

onde $Z_n(\varphi) = \sum_{x\in \mathrm{Per}_n} e^{\varphi_n(x)}$.

Lema 4.2.8 *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $A_\epsilon > 0$ tal que*

$$\mu\left(\overline{B(y, n, \epsilon)}\right) \geq A_\epsilon e^{\varphi_n(y) - nP(f,\varphi)}, \quad \forall y \in M, \ \forall n \geq 1.$$

Demonstracão: Fixe $\epsilon > 0$ pequeno de modo que os lemas anteriores sejam válidos, e fixe $y \in M$ e $n \geq 1$. Seja $m \geq 1$ e tome E_m um conjunto $(m, 3\epsilon)$–separado. Sejam $r = n + m + 2p(\epsilon)$, onde $p(\epsilon)$ é a constante dada pela especificação. Para cada $z \in E_m$, aplicando a especificação aos intervalos $[0, n-1]$ e $[n + p(\epsilon), n + p(\epsilon) + m - 1]$ com pedaços de órbitas $\{y, \ldots, f^{n-1}(y)\}$ e $\{z, \ldots, f^{m-1}(z)\}$ obtemos que existe $x(z) \in \mathrm{Per}_r$ tal que:

1. $d(f^k(x(z)), f^k(y)) < \epsilon$ para $k = 0, \ldots, n-1$.
2. $d(f^{n+p(\epsilon)+\ell}(x(z)), f^\ell(z)) < \epsilon$ para $\ell = 0, \ldots, m-1$.

Pela desigualdade triangular, é fácil notar que a aplicação $x : E_m \to \mathrm{Per}_r$ é injetiva. Pela primeira condição, é claro que $x(z) \in B(y, n, \epsilon) \cap \mathrm{Per}_r$. Pela propriedade de cociclo, temos

$$\varphi_r(x(z)) = \varphi_n(x(z)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^n(x(z))) + \varphi_m(f^{n+p(\epsilon)}(x(z))) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{n+m+p(\epsilon)}(x(z))).$$

Como φ é admissível, temos $|\varphi_n(x(z)) - \varphi_n(y)| < L$ e $|\varphi_m(f^{n+p(\epsilon)}(x(z))) - \varphi_m(z)| < L$ e daí

$$|\varphi_r(x(z)) - \varphi_n(y) - \varphi_m(z)| \leq 2L + 2p(\epsilon)\|\varphi\|.$$

Com isso,

$$\varphi_r(x(z)) \geq -2L - 2p(\epsilon)\|\varphi\| + \varphi_n(y) + \varphi_m(z)$$

e portanto

$$e^{\varphi_r(x(z))} \geq e^{-2L-2p(\epsilon)\|\varphi\| + \varphi_n(y)} e^{\varphi_m(z)}.$$

Consequentemente,

$$\mu_{\varphi,r}\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) \geq \frac{1}{Z_r(\varphi)} \sum_{x \in \overline{B(y,n,\epsilon)} \cap \mathrm{Per}_r} e^{\varphi_r(x)} \geq \frac{1}{Z_r(\varphi)} e^{-2L-2p(\epsilon)\|\varphi\|+\varphi_n(y)} \sum_{z \in E_m} e^{\varphi_m(z)}.$$

Tomando o supremo sobre todos os conjuntos $(m, 3\epsilon)$–separados, obtemos que

$$\mu_{\varphi,r}\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) \geq \frac{1}{Z_r(\varphi)} e^{-2L-2p(\epsilon)\|\varphi\|+\varphi_n(y)} S_m(f, \varphi, 3\epsilon). \tag{4.10}$$

Agora, aplicando os Lemas 4.2.6 e 4.2.7, segue que

$$\frac{1}{Z_r(\varphi)} \geq \frac{1}{d_2} e^{-rP(f,\varphi)} \tag{4.11}$$

e existe uma constante $D_{3\epsilon} > 0$ que satisfaz,

$$S_m(f, \varphi, 3\epsilon) \geq \frac{1}{D_{3\epsilon}} e^{mP(f,\varphi)} \tag{4.12}$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.10),

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi,r}\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) &\geq \left(\frac{1}{d_2}e^{-rP(f,\varphi)}\right)e^{-2L-2p(\epsilon)\|\varphi\|+\varphi_n(y)}\left(\frac{1}{D_{3\epsilon}}e^{mP(f,\varphi)}\right)\\ &= \frac{1}{d_2 D_{3\epsilon}e^{2L+2p(\epsilon)\|\varphi\|+2p(\epsilon)P(f,\varphi)}}e^{\varphi_n(y)-nP(f,\varphi)}.\end{aligned}$$

Pondo $A_\epsilon = (d_2 D_{3\epsilon}e^{2L+2p(\epsilon)\|\varphi\|+2p(\epsilon)P(f,\varphi)})^{-1}$, concluímos que

$$\mu_{\varphi,r}\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) \geq A_\epsilon e^{\varphi_n(y)-nP(f,\varphi)}, \quad \forall r > n+2p(\epsilon),$$

pois m é arbitrário. Relembre que μ é o limite na topologia fraca-estrela de μ_{φ,m_k} para alguma sequência $m_k \to \infty$. Tomando $r = m_k$ para k grande e notando que $\overline{B(y,n,\epsilon)}$ é fechado, segue portanto que

$$\mu\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) \geq \limsup \mu_{\varphi,m_k}\left(\overline{B(y,n,\epsilon)}\right) \geq A_\epsilon e^{\varphi_n(y)-nP(f,\varphi)},$$

o que conclui a prova.

□

Lema 4.2.9 *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\liminf_n \mu(P \cap f^{-n}(Q)) \geq c\mu(P)\mu(Q) \tag{4.13}$$

para todos os conjuntos borelianos $P, Q \subset M$.

Demonstracão: Fixe $\epsilon < \epsilon_0/3$. Sejam A, B conjuntos compactos de continuidade para a medida μ. Dado $\delta > 0$ pequeno, sejam U, V as δ–vizinhanças de A, B respectivamente.

Usando a Proposição 4.2.2, seja $N(\delta) > 0$ tal que se $d_{|N(\delta)|}(x,y) \leq \epsilon$ então $d(x,y) \leq \delta$. Vamos considerar três inteiros positivos n, s, t tais que $n \geq 2N(\delta)$. Posteriormente, faremos $s \to \infty$ e $t \to \infty$.

Sejam E_s um conjunto $(s, 3\epsilon)$–separado e E_t um conjunto $(t, 3\epsilon)$–separado. Defina intervalos $I_j = [a_j, b_j) \subset \mathbb{Z}$, $j = 1,2,3,4$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_1 &= [a_1, b_1) = [-\lfloor n/2 \rfloor, -\lfloor n/2 \rfloor + n)\\ I_2 &= [a_2, b_2) = [b_1 + p(\epsilon), b_1 + p(\epsilon) + s)\\ I_3 &= [a_3, b_3) = [b_2 + p(\epsilon), b_2 + p(\epsilon) + n)\\ I_4 &= [a_4, b_4) = [b_3 + p(\epsilon), b_3 + p(\epsilon) + t).\end{aligned}$$

Seja $m = b_4 - a_1 + p(\epsilon) = 2n + s + t + 4p(\epsilon)$. Para cada $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ em $X = f^{-\lfloor n/2 \rfloor}(\mathrm{Per}_n \cap A) \times E_s \times f^{-\lfloor n/2 \rfloor}(\mathrm{Per}_n \cap B) \times E_t$, a propriedade de especificação aplicada aos intervalos I_1, I_2, I_3, I_4 nos dá um ponto $x = x(\mathbf{z}) \in \mathrm{Per}_m$ tal que $d(f^{a_j+i}(x), f^i(z_j)) < \epsilon$ para $0 \le i < b_j - a_j$ e $j = 1,2,3,4$. Observe que

$$a_3 = b_2 + p(\epsilon) = b_1 + s + 2p(\epsilon) = n + s + 2p(\epsilon) - \lfloor n/2 \rfloor,$$

logo $a_3 + \lfloor n/2 \rfloor = n + s + 2p(\epsilon)$.

Afirmação 4.2.4 *$x \in U$ e $f^{n+s+2p(\epsilon)}(x) \in V$.*

Com efeito, como $z_1 \in f^{-\lfloor n/2 \rfloor}(\mathrm{Per}_n \cap A)$, temos que $\tilde{z}_1 = f^{\lfloor n/2 \rfloor}(z_1) \in A$ e portanto $d(f^{a_1+i}(x), f^{a_1+i}(\tilde{z}_1)) = d(f^{a_1+i}(x), f^i(z_1)) < \epsilon$ para $0 \le i < b_1 - a_1$. Como $I_1 \supset [-N(\delta), N(\delta)]$, segue que $d(x, \tilde{z}_1) < \delta$, provando que $x \in U$. A outra propriedade é provada de modo semelhante: temos que $\tilde{z}_3 = f^{\lfloor n/2 \rfloor}(z_3) \in B$. Pela construção de x, vale que $d(f^{a_3+i}(x), f^{i-\lfloor n/2 \rfloor}(\tilde{z}_3)) < \epsilon$ para $0 \le i < b_3 - a_3$. Como $I_3 - (a_3 + \lfloor n/2 \rfloor) \supset [-N(\delta), N(\delta)]$, segue que $d(f^{a_3+\lfloor n/2 \rfloor}(x), \tilde{z}_3) < \delta$ e portanto $f^{a_3+\lfloor n/2 \rfloor}(x) \in V$. Como $a_3 + \lfloor n/2 \rfloor = n + s + 2p(\epsilon)$, o resultado segue.

Afirmação 4.2.5 *A aplicação $x : X \to \mathrm{Per}_m$ é injetiva.*

Note que Per_n é $(n, 3\epsilon)$–separado, pois $3\epsilon < \epsilon_0$. Como E_s e E_t são $(s, 3\epsilon)$–separado e $(t, 3\epsilon)$-separado respectivamente, a afirmação segue.

Vamos decompor $\varphi_m(x)$ em várias parcelas e compará-las com as respectivas somas de Birkhoff nos pontos z_1, z_2, z_3, z_4. Como $x \in \mathrm{Per}_m$, sua m–ésima soma de Birkhoff é a mesma começando de qualquer ponto de sua órbita. Calculando-a a partir de $f^{a_1}(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_m(x) &= \varphi_n(f^{a_1}(x)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{b_1(x)}) + \varphi_s(f^{a_2}(x)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{b_2}(x)) + \\
&\quad \varphi_n(f^{a_3}(x)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{b_3}(x)) + \varphi_t(f^{a_4}(x)) + \varphi_{p(\epsilon)}(f^{b_4}(x)).
\end{aligned}$$

Pela admissibilidade de φ, obtemos que

$$\varphi_m(x) \ge \varphi_n(z_1) + \varphi_s(z_2) + \varphi_n(z_3) + \varphi_t(z_4) - 4L - 4p(\epsilon)\,\|\varphi\|\,.$$

Tomando $b = e^{-4L-4p(\epsilon)\|\varphi\|}$ (essa constante não depende de n,s,t), tem-se

$$\sum_{\mathbf{z}\in X} e^{\varphi_m(x)} \geq b \sum_{z_1\in f^{-\lfloor n/2\rfloor}(\mathrm{Per}_n\cap A)} e^{\varphi_n(z_1)} \sum_{z_2\in E_s} e^{\varphi_s(z_2)} \sum_{z_3\in f^{-\lfloor n/2\rfloor}(\mathrm{Per}_n\cap B)} e^{\varphi_n(z_3)} \sum_{z_4\in E_t} e^{\varphi_t(z_4)}$$

$$= b \sum_{z_1\in \mathrm{Per}_n\cap A} e^{\varphi_n(z_1)} \sum_{z_2\in E_s} e^{\varphi_s(z_2)} \sum_{z_3\in \mathrm{Per}_n\cap B} e^{\varphi_n(z_3)} \sum_{z_4\in E_t} e^{\varphi_t(z_4)}$$

$$= b\cdot \mu_{\varphi,n}(A) Z_n(\varphi)\cdot \mu_{\varphi,n}(B) Z_n(\varphi) \sum_{z_2\in E_s} e^{\varphi_s(z_2)} \sum_{z_4\in E_t} e^{\varphi_t(z_4)}.$$

Tomando o supremo sobre os conjuntos $(s,3\epsilon)$–separados e $(t,3\epsilon)$–separados e aplicando os Lemas 4.2.6 e 4.2.7, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{z}\in X} e^{\varphi_m(x)} &\geq b\cdot \mu_{\varphi,n}(A) Z_n(\varphi)\cdot \mu_{\varphi,n}(B) Z_n(\varphi)\cdot S_s(f,\varphi,3\epsilon)\cdot S_t(f,\varphi,3\epsilon)\\ &\geq \frac{bd_1^2}{D_{3\epsilon}^2}\cdot e^{(2n+s+t)P(f,\varphi)}\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B).\end{aligned}$$

Aplicando novamente o Lema 4.2.6, temos

$$\mu_{\varphi,m}\left[U\cap f^{-n-s-2p(\epsilon)}(V)\right] = \frac{1}{Z_m(\varphi)}\left(\sum_{x\in \mathrm{Per}_m\cap U\cap f^{-n-s-2p(\epsilon)}(V)} e^{\varphi_m(x)}\right)$$

$$\geq \frac{1}{Z_m(\varphi)}\sum_{\mathbf{z}\in X} e^{\varphi_m(x)} \geq \frac{bd_1^2}{d_2 D_{3\epsilon}^2}\cdot e^{(2n+s+t-m)P(f,\varphi)}\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B)$$

$$= \frac{bd_1^2}{d_2 D_{3\epsilon}^2}\cdot e^{-4p(\epsilon)P(f,\varphi)}\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B).$$

Pondo $c = \frac{bd_1^2}{d_2 D_{3\epsilon}^2}\cdot e^{-4p(\epsilon)P(f,\varphi)}$, a desigualdade acima se reescreve como

$$\mu_{\varphi,m}\left[U\cap f^{-n-s-2p(\epsilon)}(V)\right] \geq c\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B).$$

Fixando s,n e fazendo $t\to\infty$ com $m = m_k$ onde μ_{φ,m_k} converge para μ_φ na topologia fraca-estrela, segue que

$$\mu\left[\overline{U}\cap f^{-n-s-2p(\epsilon)}(\overline{V})\right] \geq \limsup_k \mu_{\varphi,m_k}\left[U\cap f^{-s-2p(\epsilon)}(V)\right] \geq c\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B).$$

Agora fazendo $s\to\infty$, temos

$$\liminf_{r\to\infty} \mu\left[\overline{U}\cap f^{-r}(\overline{V})\right] \geq c\cdot \mu_{\varphi,n}(A)\cdot \mu_{\varphi,n}(B).$$

Finalmente, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\liminf_{r\to\infty} \mu\left[\overline{U} \cap f^{-r}(\overline{V})\right] \geq c \cdot \limsup_{n} \mu_{\varphi,n}(A) \cdot \mu_{\varphi,n}(B) \geq c\mu(A)\mu(B),$$

pois A e B são conjuntos de continuidade. Relembrando que U, V são as δ–vizinhanças de A, B respectivamente, fazendo $\delta \to 0$ dá que $\liminf \mu(A \cap f^{-n}(B)) \geq c\mu(A)\mu(B)$.

□

Corolário 4.2.10 *A medida μ é ergódica.*

Demonstracão: Se $G \subset M$ satisfaz $f^{-1}(G) = G$ então $\mu(G^c \cap f^{-n}(G)) = \mu(G^c \cap G) = 0$ para todo $n \geq 1$. Pelo Lema 4.2.9, segue que $\mu(G^c)\mu(G) = 0$.

□

4.3 Demonstração do Teorema 4.1.3

Em posse dos resultados obtidos na seção anterior, munimos agora de ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 4.1.3, principal resultado deste trabalho. Recorde que $f : M \to M$ é um homeomorfismo expansivo definido em um espaço métrico compacto que satisfaz a especificação e φ é um potencial admissível, que satisfaz a Definição 4.1.2. Nas seções anteriores, construímos uma medida f–invariante μ igual a limite na topologia fraca-estrela de uma sequência de medidas invariantes μ_{φ,m_k}, definidas pela igualdade (4.1).

Sabemos, pelo Corolário 3.2.12, que φ possui um estado de equilíbrio ν. Podemos assumir, restringindo se necessário a um componente ergódica, que ν é ergódica. A prova estará completa se mostrarmos que $\mu = \nu$, pois isso dá que μ é o único estado de equilíbrio. Duas medidas ergódicas coincidem ou são singulares. Assumimos, por contradição, que μ, ν são singulares. Sejam E, F conjuntos mensuráveis disjuntos tais que $E \cup F = M$ com $\mu(E) = 0$ e $\nu(F) = 0$. Considere $B = \bigcap_{j\geq 0} f^{-j}(E)$. Pela invariância, temos $\mu(B) = 0$. Note também que $f(B) \subset B$, então B é um conjunto invariante. Ademais,

$$\nu(M \backslash B) = \nu\left(\bigcup_{j\geq 0} f^{-j}(M \backslash E)\right) \leq \sum_{j\geq 0} \nu(f^{-j}(M \backslash E)) = 0$$

e portanto $\nu(B) = 1$.

Fixe $\epsilon < \epsilon_0/4$. No que segue, definiremos partições $\mathcal{A}_n$ que nos auxiliarão na prova. Seja $E_n = \{x_1, \ldots, x_N\}$ um conjunto $(n, 2\epsilon)$–separado maximal. Pela desigualdade triangular, temos $B(x_i,n,\epsilon)\cap B(x_j,n,\epsilon)=\varnothing$ para todos $i\neq j$. Pela maximalidade, temos

$$M=\bigcup_{x\in E_n} B(x,n,2\epsilon).$$

Para cada $i=1,\ldots,N$, defina o conjunto

$$C_{n,i}=\{y\in M: d_n(y,x_i)\leq d_n(y,x_j),\forall j=1,\ldots,N\}.$$

Afirmamos que $C_{n,1},\ldots,C_{n,N}$ são conjuntos mensuráveis tais que:

1. $\bigcup C_{i_n}=M$;
2. $B(x_i,n,\epsilon)\subset C_{n,i}\subset B(x_i,n,2\epsilon)$ para todo $i=1,\ldots,N$;
3. $B(x_i,n,\epsilon)\cap C_{n,j}=\varnothing$ para todos $i\neq j$.

A mensurabilidade é direta, pois $C_{n,i}=g_i^{-1}(-\infty,0]$ para a função mensurável

$$g_i(y)=d_n(y,x_i)-\inf\{d_n(y,x_j):j=1,\ldots,N\}.$$

O item 1 também é direto: dado $y\in M$ temos que $y\in C_{n,i}$ onde i é um índice que realiza o ínfimo $d_n(y,x_i)=\inf\{d_n(y,x_j):j=1,\ldots,N\}$. Agora vejamos os itens 2 e 3. Como $B(x_i,n,\epsilon)\cap B(x_j,n,\epsilon)=\varnothing$ para todos $i\neq j$, se $y\in B(x_i,n,\epsilon)$ então $d_n(y,x_i)\leq\epsilon<d_n(y,x_j)$ e portanto $B(x_i,n,\epsilon)\subset C_{n,i}$. Ademais, i é o único índice que realiza o ínfimo $d_n(y,x_i)=\inf\{d_n(y,x_j):j=1,\ldots,N\}$, e portanto $B(x_i,n,\epsilon)\cap C_{n,j}=\varnothing$ para todos $i\neq j$. Por fim, suponha por absurdo que exista $y\in C_{n,i}\setminus B(x_i,n,2\epsilon)$. Então $2\epsilon\leq d_n(y,x_i)\leq d_n(y,x_j)$ para todo $j\neq i$ e portanto E_n não é maximal, uma contradição.

Note que $C_{n,1},\ldots,C_{n,N}$ não são necessariamente disjuntos. Para obter uma partição a partir deles, aplicamos o truque clássico, definindo os seguintes conjuntos:

$$A_{n,1}=C_{n,1}\ \text{ e }\ A_{n,i}=C_{n,i}\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}C_{n,k}\text{ para } j=2,\ldots,N.$$

Definimos a partição $\mathcal{A}_n=\{A_{n,1},\ldots,A_{n,N}\}$. Pelas propriedades 2 e 3 acima, vemos que $\mathcal{A}_n$ também satisfaz a propriedade 2: $B(x_i,n,\epsilon)\subset A_{n,i}\subset B(x_i,n,2\epsilon)$ para todo $i=1,\ldots,N$.

Afirmação 4.3.1 *Temos* $\operatorname{diam}(f^{\lfloor n/2\rfloor}(\mathcal{A}_n))\to 0$ *quando* $n\to\infty$.

Para provar a afirmação, fixe $\delta>0$ e seja $N(\delta)$ dado pela Proposição 4.2.2. Afirmamos que $\operatorname{diam}(f^{\lfloor n/2\rfloor}(\mathcal{A}_n))<\delta$ para todo $n>2N(\delta)$. Para ver isso, fixe um tal n e sejam $x,y\in f^{\lfloor n/2\rfloor}(A_{n,i})$ para algum i. Então $f^{-\lfloor n/2\rfloor}(x),f^{-\lfloor n/2\rfloor}(y)\in A_{n,i}$ e daí $f^{-\lfloor n/2\rfloor}(x),f^{-\lfloor n/2\rfloor}(y)\in B(x_i,n,2\epsilon)$. Pela desigualdade triangular,

$$d_n(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(x),f^{-\lfloor n/2\rfloor}(y))<4\epsilon,$$

que em particular implica que $d_{|\lfloor n/2 \rfloor|}(x,y) < 4\epsilon$. Como $4\epsilon < \epsilon_0$, a Proposição 4.2.2 dá que $d(x,y) < \delta$. Como x,y são elementos arbitrários de um mesmo átomo qualquer de $f^{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathcal{A}_n)$, a prova da afirmação está completa.

Logo, $\bigcup_n f^{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathcal{A}_n)$ gera a σ–álgebra de Borel de M. Com isso, podemos obter uma sequência $(X_n)_n$ tal que cada X_n é a união finita de átomos de $\mathcal{A}_n$ e

$$\lim_{n\to\infty}(\mu+\nu)(f^{\lfloor n/2 \rfloor}(X_n)\triangle B) = 0.$$

Como B é f–invariante com $\mu(B) = 0$ e $\nu(B) = 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\nu(X_n) = 1. \tag{4.14}$$

Considere agora, para cada $k \geq 0$, a partição

$$\mathcal{A}_n^k = \bigvee_{j=-k}^{k} f^{jn}(\mathcal{A}_n).$$

Afirmação 4.3.2 *Para todo $n \geq 1$, vale que* $\operatorname{diam}(\mathcal{A}_n^k) \to 0$ *quando $k \to \infty$.*

A prova dessa afirmação será feita por absurdo. Fixe $n \geq 1$. Temos $\mathcal{A}_n^0 \supset \mathcal{A}_n^1 \supset \cdots$. Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $\operatorname{diam}(\mathcal{A}_n^k) > 2\delta$ para todo $k \geq 0$. Então existe x_k, y_k em um mesmo elemento de $\mathcal{A}_n^k$ com $d(x_k,y_k) > \delta$. Como $\mathcal{A}_n$ tem diâmetro menor que 4ϵ, segue que $d_{|kn|}(x_k,y_k) < 4\epsilon$. Para k grande isso contraria a Proposição 4.2.2. A afirmação está provada.

Assim, $\bigcup_k \mathcal{A}_n^k$ gera a σ–álgebra de Borel, para todo $n \geq 1$. Pelo Teorema 2.3.11 tem-se

$$h_\nu(f^n) = h_\nu(f^n,\mathcal{A}_n) = \inf \frac{1}{k} H_\nu(\mathcal{A}_n^k) \leq H_\nu(\mathcal{A}_n). \tag{4.15}$$

Por outro lado, pela Proposição 2.3.10 temos $h_\nu(f^n) = nh_\nu(f)$, e daí $h_\nu(f) \leq \frac{1}{n}H_\nu(\mathcal{A}_n)$. Pela invariância de ν, temos $\frac{1}{n}\int \varphi_n = \int \varphi d\nu$ e portanto

$$P(f,\varphi) = h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \leq \frac{1}{n}\left[H_\nu(\mathcal{A}_n) + \int \varphi_n d\nu\right]$$
$$\Longrightarrow \; nP(f,\varphi) \leq H_\nu(\mathcal{A}_n) + \int \varphi_n d\nu = \sum_{1\leq i\leq N}\left[-\nu(A_{n,i})\log\nu(A_{n,i}) + \int_{A_{n,i}} \varphi_n d\nu\right].$$

Temos $A_{n,i} \subset B(x_i,n,2\epsilon)$. Se ϵ é pequeno o suficiente de modo que 4ϵ atenda às condições da Definição 4.1.2, obtemos que para todo $y \in A_{n,i}$ vale $\varphi_n(y) \leq L + \varphi_n(x_i)$ e portanto

$$nP(f,\varphi) \leq L + \sum_{1\leq i\leq N}\nu(A_{n,i})(\varphi_n(x_i) - \log\nu(A_{n,i})).$$

Vamos utilizar o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 4.3.1 *Sejam* $0 \le a_1, \ldots, a_m \le 1$ *tais que* $s = a_1 + \cdots + a_m \le 1$ *e* $b_1, \ldots, b_m$ *números reias. Então,*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(b_i - \log a_i) \le s\left(\log\left(\sum_{i=1}^{m} e^{b_i}\right) - \log s\right).$$

Demonstracão: Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = -x\log x$, que é uma função convexa. O lado esquerdo da desigualdade é igual a

$$\sum a_i \log\left(\frac{e^{b_i}}{a_i}\right) = \sum e^{b_i}\phi\left(\frac{a_i}{e^{b_i}}\right).$$

Chamando $S = \sum e^{b_i}$, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\sum \frac{e^{b_i}}{S}\phi\left(\frac{a_i}{e^{b_i}}\right) \le \phi\left(\sum \frac{e^{b_i}}{S}\frac{a_i}{e^{b_i}}\right) = \phi\left(\frac{s}{S}\right) = \frac{s}{S}\log\left(\frac{S}{s}\right).$$

Cancelando S nos dois lados acima, concluímos que

$$\sum e^{b_i}\phi\left(\frac{a_i}{e^{b_i}}\right) \le s\left(\log S - \log s\right),$$

que é a desigualdade requerida.

□

Pela proposição acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
nP(f,\varphi) - L \le & \sum_{A_{n,i}\subset X_n} \nu(A_{n,i})(\varphi_n(x_i) - \log\nu(A_{n,i})) + \\
& \sum_{A_{n,i}\subset X_n^c} \nu(A_{n,i})(\varphi_n(x_i) - \log\nu(A_{n,i})) \\
\le & \ \nu(X_n)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n} e^{\varphi_n(x_i)}\right) - \nu(X_n)\log\nu(X_n) + \\
& \nu(X_n^c)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n^c} e^{\varphi_n(x_i)}\right) - \nu(X_n^c)\log\nu(X_n^c) \\
\le & \ 2Q + \nu(X_n)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n} e^{\varphi_n(x_i)}\right) + \nu(X_n^c)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n^c} e^{\varphi_n(x_i)}\right),
\end{aligned}$$

onde $Q = \max\{-t\log t : t \in [0,1]\}$. Reescrevendo a desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
-L - 2Q \le & -nP(f,\varphi) + \nu(X_n)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n} e^{\varphi_n(x_i)}\right) + \nu(X_n^c)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n^c} e^{\varphi_n(x_i)}\right) \\
= & \ \nu(X_n)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n} e^{\varphi_n(x_i) - nP(f,\varphi)}\right) + \nu(X_n^c)\log\left(\sum_{A_{n,i}\subset X_n^c} e^{\varphi_n(x_i) - nP(f,\varphi)}\right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.8, obtemos que

$$-L-2Q \leq \nu(X_n)\log\left(\frac{1}{A_\epsilon}\sum_{A_{n,i}\subset X_n}\mu\left(\overline{B(x_i,n,\epsilon)}\right)\right)+\nu(X_n^c)\log\left(\frac{1}{A_\epsilon}\sum_{A_{n,i}\cap X_n^c}\mu\left(\overline{B(x_i,n,\epsilon)}\right)\right)$$

$$\leq \nu(X_n)\log\mu(\overline{X_n})+\nu(X_n^c)\log\mu(\overline{X_n^c})-\log A_\epsilon.$$

Mas $\nu(X_n)\log\mu(\overline{X_n}) \to -\infty$ e $\nu(X_n^c)\log\mu(\overline{X_n^c}) \to 0$, uma contradição. Concluímos então que μ é o único estado de equilíbro de φ.

5 APLICAÇÕES

Neste último cápitulo, veremos que shifts topológicos de Markov e difeomorfismos uniformemente hiperbólicos satisfazem as propriedades de expansividade e especificação e que potenciais Hölder contínuos são admissíveis. Portanto, neste contexto, há um único estado de equilíbrio. Veremos também um resultado recente da área, obtido por Vaughn Climenhaga e Daniel J. Thompson no artigo *Beyond Bowen's Specification Property* [2], que se aplica a sistemas que não são uniformemente hiperbólicos. Para isso, será necessário generalizar as propriedades de expansividade, especificação e de potenciais admissíveis.

5.1 Shifts topológicos de Markov

Um exemplo prototípico das propriedades estudadas nos capítulos anteriores consiste nos shifts bilaterais, veja sua definição no Capítulo 2. Nesta seção, verificaremos que tais sistemas satisfazem as condições do Teorema 4.1.3.

Fixe $d > 0$, e seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ com $\Sigma = \{1, \cdots, d\}^{\mathbb{Z}}$. Recorde que a topologia definida em Σ com a base de vizinhanças dada por cilindros coincide com a topologia associada à distância definida por

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = 2^{-N}$$

onde $N \geq 0$ é o maior número inteiro tal que $x_i = y_i$ para todo $|i| < N$.

Proposição 5.1.1 *A transformação σ é expansiva.*

Demonstracão: Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ distintos, e seja $N \geq 0$ o maior número inteiro tal que $x_i = y_i$ para todo $|i| < N$. Observe que $d(\sigma^N(x), \sigma^N(y)) = 1$ ou $d(\sigma^{-N}(x), \sigma^{-N}(y)) = 1$. Isto prova que σ é expansiva, com constante de expansividade igual a 1.

□

Proposição 5.1.2 *A transformação σ tem especificação.*

Demonstracão: Fixe $\delta > 0$, e seja $N = N(\delta) \geq 0$ tal que $d(z, y) < \delta$ se e somente se $z_i = y_i$ para todo $|i| < N$. Tome $p(\delta) = 2N$. Sejam os intervalos de números inteiros $I_i = [a_i, b_i]$, com $1 \leq i \leq k$, de modo que $a_{j+1} \geq b_j + 2N$, com $1 \leq j \leq k - 1$.

Sejam $x^1, \cdots, x^k$ em Σ, com $x^j = (x_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$. Construímos um ponto periódico $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ da seguinte maneira:

$$x_i = x_i^j \text{ se } a_j - N + 1 \leq i \leq b_j + N - 1.$$

A escolha é consistente porque $b_j + N - 1 < a_{j+1} - N + 1$. Temos liberdade para escolher os x_i remanescentes arbitrariamente. Observe que dados quaisquer $1 \leq j \leq k$ e $s \in [a_j, b_j]$ temos que $d(\sigma^s(x), \sigma^s(x^j)) < \delta$. Por fim, Assim, basta concluir a construção de x de modo que x é periódico de período $b_k - a_1 + p(\delta)$ tomando $x_{a_1 - N} = x_{b_k + N}$.

□

Relembramos que uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ definida em um espaço métrico compacto M é *Hölder contínua* se existem constantes $C \geq 0$ e $0 < \gamma \leq 1$ tais que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C d(x,y)^\gamma.$$

Proposição 5.1.3 *As funções Hölder contínuas $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ são admissíveis.*

Demonstracão: Fixe $\epsilon \leq 1/2$ e seja N tal que $d(x,y) < \epsilon$ se e somente se $x_i = y_i$ para todo $|i| \leq N$. Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $d_n(x,y) \leq \epsilon$ para algum $n > 1$. Então $x_i = y_i$ para $i = -N, \ldots, N+n$ e portanto $d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) < 2^{-N-k}$ para $k = 0, \ldots, n-1$. Se C, γ são constante e expoente Hölder de φ, então para $k = 0, \ldots, n-1$ temos

$$|\varphi(\sigma^k(x)) - \varphi(\sigma^k(y))| \leq C d(\sigma^k(x), \sigma^k(y))^\gamma \leq C(2^{-N-k})^\gamma = (C2^{-\gamma N}) \cdot 2^{-\gamma k}$$

e portanto

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq (C2^{-\gamma N}) \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\gamma k} < \frac{C2^{-\gamma N}}{1 - 2^{-\gamma}} =: L,$$

concluindo a prova.

□

Obtemos assim o seguinte teorema.

Teorema 5.1.4 *Todo potencial Hölder contínuo no shift bilateral completo possui um único estado de equilíbrio.*

5.2 Difeomorfismos uniformemente hiperbólicos

Sejam M uma variedade riemanniana C^∞ compacta sem bordo e $f : M \to M$ um difeomorfismo.

Definição 5.2.1 *Um conjunto f–invariante $X \subset M$ é dito* ***hiperbólico*** *se, para cada $x \in X$, o espaço tangente T_xM decompõe-se em uma soma direta $T_xM = \mathbb{E}^s(x) \oplus \mathbb{E}^u(x)$ satisfazendo*

$$Df_x(\mathbb{E}^s(x)) = \mathbb{E}^s(f(x)) \text{ e } Df_x(\mathbb{E}^u(x)) = \mathbb{E}^u(f(x))$$

e existem constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:

$$\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para todos } v \in \mathbb{E}^s(x), n \geq 0,$$
$$\|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para todos } v \in \mathbb{E}^u(x), n \geq 0.$$

Quando M é hiperbólico, dizemos que f é um ***difeomorfismo Anosov****.*

Proposição 5.2.2 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo Anosov transitivo. Então f é expansivo e possui a propriedade de especificação, e todo potencial Hölder contínuo é admissível.*

Demonstracão: Ver [2, Seções 5 e 10].

□

O Teorema 4.1.3 nos fornece então o seguinte resultado.

Teorema 5.2.3 *Nas condições acima, todo potencial Hölder contínuo possui um único estado de equilíbrio.*

5.3 Especificação e Decomposição fracas

Seja $f : M \to M$ transformação contínua em um espaço métrico compacto.

Diremos que um *segmento* de órbita é uma lista finita de pontos de uma órbita de um ponto $x \in M$. Denotaremos por $(x,n) \in M \times \mathbb{N}$, sempre que quisermos representar o segmento de órbita $(x, f(x). \cdots, f^{n-1}(x))$. Dada uma coleção de segmentos de órbita $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{D}_n = \{x \in M : (x,n) \in \mathcal{D}\},$$

que representa a coleção de segmentos de órbita de comprimento n que estão em $\mathcal{D}$.

Definição 5.3.1 (Pressão Topológica) *Seja $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{N}$ uma coleção de segmentos de órbita. Para cada $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$, definimos*

$$\Lambda(\mathcal{D},\varphi,\epsilon,n) = \sup\left\{\sum_{x\in E} e^{\varphi_n(x)} : E \subset \mathcal{D}_n \text{ é } (n,\epsilon)\text{–separado}\right\}.$$

A pressão de $\mathcal{D}$ na escala $\epsilon > 0$ é definida por

$$P(\mathcal{D},\varphi,\epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\Lambda(\mathcal{D},\varphi,\epsilon,n)$$

e a ***pressão topológica*** *de $\mathcal{D}$ é definida por*

$$P(\mathcal{D},\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} P(\mathcal{D},\varphi,\epsilon).$$

Em particular, quando $\mathcal{D} = M \times \mathbb{N}$ temos $P(f,\varphi) = P(M \times \mathbb{N},\varphi)$.

Definição 5.3.2 (Decomposição) *Uma* ***decomposição*** *de $M \times \mathbb{N}$ é uma tripla de conjuntos $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}^s \subset M \times \mathbb{N}$ para qual existem funções $p, g.s : M \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $(x,n) \in M \times \mathbb{N}$ os valores $p = p(x,n)$, $g = g(x,n)$ e $s = s(x,n)$ satisfazem $p+g+s = n$ e*

$$(x,p) \in \mathcal{C}^p,\ (f^p(x),g) \in \mathcal{G},\ (f^{p+g}(x),s) \in \mathcal{C}^s.$$

Dada uma tal decomposição, para cada $N \in \mathbb{N}$ escrevemos

$$\mathcal{G}^N = \{(x,n) \in M \times \mathbb{N} : p(x,n) \le N \text{ e } s(x,n) \le N\}.$$

Definição 5.3.3 (Especificação) *Seja $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{N}$ uma coleção de segmentos de órbitas. Dizemos que $\mathcal{D}$ possui a propriedade de especificação na escala $\delta > 0$ se existe $\tau \in \mathbb{N}$ (tempo transição ou gap size) tal que para todo $(x_1,n_1),\ldots,(x_k,n_k) \in \mathcal{D}$ existem inteiros $0 = T_1 < T_2 < \cdots < T_k$ e $y \in M$ tais que*

$$f^{T_i}(y) \in B_{n_i}(x_i,\delta) \text{ e } T_i - (T_{i-1}+n_{i-1}) \in [0,\tau],\ \text{para todo } 1 \le i \le k.$$

Dizemos que $\mathcal{D}$ possui a propriedade de ***especificação*** *se $\mathcal{D}$ possuir a propriedade de especificação na escala δ para todo $\delta > 0$.*

Em outras palavras, o ponto y sombreia a órbita do ponto x_i entre os iterados $[T_i,s_i)$ onde $s_i = T_i + n_i$, e os tempos de transição são limitados por τ.

Observe que, diferente da Definição 4.1.1 que vimos de especificação, aqui o ponto y que sombreia não é necessariamente periódico.

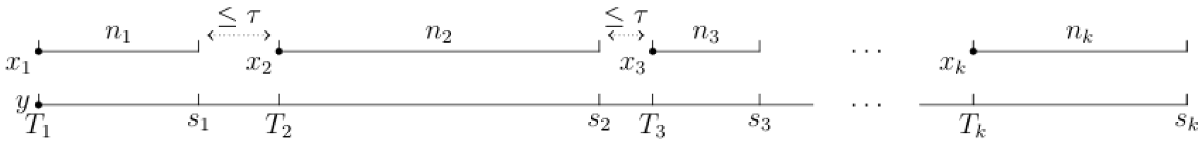

Figura 1 – Especificação

Definição 5.3.4 *Dizemos que uma medida f–invariante μ é* ***quase-expansiva*** *com escala ϵ se $\Gamma_\epsilon(x) = \{x\}$ para μ–quase todo ponto $x \in M$, ou seja, se o conjunto não-expansivo $\mathrm{NE}(\epsilon) = \{x \in M : \Gamma_\epsilon(x) \neq \{x\}\}$ possui μ–medida nula.*

Definição 5.3.5 *Definimos a pressão das obstruções com escala ϵ por*

$$P^{\perp}_{\exp}(\varphi,\epsilon) = \sup\left\{h_\mu(f) + \int \varphi d\mu : \mu \in \mathcal{M}^e_f \text{ com } \mu(\mathrm{NE}(\epsilon)) > 0\right\},$$

onde $\mathcal{M}^e_f$ denota o conjunto das medidas f–invariantes ergódicas.

Dados $\epsilon > 0$ e $x \in M$, considere o conjunto

$$\Gamma_\epsilon(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que se $f : M \to M$ é expansiva com constante de expansividade menor que ϵ, então $\Gamma_\epsilon(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$.

Definição 5.3.6 (Propriedade de Bowen) *Uma função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ possui a* ***propriedade de Bowen*** *com escala $\epsilon > 0$ se existe uma constante $V > 0$ tal que para todo segmento de órbita $(x,n) \in M \times \mathbb{N}$ e $y \in B(x,n,\epsilon)$ temos $\mid \varphi_n(y) - \varphi_n(x) \mid \leq V$.*

Teorema 5.3.7 (Climenhaga-Thompson) *Sejam M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ um potencial. Suponha que existem $\epsilon, \delta > 0$ com $\epsilon > 40\delta$ tais que $P^{\perp}_{\exp}(\varphi,\epsilon) < P(f,\varphi)$ e uma decomposição $(\mathcal{C}^p, \mathcal{G}, \mathcal{C}^s)$ para $M \times \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades:*

(1) $\mathcal{G}^N$ possui especificação com escala δ para todo N;

(2) φ possui a propriedade de Bowen em $\mathcal{G}$ com escala ϵ;

(3) $P(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s, \varphi, \delta) < P(f,\varphi)$.

Então φ possui um único estado de equilíbrio.

O teorema acima generaliza o Teorema 4.1.3, e vem sendo aplicado em variados contextos não-uniformemente hiperbólicos, incluindo fluxos geodésicos de variedades de posto 1.

REFERÊNCIAS

[1] BOWEN, R. Some systems with unique equilibrium states.**Theory of computing systems**, United States, v.8, n.3, nov.1972.

[2] CLIMENHAGA, V.; THOMPSON, D.J. Beyond Bowen's specification property. *In*: POLLICOTT,M., VAIENTI, S.(ed) **Thermodynamic formalism**.[*S.l.*]:Springer, Cham.,2021. (Lecture Notes in Mathematics v.2290).

[3] OLIVEIRA, K.; VIANA, M. **Fundamentos da teoria ergódica.** 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA 2019.

[4] SARIG, Omri. Lecture notes on ergodic theory.**Lecture notes**, Penn. State University, 2009.

[5] WALTERS, P. **An introduction to ergodic theory** . New York: Springer, 2000.

[6] WEN, L. **Differentiable dynamical systems**: an introduction to structural stability and hyperbolicity.Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2016.