



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**JOSÉ RAIMUNDO DE OLIVEIRA JÚNIOR**

**UMA PROPOSTA DE CONTROLADOR-PREDITOR BASEADO EM OBSERVADORES  
AUMENTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO NA ENTRADA**

**FORTALEZA**

**2023**

JOSÉ RAIMUNDO DE OLIVEIRA JÚNIOR

UMA PROPOSTA DE CONTROLADOR-PREDITOR BASEADO EM OBSERVADORES  
AUMENTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO NA ENTRADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- O47p     Oliveira Júnior, José Raimundo de.  
          Uma proposta de controlador-preditor baseado em observadores aumentados para sistemas com atraso na entrada / José Raimundo de Oliveira Júnior. – 2023.  
          142 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2023.  
          Orientação: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico.  
          Coorientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.
1. Sistemas com atraso de transporte. 2. Observador aumentado. 3. Realimentação baseada em preditor. 4. Atenuação de perturbação. I. Título.

CDD 621.3

---

JOSÉ RAIMUNDO DE OLIVEIRA JÚNIOR

UMA PROPOSTA DE CONTROLADOR-PREDITOR BASEADO EM OBSERVADORES  
AUMENTADOS PARA SISTEMAS COM ATRASO NA ENTRADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica

Aprovada em: 15 de Fevereiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Bismark Claure Torrico (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos  
Universidade Federal da Bahia (UFBA)

## **AGRADECIMENTOS**

Por sua importância, direciono meu primeiro agradecimento aos meus pais, José Raimundo e Odete. Agradeço por todo o esforço em relação à minha educação formal, assim como para os ensinamentos em relação ao mundo e a realidade das coisas. Em especial à minha mãe pelo exemplo de resiliência.

À minha família e amigos, pelos momentos agradáveis e pela compreensão em minha ausência.

Ao Prof. Dr. Bismark Claire Torrico e ao Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira por me orientarem em minha dissertação de mestrado e pelos ensinamentos ao longo todo o caminho.

Aos amigos do GPAR pelo apoio, conversas e momentos.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap), pelo financiamento da pesquisa de mestrado via Edital FUNCAP No 06/2021 - Energias Renováveis (Processo 09779122/2021).

Agradeço a banca examinadora pela disponibilidade e, com isso, permitir que eu prossiga tranquilamente com meu trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, uma estrutura de controlador-preditor baseada em observadores aumentados é proposta para sistemas com atraso na entrada. Uma análise das características e desempenho da proposta é realizada através de uma nova metodologia baseada em perturbações filtradas, além disso são realizadas comparações com outras técnicas da literatura. Esta estratégia permite atenuar completamente perturbações de dinâmica conhecida em regime estacionário a partir da saída do sistema e também é capaz de lidar com alguns tipos de erro de modelagem, no processo ou na dinâmica da perturbação. Para isso, é utilizado um observador de estados aumentados que inclui a dinâmica de um filtro e um preditor que utiliza os estados observados para obter predições no tempo e, dessa forma, compensar o atraso do ramo de realimentação. A sintonia é feita a partir da obtenção do ganho de realimentação de estados e do ganho do observador, que podem ser obtidos utilizando um procedimento de síntese baseada em LMIs definidas no trabalho. A sintonia proposta é obtida usando uma aproximação do sistema em malha fechada através de equações diferenciais atrasadas e, então, usando funcionais de Lyapunov-Krasovski obtém-se um problema de otimização convexo que reduz a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da relação perturbação saída, dessa forma obtém a sintonia e garante a estabilidade do sistema em malha fechada. A estrutura de controle proposta é comparada às técnicas apresentadas e, mesmo sendo mais simples e versátil, possui desempenho superior.

**Palavras-chave:** Sistemas com atraso de transporte. Observador aumentado. Realimentação baseada em preditor. Atenuação de perturbação.

## ABSTRACT

In this work, a control structure based on augmented observer with a scheme predictor is proposed for systems with input delay. An analysis of the characteristics and performance of the proposal is carried out through a new methodology based on filtered perturbations, moreover comparisons are made with other techniques in the literature. This strategy allows to mitigate completely perturbations of known dynamics at steady state from the output of the system and is also capable of dealing with some types of modeling error, either in the process or in the disturbance dynamics. For this, an augmented state observer is used that includes a filter dynamics and a predictor that uses observed states to obtain predictions in time and therefore compensates the feedback branch delay. Tuning is done from obtaining the state feedback gain and the observer gain, which can be obtained using a synthesis procedure based on LMIs defined in the work. The proposed tuning is done using a closed-loop system approximation through to consider differential delay equations and then, using Lyapunov-Krasovski functions, it's obtained a convex optimization problem that reduces the  $\mathcal{H}_\infty$  norm of relation of the perturbation to output, therefore it obtains the tuning and guarantees the stability of the closed-loop system. The proposed control structure is checked against presented techniques and, even though it is simpler and more versatile, has superior performance.

**Keywords:** Time-Delay Systems. Augmented observer. Predictor-based feedback. Disturbance attenuation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura de realimentação ideal . . . . .	18
Figura 2 – Estrutura do preditor de Smith. . . . .	18
Figura 3 – Estrutura do preditor de Smith (SP) . . . . .	34
Figura 4 – Estrutura conceitual do preditor de Smith filtrado . . . . .	35
Figura 5 – Sistema de controle equivalente em malha fechada . . . . .	37
Figura 6 – Sistema de controle 2DOF em malha fechada . . . . .	37
Figura 7 – Estrutura de implementação para o FSP . . . . .	39
Figura 8 – Estrutura geral de DTCs . . . . .	40
Figura 9 – Estrutura conceitual do SFSP . . . . .	41
Figura 10 – Resposta em frequência $\frac{e}{q}$ de estimação dos observadores. . . . .	60
Figura 11 – Erro de estimação na simulação para perturbações convenientes. . . . .	60
Figura 12 – Resposta em frequência $\frac{e}{q}$ dos observadores. . . . .	75
Figura 13 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante. . . . .	75
Figura 14 – Resposta em frequência $\frac{e}{q}$ dos observadores. . . . .	78
Figura 15 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante. . . . .	78
Figura 16 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante com filtro harmônico. . . . .	79
Figura 17 – Resposta em frequência $\frac{e(z)}{q(z)}$ do observador caso discreto. . . . .	80
Figura 18 – Diagrama de blocos do esquema controlador-observador. . . . .	87
Figura 19 – Resposta em frequência do sistema em malha fechada. . . . .	88
Figura 20 – Respostas no tempo da saída e do erro de estimação para perturbação constante. . . . .	88
Figura 21 – Resposta em frequência do sistema em malha fechada. . . . .	93
Figura 22 – Respostas no tempo da saída e do erro de estimação para perturbação constante. . . . .	94
Figura 23 – Diagrama de blocos do esquema de (LÉCHAPPÉ <i>et al.</i> , 2015a) e (WANG; WU, 2022). . . . .	97
Figura 24 – Diagrama de blocos para controlador-preditor baseado em observador aumentado. . . . .	104
Figura 25 – Relação do módulo da perturbação para a norma euclidiana do erro de predição . . . . .	108
Figura 26 – Resposta no tempo do módulo do erro de predição . . . . .	108
Figura 27 – Relação do módulo da perturbação para a norma euclidiana do erro de predição . . . . .	109



Figura 28 – Diagrama de blocos para controlador-preditor baseado em observador aumentado. . . . .	116
Figura 29 – Respostas da simulação no tempo. . . . .	118
Figura 30 – Resposta em frequência para o erro de predição com relação a perturbação. .	119
Figura 31 – Resposta em frequência $\frac{x(j\omega)}{q(j\omega)}$ . . . . .	120
Figura 32 – Resposta no tempo dos estado para perturbação $q_1(t+h)$ . . . . .	122
Figura 33 – Resposta no tempo dos estado para perturbação $q_2(t)$ . . . . .	122
Figura 34 – Erro de predição no tempo . . . . .	123
Figura 35 – Resposta em frequência $\frac{x(j\omega)}{q(j\omega)}$ . . . . .	124
Figura 36 – Resposta em frequência $\frac{e_p(j\omega)}{q(j\omega)}$ . . . . .	125
Figura 37 – Estrutura da implementação SFSP . . . . .	126
Figura 38 – Respostas da simulação no tempo . . . . .	128

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dinâmicas clássicas para o filtro de perturbação: contínuo . . . . .	68
Tabela 2 – Dinâmicas clássicas para o filtro de perturbação: discreto . . . . .	69



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão $n$
$\ x\ _2$	Norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}$
$t$	Tempo $t \in \mathbb{R}^+$
$k$	Amostra ou tempo discreto $k \in \mathbb{N}$
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal da função $x(t)$
$x(t+h t)$	Estado predito no instante $t+h$ calculado no instante $t$
$\hat{x}$	Estado estimado ou observado
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	Transformada de Laplace da função $x(t)$
$G_{qy}(s)$	Função de transferência com entrada a perturbação $q$ e saída o sinal $y$
$\frac{q(j\omega)}{y(j\omega)}$	Resposta da função de transferência ao varrer todos os valores de frequência no domínio contínuo.
$\frac{q(j\Omega)}{y(j\omega)}$	Resposta da função de transferência ao varrer todos os valores de frequência até $\frac{\pi}{T_s}$ no domínio discreto.
$F(s) _{s=0}$	Valor pontual da função $F(s)$ ao aplicar $s = 0$
$\mathcal{Z}\{x(k)\}$	Transformada $\mathcal{Z}$ da função $x(k)$
$s$	Variável complexa da transformada de Laplace
$z$	Variável complexa da transformada $\mathcal{Z}$
$T_s$	Tempo de amostragem
$\text{num}\{G(s)\}$	Valor numérico dos índices que compõe o polinômio em $s$ do numerador.
$\text{den}\{G(s)\}$	Valor numérico dos índices que compõe o polinômio em $s$ do denominador.
$\omega$	Frequência em radiano por segundo
$\Omega$	Frequência em radiano por amostra
$\Delta$	Filtro de perturbações

$   *   $	Notação para norma vetorial
$  f  _{l_2^{loc}}$	Norma local $l_2$ do vetor $f(k)$ , dada por $\sqrt{\sum_{\tau=0}^k   f(\tau)  ^2}$
$S_n^+$	Conjunto das matrizes positiva definidas.
$\text{diag}\{x_1, x_2, x_3\}$	Matriz diagonal com os elementos $x_1, x_2, x_3$ dispostos em $a_{ii}$ .
$\mathbb{M}\{\cdot\}$	Realização mínima em espaço de estados para um sistema LTI.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Estratégias clássicas de controle . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivo . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>1.4</b>	<b>Trabalhos publicados . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.5</b>	<b>Estrutura do texto . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações Diferenciais Atrasadas . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Exemplo . . . . .</i>	<i>26</i>
<b>2.2</b>	<b>Sistemas com atraso na entrada . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.3</b>	<b>Estabilidade . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.3.1</b>	<i>O que são LMIs . . . . .</i>	<i>28</i>
<b>2.3.2</b>	<i>Um método baseado em frequência . . . . .</i>	<i>28</i>
<b>2.3.3</b>	<i>Critério no domínio do tempo . . . . .</i>	<i>29</i>
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Preditor de Smith e variações . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.1.1</b>	<i>Preditor de Smith filtrado (FSP) . . . . .</i>	<i>35</i>
<b>3.1.1.1</b>	<i>Projeto do FSP . . . . .</i>	<i>38</i>
<b>3.1.2</b>	<i>Preditor de Smith generalizado (GSP) . . . . .</i>	<i>39</i>
<b>3.1.3</b>	<i>Preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP) . . . . .</i>	<i>40</i>
<b>3.1.3.1</b>	<i>Projeto do SFSP . . . . .</i>	<i>42</i>
<b>3.2</b>	<b>Atribuição do espectro finito (FSA) . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3.2.1</b>	<i>O preditor de Artstein . . . . .</i>	<i>45</i>
<b>3.2.2</b>	<i>Técnicas de predição para rejeição de perturbação aprimorada para siste- mas LTI com atraso de entrada . . . . .</i>	<i>45</i>
<b>4</b>	<b>OBSERVADORES DE ESTADOS . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>O observador de Luenberger . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>4.1.1</b>	<i>Sistemas contínuos . . . . .</i>	<i>49</i>
<b>4.1.2</b>	<i>Sistemas discretos no tempo . . . . .</i>	<i>51</i>

<b>4.1.3</b>	<b>Análise de desempenho</b>	53
4.1.3.1	Norma $\mathcal{H}_2$	54
4.1.3.2	Norma $\mathcal{H}_\infty$	55
4.1.3.3	D-Estabilidade quadrática	57
4.1.3.4	Resposta em frequência	58
4.1.3.5	Exemplo	59
<b>4.2</b>	<b>Observadores aumentados</b>	61
4.2.1	Observadores aumentados: Tempo contínuo	61
4.2.2	Observadores aumentados: Tempo Discreto	64
4.2.3	Análise de desempenho	67
4.2.3.1	Norma $\mathcal{H}_2$	68
4.2.3.2	Norma $\mathcal{H}_\infty$	70
4.2.3.3	D-Estabilidade quadrática	71
4.2.3.4	Resposta em frequência	72
4.2.3.5	Exemplo	72
4.2.3.5.1	Perturbações constantes	73
4.2.3.5.2	Perturbações senoidais	75
4.2.3.5.3	Perturbações harmônicas	78
<b>5</b>	<b>ESTRATÉGIAS DE CONTROLE OBSERVADOR-PREDITOR</b>	82
5.1	Controlador baseado em observador aumentado: Caso contínuo	82
5.1.1	Exemplo	86
5.2	Controlador baseado em observador aumentado: Caso Discreto	88
5.2.1	Exemplo	92
5.3	Controlador baseado em preditor	94
5.4	Controlador-preditor baseado em observador aumentado: Caso contínuo	97
5.4.1	Nova proposta de controlador	100
5.4.1.1	Exemplo	105
5.5	Controlador-preditor baseado em observador aumentado: Caso discreto	110
5.5.1	Nova proposta de controlador	112
5.5.1.1	Exemplo	117
<b>6</b>	<b>NOVA PROPOSTA DE CONTROLADOR PREDITOR BASEADO EM OBSERVADOR AUMENTADO</b>	120

<b>6.1</b>	<b>O preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP)</b> . . . . .	<b>124</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>129</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>131</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>135</b>
	<b>APÊNDICE A – Matrizes de solução das LMIs usadas nos exemplos</b> . . .	<b>135</b>
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>142</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de controladores é, em geral, uma tarefa desafiadora. A diversidade e complexidade dos sistemas reais geram uma série de dificuldades que não podem ser superadas por uma estratégia única de controlador (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Em geral, os processos são de natureza não linear, porém em muitos casos eles apresentam comportamento linear em torno de um ponto de operação. Dessa forma, podem-se utilizar soluções baseadas em controladores lineares nesses casos (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Uma das principais dificuldades ao se projetar um sistema de controle é, sem dúvida, a presença de atrasos de tempo, principalmente se o sistema a ser controlado for instável em malha aberta. O atraso de transporte é um operador linear, mas ainda assim dificulta de forma expressiva o projeto de controladores, principalmente pela complexidade da análise da realimentação que provoca uma influência negativa nas propriedades do sistema em malha fechada. Atrasos de transporte diminuem a margem de fase do sistema e não podem ser expressos como uma função de transferência racional, aumentando a complexidade de projeto e análise do sistema de controle (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Vale ressaltar que os atrasos de transporte não são necessariamente intrínsecos ao processo em si, mas podem ser originados durante a detecção e/ou atuação. Dessa forma, em maior ou menor grau a dinâmica do atraso está presente na maioria dos sistemas de controle. Os atrasos citados surgem principalmente em sistemas de controle implementados digitalmente devido à quantização dos sinais em amplitude e em amostras. Podem ser introduzidos no modelo do sistema para modelar processos de alta ordem por um modelo de ordem inferior com atraso de transporte. Em geral, os sistemas de controle podem conter atrasos não apenas na entrada e/ou saída do sistema, mas também nos estados (ZHONG, 2006; FRIDMAN, 2014).

Dessa forma, este trabalho tem foco na análise e projeto de controladores lineares baseados em modelos aplicados para sistemas com atrasos de transporte de entrada e/ou saída. Assim, é proposta uma nova topologia de controlador e, então, são investigadas regras de sintonia para rastreamento, rejeição de perturbações, atenuação de ruído e robustez. Por meio de simulações, mostra-se que as abordagens propostas apresentam melhores resultados no controle de processos com atraso de transporte com relação à outros trabalhos recentes da literatura.

## 1.1 Estratégias clássicas de controle

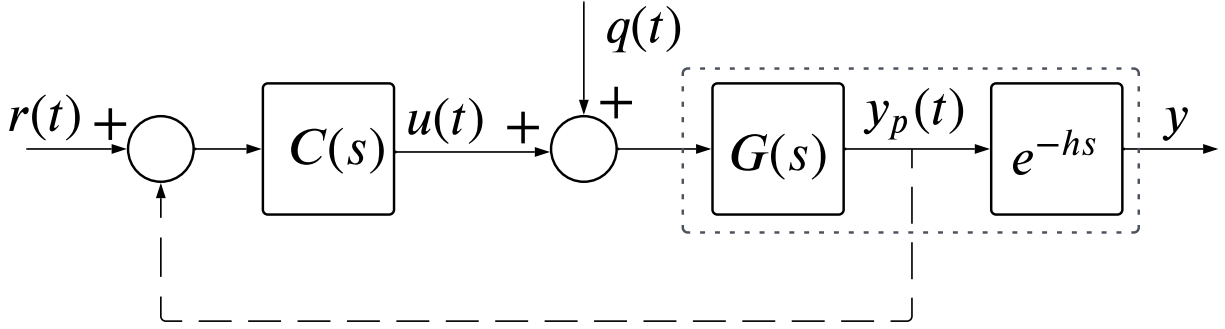
Com base na literatura, foi possível observar aplicações de controladores clássicos como proporcional-integral (PI) e proporcional-integral-derivativo (PID) para processos com atraso de transporte, porém seu desempenho tem forte dependência do valor do atraso e é penalizado por atrasos de tempo longos (SKOGESTAD, 2003; ZHONG, 2006; MERCADER; NOS, 2017; SEER; NANDONG, 2017; BEGUM *et al.*, 2018). Em processos com atraso de transporte longos, o comportamento do atraso é expressivo e possui as seguintes características: os efeitos das perturbações que afetam processo podem ser detectadas apenas após o tempo do atraso; o efeito da ação de controle demora para ser notado na variável controlada; a ação de controle atua para corrigir uma situação que se originou tempos atrás (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Durante as últimas décadas, a área de controle de sistemas com atraso de transporte tem se tornado o objetivo de diversos pesquisadores e, com isso, pode-se obter avanços consideráveis no desenvolvimento de ferramentas de análise e projeto. Alguns dos trabalhos de destaque são os consolidados algoritmos de controle preditivo descritos por Camacho e Bordons (2007), o preditor de Smith (SP, do inglês *Smith Predictor*) de Smith (1957), bem como suas extensões em Normey-Rico e Camacho (2007), Normey-Rico e Camacho (2009), Pagano *et al.* (2001), Zhong (2006), Torricco *et al.* (2013), Torricco *et al.* (2021), García e Albertos (2013), Sanz *et al.* (2018) e a técnica de atribuição de espectro finito (FSA, do inglês *Finite spectrum assignment*) apresentadas inicialmente por Manitius e Olbrot (1979) ou a redução de modelo “Artstein” em Artstein (1982), podem ser consideradas como as estratégias de controle eficazes e de base desenvolvidas nos últimos anos (GU; NICULESCU, 2003; RICHARD, 2003).

A técnica FSA e o SP possuem como característica em comum a realização da compensação de atraso com base em uma previsão da saída (ou estado) de um modelo de sistema, o qual permite sintonizar o controlador baseando-se no modelo sem atraso. Essa estratégia tem como objetivo a retirada do atraso de transporte no ramo de realimentação para que um controlador  $C(s)$  possa ser projetado para o sistema sem atraso equivalente. A Figura 1 representa a estratégia citada.

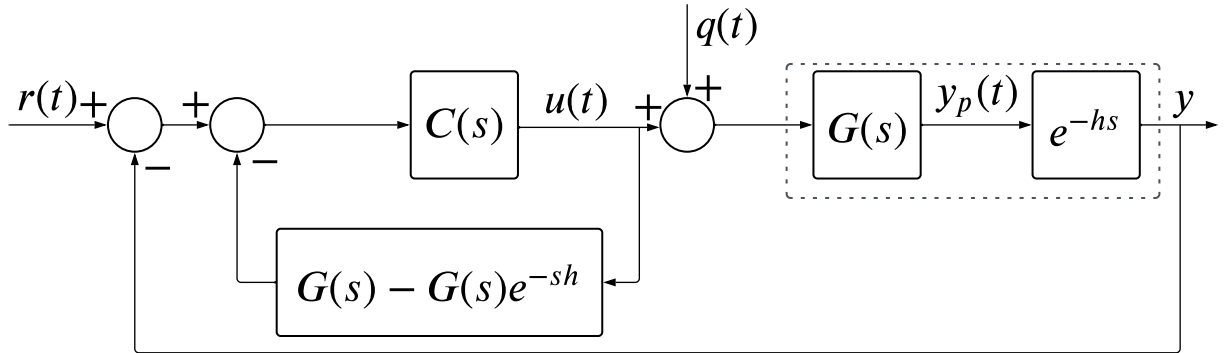
O resultado, em malha fechada, é uma resposta atrasada de um sistema de controle sem atraso, como se o atraso existisse apenas na saída. Porém, o ramo tracejado da Fig. 1 na prática não está disponível e, assim, uma estrutura realizável foi proposta no SP, a qual está representada na Fig. 2. Para o caso em que não há incertezas de modelagem ou perturbação, ambas as

Figura 1 – Estrutura de realimentação ideal



Fonte: O autor.

Figura 2 – Estrutura do preditor de Smith.



Fonte: O autor.

estruturas apresentam a mesma resposta, pois  $y_p(s) = G(s)u(s) = (G(s) - G(s)e^{-sh})u(s) + y(s)$  e, então, pode-se obter o sinal de controle como  $u(s) = C(s)[r(s) - y_p(s)]$ . Chegando ao consagrado resultado de que a configuração do SP permite reconstruir uma saída sem atraso de modo que o controlador possa ser projetado simplesmente para o modelo rápido  $G(s)$  sem atraso que, por consequência, o elemento de atraso é removido dos denominadores de todas as funções de transferência de entrada-saída do diagrama 2, obtidas como

$$G_{ry}(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}e^{-sh}, \quad (1.1)$$

$$G_{qy}(s) = \left(1 - \frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1 + C(s)G(s)}\right) G(s)^{-sh}. \quad (1.2)$$

Se o processo a ser controlado não for estável em malha aberta, os esquemas de controle resultantes não atendem à condição de estabilidade interna, porque os polos de  $(G(s))$  não podem ser removidos e, portanto, são inviáveis para essa aplicação. Os processos integrativos não rejeitam perturbações constantes mesmo que o controlador tenha ação integral e, em geral, a rejeição de distúrbios tem severas limitações de projeto. Assim, a estrutura do SP é aplicável

apenas para processos estáveis em malha aberta. A rejeição de distúrbios tem sido um problema, que permanece sendo uma questão de pesquisa. Uma vez que a maioria dos processos industriais opera em bases regulatórias, a rejeição de perturbações torna-se o objetivo central de muitos esquemas de controle.

Para contornar esse problemas foram propostas diferentes modificações do esquema original do SP, genericamente chamado de compensadores de atraso de transporte (DTCs, do inglês *dead-time compensator*) (ZHONG, 2006; NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009; TORRICO *et al.*, 2013; TORRICO *et al.*, 2021; SANZ *et al.*, 2018), bem como diferentes formas de implementação numericamente estáveis da integral de predição usada na técnica FSA (MONDIE; MICHIELS, 2003; ZHONG, 2004; ZHONG, 2005).

As modificações do SP foram realizadas com o objetivo de melhorar limitações do esquema original, resolvendo esses problemas de diferentes maneiras. Uma dessas modificações foi proposta por Watanabe e Ito (1981) que melhora a rejeição de distúrbios e permite controlar processos integradores e instáveis. Em Matausek e Micic (1996) foi proposta uma estrutura de preditor de Smith modificada para processos integradores com sintonia simples. Uma das modificações expressiva é denominada como preditor de Smith filtrado (FSP, do inglês *filtered Smith predictor*) baseado na inclusão de um filtro de robustez no caminho de realimentação que permite controlar sistemas de ordem superior de qualquer natureza e, ainda, mantendo uma robustez sintonizável (NORMEY-RICO *et al.*, 1997; NORMEY-RICO; CAMACHO, 1999; NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009). Um compensador de tempo morto denominado preditor de Smith generalizado (GSP, do inglês *generalized Smith predictor*), desenvolvido inicialmente para processos estáveis e integradores considerando um modelo reduzido do processo, foi proposto em García e Albertos (2008) que posteriormente incluiu processos instáveis em malha aberta no trabalho García e Albertos (2013) e, então, processos de qualquer ordem em Sanz *et al.* (2018). Um outro compensador que é capaz de lidar com processos de qualquer natureza e ordem é o preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP, do inglês *simplified filtered Smith predictor*) descrito em Torrico *et al.* (2013), Torrico *et al.* (2021) que também utiliza um filtro de robustez, porém necessita apenas de um ganho de realimentação como controlador primário. Nos trabalhos Torrico *et al.* (2019), Torrico *et al.* (2021), a formulação do SFSP foi apresentada em espaço de estados no domínio do tempo contínuo e no domínio do tempo discreto, respectivamente, sendo capazes de controlar processos tão diversos quanto o FSP. Esses controladores apresentam estruturas específicas de implementação que garantem estabilidade interna.

Paralelamente, o desafio de desenvolver um controlador capaz de lidar com processos com atraso de transporte foi enfrentado com soluções no domínio do tempo. A técnica pioneira do FSA apresenta em Manitius e Olbrot (1979) é formulada no domínio do tempo e constrói a predição do estado  $\hat{x}(t+h|t)$ <sup>1</sup> e, a partir dele, pode-se realimentar o estado usando um ganho  $\mathbf{K}$ , obtendo uma lei de controle linear que resulta em um sistema em malha fechada livre de atraso no ramo de realimentação. A formulação do FSA é realizada em espaço de estados e, naturalmente, permite lidar com processos de alta ordem e, caso possua o mesmo valor de atraso na relação entrada-saída em todos os canais, é capaz de lidar com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

O método de redução de Artstein (1982) permite obter estimações e predições do estado através da uma redução da solução da equação de estado e, então, realimentar o estado predito usando a técnica FSA. Diversos trabalhos utilizaram da ideia base de predição baseada no modelo para obter controladores-preditores. No entanto, nos últimos anos nota-se um destaque para o tema após as análises apresentadas em Léchappé *et al.* (2015a), onde tem-se o foco na capacidade de reconstruir o estado e sua predição, abdicando da escolha do esquema de controle para um outra etapa. Nele, foi utilizado o método de Artstein com a inclusão de uma estimativa das perturbações. O método demonstrou sucesso em suprimir uma classe de perturbações de dinâmica conhecida e em reduzir eficientemente erros de predição para outros diversos tipos de perturbações. Posteriormente, em Santos (2016) utiliza-se a abordagem com foco na síntese de controle baseada no esquema preditor-observador.

No trabalho de Léchappé *et al.* (2015b), utiliza-se um observador para estimar o estado e, então, realizar a predição para perturbações desconhecidas. A partir da predição propõe-se controladores clássicos PI-PID para realizar o controle dos processos.

Outro método na literatura, proposto por Sanz *et al.* (2016) utiliza essa abordagem incluindo ao método de Artstein uma estimativa das perturbações através de um filtro passa baixa denominado diferenciador de rastreamento proposto em Zhong e Rees (2004). Dessa forma, tem-se a estimativa do estado e também da perturbação e, nesse trabalho, é construído a predição do estado e da perturbação estimadas. Isso posto, pode-se obter um esquema de controlador-observador que obtém resultados significativamente bons para os objetivos de atenuação de perturbações desconhecidas no erro de observação e também na saída. Entretanto, estas propostas são dedicadas a sistemas lineares de tempo contínuo e supõe-se, ainda, que o estado do sistema

---

<sup>1</sup> A notação indica o estados estimado no instante  $(t+h)$  calculado no instante  $t$

está disponível para medição e não há incerteza de modelagem o que torna o uso de esquema de controle bastante limitado em questões práticas (WILLIAMS; LAWRENCE, 2007).

Os trabalhos de Hao *et al.* (2017) e Wang e Wu (2022) formulam as ideias de Léchappé *et al.* (2015a) e Santos (2016) para o domínio de tempo discreto, respectivamente. Neles são realizadas análises compatíveis com as formulações para sistemas amostrados e, também, são realizadas generalizações para o esquema de estimação de perturbações através da comparação entre a predição atrasada e a saída.

Por fim, seguindo a metodologia do trabalho recente de Castillo e Garcia (2021), que apresenta a proposta de observadores de ordem elevada para estimar o estado do sistema, em que a nova variável de estado observada pode ser dividida em dois blocos: o primeiro composto pelos estados do processo e o segundo representa os estados que constroem a perturbação através de uma série de Taylor usando o erro de estimação e suas derivadas. O método é adaptado para sistemas de tempo discreto em Alves Lima *et al.* (2022) onde utiliza-se uma série de Newton, do cálculo de diferenças finitas, com o mesmo objetivo. Ambas as estratégias são capazes de fornecer uma observação e predição exata dos estados do sistema em um tempo finito para a classe de perturbações integrativas (degrau, rampa, parábola e etc) e obtém, em muitos casos, desempenho superior aos controladores preditores publicados nos últimos anos para perturbações diversas. O estado da artes dessas técnicas e seus fundamentos foram sintetizados no trabalho de Deng *et al.* (2022).

No entanto, o desempenho dos esquemas apresentados dependem diretamente da característica dinâmica da perturbação seja para tratar dinâmicas conhecidas ou gerais. Assim, as estruturas de controlador baseadas em observador apresentam o desafio da necessidade de informações sobre a dinâmica das perturbações assim como apresentam a tendência de produzir controladores de ordem elevada. De certo modo, nas condições favoráveis citadas, esses esquemas obtêm desempenho expressivo, rejeitando completamente as perturbações no erro de estimação e/ou na saída com velocidade de convergência sintonizável.

Também existem desafios quanto ao preditor, pois estes dependem diretamente da qualidade do observador e, para o caso de sistemas contínuos não-estáveis em malha aberta, necessitam da implementação numericamente estável da integral de predição para o esquema FSA.

## 1.2 Motivação

Tem-se como consenso que as técnicas baseadas em preditor formuladas tanto para o domínio do tempo quanto para o domínio da frequência obtiveram êxito em lidar com processos com atraso de transporte. Os esquemas no domínio da frequência apresentam formulação intuitiva e sintonia simples e, após o esquema de predição, usam controladores tão simples como os clássicos PI-PID como no GSP e FSP ou um ganho de realimentação no SFSP. Porém, os sinais dos estados estimados e preditos não estão disponíveis na estrutura. Esses sinais são úteis pois podem ser usados na detecção de falhas (PATTON; CHEN, 1993; FRANK; DING, 1997), assim como garantir os limites de operação para processos que estão relacionados com estados não medidos.

Para os controladores do esquema preditor-observador, tem-se disponível técnicas modernas de análise e sintonia como as baseadas em otimização convexa na forma de LMIs e, de forma intrínseca, tem-se disponível a estimação dos estados e suas predições. A formulação em espaço de estados permite estender o resultado de forma natural para sistemas de ordem elevada e com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Entretanto, os esquemas de estimação de perturbações e as análises de convergências são mais complexas e pouco intuitivas quando comparados ao esquema clássico, principalmente na necessidade de implementação numericamente estável da integral de predição para o esquema FSA.

Nesse contexto, a análise das técnicas de controle baseado em preditor e a conexão entre as técnicas no domínio do tempo e domínio da frequência são as motivações principais deste trabalho. O foco dos exemplos e análises será sobre o SFSP, pois as contribuições do texto foram baseadas nesse controlador.

## 1.3 Objetivo

Esse trabalho propõe uma nova topologia para o SFSP baseado em um esquema preditor-observador que mantém as bem conhecidas vantagens do SFSP clássico e que permite utilizar técnicas modernas de sintonia baseadas em Inequações Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), e tem como objetivo avaliar a proposta frente às técnicas da literatura, comparando as equivalências e o desempenho das propostas.

Os objetivos deste trabalho podem ser resumidos da seguinte forma:

1. Melhorar a atenuação de distúrbios do controlador-preditor usando observadores de distúr-

bios,

2. Desenvolver condições de estabilidade e procedimentos de projeto que possam ser usados para ajustar intuitivamente os controladores propostos.

#### **1.4 Trabalhos publicados**

Durante o Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, o autor desta dissertação participou como autor dos seguintes artigos científicos:

1. Novo método de implementação estável para o preditor de Smith filtrado simplificado XIV IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON) - 2021;
2. Novo método de sintonia do preditor de Smith filtrado simplificado para processos de primeira ordem. XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) - 2022.

#### **1.5 Estrutura do texto**

Este texto está organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 introduz o tema através de uma breve revisão bibliográfica e apresenta o propósito do trabalho; o Capítulo 2 é dedicado à fundamentação teórica com notações e formalismos que são usados no texto; esquemas de controle da literatura são apresentados e avaliados 3; nos Capítulos 4 e 5 são apresentados, propostos e avaliados observadores e controladores baseados em observador, respectivamente; em sequência, no Capítulo 6, é demonstrada a equivalência do esquema preditor-observador proposto com o SFSP; por fim, no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais e as propostas de trabalhos futuros.



## 2 SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE

Sistemas que incluem a dinâmica do atraso de transporte são denominados também como sistemas de atraso de tempo (TDSs, do inglês *Time-delay systems*), e pode ser modelados adequadamente por uma classe de equações diferenciais funcionais de dimensão infinita, diferente das clássicas equações diferenciais ordinárias (EDOs). A análise de estabilidade de TDSs resultantes de sistemas em malha fechada envolve vários desafios. Por exemplo, possuem um número infinito de polos, o que torna complicada a sua análise no domínio da frequência. Nesse capítulo, são realizadas abordagens no domínio do tempo através de equações diferenciais funcionais e no domínio da frequência através de funções de transferência. A generalização do método direto de Lyapunov para TDSs é apresentada, conhecida como teorema de Lyapunov-Krasovskii. Esta abordagem leva a condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais lineares, para as quais também é dada uma breve introdução.

### 2.1 Equações Diferenciais Atrasadas

No contexto de controle para sistemas com atraso de transporte, está consagrado o uso de equações diferenciais funcionais para descrever o comportamento dinâmico de sistemas em malha fechada. Nestes tipos de funções, a derivada do estado  $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  não depende apenas do instante de tempo  $t \in \mathbb{R}$ , mas também de toda uma faixa de valores passados  $h > 0$ . O modelo geral de uma equação com essas características pode ser representado como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1x(t-h), \\ x(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

em que as matrizes do sistema 2.1 são constantes e apresentam dimensões:  $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ . Em contraste com as EDOs, para encontrar a solução  $x(t)$  ao invés de um valor inicial  $x(0)$ , uma função de valor inicial  $x(t) = \phi(t)$  é necessária para calcular a solução no intervalo  $[0, h]$ . Portanto, uma solução apropriada para um TDS é dado por uma função

$$x_t : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} : \quad x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0]. \quad (2.2)$$

De fato, equações diferenciais parciais do tipo transporte podem ser usadas para modelar o fenômeno de atraso (FRIDMAN, 2014).

Então, a Eq. 2.2 é solução para 2.1 apenas na faixa de tempo  $t \in [0, h]$ . Porém, a solução para a próxima faixa de comprimento  $h$  que se estende  $t \in [h, 2h]$  pode ser obtida

considerando

$$x_t : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} : \quad x_t(\alpha) = x(t + \alpha), \quad \forall \alpha \in [0, h], \quad (2.3)$$

ou seja, através de uma nova equação que utiliza o resultado anterior  $x_t : [0, h]$  como condição inicial para a solução em  $t \in [h, 2h]$ . Obtendo um procedimento de solução em passos  $t \in [2h, 3h]$ ,  $t \in [3h, 4h]$ , que pode ser generalizado para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  ao realizar passos suficientes.

Para os sistemas amostrados com atraso de transporte, a solução é consideravelmente mais simples e pode ser modelada pela seguinte equação

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{A}_1x(k-h), \\ x(k) = \phi(k) \quad \forall k \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.4)$$

onde as matrizes do sistema 2.1 são constantes e apresentam dimensões:  $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ , o estado  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  e as amostras  $k \in \mathbb{N}$ . Novamente, a condição inicial para o estado  $x(k)$  requer uma função de valor inicial  $x(k) = \phi(k)$  que constitui  $h$  amostras e é necessária para obter a solução geral do sistema.

A solução pode ser obtida por substituição direta na equação recursiva, obtendo

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{A}_1x(k-h), \\ x(1) = \mathbf{A}\phi(0) + \mathbf{A}_1\phi(-h), \\ x(2) = \mathbf{A}^2\phi(0) + \mathbf{A}\mathbf{A}_1\phi(-h) + \mathbf{A}_1\phi(1-h), \\ \vdots \\ x(h) = \mathbf{A}^h\phi(0) + \sum_{i=1}^h [\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_1\phi(-i)], \end{cases} \quad (2.5)$$

considere que  $\phi_2(k-h) = x(k) \forall k \in [0, h]$ , ou seja, uma condição inicial para a solução de  $x(k)$  no intervalo  $[h, 2h]$  e, assim,

$$\begin{cases} x(h+1) = \mathbf{A}\phi_2(0) + \mathbf{A}_1\phi(-h), \\ x(h+2) = \mathbf{A}^2\phi_2(0) + \mathbf{A}\mathbf{A}_1\phi_2(-h) + \mathbf{A}_1\phi_2(1-h), \\ \vdots \\ x(2h) = \mathbf{A}^h\phi_2(0) + \sum_{i=1}^h [\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_1\phi_2(-i)], \end{cases} \quad (2.6)$$

resultando em uma solução por método de passos análogo ao caso de tempo contínuo.

### 2.1.1 Exemplo

Em Fridman (2014), tem-se a análise do TDS  $\dot{x}(t) = -x(t-h)$  com  $\phi(t) = 1, \forall t \in [-h, 0]$  e atraso  $h = 1$ . A solução para esse sistema pode ser realizada como

$$t \in [0, h], \quad \dot{x}(\theta) = -\phi(t-h) = -1, \quad (2.7)$$

que tem solução  $x(t) = 1-t, \forall t \in [0, h]$ . Para a próxima faixa

$$t \in [h, 2h], \quad \dot{x}(\theta) = -x(\theta-h) = -(1-\theta+h), \quad (2.8)$$

obtendo  $x(t) = t^2/2 - 2t + 3/2, \forall t \in [h, 2h]$ .

Para obter uma solução geral para 2.1, pode-se definir a matriz transição de estados  $\Phi(t)$  que satisfaz a equação

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t) + \mathbf{A}_1\Phi(t-h), \quad (2.9)$$

com condição inicial  $\Phi(t) = 0, \forall t < 0$  e  $\Phi(t) = \mathbf{I}, t = 0$ . Assim, obtendo a solução descrita em Bellman *et al.* (1963) como

$$\dot{x}(t) = \Phi(t)\phi(0) + \int_{-h}^0 \Phi(t-\theta-h)\mathbf{A}_1\phi(\theta)d\theta, \quad (2.10)$$

e, na frequência aplicando a transformada de Laplace, definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-sh}f(t)dt \quad (2.11)$$

usando equivalência entre as Eq. 2.10 e Eq. 2.1, obtém-se  $X(s)$  realizando

$$sX(s) - \phi(0) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{A}_1 \left[ e^{-sh}X(s) + \int_{-h}^0 e^{-s(\theta+h)}\phi(\theta)d\theta \right], \quad (2.12)$$

reorganizando de forma conveniente,

$$\underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}_1 e^{-sh})}_{\Delta(s)} X(s) = \phi(0) + \int_{-h}^0 e^{-s(\theta+h)}\phi(\theta)d\theta, \quad (2.13)$$

confirmado que o sistema 2.1 tem infinitos polos, pois  $\Delta^{-1}(s)$  tem uma equação transcendental em  $s$  no seu denominador.

De forma equivalente, para sistemas amostrados a integral de convolução se torna um somatório e o  $\Delta(z)$  apresenta ordem  $n_x + h$  resultante da ordem dos estados e tamanho do atraso.

## 2.2 Sistemas com atraso na entrada

O efeito do atraso de transporte frequentemente se manifesta na entrada do sistema, seja por uma característica do atuador, seja devido a sensores que levam o atraso para o processamento do sinal de controle. Essa característica pode ser modelada por um sistema em espaço de estados com estrutura

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2 u(t-h) + \mathbf{B}_1 q(t-h), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}_1 q(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

em que, o tempo  $t \in \mathbb{R}$ , os estados  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , o sinal de controle  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , a perturbação  $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  a saída  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ . As matrizes do sistema 2.14 são constantes e apresentam dimensões:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_q)}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)}$  e  $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_q)}$ . Para os sistemas amostrados, tem-se

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_2 u(k-d) + \mathbf{B}_1 q(k-d), \\ y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}_1 q(k), \end{cases} \quad (2.15)$$

com dimensões análogas ao caso contínuo. O atraso de transporte também pode afetar a saída e, então, pode ser modelado como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{B}_1 q(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t-h) + \mathbf{D}_1 q(t), \end{cases} \quad (2.16)$$

e para modelos amostrados

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_2 u(k) + \mathbf{B}_1 q(k), \\ y(k) = \mathbf{C}x(k-d) + \mathbf{D}_1 q(k), \end{cases} \quad (2.17)$$

ambas as abordagens possuem a mesma função de transferência para os sistemas SISO abordados nesse trabalho. As funções de transferência da entrada de controle e entrada de perturbação para saída são

$$\begin{cases} \frac{Y(s)}{U(s)} = G_{ry}(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2 e^{-sh}, \\ \frac{Y(z)}{U(z)} = G_{ry}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2 z^{-d}, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \frac{Y(s)}{Q(s)} = G_{qy}(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 e^{-sh} + \mathbf{D}_1, \\ \frac{Y(z)}{Q(z)} = G_{qy}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 z^{-d} + \mathbf{D}_1. \end{cases} \quad (2.19)$$

## 2.3 Estabilidade

Existem diversos métodos para determinar a estabilidade dos sistemas com atraso de transporte, os quais podem ser divididos em duas classes. A primeira refere-se aos métodos em frequência que utilizam uma generalização do método de Hurwitz, o critério de Nyquist, critério do pequeno ganho e diferentes métodos para determinar os polos do sistema em malha fechada como no uso da função  $W$  de Lambert em Yi Patrick W. Nelson (2010) uma descrição desses métodos podem ser encontradas em Gu e Niculescu (2003). A outra classe de soluções é baseada nas equações no tempo com uso de técnicas modernas baseada na teoria de Lyapunov, no qual esses métodos são apresentados e avaliados com exemplos em (FRIDMAN, 2014).

Dentre as diversas ferramentas possíveis para avaliar a estabilidade dos sistemas resultantes, esse trabalho foca na análise no tempo com síntese via LMIs apresentada por Fridman (2014) usando a teoria de funcionais de Lyapunov-Krasovskii.

### 2.3.1 O que são LMIs

As LMIs são, de forma direta, desigualdades matriciais que são lineares nas variáveis da matriz. Um resultado pioneiro e clássico se origina da aplicação do método direto de Lyapunov à análise de estabilidade de sistemas lineares. Trata-se de uma maneira de escrever um problema matemático em um formato convexo de otimização, que resulta em respostas rápidas e confiáveis. Essa rapidamente foi reconhecida pela comunidade e logo foi incorporada às ferramentas modernas de análise de sistemas de controle (DUAN; YU, 2013).

Como citado anteriormente a existência de problemas no formato de LMIs existe desde as aplicações de teoria de Lyapunov. Porém, as soluções de LMIs por computador via programação convexa foi reconhecida apenas no início dos anos 80, enquanto métodos eficientes de pontos interiores foram desenvolvidos alguns anos depois. Uma avaliação sobre o tema com perspectiva histórica está disponível em (BOYD *et al.*, 1994).

### 2.3.2 Um método baseado em frequência

O sistema 2.1 será estável, independente do atraso  $h$  se  $\mathbf{A}$  é estável e a condição seguir é satisfeita

$$\left| (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}_1 \right|_{\infty} < 1. \quad (2.20)$$

Esse resultado pode ser obtido por meio do teorema do ganho pequeno, que fornece uma condição suficiente que governa a estabilidade das interconexões de realimentação (GU; NICULESCU, 2003). Para o exemplo acima, basta reescrever 2.1 com a parcela sem atraso sendo realimentada pelo bloco de atraso.

Demonstração: Definido  $x(t-h) = \Upsilon x(t)$ , ou seja, o operador atraso  $\Upsilon$  multiplicado pelo estado, com a matriz  $\mathbf{M} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}_1$  e, assim,  $y\Upsilon(s) = e^{-sh}$ . Aplicando  $\mathbf{M}\Upsilon$  na estrutura típica do teorema do pequeno ganho, tem-se que  $\|\mathbf{M}\Upsilon\|_\infty < 1$ .

Para sistemas discretos no tempo, a avaliação de estabilidade é relativamente mais simples, pois são sistemas de dimensão finita. Assim, sempre é possível representar o sistema com um modelo equivalente aumentado sem atrasos e, assim, usar técnicas de sistemas LTI sem atraso. Para sistemas amostrados, as técnicas do pequeno ganho continuam válidas e obtêm um resultado análogo.

### 2.3.3 Critério no domínio do tempo

Os métodos de análise de estabilidade no domínio do tempo estão sendo descritos na literatura há um século e um tema central desse assunto é a teoria de Lyapunov, a qual gera técnicas eficazes para o estudo dos sistemas sem atraso lineares ou não-lineares. Dentre os diversos trabalhos posteriores, a análise de sistemas com atraso foi estendida para teoria de Lyapunov em pelos menos duas vertentes: o Teorema de Lyapunov-Razumikhin e o Teorema de Lyapunov-Krasovskii. A primeira abordagem é semelhante à aplicação clássica, em que a negatividade da derivada da função de Lyapunov é necessária apenas para trajetórias definidas no intervalo  $[t-h, t]$  (RAZUMIKHIN, 1956). Enquanto que, para Lyapunov-Krasovskii em (KRASOVSKII, 1956), ao invés de definir uma função de Lyapunov, define-se uma expressão funcional que depende de  $x(t)$ . A condição suficiente para a estabilidade é que a derivada da função de Lyapunov  $\dot{V}$ , seja negativa ao longo de toda a trajetória do sistema.

A partir da modelagem do problema e de aproximações, podem-se obter variados níveis de conservadorismo nos resultados e, também, condições ou não sobre o valor do atraso. No trabalho de Fridman (2014), vários resultados são descritos e avaliados com aplicações em exemplos de TDS, para mais informações verifique a referência.

Dois resultados apresentados em Fridman (2014) são utilizados para teste de estabilidade neste trabalho para o domínio de tempo contínuo e domínio de tempo discreto, respectivamente. Considere um TDS genérico que inclui características das Eq. 2.14 e Eq. 2.16

na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1x(t-h(t)) + \mathbf{B}_1q(t), \\ y(t) = \mathbf{C}_0x(t) + \mathbf{C}_1x(t-h(t)) \end{cases} \quad (2.21)$$

em que  $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  é uma perturbação pertencente ao espaço  $L_2$  (detalhes serão apresentados no Capítulo 4) e as matrizes do sistema apresentam dimensões compatíveis com a Eq.2.16.

Dado um escalar  $\delta > 0$ ,  $h(t) \in [0, h]$  e tendo que  $\dot{h}(t) \leq d \forall t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0$  satisfaz  $d \in [0, 1)$  ou desconhecido. Se existirem matrizes  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$ ,  $\mathcal{R} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$ ,  $\mathcal{Q} > 0$  (ou  $\mathcal{Q} = 0$  quando  $d$  é desconhecido) e  $\mathcal{S}_{12}$  que tornam as LMIs em 2.22 factíveis para o sistema 2.21, então, ele é assintoticamente estável para  $q(t) = 0$  e possui norma  $H_\infty \leq \sqrt{\mu}$ . Em que  $h(t) \leq \bar{h} \forall t \in \mathbb{R}$  e  $\delta$  é a taxa de decaimento exponencial mínima dos estados (FRIDMAN,

2014).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{Q} > 0, \mathcal{S}_{12} \\ \min\{\mu\}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \star & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ \star & \star & \star & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{11} = \mathbf{A}^\top \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2^\top \mathbf{A} + 2\delta \mathcal{P} + \mathcal{S} + \mathcal{Q} - \mathcal{R}e^{-2\delta h}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_2^\top + \mathbf{A}^\top \mathcal{P}_3, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}e^{-2\delta h}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12})e^{-2\delta h} + \mathcal{P}_2^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{15} = \mathcal{P}_2^\top \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathbf{C}_0^\top, \mathcal{M}_{22} = -\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_3^\top + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \mathcal{P}_3^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{25} = \mathcal{P}_3^\top \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R})e^{-2\delta h}, \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top)e^{-2\delta h}, \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{44} = -[2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top + (1-d)\mathcal{Q}]e^{-2\delta h}, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

De maneira análoga pode-se obter uma solução para TDS amostrados que garantam a estabilidade do sistema 2.21 com  $\sqrt{\mu}$  sendo um limitante superior para sua norma  $H_\infty$ , o TDS pode ser representado como

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{A}_1x(k-d_k) + \mathbf{B}_1q(t), \\ y(k) = \mathbf{C}_0x(k) + \mathbf{C}_1x(k-d_k) \end{cases} \quad (2.23)$$



em que  $q(k) \in \mathbb{R}^{n_q}$  é uma perturbação pertencente ao espaço  $L_2$  e as matrizes do sistema apresentam dimensões compatíveis com a Eq.2.17.

Dado um escalar  $\delta > 0$ ,  $0 \leq \bar{h}$ , se existirem matrizes  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$ ,  $\mathcal{R} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$  e  $\mathcal{S}_{12}$  que tornam as LMIs em 2.24 para o sistema 2.23, então, ele é assintoticamente estável para  $q(k) = 0$  e possui norma  $H_\infty \leq \sqrt{\mu}$ . Em que,  $d_k$  é um atraso variável no tempo que satisfaz  $0 \leq d_k \leq h \forall k \in \mathbb{N}$  (FRIDMAN, 2014).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{S}_{12} \\ \min\{\mu\}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \star & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ \star & \star & \star & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{11} = (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I}) \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2^\top (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mathcal{S} - \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_2^\top + (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I}) \mathcal{P}_3, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}) + \mathcal{P}_2^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{15} = \mathcal{P}_2^\top \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathbf{C}_0^\top, \mathcal{M}_{22} = -\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_3^\top + P + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \mathcal{P}_3^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{25} = \mathcal{P}_3^\top \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R}), \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top), \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q} \\ \mathcal{M}_{44} = -2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

### 3 ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA SISTEMAS COM ATRASO DE TRANSPORTE

O desafio de controlar sistemas com atraso de transporte é explorado nesse capítulo. Essa área do conhecimento vem sendo tratada há pelo menos 50 anos. Uma descrição detalhada sobre uma parte importante dessa trajetória pode ser encontrada nos trabalhos Richard (2003), Normey-Rico e Camacho (2008), Liu *et al.* (2019) e Deng *et al.* (2022).

Nesta seção, os principais esquemas de predição e de controle propostos na literatura são revisados e uma breve análise das propriedades de cada estratégia é realizada. Por fim, é apresentado um procedimento de síntese de controle baseado em preditor. As principais contribuições deste texto se enquadram no estudo de sistemas lineares e invariantes no tempo sujeitos a atrasos de saída e/ou entrada. Portanto, neste capítulo será feita apenas uma revisão das principais, ou mais populares, estratégias de controle existentes para o controle desse tipo de sistema.

Sistemas com atrasos de tempo são de dimensão infinita e sua realimentação direta dá origem a uma função de transferência em malha fechada com um número infinito de polos. Portanto, é muito difícil para um regulador convencional ajustar esses polos. A presença de atrasos também dificulta a análise teórica do projeto de malhas de controle, uma vez que estas são descritas por expressões matemáticas mais complexas (TDS), comparadas ao uso normal em controle (EDO). Esta é a principal razão pela qual o projeto de controladores para sistemas com atrasos de tempo é consideravelmente mais complexo em comparação com sistemas sem atrasos.

As técnicas que serão apresentadas foram mencionadas no Capítulo 1 e podem ser divididas em dois grupos: as baseados no Smith Predictor (SP) (SMITH, 1957) e, a técnica de atribuição do espectro finito (FSA, do inglês *Finite Spectrum Assignment*) (MANITIUS; OLBROT, 1979). De alguma forma, todas essas técnicas apresentam em comum a característica de compensação do atraso com base em uma previsão da saída, ou do estado, a partir de um modelo do sistema considerado. Porém, esquemas de controle diferentes apresentam vantagens e limitações distintas, dessa forma, algumas das principais técnicas de ambos os grupos serão validadas com ênfase no SFSP e nos esquemas preditor-observador que usam a técnica de FSA.

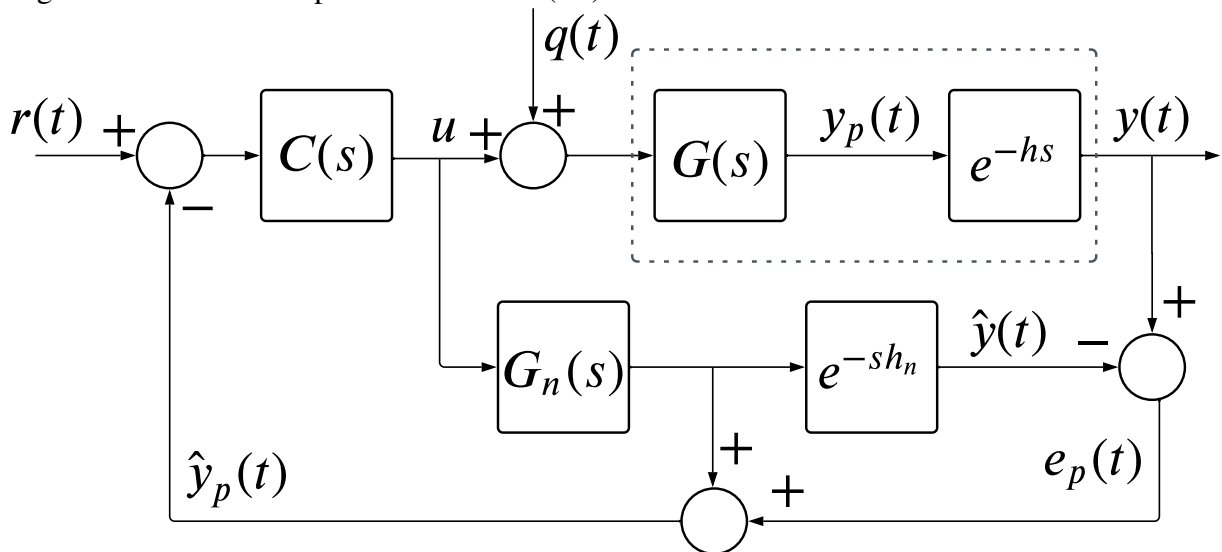
Um cenário ideal é mostrado na Fig. 1, em que a saída não atrasada  $y_p(t)$  é acessível e, posteriormente, foi demonstrado o quão útil se torna esse sinal para fins de controle. Nesse sentido, controladores baseados em preditores são provavelmente a maneira mais lógica de lidar com a estabilização de sistemas com atraso de entrada. De fato, foi apontado em Mirkin (2004)

que a predição de estado é um conceito fundamental para sistemas de atraso de tempo, assim como a observação de estado para sistemas convencionais. Novamente, a ideia é obter uma previsão da saída  $y_p(s) = y(s)e^{sh}$ , como na Fig. 1, ou o estado  $x(t+h)$  na Eq. 2.14 ou Eq. 2.15 para que sejam então usados para controlar o sistema obtendo um laço de realimentação sem o efeito do atraso. Nitidamente, as últimas expressões não são possíveis na prática por não serem causais. No entanto, elas podem ser reformuladas em expressões causais usando as informações da entrada nas últimas  $h$  unidades de tempo. Diversos métodos serão apresentados para realizar esse procedimento e um foco maior será dado aos sistemas baseados em observador, que são revisados a seguir, e uma nova proposta será apresentada em capítulos posteriores.

### 3.1 Preditor de Smith e variações

A ideia base do SP foi apresentada por meio do conceito da saída sem atrasos  $y_p(t)$  na Fig. 1 e do diagrama de blocos do SP na Fig. 2 no Capítulo 1 com breve análise, assim como foram apresentadas algumas funções de transferência de interesse nas Eq. 1.1 e Eq. 1.2. A estrutura do SP pode ser apresentada de forma conveniente em um outro diagrama de blocos como na Fig. 3, que é útil para a introdução dos esquemas modificados. Nele, a saída sem atrasos  $y_p(t)$  é apresentada de maneira explícita. É perceptível que os sinais  $y_p(t)$  e  $\hat{y}_p(t)$  são iguais apenas nos casos comentados anteriormente, quando  $q(s) = 0$  e não há incertezas no modelo, ou seja,  $G_n(s) = G(s)$  e  $h_n = h$ . A formulação do SP para sistemas amostrados pode ser feita de

Figura 3 – Estrutura do preditor de Smith (SP)

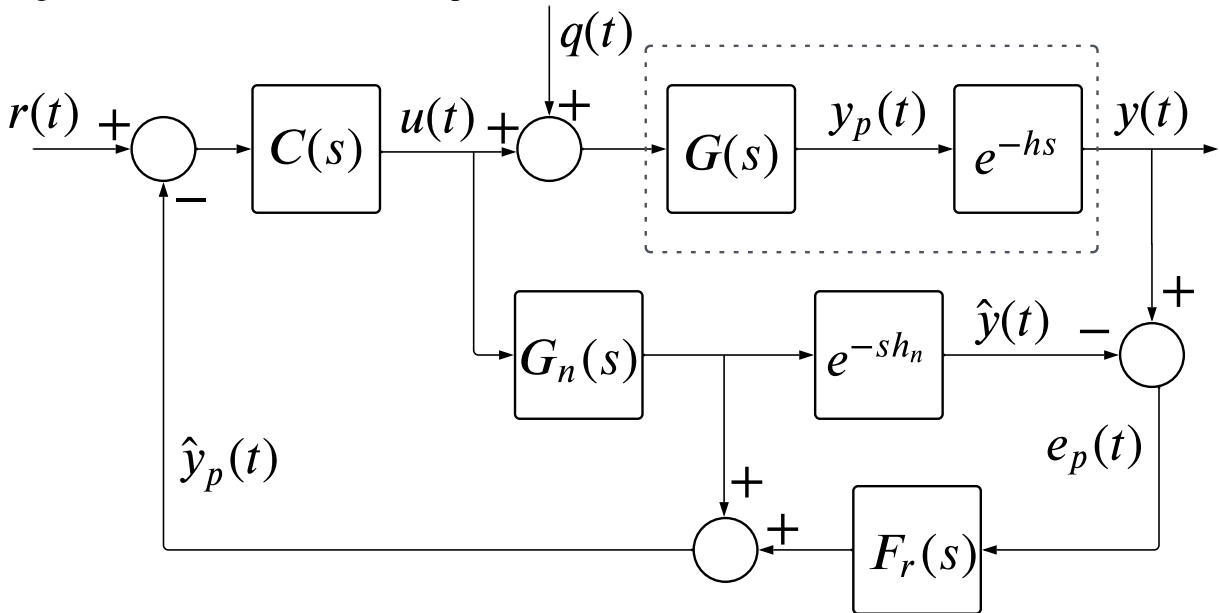


maneira análoga ao tempo contínuo e, assim, não será apresentada. Porém, outros controladores baseados no SP serão apresentados no domínio de tempo discreto.

### 3.1.1 Preditor de Smith filtrado (FSP)

Uma das primeiras técnicas de controle baseadas no SP é capaz de controlar processos de qualquer ordem e até dinâmicas instáveis em malha aberta é o FSP. Esse controlador permite superar as limitações do SP através da inclusão de filtro ( $F_r(s)$ ), de maneira engenhosa, no erro de predição  $e_p(t)$ . De forma análoga ao SP, o erro de predição é definido como  $e_p(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  e só apresenta valores não nulos na presença de perturbações ou incerteza de modelagem, como pode ser verificado na Fig. 4. Para alterar as características de rastreamento do FSP, utiliza-se de

Figura 4 – Estrutura conceitual do preditor de Smith filtrado



Fonte: O autor.

um filtro de referência  $F(s)$  que, por definição, tem influência apenas na relação entre referência  $r(t)$  e saída  $y(t)$ , atuando na função de transferência  $G_{ry}(s)$ . De forma semelhante, o filtro de robustez  $F_r(s)$  atua em  $e_p(t)$  e é capaz de modificar a robustez e a rejeição de perturbação, porém não tem influência no rastreamento. As funções de transferência para essa configuração apresentam a forma

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)C(s)G_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)} e^{-sh_n}, \quad (3.1)$$

$$G_{qy}(s) = G_n(s)e^{-sh_n} \left[ 1 - \frac{F_r(s)C(s)G_n(s)e^{-sh_n}}{1 + C(s)G_n(s)} \right]. \quad (3.2)$$

Uma maneira consolidada de avaliar a robustez de controladores é por meio da modelagem do processo incluindo uma incerteza estruturada. Modelos com incerteza apresentam maior correlação com processos reais e, assim, quando usados em análises de estabilidade e robustez, tendem a gerar melhores resultados em relação aos seus pares ideais. A incerteza será considerada como aditiva ou multiplicativa para modelar o processo  $P(s)$  como uma família de possíveis modelos  $P_i(s)$  representadas pelas Eq. 3.3 e Eq. 3.4, respectivamente.

$$P_i(s) = P_n(s) + \Delta P_i(s), \quad (3.3)$$

$$P_i(s) = P_n(s)(1 + \delta P_i(s)), \quad (3.4)$$

em que,  $P_n(s)$  é o processo nominal e  $\Delta P_i(s)$  e  $\delta P_i(s)$  são os erros de modelagem aditivos e o erro de modelagem multiplicativos, respectivamente. Então, existem valores  $\overline{\Delta P(s)}$  e  $\overline{\delta P(s)}$  que são os erros máximos de modelagem tal que

$$\left| \overline{\Delta P(s)} \right| \geq |\Delta P_i(s)|, \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0 \quad (3.5)$$

$$\left| \overline{\delta P(s)} \right| \geq |\delta P_i(s)|, \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0 \quad (3.6)$$

Usando a álgebra de diagrama de blocos, pode-se reduzir os DTCs em um esquema de controlador equivalente  $C_{eq}(s)$  no ramo direto com o processo e uma realimentação unitária, como no diagrama da Fig. 5.

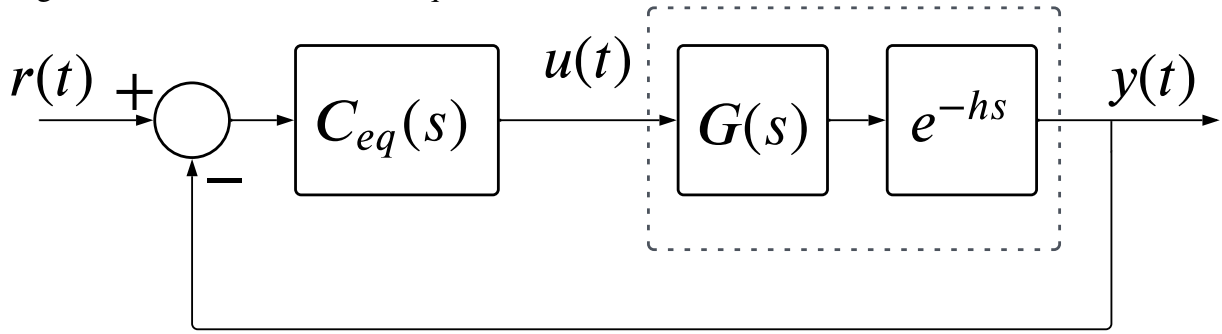
Considerando o critério de Nyquist juntamente com incertezas aditivas, como apresentado em (MORARI; ZAFIRIOU, 1989), pode-se obter a seguinte condição para estabilidade robusta

$$\left| \overline{\delta P(j\omega)} \right| < \frac{|1 + C_{eq}(j\omega)P_n(j\omega)|}{|C_{eq}(j\omega)|} = i_R(\omega), \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0, \quad (3.7)$$

no qual  $i_R(\omega)$  é o índice de robustez para incertezas do tipo aditiva. Para incerteza multiplicativa, que será o padrão nesse texto, o índice de robustez apresenta a forma

$$\left| \overline{\delta P(j\omega)} \right| < \frac{|1 + C_{eq}(j\omega)P_n(j\omega)|}{|C_{eq}(j\omega)P_n(j\omega)|} = i_R(\omega), \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0. \quad (3.8)$$

Figura 5 – Sistema de controle equivalente em malha fechada



Fonte: O autor.

Então, pode-se avaliar a robustez do SP através do método anterior obtendo o controlador equivalente  $C_{eq}(s)$  na forma

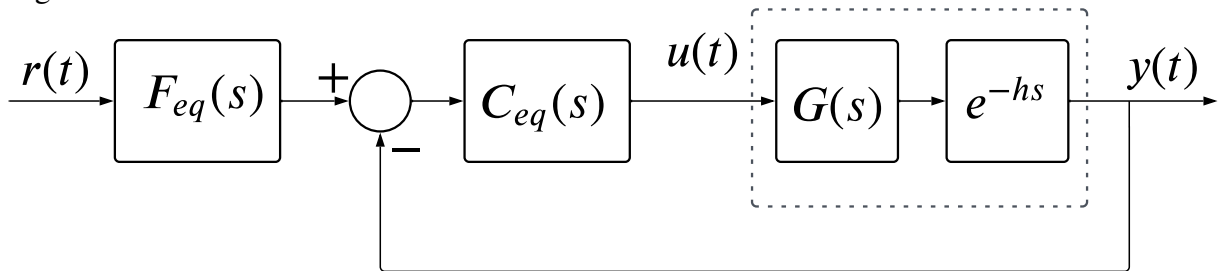
$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s) (G_n(s) - G_n(s)e^{-sh_n})}, \quad (3.9)$$

que pode ser substituído na Eq. 3.8 obtendo o índice de robustez para o SP

$$i_R(\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)G_n(j\omega)|}{|C(j\omega)G_n(j\omega)|}, \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0. \quad (3.10)$$

e, finalmente, para avaliar o FSP, pode-se usar um esquema semelhante ao da Fig. 5 reduzindo o diagrama para um filtro de referência e controlador equivalente conhecida como estrutura com dois graus de liberdade (2DOF, do inglês *Two degree of freedom*), como na Fig. 6. Assim, pode-se analisar individualmente o segmento de referência e a rejeição de perturbação com a robustez. Então, o controlador equivalente pode ser escrito como

Figura 6 – Sistema de controle 2DOF em malha fechada



Fonte: O autor.

$$C_{eq}(s) = \frac{F_r(s)C(s)}{1 + C(s)G_n(s) [1 - F_r(s)e^{-sh_n}]}, \quad (3.11)$$

e o filtro de referência equivalente

$$F_{eq}(s) = \frac{F(s)}{F_r(s)}. \quad (3.12)$$

O índice de robustez para o FSP pode ser obtido substituindo 3.11 em 3.8, obtendo

$$i_R(\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)G_n(j\omega)|}{|F_r(s)C(j\omega)G_n(j\omega)|}, \quad s = j\omega, \quad \forall \omega > 0, \quad (3.13)$$

ao comparar as expressões do índice de robustez para o SP e o FSP, tem-se, de forma explícita, a maneira como o  $F_r(s)$  no denominador da expressão altera a robustez do sistema em malha fechada.

### 3.1.1.1 Projeto do FSP

Utilizando da análise da seção anterior, pode-se obter uma noção intuitiva sobre esse controlador. De forma direta, o rastreio pode ser sintonizado de forma desacoplada por  $F(s)$ , pois atua diretamente na função de transferência  $G_{ry}(s)$  em 3.1 e não tem influência sobre a função de transferência  $G_{qy}(s)$  e índice de robustez  $i_R(\omega)$  em 3.2 e 3.13, respectivamente. Uma boa prática para sintonia do controlador  $C(s)$  é realizar a sintonia a partir de um sistema equivalente sem atraso semelhante à estratégia do SP clássico e, então, o filtro de robustez  $F_r(s)$  deve ser sintonizado de forma a satisfazer requisitos conflitantes entre rejeição de perturbação e índice de robustez, pois atua diretamente em 3.2 e 3.13.

A topologia do FSP apresentada na Fig. 4 não deve ser usada para processos integradores ou instáveis em malha aberta, pois mesmo quando  $C(s)$  é bem sintonizado, levando os polos de  $G_n(s)$  para um região estável, a estrutura resultante ainda é internamente estável. Uma estrutura de implementação mais adequada será apresentada na próxima subseção, ainda que a estrutura 2DOF possa ser usada com os devidos cancelamentos polo-zero.

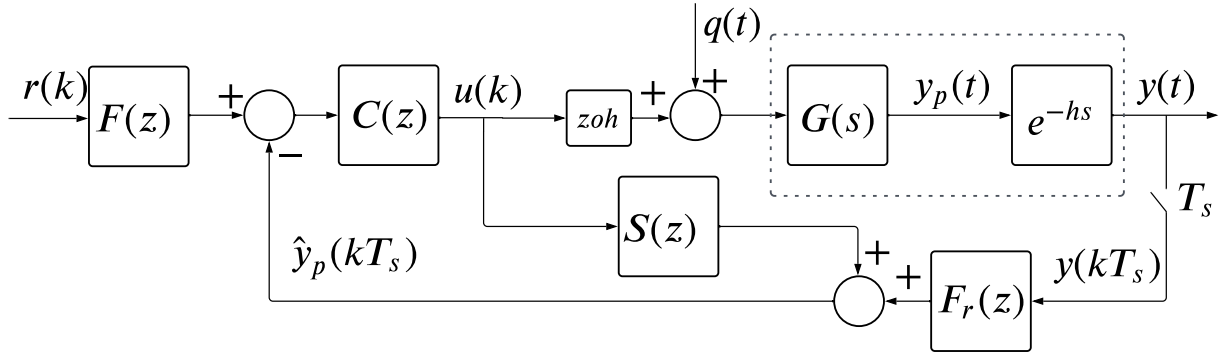
Requisitos específicos para o DTC podem ser obtidos por meio da análise 2DOF em malha fechada. Para rejeitar distúrbios do tipo degrau e garantir erro nulo em estado estacionário, as duas condições a seguir devem ser satisfeitas:  $Ceq(s)$  deve ter pelo menos um polo em  $s = 0$ , e  $Feq(s)|_{s=0} = 1$ . A primeira condição é alcançada naturalmente pela inclusão padrão de um polo em  $s = 0$  no controlador equivalente  $C(s)$  já a segunda condição pode ser alcançada fazendo  $F(s)|_{s=0} = 1$  e  $F_r(s)|_{s=0} = 1$ .

De acordo com Normey-Rico e Camacho (2009), o filtro de robustez  $F_r(s)$  deve ser escolhido para evitar os três principais problemas da estrutura original do SP: os polos do modelo  $G_n(s)$  aparecem explicitamente em  $G_{qy}$  e, assim, podem dominar a dinâmica de rejeição de perturbação. Caso o modelo tenha um polo instável, a estrutura é internamente instável e, por fim, para processos integradores, o SP não é capaz de rejeitar perturbações tipo degrau. Assim, o

projeto adequado do filtro de robustez  $F_r(s)$  torna o FSP capaz de superar as limitações do SP e ainda pode ser sintonizado respeitando o *trade-off* entre rejeição de perturbações e robustez.

A maioria dos controladores baseados no SP apresentam uma topologia específica para lidar com processos instáveis ou integradores em malha aberta e, além disso, contêm limitações na sua estrutura em tempo contínuo, exigindo aproximações no termo  $G_n(s) - G_n(s)e^{-sh_n}$  ou em termos semelhantes equivalentes. Assim, a implementação aconselhada desses controladores é em tempo discreto com uma estrutura específica, no caso do FSP, a estrutura apresentada em Normey-Rico e Camacho (2009) em tempo discreto será usada nesse texto e está exposta na Fig. 7, que utiliza um discretizador e um segurador de ordem zero (zoh, do inglês *Zero order Hold*) de tempo de amostragem  $T_s$ , a estrutura compatível com a implementação prática.

Figura 7 – Estrutura de implementação para o FSP



Fonte: O autor.

O projeto no domínio discreto pode ser feito utilizando o procedimento análogo ao apresentado para o domínio contínuo, aproveitando do fato que o atraso discreto é de dimensão finita. A estabilidade interna é alcançada por meio da realização mínima do bloco  $S(z)$ , outros detalhes estão disponíveis em Normey-Rico e Camacho (2009).

### 3.1.2 Preditor de Smith generalizado (GSP)

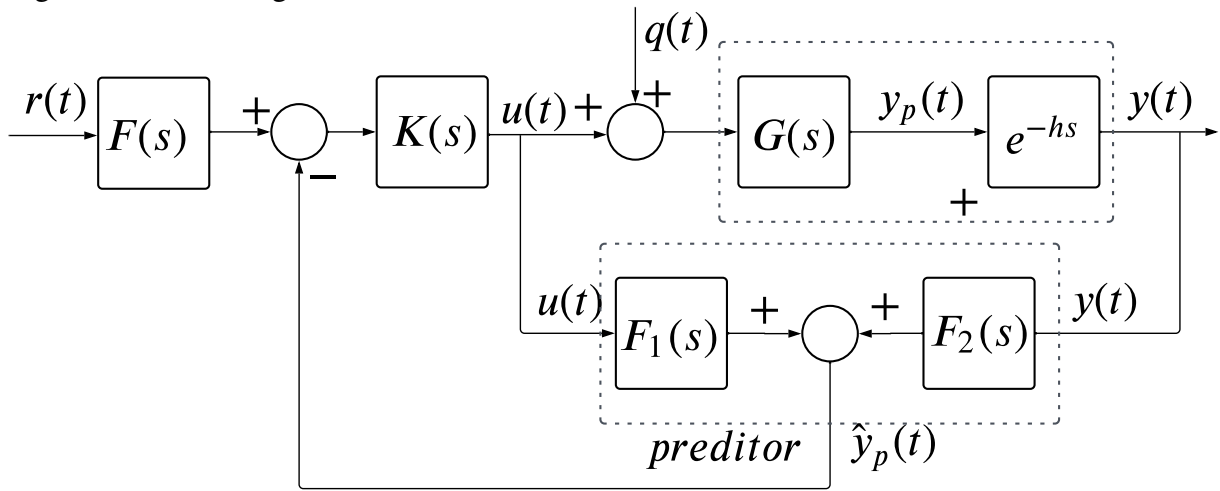
O trabalho de Sanz *et al.* (2018) revisa, em detalhes, o princípio do SP e algumas de suas principais modificações. Nele, é apresentada uma estrutura análoga à Fig. 7, apresentada na Fig. 8, em que os blocos  $S$  e  $F_r$  são denominados  $F_1$  e  $F_2$  e, então, é demonstrado que as modificações do SP podem ser expressas e implementadas nesse formato. Posteriormente, é realizada uma análise geral dos controladores, baseada na nova estrutura, definindo requisitos



para garantia da estabilidade interna, sintonia do desempenho de segmento de referência e de rejeição de distúrbios. Estratégias de controle distintas produzem  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  distintos, porém, satisfazem as restrições apresentadas quando bem sintonizadas.

O controlador apresentado em García e Albertos (2008), que posteriormente incluiu processos instáveis em malha aberta no trabalho García e Albertos (2013), foi reformulado para a nova estrutura Sanz *et al.* (2018) e, assim, o GSP é capaz de lidar com processos tão diversos quando o FSP. Como no SP, o esquema introduz uma saída predita no tempo do atraso de transporte e, assim, permite utilizar um controlador primário sintonizado com uma realimentação livre de atraso.

Figura 8 – Estrutura geral de DTCs



Fonte: O autor.

Para fins de implementação também aconselha-se o uso do GSP em tempo discreto. Diversas simulações e uma aplicação experimental são relatada no trabalho original assim como uma respectiva análise dos resultados, para mais detalhes consulte (SANZ *et al.*, 2018).

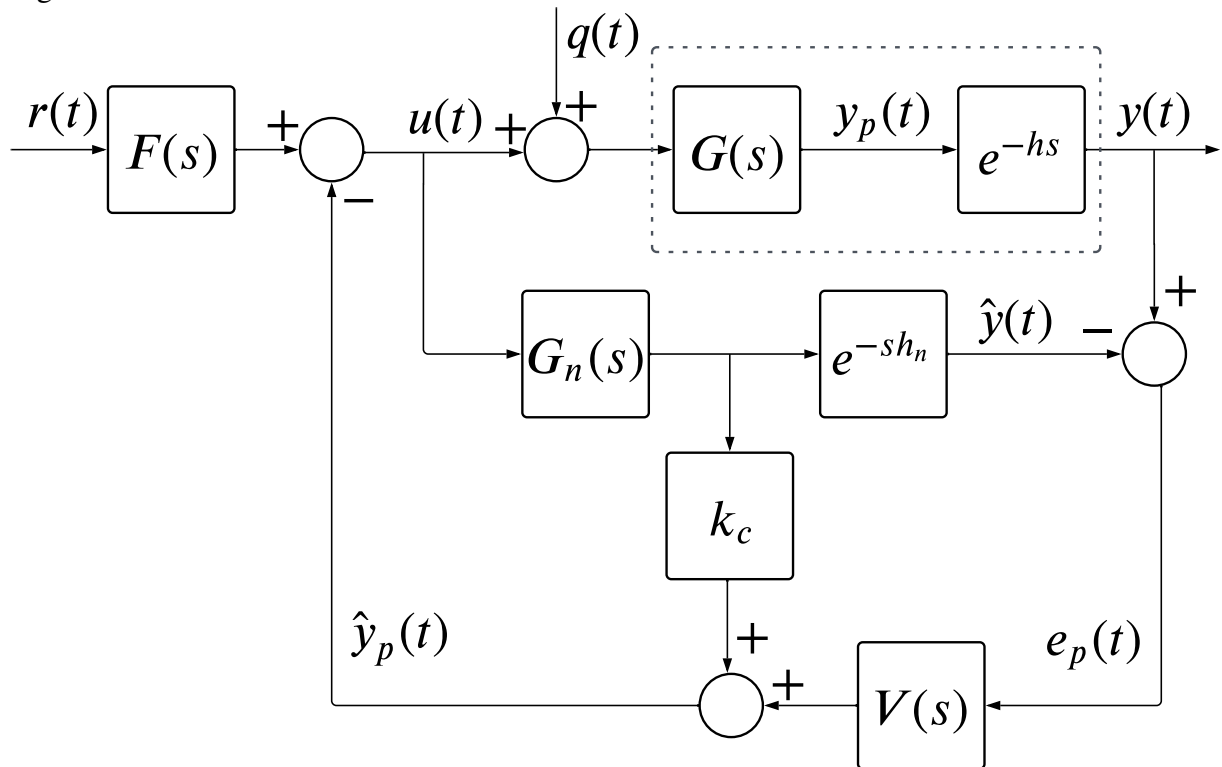
### 3.1.3 Preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP)

Um formato alternativo para o FSP é o preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP, do inglês *simplified filtered Smith predictor*), proposto em Torrico *et al.* (2013) e que usa como controlador primário e filtro de referência apenas ganhos. Em Torrico *et al.* (2016), Torrico *et al.* (2018), foi proposta uma nova estrutura para o SFSP conhecida como compensador de atraso de transporte simplificado (SDTC, do inglês *simplified dead-time compensator*), em que a formulação do SFSP foi estendida para modelos de fase não-mínima de qualquer ordem e se usam

filtros de resposta finita ao impulso (FIR, do inglês *finite impulse response*) para implementação discreta. Em (TORRICO *et al.*, 2019), a formulação do SFSP foi apresentada em espaço de estados no domínio contínuo e, em Lima *et al.* (2020), foram demonstradas as vantagens do uso do SFSP para lidar com processos com saturação na entrada. O trabalho recente (TORRICO *et al.*, 2021) estendeu a formulação do SFSP no domínio do tempo discreto para lidar com processos estáveis, integradores e instáveis de qualquer ordem.

Para o SFSP, devido à característica do controlador primário e o filtro de referência serem apenas ganhos, o filtro de robustez denominado  $V(z)$  também deve garantir os requisitos do  $C_{eq}(z)$  na estrutura 2DOF. A formulação usada será a apresentada, em Lima *et al.* (2020), que tem uma pequena mudança na topologia com relação à Fig. 4 do diagrama conceitual na forma da Fig. 9. Porém, a estrutura de implementação estável segue a mesma estrutura do FSP na Fig. 7.

Figura 9 – Estrutura conceitual do SFSP



Fonte: O autor.

Assim, as funções de transferência Eq. 3.1 e Eq.3.2 tornam-se

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G_n(s)}{1 + k_c G_n(s)} e^{-sh_n}, \quad (3.14)$$

$$G_{qy}(s) = G_n(s)e^{-sh_n} \left[ 1 - \frac{G_n(s)e^{-sh_n}V(s)}{1 + k_c G_n(s)} \right]. \quad (3.15)$$

e o índice de robustez para

$$i_R(\omega) = \frac{|1 + k_c G_n(e^{j\omega T_s})|}{|V(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})|}, \quad \forall \ 0 < \omega < \frac{\pi}{T_s}, \quad (3.16)$$

a partir de 3.14 e 3.15 é possível escolher  $F(s) = k_r$  e  $k_c$  de forma a garantir o rastreamento e, então, sintonizar  $V(s)$  em um *trade-off* entre robustez e rejeição de perturbações. O SFSP em formato 2DOF pode ser escrito a partir das Eq. 3.17 e 3.18. Assim, o controlador equivalente pode ser escrito como

$$C_{eq}(s) = \frac{V(s)}{G_n(s) \left[ \frac{1 + k_c G_n(s)}{G_n(s)} - V(s)e^{-sh_n} \right]}, \quad (3.17)$$

$$F_{eq}(s) = \frac{F(s)}{V(s)}. \quad (3.18)$$

### 3.1.3.1 Projeto do SFSP

Para processos de primeira ordem, pode usar sintonia apresentada em Jr *et al.* (2022), onde o projeto é resumido na sintonia de apenas um parâmetro. Para o caso geral, é usada a metodologia apresentada em Lima *et al.* (2020). Considere o modelo do processo  $G_n(s)$  em espaço de estados como

$$G_n(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (3.19)$$

em que as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)}$  estão na forma canônica observável sendo  $n_x$  a ordem do sistema e  $n_u = n_y = 1$  para sistemas SISO.

Os pares  $(A, B)$  e  $(C, A)$  são, respectivamente, controlável e observável. O controlador é composto por um ganho de realimentação  $k_c \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_x)}$ , um filtro de robustez  $V(s)$  e um filtro de referência  $F(s)$ .

O SFSP é sintonizado para obter uma resposta de segmento de referência desejada. A função de transferência de malha fechada para segmento de referência para nova configuração é

$$H_{yr}(s) = F(s)C(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + Bk_c)^{-1}Be^{-sh_n}. \quad (3.20)$$

O polinômio característico de malha fechada desejado é dado por

$$E_c(s) = \prod_{k=1}^n (s + p_k) = \det(sI - A + BK), \quad (3.21)$$

em que  $p_k$  são os polos de malha fechada desejados. O ganho  $k_c$  pode ser então obtido usando a fórmula de Ackermann (ACKERMANN, 1977) para sistemas SISO.

O filtro de referência é dado pela expressão

$$F(s) = k_r \cdot \frac{(T_z s + 1)^{n_z}}{(T_f s + 1)^{n_p}}, \quad (3.22)$$

no qual  $n_p \geq n_z$ ,  $n_p$  e  $n_z$  determinam a ordem do filtro, enquanto  $T_f \neq T_z$  são parâmetros de ajuste para obter uma dinâmica desejada da resposta de seguimento de referência. Para garantir erro de regime permanente nulo, o ganho do filtro de referência  $k_r$  é calculado por

$$k_r = [C(-A + Bk_c)^{-1}B]^{-1}. \quad (3.23)$$

O filtro de robustez é projetado a partir da estrutura equivalente do SFSP 2DOF, cujo controlador pode ser escrito como

$$C_{eq}(s) = \frac{V(s)}{1 + S(s)}, \quad (3.24)$$

em que

$$S(s) = (k_c - e^{-Ls}V(s)C)(sI - A)^{-1}B. \quad (3.25)$$

O filtro de robustez  $V(s)$  deve ser projetado para: garantir rejeições de perturbações; cancelar os polos do modelo do processo. O atendimento destas condições resulta em um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \text{num}[1 + S(s)]_{s=p_i \neq 0} = 0, \\ \text{num} \left[ \frac{d^k}{ds^k} \text{num}[1 + S(s)] \right]_{s=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde o operador  $\text{num}[\cdot]$  representa o numerador da expressão,  $p_i$  são os polos do modelo do processo,  $m = m_1 + m_2$ ,  $m_1$  é o número de polos do modelo em  $s = 0$  e  $m_2$  é a ordem do tipo de perturbação (1 para degrau, 2 para rampa, etc.) que se deseja rejeitar.

O filtro de robustez apresenta a seguinte forma

$$V(s) = \frac{b_1 s^{n_s-1} + b_2 s^{n_s-2} + \dots + b_{n_s}}{(\alpha_1 s + 1)(\alpha_2 s + 1) \dots (\alpha_{n_v} s + 1)} \quad (3.27)$$

em que  $n_s$  é o número de equações do sistema (3.26) e  $n_s - 1 \leq n_v \leq n_s$  é o número de constantes de tempo  $\alpha_i$ . Os parâmetros de sintonia livres do filtro são  $\alpha_i$ .

Desse modo, os coeficientes do filtro robustez podem ser facilmente calculados resolvendo o sistema de equações (3.26).

A estrutura de implementação estável do SFSP pode ser a mesma que o FSP na Fig. 7 e é feita com a realização mínima de  $S(s)$ , definida no domínio do tempo contínuo por

$$S(s) = k_c S_1(s) - S_2(s) e^{-Ls}, \quad (3.28)$$

onde

$$S_1(t) = \int_{t-L}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (3.29)$$

$$S_2(s) = \mathbb{M}[(V(s) - k_c e^{AL}) G_n(s)] \quad (3.30)$$

e  $\mathbb{M}[\cdot]$  representa a realização mínima em espaço de estados para um sistema LTI. No domínio da frequência,  $S_1(s)$  é representado em espaço de estados por

$$S_1(s) = (I - e^{-(sI-A)L})(sI - A)^{-1} B. \quad (3.31)$$

Esse subsistema é uma expressão com atraso distribuído e apresenta de forma explícita, os polos do modelo  $G_n(s)$ . Então, para processos instáveis e integradores de malha aberta, existem problemas de instabilidade interna que justificam o uso de técnicas de implementação estáveis, recaindo no mesmo problema dos controladores baseados em FSA.

### 3.2 Atribuição do espectro finito (FSA)

A lei de controle do FSA foi definida em Manitius e Olbrot (1979) como

$$u(t) = \mathbf{K} \hat{x}(t+h) = \mathbf{K} \left( e^{Ah} x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right), \quad (3.32)$$

e ao aplicar a lei de controle da Eq. 3.32 ao sistema, produz uma atribuição de espectro finito do sistema de malha fechada. Em Artstein (1982) foi obtido o mesmo resultado a partir de uma perspectiva de redução de modelo, utilizando a solução analítica do TDS para o tempo  $t+h$  e desconsiderando o termo não causal. A lei de controle da Eq. 3.32 apresenta alguns problemas,

como a variável predita não convergir para a real na presença de uma perturbação e, portanto, não pode ser rejeitada de maneira direta.

Outra desvantagem relevante dessa expressão está na implementação de um termo integral distribuído, principalmente para sistemas em que a matriz  $A$  não é Hurwitz, ou seja, autovalores não negativos. Isso tem sido motivo de preocupação, pois a discretização da integral pode levar à instabilidade do circuito fechado. Algumas análises sobre esse problema estão disponíveis na literatura (MONDIE; MICHIELS, 2003; ZHONG, 2004; ZHONG, 2005). Um resultado recente sobre a implementação dessa integral no SFSP em domínio contínuo baseado nas técnicas de Zhong (2004), Zhong (2005) pode ser encontrada em Oliveira *et al.* (2021).

### 3.2.1 O preditor de Artstein

Como apresentado na seção anterior, esse preditor é baseado na redução da solução da equação do sistema com atraso de entrada na Eq. 2.14, a solução direta apresenta a forma

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} [B_2u(\tau) + B_1q(\tau+h)] d\tau. \quad (3.33)$$

Para o cálculo da predição valores futuros da perturbação são necessários, mais especificamente no tempo atual  $t$  necessita-se dos valores da perturbação em  $t$ ,  $t+h$ , tornando a Eq. 3.33 não causal. A solução obtida por Artstein fornece uma previsão aproximada de  $x(t+h)$  truncando a resposta e excluindo o efeito da perturbação obtendo a Eq. 3.32. Pode-se avaliar o erro de predição ao usar essa aproximação como

$$x(t+h) - \hat{x}(t+h) = \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_1q(\tau+h) d\tau, \quad (3.34)$$

demonstrando que o erro de predição é diferente de zero na presença de perturbações, como por exemplo, para perturbações constantes mesmo usando ação integral (SANZ *et al.*, 2016).

### 3.2.2 Técnicas de predição para rejeição de perturbação aprimorada para sistemas LTI com atraso de entrada

Embora seja um tema interessante do ponto de vista prático, poucos artigos abordaram esse problema (KRSTIC; SMYSHLYAEV, 2008). Com o objetivo de reduzir o erro de predição para perturbações, algoritmos adaptativos têm chamado a atenção de alguns pesquisadores. Por exemplo, distúrbios senoidais de frequência desconhecida são identificados e rejeitados em (PYRKIN *et al.*, 2010) para sistemas LTI com atraso conhecido. Recentemente

em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) uma solução simples é considerada, em que uma realimentação adicional resultante da diferença entre o estado medido,  $x(t)$ , e o estado predito 3.33 atrasado é considerada. Usando a notação, o estado predito pelo esquema de (ARTSTEIN, 1982) é definido como  $\hat{x}_1(t+h)$  e o estado predito atrasado  $\hat{x}_1(t)$ , é usado para definir uma nova predição

$$\hat{x}_2(t+h) = \hat{x}_1(t+h) + [x(t) - \hat{x}_1(t)], \quad (3.35)$$

Com esta simples modificação, fica provado que para uma certa classe de sinais de distúrbios, a nova predição leva a uma melhor atenuação do que a convencional. No entanto, o cancelamento perfeito só é possível para perturbações constantes e sinais periódicos com período  $\omega = h$ , e a atenuação depende inteiramente das características da perturbação. Em (WANG; WU, 2022) a técnica é estendida para o caso discreto junto a uma análise detalhada sobre suas implicações, a realimentação é realizada uma segunda vez e obtém resultados relevantes para casos específicos.

Outra técnica recente capaz de reduzir o erro de predição foi apresentada em (SANZ *et al.*, 2016) que utiliza de filtros passa-baixa para obter as derivadas da perturbação predita e, então, utilizando uma expansão por série de Taylor obter uma aproximação truncada desse sinal. Usando a ideia anterior o trabalho de (CASTILLO; GARCIA, 2021) propõe um observador-preditor que aproxima a perturbação através de derivadas diretamente e também usa um expansão em série de Taylor para construir a perturbação predita, a sintonia é feita através do ganho do observador  $L$  usando LMIs, em (Alves Lima *et al.*, 2022) a ideia é estendida para o caso discreto. Em (SANTOS; FRANKLIN, 2018) propuseram um novo conceito de *feedforward* de duas camadas com perturbações aditivas limitadas combinadas e não combinadas com a abordagem FSA, de maneira simples utiliza-se a perturbação predita diretamente no sinal de controle para compensar a perturbação antes de atingir os estados obtendo um resultado expressivo. A análise de desempenho, métodos de sintonia e simulações estão disponíveis em (SANTOS; FRANKLIN, 2018).

Nos dois próximos capítulos, será apresentada a principal contribuição desse trabalho, onde é relatado um novo esquema preditor-observador que leva em conta uma previsão do sinal de perturbação, denotado por  $\hat{q}(t+h)$  ou  $\hat{q}(k+d)$ . Tal predição é construída a partir de estimativas do distúrbio utilizando um filtro escolhido de maneira conveniente. Será mostrado que algumas técnicas da literatura são casos particulares do esquema proposto, no qual em todos os casos a proposta obtém desempenho igual ou superior aos métodos da literatura. Um procedimento de avaliação do erro de predição bastante simples baseado no sistema original aumentado

será introduzido. A perturbação prevista é utilizada para definir uma nova predição de estado, permitindo compensar o efeito da perturbação no sistema como um todo. Técnicas de sintonia baseadas na teoria de Lyapunov são apresentadas e podem ser usadas quando na presença de perturbações suficientemente suaves e variantes no tempo, alcançando cancelamento perfeito em alguns casos particulares.



## 4 OBSERVADORES DE ESTADOS

Em geral, processos reais apresentam não linearidades e comportamento dinâmico de alta ordem (AGUIRRE, 2004) e o uso de sensores está associado com o custo econômico do sistema. Assim, normalmente não estão disponíveis a medição de todos os estados por impossibilidades econômicas ou também físicas.

A estimação de estados possui ampla aplicação em controle de sistemas, pois permite a utilização de técnicas consolidadas baseadas em realimentação de estados (WILLIAMS; LAWRENCE, 2007). Além disso, técnicas de estimação das variáveis de estados também podem ser usadas na detecção de falhas (PATTON; CHEN, 1993; FRANK; DING, 1997), assim como garantir os limites de operação para processos que estão relacionados com estados não medidos.

Observadores de estado ou estimadores de estados são técnicas usadas para obter aproximações do estado real de um processo. O objetivo dos observadores de estado é estimar os estados que não são diretamente medidos no sistema. Dessa forma, os observadores são, em geral, uma réplica matemática do sistema a ser observado que utiliza apenas os sinais disponíveis de entrada e saída associado a um ou mais termos de correção. Uma das técnicas pioneiras é conhecida como observador de Luenberger, que é baseada em um observador linear e invariante no tempo (LTI), no qual a dinâmica do erro de estimação é um sistema autônomo, isto é, a trajetória do erro só depende das condições iniciais na ausência de distúrbios (LUENBERGER, 1971).

A teoria de observadores está associada intimamente ao sistema observado, ou seja, quantidade de estados, dinâmica do processo e etc. Pode ser que a diferença entre o estado observado e o estado real, ou seja, o erro de observação  $e_o$ , seja diferente de zero, ou ainda, apresente trajetória instável. Esse fenômeno pode ocorrer quando os sinais disponíveis não apresentam informações sobre o estado a ser observado. Um exemplo clássico, são os sistemas nos quais existem estados que não produzem efeitos nas saídas medidas. Para esses casos utiliza-se na literatura o termo observabilidade, que é extensamente estudado e avaliado nos trabalhos de E. Kalman na década de 60 e especificamente em (KALMAN, 1959).

Esse capítulo tem o objetivo de apresentar os fundamentos dos observadores de estados necessários para a aplicação em compreensão das técnicas dos outros capítulos, assim como demonstrar as contribuições sobre observadores nesse trabalho. O tópico 4.1 apresenta o observador de Luenberger indicando algumas de suas características, em que são realizadas avaliações com relação ao observador descrito. Posteriormente, na Seção 4.2, é demonstrada a

equivalência entre modelos em espaço de estados e como utilizar essa propriedade para obter uma nova classe de observadores, apresentando suas características e realizando avaliações em relação ao seus desempenhos.

#### 4.1 O observador de Luenberger

As análises e observações realizadas nesse trabalho são baseados no observador de Luenberger. Nele utilizam-se dois sinais conhecidos: o sinal de controle e a saída medida do processo real aplicados a um modelo matemático baseado no modelo do processo.

##### 4.1.1 Sistemas contínuos

O processo que terá seu estado mensurado por meio do observador pode ser representado em espaço de estados como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{B}_1 q(t), \\ x(t_0) = x_{t_0}, \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}_1 q(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

em que, o tempo  $t \in \mathbb{R}$ , os estados  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , o sinal de controle  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , a perturbação  $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  a saída  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ . As matrizes do sistema 4.1 são constantes e apresentam dimensões:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_q)}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)}$  e  $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_q)}$ . A condição inicial do sistema é representada por  $x_{t_0}$ , com dimensão compatível com o estado  $x(t)$ .

A equação do sistema do observador no tempo contínuo apresenta o mesmo formato com as mesmas matrizes. O objetivo é estimar os estados de 4.1 com condições iniciais e perturbações limitadas e finitas no tempo. Nessa conjectura, se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável tem-se que é possível construir o observador

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{C}x(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t)), \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_{t_0} \end{cases} \quad (4.2)$$

em que as dimensões são compatíveis com o sistema 4.1. A partir disso pode-se considerar erro de estimação como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (4.3)$$

e sua derivada pode ser obtida da forma

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2u(t) + \mathbf{B}_1q(t)) - (\mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{B}_2u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{C}x(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t))), \quad (4.4)$$

e, com algum algebrismo obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})e(t) + \mathbf{B}_1q(t), \\ e(t_0) = x_{t_0} - \hat{x}_{t_0}, \end{cases} \quad (4.5)$$

em que a matriz  $\mathbf{L}$  é o ganho do observador e pode ser sintonizado de maneira livre. Na situação apresentada, no qual se conhece as matrizes do sistema, o projeto do observador é objetivamente o projeto do ganho  $\mathbf{L}$  que pode ser feito pelos métodos clássicos de atribuição dos autovalores ou usando métodos de otimização eficientes por ser um problema de natureza convexa, como será apresentado nos capítulos posteriores com o uso de LMIs.

A solução do sistema resultante para o erro de estimação é um resultado clássico de sistemas lineares que pode ser verificado em Williams e Lawrence (2007). Sem perda de generalidade trabalhando com sistemas lineares, pode-se considerar que a condição inicial  $t_0 = 0$  obtém a solução 4.1.1 via transformada de Laplace. Tem-se como necessários que os sinais  $u(t)$  e  $q(t)$  possuam transformada de Laplace, logo, são limitados de maneira que  $|q(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \forall t \in \mathbb{R}$ , ou seja, existem  $M$  e  $\sigma_0$  que satisfazem a condição (LATHI, 2009). Assim, o sistema 4.1.1 pode ser escrito como

$$E(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1}x_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{B}_1Q(s), \quad (4.6)$$

fazendo a transformada inversa e usando a propriedade de convolução dos sinais obtém-se

$$e(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{LC})t}e_0 + \int_0^t e^{(\mathbf{A}-\mathbf{LC})(t-\tau)}\mathbf{B}_1q(\tau)d\tau = \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t), \quad (4.7)$$

e, dessa forma, quando  $e(t) = 0$  tem-se  $x(t) = \hat{x}(t)$ . Mediante a sintonia do ganho do observador  $\mathbf{L}$  para sistemas observáveis, pode-se alocar os autovalores  $\lambda$  da matriz de forma que sua parte real seja  $\Re\{\lambda\} < 0$ .

**Teorema 4.1.1 (Convergência do erro de predição)** Quando  $q(t) \rightarrow 0$ , em um tempo finito  $T_\sigma$  e  $\Re\{\lambda\} < 0$  o erro de predição  $e(t)$  converge para zero em  $T_\sigma + T_e$ .

*Prova:* O termo  $\mathcal{F}_1(t)$  decai de forma exponencial com tempo de decaimento  $T_e$  ao qual pode-se considerar o valor da exponencial como nulo. O termo  $\mathcal{F}_2(t)$  é a convolução de uma exponencial negativa com tempo de decaimento  $T_e$  e a perturbação com tempo de

decaimento  $T_\sigma$ . Assim, por definição, a duração do sinal resultante da convolução equivale a soma da duração dos sinais convolucionados.

O tempo necessário para o erro de observação convergir para zero pode ser sintonizado a partir da escolha do ganho do observador  $L$ , pois age diretamente em  $T_e$ . Porém, a sintonia do ganho deve ser realizada com cautela por questões de estabilidade e agressividade. O tempo  $T_\sigma$  depende apenas da perturbação e não pode ser alterado usando essa topologia de observador. Análises sobre a influência das perturbações e sintonia dos observadores serão realizadas nos tópicos posteriores.

#### 4.1.2 Sistemas discretos no tempo

A exposição do observador de Luenberger realizada no tópico anterior para sistemas contínuos será realizada nessa seção para sistemas discretos ou amostrados de maneira breve, destacando as particularidades. O processo que será observado pode ser representado em espaço de estados e possui a estrutura

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_2u(k-d) + \mathbf{B}_1q(k), \\ x(k_0) = x_{k_0}, \\ y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}_1q(k), \end{cases} \quad (4.8)$$

em que, o tempo  $k \in \mathbb{N}$ , os estados  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , o sinal de controle  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , a perturbação  $q(k) \in \mathbb{R}^{n_q}$  e a saída  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ . As matrizes do sistema 4.8 apresentam dimensões:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_q)}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)}$  e  $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_q)}$ . A condição inicial do sistema é representada por  $x_0$ , com dimensão compatível ao do estado  $x(k)$ .

No processo se, o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  pode-se construir o observador na forma:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \mathbf{A}\hat{x}(k) + \mathbf{B}_2u(k) + \mathbf{L}(\mathbf{C}x(k) - \mathbf{C}\hat{x}(k)), \\ \hat{x}(k_0) = \hat{x}_{k_0}, \end{cases} \quad (4.9)$$

cujo as dimensões são compatíveis com o processo 4.9. O erro de estimação pode ser definido como

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k), \quad (4.10)$$

e sua dinâmica é da forma

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = (\mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_2u(k) + \mathbf{B}_1q(k)) - (\mathbf{A}\hat{x}(k) + \mathbf{B}_2u(k) + \mathbf{L}(\mathbf{C}x(k) - \mathbf{C}\hat{x}(k))), \quad (4.11)$$

que pode ser sintetizado na expressão

$$\begin{cases} e(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})e(k) + \mathbf{B}_1 q(k), \\ e(k_0) = x_{k_0} - \hat{x}_{k_0} \end{cases} \quad (4.12)$$

no qual a matriz  $\mathbf{L}$  é o ganho do observador que pode ser sintonizado livremente. Na ausência de incertezas e conhecendo matrizes do sistema, o projeto do observador é objetivamente o projeto do ganho  $\mathbf{L}$ , que pode ser realizado por métodos clássicos de atribuição dos autovalores ou usando métodos de otimização eficientes por ser um problema de natureza convexa, como será apresentado nos capítulos posteriores com o uso de LMIs.

A solução do sistema resultante para o erro de estimação pode ser feita de maneira progressiva por substituição direta ou no uso de soluções clássicas de sistemas discretos (WILLIAMS; LAWRENCE, 2007). Para simplificação da análise será usado o método de substituição direta por ser mais intuitivo. Semelhante ao caso contínuo, tem-se uma restrição com relação ao tipo de perturbação; ela deverá ser menor que um sinal exponencial  $r_0^k$ , para, assim possuir transformada Z (LATHI, 2009).

Substituindo os valores do tempo discreto  $k$  realizando o avanço do sistema obtém-se

$$\begin{cases} e(1) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})e(0) + \mathbf{B}_1 q(0), \\ e(2) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^2 e(0) + (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{B}_1 q(0) + \mathbf{B}_1 q(1), \\ \vdots \\ e(n) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^n e(0) + \sum_{i=1}^n [(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^{n-i} \mathbf{B}_1 q(i)] = \mathcal{F}_1(k) + \mathcal{F}_2(k), \end{cases} \quad (4.13)$$

no qual, por definição, o erro de estimação  $e(k) = 0$  é análogo à  $\hat{x}(k) = x(k)$ . Por meio da sintonia do ganho do observador  $\mathbf{L}$ , para sistemas observáveis, pode-se alocar os autovalores  $\lambda$  da matriz de forma que seu módulo satisfaça  $|\lambda| < 1$ . Então, na ausência de perturbações, tem-se o termo  $\mathcal{F}_2(k) = 0$  e, assim, o erro de estimação tende a zero da maneira exponencial com a velocidade do maior autovalor de  $\lambda$ .

**Teorema 4.1.2 (Convergência do erro de predição)** *Quando  $q(k) \rightarrow 1$  em um tempo finito  $T_\sigma$  e  $\|\lambda\| < 0$  o erro de predição  $e(t)$  converge para zero em  $T_\sigma + T_e$ .*

**Prova:** O termo  $\mathcal{F}_1(t)$  decai de forma exponencial e, assim, existe um valor suficientemente pequeno  $\varepsilon$  que pode-se considerar  $\|\mathcal{F}_1(k)\| \leq \varepsilon$  como zero, o tempo mínimo necessário

para isso ocorra é  $T_e$ . O termo  $\mathcal{F}_2(t)$  é a convolução discreta de uma exponencial decrescente, também com tempo de decaimento  $T_e$ , e a perturbação com tempo de decaimento  $T_\sigma$ . Assim, por definição, a duração do sinal resultante da convolução equivale a soma da duração dos sinais convolucionados.

De forma análoga ao caso contínuo, o tempo necessário para o erro de observação convergir para zero pode ser sintonizado a partir da escolha do ganho do observador  $\mathbf{L}$ , pois age diretamente em  $T_e$ . O tempo  $T_\sigma$  depende apenas da perturbação e não pode ser alterado usando essa topologia de observador. Análises sobre a influência das perturbações e sintonia dos observadores serão realizadas nos tópicos posteriores.

#### 4.1.3 Análise de desempenho

Nas seções anteriores, foram impostas algumas restrições com relação à perturbação  $q(t)$  ou  $q(k)$  para os casos em tempo contínuo e discreto, respectivamente. Nesse tópico, serão expostos alguns dos motivos dessas restrições e como a natureza da perturbação tem influência na resposta do observador.

A partir dos teoremas 4.1.1 e 4.1.2 tem-se que, para qualquer condição inicial com uma sintonia apropriada para o ganho do observador  $\mathbf{L}$ , o erro de estimação tende a zero na ausência de perturbações. Porém, na presença de perturbações, a convergência e o desempenho também dependem da dinâmica da perturbação.

Conceitos importantes para essa avaliação são as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , assim como a definição de espaço de Hardy, que foi apresentada detalhadamente em (BOYD *et al.*, 1994). Nesse trabalho, é suficiente definir o espaço de Hardy  $\mathcal{H}_2$  como o espaço das funções complexas analíticas no semiplano direito aberto e que tem norma limitada. Algumas propriedades decorrentes são: Funções analíticas podem ser localmente expandidas em séries de Taylor e apresentam transformada de Laplace. Tem-se também que todas as funções de transferência estáveis são analíticas no semiplano direito aberto. De maneira intuitiva em tempo contínuo, seja a função  $h(t)$  (relacionando a entrada  $q(t)$  com a saída  $y(t)$ ) com transformada de Laplace  $\mathbf{H}(s)$  pertencente ao espaço de Hardy, então aplicando a definição da norma  $\mathcal{H}_2$  a esquerda

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_0^\infty h^\top(t)h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Tr}(\mathbf{H}^*(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)) d\omega, \quad (4.14)$$

e em tempo discreto ou amostrado

$$\|h(k)\|_2^2 = \mathbf{Tr} \left( \sum_{k=1}^{\infty} h^\top(k) h(k) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{tr} (\mathbf{H}^*(j\omega) \mathbf{H}(j\omega)) d\omega, \quad (4.15)$$

em que a direita utiliza-se o Teorema de Parseval (BOYD *et al.*, 1994). Dessa forma, expõe-se a dualidade de tempo-frequência para a norma.

#### 4.1.3.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Como aplicação, considere os sistemas 4.1 e 4.8 com  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$  para satisfazer a restrição de sistema estritamente próprio e ainda  $q(t)$  e  $q(k)$  como ruído branco de média nula. Assim, a esperança matemática  $\mathbf{E}\{q(t)\} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{E}\{q(k)\} = \mathbf{0}$  e a correlação é a matriz identidade. O objetivo é minimizar a variância do erro de estimação por meio do projeto do ganho do observador em tempo contínuo e discreto. Trata-se de um problema clássico que pode ser escrito por meio de um procedimento convexo de otimização descrito em (DUAN; YU, 2013). Em tempo contínuo pode-se escrever como

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \\ \min\{\mathbf{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathcal{P} \mathbf{B})\}, \\ \mathbf{A}^\top \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} < \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.16)$$

no qual  $\mathcal{P}$  é uma variável de decisão,  $\|h(k)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathcal{P} \mathbf{B})$  e o resultado do problema de otimização computa um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema, ou seja, o valor obtido é igual ou superior à norma real caso seja encontrada uma solução factível. Para a análise em tempo discreto pode-se formular o problema como

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \\ \min\{\mathbf{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathcal{P} \mathbf{B})\}, \\ \mathbf{A}^\top \mathcal{P} \mathbf{A} - \mathcal{P} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} < \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.17)$$

O procedimento pode ser realizado para o sistema do erro, avaliando a influência de  $q(t)$  ou  $q(k)$  no erro de estimação. Dessa forma, é possível reescrever as expressões de maneira conveniente para os sistemas 4.1.1 e 4.1.2, fazendo com que o ganho do observador seja também obtido no problema de otimização e, assim, encontrar  $\mathbf{L}$  ótimo em relação a norma  $\mathcal{H}_2$  quando o

par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável. Para a análise em tempo contínuo pode-se formular o problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}, \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{X} = \mathcal{X}^\top, \\ \min\{\text{Tr}(\mathcal{X})\}, \\ \mathbf{A}^\top \mathcal{P} - \mathbf{C}^\top \mathcal{L}^\top + \mathcal{P} \mathbf{A} - \mathcal{L} \mathbf{C} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} < \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathbf{B}_1^\top \mathcal{P} \\ \star & \mathcal{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.18)$$

e em tempo discreto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}, \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{X} = \mathcal{X}^\top, \\ \min\{\text{Tr}(\mathcal{X})\}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathbf{A}^\top \mathcal{W} - \mathbf{C}^\top \mathcal{L}^\top & \mathbf{C}^\top \\ \star & \mathcal{P} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathbf{B}_1^\top \mathcal{P} \\ \star & \mathcal{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.19)$$

em que,  $\rho^2 = \text{Tr}(\mathcal{X})$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_2 = \rho$ .

#### 4.1.3.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Nesse tópicos também será avaliado o desempenho do sistema sujeito a perturbações pertencentes ao espaço de Hardy, porém sob a perspectiva da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , baseada nas referências (DUAN; YU, 2013; BOYD *et al.*, 1994). De forma intuitiva, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é o valor da amplificação máxima da relação perturbação-saída para todas as combinações de canais e em todas as frequências. A avaliação da norma  $\mathcal{H}_\infty$  permite trabalhar com distúrbios diferentes do ruído branco, basta que seja um sinal de energia, ou seja, para sistemas contínuos

$$\int_0^\infty q(\tau)^\top q(\tau) d\tau < \infty \iff q(t) \in \mathcal{L}_2 \quad (4.20)$$

e para sistemas discretos

$$\sum_{n=0}^\infty q(k)^\top q(k) < \infty \iff q(k) \in \mathcal{L}_2 \quad (4.21)$$



e usando a própria definição pode-se escrever a saída como sendo menor ou igual que a perturbação vezes um ganho  $\gamma$  para cada frequência possível e, assim, o maior valor de  $\gamma$  é um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Ou seja, em tempo contínuo

$$\begin{cases} \|y(t)\|_2 \leq \gamma \|q(t)\|_2, \\ \|h(t)\|_\infty < \gamma, \end{cases} \quad (4.22)$$

e em tempo discreto

$$\begin{cases} \|y(k)\|_2 \leq \gamma \|q(k)\|_2, \\ \|h(k)\|_\infty < \gamma. \end{cases} \quad (4.23)$$

A formulação do problema de otimização pode ser obtida por meio das expressões anteriores e é um resultado clássico da teoria de controle ótimo com LMIs intitulado *Bounded Real Lemma*. Assim, a formulação será apresentada diretamente para os sistemas 4.1 e 4.8, como descrito em (DUAN; YU, 2013) no qual a norma  $H_\infty$  pode ser computada a partir da solução do problema

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} & \mathcal{P} \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}^\top \mathbf{D}_1 \\ \star & \mathbf{D}_1^\top \mathbf{D}_1 - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.24)$$

e em tempo discreto

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \mathcal{P} \mathbf{A} - \mathcal{P} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} & \mathbf{A}^\top \mathcal{P} \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}^\top \mathbf{D} \\ \star & \mathbf{B}^\top \mathcal{P} \mathbf{B} + \mathbf{D}^\top \mathbf{D} - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.25)$$

no qual  $\mu = \gamma^2$ .

Semelhante à análise realizada para a norma  $\mathcal{H}_2$ , com relação ao sistema do erro, pode-se fazer o análogo para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Porém, nesse caso, a sintonia do ganho do observador  $\mathbf{L}$  é obtido por meio de uma função custo que minimiza a amplificação máxima dos canais de entrada-saída de perturbação, ou seja, atua no pior caso. Essa característica é, às vezes,

apresentada na literatura como “sintonia para perturbações desconhecidas”, pois independente da frequência da perturbação, o pior caso foi atenuado.

Para formular o problema na forma de LMIs, pode-se reescrever as expressões de maneira conveniente para os sistemas 4.1.1 e 4.1.2, fazendo com que o ganho do observador seja obtido no problema de otimização encontrando o  $\mathbf{L}$  ótimo em relação a norma  $\mathcal{H}_\infty$  quando o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável. As manipulações necessárias para transformar as LMIs 4.24 e 4.25 em 4.26 e 4.27 foram descritas em (DUAN; YU, 2013). Para sistemas em tempo contínuo, pode-se formular o problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{Z}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\top \mathcal{P} - \mathbf{C}^\top \mathcal{Z}^\top + \mathcal{P} \mathbf{A} - \mathcal{Z} \mathbf{C} & \mathcal{P} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}^\top \\ \star & -\mathbf{I} & \mathbf{D}^\top \\ \star & \star & -\mu \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

e de forma similar no caso discreto

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{Z}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \mathbf{A}^\top \mathcal{P} - \mathbf{C}^\top \mathcal{Z}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{C}^\top \\ \star & \mathcal{P} & \mathcal{P} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \mathbf{D}_1 \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.27)$$

em que,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{Z}$  e  $\mathcal{H}_\infty = \gamma$ .

#### 4.1.3.3 D-Estabilidade quadrática

Os problemas de otimização para redução das normas ou outras funções de custo podem produzir um ganho de realimentação de estados  $\mathbf{K}$  ou ganho do observador  $\mathbf{L}$  que não são possíveis de implementar na prática, ou ainda, gerar respostas que são pouco robustez e, então, muito sensíveis a variações não modeladas. Mediante a um problema formulado por LMIs é possível criar uma região genérica no plano complexo desde que ela seja simétrica em relação ao

eixo das abscissas. Ou seja, se a equação característica da região puder ser escrita da forma

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}} = \mathbf{H} + s\mathbf{M} + s^*\mathbf{M}^\top \quad (4.28)$$

com as matrizes aplicadas a LMI

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A} \mathcal{P}) + \mathbf{M}^\top \otimes (\mathbf{A} \mathcal{P})^\top < \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.29)$$

no qual a notação  $\otimes$  significa produto de Kronecker (DUAN; YU, 2013). Se as matrizes do sistemas aplicados a LMI tornam ela factível, então ele pode ser chamado de quadraticamente D-estável. Em (DUAN; YU, 2013) são descritas diversas regiões uteis e como criar intersecções entre elas, atentando para o fato que os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são obtidos da mesma forma independentemente se é um sistema amostrado ou contínuo.

Pode-se formular um problema de projeto substituindo a matriz de malha fechada na expressão anterior e reorganizando-a na forma de LMIs e, assim, para o caso do observador  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ , que tem os mesmos autovalores que seu sistema *dual*  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^\top$ , obtém-se

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{Z}, \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}^\top \mathcal{P} - \mathbf{C}^\top \mathcal{Z}^\top) + \mathbf{M}^\top \otimes (\mathbf{A}^\top \mathcal{P} - \mathbf{C}^\top \mathcal{Z}^\top)^\top < \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.30)$$

no qual  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{Z}$ .

#### 4.1.3.4 Resposta em frequência

O observador também pode ser avaliado usando ferramentas no domínio da frequência como, por exemplo, analisando a relação entre a entrada de perturbação e a saída do erro de estimação  $\frac{E(s)}{Q(s)}$  ou  $\frac{E(z)}{Q(z)}$ . A partir dessa relação, pode-se obter o valor da amplificação ou atenuação da perturbação no sistema do erro em regime permanente. Essa análise pode ser realizada aplicando a transformada de Laplace aos sistemas 4.1.1 e 4.1.2 para o tempo contínuo e tempo discreto, respectivamente. E, então, obtendo

$$\frac{E(s)}{Q(s)} = (s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC}))^{-1} \mathbf{B}_1, \quad (4.31)$$

$$\frac{E(z)}{Q(z)} = (z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC}))^{-1} \mathbf{B}_1. \quad (4.32)$$

#### 4.1.3.5 Exemplo

Com o objetivo de explicar o uso dos observadores com essa metodologia, foram aplicados os métodos de sintonia do ganho do observador  $\mathbf{L}$  para um processo instável em malha aberta estudado em (ZHONG, 2004; ZHONG, 2005; SANZ *et al.*, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2021). Será avaliado a relação entre a perturbação  $q(t)$  e o erro de saída de estimação  $y_e(t)$ , que, para esse exemplo de sistema estritamente próprio,  $y_e(t) = e(t)$ , no domínio do tempo e no domínio da frequência. O processo sem atraso contínuo e discreto foi representado respectivamente como

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad P(z) = \frac{0,1052}{z-1,1052} \quad (4.33)$$

no qual a representação em espaço de estados na forma canônica observável no caso contínuo compõe  $\mathbf{A} = 1$ ,  $\mathbf{B}_1 = 1$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$  e no caso discreto  $\mathbf{A} = 1,1052$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0,5943$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$ .

Por se tratar de um sistema de primeira ordem relativamente simples, a sintonia obtida por ambos os métodos é bastante próxima. Os valores de norma obtidos foram  $\mathcal{H}_2 = 0,5774$ ,  $\mathcal{H}_\infty = 0,6667$  e  $\mathcal{H}_2 = 0,1646$ ,  $\mathcal{H}_\infty = 4,2448$  para o caso contínuo e discreto, respectivamente. Os valores para os autovalores de malha fechada foram limitados por uma região circular no plano complexo com centro em 1 e raio 0.5 no caso contínuo e para o caso discreto uma região por duas barras verticais ao qual a parte real do polo satisfaz  $0,86 < \Re\{p\} < 1$ .

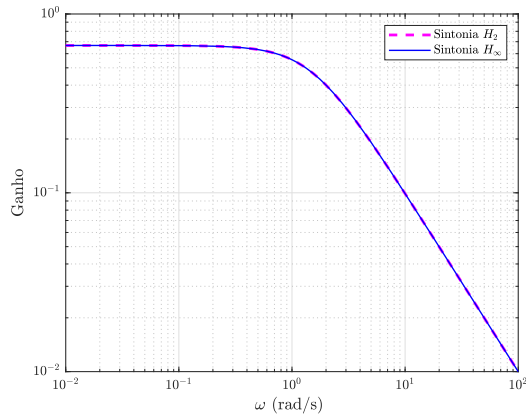
Para demonstrar a influência da sintonia baseada em normas, foi apresentada a curva de resposta em frequência do erro de estimação para a entrada de perturbação na Fig.10a e na Fig. 10b. O desempenho dos observadores foram apresentados em duas simulações, caso contínuo e caso discreto, com tempo de 30 segundos com condição inicial  $x(0) = 1$ ,  $\hat{x}(0) = 0$ , perturbação tipo pulso unitário iniciando no tempo 5 segundos e encerrando em 10 segundos.

No caso contínuo, o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  foram  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_\infty = 2,5$  que obtém polo em  $-1,5$ . No caso discreto o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  encontrou  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_\infty = 0,2452$  que obtém polo em  $-0,8600$ . As matrizes que comprovam a solução das LMIs estão dispostas no Apêndice A nas Eq. A.1, Eq.A.2, Eq.A.3 e Eq. A.4, respectivamente.

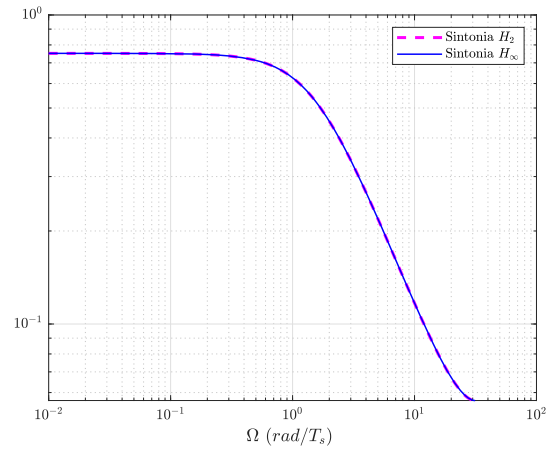
Nas Fig.10a e Fig. 10b, com a resposta em frequência, tem-se o ganho praticamente constante em baixas frequências e um decaimento de 20dB/década a partir do polo, característica

Figura 10 – Resposta em frequência  $\frac{e}{q}$  de estimação dos observadores.

(a) Contínuo.



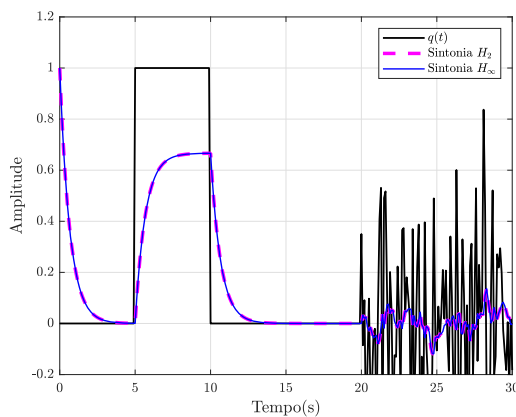
(b) Discreto.



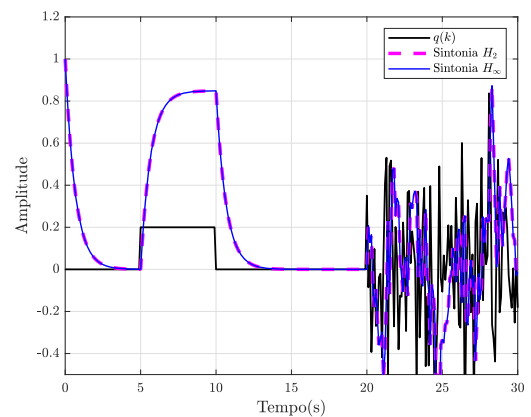
Fonte: Autoria própria.

Figura 11 – Erro de estimação na simulação para perturbações convenientes.

(a) Contínuo.



(b) Discreto.



Fonte: Autoria própria.

do sistema dinâmico do erro. Esse comportamento suave possui normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  pequenas, como esperado.

Para as simulações nas Fig.11a e Fig.11b, é possível verificar a convergência do sistema do erro de estimação com constante de tempo correspondente ao polo e a rejeição do pulso como a soma de sua duração com a constante de tempo de rejeição. Por fim, tem-se um bom desempenho com relação ao ruído, que pode ser verificado na simulação a partir de  $t = 20$ , como esperado devido a atenuação em altas frequências em Fig.10a e Fig.10b.

## 4.2 Observadores aumentados

Com a análise do observador de Luenberg, realizada do tópico anterior, foi possível perceber a relação da entrada de perturbação  $q(t)$  ou  $q(k)$  com a convergência ou desempenho do observador. Esse resultado pode ser estendido para outras características do processo real, em que o ruído de medição pode ser representado no canal de perturbação caso seja suprimida a dinâmica do processo, o que é útil para fins de análise. Tem-se ainda que incertezas de modelagem estruturadas ou não-estruturadas também podem ser representadas por uma entrada equivalente no canal de perturbação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Por motivos de organização e questões didáticas, a análise dos observadores aumentados em tempo contínuo e em tempo discreto serão realizadas em tópicos distintos.

### 4.2.1 Observadores aumentados: Tempo contínuo

Novamente a saída  $y(t)$  está disponível para medição e  $u(t)$  é um sinal de escolha livre e conhecido. As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  são constantes e conhecidas com o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  observável. A perturbação  $q(t)$  é localmente integrável e limitada de maneira que possui transformada de Laplace, como o caso anterior (LATHI, 2009). Assim, pode-se construir um sinal denominado perturbação filtrada como

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Delta(s)\mathcal{L}\{q(t)\}\}, \quad (4.34)$$

no qual o operador  $\mathcal{L}\{\}$  representa a transformada de Laplace, o  $\Delta(s)$  é um filtro que possui grau  $r$  diferenciador e  $v(t)$  é a perturbação filtrada.

Tem-se que  $q(t)$  é  $r + 1$  vezes continuamente diferenciável com cada uma dessas derivadas sendo limitadas por uma constante  $D_{r+1}$ , respectivamente. Isso implica em uma perturbação filtrada  $v(t)$  quadraticamente integrável e, ainda, que  $\mathcal{L}^{-1}\{s^{r+1}q(s)\}$  é um sinal de energia, o que permite realizar as análises de norma como feito para o observador de Luenberger clássico. Satisfazendo as restrições, pode-se reescrever o sistema com estados aumentados tendo como entrada de perturbação  $v(t)$  ao invés de  $q(t)$  e, dessa forma, a perturbação  $q(t)$  pode ser reescrita em função de  $v(t)$  como

$$\begin{cases} \dot{x}_\Delta(t) = \mathbf{a}x_\Delta(t) + \mathbf{b}_1 v(t), \\ q(t) = \mathbf{c}x_\Delta(t) + \mathbf{d}_1 v(t), \\ x_\Delta(t_0) = x_{\Delta_0} \end{cases} \quad (4.35)$$

a dimensão dos sinais e as matrizes do sistema 4.35 são compatíveis com o filtro  $\Delta$  em 4.34 e, assim,  $x_\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\Delta}$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{(n_\Delta \times n_\Delta)}$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{(n_\Delta \times n_q)}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{(n_q \times n_\Delta)}$  e  $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}^{(n_q \times n_q)}$ .

Escrevendo a perturbação e o filtro no domínio da frequência, é possível inferir o comportamento da perturbação filtrada em casos particulares. Essa característica será usada para o projeto de observadores e do controladores em tópicos posteriores. Assim,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{q(t)\} = \left( \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{a})^{-1} \mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_1 \right) \mathcal{L}\{v(t)\}, \\ \Delta(s) = \left( \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{a})^{-1} \mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_1 \right)^{-1} = \frac{v(s)}{Q(s)}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Usando o conceito de filtragem apresentado, pode-se representar o sistema 4.1 em função dos estados originais e dos estados do filtro como

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}}_{\chi(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t_0} \\ x_{\Delta t_0} \end{bmatrix}}_{\chi_{t_0}}, \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 \mathbf{c} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(t), \end{cases} \quad (4.37)$$

no qual  $\chi(t)$  é o estado aumentado constituído dos estados do sistema original e os estados do filtro. De forma análoga, a notação de uma barra sobrescrita indica que se trata de matrizes ou sinais do sistema aumentado. A dimensão do sistema aumentado é da forma:  $\chi(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_u)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_q)}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_x+n_\Delta)}$  e  $\bar{\mathbf{D}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_q)}$ .

Então, os processos descritos pelas Eq. 4.1 e 4.37 são equivalentes, em que para o sistema Eq. 4.1 tem-se a perturbação  $q(t)$  e para Eq. 4.37 a perturbação é  $v(t)$ .

Propõe-se um observador do tipo Luenberger com a estrutura do sistema aumentado, considerando que não há incerteza no atraso ou na modelagem das matrizes do sistema, se o par

$(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável tem-se que é possível construir o observador na forma

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}_{\Delta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{\chi}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_{\Delta}(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(t) + \mathbf{L} (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(t_0) \\ \hat{x}_{\Delta}(t_0) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_{t_0} \\ \hat{x}_{\Delta t_0} \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}_{t_0}}, \end{cases} \quad (4.38)$$

com as dimensões do observador compatíveis com a do sistema aumentado 4.37.

De forma compacta o sistema aumentado e o observador são representados respectivamente

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = \bar{\mathbf{A}}\chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(t) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(t), \\ y(t) = \bar{\mathbf{C}}\chi(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\hat{\chi}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\chi}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(t) + \mathbf{L} (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\hat{\chi}(t). \end{cases} \quad (4.39)$$

Pela definição, o erro de estimação de estados é dado pela subtração dos estados do modelo e do observador e, então, a dinâmica do sistema do erro de estimação pode ser escrita como

$$\dot{e}(t) = \dot{\chi}(t) - \dot{\hat{\chi}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(t) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(t) - \bar{\mathbf{A}}\hat{\chi}(t) - \bar{\mathbf{B}}_2 u(t) - \mathbf{L} (y(t) - \hat{y}(t)). \quad (4.40)$$

A análise será feita para sistemas estritamente próprios, ou seja, não há transferência da entrada diretamente para saída. Assim,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$  e com as devidas considerações a dinâmica de estimação pode ser obtida como

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) e(t) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(t), \\ e(t_0) = \chi_{t_0} - \hat{\chi}_{t_0} = e_0 \end{cases} \quad (4.41)$$

no qual a matriz  $\mathbf{L}$  é o ganho do observador que pode ser sintonizado livremente. Na ausência de incertezas e conhecendo as matrizes do sistema, o projeto do observador pode ser dividido no projeto do filtro e, depois, o projeto do ganho  $\mathbf{L}$ . Não há um método sistemático o qual garanta um filtro ideal para todos os casos possíveis, porém uma noção intuitiva sobre a escolha do tipo de filtro será obtida por meio de exemplos nas seções posteriores. Para casos particulares, no qual se conhece a dinâmica da perturbação, não sendo necessário o conhecimento da amplitude ou tempo de aplicação da mesma, tem-se como aplicar um filtro ideal que obtém a resposta



ótima. Assim como foi feito no observador de Luenberger clássico, pode-se obter o ganho  $\mathbf{L}$  por meio de um problema de otimização convexo usando LMIs.

Semelhante ao caso clássico, a solução do sistema será apresentada diretamente e difere apenas na dimensão das matrizes. As restrições necessárias para a construção do filtro são suficientes para utilizar o método usado em 4.1.1 e, assim, obter

$$e(t) = e^{(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})t} e(0) + \int_0^t e^{(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})(t-\tau)} \mathbf{B}_1 v(\tau) d\tau = \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t), \quad (4.42)$$

então, mediante a sintonia do filtro e do ganho do observador  $\mathbf{L}$  para sistemas observáveis pode-se alocar os autovalores  $\lambda$  da matriz de forma que sua parte real seja  $\Re\{\lambda\} < 0$  e escolher um filtro  $\Delta(s)$  que faça  $v(t) = 0 \forall t > t_1$  em que  $t_1$  é um tempo finito. Ou seja, com a sintonia apropriada pode-se fazer  $e(t) = 0 \forall t > t_2$ , em que  $t_2 = T_\sigma + T_e$ .

Semelhante ao caso clássico, o tempo necessário para o erro de observação convergir para zero pode ser sintonizado a partir da escolha do ganho do observador  $L$ , pois age diretamente em  $T_e$ . O tempo  $T_\sigma$  agora depende da perturbação filtrada e, assim, pode ser alterado por meio do filtro e, por consequência, da topologia de observador. Análises sobre a influência das perturbações e sintonia dos observadores serão realizadas nos tópicos posteriores.

#### 4.2.2 Observadores aumentados: Tempo Discreto

De forma análoga ao caso contínuo a saída  $y(k)$  está disponível para medição e  $u(k)$  é um sinal de escolha livre e conhecido. As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  são constantes e conhecidas com o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  observável. A perturbação  $q(k)$  é limitada de maneira que possui transformada Z (LATHI, 2009). Usando a mesma metodologia, pode-se obter o sistema da perturbação filtrada  $v(k)$  como

$$\begin{cases} x_\Delta(k+1) = \mathbf{a}x_\Delta(k) + \mathbf{b}_1 v(k), \\ q(k) = \mathbf{c}x_\Delta(k) + \mathbf{d}_1 v(k), \\ x_\Delta(k_0) = x_{\Delta_{k_0}}, \end{cases} \quad (4.43)$$

e, então, pode-se representar o sistema 4.8 em função dos estados originais e dos estados do filtro como

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_{\Delta}(k+1) \end{bmatrix}}_{\chi(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(k), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(k_0) \\ x_{\Delta}(k_0) \end{bmatrix}}_{\chi(k_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{k_0} \\ x_{\Delta k_0} \end{bmatrix}}_{\chi_{k_0}}, \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 \mathbf{c} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(k), \end{array} \right. \quad (4.44)$$

no qual  $\chi(k)$  é o estado aumentado constituído dos estados do sistema original e os estados do filtro. De forma análoga, a notação de uma barra sobrescrita indica que se trata de matrizes ou sinais do sistema aumentado. As dimensões do sistema aumentado tem forma:  $\chi(k) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_{\Delta})}$ ,  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_{\Delta}) \times (n_x+n_{\Delta})}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_{\Delta}) \times (n_u)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_{\Delta}) \times (n_q)}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_x+n_{\Delta})}$  e  $\bar{\mathbf{D}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_q)}$ .

Novamente, propõe-se um observador do tipo Luenberger com a estrutura do sistema aumentado, considerando que não há incerteza no atraso ou na modelagem das matrizes do sistema, se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável tem-se que é possível construir o observador da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}_{\Delta}(k+1) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{x}_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(k) + \mathbf{L} (y(k) - \hat{y}(k)), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(k_0) \\ \hat{x}_{\Delta}(k_0) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(k_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_{k_0} \\ \hat{x}_{\Delta k_0} \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}_{k_0}}, \end{array} \right. \quad (4.45)$$

com as dimensões do observador compatíveis com a do sistema aumentado 4.44.

De forma compacta o sistema aumentado e o observador podem ser representados respectivamente como

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\chi(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ y(k) = \bar{\mathbf{C}}\chi(k) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(k), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\chi}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\chi}(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k) + \mathbf{L} (y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\hat{\chi}(k). \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Por fim, será obtida a dinâmica do erro de estimação dos estados aumentados para modelos de sistemas estritamente próprios, que pode ser escrita como

$$\begin{cases} e(k+1) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) e(k) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ e(k_0) = \chi_{k_0} - \hat{\chi}_{k_0} = e_0 \end{cases} \quad (4.47)$$

no qual a matriz  $\mathbf{L}$  é o ganho do observador, que pode ser sintonizado livremente. De forma semelhante ao caso de tempo contínuo, na ausência de incertezas e conhecendo matrizes do sistema, o projeto do observador pode ser dividido no projeto do filtro e, depois, o projeto do ganho  $\mathbf{L}$ . Para casos particulares em que se conhece a dinâmica da perturbação tem-se como aplicar um filtro ideal que obtém a resposta ótima e o ganho  $\mathbf{L}$  pode ser obtido por meio de um problema de otimização convexa usando LMIs.

A solução do sistema resultante para o erro de estimação pode ser feita de maneira progressiva por substituição direta e, semelhante ao observador no caso clássico, tem-se uma restrição com relação ao tipo de perturbação, a perturbação filtrada deverá ser menor que um sinal exponencial  $r_0^k$ , para, assim possuir transformada Z (LATHI, 2009).

Substituindo os valores do tempo discreto  $k$  e realizando o avanço do sistema obtém-se

$$\begin{cases} e(1) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) e(0) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(0), \\ e(2) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})^2 e(0) + (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{B}}_1 v(0) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(1), \\ \vdots \\ e(n) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})^n e(0) + \sum_{i=1}^n \left[ (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})^{i-1} \bar{\mathbf{B}}_1 v(i) \right] = \mathcal{F}_1(k) + \mathcal{F}_2(k), \end{cases} \quad (4.48)$$

então, a partir sintonia do filtro e do ganho do observador  $\mathbf{L}$  para sistemas observáveis pode-se alocar os autovalores  $\lambda$  da matriz  $(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})$  de forma que satisfaça  $\|\lambda\| < 1$  e escolher um filtro  $\Delta(s)$  que faça  $v(k) = 0 \forall k > k_1$  em que  $k_1$  é um tempo finito. Ou seja, com a sintonia a apropriada pode-se fazer  $e(k) = \mathbf{0} \forall k > k_2$ , em que  $k_2 = T_\sigma + T_e$ .

Novamente tem-se que o tempo necessário para o erro de observação convergir para zero pode ser sintonizado a partir da escolha do ganho do observador  $L$ , agindo diretamente em  $T_e$ . O tempo  $T_\sigma$  depende da perturbação filtrada e, assim, pode ser alterado por meio do filtro escolhido.

### 4.2.3 Análise de desempenho

Uma análise semelhante ao realizado na Seção 4.1.3 será feita para os observadores aumentados, no entanto a metodologia difere devido a influência do filtro de perturbações no sistema final. A sintonia do filtro de perturbações se assemelha com o filtro de robustez do SFSP nos trabalhos (TORRICO *et al.*, 2013; TORRICO *et al.*, 2016; Torrico *et al.*, 2016; TORRICO *et al.*, 2018; TORRICO *et al.*, 2019; LIMA *et al.*, 2020; TORRICO *et al.*, 2021) e a escolha dos polos do filtro pode ser feitas usando o procedimento indicado nestes trabalhos. Com relação aos zeros do filtro de robustez, eles são os autovalores da matriz de estados de malha fechada do observador  $\lambda\{\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}\}$  e podem ser obtidos mediante a um problema de otimização convexo na forma de LMIs ou de maneira manual seguindo as diretrizes dos trabalhos citados.

Caso se tenha disponível informações sobre dinâmica da perturbação  $q$  pode-se escolher a mesma dinâmica para o filtro  $\Delta$  e, assim, obter uma rejeição completa da perturbação em regime permanente. Também pode-se escolher o filtro por questões de robustez para, então, ser capaz de lidar com incerteza de modelagem nas matrizes do sistema ou do atraso, normalmente acrescentando polos integradores. Existe um *trade-off* entre a ordem do filtro e o desempenho para faixa de frequências de rejeição de perturbações, sendo aconselhado utilizar filtros compatíveis com a complexidade do sistema. De forma intuitiva, a escolha dos autovalores melhoram a rejeição de perturbação em faixas de frequência específicas e limitadas, não alterando a zona ao redor ou, muitas vezes, piorando o desempenho em faixas mais distantes.

Os sistemas dos filtros nas Eq.4.35 e 4.43 devem ser expressos na forma canônica observável com os zeros mais rápidos possíveis. No domínio da frequência a restrição é satisfeita mantendo o numerador unitário, ou seja, sem zeros. Alguns exemplos clássicos estão expostos na Tabela 1 para o domínio de tempo contínuo e na Tabela 2 para o domínio de tempo discreto. Os exemplos expostos nas tabelas e suas combinações abrangem a maioria das perturbações práticas. A rejeição de perturbações combinadas pode ser feita incluindo os polos de cada perturbação separadamente, mantendo também a possível multiplicidade de polos (WILLIAMS; LAWRENCE, 2007). Para perturbações de funções harmônicas tem-se um polinômio transcendental de dimensão infinita e, dessa forma, sua implementação prática pode ser feita usando uma aproximação apropriada.

Importando o conceito dos teoremas 4.1.1, 4.1.2 para os sistemas aumentados Eq. 4.38 e Eq. 4.45, tem-se que para qualquer condição inicial com uma sintonia apropriada para o ganho do observador  $\mathbf{L}$  o erro de estimação tende a zero quando as perturbações também tendem

Tabela 1 – Dinâmicas clássicas para o filtro de perturbação: contínuo

Perturbação	Definição	$\Delta(s)$
$q(t) = a$	$a, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$	$s$
$q(t) = at + b$	$a, b, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$	$s^2$
$q(t) = a_n t^n + \dots + a_0$	$a_i, t \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}, t \geq 0$	$s^{n+1}$
$q(t) = a_0 e^{a_1 t}$	$a_0, a_1, t \in \mathbb{R}^+$	$s - a_1$
$q(t) = a_0 \sin(\omega t)$	$a_0, \omega, t \in \mathbb{R}^+$	$s^2 + \omega^2$
$q(t) = a_0 \sin(\omega t) e^{a_1 t}$	$a_1 \in \mathbb{R}, a_0, \omega, t \in \mathbb{R}^+$	$(s - a_1)^2 + \omega^2$
$q(t) = f(t) = f(t+T)$	$T, t \in \mathbb{R}^+$	$1 - e^{-sT}$

Fonte: (LATHI, 2009)

a zero. A novidade está na possibilidade de alterar a dinâmica da perturbação  $v$  usando um filtro  $\Delta$  apropriado.

Novamente será usada, o conceito das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para avaliar o desempenho do observador resultante da sintonia e do filtro escolhidos. Atentando para o fato de que as restrições devem ser atendidas por  $v$  e não mais pela perturbação original  $q$ , um exemplo clássico disso é no uso de um filtro em tempo contínuo do tipo  $\Delta(s) = s$  aplicado a perturbação  $q(t) = a$ ,  $a \in \mathbb{R} | a \neq 0$  que não pertence ao espaço de Hardy e não é um sinal de energia e dá origem a uma perturbação filtrada  $v$  que pertence ao espaço de Hardy e, então, é um sinal de energia. Nesse trabalho, aconselha-se que a sintonia do ganho do observador aumentado  $L$  seja feita por meio do problema de otimização de uma norma ( $H_2$  ou  $H_\infty$ , por exemplo) em um problema de otimização definido por LMIs.

#### 4.2.3.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Como aplicação, considere os sistemas 4.37 e 4.44 com  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$  que, por consequência,  $\bar{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{0}$  para satisfazer a restrição de sistema estritamente próprio e ainda  $v(t)$  e  $v(k)$  como ruído branco de média nula. Assim, a esperança matemática  $\mathbf{E}\{v(t)\} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{E}\{v(k)\} = \mathbf{0}$  e a correlação é a matriz identidade. Então, para esse problema, o objetivo é minimizar a variância

Tabela 2 – Dinâmicas clássicas para o filtro de perturbação: discreto

Perturbação	Definição	$\Delta(z)$
$q(k) = a$	$a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$	$1 - z^{-1}$
$q(k) = ak + b$	$a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$	$(1 - z^{-1})^2$
$q(k) = a_n k^n + \dots + a_0$	$a_i \in \mathbb{R}, i, k \in \mathbb{N}$	$(1 - z^{-1})^{n+1}$
$q(k) = a_0 a_1^k$	$a_0, a_1 \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$	$1 - a_1 z^{-1}$
$q(k) = a_0 \sin(\omega_0 k)$	$a_0, \omega_0 \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$	$1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$
$q(k) = a_0  a_1 ^k \sin(\omega k)$	$a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \omega_0 \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$	$1 - 2 a_1 \cos(\omega_0)z^{-1} +  a_1 ^2 z^{-2}$
$q(k) = f(k) = f(k + T_d)$	$T \in \mathbb{R}^+   \frac{T}{T_s} \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$	$1 - z^{-T_d}$

Fonte: (LATHI, 2009)

do erro de estimação a partir do projeto do ganho do observador em tempo contínuo e discreto.

O procedimento será realizado para o sistema do erro, avaliando a influência de  $v(t)$  ou  $v(k)$  no erro de estimação. Dessa forma, é possível reescrever as expressões de maneira conveniente para os sistemas 4.41 e 4.47, e usando como saída os termos  $y_e(t) = \bar{\mathbf{C}}e(t)$  e  $y_e(k) = \bar{\mathbf{C}}e(k)$  para o caso contínuo e discreto, respectivamente. O procedimento faz com que o ganho do observador seja também obtido no problema de otimização e, assim, encontrar  $\mathbf{L}$  ótimo em relação a norma  $\mathcal{H}_2$  quando o par  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$  é observável (DUAN; YU, 2013). Para a análise em tempo contínuo, pode-se formular o problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}, \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{X} = \mathcal{X}^\top, \\ \min\{\text{Tr}(\mathcal{X})\}, \\ \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{X}^\top + \mathcal{P} \bar{\mathbf{A}} - \mathcal{X} \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}^\top \bar{\mathbf{C}} < \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \bar{\mathbf{B}}_1^\top \mathcal{P} \\ \star & \mathcal{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.49)$$

e em tempo discreto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}, \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{X} = \mathcal{X}^\top, \\ \min\{\text{Tr}(\mathcal{X})\}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{W} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top & \bar{\mathbf{C}}^\top \\ \star & \mathcal{P} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \bar{\mathbf{B}}_1^\top \mathcal{P} \\ \star & \mathcal{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.50)$$

em que,  $\rho^2 = \text{Tr}(\mathcal{X})$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_2 = \rho$ .

#### 4.2.3.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Nesse t3pico o desempenho do sistema sujeito a perturba33es  $q(t)$  ser33 avaliado e sintonizado a partir da an33lise da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Novamente, para o uso dessa t3cnica basta que o sinal de entrada de perturba333o seja um sinal de energia, mesmo que o objetivo seja reduzir a influ3ncia de  $q$  no erro  $e$  foi demonstrado nessa se3333o que esse problema 3 semelhan3e a reduzir norma  $\mathcal{H}_\infty$  da perturba333o filtrada  $v$  em  $e$ .

Ent33o, o problema de otimiza333o pode ser formulado a partir de LMIs usando *Baunded Real Lemma*. Assim, a formula3333o ser33 apresentada diretamente para os sistemas aumentados 4.41 e 4.47, fazendo com que o ganho do observador seja obtido no problema de otimiza3333o encontrando o  $\mathbf{L}$  3timo em rela3333o a norma  $\mathcal{H}_\infty$  no dom3nio cont3nuo com entrada  $v(t)$  para sa3da  $y_e(t) = \bar{\mathbf{C}}e(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(t)$  e para o discreto com entrada  $v(k)$  para sa3da  $y_e(k) = \bar{\mathbf{C}}e(k) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(k)$ . Com a restri3333o do par  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$  observ3vel (DUAN; YU, 2013). Para sistemas em tempo cont3nuo pode-se formular o problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top + \mathcal{P} \bar{\mathbf{A}} - \mathcal{L} \bar{\mathbf{C}} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{C}^\top \\ \star & -\mathbf{I} & \bar{\mathbf{D}}^\top \\ \star & \star & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.51)$$

e de forma similar no caso discreto

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}^\top \\ \star & \mathcal{P} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.52)$$

em que,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_\infty = \gamma$ .

#### 4.2.3.3 D-Estabilidade quadrática

A definição de D-Estabilidade quadrática e as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  que formam não são alteradas significativamente com a introdução do sistema aumentado, modificando apenas a dimensão das matrizes do sistema. Assim, o procedimento que originou a LMI 4.53 pode ser adaptado para o sistema aumentado como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{P} + \mathbf{M} \otimes (\bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top) + \mathbf{M}^\top \otimes (\bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top)^\top < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4.53)$$

no qual  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$ .

Uma configuração clássica no plano complexo são círculos que podem ser definidos escolhendo a localização do centro  $q$  e o raio  $r$  e, então, obter as matrizes

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

ou barras verticais com parte real constante  $\alpha$  e  $\beta$ , de forma que os autovalores satisfaçam  $\beta < \lambda < \alpha$  que é equivalente a fazer as matrizes

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Se a LMI 4.53 for factível, então os autovalores  $\lambda$  da matriz de malha fechada  $\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}$  estão contidos na região de D-estabilidade.



#### 4.2.3.4 Resposta em frequência

Os observadores aumentados também podem ser avaliados no domínio da frequência analisando a relação entre a entrada de perturbação e a saída do erro de estimação  $\frac{E(s)}{Q(s)}$ . Novamente, essa relação indica o valor da amplificação ou atenuação da perturbação no sistema do erro em regime permanente. A análise pode ser feita aplicando a transformada de Laplace aos sistemas dos erros Eq. 4.41 e Eq.4.47 obtendo a relação  $\frac{E(s)}{v(s)}$  e, a partir da definição  $\Delta(s) = \frac{v(s)}{Q(s)}$ , pode-se alcançar a relação para a perturbação original. Para sistemas contínuos

$$\frac{E(s)}{Q(s)} = (s\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 \Delta(s), \quad (4.56)$$

para o caso discreto

$$\frac{E(z)}{Q(z)} = (z\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 \Delta(z). \quad (4.57)$$

#### 4.2.3.5 Exemplo

A metodologia descrita nos itens anteriores será usada para sintonizar o observador aumentado para um processo instável em malha aberta estudado na seção 4.1.3.5 e na literatura em (ZHONG, 2004; ZHONG, 2005; SANZ *et al.*, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2021). Será avaliada a relação entre a perturbação  $q(t)$  e o erro de saída de estimação  $y_e(t) = \bar{\mathbf{C}}e(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(t)$ , no domínio do tempo e no domínio da frequência. O processo sem atraso contínuo e discreto foi representado, respectivamente, como

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad P(z) = \frac{0,1052}{z-1,1052} \quad (4.58)$$

em que a representação em espaço de estados na forma canônica observável no caso contínuo compõe  $\mathbf{A} = 1$ ,  $\mathbf{B}_1 = 1$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$  e no caso discreto  $\mathbf{A} = 1,1052$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0,5943$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$ .

Para estudar a rejeição de perturbações casadas serão considerados exemplos no qual o filtro de perturbações  $\Delta$  apresenta a mesma dinâmica que a perturbação aplicada ao sistemas. Os casos com perturbações não-casadas e com incertezas de modelo serão avaliadas em tópicos posteriores em que são aplicadas técnicas de controle baseadas em observador, preditor e observador-preditor, respectivamente.

#### 4.2.3.5.1 Perturbações constantes

Muitos sistemas reais estão submetidos a perturbações constantes, porém não há informação sobre quando ela é aplicada ou sua amplitude (SKOGESTAD, 2003). Nessa caso tem-se o conhecimento da dinâmica da perturbação e, assim, pode-se usar  $\Delta(s) = s$  ou  $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$  para os casos contínuos e discretos, respectivamente. Um esquema equivalente a usar o filtro  $\Delta(s) = s^{r+1}$  com  $r \leq 0$  foi proposto em (CASTILLO; GARCIA, 2021) e sua versão discreta (porém truncada) foi usada em (Alves Lima *et al.*, 2022), esses trabalhos se baseiam em previsões do estado e em um esquema de realimentação de estados, assim, a discussão será adiada para os tópicos posteriores. No trabalho de (SANZ *et al.*, 2016) propõe-se esquema equivalente a utilizar um filtro do tipo  $\Delta(s) = s + \omega_0$ , contudo utilizar esse método para perturbações constantes tem-se inevitavelmente erro de regime, pois a perturbação filtrada  $v(t) \neq 0 \forall t \geq 0$ .

As matrizes do sistema da perturbação escolhidos são:  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b}_1 = 1$ ,  $\mathbf{c} = 1$ ,  $\mathbf{d}_1 = 0$  e no caso discreto com  $T_s = 0.1$  segundos,  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b}_1 = 1$ ,  $\mathbf{c} = 1$ ,  $\mathbf{d}_1 = 1$  e, então, pode-se obter os sistemas aumentados, para o caso contínuo

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}}_{\chi(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\chi_{t_0}}, \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(t), \end{array} \right. \quad (4.59)$$

para o caso discreto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_{\Delta}(k+1) \end{bmatrix}}_{\chi(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,1052 & 0,5943 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5943 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5943 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(k), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(k_0) \\ x_{\Delta}(k_0) \end{bmatrix}}_{\chi(k_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\chi_{k_0}}, \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(k), \end{array} \right. \quad (4.60)$$

No caso contínuo, o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  foram  $\mathbf{L}_2 = [3,2152, 1,4650]^{\top}$  e  $\mathbf{L}_{\infty} = [3,3660, 1,6160]$ . No caso discreto, o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  encontrou  $\mathbf{L}_2 = [0,5051, 0,3367]^{\top}$  e  $\mathbf{L}_{\infty} = [0,5052, 0,2488]$ . Os valores de norma obtidos a partir da sintonia foram  $\mathcal{H}_2 = 0,3925$ ,  $\mathcal{H}_{\infty} = 0,6188$  e  $\mathcal{H}_2 = 2,1622$ ,  $\mathcal{H}_{\infty} = 6,2068$  para o caso contínuo e discreto, respectivamente. O procedimento foi realizado utilizando as LMIs para o contínuo 4.49, 4.51 e para o discreto 4.50, 4.52 obtendo os ganhos dos observadores e, usando as LMIs 4.16, 4.24 e 4.25, 4.17 foram obtidos os valores limitantes superiores para as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  para os casos contínuos e discretos, respectivamente.

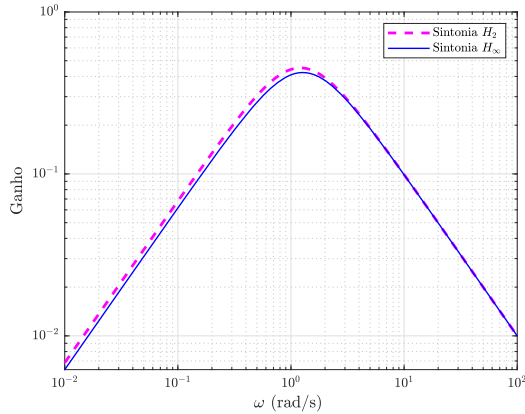
Os valores para os autovalores de malha fechada foram limitados por uma região circular no plano complexo com centro em 1 e raio 0.5 no caso contínuo e para o caso discreto uma região por duas barras verticais ao qual a parte real do polo satisfaz  $0,80 < \Re\{p\} < 1$ . As matrizes que comprovam a solução das LMIs estão dispostas no Apêndice A nas Eq. A.5, Eq.A.6], Eq.A.7 e Eq. A.8, respectivamente.

Para demonstrar a influência da sintonia baseada em normas, foi apresentada a curva de resposta em frequência do erro de estimação para a entrada de perturbação na Fig.12a e na Fig. 12b. A resposta do erro de estimação dos observadores foi apresentada em duas simulações, caso contínuo e caso discreto, com tempo de 10 segundos com condições iniciais nulas para o observador, perturbação constante iniciando em no tempo 5 segundos.

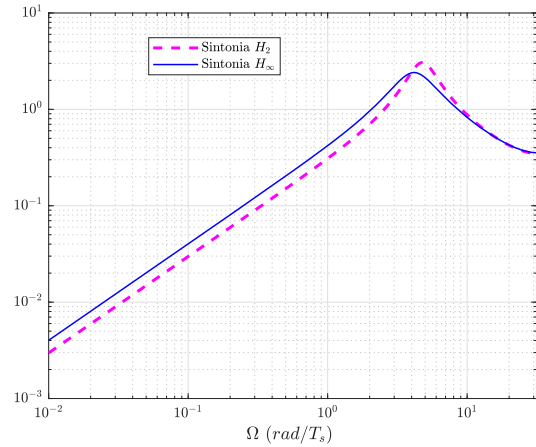
Nas Fig.12a e Fig. 12b, com a resposta em frequência, tem-se um decaimento de 20dB/década em baixas frequências e, posteriormente, a partir da frequência do polo, característica esperada para o sistema dinâmico do erro. O comportamento suave é consequência

Figura 12 – Resposta em frequência  $\frac{e}{q}$  dos observadores.

(a) Contínuo.



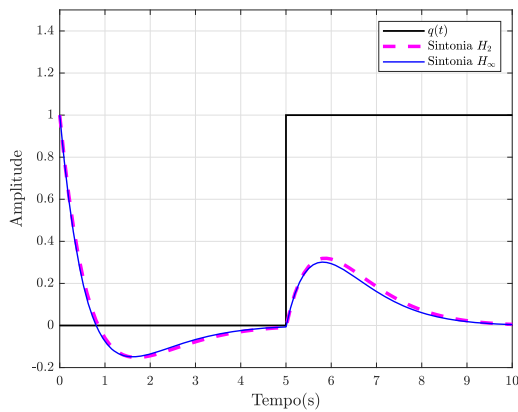
(b) Discreto.



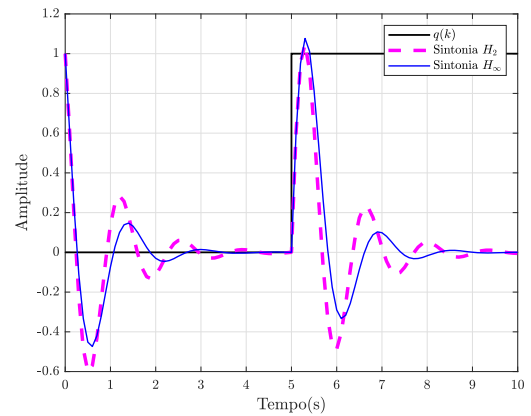
Fonte: Autoria própria.

Figura 13 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante.

(a) Contínuo.



(b) Discreto.



Fonte: Autoria própria.

da sintonia por minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O sistema discreto é levemente diferente pelo comportamento intrínseco de sistemas amostrados na frequência em que, por exemplo, o domínio de frequências está limitado em  $\pi/T_s$ .

Para as simulações nas Fig.13a e Fig.13b, é possível verificar a convergência do sistema do erro de estimação tanto para rastreamento como para rejeição de perturbação com constante de tempo visualmente iguais. Isso ocorre devido ao filtro casado com perturbação e, assim,  $v \rightarrow 0$  em um  $T_\sigma$  impulsivo, logo,  $T_\sigma + T_e \cong T_e$ .

#### 4.2.3.5.2 Perturbações senoidais

Perturbações do tipo senoidal acontecem em sistemas que operam em regime cíclico seja o ambiente ou até a referência, perturbações e, na prática suaves, sempre podem ser

modeladas como uma soma de senoides. Novamente, apenas a dinâmica da perturbação é conhecida, logo pode-se usar  $\Delta(s) = s^2 + \omega^2$  ou  $\Delta(z) = 1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$  com  $\omega = 2$  e  $\omega_0 = \omega T_s = 0,2$  para os casos contínuos e discretos, respectivamente.

As matrizes do sistema da perturbação escolhidas para o caso contínuo

$$\begin{cases} \dot{x}_\Delta(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} x_\Delta(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} v(t), \\ q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} x_\Delta(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_1} v(t), \end{cases} \quad (4.61)$$

e discreto

$$\begin{cases} x_\Delta(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,9601 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} x_\Delta(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} v(k), \\ q(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,9801 & -0,5000 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} x_\Delta(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_1} v(k), \end{cases} \quad (4.62)$$

e, então, pode-se obter os sistemas aumentados para o caso contínuo

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}}_{\chi(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\chi_0}, \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(t), \end{cases} \quad (4.63)$$

para o caso discreto,

$$\begin{cases}
 \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_\Delta(k+1) \end{bmatrix}}_{\chi^{(k+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,1052 & 0,5824 & -0,2971 \\ 0 & 1,9601 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi^{(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5943 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5943 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(k), \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} x(k_0) \\ x_\Delta(k_0) \end{bmatrix}}_{\chi^{(k_0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\chi_{k_0}}, \\
 y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi^{(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(k).
 \end{cases} \quad (4.64)$$

No caso contínuo, o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  foram  $\mathbf{L}_2 = [2,1296, -5,6667, -0,7134]^\top$  e  $\mathbf{L}_\infty = [2,2573, -5,8401, -0,4215]^\top$ . No caso discreto, o ganho do observador para a síntese com  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  encontrou  $\mathbf{L}_2 = [0,4210, 0,5401, 0,4896]^\top$  e  $\mathbf{L}_\infty = [0,4274, 0,3595, 0,3364]^\top$ . Os valores de norma obtidos a partir da sintonia foram  $\mathcal{H}_2 = 0,3809$ ,  $\mathcal{H}_\infty = 0,7412$  e  $\mathcal{H}_2 = 11,6207$ ,  $\mathcal{H}_\infty = 39,9809$  para o caso contínuo e discreto, respectivamente. O procedimento foi realizado utilizando as LMIs para o contínuo 4.49, 4.51 e para o discreto 4.50, 4.52 obtendo os ganhos dos observadores e, usando as LMIs 4.16, 4.24 e 4.25, 4.17 foram obtidos os valores limitantes superiores para as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para os casos contínuos e discretos, respectivamente.

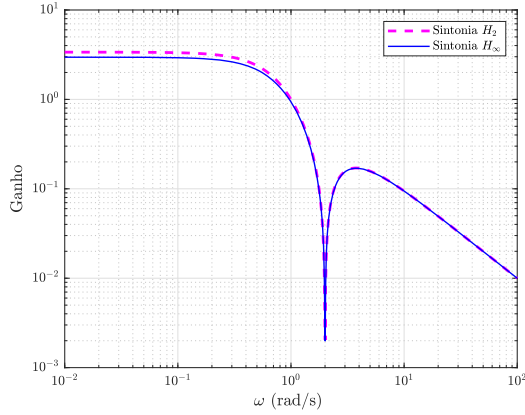
Os valores para os autovalores de malha fechada foram limitados por uma região circular no plano complexo com centro em 1 e raio 0.5 no caso contínuo e para o caso discreto uma região por duas barras verticais ao qual a parte real do polo satisfaz  $0,86 < \Re\{p\} < 1$ . As matrizes que comprovam a solução das LMIs estão dispostas no Apêndice A nas Eq. A.9, Eq.A.10], Eq.A.11 e Eq. A.12, respectivamente.

As curvas de resposta em frequência do erro de estimação para a entrada de perturbação estão na Fig.14a e na Fig. 14b. A resposta do erro de estimação dos observadores foi apresentada em duas simulações, caso contínuo e caso discreto, com tempo de 30 segundos com condições iniciais nulas para o observador, perturbação senoidal iniciando em no tempo 15 segundos.

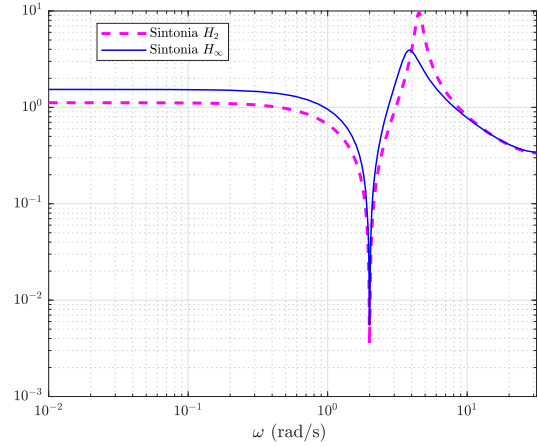
Nas Fig.14a e Fig. 14b, com a resposta em frequência, tem-se um decaimento de 40dB/década a partir da frequência do polo e na própria tem-se uma ressonância de rejeição. O comportamento suave é consequência da sintonia por minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

Figura 14 – Resposta em frequência  $\frac{e}{q}$  dos observadores.

(a) Contínuo.



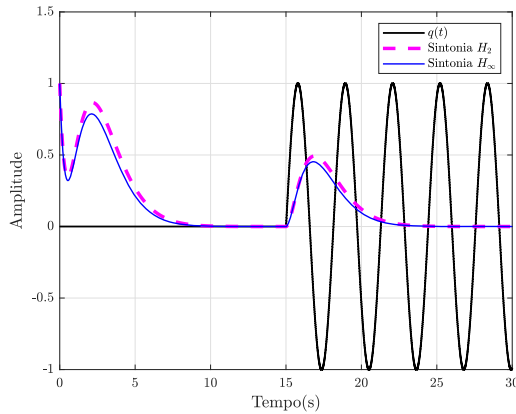
(b) Discreto.



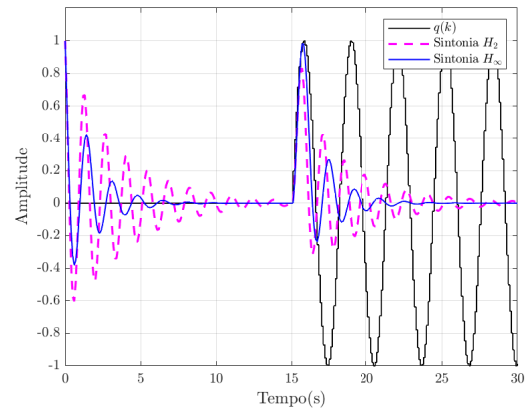
Fonte: Autoria própria.

Figura 15 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante.

(a) Contínuo.



(b) Discreto.



Fonte: Autoria própria.

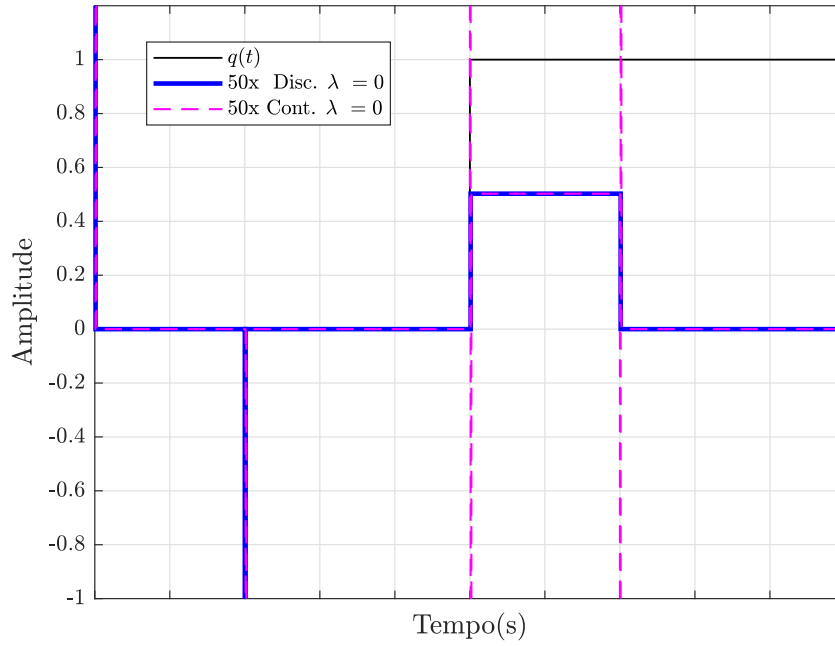
Para as simulações nas Fig.15a e Fig.15b, o fenômeno para o tempo de convergência do erro para rastreamento e rejeição de perturbação se repete, pois novamente o filtro tem a mesma dinâmica que a perturbação. Então,  $v \rightarrow$  em um  $T_\sigma$  impulsivo, fazendo com que,  $T_\sigma + T_e \cong T_e$ .

#### 4.2.3.5.3 Perturbações harmônicas

A aplicação imediata para perturbações harmônicas é em sistemas de potência, ou em geral, sistemas submetidos ao fenômeno de histerese. Esse sinal de perturbação é construído a partir de sinais senoidais no qual a menor frequência é  $\omega_o$  e as outras podem ser escritas como  $\omega_i = \omega_o n$  em que  $n \in \mathbb{Z}$ . O período de repetição do sinal é, então,  $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$  e todos os sinais periódicos de período  $T \in \mathbb{R} \mid T > 0$  podem ser escritos dessa forma. Um método capaz de lidar com esse tipo de perturbação, com a limitação de periodicidade igual ao do atraso, foi proposto

em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) e (WANG; WU, 2022) para o domínio contínuo e domínio discreto, respectivamente. Essa metodologia pode ser implementada por meio de um filtro de perturbação equivalente, porém, para o caso contínuo, o filtro apresenta dimensão infinita, o que impossibilita a implementação do observador aumentado da forma apresentada nesse trabalho.

Figura 16 – Erro de estimação na simulação para perturbações constante com filtro harmônico.



Fonte: O autor.

O filtro de perturbação para perturbações genéricas periódicas está definido nas Tabela 1 e Tabela 2. Avaliando inicialmente o caso contínuo  $\Delta = 1 - e^{-Ts}$ , as raízes em relação a  $s = \sigma + j\omega$  podem ser obtidas como

$$\begin{cases} 1 - e^{-\sigma T} \cos(T\omega) = 0, \\ 0 - e^{-\sigma T} \sin(T\omega) = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

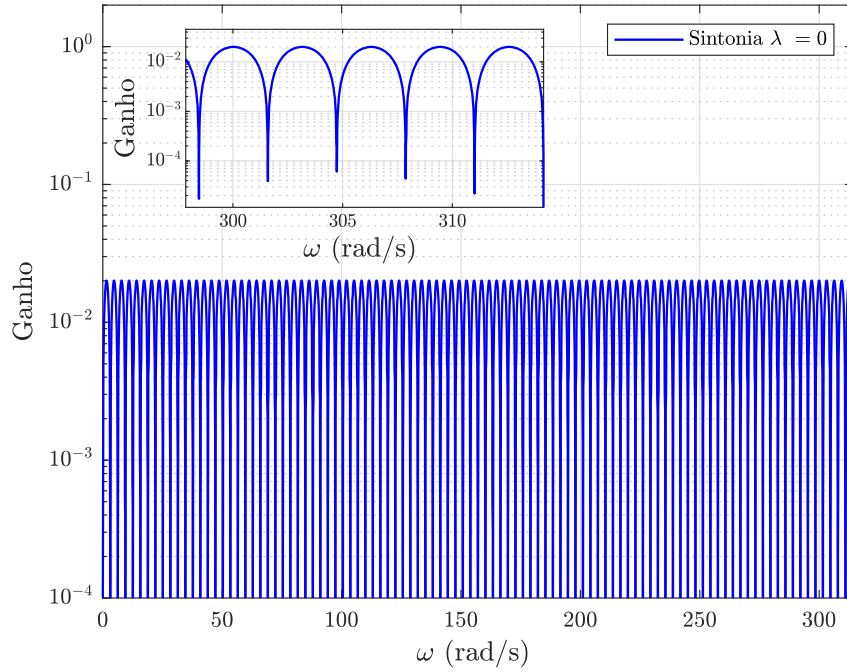
o termo complexo exige  $\omega = \pm \frac{\pi n}{T} \forall n \in \mathbb{N}$  e, então, o  $\cos(T\omega)$  pode apresentar valores 1, -1, fazendo com que

$$\begin{cases} 1 - e^{-\sigma T} = 0, & \forall \pm \frac{2\pi n}{T}, \\ 1 + e^{-\sigma T} = 0, & \forall \pm \frac{2\pi n + \pi}{T} \end{cases} \quad (4.66)$$

por definição  $T$  é positivo e, então, os únicos valores possíveis são  $s = \pm j \frac{2\pi n}{T} \forall n \in \mathbb{Z}$ , esse resultado é corroborado pela definição de sinal harmônico. O caso discreto pode ser obtido



Figura 17 – Resposta em frequência  $\frac{e(z)}{q(z)}$  do observador caso discreto.



Fonte: O autor.

diretamente pela definição  $z = e^{sT_s}$  e, assim, obtendo os polos  $z = e^{j\frac{2\pi T_s n}{T}}$ . O filtro discreto apresenta dimensão finita, especificamente  $T_d$ , então as frequências senoidais que compõe o filtro também são limitadas.

Para exemplificar o comportamento do observador com esse filtro foram realizadas simulações com o observador aumentado discreto para os mesmo sistemas Eq. 4.58 contínuo e discreto, usando amostradores e ZOH quando necessário. A sintonia foi feita para que todos os autovalores em malha fechada sejam  $\lambda = 0$ , pois essa é a sintonia resultante do esquema de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a). O tempo de amostragem escolhido foi de  $T_s = 0,1\text{seg}$  com  $T = 2\text{seg}$  e  $T_d = T/T_s = 200\text{amostras}$ . O sinal do erro foi amplificado em 50x para facilitar a visualização, o tempo de simulação foi de 10 segundos com uma perturbação constante aplicada em 5 segundos.

Para as simulações na Fig.16 o rastreo ocorre em uma amostra, porém em dois instantes, um ao iniciar a rejeição e outro após  $T$  segundos, a convergência em uma amostra ocorre devido a sintonia do ganho do observador  $L$  tornando  $T_e$  impulsivo. Dessa forma, a rejeição de perturbação converge no tempo  $T_\sigma + T_e \cong T_\sigma$ , que foi escolhido como  $T = 2$  segundos. Os picos da resposta contínua ocorrem devido aproximação do filtro e a agressividade da sintonia.

Na Fig.17 tem-se a resposta em frequência do sistema do erro no qual pode-se

assumir valores entre  $[0, \frac{\pi}{T_s})$ . Há ressonância de rejeição de distúrbio para todas as frequências  $\frac{2\pi T_s n}{T}$  e, assim, fazem um espaçamento de  $\pi$  para cada acréscimo em  $n$ , como pode ser verificado a partir do trecho destacado.

## 5 ESTRATÉGIAS DE CONTROLE OBSERVADOR-PREDITOR

Uma das ferramentas usadas desde o princípio da teoria de controle no domínio do tempo é a dos observadores de estados, pois, em geral, os estados não estão disponíveis para medição (CHEN, 1998). O capítulo 4 discorreu sobre o uso dos observadores, topologias e análises de desempenho. Nesse capítulo será feito o uso desses observadores para projetar leis de controle para sistemas lineares com atraso de transporte, avaliando o resultado do método frente a outras técnicas de controle da literatura.

Foi demonstrado que a partir da topologia de observadores aumentados em espaço de estados, as perturbações também são observadas. O estado da arte de técnicas capazes de mensurar as perturbações foi apresentado em (CHEN *et al.*, 2016). Neste trabalho, serão propostas leis de controle do tipo FSA usando os observadores do Capítulo 4 diretamente e, também, aplicando técnicas de predição para compensar o atraso.

### 5.1 Controlador baseado em observador aumentado: Caso contínuo

Para o caso em que não há incertezas de modelagem e o erro de estimação converge para zero, equivalendo a  $v(t) \rightarrow 0$ , em um tempo finito, tem-se que a partir desse instante  $\chi(t) = \hat{\chi}(t)$ . Dessa forma, pode-se aplicar o princípio da separação do observador de Luenberger (LUENBERGER, 1971) para sintonizar um controlador baseado em um ganho  $\mathbf{K}$  de realimentação de estados. Assim, a lei de controle pode ser escrita como

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_\Delta \end{bmatrix} \hat{\chi}(t) = \bar{\mathbf{K}}(\chi(t) - e(t)) \quad (5.1)$$

para fins de sintonia, pode-se considerar que  $e(t)$  é muito pequeno e, assim,  $\chi(t) \cong \hat{\chi}(t)$ . Então, aplicado o sinal de controle ao sistema equivalente aumentado

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = \bar{\mathbf{A}}\chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(t-h) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(t), \\ y(t) = \bar{\mathbf{C}}\chi(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

resulta no sistema em malha fechada,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{K} & \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t-h) \\ x_\Delta(t-h) \end{bmatrix}}_{\chi(t-h)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}}_{\chi(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t_0} \\ x_{\Delta t_0} \end{bmatrix}}_{\chi_{t_0}}, \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 \mathbf{c} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t-h) \\ x_\Delta(t-h) \end{bmatrix}}_{\chi(t-h)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(t), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

onde  $\chi$  é o estado aumentado constituído dos estados do sistema original e os estados do filtro.

De forma análoga, a notação de uma barra sobrescrita indica que se trata de matrizes ou sinais do sistema aumentado. A dimensão do sistema aumentado é da forma:  $\chi(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_u)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_q)}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_x+n_\Delta)}$  e  $\bar{\mathbf{D}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_q)}$ .

A equação do sistema em malha fechada é um TDS estudado no Capítulo 2.

Se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  for controlável, pode-se alocar os autovalores do sistema através de  $\mathbf{K}$  de forma livre no plano complexo e o tornar Hurwitz. A matriz dos estados apresenta forma triangular e, assim,  $\mathbf{K}_\Delta$  não altera os autovalores da matriz dos estados e não influencia na dinâmica do sistema. Porém,  $\mathbf{K}_\Delta$  atua diretamente na relação entre a perturbação e a saída que, por consequência, está intimamente relacionada com a norma  $H_\infty$  do sistema. Pode-se sintonizar  $\mathbf{K}_\Delta$  de maneira que  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$  e, então, para qualquer perturbação onde  $x_\Delta(t) = x_\Delta(t-h)$  o sistema de controle obtém erro nulo em regime permanente.

A partir das considerações, tem-se que  $v(t) \rightarrow 0$  em um tempo finito e, então, o problema de estabilidade da Eq. 5.6 é equivalente a Eq. 5.4, que foi estudado nas seções anteriores. Assim, a LMI 2.22 baseada em funcionais de Lyapunov-Krasovski permite inferir a estabilidade e obter a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um valor de  $\mathbf{K}$  definido. Em (FRIDMAN, 2014), propõe-se uma modificação na LMI 2.22 que permite obter  $\mathbf{K}$  em um problema de otimização de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  introduzindo conservadorismo.

Faça  $\delta = 0$  e  $\mathcal{P}_3 = \varepsilon \mathcal{P}_2$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo. Para que  $\mathcal{P}_2$  tenha inversa defina no problema que  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_\top > \mathbf{0}$ . Definindo  $\mathcal{W} = \mathcal{P}_2^{-1}$ , aplica-se a transformação de congruência multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{\mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$  à esquerda e a trans-

posta à direita, posteriormente aplique transformação de congruência em  $\mathcal{N}$  multiplicando por  $\text{diag}\{\mathcal{W}, \mathcal{W}\}$  à esquerda e a transposta à direita. Só restará as matrizes com variáveis de decisão  $\mathcal{P}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}_{12}, \mathbf{K}$  multiplicadas a esquerda por  $\mathcal{W}$  e a direita por  $\mathcal{W}^\top$ , para fins de visualização, considerou-se a mesma notação para essas matrizes resultantes. Por fim, faça  $\mathbf{K} = \mathcal{Y}\mathcal{W}^{-1}$  e, então, o problema se torna novamente descrito por LMIs.

Um controlador a partir de observador de estado com a mesma ordem do processo é apresentado em (FRIDMAN, 2014) e utiliza a 2.22 modificada para realizar a sintonia dos ganhos de realimentação e do observador. Esse controlador é capaz de estabilizar uma condição inicial, porém não rejeita perturbações no erro de predição e na saída. O controlador proposto nessa seção baseado em observador aumentado e um ganho  $\bar{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]$  de realimentação completa permite estabilizar uma condição inicial, rejeitar perturbações que satisfazem  $v(t) = v(t-h)$  no erro de predição e na saída. A principal vantagem desse esquema é a sua simplicidade, pois o sinal de controle é apenas um ganho de realimentação do estado observado sendo capaz de controlar sistemas com atraso sem usar um esquema de predição e, assim, não apresenta os problemas de implementação da integral do FSA (ZHONG, 2006).

Dado um escalar  $\varepsilon > 0$ ,  $h(t) \in [0, h]$  e tendo que  $\dot{h}(t) \leq d \forall t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0$  satisfaz  $d \in [0, 1)$  ou desconhecido. Se existirem matrizes  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{R} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$ ,  $\mathcal{Q} > 0$  (ou  $\mathcal{Q} = 0$  quando  $d$  é desconhecido) e  $\mathcal{S}_{12}$  que tornam as LMIs em 2.22 factíveis para o sistema 5.4, então, ele é assintoticamente estável e possui norma  $H_\infty \leq \sqrt{\mu}$ . Onde  $h(t) \leq \bar{h} \forall t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{K}x(t-h) + \mathbf{B}_1q(k), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases} \quad (5.4)$$

O projeto do observador aumentado segue a mesma metodologia que foi descrita na Seção 4.2.3 que permite escolher o filtro de perturbação  $\Delta(s)$  e obter o ganho do observador  $\mathbf{L}$ . O problema de otimização escolhido é o de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , pois para fins de engenharia e com o sistema exposto a perturbações desconhecidas, considera-se o pior caso. Assim, deseja-se reduzir a influência de  $v(t)$  em  $\bar{\mathbf{K}}e(t)$  a partir da redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o erro compõe o sinal de controle e deve ser minimizado na proporção de  $\bar{\mathbf{K}}$ . Então, usando o princípio da separação é obtido inicialmente o ganho  $\bar{\mathbf{K}}$  a partir das LMIs 5.6 e da relação  $\mathbf{B}_1\mathbf{c} = \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta$ . De posse de  $\bar{\mathbf{K}}$ , pode-se sintonizar o observador a partir da LMI 4.51 modificada, obtendo a LMI 5.7 com o uso de um filtro de perturbações apropriado.

De forma análoga ao processo do filtro do ganho de referência  $k_r$  do SFSP, esse controlador necessita corrigir a referência com o mesmo ganho que pode ser calculado em espaço

de estados. Atentando para o fato da lei de controle ser uma realimentação positiva, o ganho de referência pode ser calculado como

$$k_r = \left( \mathbf{C} (-\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_2 \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{W} > 0, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{Q} > 0, \mathcal{S}_{12}, \mathcal{Y} \\ \min \{ \mu \}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \star & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ \star & \star & \star & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{11} = \mathbf{A} \mathcal{W} + \mathcal{W}^\top \mathbf{A}^\top + \mathcal{S} + \mathcal{Q} - \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{W} + \mathcal{E} \mathcal{W}^\top \mathbf{A}^\top, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}) + \mathbf{B}_2 \mathcal{Y}, \mathcal{M}_{15} = \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathcal{W}^\top \mathbf{C}^\top, \mathcal{M}_{22} = -\mathcal{E} \mathcal{W} - \mathcal{E} \mathcal{W}^\top + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \mathcal{E} \mathbf{B}_2 \mathcal{Y}, \mathcal{M}_{25} = \mathcal{E} \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R}), \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top) e^{-2\delta h}, \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{44} = -(1-d)\mathcal{Q} - 2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min \{ \mu \}, \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top + \mathcal{P} \bar{\mathbf{A}} - \mathcal{L} \mathbf{C} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{K}}^\top \\ \star & -\mathbf{I} & \bar{\mathbf{D}}^\top \\ \star & \star & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

onde,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_\infty \leq \gamma$ .

### 5.1.1 Exemplo

Para demonstrar o uso da metodologia descrita, ela será aplicada ao exemplo de literatura em (ZHONG, 2004; ZHONG, 2005; SANZ *et al.*, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2021) com o atraso de  $h = 0,75$  segundos. Será avaliada uma simulação com sintonia estabilizante obtendo erro de regime permanente nulo para perturbações constantes, também será avaliado no domínio da frequência a rejeição de perturbação com relação à saída. Novamente, o processo

$$P(s) = \frac{e^{-0,75s}}{s - 1}, \quad (5.8)$$

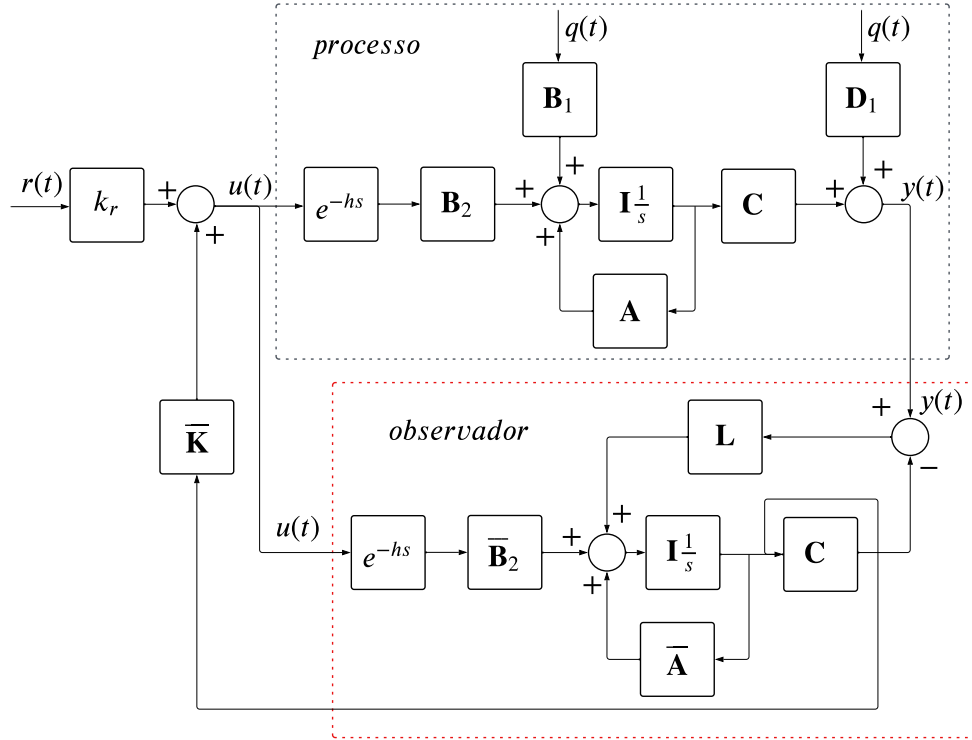
onde a representação em espaço de estados na forma canônica observável  $\mathbf{A} = 1$ ,  $\mathbf{B}_1 = 1$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$ .

Seguindo os passos apresentados, será usado o filtro  $\Delta(s) = s$  obtendo as mesmas matrizes aumentadas expostas na Eq. 4.59. O ganho de realimentação de estados obtido foi  $\mathbf{K} = -1,0292$  usando  $h = 0,75$ ,  $d = 0,1$  e  $\varepsilon = 25$  com  $\mathbf{K}_\Delta = -1$ . O ganho do observador aumentado obtido foi  $\mathbf{L} = [3,2961, 1,5461]^\top$  e, por fim, o ganho de referência  $k_r = 0,0292$ . As matrizes que solucionam as LMIs 5.6 e 5.7 estão dispostas no Apêndice A e as soluções são Eq. A.13 e Eq A.14, respectivamente.

Para facilitar a visualização, o esquema em diagrama de blocos das equações para simulação estão expostas na Fig. 18. O processo foi simulado com condição inicial  $x_0 = 0,5$ , enquanto o observador apresenta condições iniciais nulas, a referência  $r(t) = 1$  foi aplicada com 30 segundos de simulação e a perturbação  $q(t) = -0,25$  foi aplicada com 60 segundos de simulação, o tempo de simulação total é de 100 segundos.

A resposta em frequência do esquema de controle para perturbação na saída e perturbação no erro de mensuração está exposta na Eq. 5.9 representada por duas funções de transferência auxiliares  $F_u(s)$ ,  $F_y(s)$  e  $G_u(s)$ . O gráfico da resposta para saída desse exemplo foi apresentado em Fig.19a e, para o erro de estimação em Fig.19b, pode-se verificar atenuação em baixas frequências e também a partir de  $\omega = 1 \text{ rad}$ . Grande parte das frequências de perturbação apresentam ganhos de amplificação para saída, o que demonstra que essa estratégia de controle tem desempenho limitado comparado às outras estratégias discutidas, especialmente as que utilizam esquema de predição. O erro de estimação apresenta atenuação em todas as frequências

Figura 18 – Diagrama de blocos do esquema controlador-observador.



Fonte: O autor.

e, então, pode-se considerar um resultado satisfatório.

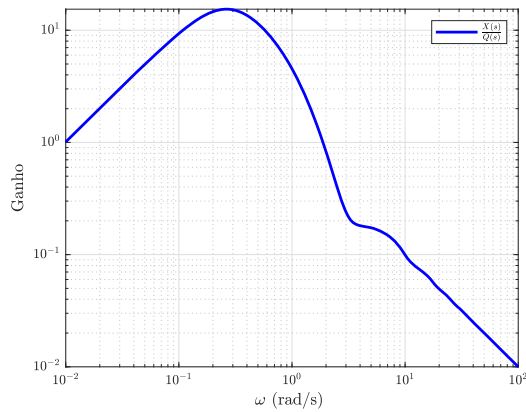
$$\begin{cases}
 \mathbf{F}_u(s) = (s\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2 e^{-sh}, \\
 \mathbf{F}_y(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{C}, \\
 \mathbf{G}_u(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2, \\
 X(s) = (\mathbf{I} - e^{-sh} \mathbf{G}_u(s) ((\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{F}_u(s))^{-1} \bar{\mathbf{K}}\mathbf{F}_y(s)) \mathbf{C})^{-1} \mathbf{G}_u(s) Q(s) = \mathbf{H}_{xq}(s) Q(s), \\
 \hat{X}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_u(s) \bar{\mathbf{K}})^{-1} \mathbf{F}_y(s) \mathbf{C} \mathbf{H}_{xq}(s) = \mathbf{H}_{\hat{x}q}(s) Q(s), \\
 E(s) = [\mathbf{C}X(s) - \bar{\mathbf{C}}\hat{X}(s)] Q(s) = (\mathbf{C}\mathbf{H}_{xq}(s) - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{H}_{\hat{x}q}(s)) Q(s)
 \end{cases} \quad (5.9)$$

Para a simulação na Fig.20, é possível verificar a convergência do sistema do erro de estimação tanto para rastreamento como para rejeição de perturbação, pois é o mesmo observador estudado anteriormente. Em todos os casos, o sistema em malha fechada seguiu a referência, apresentando erro nulo em regime permanente e foi capaz de lidar com condições iniciais. Porém, o tempo de simulação necessário foi relativamente maior devido à demora do controlador para atingir regime, esse resultado é evidente quando se compara com outros controladores ou o próprio sistema do erro de estimação.

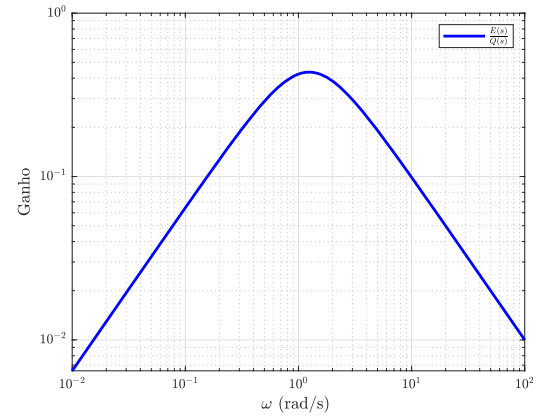


Figura 19 – Resposta em frequência do sistema em malha fechada.

(a) Resposta  $\frac{X(s)}{Q(s)}$

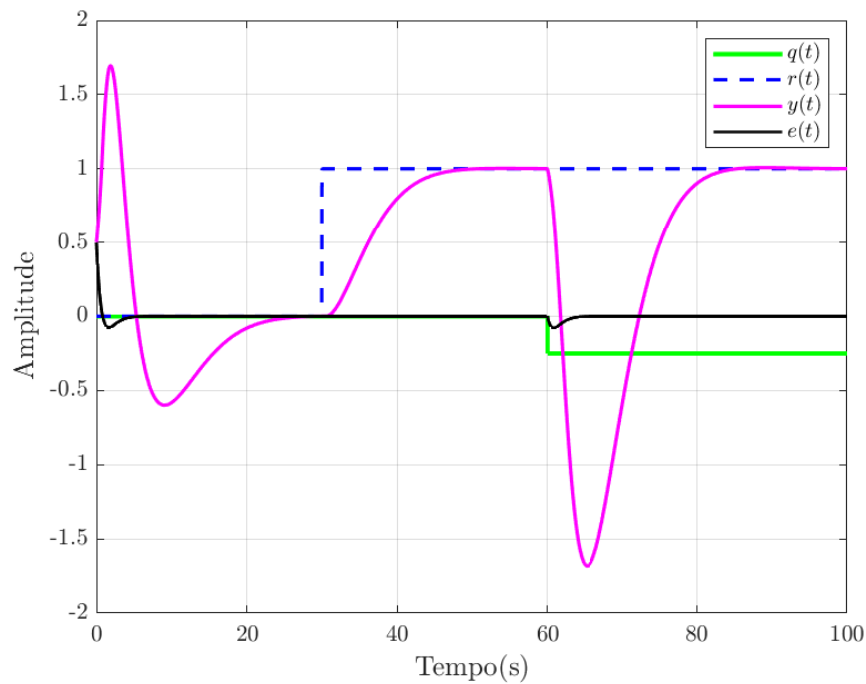


(b) Resposta  $\frac{E(s)}{Q(s)}$



Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Respostas no tempo da saída e do erro de estimação para perturbação constante.



Fonte: O autor.

## 5.2 Controlador baseado em observador aumentado: Caso Discreto

Nesse caso é possível incluir o atraso na matriz do sistema obtendo um sistema com dimensão  $n_x + d$  e sem atraso. Dessa forma, técnicas de sistemas clássicos LTI podem ser usadas. Porém, esse método é muitas vezes inviável pois o custo computacional e a complexidade da análise de grandes sistemas é uma nova dificuldade relevante. Nesse exemplo será usado um sistema com atraso de 80 amostras, as LMIs resultantes teriam dimensões de centenas gerando

complicações para o resolvido. Dessa forma, será usada a formulação do controlador baseado em observador aumentado para sistemas amostrados, que é análoga à realizada no item anterior e, assim, a dimensão do sistema permanece  $n_x$ . Pode-se iniciar aplicando o princípio da separação do observador de Luenberger (LUENBERGER, 1971) para sintonizar um controlador baseado em um ganho  $\mathbf{K}$  de realimentação de estados. Assim, a lei de controle pode ser escrita como

$$u(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_\Delta \end{bmatrix} \hat{\chi}(k) = \bar{\mathbf{K}}(\chi(k) - e(k)) \quad (5.10)$$

considera-se  $e(k)$  é muito pequeno e, assim,  $\chi(k) \cong \hat{\chi}(k)$ . Então, aplicando a lei de controle em

$$\begin{cases} \chi(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\chi(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ y(k) = \bar{\mathbf{C}}\chi(k) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(k), \end{cases} \quad (5.11)$$

resulta no sistema em malha fechada,

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_\Delta(k+1) \end{bmatrix}}_{\dot{\chi}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{K} & \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k-d) \\ x_\Delta(k-d) \end{bmatrix}}_{\chi(k-d)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(k), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}}_{\chi(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t_0} \\ x_{\Delta t_0} \end{bmatrix}}_{\chi_{t_0}}, \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 \mathbf{c} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k-d) \\ x_\Delta(k-d) \end{bmatrix}}_{\chi(k-d)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(k), \end{cases} \quad (5.12)$$

onde  $\chi$  é o estado aumentado constituído dos estados do sistema original e os estados do filtro. De forma análoga, a notação de uma barra sobrescrita indica que se trata de matrizes ou sinais do sistema aumentado. A dimensão do sistema aumentado é da forma:  $\chi(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_x+n_\Delta)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_u)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_q)}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_x+n_\Delta)}$  e  $\bar{\mathbf{D}}_1 \in \mathbb{R}^{(n_y) \times (n_q)}$ . A equação do sistema em malha fechada é um TDS estudado no Capítulo 2.4.

Se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  for controlável, pode-se alocar os autovalores do sistema através de  $\mathbf{K}$  de forma livre no plano complexo e fazer com que  $\lambda \leq 0$ . Novamente, tem-se que a matriz dos estados apresenta forma triangular e, assim,  $\mathbf{K}_\Delta$  não altera os autovalores da matriz dos

estados e não tem influência na dinâmica do sistema. De maneira análoga, deve-se sintonizar  $\mathbf{K}_\Delta$  de maneira que  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$  e, então, para qualquer perturbação onde  $x_\Delta(k) = x_\Delta(k-d)$ , o sistema de controle obtém erro nulo em regime permanente.

A partir das considerações, tem-se que  $v(k) \rightarrow 0$  em um tempo finito e, então, o problema de estabilidade da Eq. 5.12 é equivalente a Eq. 5.4 que foi estudada nas seções anteriores. Assim, a LMI 2.24 permite inferir a estabilidade e obter a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um valor de  $\mathbf{K}$  definido. Pode-se usar a mesma modificação apresentada em (FRIDMAN, 2014) para obter  $\mathbf{K}$  em problema de otimização de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  introduzindo algum conservadorismo.

Faça  $\mathcal{P}_3 = \varepsilon \mathcal{P}_2$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo. Para que  $\mathcal{P}_2$  tenha inversa, define-se no problema que  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_\top > \mathbf{0}$ . Definindo  $\mathcal{W} = \mathcal{P}_2^{-1}$ , aplica-se a transformação de congruência multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{\mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathcal{W}^\top, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$  à esquerda e a transposta à direita, posteriormente aplique transformação de congruência em  $\mathcal{N}$  multiplicando por  $\text{diag}\{\mathcal{W}, \mathcal{W}\}$  à esquerda e a transposta à direita. Só restará as matrizes com variáveis de decisão  $\mathcal{P}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}_{12}, \mathbf{K}$  multiplicadas à esquerda por  $\mathcal{W}$  e à direita por  $\mathcal{W}^\top$ , para fins visualização considerou-se a mesma notação para essas matrizes resultantes. Por fim, faça  $\mathbf{K} = \mathcal{Y} \mathcal{W}^{-1}$  e, então, o problema se torna novamente descrito por LMIs.

Dado um escalar  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \leq h$ , se existirem matrizes  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{P}_2 > 0$ ,  $\mathcal{R} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$  e  $\mathcal{S}_{12}$  que tornam as LMIs em 5.15 para o sistema 5.13, então, ele é assintoticamente estável e possui norma  $H_\infty \leq \sqrt{\mu}$ . Onde,  $d_k$  é um atraso variável no tempo que satisfaz  $0 \leq d_k \leq h \forall k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}x(k-d) + \mathbf{B}_1 q(k), \\ y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{C}_0 x(k-d), \end{cases} \quad (5.13)$$

O projeto do observador discreto aumentado segue a mesma metodologia que foi descrita na Seção 4.2.3 que permite escolher o filtro de perturbação  $\Delta(z)$  e obter o ganho do observador  $\mathbf{L}$ . O problema de otimização escolhido é o de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , deseja-se reduzir a influência de  $v(t)$  em  $\bar{\mathbf{K}}e(t)$ , o erro compõe o sinal de controle e deve ser minimizado na proporção de  $\bar{\mathbf{K}}$  então, usando o princípio da separação, é obtido inicialmente o ganho  $\bar{\mathbf{K}}$  a partir das LMIs 5.15 e da relação  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$ . De posse de  $\bar{\mathbf{K}}$ , pode-se sintonizar o observador a partir da LMI 4.52 modificada obtendo a LMI 5.16 que foi definida usando funcionais de Lyapunov-Krasovski em (FRIDMAN, 2014) associado ao uso de um filtro de perturbações apropriado. O filtro de referência também é necessário para sistemas amostrados e pode ser

calculado como

$$k_r = \left( \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_2 \right)^{-1}. \quad (5.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{W} > 0, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{S}_{12}, \mathcal{Y} \\ \min\{\mu\}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \star & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ \star & \star & \star & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = R, \\ \mathcal{M}_{11} = \mathcal{W}^\top (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I}) + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathcal{W} + \mathcal{S} - \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{W} + \mathcal{W}^\top (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}) + \mathbf{B}_2 \mathcal{Y}, \mathcal{M}_{15} = \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathcal{W}^\top \mathbf{C}_0^\top, \mathcal{M}_{22} = -\boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{W}^\top - \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{W} + P + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B}_2 \mathcal{Y}, \mathcal{M}_{25} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R}), \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top), \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{44} = -2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathcal{W}^\top \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}^\top \\ \star & \mathcal{P} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

onde,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_\infty \leq \gamma$ .

### 5.2.1 Exemplo

Para demonstrar o uso da metodologia descrita, ela será aplicada ao exemplo observado na literatura em Zhong (2004), Zhong (2005), Sanz *et al.* (2018), Oliveira *et al.* (2021) com o atraso constante de  $d = h = 8$  amostras com  $T_s = 0.1$  segundos. Será avaliada uma simulação com sintonia estabilizante obtendo erro de regime permanente nulo para perturbações constantes, também será avaliado no domínio da frequência a rejeição de perturbação com relação à saída. Novamente, o processo

$$P(z) = \frac{0,1052}{z - 1,1052}, \quad (5.17)$$

onde a representação em espaço de estados na forma canônica observável  $\mathbf{A} = 1,1052$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0,5943$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{D}_1 = 0$ .

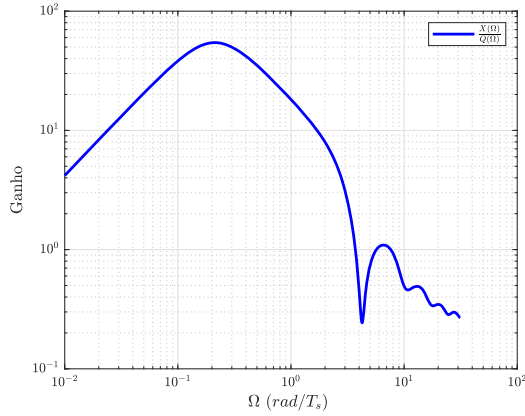
Seguindo os passos apresentados, será usado o filtro  $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$  obtendo as mesmas matrizes aumentadas expostas na Eq. 4.60. O ganho de realimentação de estados obtido foi  $\mathbf{K} = -0,0831$  usando  $h = 8$  e  $\varepsilon = -0,1802$  com  $\mathbf{K}_\Delta = -1$ . O ganho do observador aumentado obtido foi  $\mathbf{L} = [0,5052; 0,1540]^\top$  e, por fim, o ganho de referência  $k_r = 0,0032$ . As matrizes que solucionam as LMIs 5.15 e 5.16 estão dispostas no Apêndice A e as soluções são Eq. A.15 e Eq. A.16, respectivamente.

O diagrama de blocos em Fig. 18 apresenta a mesma topologia para o sistema amostrado e, então, basta implementar o equivalente amostrado. O processo foi simulado com condição inicial  $x_0 = 0,5$ , enquanto o observador apresenta condições iniciais nulas, a referência  $r(t) = 1$  foi aplicada com 30 segundos de simulação e a perturbação  $q(t) = -0,025$  foi aplicada com 60 segundos de simulação, o tempo de simulação total é de 100 segundos.

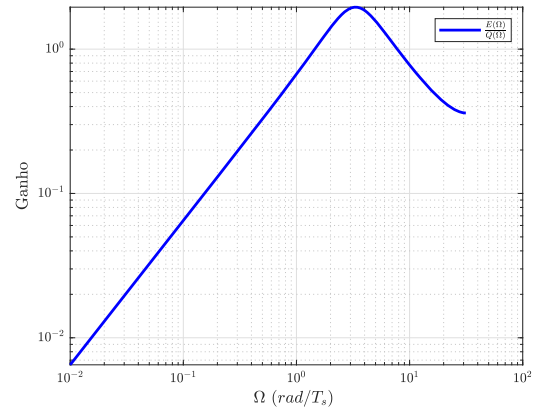
A resposta em frequência do controlador exposta na Eq. 5.18 também será representada por funções de transferência auxiliares  $F_u(z)$ ,  $F_y(z)$  e  $G_u(z)$ . Os gráficos das respostas em frequência desse exemplo foram apresentados nas Fig.21a e Fig.21b para saída e erro de estimação, respectivamente. Novamente, tem-se que grande parte das frequências de perturbação apresentam ganhos de amplificação, o que demonstra que essa estratégia de controle amostrado também tem desempenho limitado. Porém, o erro de estimação apresenta atenuação em todas as frequências e, então, pode-se considerar um resultado satisfatório para o observador.

Figura 21 – Resposta em frequência do sistema em malha fechada.

(a) Resposta  $\frac{X(\Omega)}{Q(\Omega)}$



(b) Resposta  $\frac{E(\Omega)}{Q(\Omega)}$

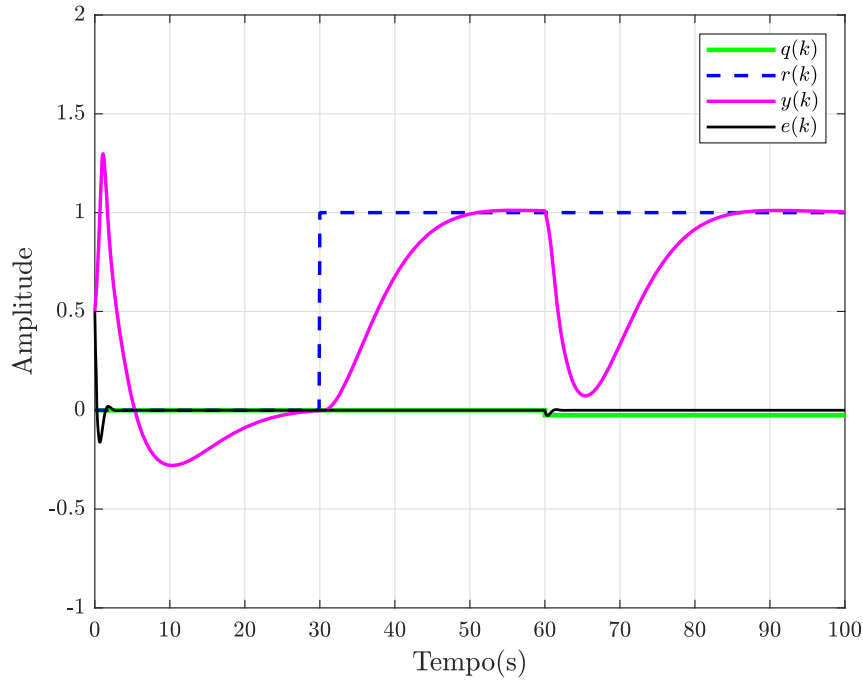


Fonte: Autoria própria.

$$\begin{cases}
 F_u(z) = (z\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}))^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2 z^{-d}, \\
 F_y(z) = (z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{C}, \\
 \mathbf{G}_u(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2, \\
 X(z) = \left( \mathbf{I} - z^{-d} \mathbf{G}_u(z) \left( (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{F}_u(z))^{-1} \bar{\mathbf{K}}\mathbf{F}_y(z) \right) \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{G}_u(z) Q(z) = \mathbf{H}_{xq}(z) Q(z), \\
 \hat{X}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_u(z) \bar{\mathbf{K}})^{-1} \mathbf{F}_y(z) \mathbf{C} \mathbf{H}_{xq}(z) = \mathbf{H}_{\hat{x}q}(z) Q(z), \\
 E(z) = [\mathbf{C}X(z) - \bar{\mathbf{C}}\hat{X}(z)] Q(z) = (\mathbf{C}\mathbf{H}_{xq}(z) - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{H}_{\hat{x}q}(z)) Q(z)
 \end{cases}
 \quad (5.18)$$

Na Fig.22, são expostos os sinais de saída e erro de estimação obtidos pela simulação. A resposta do sistema do erro foi estudada na seção 4 e apresentou um comportamento coerente. Em todos os casos o sistema em malha fechada seguiu a referência, apresenta erro nulo em regime permanente e foi capaz de lidar com condições iniciais não nulas. Em geral, o desempenho é relativamente ruim e o tempo de convergência é longo. Uma sintonia mais agressiva possivelmente resulta em um sistema instável em malha fechada.

Figura 22 – Respostas no tempo da saída e do erro de estimação para perturbação constante.



Fonte: O autor.

### 5.3 Controlador baseado em preditor

Algumas dessas técnicas foram descritas no Capítulo 3, onde cerne do método se baseia na predição do estado do processo para obter uma realimentação livre de atraso, ou seja, a ideia do FSA (MANITIUS; OLBROT, 1979). Na Seção 3.2.2 foi feita uma breve revisão, em geral os métodos diferem em como obter o estado predito, um trabalho pioneiro foi apresentado por Artstein (1982) que usa a solução da equação TDS no tempo Eq.3.33, exposta novamente usando a notação desse capítulo como

$$x_p(t) = x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} [B_2u(\tau) + B_1q(\tau+h)] d\tau, \quad (5.19)$$

e, ao descartar o termo de contribuição da perturbação, obtém-se a solução proposta

$$x_{p1}(t) = \hat{x}_1(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_2u(\tau) d\tau, \quad (5.20)$$

que naturalmente apresenta um erro intrínseco de predição que pode ser obtido como

$$e_{p1}(t) = x_p(t) - x_{p1}(t) = \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_1q(\tau+h) d\tau. \quad (5.21)$$

Naturalmente, o erro de predição  $e_{p1}$  é a contribuição da perturbação no intervalo de tempo  $[t, t+h)$ . No caso particular onde a perturbação é uma constante o erro será não nulo, por

exemplo, pois a integral irá somar em todo o intervalo. Uma forma intuitiva para avaliar  $e_{p_1}(t)$  pode ser feita usando a transformada de Laplace (ZHONG, 2006), obtendo

$$E_{p_1}(s) = e^{sh} \left( \mathbf{I} - e^{-(s\mathbf{I}-A)h} \right) (s\mathbf{I} - A)^{-1} \mathbf{B}_1 Q(s), \quad (5.22)$$

e aplicando o teorema do valor final.

A ideia também pode ser aplicada para os sistemas amostrados, a solução geral do TDS

$$x_p(k) = x(k+d) = A^d x(k) + \sum_{n=1}^d \left[ A^{n-1} (\mathbf{B}_2 u(k-n) + \mathbf{B}_1 q(k+d-n)) \right], \quad (5.23)$$

e, novamente, ao descartar o termo de contribuição da perturbação, obtém-se a solução proposta

$$x_{p_1}(k) = \hat{x}_1(k+d) = A^d x(k) + \sum_{n=1}^d A^{n-1} \mathbf{B}_2 u(k-n), \quad (5.24)$$

que, por fim, gera o erro de predição

$$e_{p_1}(k) = x_p(k) - x_{p_1}(k) = \sum_{n=1}^d A^{n-1} \mathbf{B}_1 q(k+d-n), \quad (5.25)$$

e que apresenta comportamento análogo ao caso contínuo, sua avaliação também pode ser feita no domínio da frequência usando o teorema do valor final.

A técnica da predição de  $x_{p_1}(t)$  e  $x_{p_1}(k)$  apresenta erros de predição relevantes desconsiderando as contribuições da perturbação. Um trabalho recente que foca na melhoria desse aspecto foi proposto em 3.35, que utiliza um ramo de realimentação que consiste na diferença do estado predito  $\hat{x}_1(t+h)$  e o estado medido  $x(t)$  ou sua versão discreta, estado predito  $\hat{x}_1(k+d)$  subtraído do medido  $x(k)$ . Que resulta em,

$$x_{p_2}(t) = x_{p_1}(t) + [\hat{x}_1(t) - x(t)], \quad (5.26)$$

e, de modo análogo, para o caso discreto

$$x_{p_2}(k) = x_{p_1}(k) + [\hat{x}_1(k) - x(k)], \quad (5.27)$$

Com o acréscimo do termo de realimentação foi demonstrado que para uma certa classe de sinais perturbadores, a nova predição leva a uma melhor atenuação do que a convencional (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a), o esquema foi avaliado para sistemas amostrados em (WANG; WU, 2022). No entanto, o cancelamento perfeito só é possível para perturbações,



para uma classe específica de perturbações, assim como a atenuação depende inteiramente das características da perturbação. De forma intuitiva, esse comportamento foi demonstrado na Seção 4.2.3.5.3 onde foi proposto um filtro que permite mensurar de forma exata perturbações que satisfazem  $q(t) = q(t+h)$  ou  $q(k) = q(k+d)$ . É possível verificar que o ramo de realimentação proposto pode ser considerado uma aproximação para reduzir  $e_{p_1}(t)$ .

Avaliando o erro de predição ao usar  $x_{p_2}(t)$  tem-se,

$$e_{p_2}(t) = e_{p_1}(t) - e_{p_1}(t-h) = \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_1 q(\tau+h) d\tau - \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_1 q(\tau) d\tau, \quad (5.28)$$

reorganizando a expressão de maneira conveniente, pode-se obter

$$e_{p_2}(t) = e_{p_1}(t) - e_{p_1}(t-h) = \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} B_1 [q(\tau+h) - q(\tau)] d\tau, \quad (5.29)$$

e, assim, quando a perturbação satisfaz  $q(t) = q(t+h)$  tem-se, que  $q(\tau+h) - q(\tau) = 0$  tornando o erro de predição nulo. Algumas perturbações comuns satisfazem essa restrição, constantes, senoides com frequência  $\omega = \frac{2\pi n}{h} \forall n \in \mathbb{N}$  e suas combinações.

Para sistemas amostrados, um resultado equivalente pode ser obtido usando a mesma metodologia. O erro predição apresenta a forma

$$e_{p_2}(k) = e_{p_1}(k) - e_{p_1}(k-d) = \sum_{n=1}^d A^{n-1} \mathbf{B}_1 q(k+d-n) - \sum_{n=1}^d A^{n-1} \mathbf{B}_1 q(k-n), \quad (5.30)$$

novamente reorganizando a expressão de maneira conveniente, pode-se obter

$$e_{p_2}(k) = \sum_{n=1}^d A^{n-1} \mathbf{B}_1 [q(k+d-n) - q(k-n)], \quad (5.31)$$

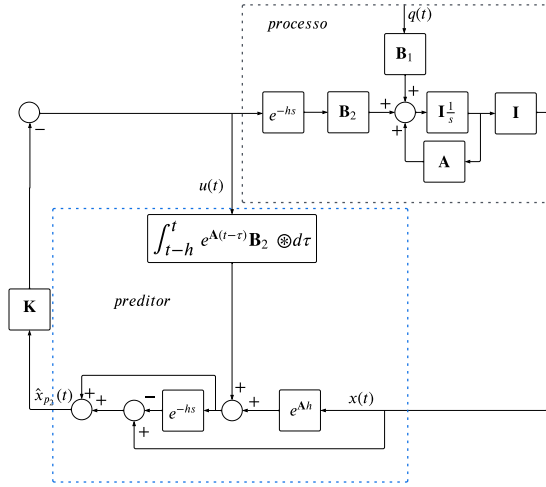
e, por fim, quando a perturbação satisfaz  $q(k) = q(k+d)$  isso implica  $q(k+d-n) = q(k-n) \forall n \in \mathbb{N}$  e, assim, o erro de predição é nulo para essas perturbações.

As equações para obtenção do estado predito e, assim, construir o sinal de controle FSA estão expostas na forma de diagrama de blocos nas Fig. 23a e Fig. 23b. Em (WANG; WU, 2022) foi proposto que a ideia do uso do ramo de realimentação pode ser realizado mais de uma vez e, assim, obter resultados interessantes. O esquema resultante ainda é simples e pode ser obtido usando a metodologia apresentada nesta seção para sistemas contínuos e também sistemas amostrados.

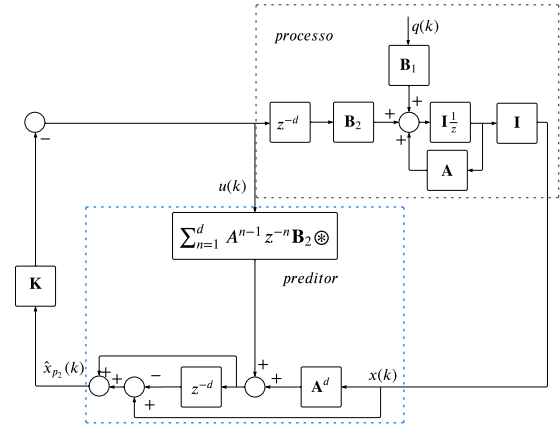
Uma forma consolidada de avaliar o desempenho do erro de predição pode ser feito através da relação entre a perturbação e o erro de predição no domínio da frequência (ZHONG,

Figura 23 – Diagrama de blocos do esquema de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) e (WANG; WU, 2022).

(a) Em tempo contínuo



(b) Em tempo discreto.



Fonte: Autoria própria.

2006), essa função de transferência generalizada para  $n_{Lec}$  realimentações pode ser representada no domínio do tempo

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{q_0}(s) = (\mathbf{I} - e^{-(s\mathbf{I} - \mathbf{A})h}) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1, \\ e_{p_2 n_{Lec}}(s) = (\mathbf{I} - e^{-sh})^{n_{Lec}} \mathbf{H}_0(s) Q(s), \end{cases} \quad (5.32)$$

e no domínio da frequência,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{q_0}(z) = (\mathbf{I} - z^{-d} \mathbf{A}^d) (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1, \\ e_{p_2 n_{Lec}}(z) = (\mathbf{I} - z^{-d})^{n_{Lec}} \mathbf{H}_0(z) Q(z). \end{cases} \quad (5.33)$$

Avaliações quanto ao desempenho do esquema de controle resultantes, com a mesma metodologia das Seções 5.1 e 5.2, serão feitas em conjunto com as técnicas apresentadas na Seção 5.4.

#### 5.4 Controlador-preditor baseado em observador aumentado: Caso contínuo

Essa técnica também está baseada na predição dos estados em  $h$  instantes à frente do tempo, que torna possível implementar um compensador de atraso via realimentação de estados com uma técnica de FSA. O valor do estado predito será obtido através do esquema de observador de estados aumentados apresentado no Capítulo 4, que pode ser aplicado a processos onde a medição direta do estado não está disponível, o que não é possível para as técnicas apresentadas na Seção 5.3. O valor dos estados no futuro  $\chi(t+h)$  não estão disponíveis, pois não há medição

da perturbação e valores futuros são impossibilitados por questões de causalidade. No entanto, foi demonstrado que se pode utilizar os observadores para mensurar os estados e, então, pode-se também utilizar os estados observados para o cálculo de predições. A qualidade das predições depende intrinsecamente do erro de predição e, para esse observador, pode-se sintonizar de forma a garantir que o erro seja limitado ou convirja para zero em casos particulares, assim como sintonizado a partir de um problema de otimização.

Alguns trabalhos recentes utilizaram esquemas equivalentes a alguns dos observadores descritos no Capítulo 4 onde foi comentado neste trabalho, tais como (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; SANZ *et al.*, 2016; CASTILLO; GARCIA, 2021; WANG; WU, 2022; Alves Lima *et al.*, 2022). Tem-se ainda que a estrutura de análise usada por cada um deles foi distinta e relativamente complexa quando comparado à estrutura unificada de filtros apresentada nesse texto. Contudo, a proposta desses trabalhos teve foco no esquema de predição apenas dos estados do processo e, então, como lei de controle, foi utilizada apenas uma realimentação dos estados não-aumentados. O interesse em controle ainda é justificado, pois se pode utilizar a saída predita para aplicar ação integral ou até controladores clássicos PI e PID realizando uma análise como um sistema livre de atraso, semelhante ao FSP e ao GSP. No entanto, a análise de desempenho das técnicas de preditor observador associadas a controladores clássicos constituem uma seara própria no ramo de controle e fogem do objetivo deste trabalho.

Então, pode-se utilizar a ideia de Artstein (1982) para o predição dos estados aumentados, obtendo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(t+h) \\ \hat{x}_\Delta(t+h) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(t+h)} = \underbrace{e^{\bar{\mathbf{A}}h}}_{\Xi} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\chi}(t)} + \int_{t-h}^t \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_2 u(\tau) \right] d\tau, \quad (5.34)$$

e, dessa forma, pode-se construir o sinal de controle com o termo  $\hat{x}(t+h)$  para uniformizar as técnicas baseadas em realimentação de estados. Para fins de padronização, o estado predito será caracterizado como  $x_{p3} = \hat{x}(t+h)$  e pode ser obtido diretamente

$$x_{p3}(t) = \Phi \hat{x}(t) + \Gamma \hat{x}_\Delta(t) + \int_{t-h}^t \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_2 u(\tau) \right] d\tau, \quad (5.35)$$

com  $\Xi$  representado como

$$\Xi \chi(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}h} \chi(t) = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \hat{x}(t) + \Gamma \hat{x}_\Delta(t) \\ \Xi_{21} \hat{x}(t) + \Xi_{22} \hat{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}$$

(5.36)

onde,  $\Xi \in \mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta) \times (n_x+n_\Delta)}$ ,  $\Xi_{11} \in \mathbb{R}^{(n_x) \times (n_x)}$ ,  $\Xi_{12} \in \mathbb{R}^{(n_x) \times (n_\Delta)}$ ,  $\Xi_{21} \in \mathbb{R}^{(n_\Delta) \times (n_x)}$  e  $\Xi_{22} \in \mathbb{R}^{(n_\Delta) \times (n_\Delta)}$ .

O erro de predição do sistema aumentado definido como

$$\xi_p(t) = \chi(t+h) - \hat{\chi}(t+h), \quad (5.37)$$

compõe o erro de predição do estado do processo  $e_{p_3}(t)$  e o da perturbação  $e_\Delta(t)$ . Então, o erro de predição pode ser obtido a partir da predição do sistema aumentado  $\chi(t+h)$ , levando em consideração que essa técnica tem interesse apenas em  $e_{p_3}(t)$ , assim

$$\chi(t+h) = e^{\bar{\mathbf{A}}h} \chi(t) + \int_{t-h}^t \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_2 u(\tau) \right] d\tau + \int_{t-h}^t \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_1 v(\tau+h) \right] d\tau, \quad (5.38)$$

e, para obter o erro de predição, faz-se

$$e_{p_3}(t) = x(t+h) - \hat{x}(t+h) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left( e^{\bar{\mathbf{A}}h} \xi(t) + \int_{t-h}^t \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_1 v(\tau+h) \right] d\tau \right), \quad (5.39)$$

pode-se inferir que o erro de predição depende da perturbação filtrada e, como demonstrado no Capítulo 4, pode ser atenuado e até eliminado através da escolha adequada do filtro de perturbação.

Em Castillo e Garcia (2021), foi proposto que a sintonia do ganho do observador aumentado  $L$  deve ser realizada visando minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema do erro Eq. 4.41 com saída como erro de predição desprezando o termo da perturbação filtrada. A estrutura em espaço de estados para o sistema do filtro de perturbação deve ser construída na forma canônica controlável para obter a mesmas matrizes usadas apresentadas em (CASTILLO; GARCIA, 2021). Seguindo o procedimento, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{e}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ e_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} + \bar{\mathbf{B}}_1 v(t), \\ \xi(t_0) = \chi_{t_0} - \hat{\chi}_{t_0} = \xi_0, \\ e_{p_3}(t) = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ e_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Assim, foi proposto o uso de restrições LMIs para minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema da Eq. 5.40 que, em autovalores, resultem em uma região de D-estabilidade previamente definida, a limitação da região é útil para reduzir o módulo dos valores do ganho do observador que é importante para questões práticas. De forma semelhante ao realizado no Capítulo 4, o problema de otimização pode ser definido

como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^\top > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \left[ \begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top + \mathcal{P} \bar{\mathbf{A}} - \mathcal{L} \mathbf{C} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix}^\top \\ * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mu \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0}, \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{P} + \mathbf{M} \otimes (\bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top) + \mathbf{M}^\top \otimes (\bar{\mathbf{A}}^\top \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathcal{L}^\top)^\top < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.41)$$

onde,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  definem a região de D-estabilidade e, por fim,  $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ .

#### 5.4.1 Nova proposta de controlador

Utilizando a metodologia do filtro de perturbação e observadores aumentados, foi possível construir o controlador-preditor proposto em (CASTILLO; GARCIA, 2021). Na análise do problema e, principalmente na Eq. 5.39, é perceptível que parte do erro de predição é ignorada no problema de otimização e parte dos estados observados não são usados na realimentação, em ambos os casos, desconsidera-se a contribuição dos estados do filtro de perturbação para reduzir o erro via realimentação ou otimização. A proposta de controlador dessa seção utiliza a ideia anterior de forma a incluir os estados da perturbação e, assim, obtém um sistema de erro de predição distinto que gera uma nova estrutura de sinal de controle, dando origem a um sistema em malha fechada que pode ser usado para o problema de otimização.

Como definido, considere uma realimentação de estados completa avaliando o erro de predição dos estados aumentados como na Eq. 5.4, dessa forma, pode-se fazer

$$u(t) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_\Delta \end{bmatrix} \hat{\chi}(t+h) = -\bar{\mathbf{K}} (\chi(t+h) - \xi_p(t)) \quad (5.42)$$

expandindo a equação do erro, tem-se novamente o termo não causal que é intrínseco ao sistema. Então, a contribuição desse termo será desprezada, levando em consideração a restrição imposta no Capítulo 4 que impõe que esse termo é sempre inferior que uma constante que atua como um limitante superior. E, assim, faz-se a seguinte consideração

$$\xi_p(t) \cong e^{\bar{\mathbf{A}}h} \xi(t), \quad (5.43)$$

que permite obter uma lei de controle atualizada que depende apenas do próprio estado aumentado,

$$u(t) = -\bar{\mathbf{K}} (\chi(t+h) - \xi_p(t)) \cong -\bar{\mathbf{K}} \chi(t+h) + \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} \xi(t). \quad (5.44)$$

Aplicando a lei de controle ao sistema aumentado, tem-se dependência com o estado aumentado  $\chi$  e com o estado aumentado do erro  $e$ , então, pode-se construir o sistema em malha fechada como

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = \bar{\mathbf{A}}\chi(t) - \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}\chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}e^{\bar{\mathbf{A}}h}\xi(t-h) + \bar{\mathbf{B}}_1v(t), \\ y(t) = \bar{\mathbf{C}}\chi(t) + \bar{\mathbf{D}}_1v(t), \end{cases} \quad (5.45)$$

que pode ser representado de maneira compacta com o estado  $\Upsilon(t)$  na forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}e^{\bar{\mathbf{A}}h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t-h) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix} v(t), \\ \begin{bmatrix} \chi(t_0) \\ \xi(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{t_0} \\ \xi_{t_0} \end{bmatrix}, \\ y(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix} v(t). \end{cases} \quad (5.46)$$

Se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  for controlável, pode-se alocar os autovalores do sistema através de  $\mathbf{K}$  de forma livre no plano complexo e torná-lo Hurwitz. A matriz dos estados apresenta forma triangular

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1\mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2\mathbf{K} & \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K} & \mathbf{B}_1\mathbf{c} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

e, assim,  $\mathbf{K}_\Delta$  não altera os autovalores da matriz dos estados e não tem influência na dinâmica do sistema. Porém,  $\mathbf{K}_\Delta$  atua diretamente na relação entre a perturbação e a saída que, por consequência, está intimamente relacionada com a norma  $H_\infty$  do sistema. Pode-se sintonizar  $\mathbf{K}_\Delta$  de maneira que  $\mathbf{B}_1\mathbf{c} = \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta$  e, então, a única perturbação atuante no sistema será o termo desprezado na Eq. 5.4.1.

Pode-se obter inicialmente o ganho  $\bar{\mathbf{K}}$  definindo a velocidade do segmento de referência através de  $\mathbf{K}$  e reduzir a influência da perturbação na saída fazendo  $\mathbf{B}_1\mathbf{c} = \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta$ . Assim, na Eq. 5.47, tem-se como parâmetro de sintonia apenas o ganho do observador  $\mathbf{L}$  e, dessa forma, pode-se reescrever o

sistema de maneira conveniente como

$$\begin{cases}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\Upsilon}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t-h) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t-h)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{B}}_1} v(t), \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t_0) \\ \xi(t_0) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{t_0} \\ \xi_{t_0} \end{bmatrix}}_{\Upsilon_{t_0}}, \\
 y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{C}}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(t)
 \end{cases} \quad (5.48)$$

Avaliando o sistema resultante 5.48, pode-se inferir que é equivalente ao sistema da Eq. 5.4, que foi estudada nas seções anteriores. Assim, a LMI 2.22 permite inferir a estabilidade e obter a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para valores de  $\mathbf{K}$  e  $\check{\mathbf{L}}$  definidos. Em (FRIDMAN, 2014), propõe-se uma modificação na LMI baseada em funcionais de Lyapunov-Krasovski 2.22, porém não há uma LMI específica para esse caso. Felizmente, pode-se obter uma solução em LMIs para esse problema usando algumas ferramentas apresentadas (FRIDMAN, 2014) ao custo de incremento de conservadorismo. Então, pode-se obter o ganho do observador  $\check{\mathbf{L}}$  em de otimização de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  a partir da LMI fazendo  $\delta = 0$  e  $\mathcal{P}_3 = \varepsilon \mathcal{P}_2$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo. Para que  $\mathcal{P}_2$  tenha inversa defina no problema que  $\mathcal{P}_2 > \mathbf{0}$ . Onde,  $\mathbf{A} = \check{\mathbf{A}}_0 - \check{\mathbf{L}}\check{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{A}_1 = \check{\mathbf{A}}_1$ ,  $\mathbf{B}_1 = \check{\mathbf{B}}_1$ ,  $\mathbf{C}_0 = \check{\mathbf{C}}_0$  e  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ . Logo, só restarão as matrizes com variáveis de decisão  $\mathcal{P}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}_{12}, \check{\mathbf{L}}$  multiplicadas à direita por  $\mathcal{W}^\top$  e seu termo transposto, para fins de visualização, considerou-se a mesma notação para essas matrizes resultantes. Então, faça  $\mathcal{Y} = \mathcal{W}^\top \check{\mathbf{L}}$  e,

então, o problema se torna novamente descrito por LMIs, como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{W} > 0, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{S}_{12}, \mathcal{Y} \\ \min \{ \mu \}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ * & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ * & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ * & * & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ * & * & * & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ * & * & * & * & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ * & * & * & * & * & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{11} = (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I})\mathcal{W} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathbf{Y}^\top + \mathcal{W}^\top (\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{Y}\bar{\mathbf{C}} + \mathcal{S} - \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{W}^\top + \varepsilon (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I})\mathcal{W} - \varepsilon \bar{\mathbf{C}}^\top \mathbf{Y}^\top, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}) + \mathcal{W}^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{15} = \mathcal{W}^\top \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathbf{C}_0^\top, \mathcal{M}_{22} = -\varepsilon \mathcal{W}^\top - \varepsilon \mathcal{W} + P + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \varepsilon \mathcal{W}^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{25} = \varepsilon \mathcal{W}^\top \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R}), \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top), \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{44} = -2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}. \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{W} + \mathbf{M} \otimes (\check{\mathbf{A}}^\top \mathcal{W} - \check{\mathbf{C}}^\top \mathcal{Y}^\top) + \mathbf{M}^\top \otimes (\check{\mathbf{A}}^\top \mathcal{W} - \check{\mathbf{C}}^\top \mathcal{Y}^\top)^\top < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.49)$$

onde  $\mu = \gamma^2$ ,  $\check{\mathbf{L}} = [\mathcal{W}^\top]^{-1} \mathcal{Y}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  definem a região de D-estabilidade e, por fim,  $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ .

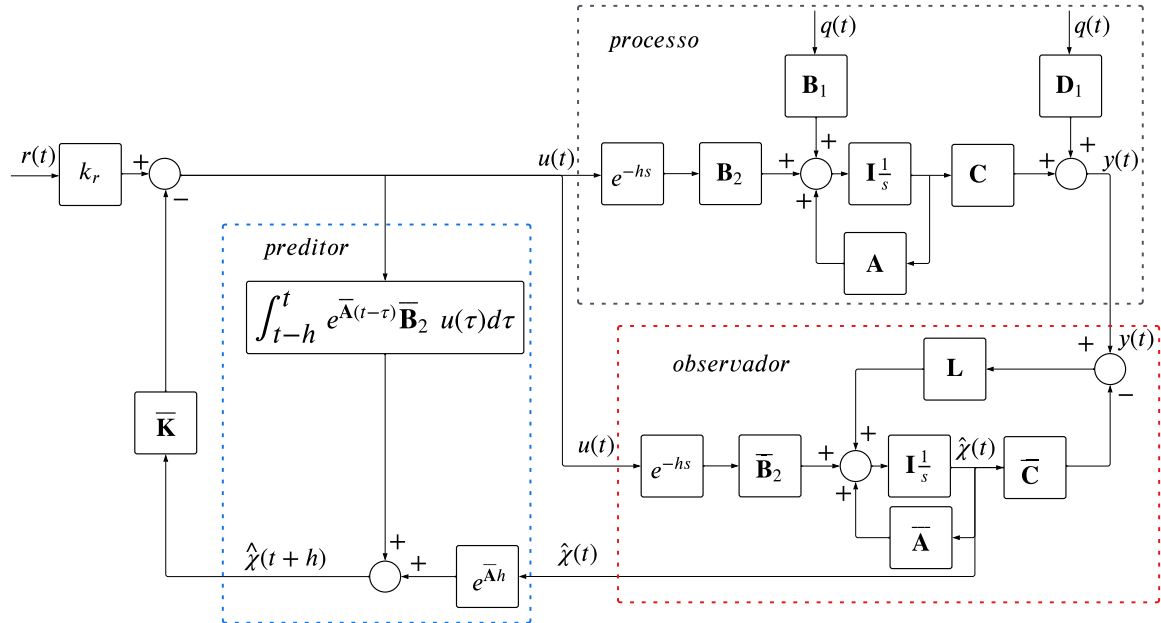
A topologia dos controladores apresentados difere apenas na ordem do estado realimentado e, assim, pode-se os representar como um único diagrama de blocos. O diagrama no domínio de tempo contínuo está representado na Fig. 24, para os esquema de realimentação de estados simples basta fazer  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ , aplicar a integral com matrizes não aumentadas e substituir o bloco  $e^{\bar{\mathbf{A}}h}$  por  $\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix}$ . O controlador proposto utiliza a estrutura da Fig. 24 sem modificações.

Na metodologia de sintonia do esquema anterior, o problema de otimização relacionado à perturbação filtrada para uma equação baseada no erro de predição e, assim, reduz a influência da perturbação na saída de maneira indireta. Pois, pode-se dividir a relação da perturbação filtrada para saída como: perturbação para sinal de controle e outro termo de sinal de controle para saída. Otimizar cada um deles individualmente gera, naturalmente, uma sintonia sub-ótima, pois a frequência de maior



amplificação do primeiro sistema será diferente do segundo sistema e, também, diferente da perturbação do conjunto. Esse problema é resolvido ao utilizar o sistema completo da Eq.5.48 e a sintonia via LMIs para TDS apresentada em Eq. 5.49.

Figura 24 – Diagrama de blocos para controlador-preditor baseado em observador aumentado.



Fonte: O autor.

Como descrito anteriormente, o erro de predição para esse esquema de controle é consideravelmente mais complexo. Assim, optou-se por reduzir o tamanho das equações usando blocos auxiliares. Novamente, por apresentarem a mesma estrutura, pode-se usar as mesmas funções de transferência para o esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021), o controlador proposto para realimentação de estados simples e para realimentação de estados completa. As função de transferência da relação perturbação para o estado, perturbação para o estado estimado, perturbação para o erro, perturbação para o erro predito e

referência para o estado estão dispostas na Eq. 5.50.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_0(s) = (\mathbf{I} - e^{-(s\mathbf{I} - \mathbf{A})h}) (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2, \\ \mathbf{H}(s) = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{H}_0(s))^{-1} (\bar{\mathbf{K}}e^{\bar{\mathbf{A}}h}), \\ \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{B}}_2e^{-sh}\mathbf{H}(s))^{-1} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}), \\ \mathbf{H}_{xq}(s) = (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}_2e^{-sh_r}\mathbf{H}(s)\mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s))^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1\Delta(s), \\ \chi(s) = \mathbf{H}_{xq}(s)\mathcal{Q}(s), \\ \hat{\chi}(s) = \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s)\mathbf{H}_{xq}(s)\mathcal{Q}(s), \\ \chi_{p_3}(s) = (e^{\bar{\mathbf{A}}h} - \mathbf{H}_0(s)\mathbf{H}(s)) \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s)\mathbf{H}_{xq}(s)\mathcal{Q}(s), \\ E(s) = \chi(s) - \hat{\chi}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s)) \mathbf{H}_{xq}(s)\mathcal{Q}(s), \\ E_{p_3}(s) = \chi(s) - e^{-sh_r}\chi_{p_3}(s) = (e^{\bar{\mathbf{A}}h} - \mathbf{H}_0(s)\mathbf{H}(s)) \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(s) \mathbf{H}_{xq}(s)\mathcal{Q}(s), \\ x(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_2k_rR(s), \end{array} \right. \quad (5.50)$$

A dimensão de todos os estados e do erro é  $\mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta)}$ . As matrizes representadas como  $\tilde{\mathbf{A}}$  indicam a matriz do processo real. Como nesse capítulo a análise não leva em conta incertezas de modelagem, deve-se considerar essas matrizes como as mesmas que  $\bar{\mathbf{A}}$ . Para representações com relação a saída, basta usar a relação  $y(t) = \bar{\mathbf{C}}\chi(t)$ .

#### 5.4.1.1 Exemplo

Para demonstrar o uso da metodologia descrita, ela será aplicada ao exemplo da literatura ao qual os preditores foram aplicados no domínio contínuo em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; SANZ *et al.*, 2018; CASTILLO; GARCIA, 2021) e no discreto em (WANG; WU, 2022; Alves Lima *et al.*, 2022) com o atraso de  $h = 0,5$  segundos. Será avaliada uma simulação com sintonia estabilizante para as mesmas condições avaliadas na literatura. Diferente destes trabalhos, aqui também será avaliada no domínio da frequência a rejeição de perturbação com relação a saída. O processo avaliado

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q(t) \quad (5.51)$$

com condição inicial  $x(0) = [0 \ 0]^\top$ . A perturbação aplicada no exemplo é do tipo senoidal  $q_1(t) = 3\sin(2t)$ . Também será avaliada outra perturbação  $q_2(t) = 3\sin(37,2698t)$  com frequência convenientemente escolhida no pico da norma do sistema em malha fechada de (CASTILLO; GARCIA, 2021). O ganho de realimentação de estados é  $\mathbf{K} = [48 \ 18]$ , que será usada para todos os preditores.

Seguindo os passos apresentados, será usado o filtro  $\Delta_1(s) = s^4$ , obtendo o modelo do sistema aumentado exposto na Eq. 4.59 para manter o mesmo filtro e ordem que o (CASTILLO; GARCIA, 2021). Para exemplificar a capacidade do esquema preditor-observador proposto em rejeitar perturbações

conhecidas será também aplicado um sistema com filtro  $\Delta_2(s) = s^2 + 2^2$ . Para solução via LMI proposta foi definida uma variação no atraso permitida de derivada  $d = 0,1$  e  $\varepsilon = 0,05$  com  $\mathbf{K}_\Delta = [\mathbf{0}]$  em ambas as sintonias. O ganho do observador aumentado obtido por (CASTILLO; GARCIA, 2021) teve restrição com relação a uma região de D-estabilidade de centro 0 e raio 40 e, assim, o método proposto inclui a mesma região. Nas simulações da literatura a condição inicial dos estados da perturbação foi a mesmas e também será mantida. Os ganhos do observador obtidos usando o método proposto são  $L_{p_1}$  e  $L_{p_2}$ , o método da literatura é  $L_{CG}$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{p_1} = \begin{bmatrix} 1,2536 & -13,8238 & -22,2106 & -40,9824 & -35,2659 & -18,5955 \\ -3,8483 & 28,3061 & 80,4188 & 157,8708 & 144,1417 & 77,6207 \end{bmatrix}^\top \\ L_{p_2} = \begin{bmatrix} 24,4841 & -15,4168 & -34,3834 & -23,5109 \\ -4,1352 & 29,1830 & 113,4590 & 57,2471 \end{bmatrix}^\top \\ L_{CG} = \begin{bmatrix} 10,28 & 4,32 & 512 & 9680 & 1,16e05 & 7,96e05 \\ 0,22 & 58,8 & 2960 & 83900 & 1,5e06 & 1,38e07 \end{bmatrix}^\top \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Os sistemas aumentados para cada um dos filtros, assim como foi feito em Eq. 4.59, estão representados nas Eq. 5.53 e Eq. 5.54

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) & x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}^\top}_{\chi(t_0)^\top} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & q(0) & \frac{\partial q(0)}{\partial t} & \frac{\partial^2 q(0)}{\partial t^2} & \frac{\partial^3 q(0)}{\partial t^3} \end{bmatrix}^\top}_{z_0^\top}, \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{\chi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{D}_1} v(t), \end{array} \right. \quad (5.53)$$

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\Delta(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} v(t), \\
\begin{bmatrix} x(t_0) & x_\Delta(t_0) \end{bmatrix}^\top = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top}_{z(t_0)^\top}, \\
y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{D}_1} v(t),
\end{cases} \quad (5.54)$$

As matrizes que solucionam as LMIs 5.49 para cada uma das sintonias estão dispostas no Apêndice A.

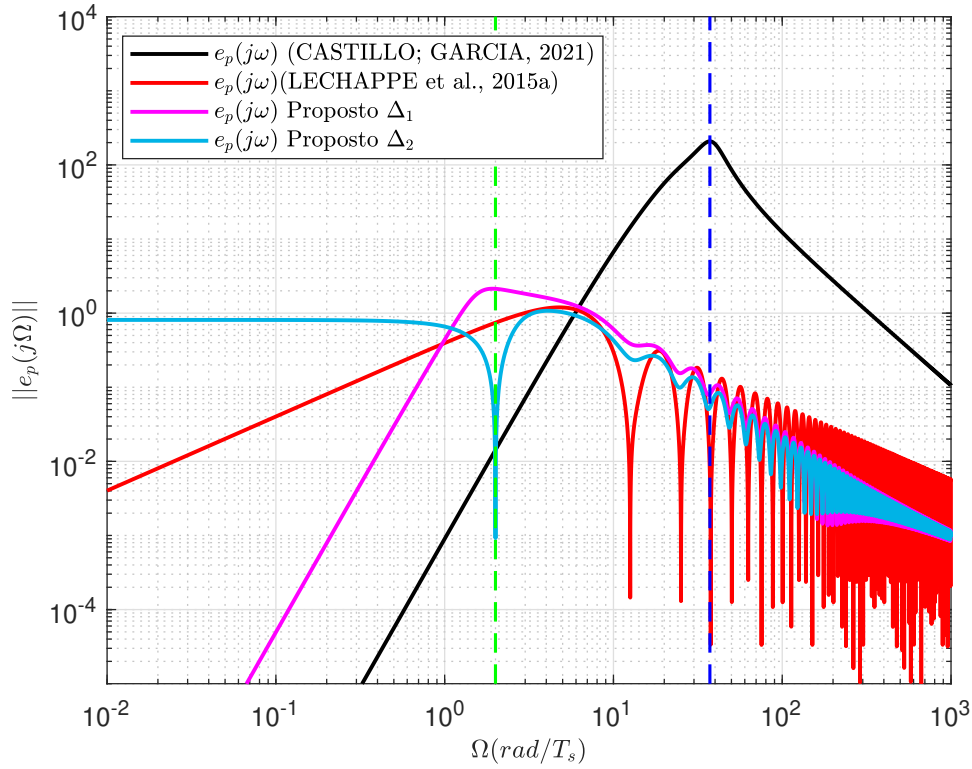
A simulação para a perturbação  $q_1(t)$  foi feita com 30 segundos e para perturbação  $q_2(t)$  foram 60 segundos, as figuras no tempo são representadas após o tempo do atraso, ou seja, apenas a partir do momento onde o controlador pode agir no sistema. Nas Fig. 26a e 26b, o tempo de simulação exposto foram de 30 segundos. Na segunda figura é apresentado um trecho após o período transitório, pois a frequência é bastante elevada e a oscilação inicial antes da convergência é considerável.

As avaliações no domínio da frequência serão feitas a partir das funções de transferência apresentadas na Eq. 5.32 para o esquema de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a), e a Eq. 5.50 para o esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021) e o proposto com as devidas alterações. Na literatura, a análise é focada no erro de predição, pois os esquemas de observador-preditor foram desenvolvidos para serem usados por um controlador (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a). Assim, a análise nessa seção também se concentra no erro de predição.

Para avaliar o comportamento dos preditores no domínio da frequência pode-se usar a Fig. 25. Tem-se que as estratégias apresentam desempenhos distintos, para a frequência  $q_1(t)$  usada em (CASTILLO; GARCIA, 2021) e, destacada na Fig.25 a partir de uma barra vertical verde, seu esquema de controle apresentou o melhor desempenho. Porém, na escolha conveniente da frequência  $q_2(t)$  representada na Fig.25 por uma barra vertical em azul tem-se o pico da amplificação perturbação erro de predição para o esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021) e, dessa forma, essa técnica apresenta o pior desempenho para essa perturbação, com relação as outras técnicas avaliadas.

Todas as três estratégias com a premissa de perturbações desconhecidas apresentam, em alguma faixa de frequência, o melhor desempenho. Nas baixas frequências a rosa. Assim, tem-se um desafio para avaliar o desempenho de controladores para perturbações desconhecidas, uma forma objetiva de realizar comparações é utilizar como métrica o pior caso, ou seja, a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Dessa forma, tem-se que o controlador proposto é superior ao esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021) e ligeiramente inferior

Figura 25 – Relação do módulo da perturbação para a norma euclidiana do erro de predição

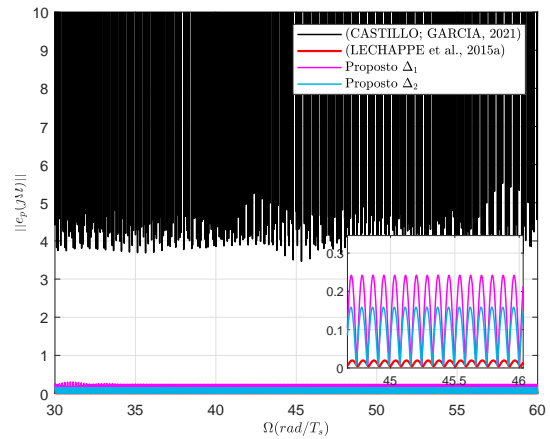
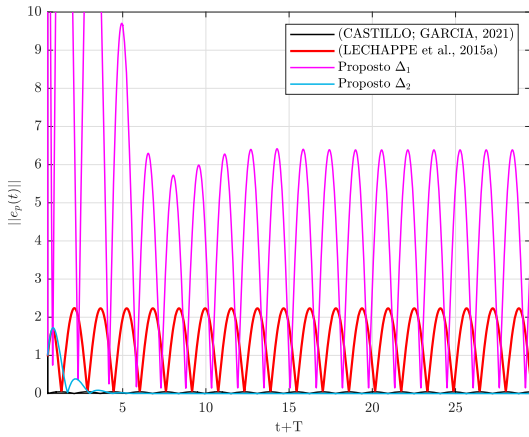


Fonte: O autor.

Figura 26 – Resposta no tempo do módulo do erro de predição

(a) Perturbação  $q_1(t)$  aplicada.

(b) Perturbação  $q_2(t)$  aplicada.

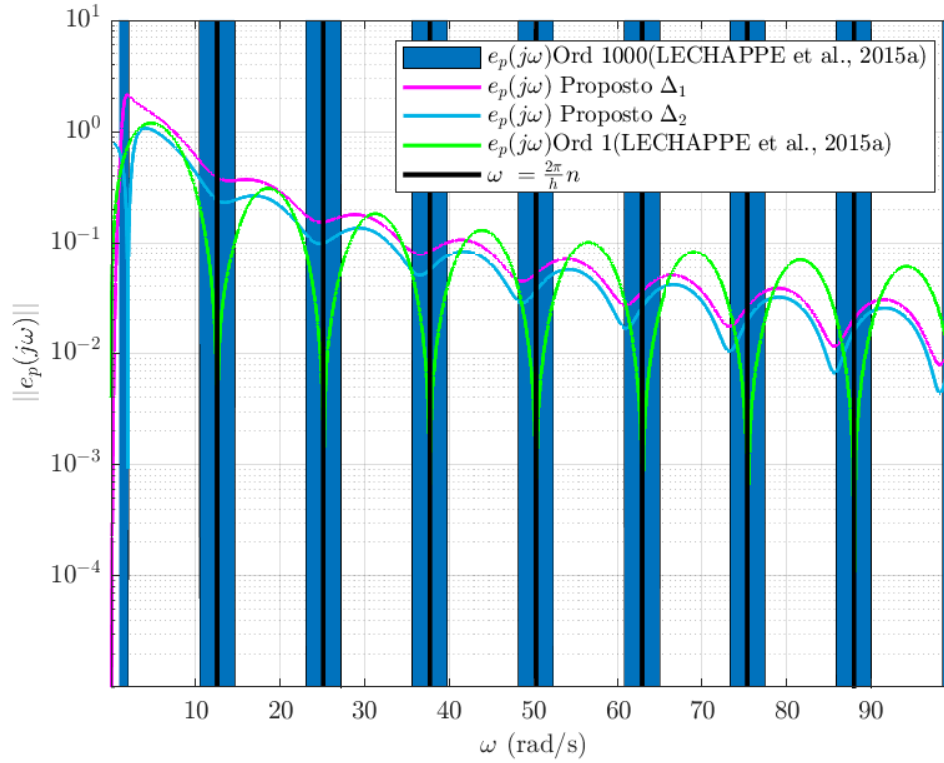


Fonte: Autoria própria.

ao apresentado por (LÉCHAPPE *et al.*, 2015a). O filtro sintonizado especificamente para a perturbação  $\Delta_2$  apresenta o melhor desempenho nessa frequência específica, porém ele não rejeita perturbações constantes e em baixas frequências, mas por ter a menor ordem apresenta a melhor atenuação em altas frequências. Em geral, considerando todas as proposta a de menor norma é a com filtro  $\Delta_2$ .

O desempenho dos esquemas quanto a qualidade das predições torna-se ainda mais explicito

Figura 27 – Relação do módulo da perturbação para a norma euclidiana do erro de predição



Fonte: O autor.

no sinal da norma do erro no tempo na Fig. 26b, que também foi avaliada na literatura. Onde, na perturbação  $q_1(t)$  o erro de predição do esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021) é bastante inferior aos seus pares e, posteriormente, na perturbação  $q_2(t)$  tem seu desempenho deteriorado apresentando amplitude milhares de vezes superior. Para as duas frequências avaliadas no tempo a proposta com o filtro  $\Delta_2$  apresentou desempenho equivalente ou superior.

O esquema de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) tem desempenho dependente apenas da perturbação, não há observador ou algum grau de liberdade que permita sintonia, e só pode ser usado quando os estados do processo estão disponíveis para medição. Como esperado, a partir dos detalhes dispostos no Cap. 4, esse esquema rejeita perturbações periódicas nos períodos múltiplos do atraso e, como a frequência de  $q_2(t)$  é  $\omega = 3\frac{2\pi}{0.5}$  ela é rejeitada de forma relevante. Esse resultado é perceptível nas Fig 25 e 26b.

No trabalho de Wang e Wu (2022) foram demonstradas algumas vantagens realizar realimentação do erro de predição proposto por (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) mais de uma vez. Porém, sua análise foi feita no domínio de tempo discreto onde o filtro tem dimensão finita e, assim, é relativamente mais simples. A análise para o esquema em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) foi feita no Cap. 4 e a resposta em frequência do esquema está apresentada na Fig. 27. A análise do filtro do (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) permitiu inferir que o esquema atenua frequências  $\frac{2\pi}{h}$ ; aplicar filtros em série amplifica as características

do próprio filtro e, assim, amplifica e atenua em maior grau em suas respectivas zonas; por fim, ao associar em série o filtro de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) obtém-se uma zona de  $\frac{2\pi}{h} \frac{1}{3}$  com atenuação ao redor da ressonância (representada em azul) e uma zona de  $\frac{2\pi}{h} \frac{2}{3}$  com amplificação.

## 5.5 Controlador-preditor baseado em observador aumentado: Caso discreto

De forma análoga a seção anterior, pode-se aplicar a metodologia para o caso específico dos sistemas amostrados. Equações TDS discretas apresentam dimensão finita e, então, pode-se incorporar o atraso como dinâmica e obter um sistema aumentado. Esse procedimento é possível, porém muitas vezes inviável, pois gera matrizes de alta ordem que apresentam custo computacional de análise e implementação impraticáveis. Assim, nessa seção as análises e LMIs obtidas também serão específicas para sistemas TDS.

Novamente, busca-se obter o estado  $d$  instantes à frente do tempo que torna possível implementar um compensador de atraso via realimentação de estados com uma técnica de FSA. O estado, quando não disponível, será obtido pelo esquema de observador de estados aumentados apresentado no Capítulo 4, que pode ser aplicado a processos onde a medição direta do estado não está disponível, o que não é possível para as técnicas apresentadas na Seção 5.3.

Mais uma vez o valor dos estados no futuro  $\chi(k+d)$  não está disponível, pois não há medição da perturbação e valores futuros são impossibilitados por questões de causalidade. No entanto, foi demonstrado que se pode utilizar os observadores para mensurar os estados e, então, pode-se também utilizar os estados observados para o cálculo de predições. Por definição, a qualidade das predições depende intrinsecamente do erro de predição e, foi demonstrado que sempre pode-se sintonizar o esquema de controle de forma a garantir que o erro seja limitado ou convirja para zero em casos particulares.

Na literatura apresentada, os trabalhos de (WANG; WU, 2022; Alves Lima *et al.*, 2022) lidam diretamente com sistemas discretos e, então, serão usados para comparação nessa seção. Em resumo, pode-se concluir que a metodologia de Wang e Wu (2022) faz um paralelo do trabalho de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) para sistemas discretos, assim como (Alves Lima *et al.*, 2022) faz para o trabalho de (CASTILLO; GARCIA, 2021). Essa será a literatura base de comparação para o esquema proposto para o tempo discreto.

Ao comparar a topologia do controlador proposto na seção anterior com filtro baseado em integradores com a de (CASTILLO; GARCIA, 2021), pode-se constatar que para o caso de realimentação de estados simples eles compartilham muitas semelhanças, diferindo na forma de sintonia. Porém, em domínio discreto, as diferenças são superiores devido a principalmente duas características: o filtro equivalente usado em (Alves Lima *et al.*, 2022) é estritamente próprio; as equações de predição são distintas.

Usando a equação do estado do observador aumentado 4.44 e realizando sua progressão no tempo, onde os termos  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k) = 0 \forall k > k_0$ , pode-se chegar ao resultado

$$\begin{cases} \hat{\chi}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\chi}(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \mathbf{L}e(k), \\ \hat{\chi}(k+2) = \bar{\mathbf{A}}^2 \hat{\chi}(k) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k+1-d) + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{L}e(k), \\ \hat{\chi}(k+3) = \bar{\mathbf{A}}^3 \hat{\chi}(k) + \bar{\mathbf{A}}^2 \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 u(k+1-d) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k+2-d) + \bar{\mathbf{A}}^2 \mathbf{L}e(k), \\ \vdots \\ \hat{\chi}(k+d) = \bar{\mathbf{A}}^d \hat{\chi}(k) + \sum_{n=1}^d \bar{\mathbf{A}}^{n-1} [\bar{\mathbf{B}}_2 u(n-d)] + \bar{\mathbf{A}}^{d-1} \mathbf{L}e(k), \end{cases} \quad (5.55)$$

e, para obter o erro de predição  $\xi_p(t) = \chi(t+h) - \hat{\chi}(t+h)$ , deve-se obter primeiramente o estado futuro, que pode ser feito como

$$\begin{cases} \chi(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\chi(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ \chi(k+2) = \bar{\mathbf{A}}_2 \chi(k) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 u(k+1-d) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 v(k+1) + \bar{\mathbf{B}}_2 v(k), \\ \chi(k+3) = \bar{\mathbf{A}}_3 \chi(k) + \bar{\mathbf{A}}^2 \bar{\mathbf{B}}_2 u(k+2-d) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 u(k+1-d) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(k-d) + \bar{\mathbf{A}}^2 \bar{\mathbf{B}}_2 v(k+2) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}_2 v(k+1) + \bar{\mathbf{B}}_2 v(n), \\ \vdots \\ \chi(k+d) = \bar{\mathbf{A}}^d \chi(k) + \sum_{n=1}^d \bar{\mathbf{A}}^{n-1} [\bar{\mathbf{B}}_2 u(n-d) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(n+d)], \end{cases} \quad (5.56)$$

e, finalmente, obter

$$\xi_{p_3}(k) = \bar{\mathbf{A}}^{d-1} (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) \xi(t) + \sum_{n=1}^d \bar{\mathbf{A}}^{n-1} [\bar{\mathbf{B}}_1 v(n+d)], \quad (5.57)$$

novamente fica nítido que o erro de predição depende da perturbação filtrada e, como demonstrado no Capítulo 4, pode ser atenuado e até eliminado através da escolha adequada do filtro de perturbação.

Baseado no esquema e na sintonia de (CASTILLO; GARCIA, 2021) em (Alves Lima *et al.*, 2022) foi proposta uma sintonia para o ganho do observador aumentado  $L$  visando minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema do erro semelhante a Eq. 5.57, diferindo apenas no termo  $e(k)$  ignorado na análise. Assim como na seção anterior, o termo da perturbação filtrada na faixa  $[k+1, k+d]$  também é desprezado. A estrutura em espaço de estados para o sistema do filtro de perturbação deve ser construída na forma canônica de Jordan, fazendo com que  $b = [\mathbf{0} \quad -1]$  e o filtro integrador deve ser do tipo  $\Delta(z) = (1-z)$  para obter a mesmas matrizes usadas apresentadas em (Alves Lima *et al.*, 2022). O interesse nesta seção está no erro predição apenas dos estados do processo e, assim, seguindo o procedimento para o método de



(Alves Lima *et al.*, 2022) obtém-se  $e_{p_4}(k)$  e para para o método proposto  $e_{p_3}(k)$ , como

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} e(k+1) \\ e_{\Delta}(k+1) \end{bmatrix}}_{\xi(k+1)} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}) \underbrace{\begin{bmatrix} e(k) \\ e_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\xi(k)} + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ \xi(k_0) = \chi_{k_0} - \hat{\chi}_{k_0} = \xi_0, \\ e_{p_4}(k) = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e(k) \\ e_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\xi(k)}, \\ e_{p_3}(k) = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e(k) \\ e_{\Delta}(k) \end{bmatrix}}_{\xi(k)} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

onde as matrizes  $\Phi_4\Gamma_4$  e  $\Phi\Gamma$  são obtidas de forma análoga ao caso contínuo fazendo a expansão para  $\bar{\mathbf{A}}^d$  ou  $\bar{\mathbf{A}}^{d-1}(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})$ , respectivamente.

Em sequência, foi proposto o uso de restrições LMIs para minimizar a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema da Eq. 5.58 com respostas que resultem, em autovalores, uma região de D-estabilidade previamente definida, a limitação da região é útil para reduzir o módulo dos valores do ganho do observador que é importante para questões práticas. De forma semelhante ao realizado no Capítulo 4 o problema de otimização pode ser definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\top} > \mathbf{0}, \mathcal{L}, \mu, \\ \min\{\mu\}, \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathcal{P} & \bar{\mathbf{A}}^{\top} \mathcal{P} - \bar{\mathbf{C}}^{\top} \mathcal{L}^{\top} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \end{bmatrix}^{\top} \\ \star & \mathcal{P} & \mathcal{P} \bar{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.59)$$

onde,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\mathbf{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}_{\infty} = \gamma$ .

### 5.5.1 Nova proposta de controlador

Seguindo o procedimento realizado no caso contínuo, é nítido que parte do erro de predição é ignorada no problema de otimização da Eq. 5.59 e parte dos estados observados não são usados na realimentação, em ambos os casos desconsidera-se a contribuição dos estados do filtro de perturbação

para reduzir o erro via realimentação ou otimização. A proposta de controlador desta seção utiliza a realimentação completa de estados e obtém um problema de otimização diretamente para sistemas TDS.

Como definido, considere uma realimentação de estados completa avaliando o erro de predição dos estados aumentados como na Eq. 5.57, dessa forma pode-se fazer

$$u(k) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_\Delta \end{bmatrix} \hat{\chi}(k+d) = -\bar{\mathbf{K}}(\chi(k+d) - \xi_p(k)) \quad (5.60)$$

expandindo a equação do erro, tem-se novamente o termo não causal e, por definição limitado, e dessa forma será desprezado, o que gera conservadorismo na resposta. Existe uma outra aproximação necessária para construção do problema em LMIs, que é desconsiderar o termo  $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}$  da Eq. 5.57, pois ele gera operações não lineares com relação às variáveis de decisão, na qual futuramente pode-se trabalhar na obtenção de soluções equivalentes que eliminem esse problema. E, assim, faz-se a seguinte consideração

$$\xi_p(k) \cong \bar{\mathbf{A}}^d \xi(k), \quad (5.61)$$

e aplicando na lei de controle usando algum algebrismo, obtém-se

$$u(k) = -\bar{\mathbf{K}}(\chi(k+d) - \xi_p(k)) \cong -\bar{\mathbf{K}}\chi(k+d) + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{A}}^d \xi(k). \quad (5.62)$$

Aplicando a lei de controle ao sistema aumentado tem-se dependência com o estado aumentado e com o estado aumentado do erro e, então, pode-se construir o sistema em malha fechada como

$$\begin{cases} \chi(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\chi(k) - \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}\chi(k) + \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{A}}^d \xi(k-d) + \bar{\mathbf{B}}_1 v(k), \\ y(k) = \bar{\mathbf{C}}\chi(k) + \bar{\mathbf{D}}_1 v(k), \end{cases} \quad (5.63)$$

que pode ser representado de maneira compacta com o estado  $\Upsilon(k)$  na forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \chi(k+1) \\ \xi(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_2\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{A}}^d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(k-d) \\ \xi(k-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix} v(k), \\ \begin{bmatrix} \chi(k_0) \\ \xi(k_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{k_0} \\ \xi_{k_0} \end{bmatrix}, \\ y(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix} v(k). \end{cases} \quad (5.64)$$

Se o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  for controlável, pode-se alocar os autovalores do sistema através de  $\mathbf{K}$  de forma livre no plano complexo e fazer com que o módulo do maior autovalor seja  $\Lambda < 1$ . A matriz dos estados apresenta forma triangular e, assim,  $\mathbf{K}_\Delta$  não altera os autovalores da matriz dos estados e não tem influência na dinâmica do sistema. Porém,  $\mathbf{K}_\Delta$  atua diretamente na relação entre a perturbação e a saída que, por consequência, está intimamente relacionada com a norma  $H_\infty$  do sistema. Assim como no

caso contínuo, pode sintonizar  $\mathbf{K}_\Delta$  de maneira que  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$  e, então, a única perturbação não filtrada atuante no sistema será o termo desprezado na Eq. 5.4.1.

Pode-se obter inicialmente o ganho  $\bar{\mathbf{K}}$  definindo a velocidade do segmento de referencia através de  $\mathbf{K}$  e reduzir a influência da perturbação na saída fazendo  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$ . Assim, na Eq. 5.65 tem-se como parâmetro de sintonia apenas o ganho do observador  $\mathbf{L}$  e, dessa forma, pode-se reescrever o sistema em malha fechada de maneira conveniente como

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k+1) \\ \xi(k+1) \end{bmatrix}}_{\dot{\Upsilon}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(k)} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k-d) \\ \xi(k-d) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(k-h)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{B}}_1} v(k), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k_0) \\ \xi(k_0) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{k_0} \\ \xi_{k_0} \end{bmatrix}}_{\Upsilon_0}, \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{C}}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}}_{\Upsilon(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{D}}_1} v(k) \end{array} \right. \quad (5.65)$$

Novamente, o sistema 5.65 é um TDS estudado anteriormente no Capítulo 2, especificamente na Eq. 5.4. Assim, a LMI 2.24 permite inferir a estabilidade e obter a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um valor de  $\mathbf{K}$  e  $\check{\mathbf{L}}$  definidos. Em (FRIDMAN, 2014), propõe-se uma modificação na LMI baseada em funcionais de Lyapunov-Krasovski 2.24, porém não há uma LMI específica para esse caso. Felizmente, pode-se obter uma solução em LMIs para esse problema usando algumas ferramentas de manipulação apresentadas (FRIDMAN, 2014) ao custo de incremento de conservadorismo. Então, pode-se obter o ganho do observador  $\check{\mathbf{L}}$  em um problema de redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  a partir da LMI fazendo  $\mathcal{P}_3 = \varepsilon \mathcal{P}_2$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar positivo. Para que  $\mathcal{P}_2$  tenha inversa defina no problema que  $\mathcal{P}_2 > \mathbf{0}$ . Onde,  $\mathbf{A} = \check{\mathbf{A}}_0 - \check{\mathbf{L}}\check{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{A}_1 = \check{\mathbf{A}}_1$ ,  $\mathbf{B}_1 = \check{\mathbf{B}}_1$ ,  $\mathbf{C}_0 = \check{\mathbf{C}}_0$  e  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ . Logo, só restará as matrizes com variáveis de decisão  $\mathcal{P}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}_{12}, \check{\mathbf{L}}$  multiplicadas a direita por  $\mathcal{W}^\top$  e seu termo transposto, para fins visualização considerou-se a mesma notação para essas matrizes resultantes. Então, faça  $\mathcal{Y} = \mathcal{W}^\top \check{\mathbf{L}}$  e, então, o

problema torna-se novamente descrito por LMIs, como

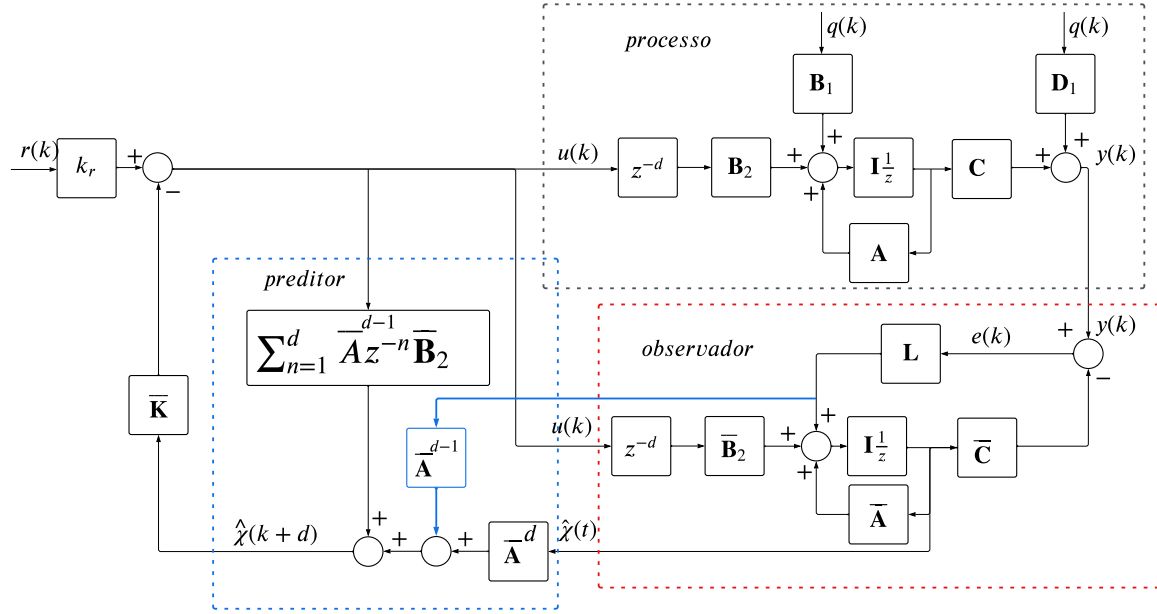
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} > 0, \mathcal{W} > 0, \mathcal{R} > 0, \mathcal{S} > 0, \mathcal{S}_{12}, \mathcal{Y} \\ \min\{\mu\}, \\ \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \star & \mathcal{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} & \mathcal{M}_{15} & \mathcal{M}_{16} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} & \mathcal{M}_{25} & \mathcal{M}_{26} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} & \mathcal{M}_{35} & \mathcal{M}_{36} \\ \star & \star & \star & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{55} & \mathcal{M}_{56} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \mathcal{M}_{66} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathcal{N}_{11} = \mathcal{R}, \mathcal{N}_{12} = \mathcal{S}_{12}, \mathcal{N}_{22} = \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{11} = (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I})\mathcal{W} - \bar{\mathbf{C}}^\top \mathbf{Y}^\top + \mathcal{W}^\top (\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{Y}\bar{\mathbf{C}} + \mathcal{S} - \mathcal{R}, \\ \mathcal{M}_{12} = \mathcal{P} - \mathcal{W}^\top + \varepsilon (\mathbf{A}^\top - \mathbf{I})\mathcal{W} - \varepsilon \bar{\mathbf{C}}^\top \mathbf{Y}^\top, \mathcal{M}_{13} = \mathcal{S}_{12}, \\ \mathcal{M}_{14} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}) + \mathcal{W}^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{15} = \mathcal{W}^\top \mathbf{B}_1, \\ \mathcal{M}_{16} = \mathbf{C}_0^\top, \mathcal{M}_{22} = -\varepsilon \mathcal{W}^\top - \varepsilon \mathcal{W} + \mathbf{P} + h^2 \mathcal{R}, \mathcal{M}_{23} = \mathbf{0}_{n_p \times n_p}, \\ \mathcal{M}_{24} = \varepsilon \mathcal{W}^\top \mathbf{A}_1, \mathcal{M}_{25} = \varepsilon \mathcal{W}^\top \mathbf{B}_1, \mathcal{M}_{26} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \\ \mathcal{M}_{33} = -(\mathcal{S} + \mathcal{R}), \mathcal{M}_{34} = (\mathcal{R} - \mathcal{S}_{12}^\top), \\ \mathcal{M}_{35} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \mathcal{M}_{36} = \mathbf{0}_{n_p \times n_y}, \mathcal{M}_{45} = \mathbf{0}_{n_p \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{44} = -2\mathcal{R} + \mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{12}^\top, \\ \mathcal{M}_{46} = \mathbf{C}_1^\top, \mathcal{M}_{55} = -\mu \mathbf{I}_{n_q \times n_q}, \\ \mathcal{M}_{56} = \mathbf{0}_{n_q \times n_y}, \mathcal{M}_{66} = -\mathbf{I}_{n_y \times n_y}. \\ \mathbf{H} \otimes \mathcal{W} + \mathbf{M} \otimes (\check{\mathbf{A}}^\top \mathcal{W} - \check{\mathbf{C}}^\top \mathcal{Y}^\top) + \mathbf{M}^\top \otimes (\check{\mathbf{A}}^\top \mathcal{W} - \check{\mathbf{C}}^\top \mathcal{Y}^\top)^\top < \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5.66)$$

onde,  $\mu = \gamma^2$ ,  $\check{\mathbf{L}} = [\mathcal{W}^\top]^{-1} \mathcal{Y}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  definem a região de D-estabilidade e, por fim,  $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ .

As equações do esquema de controle podem ser representadas de maneira concisa na forma de diagrama de blocos, como na Fig. 28. A topologia dos controladores apresentados diferem apenas na ordem do estado realimentado e no ramo destacado em azul que só é considerado para o controlador proposto.

A estrutura em diagrama de blocos na Fig. 28 permite inferir que esse esquema não é apenas uma discretização direta no caso contínuo na Fig. 24 e, assim, as funções de transferência dos sinais apresentados em Eq. 5.50 são diferentes das obtidas para o domínio discreto em Eq. 5.67. Para o caso do esquema de controle de (Alves Lima *et al.*, 2022), as funções de transferência são discretizações diretas de Eq. 5.50, fazendo  $e^{\bar{\mathbf{A}}} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}^d$ ,  $e^{-sh} \rightarrow z^{-d}$  e os modelos discretizados. As funções de transferência da

Figura 28 – Diagrama de blocos para controlador-preditor baseado em observador aumentado.



Fonte: O autor.

relação perturbação para o estado, perturbação para o estado estimado, perturbação para o erro, perturbação para o erro predito e referência para o estado estão dispostas na Eq. 5.67.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{H}_0(z) = (\mathbf{I} - z^{-d}\tilde{\mathbf{A}}^d)(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_2, \\
 \mathbf{H}(z) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{H}_0(z))^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^{d-1} \\
 \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z) = (z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - z^{-d}\tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{H}(z))(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C}))^{-1}[(\mathbf{I} - z^{-d}\tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{H}(z))\mathbf{L}\mathbf{C}] \\
 \mathbf{H}_{ux}(z) = \mathbf{H}(z)((\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z) + \mathbf{L}\mathbf{C}) \\
 \mathbf{H}_{xq}(z) = (z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} + z^{-d}\tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{H}_{ux}(z))^{-1}[\tilde{\mathbf{B}}_1\Delta(z)]Q(z) \\
 \chi(z) = \mathbf{H}_{xq}(z)Q(z) \\
 \hat{\chi}(z) = \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z)\mathbf{H}_{xq}(z)Q(z), \\
 \chi_{p3}(z) = (\tilde{\mathbf{A}}^{d-1} - \mathbf{H}_0(z)\mathbf{H}(z))[(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z) + \mathbf{L}\mathbf{C}]\mathbf{H}_{xq}(z)Q(z), \\
 E(z) = \chi(z) - \hat{\chi}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z))\mathbf{H}_{xq}(z)Q(z), \\
 E_{p3}(z) = (\mathbf{I} - z^{-d}(\tilde{\mathbf{A}}^{d-1} - \mathbf{H}_0(z)\mathbf{H}(z))[(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{H}_{\hat{x}\hat{x}}(z) + \mathbf{L}\mathbf{C}])\mathbf{H}_{xq}(z)Q(z), \\
 x(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_2k_rR(z)
 \end{array} \right. \quad (5.67)$$

A dimensão de todos os estados e do erro é  $\mathbb{R}^{(n_x+n_\Delta)}$ . As matrizes representadas como  $\tilde{\mathbf{A}}$  indicam a matriz do processo real.

### 5.5.1.1 Exemplo

Para demonstrar o uso da metodologia, será simulado o exemplo feito em (WANG; WU, 2022; Alves Lima *et al.*, 2022) para perturbação  $q(k) = 1,6$  com o atraso na entrada de  $d = 5$ . Será avaliada uma simulação com sintonia estabilizante para as mesmas condições avaliadas na literatura. Diferente desses trabalhos, aqui também será avaliado no domínio da frequência a rejeição de perturbação com relação à saída. O processo avaliado

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3,2 & -1,4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k-d) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q(k) \quad (5.68)$$

com condição inicial  $x(0) = [1, 5 \ 1]^\top$ . O ganho de realimentação de estados é  $\mathbf{K} = [3, 14 \ 1, 5]$  que será usada para todos os preditores.

Seguindo os passos apresentados, será usado o filtro  $\Delta_1(s) = (1 - z^{-1})$  para perturbação constante  $q(k)$  obtendo o modelo do sistema aumentado exposto na Eq. 5.69. O modelo para o sistema proposto em (Alves Lima *et al.*, 2022) apresenta matrizes diferente por utilizar um filtro sem zeros.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_\Delta(k+1) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3,2 & 1,4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} v(k), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x(k_0) & x_\Delta(k_0) \end{bmatrix}^\top}_{\chi(k_0)^\top} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k_0) & 0 \end{bmatrix}^\top}_{x_{k_0}^\top}, \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\Delta(k) \end{bmatrix}}_{\chi(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_1} v(k), \end{array} \right. \quad (5.69)$$

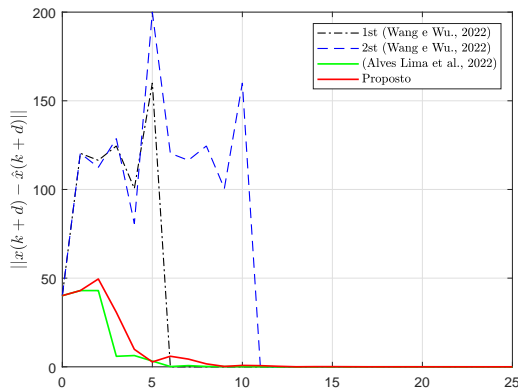
Para solução via LMI, a proposta foi definida com  $\mathbf{K}_\Delta = [\mathbf{0}]$ , para realizar uma realimentação de estados simples. O ganho do observador aumentado obtido por (Alves Lima *et al.*, 2022) teve restrição com relação a uma região de D-estabilidade retangular em que a parte real dos autovalores satisfaz  $0 < \sigma < 1$ . Dessa forma, o método proposto inclui a mesma região e mesmas condições das simulações da literatura. Os ganhos do observador obtidos usando o método proposto  $L_p$  e o método da literatura  $L_{CG}$  foram

$$\left\{ \begin{array}{l} L_p = \begin{bmatrix} -0,5013 & 3,3854 & -0,0338 \\ 1,1688 & -1,1875 & 0,5777 \end{bmatrix}^\top \\ L_{CG} = \begin{bmatrix} -0,3899 & 3,2 & -0,0000 \\ 1,000 & -0,7314 & 0,8621 \end{bmatrix}^\top. \end{array} \right. \quad (5.70)$$

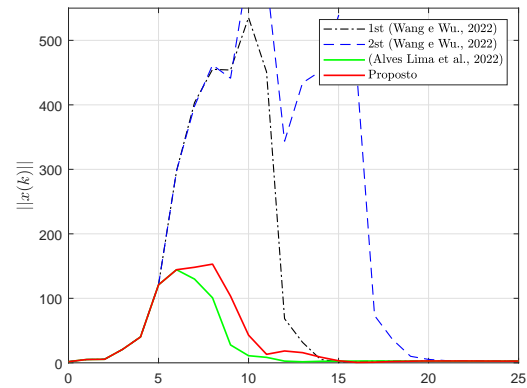
As matrizes que solucionam as LMIs 5.49 estão dispostas no Apêndice A e as matrizes solução que obtém o ganho  $L_p$  estão em Eq. A.17.

Figura 29 – Respostas da simulação no tempo.

(a) Norma dos estados.



(b) Norma do erro de predição.



Fonte: Autoria própria.

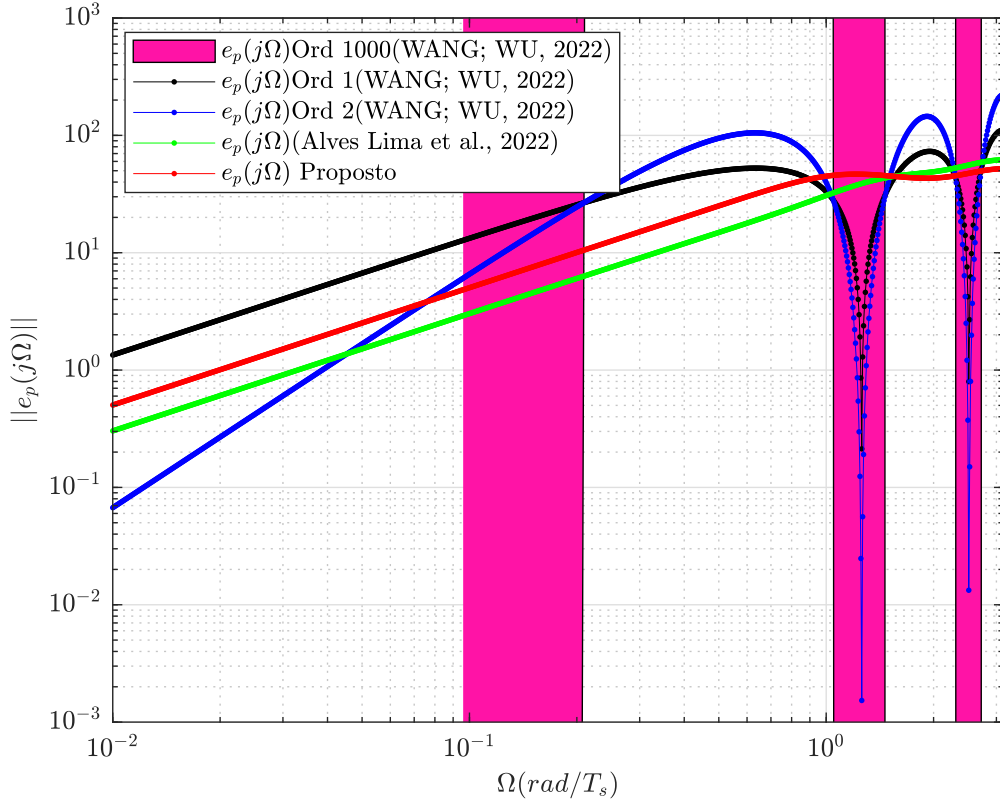
A simulação tem duração de 30 segundos e a perturbação  $q(t)$  foi aplicada no instante inicial. A Fig 29a expõe a norma dos estados para um dos controladores e foi plotada a partir do tempo do atraso. A avaliação da resposta em frequência do erro de predição com relação a perturbação pode ser feita usando a Fig. 30 e o módulo do erro de predição no tempo para a perturbação  $q(t)$  está representado na Fig. 29b.

As avaliações no domínio da frequência serão feitas a partir das funções de transferência apresentadas na Eq. 5.32 para o esquema de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) e a Eq. 5.50 para o esquema de Castillo e Garcia (2021) e o proposto com as devidas alterações. Na literatura, a análise é focada no erro de predição e aqui ele também será analisado assim como o estado real do processo, os gráficos de norma na Fig. 25 foram multiplicados pela amplitude da perturbação.

Tem-se que a sintonia dos controladores baseados em observador foi aplicada usando a dinâmica da perturbação e, assim, tem-se rejeição completa em regime estacionário para o erro de predição. Os controladores de Wang e Wu (2022) também rejeitam como demonstrado no capítulo 4, pois perturbações constantes satisfazem  $q(t) = q(t + T)$ . Na simulação, o esquema de (Alves Lima *et al.*, 2022) aproveita do fato dos estados estarem disponíveis para realizar a predição deles diretamente e, então, utiliza o observador apenas para obter os estados mensurados da perturbação.

Novamente, o esquema de (WANG; WU, 2022) baseado em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) tem desempenho dependente apenas da dinâmica da perturbação e só pode ser usado quando os estados do processo estão disponíveis para medição. O esquema de introduzir em cascata a realimentação do erro de predição pode ser avaliada através da resposta em frequência, como destacado em Wang e Wu (2022) existem zonas de frequência ao qual realizar a realimentação melhora o desempenho e outras zonas ele é deteriorado, o valor específico dos pontos de inflexão foram também definidos. Ao extrapolar o número de realimentações para 1000 vezes, obtém-se rejeição bastante relevante nas zonas de atenuação, porém apresenta no desempenho uma deterioração importante em outras zonas e, dessa forma, não é

Figura 30 – Resposta em frequência para o erro de predição com relação a perturbação.



Fonte: O autor.

aconselhável para perturbações desconhecidas.

Para a simulação com a perturbação constante, avaliando o erro de predição, pode-se comparar apenas o regime transitório, pois todos as técnicas convergem para erro nulo. Nesse critério a proposta de Alves Lima *et al.* (2022) obteve o melhor resultado, pois tem a menor variação na norma dos estados e do erro de predição.

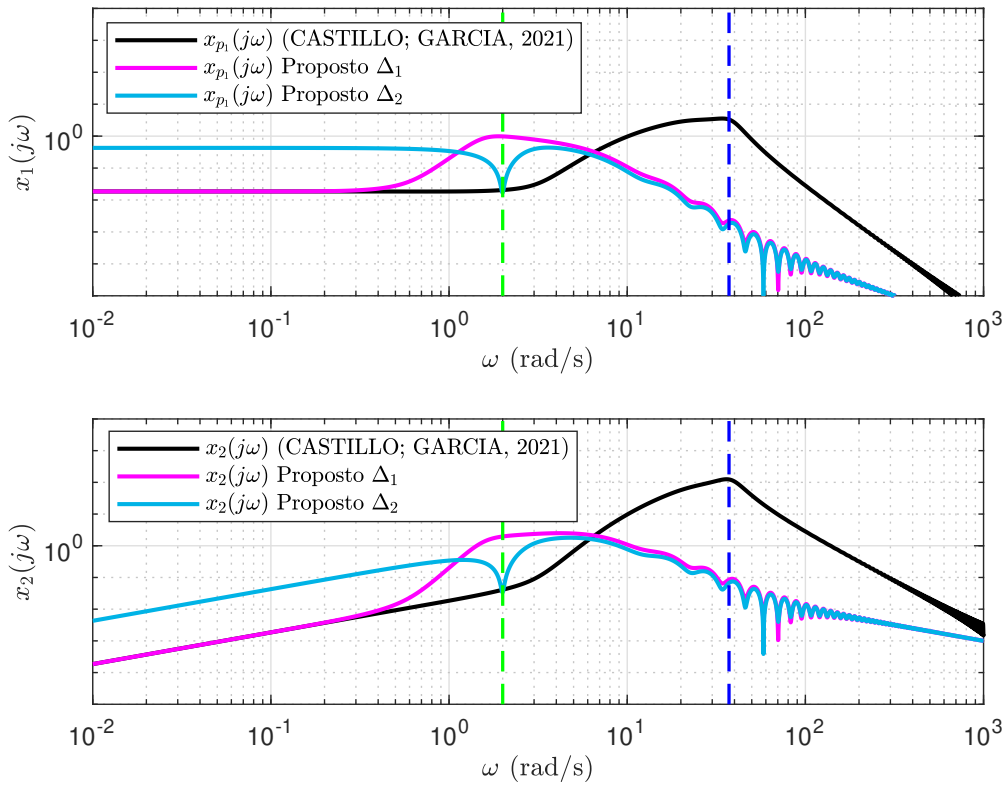
Para a avaliação em todo o espectro de frequência, pode-se verificar que na Fig. 30 não há uma técnica superior para todo o domínio. Caso a perturbação seja limitada em uma faixa, pode-se definir qual o esquema é superior para cada caso, no entanto, essa metodologia não é possível para perturbações desconhecidas. Uma forma objetiva de definir o melhor esquema para perturbações desconhecidas é o uso da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para realizar a avaliação e, nesse caso, o método proposto obteve o melhor resultado com  $\mathcal{H}_\infty = 54,3131$ .



## 6 NOVA PROPOSTA DE CONTROLADOR PREDITOR BASEADO EM OBSERVADOR AUMENTADO

Os preditores apresentados no Capítulo 5 foram capazes de obter erro de predição relativamente baixos e, em casos particulares, erro nulo. Porém, mesmo diante desses casos, a lei de controle que utiliza realimentação de estados simples, com  $\mathbf{K}_\Delta = 0$ , não é capaz de rejeitar perturbações ou zerar o erro de regime permanente para saída. Esse fato pode ser verificado no domínio da frequência com as funções de transferência da perturbação para o estado apresentadas para os esquemas anteriores, por exemplo, a Fig. 31 a exhibe as respostas para o Exemplo 5.4.1.1.

Figura 31 – Resposta em frequência  $\frac{x(j\omega)}{q(j\omega)}$



Fonte: O autor.

Como esperado, os esquemas apresentados na Fig. 31 não são capazes de rejeitar a perturbação para o estado  $x_1(t)$ , para o segundo estado é possível rejeitar perturbações tipo degrau devido a uma característica particular do processo  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ .

Na maior parte dos casos, o projeto do observador é apenas uma das etapas para obtenção de um esquema de controle eficaz (WILLIAMS; LAWRENCE, 2007). Em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) foi proposto um controlador PID aplicado ao estado predito (equivalente ao considerar referência zero) para obter o sinal de controle e, dessa forma, foi sintonizado de maneira clássica como um sistema sem

atraso. Com o acréscimo dessa lei de controle, o esquema tem os objetivos de: fazer novamente com que as previsões do estado observado tendam a zero e fazer com que a saída sofra influencia mínima da perturbação.

Uma solução de controlador ainda mais simples é a proposta de utilizar  $\mathbf{K}_\Delta$  para realimentar a perturbação predita, como foi feito no controlador-observador dos esquemas da Fig. 18. Essa proposta de controlador consiste apenas em uma realimentação aumentada com ganho calculado por  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$ . Para que esse controlador rejeite perturbação é necessário apenas que o erro de predição também rejeite, ou seja, nesse esquema, ao projetar um observador eficaz, tem-se também um controlador eficaz.

Esse capítulo tem o objetivo de demonstrar que o esquema proposto de controlador-preditor baseado em observador aumentado usando realimentação completa é eficaz para predizer o estado e também para controlar. Ele apresenta estrutura mais simples e com desempenho superior às estruturas comparadas.

Novamente, o sistema apresentado em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; CASTILLO; GARCIA, 2021) será usado para comparação dos esquemas de controle. Com os preditores de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) e (CASTILLO; GARCIA, 2021) usando a lei de controle

$$u(t) = -45x_{p1}(t) - 18x_{p2}(t) - 60 \int_0^t x_{p1}(\tau) d\tau. \quad (6.1)$$

Os controladores baseados no esquema proposto usam os filtros  $\Delta_1 = s^4$ ,  $\Delta_2 = s^2 + 2^2$  obtendo as mesmas matrizes que no Exemplo 5.4.1.1, enquanto que o com sinal de controle é composto apenas por um ganho de realimentação  $\bar{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \ \mathbf{K}_\Delta]$ . Como  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$  tem-se  $\mathbf{K}_\Delta = \mathbf{c}$  e, então, a lei de controle é escrita como

$$u(t) = -[45, 18, \mathbf{c}] \hat{\chi}(t+h). \quad (6.2)$$

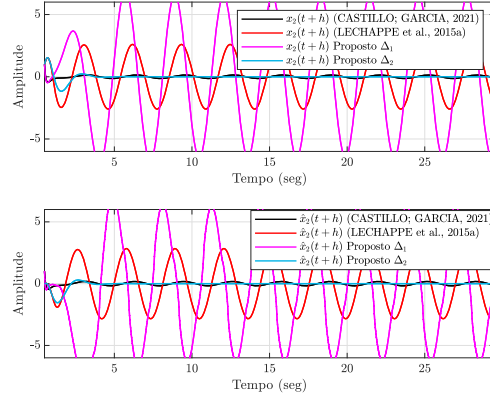
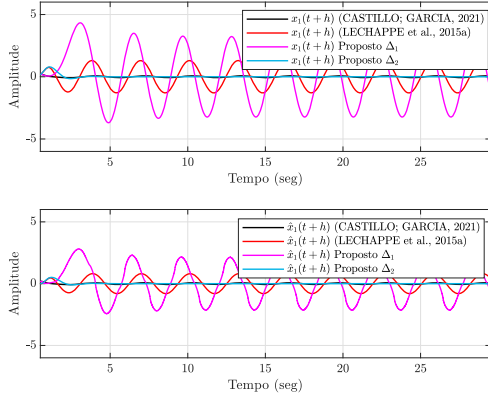
Para os controladores propostos, o ganho do observador será obtido usando a solução via a LMI 5.49 com  $\bar{\mathbf{K}}$  completo. Foi definido uma variação no atraso permitida de  $d = 0,1$  e  $\varepsilon = 0,05$ , mesma região de D-estabilidade de centro 0 e raio 40. Os ganhos do observador obtidos usando o método proposto são  $L_{p1}$  e  $L_{p2}$ , o método da literatura é  $L_{CG}$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{p1} = \begin{bmatrix} 20,3567 & -13,8943 & -21,1022 & -44,3355 & -57,2050 & -34,4569 \end{bmatrix}^\top \\ L_{p2} = \begin{bmatrix} 23,4252 & -15,4886 & -38,4729 & -28,4630 \end{bmatrix}^\top \\ L_{CG} = \begin{bmatrix} 10,28 & 4,32 & 512 & 9680 & 1,16e05 & 7,96e05 \\ 0,22 & 58,8 & 2960 & 83900 & 1,5e06 & 1,38e07 \end{bmatrix}^\top \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Figura 32 – Resposta no tempo dos estado para perturbação  $q_1(t+h)$

(a) Estado  $x_1(t)$  e estado observado  $\hat{x}_1(t+h)$

(b) Estado  $x_2(t+h)$  e estado observado  $\hat{x}_2(t+h)$

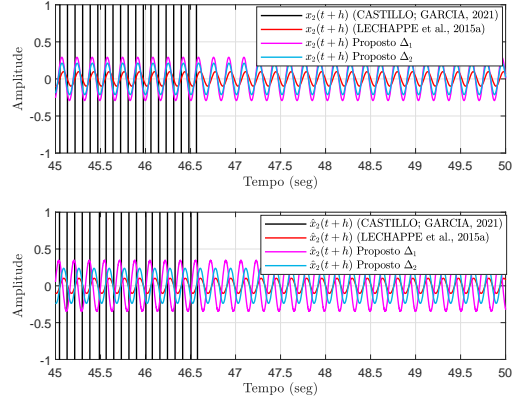
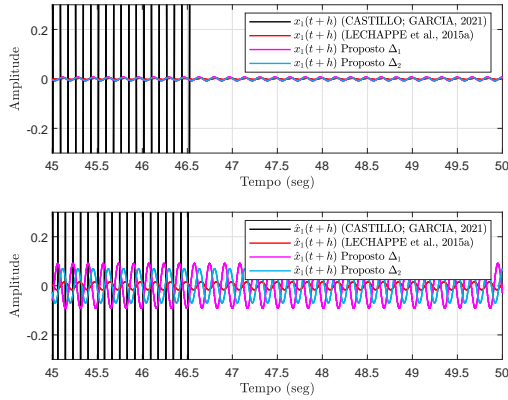


Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Resposta no tempo dos estado para perturbação  $q_2(t)$

(a) Estado  $x_1(t+h)$  e estado observado  $\hat{x}_1(t+h)$

(b) Estado  $x_2(t+h)$  e estado observado  $\hat{x}_2(t+h)$



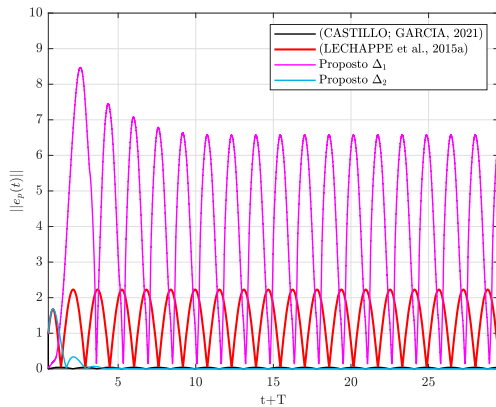
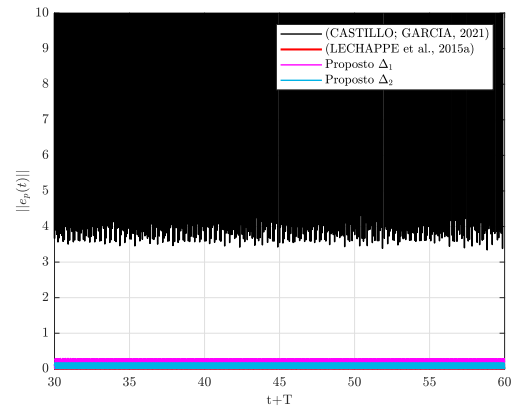
Fonte: Autoria própria.

Os sistemas aumentados para cada um dos filtros, assim como foi feito em Eq. 4.59, estão representados nas Eq. 5.53 e Eq. 5.54. As matrizes que solucionam as LMIs 5.49 para cada uma das sintonias estão disposta no Apêndice A.

A simulação para as perturbações  $q_1(t) = 3\sin(2t)$  e  $q_2(t) = 3\sin(37,2698t)$  foram feita com 60 segundos, mas algumas vezes as representam apenas uma faixa de tempo específica para destacar algum detalhe. Nas Fig. 32a e 32b o tempo de simulação exposto foi de 30 segundos e nas Fig. 33a e 33b os estados foram representados em uma faixa de tempo de 5 segundos a partir do tempo de simulação 45. Para as simulação no tempo da perturbação  $q_2(t)$  o esquema de (CASTILLO; GARCIA, 2021) apresenta amplitudes milhares de vezes maior que seus pares.

As funções de transferência apresentadas na Eq.5.50 são válidas para o controlador por realimentação simples e realimentação completa, basta utilizar o  $\bar{\mathbf{K}}$  adequado. Para utilizar o esquema de PID deve-se substituir  $\bar{\mathbf{K}}$  por  $[\mathbf{K} \ 0] + [K_i/s \ 0]$  e, então, as funções de transferência continuam válidas.

Figura 34 – Erro de predição no tempo

(a) Simulação para perturbação  $q_1(t)$ (b) Simulação para perturbação  $q_2(t)$ 

Fonte: Autoria própria.

As respostas dos estados no tempo das Fig 32a,32b,33a,33b para as perturbações senoidais seguiram o mesmo comportamento apresentado para o controlador simples representado na frequência em Fig. 31, porém com uma pequena melhora na redução do ganho das perturbações. A evolução é evidente quando se compara ambos os esquema na frequência para os gráficos de resposta de perturbação para os estados do controlador simples Fig. 31 e os baseado em PID e realimentação completa 35, pois há uma redução nos ganho das frequência das perturbações  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ . Com relação as frequências elevadas o desempenho de ambas as estratégias são essencialmente os mesmos. A principal diferença é a grande superioridade dos controladores baseados em PID ou realimentação completa contra os de realimentação simples em baixas frequência, pois eles são capaz de rejeitar perturbações constantes e atenuam de forma expressiva nessa faixa.

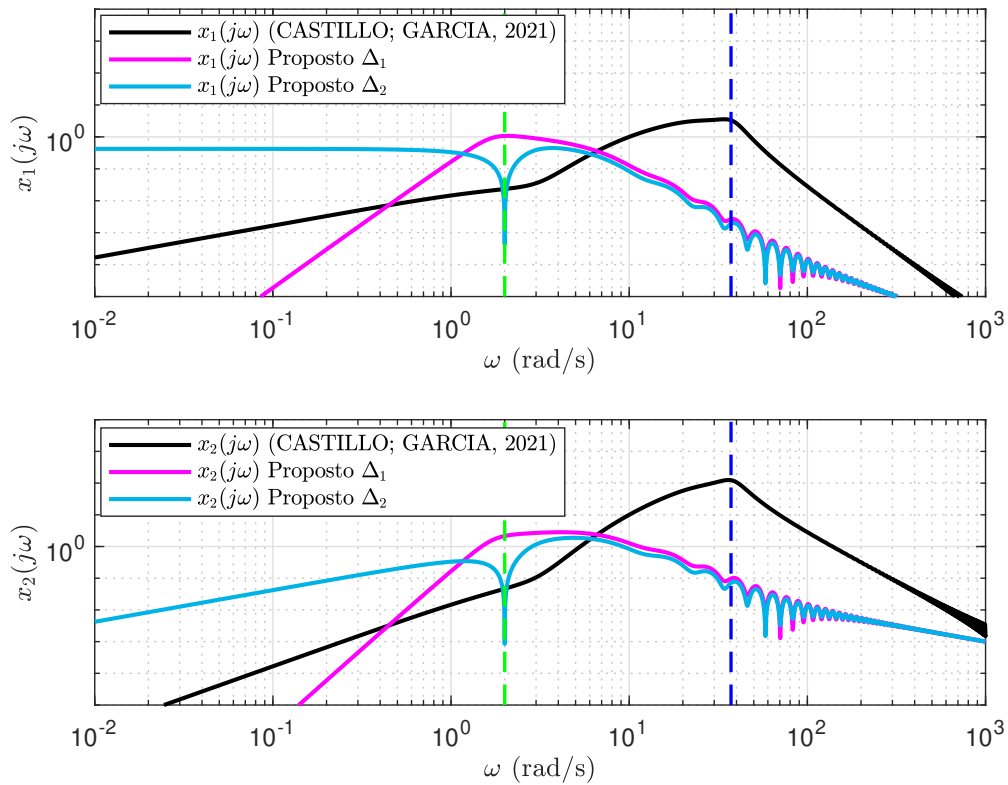
Na comparação entre o esquema de realimentação completa proposto e o esquema de PID de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) tem-se um comportamento semelhante para médias e altas frequências. Porém, o controlador por realimentação completa é inequivocamente superior nas baixas frequências quando utiliza filtros integradores, pois obtém a mesma ordem do filtro para ação integral que, no exemplo, apresenta 4º ordem de ação integral. Usando o filtro  $\Delta_2$  o controlador foi capaz de rejeitar completamente a perturbação  $q_1$ , o que não foi possível para a realimentação simples com relação aos estados.

Em resumo, as características apresentadas na resposta da perturbação para o erro de predição  $e_p(j\omega)/q(j\omega)$  no esquema preditor-observador são transportadas para a resposta perturbação estado  $x(j\omega)/q(j\omega)$  quando se utiliza realimentação completa de estados. Esse comportamento pode ser verificado ao comparar as Fig. 35 e Fig. 36. Assim, ao garantir um erro de predição pequeno ou nulo, tem-se também o mesmo efeito sobre a saída, então, um preditor-observador eficaz ao aplicar realimentação de estados completa também é um controlador eficaz.

Na literatura, a análise é focada no erro de predição, pois os esquemas de observador-preditor

foram desenvolvidos para serem usados por um controlador (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a) e, dessa forma, divide-se o problema em dois projetos: preditor-observador e controlador. No esquema proposto a complexidade é simplificada, pois, ao projetar o observador-preditor para minimizar o erro de predição, obtém-se também a minimização do erro na saída. O cerne desse efeito está na escolha de  $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_\Delta$  que zera a influência do estado filtrado  $x_\Delta(t)$  na saída  $\mathbf{C}x(t)$ .

Figura 35 – Resposta em frequência  $\frac{x(j\omega)}{q(j\omega)}$



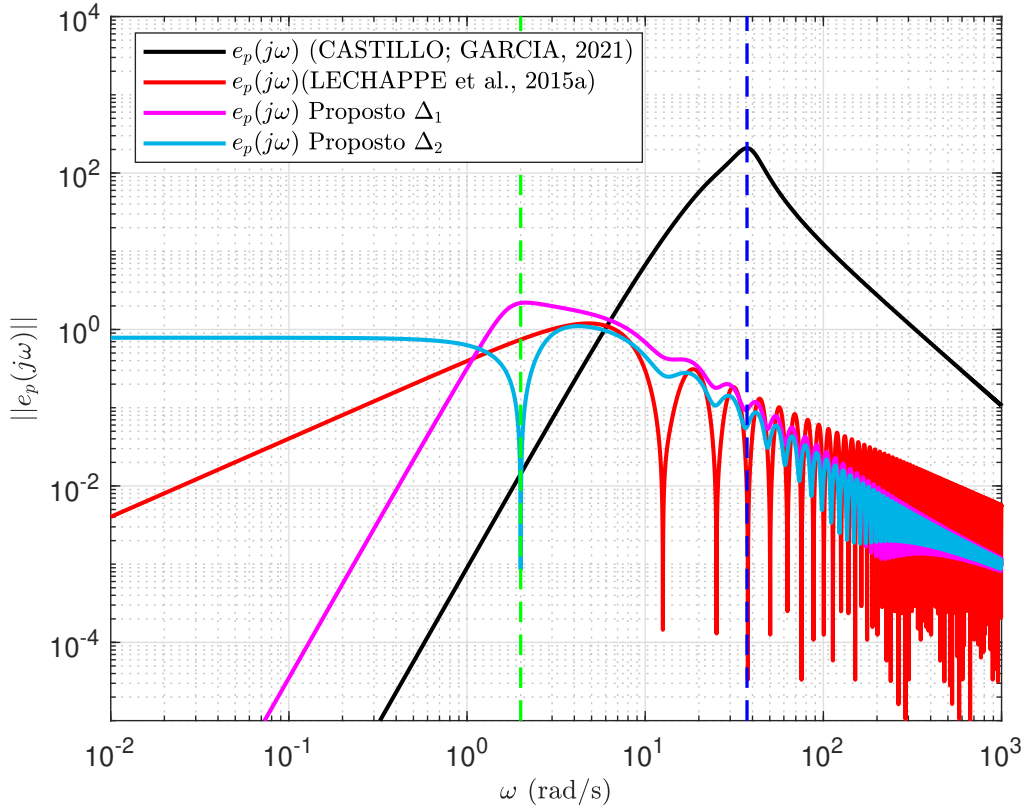
Fonte: O autor.

## 6.1 O preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP)

O esquema de controlador-preditor baseado em observadores aumentados descrito e avaliado no Capítulo 5 utiliza apenas um ganho de realimentação de estados para o sinal de controle e, também, apenas um ganho como filtro de referência. A sintonia de rejeição de perturbações e robustez é realizada através da escolha de um filtro e do ganho do observador  $\mathbf{L}$  que tem a dimensão do sistema aumentado, processo mais filtro. Essas características são as mesmas que o SFSP e, assim, ao escrever ambos os controladores na estrutura geral de DTCs na Fig. 8 apresentada em (SANZ *et al.*, 2018) obtém-se os mesmo blocos.

A ultima topologia apresentada para o SFSP em (TORRICO *et al.*, 2021) no esquema de

Figura 36 – Resposta em frequência  $\frac{e_p(j\omega)}{q(j\omega)}$



Fonte: O autor.

implementação estável apresenta a forma da Fig. 37, nesse estrutura tem-se a divisão dos blocos entre a contribuição do sinal de controle e da saída pelos blocos  $S$  e  $V$ , respectivamente. A estrutura do controlador proposto na Fig. 24 e Fig. 28 no formato de observador pode ser escrito nesse novo formato onde os blocos podem ser obtidos em tempo contínuo como

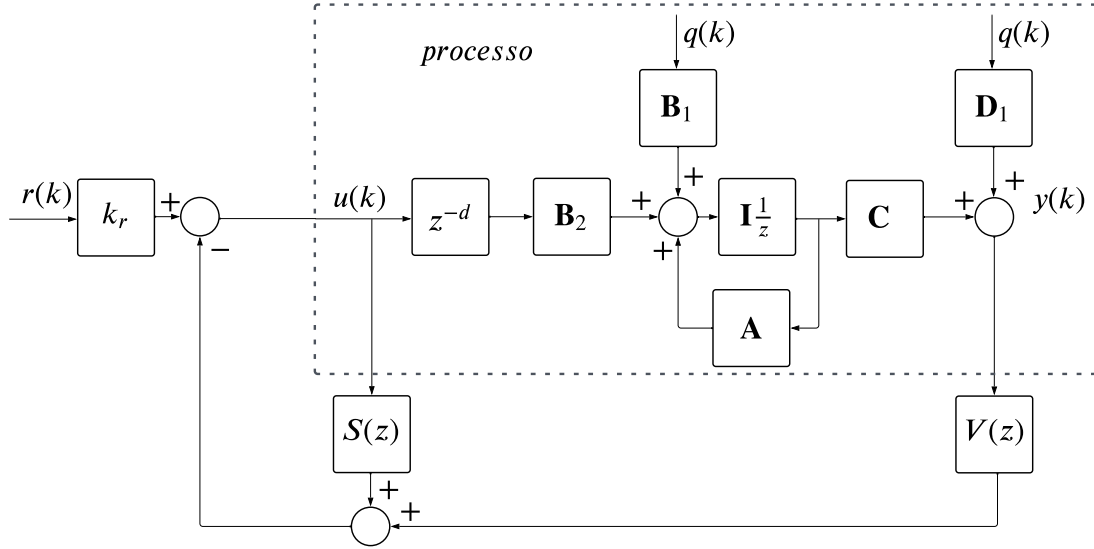
$$\begin{cases} S(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_{t-h}^t \bar{\mathbf{K}} \left[ e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_2 u(\tau) \right] d\tau \right\} + e^{-sh} \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2 \\ V(s) = \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \mathbf{L} \end{cases} \quad (6.4)$$

e para o tempo discreto

$$\begin{cases} S(z) = \sum_{n=1}^d \left[ \bar{\mathbf{A}}^d z^{-n} \bar{\mathbf{B}}_2 \right] + z^{-d} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^{d-1} (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}) (z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_2 \\ V(z) = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^{d-1} \mathbf{L} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^{d-1} (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}) (z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \mathbf{L} \end{cases} \quad (6.5)$$

Usando a metodologia do esquema proposto, pode-se obter uma sintonia baseada em um problema de otimização definido por LMIs. Nesse cenário é interessante garantir robustez com relação a incertezas no modelo e, assim, será incluído na formulação apresentada para as equações de síntese Eq. 5.48 e Eq. 5.65 para o domínio de tempo contínuo e discreto, respectivamente. Por simplicidade, será considerado que o processo é estritamente próprio  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ . Admite-se incertezas no processo e no

Figura 37 – Estrutura da implementação SFSP



Fonte: O autor.

filtro, ou seja, inclui os casos em que a dinâmica da perturbação não é inteiramente conhecida, a incerteza considerada será do tipo aditiva, no processo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{A}_\delta] x(t) + \mathbf{B}_2 u(t) + \mathbf{B}_1 q(t), \\ x(t_0) = x_{t_0}, \\ y(t) = [\mathbf{C} + \mathbf{C}_\delta] x(t), \end{cases} \quad (6.6)$$

e no filtro

$$\begin{cases} \dot{x}_\Delta(t) = [\mathbf{a} + \mathbf{a}_\delta] x_\Delta(t) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_{1\delta}] v(t), \\ q(t) = \mathbf{c} x_\Delta(t) + [\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_{1\delta}] v(t), \\ x_\Delta(t_0) = x_{\Delta t_0} \end{cases} \quad (6.7)$$

para obtenção das matrizes aumentadas, pode-se usar o mesmo procedimento apresentado no Capítulo 4.

Novamente, deve-se avaliar o erro de predição agora na presença de incertezas. O termo composto pela integral da perturbação filtrada também é ignorado pois depende de instantes futuros e é limitado, assim

$$\begin{cases} \chi(t+h) \cong e^{(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_\delta)h} \chi(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}h} \chi(t) + \Psi \chi(t), \\ \hat{\chi}(t+h) \cong e^{\bar{\mathbf{A}}h} \hat{\chi}(t), \\ \xi(t+h) \cong e^{\bar{\mathbf{A}}h} \xi(t) + \Psi \chi(t), \end{cases} \quad (6.8)$$

onde  $\Psi = e^{(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_\delta)h} - e^{\bar{\mathbf{A}}h}$  e, então, pode-se reescrever o sinal de controle considerando os termos da incerteza

$$u(t) = -\bar{\mathbf{K}}(\chi(t+h) - \xi(t+h)) \cong -\bar{\mathbf{K}}\chi(t+h) + \bar{\mathbf{K}}e^{\bar{\mathbf{A}}h}\xi(t) + \bar{\mathbf{K}}\Psi\chi(t) \quad (6.9)$$

como resultado, tem-se que o sinal de controle resultante também depende do estado atrasado, o que altera o sistema em malha fechada. Felizmente, o sistema permanece da estrutura da LMI 5.49 e, assim, pode ser adaptada diretamente. O sistema em malha fechada resultante torna-se

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = [\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_\delta] \chi(t) - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} \chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} \Psi \chi(t-h) + \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} \xi(t-h) + \bar{\mathbf{B}}_{1\delta} v(t), \\ \dot{\xi}(t) = [\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}] \xi(t) + [\bar{\mathbf{A}}_\delta - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}_\delta] \chi(t) + \bar{\mathbf{B}}_{1\delta} v(t), \\ y(t) = [\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}_\delta] \chi(t), \end{cases} \quad (6.10)$$

expandindo o sistema para um formato conveniente pode-se obter

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{Y}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_\delta] - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_\delta & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_\delta & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} \Psi & \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{A}}h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t-h) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t-h)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{1\delta} \\ \bar{\mathbf{B}}_{1\delta} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{B}}_1} v(t), \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t_0) \\ \xi(t_0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{t_0} \\ \xi_{t_0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{t_0}}, \\ y(t) = \underbrace{[\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}_\delta]}_{\check{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)} \end{cases} \quad (6.11)$$

em que,  $\Psi = e^{(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_\delta)h} - e^{\bar{\mathbf{A}}h}$ . As matrizes  $\bar{\mathbf{A}}_\delta$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_\delta$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_\delta$  unificam as incertezas do processo e do filtro em um sistema aumentado.

E assim, pode-se aplicar o sistema da Eq. 6.11 na LMI 5.49 substituindo  $\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \check{\mathbf{A}}_0$ ,  $\mathbf{A}_1 \rightarrow \check{\mathbf{A}}_1$ ,  $\mathbf{C}_0 \rightarrow \check{\mathbf{C}}_0$  e  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ . O procedimento para os sistemas discretos é equivalente ao realizado para o caso contínuo, pois o ramo em azul no diagrama de blocos Fig. 28 é ignorado para construção das LMIs.

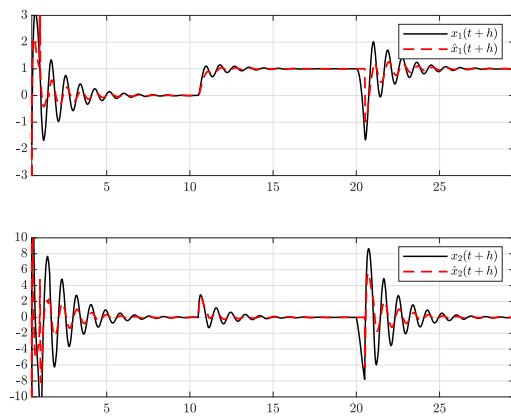
Então, com a metodologia apresentada é possível sintonizar o SFSP levando em conta incertezas aditivas no processo e na dinâmica da perturbação para todo sistema SISO estritamente próprio ou MIMO caso o atraso em todos os canais entrada saída seja igual.

Para demonstrar uma aplicação deste controlador, ele será aplicado ao exemplo da literatura que foi usado para os preditores e foram aplicados no domínio contínuo em (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; SANZ *et al.*, 2018; CASTILLO; GARCIA, 2021) agora incluindo uma incerteza  $\mathbf{A}_\delta = 0,3\mathbf{A}$ . Para essa incerteza todos os controladores com realimentação de estados simples não são capazes de estabilizar o sistema. O filtro utilizado é um integrador apresentado na Seção 4.2.3.5.1 com o mesmo ganho de realimentação de estados  $\mathbf{K} = [48 \ 18]$  e  $\mathbf{K}_\Delta = [1]$ . O ganho do observador obtido foi  $\mathbf{L}^\top = [\mathbf{L}_1 \ \mathbf{L}_2]^\top$ , onde  $\mathbf{L}_1^\top = [2,0133 \ 1e3 \ -1,0342 \ 1e3 \ -2,1494 \ 1e6]^\top$  e  $\mathbf{L}_2^\top = [0,6024 \ 2,3588 \ 1e3 \ 0,7280 \ 1e6]^\top$ . A condição inicial do processo é  $x(0)^\top = [1 \ 0]^\top$  e do observador é nula, a referência é aplicada com 10 segundos de simulação com amplitude unitária para o primeiro estado e zero para o segundo e, por fim, uma perturbação constante  $q(t) = -10$  é aplicado com 20 segundos de simulação.

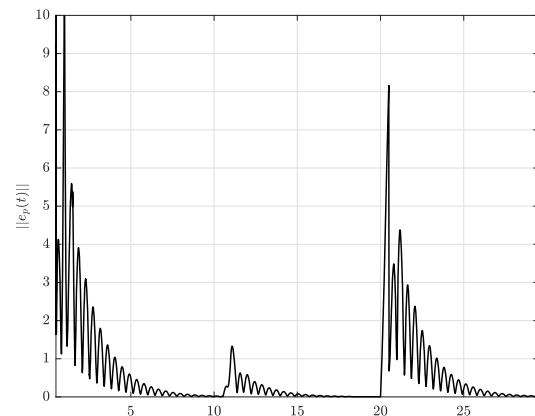


Figura 38 – Respostas da simulação no tempo

(a) Estado e estado estimado



(b) Norma do erro de predição.



Fonte: Autoria própria.

A partir da Fig. 38a é possível inferir que a técnica de controle é capaz de lidar com condições iniciais, seguir referência e rejeitar a perturbação aplicada. O processo é instável em malha aberta e a sintonia do ganho da realimentação de estados usada é consideravelmente agressiva, dessa forma, a solução possível para uma incerteza de 30% obtida a partir da sintonia do ganho do observador  $\mathbf{L}$  utilizou de autovalores com grandes magnitudes. O desempenho da técnica também pode ser confirmada através da convergência do preditor e do observador, pois o erro de predição representado na Fig. 38b tende a zero e se torna nulo ao atingir o estado estacionário.

## 7 CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou uma breve revisão sobre técnicas de controle para sistemas com atraso de transporte, soluções para equações diferenciais atrasadas e um resumo sobre observadores e controladores de realimentação de estados. Através de exemplos, o texto teve o objetivo de apresentar a estrutura do controlador proposto e seu desempenho de maneira didática em um avanço progressivo na complexidade dos problemas enfrentados.

A partir da base inicial do texto, foi proposta uma metodologia própria de análise que foi usada para avaliar os resultados recentes na literatura para controladores baseados em preditor. Alguns dos resultados foram estendidos para o caso em que não há acesso ao estado do sistema ou quando há erro de modelagem, isto é, utilizando observadores de estado.

Os esquemas preditivos de trabalhos recentes em tempo contínuo (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; CASTILLO; GARCIA, 2021) e em tempo discreto (WANG; WU, 2022; Alves Lima *et al.*, 2022) foram analisados em conjunto do procedimento de síntese de controladores, assim como foi demonstrado que esses esquemas podem ser obtidos em um caso particular da estrutura proposta. A estrutura de síntese com objetivo de minimizar o efeito da perturbação no desempenho dos controladores foi avaliada comparando-a com um método proposto e, nos casos avaliados, apresentou um desempenho superior.

Para os casos onde o estado pode ser medido, a estrutura de controle proposta na predição dos estados e na atenuação das perturbações proposta nos trabalhos de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; WANG; WU, 2022) apresentam desempenho superior, mesmo que seu desempenho dependa apenas da dinâmica da perturbação. Essa estrutura apresentou a menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  para os exemplos avaliados.

De maneira geral, o erro nulo na predição do estado do processo em regime permanente necessita de duas condições: Aplicação da dinâmica exata da perturbação no filtro de perturbação e  $\mathbf{B}_1\mathbf{c} = \mathbf{B}_2\mathbf{K}_\Delta$ . Porém, quando não há informações quanto a dinâmica da perturbação, a estrutura de controle proposta obteve melhores resultados nas comparações realizadas com exemplos numéricos de simulação com sintonia realizada através de uma aproximação do sistema em malha fechada, diferindo dos métodos da literatura que usam o ajuste baseado no sistema do erro de predição. A análise dos esquemas de controle no domínio da frequência permite inferir as vantagens do método proposto para a atenuação de perturbações e sua eficácia.

O resultado principal desta dissertação é o procedimento de síntese do controlador-preditor baseado em observador de estado aumentado, que utiliza técnicas modernas de síntese para sintonia do consagrado já consagrado SFSP. A técnica é capaz de lidar com incertezas aditivas no modelo do processo e na dinâmica da perturbação e, assim, caso as LMIs sejam factíveis obtém-se a sintonia e a prova de estabilidade mutuamente. O método alcançou melhor o desempenho para perturbações desconhecidas por apresentar menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  quando comparado com esquemas que também utilizam observador.

Na literatura de controle, a área de controle baseado em preditor vem apresentando um proeminente crescimento, com diversos trabalhos relevantes publicados recentemente que têm mostrado evolução das diferentes soluções nos problemas de sistemas com atraso de transporte. Então, pode-se inferir que a tendência deve continuar obtendo avanços importantes para sistemas com atraso. Em trabalhos futuros pretende-se obter uma análise sistemática para caracterizar o erro de predição do sistema. Aplicar o método a sistemas MIMO com atrasos distintos nos diferentes canais entrada-saída, assim como para sistemas variantes no tempo. Uma outra prioridade é obter um procedimento de síntese que permita levar em considerações incertezas no atraso.

## REFERÊNCIAS

- ACKERMANN, J. E. On the synthesis of linear control systems with specified characteristics. **Automatica**, v. 13, n. 1, p. 89 – 94, 1977. ISSN 0005-1098.
- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. [S.l.]: Editora UFMG, 2004.
- Alves Lima, T.; VIANA, V. V.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G.; MADEIRA, D. de S. Newton-series-based observer–predictor control for disturbed input-delayed discrete-time systems. **Automatica**, v. 146, p. 110624, 2022.
- ARTSTEIN, Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 27, p. 869–879, 1982.
- BEGUM, K. G.; RAO, A. S.; RADHAKRISHNAN, T. Optimal controller synthesis for second order time delay systems with at least one rhp pole. **ISA Transactions**, v. 73, p. 181 – 188, 2018.
- BELLMAN, R.; BELLMAN, R. E.; COOKE, K. **Differential-difference Equations**. [S.l.]: Academic Press, 1963. (Mathematics in Science and Engineering. A Series of Monographs and Textbooks).
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- CAMACHO, E.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2007. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).
- CASTILLO, A.; GARCIA, P. Predicting the future state of disturbed lti systems: A solution based on high-order observers. 2021.
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1998.
- CHEN, W.-H.; YANG, J.; GUO, L.; LI, S. Disturbance-observer-based control and related methods—an overview. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 2016.
- DENG, Y.; LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; CHEN, Z.; LIANG, B.; PLESTAN, F.; HAN, Q.-L. Predictor-based control of time-delay systems: a survey. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, v. 53, n. 12, p. 2496–2534, 2022.
- DUAN, G.; YU, H. **LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications**. [S.l.]: CRC Press, 2013. ISBN 9781466583009.
- FRANK, P.; DING, X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. **Journal of Process Control**, v. 7, n. 6, p. 403–424, 1997.
- FRIDMAN, E. **Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control**. [S.l.]: Birkhäuser, 2014.
- GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time. **Automatica**, v. 44, n. 4, p. 1062–1071, 2008.
- GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. Robust tuning of a generalized predictor-based controller for integrating and unstable systems with long time-delay. **Journal of Process Control**, v. 23, n. 8, p. 1205–1216, 2013.
- GU, K.; NICULESCU, S.-I. Survey on Recent Results in the Stability and Control of Time-Delay Systems\*. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 125, n. 2, 2003.

HAO, S.; LIU, T.; ZHOU, B. Predictor-based output feedback control design for sampled systems with input delay subject to disturbance. **IET Control Theory & Applications**, v. 11, n. 18, p. 3329–3340, 2017.

JR, J. R. de O.; MACHADO, G. F.; JR, J. N. do N.; PEREIRA, R. D.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Novo método de sintonia do preditor de smith filtrado simplificado para processos de primeira ordem com atraso de transporte. In: **Congresso brasileiro de Automática**. [S.l.: s.n.], 2022.

KALMAN, R. On the general theory of control systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 4, n. 3, p. 110–110, 1959.

KRASOVSKII, N. On the applications of the second lyapunov method for equations with delay. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 20, p. 315–327, 1956.

KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. Backstepping boundary control for first order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays. In: **2007 46th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 2008.

LATHI, B. P. **Linear Systems and Signals**. 2nd. ed. USA: Oxford University Press, Inc., 2009. ISBN 0195392566.

LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; PLESTAN, F.; GLUMINEAU, A.; CHRIETTE, A. New predictive scheme for the control of lti systems with input delay and unknown disturbances. **Automatica**, v. 52, p. 179–184, 2015. ISSN 0005-1098.

LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; PLESTAN, F.; GLUMINEAU, A.; CHRIETTE, A. Predictive scheme for observer-based control of lti systems with unknown disturbances. In: **2015 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2015.

LIMA, T. A.; de Almeida Filho, M. P.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G.; CORREIA, W. B. A practical solution for the control of time-delayed and delay-free systems with saturating actuators. **European Journal of Control**, v. 51, p. 53 – 64, 2020. ISSN 0947-3580.

LIU, K.; SELIVANOV, A.; FRIDMAN, E. Survey on time-delay approach to networked control. **Annual Reviews in Control**, v. 48, p. 57–79, 2019.

LUENBERGER, D. An introduction to observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971.

MANITIUS, A.; OLBROT, A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 24, p. 541–552, 1979.

MATAUSEK, M.; MICIC, A. A modified smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1996.

MERCADER, P.; NOS, A. B. A pi tuning rule for integrating plus dead time processes with parametric uncertainty. **ISA Transactions**, v. 67, p. 246–255, 2017.

MIRKIN, L. On the approximation of distributed-delay control laws. **Systems & Control Letters**, v. 51, n. 5, p. 331–342, 2004.

MONDIE, S.; MICHIELS, W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 48, n. 12, p. 2207–2212, 2003.

MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **Robust process control**. 1. ed. [S.l.]: Prentice Hall., 1989.

NORMEY-RICO, J.; BORDONS, C.; CAMACHO, E. Improving the robustness of dead-time compensating pi controllers. **Control Engineering Practice**, v. 5, n. 6, p. 801–810, 1997.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Smith predictor and modifications: A comparative study. In: **1999 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 2257–2263.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. **Control of dead-time processes**. [S.l.]: Springer, 2007.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Dead-time compensators: A survey. **Control Engineering Practice**, v. 16, p. 407–428, 2008.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 1, p. 38–47, 2009.

OLIVEIRA, J. R. de; PEREIRA, R. D. O.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Novo método de implementação estável para o preditor de smith filtrado simplificado [not available in english]. In: **2021 14th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1329–1334.

PAGANO, D.; NORMEY-RICO, J.; FRANCO, A. Stability analysis of a modified smith predictor for integrative plants with dead-time uncertainties and saturations. In: **Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 2.

PATTON, R.; CHEN, J. Advances in fault diagnosis using analytical redundancy. In: **IEE Colloquium on Plant Optimisation for Profit (Integrated Operations Management and Control) (Digest No.1993/019)**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 6/1–612.

PYRKIN, A.; SMYSHLYAEV, A.; BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay. In: **Proceedings of the 2010 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2010.

RAZUMIKHIN, B. Stability of delay systems. **Prikl. Mat. Mekh**, v. 20, n. 4, p. 500–512, 1956.

RICHARD, J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, v. 39, n. 10, p. 1667–1694, 2003.

SANTOS, T. L.; FRANKLIN, T. S. Enhanced finite spectrum assignment with disturbance compensation for lti systems with input delay. **Journal of the Franklin Institute**, v. 355, n. 8, p. 3541–3566, 2018. ISSN 0016-0032.

SANTOS, T. L. M. Modified artstein predictor for lti systems with dead time and unknown disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 27, p. 263–273, 2016.

SANZ, R.; GARCIA, P.; ALBERTOS, P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of lti systems with input delay. **Automatica**, v. 72, p. 205–208, 2016. ISSN 0005-1098.

SANZ, R.; GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. A generalized smith predictor for unstable time-delay siso systems. **ISA Transactions**, v. 72, p. 197–204, 2018.

SEER, Q. H.; NANDONG, J. Stabilization and pid tuning algorithms for second-order unstable processes with time-delays. **ISA Transactions**, v. 67, p. 233–245, 2017.

SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 291–309, jun 2003. ISSN 09591524.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: Analysis and Design**. Hoboken, US-NJ: John Wiley, 2005.

SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.

Torricon, B. C.; Andrade, F. V.; Pereira, R. D. O.; Nogueira, F. G. Anti-windup dead-time compensation based on generalized predictive control. In: **2016 American Control Conference (ACC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 5449–5454.

TORRICO, B. C.; CAVALCANTE, M. U.; BRAGA, A. P. S.; NORMEY-RICO, J. E.; ALBUQUERQUE, A. A. M. Simple tuning rules for dead-time compensation of stable, integrative, and unstable first-order dead-time processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, ACS Publications, v. 52, n. 33, p. 11646–11654, 2013.

TORRICO, B. C.; CORREIA, W. B.; NOGUEIRA, F. G. Simplified dead-time compensator for multiple delay siso systems. **ISA Trans.**, v. 60, p. 254–261, 2016.

TORRICO, B. C.; de Almeida Filho, M. P.; LIMA, T. A.; SANTOS, T. L.; NOGUEIRA, F. G. New simple approach for enhanced rejection of unknown disturbances in lti systems with input delay. **ISA Transactions**, v. 94, p. 316 – 325, 2019. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001905781930179X>>.

TORRICO, B. C.; FILHO, M. P. de A.; LIMA, T. A.; FORTE, M. D. do N.; Sá, R. C.; NOGUEIRA, F. G. Tuning of a dead-time compensator focusing on industrial processes. **ISA Transactions**, v. 83, p. 189 – 198, 2018. ISSN 0019-0578.

TORRICO, B. C.; PEREIRA, R. D.; SOMBRA, A. K.; NOGUEIRA, F. G. Simplified filtered smith predictor for high-order dead-time processes. **ISA Transactions**, v. 109, p. 11–21, 2021. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001905782030402X>>.

WANG, Y.; WU, A.-G. Prediction schemes for disturbance attenuation of discrete-time linear systems with delayed input and delay-free input. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 32, n. 9, p. 5574–5599, 2022.

WATANABE, K.; ITO, M. A process-model control for linear systems with delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1981.

WILLIAMS, I. R. L.; LAWRENCE, D. A. **Linear State-Space Control Systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2007. 1-47 p.

YI PATRICK W. NELSON, A. G. U. S. **Time-delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function**. 1. ed. [S.l.]: WS, 2010.

ZHONG, Q. On distributed delay in linear control laws-part i: discrete-delay implementations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 11, p. 2074–2080, 2004.

ZHONG, Q. On distributed delay in linear control laws - part ii: rational implementations inspired from the  $\delta$ -operator. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 5, p. 729–734, 2005.

ZHONG, Q. **Robust Control of Time-delay Systems**. [S.l.]: Springer London, 2006. ISBN 9781846282652.

ZHONG, Q.-C.; REES, D. Control of uncertain lti systems based on an uncertainty and disturbance estimator. **Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme - J DYN SYST MEAS CONTR**, v. 126, 2004.

## APÊNDICE A – MATRIZES DE SOLUÇÃO DAS LMIS USADAS NOS EXEMPLOS

Nos problemas de otimização baseados em LMIs tem-se que a solução é confirmada a partir da existência de matrizes que satisfazem os critério estabelecidos. Nesse apêndice as matrizes solução de todos os exemplos são expostos separadamente.

Na seção 4.1.3.5 com os exemplos de simulação do observador de Luenberger as matrizes obtidas para as LMIs do caso contínuo são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0,3333 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0,8333 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} -1,0273 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \\ LMI_2 = \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,3333 \\ 0,3333 & 0,3333 \end{bmatrix}, \\ Destabilidade = \begin{bmatrix} -0,1600 & -0,1600 \\ -0,1600 & -0,1600 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.1)$$

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1,5000 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 3,7501 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} -4,5001 & 1,5000 & 1,0000 \\ 1,5000 & -1,0000 & 0,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & -0,4444 \end{bmatrix}, \\ Destabilidade = \begin{bmatrix} -0,7500 & -0,7500 \\ -0,7500 & -0,7500 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.2)$$

As matrizes obtidas para as LMIs do caso discreto são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0,6796 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0,3961 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} 0,6796 & 0,5845 & 0,4207 \\ 0,5845 & 0,6796 & 0 \\ 0,4207 & 0 & 1,0000 \end{bmatrix}, \\ LMI_2 = \begin{bmatrix} 0,0425 & 0,1699 \\ 0,1699 & 0,6796 \end{bmatrix}, \\ Destabilidade = \begin{bmatrix} -0,1903 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,0006 \times 10^{-6} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.3)$$



- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 2,2400 \\ 1,3054 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 1,3054 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} 2,2400 & 1,9264 & 0,0000 & 0,4207 \\ 1,9264 & 2,2400 & 0,5600 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5600 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,4207 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5643 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -0,7500 & -0,7500 \\ -0,7500 & -9.0075 \times 10^{-10} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.4)$$

Os exemplos de simulação do observador aumentado com filtro  $\Delta(s) = s$  na Seção 4.2.3.5.1 obtiveram as seguintes matrizes de solução das LMIs, no caso contínuo no exemplo da eq. 4.59 são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 2,7741 & -2,0971 \\ -2,0971 & 1,8934 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 5,8468 \\ -3,9686 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} -5,1455 & 4,6455 \\ 4,6455 & -4,1942 \end{bmatrix}, \quad LMI_2 = \begin{bmatrix} 1,8934 & -2,0971 & 1,8934 \\ -2,0971 & 2,7741 & -2,0971 \\ 1,8934 & -2,0971 & 1,8934 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -1,3870 & 1,0485 & -0,2987 & -0,2256 \\ 1,0485 & -0,9467 & 0,6770 & -0,2037 \\ -0,2987 & 0,6770 & -1,3870 & 1,0485 \\ -0,2256 & -0,2037 & 1,0485 & -0,9467 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.5)$$

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 3,8234 & -2,7990 \\ -2,7990 & 2,3660 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 8,3465 \\ -5,5978 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} -9,0462 & 6,6223 & -2,7990 & 1,0000 \\ 6,6223 & -5,5979 & 2,3660 & 0,0000 \\ -2,7990 & 2,3660 & -1,0000 & 0,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,8251 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -1,9117 & 1,3995 & -0,6997 & -0,0001 \\ 1,3995 & -1,1830 & 1,0245 & -0,4330 \\ 0,6997 & 1,0245 & -1,9117 & 1,3995 \\ -0,0001 & -0,4330 & 1,3995 & -1,1830 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.6)$$

As matrizes obtidas para as LMIs do caso discreto do exemplo Eq. 4.60 são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1,1059 & -0,2764 \\ -0,2764 & 0,3456 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0,8023 \\ 0,3253 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} 1,1059 & -0,2764 & 0,8847 & -0,4423 & 0,4207 \\ -0,2764 & 0,3456 & 0,0001 & 0,2765 & 0,0000 \\ 0,8847 & 0,0001 & 1,1059 & -0,2764 & 0,0000 \\ -0,4423 & 0,2765 & -0,2764 & 0,3456 & 0,0000 \\ 0,4207 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad LMI_2 = \begin{bmatrix} 0,2765 & 0,0001 & 0,2765 \\ 0,0001 & 1,1059 & -0,2764 \\ 0,2765 & -0,2764 & 0,3456 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -0,4424 & 0,1106 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1106 & -0,1382 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.7)$$

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0,7976 & -0,2697 \\ -0,2697 & 0,3371 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0,5786 \\ 0,1501 \end{bmatrix}, \\ LMI_1 = \begin{bmatrix} 0,7976 & -0,2697 & 0,6381 & -0,3612 & 0,0000 & 0,4207 \\ -0,2697 & 0,3371 & -0,0703 & 0,2697 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,6381 & -0,0703 & 0,7976 & -0,2697 & -0,0703 & 0,0000 \\ -0,3612 & 0,2697 & -0,2697 & 0,3371 & 0,2697 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0703 & 0,2697 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,4207 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,2064 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -0,3190 & 0,1079 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1079 & -0,1348 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (A.8)$$

Para a simulação do observador aumentado com filtro senoidal  $\Delta(s) = s^2 + 2^2$  no Capítulo 4.2.3.5.1 e seção 4.2.3.5.2 obtiveram as seguintes matrizes de solução das LMIs, no caso contínuo exemplo da Eq. 4.63 são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\begin{cases}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 207,8219 & 79,7327 & -44,1097 \\ 79,7327 & 31,8979 & -16,0462 \\ -44,1097 & -16,0462 & 10,0597 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 22,2166 \\ 0,4877 \\ -10,1819 \end{bmatrix}, \\
 LMI_1 = \begin{bmatrix} -459,0770 & -168,4398 & 102,6480 \\ -168,4398 & -64,1850 & 36,0564 \\ 102,6480 & 36,0564 & -24,0345 \end{bmatrix}, \quad LMI_2 = \begin{bmatrix} 7,9745 & 39,8664 & 15,9489 & -8,0231 \\ 39,8664 & 207,8219 & 79,7327 & -44,1097 \\ 15,9489 & 79,7327 & 31,8979 & -16,0462 \\ -8,0231 & -44,1097 & -16,0462 & 10,0597 \end{bmatrix}, \\
 D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -103,9109 & -39,8664 & 22,0549 & -22,2166 & -0,4877 & 10,1819 \\ -39,8664 & -15,9489 & 8,0231 & -8,4867 & -0,1946 & 4,0731 \\ 22,0549 & 8,0231 & -5,0298 & 4,2467 & -0,1093 & -1,9575 \\ -22,2166 & -8,4867 & 4,2467 & -103,9109 & -39,8664 & 22,0549 \\ -0,4877 & -0,1946 & -0,1093 & -39,8664 & -15,9489 & 8,0231 \\ 10,1819 & 4,0731 & -1,9575 & 22,0549 & 8,0231 & -5,0298 \end{bmatrix}.
 \end{cases} \quad (A.9)$$

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\begin{cases}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 61,1600 & 22,4538 & -13,6528 \\ 22,4538 & 8,5835 & -4,8071 \\ -13,6528 & -4,8071 & 3,1964 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 12,6789 \\ 2,5833 \\ -4,0921 \end{bmatrix}, \\
 LMI_1 = \begin{bmatrix} -147,6777 & -52,3427 & 33,9972 & 11,2269 & 1,0000 \\ -52,3427 & -19,2283 & 11,6798 & 4,2917 & 0,0000 \\ 33,9972 & 11,6798 & -8,0773 & -2,4035 & 0,0000 \\ 11,2269 & 4,2917 & -2,4035 & -1,0000 & 0,0000 \\ 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -3,9329 \end{bmatrix}, \\
 D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -30,5800 & -11,2269 & 6,8264 & -12,6789 & -2,5833 & 4,0921 \\ -11,2269 & -4,2917 & 2,4035 & -4,8518 & -1,0307 & 1,5858 \\ 6,8264 & 2,4035 & -1,5982 & 2,5995 & 0,4799 & -0,8422 \\ -12,6789 & -4,8518 & 2,5995 & -30,5800 & -11,2269 & 6,8264 \\ -2,5833 & -1,0307 & 0,4799 & -11,2269 & -4,2917 & 2,4035 \\ 4,0921 & 1,5858 & -0,8422 & 6,8264 & 2,4035 & -1,5982 \end{bmatrix}.
 \end{cases} \quad (A.10)$$

As matrizes obtidas para as LMIs do caso discreto exemplo Eq. 4.64 são:

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} 2,1980 & -1,3130 & 1,1111 \\ -1,3130 & 1,8511 & -1,6277 \\ 1,1111 & -1,6277 & 1,6672 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} &= \begin{bmatrix} 1,2664 \\ -0,1676 \\ 0,7568 \end{bmatrix}, \\
 \left\{ \begin{aligned} LMI_1 &= \begin{bmatrix} 2,1980 & -1,3130 & 1,1111 & 1,8964 & -1,3806 & 0,9096 & 0,4207 \\ -1,3130 & 1,8511 & -1,6277 & -0,9240 & 1,6791 & -1,2511 & 0,0000 \\ 1,1111 & -1,6277 & 1,6672 & 1,0382 & -1,6870 & 1,4888 & 0,0000 \\ 1,8964 & -0,9240 & 1,0382 & 2,1980 & -1,3130 & 1,1111 & 0,0000 \\ -1,3806 & 1,6791 & -1,6870 & -1,3130 & 1,8511 & -1,6277 & 0,0000 \\ 0,9096 & -1,2511 & 1,4888 & 1,1111 & -1,6277 & 1,6672 & 0,0000 \\ 0,4207 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}, \\ LMI_2 &= \begin{bmatrix} 6,2289 & -2,0765 & 3,3740 & -2,9776 \\ -2,0765 & 2,1980 & -1,3130 & 1,1111 \\ 3,3740 & -1,3130 & 1,8511 & -1,6277 \\ -2,9776 & 1,1111 & -1,6277 & 1,6672 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} &= \begin{bmatrix} -0,6031 & 0,3214 & -0,2743 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,3214 & -0,3441 & 0,3173 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,2743 & 0,3173 & -0,3568 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0123 & 0,0463 & -0,0368 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0463 & -0,1742 & 0,1384 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0368 & 0,1384 & -0,1100 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

- Sintonia por redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} 0,0248 & -0,0114 & 0,0065 \\ -0,0114 & 0,0377 & -0,0378 \\ 0,0065 & -0,0378 & 0,0425 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} &= \begin{bmatrix} 0,0144 \\ -0,0070 \\ 0,0105 \end{bmatrix}, \\
 \left\{ \begin{aligned} LMI_1 &= \begin{bmatrix} 0,0248 & -0,0114 & 0,0065 & 0,0214 & -0,0097 & 0,0028 & 0,0000 & 0,4207 \\ -0,0114 & 0,0377 & -0,0378 & -0,0098 & 0,0332 & -0,0301 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0065 & -0,0378 & 0,0425 & 0,0083 & -0,0362 & 0,0370 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0214 & -0,0098 & 0,0083 & 0,0248 & -0,0114 & 0,0065 & -0,0166 & 0,0000 \\ -0,0097 & 0,0332 & -0,0362 & -0,0114 & 0,0377 & -0,0378 & 0,0725 & 0,0000 \\ 0,0028 & -0,0301 & 0,0370 & 0,0065 & -0,0378 & 0,0425 & -0,0740 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0166 & 0,0725 & -0,0740 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,4207 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 78,9468 \end{bmatrix}, \\ D_{estabilidade} &= \begin{bmatrix} -0,0069 & 0,0034 & -0,0020 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0034 & -0,0089 & 0,0093 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0020 & 0,0093 & -0,0109 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0002 & 0,0001 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0002 & -0,0017 & 0,0013 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0013 & -0,0010 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

As matrizes solução do exemplo da Seção 5.1 no Capítulo 5 do controlador baseado em realimentação do estado observado aplicado no domínio contínuo na Eq. 5.1.1 e no domínio discreto para na Eq. 5.13, respectivamente. As matrizes solução resultantes das LMIs 5.6 e 5.7 são

- Ganho de realimentação de estados

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0,9869 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} -0,4120 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 14,9924 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0,4003 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0,9597 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 14,9924 & -2,1250 \\ -2,1250 & 14,9924 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{M} = \begin{bmatrix} -15,4407 & 10,5951 & -2,1250 & 16,7053 & 1,0000 & 0,4003 \\ 10,5951 & -10,4219 & 0,0000 & -10,3008 & 25,0000 & 0,0000 \\ -2,1250 & 0,0000 & -15,9520 & 17,1173 & 0,0000 & 0,0000 \\ 16,7053 & -10,3008 & 17,1173 & -32,2469 & 0,0000 & 0,0000 \\ 1,0000 & 25,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -225,0898 & 0,0000 \\ 0,4003 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 \end{bmatrix},
 \end{array} \right. \quad (A.13)$$

- Ganho do observador

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 2,9238 & -2,1711 \\ -2,1711 & 1,8910 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 6,2806 \\ -4,2323 \end{bmatrix}, \\
 LMI_1 = \begin{bmatrix} -6,7135 & 4,9850 & -2,1711 & -1,0292 \\ 4,9850 & -4,3421 & 1,8910 & -1,0000 \\ -2,1711 & 1,8910 & -1,0000 & 0,0000 \\ -1,0292 & -1,0000 & 0,0000 & -6,0923 \end{bmatrix}, \\
 D_{estabilidade} = \begin{bmatrix} -30,5800 & -11,2269 & 6,8264 & -12,6789 & -2,5833 & 4,0921 \\ -11,2269 & -4,2917 & 2,4035 & -4,8518 & -1,0307 & 1,5858 \\ 6,8264 & 2,4035 & -1,5982 & 2,5995 & 0,4799 & -0,8422 \\ -12,6789 & -4,8518 & 2,5995 & -30,5800 & -11,2269 & 6,8264 \\ -2,5833 & -1,0307 & 0,4799 & -11,2269 & -4,2917 & 2,4035 \\ 4,0921 & 1,5858 & -0,8422 & 6,8264 & 2,4035 & -1,5982 \end{bmatrix}.
 \end{array} \right. \quad (A.14)$$

Para o caso discreto as matrizes solução resultantes das LMIs 5.15 e 5.16 são as Eq. A.15 e Eq. A.16 apresentadas como

- Ganho de realimentação de estados

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1,1307 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} -1,6393 \times 10^{-15} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 3,1479 \times 10^{-16} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W} = \begin{bmatrix} 1,9716 \times 10^{-14} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 4,9366 \times 10^{-16} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0,3148 & -0,0085 \\ -0,0085 & 0,3148 \end{bmatrix} \times 10^{-15}, \\
 \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1250 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 7,9588 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1250 & 7,9588 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0008 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 \end{bmatrix},
 \end{array} \right. \quad (A.15)$$

- Ganho do observador

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1,5393 & -0,4789 \\ -0,4789 & 0,2993 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 4,0215 \\ -0,0494 \end{bmatrix}, \\
 LMI_1 = \begin{bmatrix} 1,5393 & -0,4789 & 1,2315 & -0,4798 & 0,0000 & -0,0831 \\ -0,4789 & 0,2993 & -0,2865 & 0,2395 & 0,0000 & -1,0000 \\ 1,2315 & -0,2865 & 1,5393 & -0,4789 & -0,2865 & 0,0000 \\ -0,4798 & 0,2395 & -0,4789 & 0,2993 & 0,2395 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,2865 & 0,2395 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0831 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 34,4017 \end{bmatrix}, \\
 Destabilidade = \begin{bmatrix} -0,6157 & 0,1916 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,1916 & -0,1197 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}.
 \end{array} \right. \quad (A.16)$$

No Capítulo 5, seção 5.1 na seção de exemplo 5.4.1.1 a sintonia do controlador proposto foi

feita a partir de LMIs e as matrizes solução são apresentadas a seguir

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = 1e6 \\ \mathcal{W} = 1e6 \\ \mathcal{Z} = 1e7 \end{array} \right. \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 2.3365 & 0.1262 & -0.0433 & 0.0097 & -0.0019 & 0.0006 & 0.0075 & 0.0384 & -0.0147 & -0.0087 & 0.0022 & -0.0010 \\ 0.1262 & 0.0371 & -0.0023 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0018 & 0.0135 & -0.0022 & -0.0023 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0433 & -0.0023 & 0.0008 & -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0007 & 0.0003 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0097 & -0.0000 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0001 \\ -0.0019 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0128 & -0.0838 & -0.0003 & 0.0012 & 0.0044 & -0.0079 & -0.0058 & 0.0800 \\ 0.0006 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0838 & 3.1545 & 0.0057 & -0.0153 & -0.0556 & 0.1086 & -0.0081 & -3.1029 \\ 0.0075 & 0.0018 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0003 & 0.0057 & 3.6446 & -0.5621 & -0.0305 & -0.0111 & 0.0024 & -0.0048 \\ 0.0384 & 0.0135 & -0.0007 & -0.0001 & 0.0012 & -0.0153 & -0.5621 & 8.4955 & -0.9557 & -0.7891 & 0.3729 & 0.0529 \\ -0.0147 & -0.0022 & 0.0003 & -0.0002 & 0.0044 & -0.0556 & -0.0305 & -0.9557 & 1.7049 & -0.7910 & 0.0477 & 0.1128 \\ -0.0087 & -0.0023 & 0.0002 & 0.0003 & -0.0079 & 0.1086 & -0.0111 & -0.7891 & -0.7910 & 1.2650 & -0.7299 & 0.0657 \\ 0.0022 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0003 & -0.0058 & -0.0081 & 0.0024 & 0.3729 & 0.0477 & -0.7299 & 0.7502 & -0.3190 \\ -0.0010 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0800 & -3.1029 & -0.0048 & 0.0529 & 0.1128 & 0.0657 & -0.3190 & 3.3274 \\ 2.0576 & 0.0728 & -0.0361 & 0.0092 & -0.0019 & 0.0012 & 0.0026 & -0.0065 & -0.0148 & -0.0009 & 0.0028 & -0.0013 \\ 0.0728 & 0.0237 & -0.0013 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0010 & -0.0011 & -0.0011 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0361 & -0.0013 & 0.0007 & -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0003 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 \\ 0.0092 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0001 \\ -0.0019 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0128 & -0.0831 & -0.0003 & 0.0012 & 0.0043 & -0.0080 & -0.0055 & 0.0790 \\ 0.0012 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0831 & 3.1409 & 0.0057 & -0.0152 & -0.0538 & 0.1108 & -0.0131 & -3.0862 \\ 0.0026 & 0.0010 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0003 & 0.0057 & 1.7138 & 0.0018 & -0.0215 & -0.0156 & 0.0044 & -0.0060 \\ -0.0065 & -0.0011 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0012 & -0.0152 & 0.0018 & 5.8088 & -0.8534 & -0.7523 & 0.3523 & 0.0552 \\ -0.0148 & -0.0011 & 0.0003 & -0.0002 & 0.0043 & -0.0538 & -0.0215 & -0.8534 & 1.6735 & -0.7753 & 0.0369 & 0.1156 \\ -0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & -0.0080 & 0.1108 & -0.0156 & -0.7523 & -0.7753 & 1.2403 & -0.7166 & 0.0599 \\ 0.0028 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0055 & -0.0131 & 0.0044 & 0.3523 & 0.0369 & -0.7166 & 0.7449 & -0.3132 \\ -0.0013 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0790 & -3.0862 & -0.0060 & 0.0552 & 0.1156 & 0.0599 & -0.3132 & 3.3088 \\ 0.1653 & 0.0008 & -0.0031 & 0.0008 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0225 & -0.0160 & -0.0039 & 0.0007 & -0.0004 & 0.0002 \\ 0.0008 & 0.0110 & -0.0000 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0009 & -0.0017 & -0.0005 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0031 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0003 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0008 & -0.0002 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0010 & 0.0004 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0010 \\ 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0010 & -0.0273 & -0.0050 & 0.0007 & 0.0005 & -0.0013 & 0.0002 & 0.0266 \\ 0.0225 & 0.0009 & -0.0004 & 0.0001 & 0.0004 & -0.0050 & 4.0288 & -1.0343 & -0.2850 & -0.0273 & -0.0118 & 0.0061 \\ -0.0160 & -0.0017 & 0.0003 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0007 & -1.0343 & 2.2363 & 0.1525 & 0.0296 & -0.0045 & 0.0014 \\ -0.0039 & -0.0005 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0005 & -0.2850 & 0.1525 & 0.0345 & 0.0016 & 0.0083 & -0.0044 \\ 0.0007 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0013 & -0.0273 & 0.0296 & 0.0016 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0025 \\ -0.0004 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & -0.0118 & -0.0045 & 0.0083 & -0.0004 & -0.0027 & 0.0015 \\ 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0266 & 0.0061 & 0.0014 & -0.0044 & 0.0025 & 0.0015 & -0.0282 \end{array} \right] \\
& \mathcal{W} = [\mathcal{W}_1 \mathcal{W}_2] = \mathbf{0}^T \quad 1e7 \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7175 & -5.3225 & 0.4563 & 0.6663 & -0.3321 & -0.0333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9779 & 4.8742 & 0.5373 & -0.3382 & 0.0291 & 0.0574 \end{array} \right] \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} = 1e6 \\ \mathcal{S} = 1e9 \end{array} \right. \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0.4071 & 0.0035 & -0.0075 & 0.0020 & -0.0005 & 0.0008 & -0.0013 & -0.0241 & -0.0021 & 0.0045 & -0.0001 & -0.0008 \\ 0.0035 & 0.0014 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 \\ -0.0075 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0020 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0002 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0002 \\ -0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0002 & 0.0041 & -0.0244 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0014 & -0.0024 & -0.0019 & 0.0230 \\ 0.0008 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0244 & 1.0224 & 0.0018 & -0.0003 & -0.0170 & 0.0326 & -0.0044 & -1.0047 \\ -0.0013 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0018 & 0.4861 & 0.0177 & -0.0042 & -0.0071 & 0.0002 & -0.0021 \\ -0.0241 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0177 & 1.4648 & -0.2020 & -0.1817 & 0.0820 & -0.0033 \\ -0.0021 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0014 & -0.0170 & -0.0042 & -0.2020 & 0.4198 & -0.2182 & 0.0324 & 0.0260 \\ 0.0045 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0024 & 0.0326 & -0.0071 & -0.1817 & -0.2182 & 0.3414 & -0.2029 & 0.0245 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0019 & -0.0044 & 0.0002 & 0.0820 & 0.0324 & -0.2029 & 0.2042 & -0.0881 \\ -0.0008 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0002 & 0.0230 & -1.0047 & -0.0021 & -0.0033 & 0.0260 & 0.0245 & -0.0881 & 1.0632 \\ 0.3667 & 0.0126 & -0.0068 & 0.0017 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0007 & -0.0068 & -0.0035 & 0.0011 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0126 & 0.0196 & -0.0002 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0012 & -0.0016 & -0.0008 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0068 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0017 & -0.0003 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0003 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0015 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0015 \\ 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0015 & 0.0268 & -0.0038 & 0.0011 & -0.0013 & 0.0008 & 0.0010 & -0.0264 \\ 0.0007 & 0.0012 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0003 & -0.0038 & 1.6044 & 0.0740 & 0.0138 & -0.0066 & 0.0034 & 0.0027 \\ -0.0068 & -0.0016 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & 0.0740 & 1.6006 & -0.0262 & 0.0088 & -0.0061 & 0.0011 \\ -0.0035 & -0.0008 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0013 & 0.0138 & -0.0262 & 0.0807 & -0.0652 & 0.0352 & -0.0110 \\ 0.0011 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0008 & -0.0066 & 0.0088 & -0.0652 & 0.0829 & -0.0552 & 0.0205 \\ 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0010 & 0.0034 & -0.0061 & 0.0352 & -0.0552 & 0.0431 & -0.0196 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0015 & -0.0264 & 0.0027 & 0.0011 & -0.0110 & 0.0205 & -0.0196 & 0.0359 \\ -0.7219 & -0.0059 & 0.0134 & -0.0036 & 0.0005 & 0.0022 & 0.0250 & 0.1172 & -0.0307 & -0.0114 & 0.0000 & -0.0027 \\ -0.0059 & -0.0005 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0014 & 0.0004 & 0.0003 & -0.0002 & 0.0001 \\ 0.0134 & 0.0001 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0005 & -0.0022 & 0.0006 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0002 \\ -0.0036 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0003 & 0.0037 & 0.0001 & 0.0006 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0038 \\ 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0003 & -0.0080 & 0.0060 & -0.0002 & 0.0019 & -0.0015 & 0.0032 & 0.0041 & -0.0034 \\ 0.0022 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0037 & 0.0060 & -2.6890 & -0.0025 & -0.0171 & 0.0192 & -0.0737 & 0.0789 & 2.6330 \\ 0.0250 & -0.0003 & -0.0005 & 0.0001 & -0.0002 & -0.0025 & -0.3114 & -0.3822 & 0.0529 & 0.0668 & -0.0092 & 0.0062 \\ 0.1172 & -0.0014 & -0.0022 & 0.0006 & 0.0019 & -0.0171 & -0.3822 & -2.2642 & 0.7210 & 0.2661 & -0.1188 & 0.0464 \\ -0.0307 & 0.0004 & 0.0006 & -0.0001 & -0.0015 & 0.0192 & 0.0529 & 0.7210 & -0.9642 & 0.4705 & -0.1134 & -0.0194 \\ -0.0114 & 0.0003 & 0.0002 & -0.0002 & 0.0032 & -0.0737 & 0.0668 & 0.2661 & 0.4705 & -0.7614 & 0.4759 & -0.0770 \\ 0.0000 & -0.0002 & 0.0000 & -0.0002 & 0.0041 & 0.0789 & -0.0092 & -0.1188 & -0.1134 & 0.4759 & -0.4653 & 0.1311 \\ -0.0027 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0038 & -0.0034 & 2.6330 & 0.0062 & 0.0464 & -0.0194 & -0.0770 & 0.1311 & -2.7338 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

(A.17)