



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE**  
**TELEINFORMÁTICA**

**PAULO HENRIQUE DA SILVA FRANCO**

**MODELO ESTATÍSTICO PARA AVALIAR O DESEMPENHO DE UM SISTEMA**  
**DE CORREÇÃO DE ERRO QUÂNTICO**

**FORTALEZA**

**2013**

PAULO HENRIQUE DA SILVA FRANCO

MODELO ESTATÍSTICO PARA AVALIAR DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE  
CORREÇÃO DE ERRO QUÂNTICO

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática como requisito final para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. José Claudio do Nascimento

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

---

F897m Franco, Paulo Henrique da Silva.  
Modelo estatístico para avaliar o desempenho de um sistema de correção de erro  
quântico / Paulo Henrique da Silva Franco. – 2013  
57 f. : il. color. , enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2013.  
Área de concentração: Eletromagnetismo aplicado.  
Orientação: Prof. Dr. José Cláudio do Nascimento.

1. Teleinformática. 2. Polarização. 3. Teoria da informação. I. Título.

---

CDD 621.38

PAULO HENRIQUE DA SILVA FRANCO

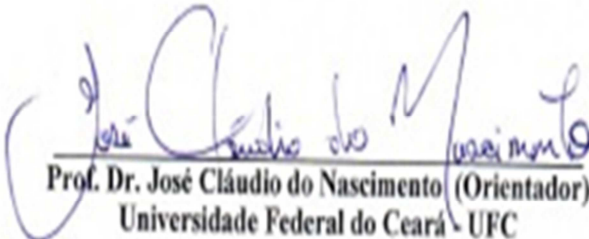
**MODELO ESTATÍSTICO PARA AVALIAR O DESEMPENHO DE UM  
SISTEMA DE CORREÇÃO DE ERRO QUÂNTICO**


Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Teleinformática.

Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Aprovada em: 23/08/2013.

**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. Dr. José Cláudio do Nascimento (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará - UFC

  
Prof. Dr. Rubens Viana Ramos  
Universidade Federal do Ceará - UFC

  
Prof. Dr. Daniel Barbosa de Brito  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

A ousadia dos maus é proporcional à  
covardia dos bons.

## AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu o milagre da vida e sempre me fez sentir Sua presença paterna. A todos os momentos juntos que passamos e passaremos na construção de um mundo mais justo e fraterno.

Ao Seu Carlos e a Dona Andreia que tanto se dedicaram e se esforçaram para educar com amor e firmeza eu e meus irmãos. Por terem renunciado ao bem-estar deles pelo nosso, por terem nos ensinado sempre que o mais importante é ser uma pessoa de bem e não uma pessoa de bens e por todos os seus atos de carinho, coragem e amizade.

Ao Jorge e à Mara que me ensinaram através da amizade e da presença o que é ser irmão. Deram as primeiras pistas do verdadeiro sentido da palavra família e ressaltam a importância e necessidade de viver ao lado de pessoas que podemos sempre contar. Às nossas brincadeiras, sonhos e aventuras de ontem, hoje e sempre.

Aos ensinamentos e cumplicidades da minha flor Simone, que alegrou o meu ser e me fez ser um homem forte, confiante e amado. Seu companheirismo, carinho e amor tem sido a chave para me aproximar mais de Deus. Tens mostrado que o dia a dia pode ser único, basta que olhemos os acontecimentos com coragem, esperança e leveza.

Ao Professor Claudio que com toda sua paciência, amizade e confiança me deu a oportunidade de participar do mestrado e me ajudar a viver esta etapa da minha vida. Por todos os ensinamentos que foram essenciais para a conclusão do ciclo mestrado e o início do ciclo estudar-pelo-resto-da-vida.

A família Odonto System que deu condições para realizar meu mestrado. A todos os amigos dos setores de desenvolvimento, central de serviços e suporte que me ajudaram a desenvolver minhas atividades e me auxiliaram no meu desenvolvimento profissional.

Aos amigos que estão sempre me apoiando e lutando comigo. Ao G30 pelos momentos de descontração, bom humor e amizade. À Larisse por ter me apresentado meu mestre e orientador. À minha igreja por sempre me convidar a estar cada vez mais próximo de Cristo. A todos os professores e alunos do GIQ que através dos seus conhecimentos e coleguismos me ajudaram a realizar esta obra.

## RESUMO

Uma das propriedades físicas mais utilizadas para a implementação da tecnologia quântica é a polarização da luz. Entretanto, uma vez que a polarização da luz é frágil, é essencial que seja utilizado um sistema de correção de erro quântico a fim de tornar a informação quântica viável na polarização de um fóton. Um método de correção da polarização proposto para fótons isolados divide o canal em subcanais de tal forma que somente a variação nesses subcanais destrói a informação. Para isso, variações rápidas devem acontecer no momento em que dois pulsos ópticos atravessam o subcanal. Neste trabalho analisa-se um modelo estatístico que usa o grau de despolarização da luz como uma probabilidade do subcanal sofrer pequenas variações no período de tempo entre a passagem de dois pulsos. Para modelar as variações dos parâmetros do canal, utiliza-se o método probabilístico de Poisson aplicado a eventos raros. Realiza-se uma estimativa usando métodos numéricos que mede o grau de polarização da luz para fazer uma previsão de como seria o comportamento na prática do sistema de correção de erro quântico estudado.

**Palavras-chave:** Teleinformática. Polarização. Teoria da Informação.

## ABSTRACT

One of the most used physical properties to implement quantum technology is the polarization of the light. However, since the polarization of the light is fragile, it is essential that a quantum error correction system is used to make quantum information feasible in the polarization of a photon. A method of correction of polarization proposed for isolated photons divides the channel into sub-channels in such a way that only the variation in those sub-channels destroys the information. Therefore, rapid changes must occur in the moment that two optical pulses pass through the sub-channel. This work analyses a statistical model that uses the degree of depolarization of the light as a probability for the sub-channel to undergo minute variations in the time between the passage of two pulses. To model the variations of the parameters of the channel, it is used the probabilistic method of Poisson, applied to rare events. An estimate can be done using numerical methods which measures the degree of polarization of the light to predict how would be the behavior in the practice of the quantum error correction system studied.

**Keywords:** Teleinformation. Polarization. Information theory.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Uma fonte prepara $\rho$ para um medidor que resolve o estado de polarização de entrada na base $\psi$ e $\psi \perp$ . .....	9
Figura 2.2 – Experimento para a medição do grau de polarização da luz. ....	9
Figura 3.1 – Esquema de correção de erro quântico proposto na referência [43]. .....	15
Figura 3.2 – Guiamento dos estados horizontal e vertical de polarização através do PBS 2x2 .....	16
Figura 3.3 – Esquema simplificado do sistema de correção de erro usando óptica linear. ....	16
Figura 4.1 – Esquema óptico para correção quântica de erro para um fóton: PBS (polarization beam splitter) e PC (Célula de Pockel). ....	19
Figura 4.32 – A evolução temporal do pulso longo e curto dentro do canal.....	24
Figura 4.3 – Comportamento hipotético durante a passagem do sinal em 3 subcanais.....	25
Figura B.6 – O grau de polarização em função de $z$ do campo consiste na superposição do conjunto das ondas aleatórias evanescentes e a radiação do corpo negro ocupando meio comprimento $z > 0$ . A onda evanescente decresce exponencialmente com o crescimento de $z$ . $I_{bb}$ mostra a intensidade do campo do corpo negro e $I_e$ mostra a intensidade da onda evanescente no plano $z = 0$ . ....	47

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 2.1 – Dinâmica do grau de polarização da luz de um fóton para o canal modelado por 2.10 com $\gamma = 0,01$ , $s_{10} = 0,530$ , $s_{20} = 0,152$ e $s_{30} = 0,86151$ .....	6
Gráfico 2.2 – Estabilização dos parâmetros de Stokes da parte pura da polarização da luz de um fóton, para o canal modelado por (2.10), com $\gamma = 0,01$ , $s_1(0) = 0,530$ , $s_2(0) = 0,152$ , $s_3(0) = 0,86151$ .....	6
Gráfico 2.3 – Os estados completamente polarizados $\rho_z = 0$ e seu ortogonal $\rho \perp z = 0$ caminham para a posição do estado despolarizado $I/2$ que se encontra no centro da esfera.....	8
Gráfico 2.4 – Variação da potência óptica no experimento da figura 2.2 sem a fibra de teste. ..	10
Gráfico 2.5 – Variação da potência óptica no experimento do gráfico 2.4 com a fibra de teste (200m de fibra óptica bobinada). .....	11
Gráfico 4.1 – Comportamento do grau de despolarização .....	32

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2.	POLARIZAÇÃO DE FÓTONS ISOLADOS.....	3
2.1	Geometria da polarização, matriz coerência ( $J$ ) e matriz densidade ( $\rho$ ) .....	3
2.2	Despolarização .....	5
2.3	Medição de polarização e distinguibilidade .....	8
2.4	Medição experimental do grau de polarização de uma luz CW .....	9
	se propagando por um trecho de fibra.....	
3.	TÉCNICAS ÓPTICAS PARA CORREÇÃO DE ERRO QUÂNTICO .....	
	UTILIZANDO POLARIZAÇÃO DE FÓTONS ISOLADOS .....	13
3.1.	Sistema corretor de erro quântico para comunicação quântica utilizando polarização de fótons isolados .....	13
3.2.	Sistema corretor de erro quântico simplificado.....	16
4.	MODELO FÍSICO MATEMÁTICO PARA UM SUBCANAL QUÂNTICO .....	
	RUIDOSO.....	18
4.1	Subsistema quântico sem ruído .....	18
4.2	Correção quando existe uma variação rápida entre os pulsos.....	20
4.3	Solução numérica para encontrar um parâmetro de decaimento do grau .....	
	de polarização a partir de uma medição experimental de uma luz CW se .....	
	propagando por um trecho de fibra.....	30
5.	CONCLUSÃO .....	33
	REFERÊNCIAS .....	34
	ANEXO A – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO 4.21 .....	41
	ANEXO B – GRAU DE POLARIZAÇÃO DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA ESTATÍSTICAMENTE ESTACIONARIA .....	43

## 1. INTRODUÇÃO

Aplicações para sistemas que codificam informação na polarização de fótons únicos em comunicação quântica. Por exemplo, distribuições quânticas de chaves foram realizadas utilizando polarização de fótons isolados [1-3].

Experimentos com memórias quânticas de estado sólido que conseguem armazenar qualquer tipo de polarização do fóton estão contribuindo significativamente para o desenvolvimento de técnicas de armazenamento de informação quântica [4-6]. Outro experimento de bastante relevância para o desenvolvimento do processamento da informação quântica é o teletransporte. Estudos mostram que cada vez mais se tenta superar os recordes de distância realizados pela teleportação quântica [7-8]. Contudo, a luz está sujeita a variações aleatórias de sua polarização durante a propagação em um meio que não preserve a polarização, o que causa erros no sistema de comunicação e computação baseados na polarização da luz [9].

No capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica relativa à polarização da luz. A polarização é a propriedade que demonstra o caráter vetorial do campo eletromagnético. Ela é de crucial importância em sistemas de comunicação óptica, pois os diversos componentes ópticos possuem perdas e/ou dispersão dependentes da polarização. Neste último caso, por exemplo, a dispersão dos modos de polarização limita a taxa de transmissão em redes ópticas [10-12]. Portanto, um completo conhecimento das propriedades da polarização é de grande importância para que se possa aproveitar ao máximo de suas potencialidades.

A polarização clássica da luz pode ser caracterizada matematicamente através da matriz coerência  $J$  [13]. Os elementos da matriz  $J$  são as autocorrelações (na diagonal) e correlações cruzadas (elementos fora da diagonal) das componentes  $x$  e  $y$  do campo elétrico. Por outro lado, a matriz densidade,  $\rho$ , contém toda informação disponível sobre um determinado estado quântico [14]. Quando o estado quântico em questão é a polarização de um fóton,  $J$  e  $\rho$  são iguais. Estas semelhanças estimulam a aplicação de conceitos comuns de uma na outra. Por exemplo, as esferas de Poincaré e Bloch se assemelham ao serem analisadas. A vantagem disso é que podemos visualizar a interpretação para medidas de distância e grau de polarização. O grau de polarização na luz clássica é um parâmetro que

varia entre zero e um. Por isso ele pode ser usado para representar a probabilidade de erro para o comportamento do canal de polarização para fótons isolados.

No capítulo 3, apresentam-se esquemas de correção de erro que utilizam a polarização da luz como propriedade física. Os primeiros sistemas de comunicação quântica experimentais utilizaram polarização de fótons [15-18]. Posteriormente, estes sistemas foram trocados pelos sistemas interferométricos de comunicação quânticos [19-23] exatamente devido ao problema da estabilidade na propagação da luz a longas distâncias. Entretanto, qubits de polarização continuam sendo de grande interesse por três tipos de razões: 1) Sistemas de comunicação quântica de curta ou média distância podem ser implementados [25-27]; 2) São bastante utilizados em computação quântica [28-31] ; 3) Estados entrelaçados, fundamentais para protocolos de comunicação e computação quântica, são experimentalmente mais práticos de serem produzidos através da criação de pares de fótons com polarização entrelaçada [32-34]. Uma vez produzidos, os fótons do par precisam ser enviados aos usuários das redes ópticas de comunicação que desejam realizar um protocolo de comunicação quântica e podem estar distantes de onde os fótons foram gerados. A existência de sistemas de detecção e correção de erros quânticos é fundamental para o desenvolvimento e aplicações de comunicação quântica para longas distâncias em sistemas reais, ou seja, em canais ruidosos variantes no tempo. Muitas das teorias de detecção e correção de erros já apresentadas [6] são baseadas na introdução de redundância através do uso de múltiplos qubits entrelaçados. Estes códigos têm como objetivo recuperar a informação correta após a passagem da mesma por um canal ruidoso, depois o erro é detectado através da redundância inserida. Como exemplos, podem ser citados os códigos de Shor [35] e a família de códigos estabelecidos no limite quântico de Hamming para corrigir erros do tipo bit-flip [36].

No capítulo 4, é estimado o desempenho de um sistema de correção de erro quântico, a partir de um experimento realizado no Laboratório de Tecnologia da Informação Quântica LATIQ no ano de 2005. A solução numérica de um sistema de equações não lineares gera os parâmetros necessários para estimar o desempenho do sistema CODEC. Isto permite que seja criada uma situação mais realista de acordo com o modelo matemático de desempenho proposto em [37]. Sendo este trabalho útil para uma futura verificação experimental desse modelo.

No capítulo 5, são feitas as conclusões dos resultados encontrados neste trabalho.

## 2. POLARIZAÇÃO DE FÓTONS ISOLADOS

Neste capítulo, são revisados os conceitos de polarização quântica da luz de um fóton, para aplicações em comunicações quânticas. O objetivo é identificar como varia a polarização durante a propagação da luz em uma fibra óptica monomodo. Um dos fenômenos que degrada o desempenho de sistemas de comunicações ópticas que utilizam a polarização da luz é a despolarização. Portanto, a fibra óptica é vista como um canal despolarizador. A grandeza que mede o quanto a luz é polarizada é o grau de polarização,  $g_p$ . Portanto, é analisada a variação de  $g_p$  numericamente, para propagação da luz em um trecho de fibra óptica. A simulação numérica é usada para mostrar a dinâmica da perda do grau de polarização durante a propagação da luz na fibra óptica.

### 2.1 Geometria da polarização, matriz coerência ( $J$ ) e matriz densidade ( $\rho$ )

Na polarização da luz de um fóton, no lugar de termos uma distribuição de energia sobre os eixos de polarização, teremos a probabilidade de encontrarmos o fóton em um destes eixos, uma vez que um fóton é indivisível. O estado quântico  $|\psi\rangle$ , representando a polarização de um fóton, pode ser representado pelo vetor de Stokes  $\vec{S}$  ou pela matriz densidade  $\rho$ . A forma geral desta última é dada por:

$$\rho = |\psi(\theta, \delta)\rangle\langle\psi(\theta, \delta)| = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\delta} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\delta} & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Existem dois graus de liberdade  $(\theta, \delta)$  para a rotação de dois estados completamente polarizados (estados puros) sobre a esfera de Poincaré, abrangendo, assim, toda a superfície

da esfera. Podemos escrever os operadores quânticos de Stokes [38-40] para apenas um fóton da seguinte maneira:

$$\hat{S}_0 = |H\rangle\langle H| = \sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

$$\hat{S}_1 = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V| = \sigma_{1(z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

$$\hat{S}_2 = |V\rangle\langle H| + |H\rangle\langle V| = \sigma_{2(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

$$\hat{S}_3 = i(|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|) = \sigma_{3(y)} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Em (2.2)-(2.5)  $|H\rangle$  e  $|V\rangle$  representam, respectivamente, os estados quânticos de polarização linear horizontal e vertical, e  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli. Os valores médios dos operadores quânticos de Stokes  $s_i = \langle \hat{S}_i \rangle = Tr(\rho \hat{S}_i) = Tr(\rho \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , formam o vetor de Stokes  $[s_0 \ s_1 \ s_2 \ s_3]^T$ . A matriz densidade do estado quântico da polarização de um fóton pode ser escrita em função dos elementos do vetor de Stokes:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_1 & s_2 - i s_3 \\ s_2 + i s_3 & 1 - s_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 s_i \sigma_i. \quad (2.6)$$

Usando (2.6) e o fato que  $Tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$  em (2.1), obtemos o vetor de Stokes  $\vec{S} = [s_0, s_1, s_2, s_3]$  para o estado de polarização (2.1):

$$\vec{S} = [1, \cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\delta), \sin(\theta) \sin(\delta)]. \quad (2.7)$$

Neste trabalho, usa-se o vetor reduzido de Stokes  $\vec{S}' = [s_1, s_2, s_3]$ , que é um vetor que aponta da origem da esfera de Poincaré para o ponto de localização do estado de polarização. A partir do vetor reduzido de Stokes podemos fazer uma análise vetorial dos estados quânticos contidos em qualquer região sobre a superfície da esfera de Poincaré ou no interior dela. Por fim, é importante ressaltar que, para os estados quânticos que estão sobre a superfície da esfera, representando, portanto, estados puros, tem-se  $\|\vec{S}'\| = 1$  e, para os

estados quânticos que estão no interior da esfera, representando, portanto, estados mistos, tem-se  $\|\vec{S}'\| < 1$ .

## 2.2 Despolarização

A polarização do fóton tem sido usada como portadora de informação em comunicações quânticas. Ela tem a vantagem de não ser uma variável dependente das perdas na fibra óptica. Por outro lado, a polarização da luz é dependente de diversos fatores, como as formas e composições do núcleo e casca da fibra óptica, emendas, tensões mecânicas (curvaturas e vibrações) e temperatura. Como resultado, para que o processo de comunicação seja eficiente, um controle rigoroso da polarização deve ser feito, inclusive com o uso de fibras especiais que mantêm a polarização fixa, chamadas fibras PM.

Um efeito fortemente indesejado em comunicações ópticas é a despolarização da luz. Do ponto de vista físico, a despolarização é causada pelo PMD. Cada componente espectral do pulso luminoso evolui, independentemente e aleatoriamente para um estado de polarização em geral diferente. A luz totalmente despolarizada é completamente indistinguível de qualquer outro estado de polarização, por isso não se presta para portar informação. A matriz densidade da luz totalmente despolarizada é  $\rho_m = I/2$ , sendo  $I$  a matriz unidade.

Ao se propagar pela fibra óptica, a luz inicialmente completamente polarizada, com grau de polarização máximo (e entropia mínima), evolui para estados parcialmente polarizados, com grau de polarização intermediária (entropia intermediária), até se tornar totalmente despolarizada, com grau de polarização mínimo (entropia máxima). Portanto, ao longo da propagação, o grau de polarização (entropia) tem dinâmica decrescente (crescente). Uma luz parcialmente polarizada  $\rho$  pode ser escrita como a mistura de um estado maximamente misto  $I/2$  com um estado puro  $\rho_p$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{I}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i(z) \sigma_i = [1 - \xi(z)] \frac{I}{2} + \xi(z) \left[ \frac{I}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{s_i(z)}{\xi(z)} \sigma_i \right] \\ &= [1 - \xi(z)] \frac{I}{2} + \xi(z) \rho_p(z). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim o grau de polarização do fóton é dado por:



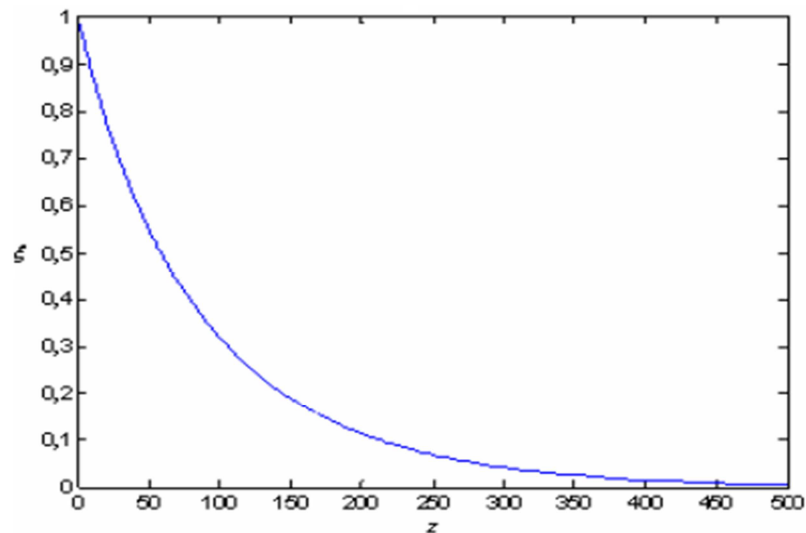
$$\xi(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 s_i(z)^2}. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) define o grau de polarização da luz de um fóton (nesse caso,  $s_0 = 1$ ). Além disso, como pode ser observado em (2.8),  $\sum_{i=1}^3 [s_i(z)/\xi(z)]^2 = 1$ , o que, por definição, indica que  $\rho_p$  é sempre puro. De (2.8)-(2.9), vemos que a despolarização da luz implica em  $\xi(z) \rightarrow 0$ , ou seja,  $s_i(z) \rightarrow 0$ , a medida que a luz se propaga pela fibra óptica. Como os parâmetros de Stokes se tornam nulos depende de como o canal despolariza a luz. No modelo proposto em [41], os parâmetros de Stokes variam da seguinte forma:

$$s_1(z) = s_1(0)e^{-2\gamma z}; s_2(z) = s_2(0)e^{-\gamma z}; s_3(z) = s_3(0)e^{-\gamma z}. \quad (2.10)$$

Em (2.10), o parâmetro  $\gamma$  indica a “força” com que o canal despolariza a luz. Usando (2.10), pode ser vista no gráfico 2.1 a dinâmica do grau de polarização  $\xi(z)$ , ao longo da distância percorrida.

Gráfico 2.1 – Dinâmica do grau de polarização da luz de um fóton para o canal modelado por 2.10 com  $\gamma = 0,01$ ,  $s_1(0) = 0,530$ ,  $s_2(0) = 0,152$  e  $s_3(0) = 0,86151$ .

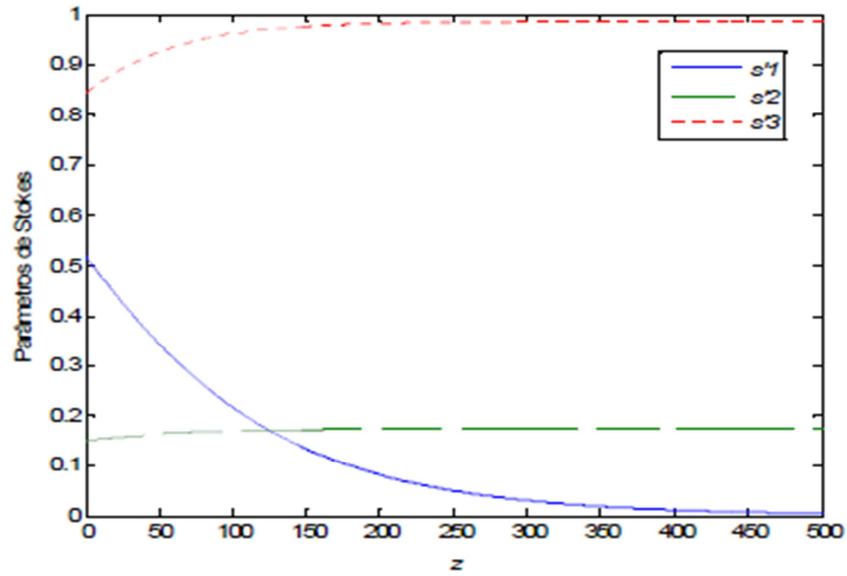


Fonte: Referência [45], página 6.

Por outro lado, o gráfico 2.2 mostra a evolução dos parâmetros de Stokes da parte completamente polarizada,  $s'_i(z) = s_i(z)/\xi(z)$ ,  $i = 1,2,3$ .

Gráfico 2.2 – Estabilização dos parâmetros de Stokes da parte pura da polarização da luz de um fóton, para o canal modelado por (2.10), com

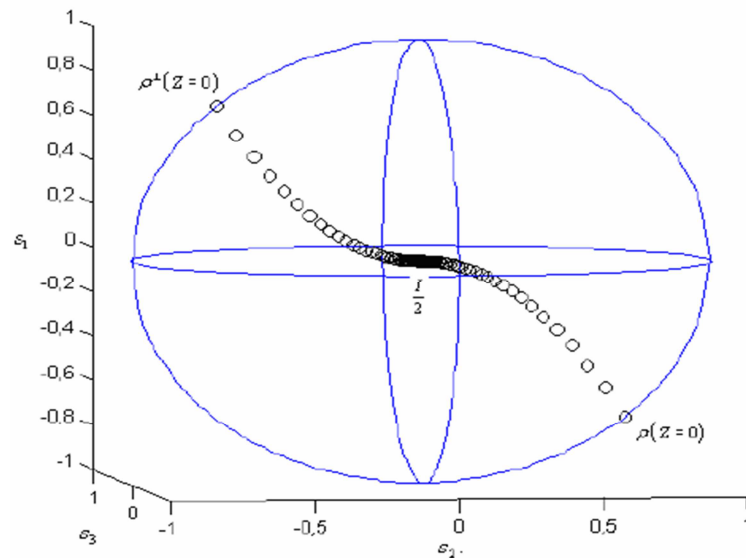
$\gamma = 0,01$ ,  $s_1(0) = 0,530$ ,  $s_2(0) = 0,152$  e  $s_3(0) = 0,86151$ .



Fonte: Referência [45], página 7.

Nas simulações mostradas nos gráficos 2.1 e 2.2 os seguintes valores foram usados:  $\gamma = 0,01$ ,  $s_1(0) = 0,530$ ,  $s_2(0) = 0,152$  e  $s_3(0) = 0,86151$ . Como pode ser observado no gráfico 2.2, o estado de polarização da parte completamente polarizada tende monotonicamente para um estado completamente despolarizado. Por fim, o gráfico 2.3 mostra, para o canal cujo decremento dos parâmetros de Stokes é modelado por (2.10), como um estado no início completamente polarizado e seu par ortogonal, localizados na superfície de Poincaré, tendem para um estado totalmente despolarizado localizado no centro da esfera.

Gráfico 2.3 – Os estados completamente polarizados  $\rho(z=0)$  e seu ortogonal  $\rho^\perp(z=0)$  caminham para a posição do estado despolarizado  $I/2$  que se encontra no centro da esfera.

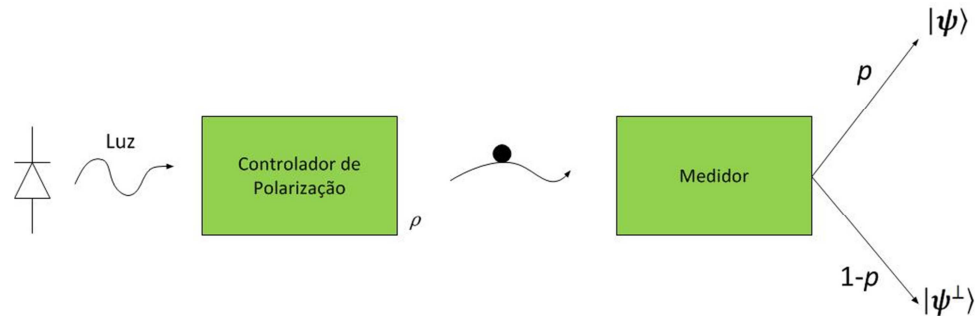


Fonte: Referência [45], página 8.

### 2.3 Medição de polarização e distinguibilidade

Classicamente, a determinação da polarização de um feixe de luz é obtida pela determinação dos parâmetros de Stokes. Para a luz de um fóton isto não é possível. Se fosse possível, poderíamos clonar o estado de polarização de um fóton e por abaixo todos os protocolos de distribuição quântica de chaves baseados na polarização de um fóton. A capacidade de distinguir dois estados diferentes de polarização está diretamente ligada à medição da polarização. Para a luz de um fóton, dois estados de polarização só são perfeitamente distinguíveis se forem ortogonais. Na figura 2.1 uma fonte prepara um fóton com polarização descrita pela matriz densidade  $\rho$ . Em seguida, este fóton tem sua polarização mensurada por um medidor de polarização (um divisor de feixes por polarização, PBS) que resolve o estado de polarização incidente nos estados ortogonais  $|\psi\rangle$  e  $|\psi^\perp\rangle$ .

Figura 2.1 – Uma fonte prepara  $\rho$  para um medidor que resolve o estado de polarização de entrada na base  $|\psi\rangle$  e  $|\psi^\perp\rangle$ .



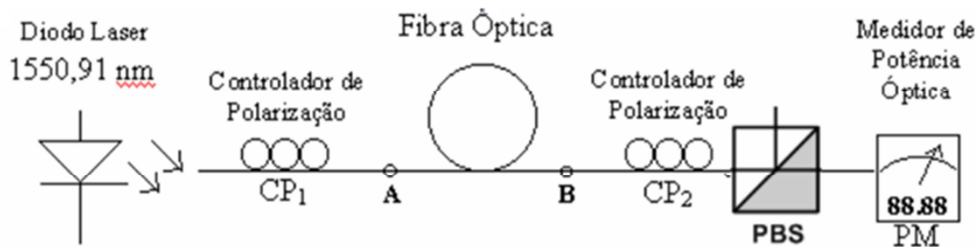
Fonte: Elaborada pelo autor

As probabilidades  $p$  e  $(1 - p)$  de, após a medição, o fóton emergir com polarização  $|\psi\rangle$  e  $|\psi^\perp\rangle$  são, respectivamente  $p = \langle \psi | \rho | \psi \rangle$  e  $(1 - p) = \langle \psi^\perp | \rho | \psi^\perp \rangle$ .

## 2.4 Medição experimental do grau de polarização de uma luz CW se propagando por um trecho de fibra

Para estimar a equação do grau de polarização, é utilizado um experimento realizado no Laboratório de Tecnologia da Informação Quântica (LATIQ) no ano de 2005 [42]. A experiência foi feita com o objetivo de mostrar que a probabilidade do canal de polarização para fótons isolados é o mesmo que o grau de polarização de luz coerente. Para medir o grau de polarização de uma luz coerente, foi usado o experimento na figura 2.2.

Figura 2.2 – Experimento para a medição do grau de polarização da luz.



Fonte: Referência [45], página 12.

A fonte de luz usada é um diodo laser CQF915/108 que emite um estado coerente CW (onda contínua) operando em 1550,91 nm. O controlador de polarização  $CP_1$  define o estado

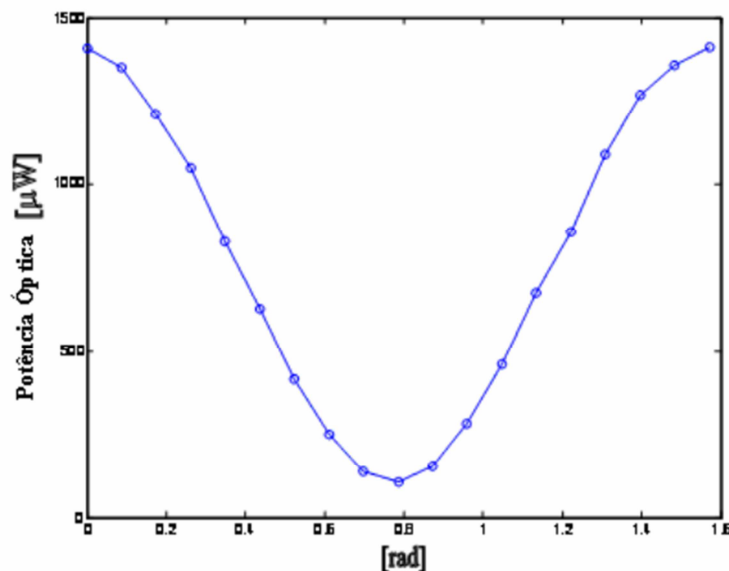
de polarização a ser usado. O escolhido é aquele que maximiza a potência óptica medida na saída inferior do PBS quando o enlace de fibra e o controlador de polarização CP<sub>2</sub> estão ausentes.

Em seguida, sem a fibra de teste entre os pontos A e B, os compensadores do CP<sub>2</sub> são ajustados de forma a permitir que a máxima potência óptica seja medida, pelo medidor PM (Power Meter). Neste momento o experimento está calibrado. A primeira medição consiste em, na ausência da fibra entre os pontos A e B, variar o rotacionador de CP<sub>2</sub> e, para cada valor deste, medir a potência óptica. O resultado da observação está ilustrado no gráfico 2.4. O grau de polarização para este experimento é dado por:

$$g_p = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} \quad (2.30)$$

Em (2.30),  $P_{max}$  e  $P_{min}$  são, respectivamente, os valores máximos e mínimos encontrado no gráfico 2.4.

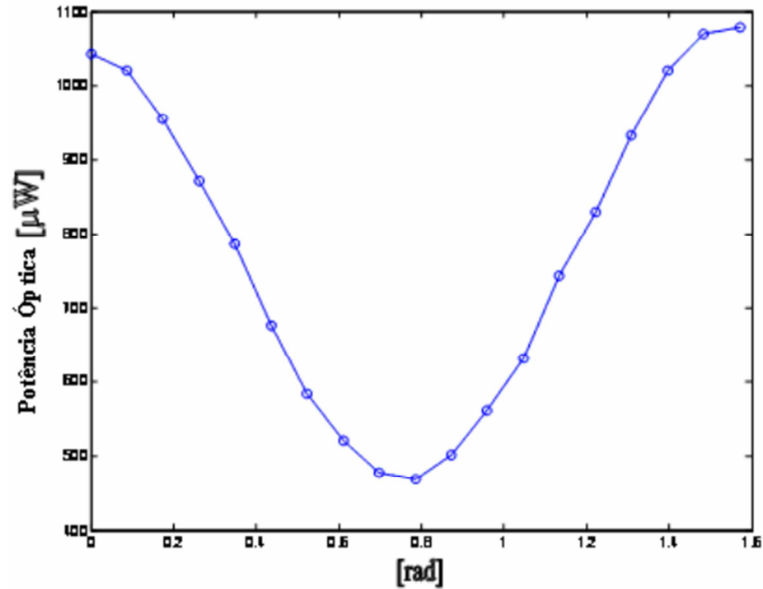
Gráfico 2.4 – Variação da potência óptica no experimento da figura 2.2 sem a fibra de teste.



Fonte: Referência [45], página 13.

O valor para o grau de polarização encontrado foi de  $g_p = 0,859$ . Agora, realiza-se o mesmo procedimento, mas com o acréscimo de três trechos de fibra totalizando 200m (100m+50m+50m). Este segmento de fibra está inserido entre os pontos A e B. O resultado está ilustrado na Figura 2.7.

Gráfico 2.5 – Variação da potência óptica no experimento do gráfico 2.4 com a fibra de teste (200m de fibra óptica bobinada).



Fonte: Referência [45], página 13.

Comparando-se os gráficos 2.4 e 2.5, pode-se observar claramente o efeito do decréscimo do grau de polarização na distinção entre os valores máximo e mínimo de potência óptica medidos. No experimento do gráfico 2.5, o grau de polarização obtido foi  $g_p = 0,394$ . Assumindo para a fibra óptica o modelo de canal despolarizador [9] expresso por:

$$(1 - p) \frac{I}{2} + p\rho_e. \quad (2.31)$$

Sendo  $\rho_e$  o estado na entrada da fibra e  $p$  a probabilidade do estado de entrada não ser alterado, teríamos, para a fibra testada,  $p = g_p = 0,394$ .

Embora os resultados tenham sido obtidos usando luz coerente brilhante (muitos fótons), eles podem ser considerados válidos para luz de fótons isolados, pois, como mostrado anteriormente, a polarização da luz de um fóton e da luz coerente são descritos pelo mesmo modelo matemático (matriz coerência igual à matriz densidade). Para o estado coerente a intensidade da luz está distribuída nos modos de polarização expressos na diagonal da matriz coerência. Por outro lado, sabendo que um quantum de luz é indivisível, para a luz de um fóton os elementos da diagonal da matriz coerência representam as probabilidades de

encontrarmos o fóton em um dos modos ortogonais. Por isso, os percentuais de energia dos modos de polarização observados no experimento clássico podem expressar probabilidades de encontrarmos o fóton em um dos modos ortogonais no modelo quântico. Após a comparação entre os experimentos com o tamanho normal e o trecho de fibra adicional, concluímos que podemos medir quanto o canal pode despolarizar a luz.

### 3. TÉCNICAS ÓPTICAS PARA CORREÇÃO DE ERRO QUÂNTICO UTILIZANDO POLARIZAÇÃO DE FÓTONS ISOLADOS

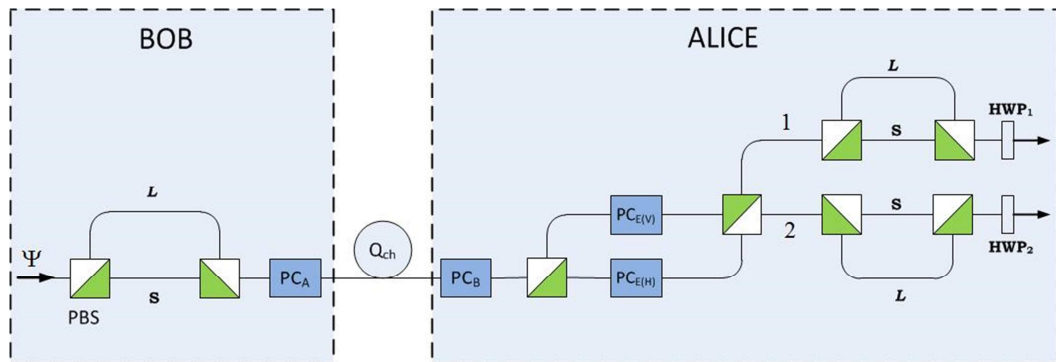
Em contraste com os modelos construídos com o uso de entrelaçamento, foram propostos em [43] esquemas para rejeição e correção de erro quântico sem a necessidade de codificação em estados de múltiplos qubits entrelaçados e usando apenas dispositivos de óptica linear. A ideia deste sistema de correção de erros quânticos é transformar o qubit de polarização da luz em um tipo time-bin [44], com separação temporal pequena o suficiente para que ambas as componentes do qubit se propaguem pela fibra percebendo o mesmo canal. Por fim, o sistema corretor de erro quântico com óptica linear proposto em [43] não faz uso de redundância para preservar a informação durante a propagação da luz em uma fibra.

Neste capítulo, inicialmente, é feita a revisão do sistema de correção de erro proposto em [43] e, em seguida são apresentadas as simplificações realizadas em [45].

#### 3.1. Sistema corretor de erro quântico para comunicação quântica utilizando polarização de fótons isolados

Para a correção de um erro quântico qualquer em um bit de polarização, foi proposto em [43] a arquitetura mostrada na figura 3.1:

Figura 3.1 – Esquema de correção de erro quântico proposto na referência [43].



Fonte: Referência [43], página 5.



Inicialmente, o estado quântico de polarização da luz entrando no sistema óptico é:

$$|\Psi\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle. \quad (3.1)$$

Ou seja, o qubit de entrada possui a forma mais geral possível, com  $|H\rangle$  e  $|V\rangle$  representando, respectivamente, as polarizações horizontal e vertical;  $a$  e  $b$  são números complexos que obedecem à condição de normalização  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Após a passagem pelo primeiro PBS, a parte horizontal viaja pelo caminho curto (S) enquanto a parte vertical viaja pelo caminho longo (L). Estes dois pulsos chegarão ao segundo PBS em momentos diferentes e serão guiados para a mesma saída. Neste ponto, “há” dois pulsos separados no tempo de  $\Delta t = (l_L - l_S)/V_g$ , sendo  $l_L$  o comprimento do braço longo,  $l_S$  o comprimento do braço curto e  $V_g$  a velocidade de grupo, assumida ser a mesma para ambas as polarizações. Assim, o estado quântico logo na saída do interferômetro de polarização (IP) é representado por:

$$|\Psi'\rangle = a|H\rangle_S + b|V\rangle_L. \quad (3.2)$$

A célula de Pockels (PC), situada na saída do IP, é acionada de forma a rotacionar de  $\pi/2$  somente a polarização do pulso atrasado, assim, o estado na saída do codificador (COD) situado no transmissor (Alice), formado por  $IP + PC_A$ , é:

$$|\Phi\rangle = a|H\rangle_S + b|H\rangle_L. \quad (3.3)$$

Devido à existência de variações aleatórias da birrefringência da fibra óptica, o estado na entrada da fibra evolui para um estado desconhecido na saída da fibra. Esta evolução é modelada por uma transformação unitária desconhecida  $U_f$ . A forma mais geral de  $U$  é dada por:

$$U_f = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)e^{-i\xi} & -\text{sen}(\varphi)e^{i\phi} \\ \text{sen}(\varphi)e^{-i\phi} & \cos(\varphi)e^{i\xi} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Portanto, após a propagação do estado (3.3) pela fibra óptica, o estado na saída desta é:

$$|\Phi_f\rangle = U_f|\Phi\rangle = aU_f|H\rangle_S + bU_f|H\rangle_L = \quad (3.5)$$

$$|\Phi_f\rangle = a \left[ \cos(\varphi)e^{-i\xi} |H\rangle_S + \text{sen}(\varphi)e^{-i\phi} |V\rangle_S \right] + b \left[ \cos(\varphi)e^{-i\xi} |H\rangle_L + \text{sen}(\varphi)e^{-i\phi} |V\rangle_L \right]. \quad (3.6)$$

$$|\Phi_f\rangle = a[\cos(\varphi)|H\rangle_S + \text{sen}(\varphi)e^{-i\lambda}|V\rangle_S] + b[\cos(\varphi)|H\rangle_L + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_L]. \quad (3.7)$$

$$\lambda = \xi - \phi. \quad (3.8)$$

A célula de Pockels  $PC_B$  na entrada do receptor (Bob) é acionada de forma a rotacionar de  $\pi/2$  somente sobre as componentes que percorreram o caminho S em Alice. Assim, após  $PC_B$  o estado é:

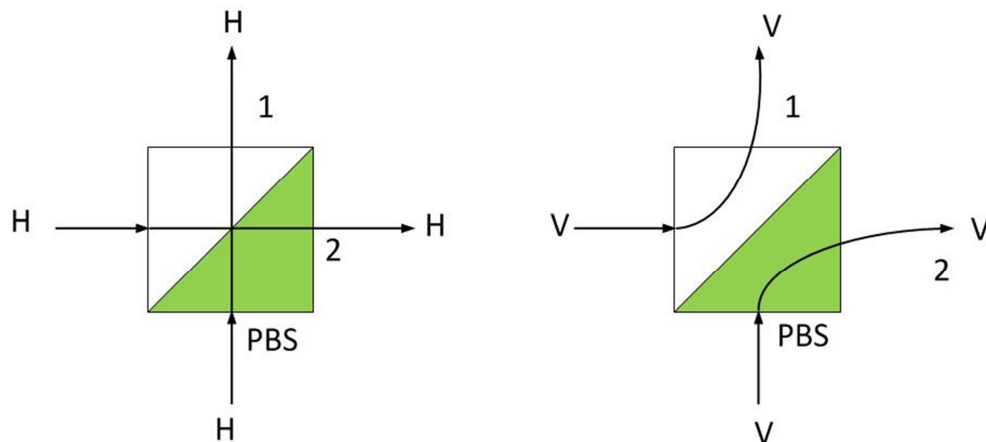
$$|\Phi'_f\rangle = a[\cos(\varphi)|V\rangle_S + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|H\rangle_S] + b[\cos(\varphi)|H\rangle_L + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_L]. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é a entrada do primeiro IP de Bob. Este possui dois braços de igual comprimento e em cada um deles há uma célula de Pockels,  $PC_{B(H)}$  (pois são as componentes horizontais de (3.9) que são a ela encaminhadas);  $PC_{B(V)}$  é ativada somente quando está presente a componente que percorreu o caminho L em Alice. Assim, o estado quântico na saída do primeiro IP de Bob é:

$$|\Phi''_f\rangle = a[\cos(\varphi)|V\rangle_S^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_S^2] + b[\cos(\varphi)|H\rangle_L^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|H\rangle_L^2]. \quad (3.10)$$

Em (3.10), os índices 1 e 2 significam as duas possíveis saídas do segundo PBS de Bob. Este PBS 2x2 (quatro portas) guia as polarizações horizontal e vertical como mostrado na figura 3.2.

Figura 3.2 – Guiamento dos estados horizontal e vertical de polarização através do PBS 2x2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os estados nas saídas 1 e 2 do segundo PBS de Bob passam cada um deles por um IP idêntico ao de Alice. A função deles é fazer o balanceamento do tempo de chegada das componentes. Portanto, as saídas dos IPs são:

$$|\Phi_f'''\rangle = a[\cos(\varphi)|V\rangle_{SL}^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_{SL}^2] + b[\cos(\varphi)|H\rangle_{LS}^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|H\rangle_{LS}^2]. \quad (3.11)$$

$$|\Phi_f'''\rangle = a[\cos(\varphi)|V\rangle_{SL}^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_{LS}^1] + b[\cos(\varphi)|V\rangle_{SL}^2 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|H\rangle_{LS}^2]. \quad (3.12)$$

Por fim, na saída de cada IP existe uma placa de meia onda,  $\text{HWP}_1$  e  $\text{HWP}_2$ , que rotaciona  $\pi/2$  à polarização de todas as componentes. Portanto, o estado final nas saídas da configuração óptica apresentada na Figura 3.1 é:

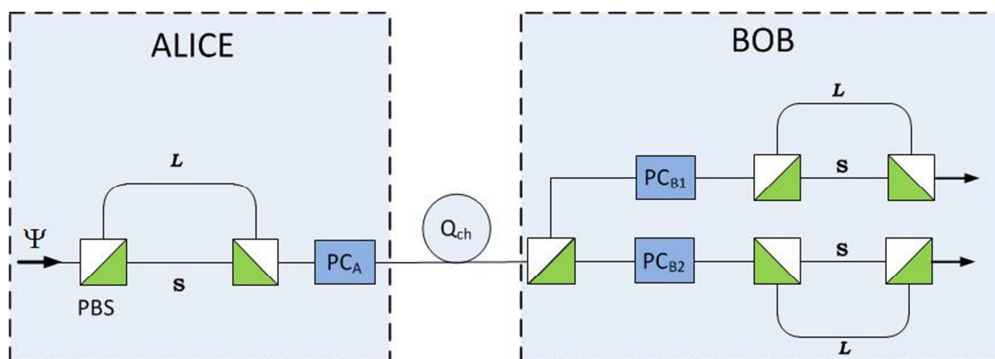
$$|\Psi_f\rangle = \cos(\varphi)(a|H\rangle + b|V\rangle)^1 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}(a|H\rangle + b|V\rangle)^2. \quad (3.13)$$

Em (3.13) os sub-índices  $SL$  e  $LS$  foram desconsiderados uma vez que significam o mesmo comprimento total. Da equação (3.13) observamos que o estado obtido na saída é o mesmo estado enviado por Alice na entrada. Entretanto, não é possível saber se o qubit está na saída 1 ou na saída 2. O qubit é obtido na saída 1 com probabilidade  $\cos^2(\varphi)$  e na saída 2 com probabilidade  $\text{sen}^2(\varphi)$ . Se o canal é ideal, então  $\varphi = 0$  e o qubit é sempre obtido na saída 1.

### 3.2. Sistema corretor de erro quântico simplificado

Com o objetivo de obter o mesmo resultado com um aparato óptico mais simples foi proposto em [45] o esquema óptico ilustrado na figura 3.3:

Figura 3.3 – Esquema simplificado do sistema de correção de erro usando óptica linear.



Fonte: Referência [45], página 20.

Como pode ser observada, comparando-se as figuras 3.1 e 3.3, a simplificação é feita apenas no decodificador de Bob. Neste, foram retirados a célula  $PC_{B1}$ , um PBS e duas placas de meia onda  $HWP_1$  e  $HWP_2$ . A descrição da operação da configuração mostrada na figura 3.3 começa assumindo que o estado que chega a Bob é aquele dado em (3.7). Logo, após o primeiro PBS de Bob, o estado é:

$$|\Phi''\rangle = a[\cos(\varphi)|H\rangle_S^2 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_S^1] + b[\cos(\varphi)|H\rangle_L^2 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}|V\rangle_L^1]. \quad (3.14)$$

$$|\Phi''\rangle = \cos(\varphi)(a|H\rangle_S^2 + b|H\rangle_L^2) + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}(a|V\rangle_S^1 + b|V\rangle_L^1). \quad (3.15)$$

Como a célula de Pockels  $PC_{B1}$  é acionada de forma a rotacionar de  $\pi/2$  o pulso no tempo adiantado ( $S$ ), a célula  $PC_{B2}$  é acionada de forma a rotacionar de  $\pi/2$  a polarização do pulso no tempo atrasado ( $L$ ). Depois da ação das células de Pockels, o estado total é:

$$|\Phi'''\rangle = \cos(\varphi)(a|H\rangle_S^2 + b|V\rangle_L^2) + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}(a|H\rangle_S^1 + b|V\rangle_L^1). \quad (3.16)$$

Cada estado de (3.16) passa agora por um  $IP$  com o mesmo desbalanceamento no comprimento dos braços que o  $IP$  de Alice. Entretanto, diferentemente do que ocorre em Alice, a componente vertical viaja pelo braço curto enquanto que a componente horizontal viaja pelo braço longo. Desta forma, o estado total final após os  $IPs$  de Bob são:

$$|\Psi_f\rangle = \cos(\varphi)(a|H\rangle_{SL}^2 + b|V\rangle_{LS}^2) + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}(a|H\rangle_{SL}^1 + b|V\rangle_{LS}^1). \quad (3.17)$$

$$|\Psi_f\rangle = \cos(\varphi)(a|H\rangle + b|V\rangle)^2 + \text{sen}(\varphi)e^{i\lambda}(a|H\rangle + b|V\rangle)^1. \quad (3.18)$$

Como (3.18) tem o mesmo significado idêntico à (3.13), conclui-se que a variação do esquema da referência [43] apresentada na figura 3.3 é vantajosa. Além de apresentar redução no número de componentes, o fato de haver uma célula de Pockels a menos, facilita a sincronização entre o transmissor e o receptor.

## 4. MODELO FÍSICO MATEMÁTICO PARA UM SUBCANAL QUÂNTICO RUIDOSO

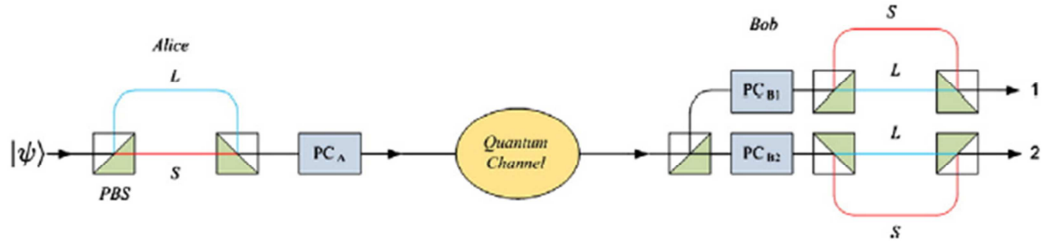
O sistema de correção de erro quântico analisado neste capítulo segue a abordagem apresentada em [46]. A ideia básica é que as componentes de polarização possam ser separadas no tempo por um interferômetro desbalanceado que possui um caminho longo e um caminho curto. Os estados quânticos  $|S\rangle$  e  $|L\rangle$  representam os pulsos que viajam através do caminho curto e do caminho longo, respectivamente, ou semelhante aos pulsos que chegam no intervalo de tempo inicial e final. Assume-se que qualquer estado do espaço de Hilbert bidimensional pode ser construído pela superposição dos estados básicos  $|S\rangle$  e  $|L\rangle$ , ou seja, qualquer estado  $\alpha|S\rangle + \beta|L\rangle$  pode ser preparado, onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos tal que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Neste capítulo, analisa-se o esquema de correção quântica de erro. O primeiro esquema sem entrelaçamento foi proposto em [43] e outros esquemas foram propostos posteriormente [47-48]. Esquemas com entrelaçamento foram propostos, sem verificações experimentais em [49] e com experimentos em [50]. A ideia essencial para estes esquemas é separar os componentes da decodificação da polarização do qubit em intervalos de tempo [46]. Assim, uma variação lenta da transformação unitária dos canais no domínio do tempo, não muda a informação quando os estados quânticos viajam através dele. Em [37], foi considerada uma baixíssima probabilidade de ocorrerem variações rápidas em fibras ópticas. Neste capítulo, dá-se uma representação física a essa probabilidade pelo grau de despolarização da luz, quando este é afetado não somente por imperfeições do meio de propagação, mas pela radiação contida no próprio meio. Neste capítulo, constata-se que a eficiência decresce exponencialmente com o comprimento do canal e que o nível de emissão de luz no próprio canal contribui para um decaimento da eficiência.

### 4.1 Subsistema quântico sem ruído

Começa-se discutindo o esquema linear óptico de fóton simples para correção de erro quântico proposto em [47]. O esquema é representado na figura 4.1.

Figura 4.1 – Esquema óptico para correção quântica de erro para um fóton: PBS (polarization beam splitter) e PC (Célula de Pockel).



Fonte: Referência [37], página 15658.

No transmissor, Alice tem um fóton simples com polarização desconhecida de estado  $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ . Após o fóton passar pelo interferômetro desbalanceado de polarização, o estado torna-se  $\alpha|H,S\rangle + \beta|V,L\rangle$ , uma vez que a componente horizontal toma o caminho curto ( $S$ ), e a componente vertical segue o caminho longo,  $L$ . Alice ativa sua célula de Pockel somente quando a componente do caminho  $L$  está presente, efetuando a transformação  $|V,L\rangle \rightarrow |H,L\rangle$ . Por isso, o estado que Alice envia para Bob é  $\alpha|H,S\rangle + \beta|H,L\rangle$ .

Em teoria, os protocolos de comunicação quântica funcionam bem com a luz polarizada. Entretanto, quando a luz polarizada é propagada no meio, a luz sofre várias transformações aleatórias. Este efeito pode ser expresso pela transformação unitária  $U(\phi, \chi)$  de tal modo que  $U(\phi, \chi)|H\rangle = \cos\phi|H\rangle + e^{i\chi}\sin\phi|V\rangle$  e  $U(\phi, \chi)|V\rangle = -\sin\phi|H\rangle + e^{i\chi}\cos\phi|V\rangle$  que descreve a transformação geral do qubit (excluindo a fase global que não tem significado físico), onde  $\phi$  representa o ângulo de rotação e  $\chi$  é o deslocamento da fase entre as duas componentes de polarização. Logo, podemos definir o canal ruidoso, que referenciaremos apenas por canal, como o produto de duas matrizes, em que cada uma delas tem uma variável aleatória,  $\chi$  e  $\phi$ :

$$U(\phi, \chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Da expressão geral (4.1) de  $U$ , nós temos que:

$$U(\phi, \chi)\alpha|H,S\rangle + U(\phi, \chi)\beta|H,L\rangle = \alpha(\cos\phi|H,S\rangle + e^{i\chi}\sin\phi|V,S\rangle) + \beta(\cos\phi|H,L\rangle + e^{i\chi}\sin\phi|V,L\rangle). \quad (4.2)$$

Como pode ser visto na figura 4.1, a célula de Pockel  $PC_{B1}$  é ativada somente quando o componente  $S$  está presente; de modo análogo  $PC_{B2}$  é ativada somente quando o componente  $L$  está presente. Para cada modo, 1 (parte superior) e 2 (parte inferior), existe um interferômetro de polarização desbalanceado. Nestes interferômetros, a componente horizontal propaga-se através do caminho longo enquanto a componente vertical propaga-se através do caminho curto. Quando o estado corrompido, descrito na equação (4,2), chega até Bob, ele terá sofrido duas transformações. Inicialmente, após a passagem através do primeiro PBS e célula de Pockel, transforma-se em:

$$\alpha(\cos\phi|H,S\rangle^2 + e^{i\chi} \sin\phi|H,S\rangle^1) + \beta(\cos\phi|V,L\rangle^2 + e^{i\chi} \sin\phi|V,L\rangle^1). \quad (4.3)$$

E por último, após a passagem através do interferômetro de polarização desbalanceado, o estado final torna-se:

$$\cos\phi(\alpha|H\rangle^1 + \beta|V\rangle^1) + e^{i\chi} \sin\phi(\alpha|H\rangle^2 + \beta|V\rangle^2). \quad (4.4)$$

Nas equações (4.3) e (4.4), os sobrescritos 1 e 2 denotam os caminhos dos modos de saída 1 e 2, respectivamente. O qubit surge aleatoriamente em qualquer um dos modos de saída (1 e 2) de acordo com uma probabilidade que depende do parâmetro  $\phi$ . Assim, Bob obtêm um estado não corrompido  $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$  no modo 1, com a probabilidade  $\cos^2\phi$ , ou no modo 2, com probabilidade  $\sin^2\phi$ .

## 4.2 Correção quando existe uma variação rápida entre os pulsos

Nesta seção, considera-se um caso muito mais realista. Analisa-se o desempenho do esquema de correção de erro da figura 4.1 quando o canal está bastante ruidoso, isto é, o canal sofre variações locais rápidas e mudanças durante o intervalo de tempo entre um pulso longo e curto. Neste cenário, o pulso curto e o pulso longo tiveram diferentes matrizes unitárias para representar a evolução do canal, ou seja, a matriz  $U_S(\phi_S, \chi_S)$  é aplicada ao estado  $|H, S\rangle$  e a matriz  $U_L(\phi_L, \chi_L)$  é aplicada ao estado  $|H, L\rangle$ . Logo, a evolução do canal pode ser dada por:

$$\alpha(\cos\phi_L | H\rangle + e^{i\chi_L} \sin\phi_L | V\rangle) + \beta(\cos\phi_S | H\rangle + e^{i\chi_S} \sin\phi_S | V\rangle). \quad (4.5)$$

A eficiência do subsistema sem ruído é medido pela fidelidade entre o estado de entrada no canal e o estado de saída no decodificador. Por definição, o valor de fidelidade é:

$$F^2 = |\alpha|^4 + |\beta|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2 f. \quad (4.6)$$

$$f = \cos(\phi_S)\cos(\phi_L) + \sin(\phi_S)\sin(\phi_L)\cos(\chi_L - \chi_S). \quad (4.7)$$

Agora, toma-se que  $\phi_S = \phi$ ,  $\phi_L = \phi + \Phi$ ,  $\chi_S = \chi$  e  $\chi_L = \chi + X$ , deve-se reescrever  $f$  a seguir:

$$\begin{aligned} f &= \cos(\phi)\cos(\phi + \Phi) + \sin(\phi)\sin(\phi + \Phi)\cos(X) \\ &= \frac{1}{2}\{\cos\Phi(1 + \cos X) + \cos(2\phi + \Phi)(1 - \cos X)\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ressalta-se que  $\Phi = \phi_L - \phi_S$  e  $X = \chi_L - \chi_S$  são as diferenças entre os ângulos de rotação e de deslocamento de fase para pulsos longos e curtos, respectivamente. Observa-se que o parâmetro  $f$  depende das variações de canal. Além disso, se  $X = \Phi = 0$  não existem erros e  $F^2 = 1$ . Ademais, nota-se que o valor esperado da expressão  $F^2$  depende do valor esperado de  $f$ , pois  $E(F^2) = |\alpha|^4 + |\beta|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2 E(f)$ .

Considera-se que a variável aleatória  $\phi$  é uniformemente distribuída, pois, sem nenhuma informação adicional, é natural considerar que  $\phi$  pode assumir qualquer valor possível com a mesma probabilidade. Como a função analisada é  $\cos(2\phi + \Phi)$ , assume-se que  $\phi$  é a variável aleatória variando uniformemente ao longo de  $[\frac{-\pi - \Phi}{2}, \frac{\pi - \Phi}{2}]$ . Neste caso, pode-se escrever o valor esperado de  $f$  para  $\phi$  pela expressão:

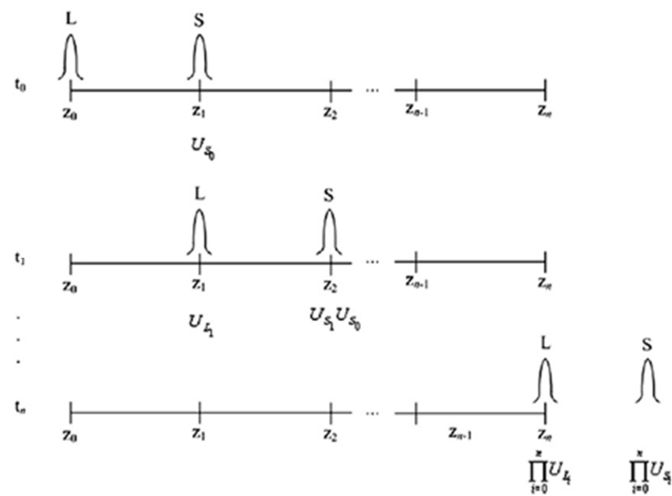
$$\begin{aligned} E_\phi(f) &= \frac{1}{2}\{\cos\Phi(1 + \cos X) + (1 - \cos X) \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi - \Phi}{2}}^{\frac{\pi - \Phi}{2}} \cos(2\phi + \Phi) d\phi}_0\} \\ &= \frac{1}{2}\{\cos\Phi(1 + \cos X)\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A fim de fazer uma descrição da evolução das variáveis  $\Phi$  e  $X$  nós consideramos passos discretos, portanto, obtemos um passeio aleatório bidimensional, uma dimensão para a variável  $\Phi$  e uma dimensão para variável  $X$ . O passeio aleatório discreto descreve como as



variáveis  $\Phi$  e  $X$  mudam enquanto o pulso curto e o longo atravessam o canal. O tempo discreto é obtido pela divisão do comprimento  $z$  do canal em  $n$  partes iguais de maneira que  $n = z / \Delta z$  ( $\Delta z$  é constante, sendo a diferença entre as posições dos pulsos curtos e longos). Portanto, pode-se considerar que o tempo discreto muda de  $t_0, t_1, \dots, t_n$  onde  $t_0$  é o tempo inicial e  $t_n$  é o tempo em que o pulso longo chega no receptor. Na figura 4.2, é demonstrado o tempo de evolução desse sistema.

Figura 4.32 – A evolução temporal do pulso longo e curto dentro do canal.



Fonte: Referência [37], página 15659.

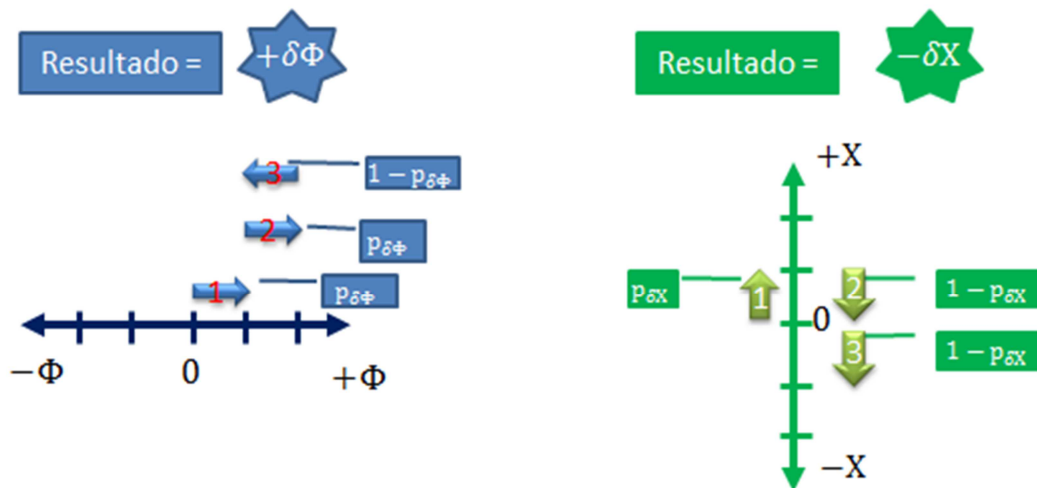
Como representado na figura 4.2, para o instante  $t_0$  o pulso posterior  $|H, L\rangle$  está prestes a entrar no canal, enquanto o pulso  $U_{S_0} |H, S\rangle$  já está no ponto  $z_1$ . Após o instante  $t_1$ , o pulso posterior está no ponto  $z_1$  e o pulso anterior está no ponto  $z_2$ , além disso, o pulso posterior desenvolve em  $U_{L_1} |H, L\rangle$  enquanto o pulso anterior desenvolve em  $U_{S_1} U_{S_0} |H, S\rangle$ . Para cada enésima-seção do canal, o pulso anterior e o pulso posterior desenvolvem-se de acordo com a evolução unitária  $U_{S_i}$  e  $U_{L_i}$  respectivamente. Portanto, pode-se escrever a transformação global do canal por:

$$\alpha \prod_{i=0}^n U_{L_i} |H, L\rangle + \beta \prod_{i=0}^n U_{S_i} |H, S\rangle. \quad (4.10)$$

Nota-se que os valores de  $\Phi$  e  $X$  evoluem a partir de  $\Phi_0$  e  $X_0$  p no tempo  $t_0$  para  $\Phi_n$  e  $X_n$  no tempo  $t_n$ . A evolução será descrita conforme um passeio aleatório imparcial, ou seja, as variáveis aleatórias são independentes. Para cada fase, pequenas variações  $\delta\Phi > 0$  e  $\delta X > 0$  são consideradas. Claramente,  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  dependem do intervalo  $\Delta z$ . Usando o modelo proposto de passeio aleatório de  $\Phi$  e  $X$  é possível calcular o valor esperado do parâmetro  $f$ .

Estas variações resultam das transições do canal  $U(\phi(z), \chi(z))$  para  $U(\phi(z + \Delta z), \chi(z + \Delta z))$ . Estes passos ocorrem com probabilidade  $p_{\delta\Phi}$  para  $+\delta\Phi$  e probabilidade  $(1 - p_{\delta\Phi})$  para  $-\delta\Phi$ . O mesmo acontece para  $\delta X$ , que é a probabilidade  $p_{\delta X}$  para  $+\delta X$  e a probabilidade  $(1 - p_{\delta X})$  para  $-\delta X$ . Como exemplo, analisa-se uma situação hipotética para a variação ocorrida em três subcanais. A variação de cada parâmetro pode ocorrer com iguais probabilidades. Demonstra-se a variação dos parâmetros através da figura 4.3.

Figura 4.33 – Comportamento hipotético durante a passagem do sinal em 3 subcanais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como assumimos um passeio aleatório imparcial, nós temos que  $p_{\delta\Phi} = p_{\delta X} = 1/2$  e então:

$$\begin{aligned}
E(E_{\Phi}(f)) &= \frac{1}{2} M_n(\delta\Phi) \{1 + M_n(\delta X)\} \\
&= \frac{1}{2} \cos^n(\delta\Phi) \{1 + \cos^n(\delta X)\}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Onde  $M_n(\cdot)$  é o valor esperado para o passeio aleatória unidimensional após  $n$  estágios (Anexo A). Desde que  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  dependam do intervalo  $\Delta z$ , e o valor esperado para  $f$  também dependa de  $\Delta z$  (a diferença entre o caminho longo e curto do interferômetro) e o comprimento do canal  $z$  (desde que  $n = z/\Delta z$ ). Faz-se a aproximação usual para  $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$ , então, quando  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  são próximos à zero, pode-se escrever:

$$E(E_{\Phi}(f)) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(\delta\Phi(\Delta z))^2}{2\Delta z} z} \left\{ 1 + e^{-\frac{(\delta X(\Delta z))^2}{2\Delta z} z} \right\}. \tag{4.12}$$

Observa-se que as equações (4.11) e (4.12) seriam um bom resultado se as variações  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  fossem conhecidas. Logo, a única conclusão possível a partir daquelas duas equações é a diminuição exponencial de  $E(E_{\Phi}(f))$  com  $z$ .

Dado que as variações do canal  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  são desconhecidas, então não existirá conhecimento a respeito do desempenho do sistema estudado? Para resolver este problema, precisa-se elaborar um modelo estatístico baseado em parâmetros do canal cuja dinâmica seja conhecida. A questão natural surge: Quais parâmetros do canal podem ser usados para expressar a variação entre os componentes  $|H, S\rangle$  e  $|H, L\rangle$ ? A melhor resposta são os parâmetros de Stokes. Mas ainda pode-se escolher um parâmetro que englobe os parâmetros de Stokes. Então, para a próxima análise, foi escolhido o grau de despolarização da luz. Dado que este valor tenha sido usado em diversos experimentos para descrever a dinâmica da polarização num canal e que possa ser representado pelos parâmetros de Stokes [41,42].

O grau de polarização, como visto no capítulo 2, é a quantidade usada para descrever a porção da onda eletromagnética que é polarizada. Nota-se que o grau de polarização  $1 - \xi(z)$  está em função do comprimento do canal  $z$ . A onda perfeitamente polarizada tem  $1 - \xi(z) = 1$ , enquanto que a totalmente despolarizada possui  $\xi(z) = 1$ . A onda que é parcialmente polarizada e que, portanto, pode ser representada pela superposição das componentes polarizados e despolarizados, tem o grau de polarização na faixa entre 0 e 1. Para a polarização simples do fóton a mesma ideia é aplicada para descrever se o estado

quântico é totalmente misturado, denotado por  $I/2$ , ou totalmente puro, representado por  $\rho$ . O estado quântico puro tem o grau de pureza igual a 1, enquanto que o estado totalmente misturado tem o grau de pureza igual a 0. Logo, o estado quântico também pode ser representado pela superposição do estado quântico puro e o estado totalmente misturado:

$$\xi(z) \frac{I}{2} + (1 - \xi(z)) \rho. \quad (4.13)$$

Existe a correlação entre o grau de polarização da luz  $\xi(z)$  e as mudanças dos parâmetros que representam o canal  $\phi(z)$  e  $\chi(z)$ . As variações  $\Phi(\Delta z)$  e  $X(\Delta z)$  são desconhecidas, mas  $\xi(\Delta z) \in [0,1]$  pode ser calculado [41]. Sabe-se que existe a correlação entre o grau de polarização  $\xi(\Delta z)$  e a variação dos parâmetros desconhecidos do canal, em detalhes, existem valores desconhecidos  $\Delta\Phi > 0$  e  $\Delta X > 0$  de tal modo que  $\xi(\Delta z)$  representa a probabilidade de  $\Phi(\Delta z) \geq \Delta\Phi$  e  $X(\Delta z) \geq \Delta X$ . Em outras palavras, existem alguns valores desconhecidos  $\Delta\Phi > 0$  e  $\Delta X > 0$  para o qual  $\xi(\Delta z)$  é a probabilidade que, no passo que  $\Delta z$ , a variação de  $\Phi$  ultrapassa  $\Delta\Phi$  e a variação de  $X$  ultrapassa  $\Delta X$ . Por exemplo, considera-se a propagação de um fóton na distância  $\Delta z$ , pode-se designar que  $\xi(\Delta z)$  representa a probabilidade associada ao evento para cada  $\Phi(\Delta z) \geq 0,5\pi = \Delta\Phi$  e  $X(\Delta z) \geq 0,75\pi = \Delta X$ . Se  $\Delta z$  representa uma curta distância de propagação, então o evento é raro, por que é pouco provável que o pulso sofra uma alta variação nessa pequena distância, mas não impossível. Mas, o grau de polarização pode expressar esta realidade, pois  $\xi(\Delta z) \approx 0$ , para pequenas distâncias de propagação, mas não é nulo.

Em [42], foi apresentada uma análise baseada no passeio aleatório bidimensional, cujo resultado, considerando que  $\xi(\Delta z) \approx 0$  como um evento raro, foi uma distribuição poissoniana para as variações que alteram o ângulo de polarização entre o pulso longo e o pulso curto. Também foram apresentados resultados práticos que podem ser usados para determinar  $\xi(\Delta z)$ .

Nota-se que os valores desconhecidos  $\Delta\Phi$  e  $\Delta X$  são maiores do que os valores  $\delta\Phi$  e  $\delta X$  usados nas equações (4.11) e (4.12) (desde que se considere variações muito pequenas). Portanto, os valores  $\Delta\Phi$  e  $\Delta X$  serão adicionados aos passos para representar a variação dos canais somente quando o evento  $\Phi(\Delta z) \geq \Delta\Phi$  e  $X(\Delta z) \geq \Delta X$  ocorre. Mais precisamente,

temos que  $[z_{i-1}, z_i]$  é o  $i$ -ésimo intervalo do canal, onde  $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ . Se  $\Phi(\Delta z) \geq \Delta\Phi$  e  $X(\Delta z) \geq \Delta X$ , assume-se que  $U(\phi_{i-1}, \chi_{i-1}) \neq U(\phi_i, \chi_i)$ , para cada  $\phi_i = \phi_{i-1} + \Delta\Phi$  e  $\chi_i = \chi_{i-1} + \Delta X$ . Caso contrário, considera-se que  $U(\phi_{i-1}, \chi_{i-1}) = U(\phi_i, \chi_i)$ .

Lembra-se que é dividido o canal de comprimento  $z$  em  $n$  partes iguais de tal forma que  $n = z/\Delta z$ . Como apresentado na figura 4.2, para cada  $i$ -ésima seção do canal, o pulso anterior e o pulso posterior modificam-se de acordo com a evolução unitária  $U_{S_i}$  e  $U_{L_i}$ , respectivamente. E então, a transformação global do canal é:

$$\alpha \prod_{i=0}^n U_{L_i} |H, L\rangle + \beta \prod_{i=0}^n U_{S_i} |H, S\rangle. \quad (4.14)$$

Em cada seção do canal (com comprimento  $\Delta z$ ) a probabilidade de  $U_{L_i} \neq U_{S_i}$  é  $\xi(\Delta z)$ . Embora,  $U_{L_i} \neq U_{S_i}$  seja um evento raro, ou seja,  $\xi(\Delta z) \approx 0$ , o número de tentativas  $n$  é muito grande, e então, a hipótese de que variações ocorram em alguma parte do canal deve ser testada. O que determina o número de tentativas é o comprimento do canal (e também  $\Delta z$ ).

Assume-se que as variações em  $\Phi$  e  $X$  são eventos raros (eles ocorrem com probabilidade  $\xi(\Delta z)$ ) e que, quando eles ocorrem  $\Phi$  e  $X$  são modificados por  $\pm \Delta\Phi$  e  $\pm \Delta X$ , respectivamente. Portanto, implementa-se um passeio aleatório bidimensional que inicia no ponto 0 e em cada subcanal pode ter uma variação de  $\pm \Delta\Phi$  ( $\pm \Delta X$ ). Cada passo  $+\Delta\Phi$  acontece com probabilidade  $p_{\Delta\Phi}$  e com probabilidade  $(1 - p_{\Delta\Phi})$  para  $-\Delta\Phi$  (o similar acontece, para  $\Delta X$ , que é a probabilidade  $p_{\Delta X}$  para  $+\Delta X$  e probabilidade  $(1 - p_{\Delta X})$  para  $-\Delta X$ ). Portanto, a descrição da variação aleatória no canal pode ser expressa por  $\Phi = t\Delta\Phi$  e  $X = s\Delta X$ . Além disso, tem-se que:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \xi(\Delta z)^k (1 - \xi(\Delta z))^{(n-k)}. \quad (4.15)$$

$$P_k(p_{\Delta X}, s) = \frac{k!}{\left(\frac{k+s}{2}\right)! \left(\frac{k-s}{2}\right)!} p_{\Delta X}^s (1 - p_{\Delta X})^{(k-s)}. \quad (4.16)$$

$$P_k(p_{\Delta\Phi}, t) = \frac{k!}{\left(\frac{k+t}{2}\right)! \left(\frac{k-t}{2}\right)!} p_{\Delta\Phi}^t (1-p_{\Delta\Phi})^{(k-t)}. \quad (4.17)$$

Onde a equação (4.15) é a probabilidade de ocorrer  $k$  variações em  $n$  tentativas, a equação (4.16) representa a probabilidade de  $X = s\Delta X$  quando  $k$  variações ( $s \leq k$ ) ocorrem e a equação (4.17) representa a probabilidade de  $\Phi = t\Delta\Phi$  quando  $k$  variações ( $t \leq k$ ) ocorrem. Portanto, após  $n$  tentativas a probabilidade de  $X = s\Delta X$  e  $\Phi = t\Delta\Phi$  é:

$$P_n(s, t) = \sum_{k=1}^n P_n(k) P_k(p_{\Delta X}, s) P_k(p_{\Delta\Phi}, t). \quad (4.18)$$

Onde  $s, t \in S = \{-k, -k+2, \dots, k-2, k\}$  de tal modo que  $\sum_{s, t \in S} P_n(s, t) = 1$ . O que se pode dizer a respeito dos valores esperados das posições  $\Phi$  e  $X$  do percurso após  $k$  etapas? Não é difícil ver que  $E(\Phi) = E(X) = 0$  quando  $p_{\Delta\Phi} = p_{\Delta X} = 1/2$ .

Recorda-se que se tem  $\xi(\Delta z) \approx 0$ , uma vez que num comprimento curto de propagação, espera-se que o pulso tenha uma pequena despolarização. Note que, se  $\Phi$  e  $X$  são modificados por  $\pm \Delta\Phi$  e  $\pm \Delta X$  (que ocorrem com probabilidade  $\xi(\Delta z)$ ), na  $i$ -ésima seção do canal, então  $U_{L_i}$  é diferente de  $U_{S_i}$ . Logo, o limite da probabilidade para  $n \rightarrow \infty$ , que tem  $k$  para cada variação é dada pelo limite da distribuição binomial:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\xi, k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \xi(\Delta z)^k (1 - \xi(\Delta z))^{(n-k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left( \frac{\xi(\Delta z)z}{n\Delta z} \right)^k \left( 1 - \frac{\xi(\Delta z)z}{n\Delta z} \right)^{(n-k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\underbrace{n^k (n-k)!}_1} \frac{\left( \frac{\xi(\Delta z)}{\Delta z} z \right)^k}{k!} \underbrace{\left( 1 - \frac{\xi(\Delta z)z}{n\Delta z} \right)^n}_{e^{-\frac{\xi(\Delta z)z}{\Delta z}}} \frac{1}{(1 - \xi(\Delta z))^{-k}}. \quad (4.19) \\ &= \frac{\left( \frac{\xi(\Delta z)}{\Delta z} z \right)^k}{k!} e^{-\frac{\xi(\Delta z)z}{\Delta z}} \end{aligned}$$

O resultado, como se espera, é uma distribuição Poissiana, que é a distribuição da probabilidade discreta que expressa a probabilidade de  $k$  eventos (variação da birrefringência local entre o pulso anterior e posterior) em um comprimento fixo do canal, desde que estes eventos ocorram com uma taxa média de  $z\xi(\Delta z)/\Delta z$ , e independentemente do tempo desde que o último evento ocorreu. Em outras palavras,  $k$  é o número de ocorrências do evento e  $z\xi(\Delta z)/\Delta z$  é um número real positivo, igual ao esperado número de variações do canal entre o pulso posterior e anterior que ocorreu durante determinado comprimento do canal  $z$ . Este limite descreve a regra que rege os eventos raros, desde que cada evento individual de Bernoulli raramente seja disparado. O nome pode ser enganoso, pois o número de eventos sucessivos no processo Poissiano não é raro se o comprimento do canal é muito longo. Se a probabilidade é pequena, por outro lado, o parâmetro  $z\xi(\Delta z)/\Delta z$  não é pequeno. Embora a variação do canal entre um pulso anterior e posterior seja um evento muito raro, o número de tentativas cresce de forma significativa com o comprimento do canal. Portanto, o valor esperado de  $f$  é calculado por:

$$E(f) = \frac{e^{-\frac{\xi(\Delta z)}{\Delta z}z}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\xi(\Delta z)}{\Delta z}z\right)^k}{k!} \sum_{s,t=-k,-k+2,\dots}^k E_{\phi}(f) P_k(p_{\Delta X}, s) P_k(p_{\Delta \Phi}, t). \quad (4.20)$$

Quando o canal cresce o número de tentativas também cresce. Considera-se que o parâmetro  $z\xi(\Delta z)/\Delta z$  seja bastante grande, de tal forma que o número de tentativas seja aproximadamente infinito. Além disso, e para simplificar a análise, entende-se que para cada estágio seja deslocado para esquerda ou direita com probabilidade 1/2 e consideramos o passeio aleatório imparcial.

Usa-se a análise apresentada em (Anexo A), logo, tem-se o valor esperado de  $f$  :

$$E(f) = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{(1-\cos(\Delta\Phi))\xi(\Delta z)}{\Delta z}z} + e^{-\frac{(1-\cos(\Delta\Phi)\cos(\Delta X))\xi(\Delta z)}{\Delta z}z} \right). \quad (4.21)$$

Quando o pulso anterior e posterior não têm diferentes variações locais entre eles em todas as seções do canal ( $\Delta\Phi = \Delta X = 0$ ), o valor esperado de  $f$  é sempre igual a 1 para qualquer comprimento de canal, entretanto, quando estas variações existem, inclusive em pequenas quantidades, a expectativa para o valor de  $f$  decrescer exponencialmente com o

comprimento do canal  $z$ . Por isso, que o valor esperado para a fidelidade (4.6) tem o valor mínimo de  $|\alpha|^4 + |\beta|^4$  para um canal suficientemente longo.

Os valores  $\Delta\Phi$  e  $\Delta X$  são considerados desconhecidos. Então, escolhem-se os valores  $\Delta\Phi = \pi$  e  $\Delta X = 0$ , porque eles dão o pior caso, ou seja, o mínimo para  $E(f)$ . Por tanto, tem-se o seguinte limite:

$$e^{-\frac{2\xi(\Delta z)}{\Delta z}z} \leq E(f) \leq 1. \quad (4.22)$$

Agora, pela escolha da pior situação, a equação que estima fidelidade entre o estado quântico enviado por Alice e o estado quântico corrigido por Bob é:

$$F_e^2 = |\alpha|^4 + |\beta|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-\frac{2\xi(\Delta z)}{\Delta z}z}. \quad (4.23)$$

Todos os parâmetros em (4.23), o comprimento do canal  $z$ , o comprimento do subcanal  $\Delta z \neq 0$ , o grau de despolarização  $\xi(\Delta z)$  e o estado quântico enviado por Alice são conhecidos no projeto. Agora, se tem a expressão estimada para o desempenho da correção quântica de erro baseado na configuração de um subsistema sem ruído assumindo mais condições realistas para o canal.

O grau de polarização proposto em [51] (Anexo B) tem aspectos físicos que são relevantes na transmissão de um fóton em um canal quântico (fibra óptica ou ar livre). Essa medida do grau de polarização será útil para estimar a probabilidade de o canal mudar entre os instantes da passagem entre o pulso longo e o pulso curto pelo mesmo ponto em cada subcanal. A expressão para o grau de polarização é:

$$1 - \xi(\Delta z) = \frac{1}{3(I_0/I_e)e^{2\vartheta\Delta z} + 1} \Leftrightarrow \xi(\Delta z) = \frac{3(I_0/I_e)e^{2\vartheta\Delta z}}{3(I_0/I_e)e^{2\vartheta\Delta z} + 1}. \quad (4.24)$$

Em que  $I_0$  é a intensidade do pulso e  $I_e$  é a intensidade da radiação de corpo negro. Como se trata de um fóton viajando em um material que está produzindo ruído devido à temperatura, é razoável que este parâmetro esteja presente no grau de polarização. Considerado que a intensidade do fóton não diminui, pois para o fóton consideramos apenas a



sua existência no canal ou não, então temos que a intensidade do pulso é sempre um valor fixo  $I_0$ . A constante  $\vartheta$  representa a parte complexa da componente do vetor de propagação na direção  $z$ . Assim, a eficiência do sistema de correção de erro pode ser expressa por:

$$F_e^2 = |\alpha|^4 + |\beta|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-\frac{6(I_0/I_e)e^{2\vartheta\Delta z}}{3(I_0/I_e)e^{2\vartheta\Delta z}+1}z} \quad (4.25)$$

A equação acima é uma estimativa da eficiência do sistema de correção de erro baseados em subcanais.

### 4.3 Solução numérica para encontrar um parâmetro de decaimento do grau de polarização a partir de uma luz CW se propagando por um trecho de fibra

Usa-se para estimar a equação do grau de polarização um experimento realizado no Laboratório de Tecnologia da Informação Quântica LATIQ no ano de 2005. Os resultados desse experimento foram publicados em [42] com o objetivo de mostrar que a probabilidade de erro do bit do canal de polarização para fótons isolados é o mesmo grau de polarização de um feixe de luz coerente. Para medir o grau de polarização de uma luz coerente, foi usado o experimento na figura 2.2.

Como descrito anteriormente na seção 2.5 pode-se encontrar dados do desempenho do CODEC a partir dos resultados obtidos no experimento. O resultado é observado no gráfico 2.4, cujo grau de polarização é dado por (2.30) e teve como resultado  $g_p = 0,859$ . No mesmo experimento, o grau de polarização encontrado quando acrescentado o trecho de fibra óptica de 200m inseridos entre o ponto A e B foi de  $g_p = 0,394$  e seu comportamento pode ser observado no gráfico 2.5.

Foi constatada a diferença entre os gráficos 2.4 e 2.5 anteriormente. Constatado o efeito do decréscimo do grau de polarização na distinção entre os valores máximo e mínimo de potência óptica medida. E como foi visto,  $p = g_p = 0,354$ .

Para estimar o grau de despolarização ao longo do canal, usa-se a sua expressão em função dos parâmetros de Stokes. Pelos parâmetros de Stokes, o grau de polarização da luz é dado por (2.9). Utiliza-se o comportamento dos parâmetros de Stokes tratados em [41] que podem ser vistos em (2.10)

Em (2.10), como visto, o parâmetro  $\gamma$  indica a “força” com que o canal despolariza a luz. Usando (2.10), pode ser visto no gráfico 2.1, a dinâmica do grau de polarização  $\xi(\Delta z)$ , ao longo da distância percorrida. Assumindo que na entrada do canal os parâmetros de Stokes têm os seguintes valores,  $s_1(0) = 0,530$ ;  $s_2(0) = 0,152$ ;  $s_3(0) = 0,86151$ .

Usa-se o experimento acima para descobrir o valor do parâmetro  $\gamma$ . Para isso, resolve-se numericamente duas equações:

$$0,859^2 - 0,530^2 e^{-4\gamma} - 0,152^2 e^{-2\gamma} - 0,862^2 e^{-2\gamma} = 0 . \quad (a)$$

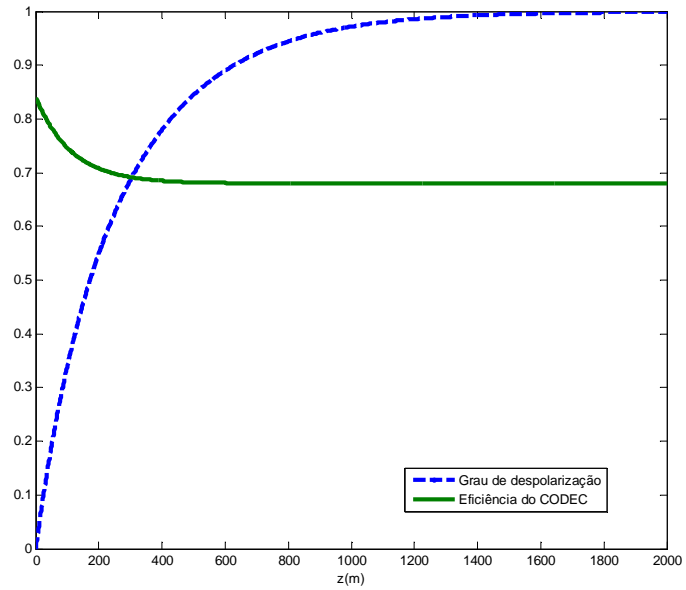
$$0,394^2 - 0,530^2 e^{-4\gamma(z+200)} - 0,152^2 e^{-2\gamma(z+200)} - 0,862^2 e^{-2\gamma(z+200)} = 0 . \quad (b)$$

Na equação (a) tem-se que  $\gamma z = 0,1410$ , e na equação (b) encontra-se que  $\gamma(z + 200) = 0,831$ . Resolvendo o sistema tem-se que  $\gamma = 0,0034 m^{-1}$  e  $z = 40,87 m$ . Pelo experimento, a luz entra na fibra parcialmente polarizada,  $g_p = 0,859$ . Isso equivale a uma propagação de  $40,87 m$ , sabe-se que essa despolarização está relacionada às imperfeições na montagem do próprio experimento, como impurezas nas junções das fibras e etc. O  $g_p = 0,859$  foi a condição inicial para descobrir o valor de  $\gamma = 0,0034 m^{-1}$ . Desta forma, verifica-se que o grau de polarização da luz neste experimento pode ser expresso, por:

$$\xi(z) = 1 - \sqrt{0,859^2 - 0,530^2 e^{-4\gamma} - 0,152^2 e^{-2\gamma} - 0,862^2 e^{-2\gamma}} . \quad (4.26)$$

Se o experimento tivesse sido feito com um rolo de fibra superior a 1,4 km a luz estaria completamente despolarizada, como observado no gráfico:

Gráfico 4.6 – Comportamento do grau de despolarização



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, considera-se para análise, disparos de pulsos de luz a cada  $20\text{ ps}$ . Desta forma, têm-se pulsos de luz entrando no codificador com distância de  $\Delta z = 6\mu\text{m}$  entre eles. A eficiência do CODEC dada por (4.25) atingirá o seu regime,  $|\alpha|^4 + |\beta|^4$ , por volta de  $500\text{m}$  de propagação. O que mostra que diante do ruído, o codificador dependerá das amplitudes das polarizações do fóton.

## 5. CONCLUSÃO

Analisou-se o desempenho do esquema de correção de erro da figura 4.1 quando o canal está bastante ruidoso, isto é, o canal sofre variações locais rápidas que mudam o canal durante o intervalo de tempo entre um pulso longo e curto. Embora se acredite que os efeitos da PMD sejam constantes ou de lentas variações em pequenos segmentos de fibra (como impurezas, pressões mecânica, etc.). Nesse trabalho, é decidido considerar variações rápidas causadas por outros efeitos físicos.

Os resultados obtidos neste trabalho são úteis para verificar se o modelo proposto em [37] é útil ou falho. Para isso, seria necessário realizar um experimento com o CODEC analisado neste trabalho e comparar com o comportamento proposto nesse trabalho. O experimento teria que estar dentro das mesmas condições do experimento aqui analisado. Ou um novo experimento deve ser feito com o mesmo procedimento apresentado [42] e depois o CODEC deve ser testado experimentalmente dentro das mesmas condições. Caso o resultado seja verdadeiro, podemos afirmar que o desempenho do CODEC é dependente do grau de despolarização da luz e que ele é dinâmico com variações rápidas num pequeno pedaço de fibra.

## REFERÊNCIAS

- [1] PHOENIX, S.J.D.; TOWNSEND, P.D.. Quantum Cryptography how to beat the code breakers using quantum mechanics. *Contemporary Physics*, v. 36, n. 3, p. 165-195, ago. 1995.
- [2] BARNETT, S. M.; BROUGHAM T.. *Information Security: from classical to quantum*. Spie, v. 8542, n. 1, p. 1-7, set. 2012.
- [3] LIU, C; ZHANG, S. ;ZHAO, L; CHEN P.; FUNG, C. -H. F.; CHAU, H. F. ; LOY, M. M. T.; DU, S.. Differential-phase-shift quantum key distribution using heralded narrow-band single photons. *Optical Society of America*, v. 21, n. 8, p. 9505-9513, abr. 2013.
- [4] CLAUSEN, C.; BUSSIERES, F.; AFZELIUS, M.; GISIN, N.. Quantum Storage of Heralded Polarization Qubits Birefringent and Anisotropically Absorbing Materials. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 12, p. 190503, fev. 2012.
- [5] GÜNDOGAN, M.; LEDINGHAM. P. M.; ALMASI, A.; CRISTIANI, M. ; RIEDMATTEN, H.. Quantum storage of a photonic polarization qubit in a solid. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 12, p. 190504, mai. 2012.
- [6] ZHOU, Z.-Q.; LIN, W.-B.; YANG, M.; LI, C.-F.; GUO, G.-C. Realization of reliable solid-state quantum memory for photonic polarization qubit. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 12, p. 190505, mai. 2012.
- [7] YIN, J.; REN, J.-G. ; LU, H.; CAO, Y.; YONG, H.-L.; WU, Y.-P.; LIU, C.; LIAO, S.-K.; ZHOU, F.; JIANG, Y.; CAI, X.-D; XU, P; PAN, G.-S.; JIA, J.-J.; HUANG, Y.-M.; YIN, H.; WANG, J.-Y.; CHEN, Y.-A.; PENG, C.-Z.; PAN, J.-W.. Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels. *Nature*, v. 488, p. 185-188, set. 2013
- [8] MA, X.-S.; HERBST, T.; SCHEIDL, T.; WANG, D.; KROPATSCHECK, S.; NAYLOR, W.; WITTMANN, B.; MECH, A.; KOFLER, J.; ANISIMOVA, E.; MAKAROV, V.; JENNEWEIN, T.; URSIN, R.; ZEILINGER, A.. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, v. 489, p. 269-273, jan. 2013.
- [9] NIELSEN, M.A.; CHUANG, I.L.. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press. 2000.
- [10] SAVORY, S.J.; PAYNE, F.P..Pulse propagation in Fibers with Polarization-Mode Dispersion. *Journal of Lightwave Tech*, v. 19, n.3, p. 350-357, mar. 2001.
- [11] VANWIGGEREN, G. D.; ROY, R.. Transmission of linearly polarized light through a single-mode fiber with random fluctuations of birefringence. *Applied opt*, v. 38, n. 18, p. 3888-3892, jun. 1999.

- [12] MAHGEREFTEH, D.; MENYUK, C. R.. Effect of First Order PMD Compensation on the Statistics of Pulse Broadening in a Fiber with Randomly Varying Birefringence. *IEEE Photonics Technology Letters*, v. 11, n. 30, p. 340-342, mar 1999.
- [13] BORN, M.; WOLF, E.. *Principles of Optics*. 7 ed.. Cambridge:Cambridge University Press.1999.
- [14] SIMMONS, J. W.; GUTTMANN, M. J..States. *Waves and Photons: A Modern Introduction to Light*. USA: Addison-Wesley. 1970.
- [15] BREGUET, J.; MULLER, A.; GISIN, N.. Quantum cryptography with polarized photons in optical fibres: Experimental and Practical Limits. *Journal of Modern Optics*, n. 12, v. 41, p. 2405-2412, dez. 1994.
- [16] BREGUET, J.; MULLER, A.; GISIN, N.. Experimental Demonstration of Quantum Cryptography Using Polarized Photons in Optical Fibre over More than 1 km. *Europhysics Letters*, n. 6, v. 23, p. 383-388, ago. 1993.
- [17] FRASSON, J. D.; ILVES, H.. Quantum cryptography using optical fibers, *Applied Optics*, n. 33, v. 14, p. 2949-2954, mai. 1994.
- [18] FRASSON, J. D.; ILVES, H.. Quantum Cryptography using polarization feedback. *Jornal of Modern Optics*, n. 12, v. 41, p. 2391-2396, abr. 1994.
- [19] BENNET, C. H.. Quantum Cryptography Using Any Two Nonorthogonal States. *Physical Review Letters*, n. 21, v. 68, p. 3121-3124, mai 1992.
- [20] TOWNSEND, P. D.; RARITY, J. G.; TAPSTER, P. R.. Single Photon Interference in 10 km Long Optical Fibre Interferometer. *Electronics Letters*, v. 29, n. 7, p. 634-635, abr. 1993.
- [21] TOWNSEND, P. D.; RARITY, J. G.; TAPSTER, P. R.. Enhanced Single Photon Fringe Visibility in a 10 km Long Prototype Quantum Cryptography Channel. *Electronics Letters*, n. 14, v. 29, p. 1291-1293, jul. 1993.
- [22] TOWNSEND, P. D.; THOMPSON, I.. A quantum key distribution channel based on optical fibre. *Journal of Modern Optics*, n. 12, v. 41, p. 2425-2433, fev. 1994.
- [23] TOWNSEND, P. D., MARAND, C.; PHOENIX, S. J. D.; BLOW, K. J.; BARNETT, S. M.. Secure optical communications systems using quantum cryptography. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, n. 1708, v. 354, p. 805-817, mar 1996.
- [25] GORDON, K. J; FERNANDEZ, V; TOWNSEND, P. D.; BULLER, G. S.. A short wavelength gigahertz clocked fiber optic quantum key distribution system. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. n. 7, v. 40, p. 900-908, jul. 2004.
- [26] GORDON, K. J.; FERNANDEZ, V.; BULLER, G. S.; RECH, I.; COVA, S. D. ; TOWNSEND, P. D..Quantum key distribution system clocked at 2GHz. *Optics Express*, n. 8, v. 13, p. 3015-3020, dez. 2005.

- [27] BIENFANG, J. C.; GROSS, A. J.; MINK, A.; HERSHAN, B. J.; NAKASSIS, A.; TANG, X.; LU, R.; SU, D. H.; CLARK, W.; WILLIAMS, C. J.; HAGLEY, E. W.; WEN, J. Quantum key distribution with 1.25 Gbps clock synchronization. *Optics Express*, n. 9, v. 12, p. 2011-2016, abr. 2004.
- [28] PITMAN, T. B.; JACOBS, B. C.; FRANSON, J. D.. Experimental Demonstration of a Quantum Circuit using Linear Optics Gates. *Physics Review A*, n. 3, v. 71, p. 032307-032310, abr. 2005.
- [29] SPEDALIERI, F. M.; LEE, H.; DOWLING, J. P.. High fidelity linear optical quantum computing with polarization encoding. *Physical Review A*, n. 1, v. 73, p. 012334-012345, set. 2006.
- [30] RALPH, T. C.; WHITE, A. G.; MUNRO, W. J.; MILBURN, G. J.. Simple scheme for efficient linear optics quantum gates. *Physics Review. A*, n. 1, v. 65, p. 012314-012319, mar. 2001. Disponível em: < <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0108049v3.pdf> >. Acesso em: 07 de julho de 2013.
- [31] KOK, P.; MUNRO, W. J.; NEMOTO, K.; RALPH, T. C.; DOWNLING, J. P.; MILBURN, G. J.. Linear optical quantum computing. *Physics Review. A*, n. 1, v. 79, p. 135-174, mar. 2006.
- [32] BARBOSA, G. A.. Parametric Down-Conversion Luminescence: A Fertile Ground in Quantum Optics. *Brazilian Journal of Physics*, n. 4, v. 25, p. 335-375, dez. 1995.
- [33] EKERT, A. K.. Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem. *Physical Review Letters*, n. 6, v. 67, p. 661-663, ago. 1991.
- [34] EKERT, A. K.; RARITY, J. G.; TAPSTER, P. R.; PALMA, G. M.. Practical Quantum Cryptography Based on Two Photon Interferometry. *Physical Review Letters*, n. 9, v. 69, p. 1293-1295, ago. 1992.
- [35] SCHOR, P.W.. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physics Review A*, n. 4, v. 52, p. R2493-R2496, mai. 1995.
- [36] EKERT, A.; MACCHIAVELLO, C.. Error correction in quantum communication. *Physics Review. Letters*, n. 12, v. 77, p. 2585-2588, fev. 1996.
- [37] NASCIMENTO; J. C., MATEUS, P.. Statistical model for a quantum noiseless subsystem. *Optics Communications*, n. 5, v. 284, p.1451–1456, mar. 2010.
- [38] ROBSON, B. A..The Theory of Polarisation Phenomena. Oxford: Clarendon Press. 1974.
- [39] CHIRKIN, A. S.; ORLOV, A. A.; PARASCHUK, D. Yu. *Quantum Electron.* v. 23, p. 870, 1993.
- [40] USACHEV, P.; SÖDERHOLM, J.; BJÖRK, G.; TRIFONOV, A.. Experimental verification of differences between classical and quantum polarization properties. *Optics Communications*, n. 1-6, v. 193, p. 161-173, jun 2001.

- [41] KLIMOV, A. B.; ROMERO, J. L.; SOTO, L. L.. A simple quantum model for light depolarization. *Journal Optical Society of America*, n.1, v. 23, p. 126-133, jan 2006. Disponível em < <http://www.opticsinfobase.org/josab/abstract.cfm?uri=josab-23-1-126>>. Acesso em: 07 de julho de 2013.
- [42] NASCIMENTO, J.C.; RAMOS, R. V.. Dynamic of the degree of polarization in a depolarizing channel: theory and experimental results. *Microwave and Optical Technology Letters*, v. 47, n. 5, p. 497-500, dez. 2005.
- [43] KALAMIDAS, D.. Single photon quantum error rejection and correction with linear optics. *Physics Letters A*, n. 5, v. 343, p. 331-335, ago. 2005.
- [44] GISIN, N.; RIBORDY, G.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H.. Quantum cryptography, *Reviews of Modern Physics*, n. 1, v. 74, p. 145–195, mar. 2002.
- [45] NASCIMENTO, J. C.. Correção de erro em sistemas de comunicação quântica utilizando polarização de estados coerentes e fótons isolados. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Teleinformática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.
- [46] BRENDEL, J.; GISIN, N.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H.. Pulsed energy-time entangled twin-photon source for quantum communication. *Physics Review Letters*. n. 12, v. 82, p. 2594–2597, mar. 1999.
- [47] NASCIMENTO, J. C.; MENDONÇA, F. A.; RAMOS, R. V.. Linear optics setup for active and passive quantum error correction in polarization encoded qubits, *Journal of Modern Optics*, n. 10, v. 54, p. 1467–1479, jun. 2007.
- [48] BRITO, D. B.; RAMOS, R. V.. Passive quantum error correction with linear optics. *Physics Letters A*, n. 3, v. 352, p. 206–209, mar. 2006 .
- [49] BOILEAU, J.-C.; LAFLAMME, R.; LAFOREST, M.; MYERS, C. R.. Robust quantum communication using a polarization-entangled photon pair. *Physics Review Letter*, n. 22, v. 93, p. 220501-220504, nov. 2004.
- [50] CHEN, T.-Y.;ZHANG, J.; BOILEAU, J.-C.; JIN, X.-M.; YANG, B. ; ZHANG, Q.; YANG, T.; LAFLAMME, R.; PAN, J.-W.. Experimental quantum communication without a shared reference frame. *Physics Review Letter*, n. 15, v. 96, p. 150504-150507, mai. 2006.
- [51] ELLIS, J.; DOGARIU, A.; PONOMARENKO, S.; WOLF, E.. Degree of polarization of statistically stationary electromagnetic fields. *Optics Communications*, n. 4-5, v. 248, p. 333–337, abr. 2005.
- [52] MANDEL, L.; WOLF, E.. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press. 1995.
- [53] FANO, U.. Remarks on the Classical and Quantum-Mechanical Treatment of Partial Polarization. *Journal the Optical Society of America*, n. 10, v. 39, p. 859-863, 1949.



- [54] BROSSEAU, C.. Fundamentals of Polarized Light: A statistical Optics Approach, New York: Wiley. 1998.
- [55] SETALA, T.; SHEVCHENKO, A.; KAIVOLA, M.. Degree of polarization for optical near fields. Physical Review E, n. 1, v. 66, p 16615-16621, fev. 2002.
- [56] ELLIS, J.; DOGARIU, A.; PONOMARENKO, S.; WOLF, E. Correlation matrix of a completely polarized, statistically stationary electromagnetic field. Optics Letters, n. 13, v. 29, p. 1536-1538, jul. 2004.
- [57] ELLIS, J.; DOGARIU, A.. On the Degree of Polarization of Random Electromagnetic fields. Optics Communications, n. 4-6, v. 253, p. 257-265, set. 2005.
- [58] MEHTA, C.L.; WOLF, E.. Coherence properties of blackbody radiation. III. Cross-Spectral tensors. Physics Review, n. 5, v. 161, p. 1328-1334, mai. 1967.

## ANEXO A - DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO 4.21

Este anexo apresenta os detalhes do desenvolvimento da equação 3.20 dentro da equação 4.21. Primeiramente apresenta-se o desenvolvimento da expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s,t=-k,-k+2,\dots}^k E_\phi(f) P_k(p_{\Delta X}, s) P_k(p_{\Delta \Phi}, t) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s,t=-k,-k+2,\dots}^k \cos(t\Delta\Phi) \{1 + \cos(s\Delta\Phi)\} P_k(p_{\Delta X}, s) P_k(p_{\Delta \Phi}, t) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=-k,-k+2,\dots}^k \cos(t\Delta\Phi) P_k(p_{\Delta \Phi}, t) \left( 1 + \sum_{s=-k,-k+2,\dots}^k \cos(s\Delta X) P_k(p_{\Delta X}, s) \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Considerando  $p_{\Delta \Phi} = p_{\Delta X} = 1/2$ , logo:

$$\begin{aligned}
 M_k(\delta) &= \sum_{r=-k,-k+2,\dots}^k \cos(r\delta) P_k(1/2, r) \\
 &= \sum_{r=-k,-k+2,\dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{\cos(r\delta)}{2^k} \\
 &= \sum_{r=-k,-k+2,\dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{e^{ir\delta} + e^{-ir\delta}}{2^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=-k,-k+2,\dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{e^{ir\delta}}{2^k} + \sum_{r=-k,-k+2,\dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{e^{-ir\delta}}{2^k} \right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=-k, -k+2, \dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{e^{i\delta\left(\frac{k+r}{2}\right)} e^{-i\delta\left(\frac{k-r}{2}\right)}}{2^k} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left( \sum_{r=-k, -k+2, \dots}^k \frac{k!}{\left(\frac{k+r}{2}\right)! \left(\frac{k-r}{2}\right)!} \frac{e^{-i\delta\left(\frac{k+r}{2}\right)} e^{i\delta\left(\frac{k-r}{2}\right)}}{2^k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2} \right)^k + \left( \frac{e^{-i\delta} + e^{i\delta}}{2} \right)^k \right) = (\cos(\delta))^k.
\end{aligned}$$

Agora, escrevemos  $\lambda = \xi(\Delta z)z / \Delta z$  para simplificar a notação. Portanto, a expressão (A.1)

pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
E(f) &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} M_k(\Delta\Phi)(1 + M_k(\Delta X)) \\
&= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cos^k(\Delta\Phi)(1 + \cos^k(\Delta X)) \\
&= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cos(\Delta\Phi))^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cos(\Delta\Phi) \cos(\Delta X))^k}{k!} \right). \tag{A.3} \\
&= \frac{1}{2} \left( e^{-(1-\cos(\Delta\Phi))\lambda} + e^{-(1-\cos(\Delta\Phi)\cos(\Delta X))\lambda} \right)
\end{aligned}$$

## **ANEXO B - GRAU DE POLARIZAÇÃO DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA ESTATÍSTICAMENTE ESTACIONÁRIA**

Com o objetivo de estabelecer uma teoria consistente para determinar como e de que forma pode se caracterizar o estado de polarização na radiação eletromagnética foi sugerida por Ellis uma nova teoria elaborada em artigo [51] e traduzida a seguir.

Em caso especial, quando o campo tem uma estrutura de uma onda plana, mais precisamente quando é um feixe (também referenciado como um campo paraxial ou campo bidimensional) pode-se caracterizar suas propriedades de segunda-ordem de correlação para qualquer ponto no espaço pela matriz de correlação  $2 \times 2$ , usualmente chamada de matriz coerência ou matriz de polarização. Esta pode ser expressa como a soma de duas matrizes, uma que apresenta a parte totalmente polarizada e a outra que representa a parte totalmente despolarizada. A razão da intensidade média (densidade de energia elétrica) da parte polarizada com a intensidade media total é identificada pelo grau de polarização do campo para aquele ponto. Isto deve ser representado em termos dos parâmetros de Stokes, que são combinações lineares dos elementos da matriz coerência  $2 \times 2$  e que tornam-se proporcionais aos coeficientes numa decomposição das matrizes de Pauli [52, p. 349]. Esta teoria não somente é a base de toda a polarização óptica da física clássica, mas um importante fundamento para o tratamento quântico da polarização [53].

A questão de saber se o conceito do grau de polarização pode ser generalizado a partir de um feixe do campo eletromagnético aleatório tridimensional tem sido considerado por muitos anos, mas nenhuma solução satisfatória foi encontrada até agora. De fato, existem várias afirmações contraditórias feitas na literatura a respeito deste assunto. Por exemplo, num texto relativamente recente [54, p. 121] afirma-se que para  $N = 2$  é possível considerar um estado arbitrário (parcialmente polarizado) como uma mistura incoerente do estado puro e o estado completamente despolarizado. Entretanto  $N = 3$  para geralmente não se pode expressar o estado arbitrário como a mistura totalmente polarizada com a parte totalmente despolarizada. Por outro lado, num artigo recente [55], a definição do grau de polarização do campo tridimensional foi introduzida, embora com alguma hesitação, e sem qualquer discussão aparente do significado físico. A decomposição da matriz de correlação elétrica usada naquele artigo e em alguns tratamentos recentes os problemas usam as matrizes Gell-Mann ao

invés das tradicionais matrizes de Pauli (bidimensional) da teoria da polarização. Referências a outras publicações com fazendo confirmações contraditórias são dadas em [54-55].

Uma solução clara e sem ambiguidade para este problema é atualmente de considerável interesse para a expansão rápida do estudo da óptica. O campo eletromagnético próximo a uma fonte de irradiação ou a um objeto dispersivo não apresenta suas propriedades de polarização, portanto, deve ser analisado dentro do domínio da polarização óptica tradicional. Conseqüentemente, um tratamento mais abrangente é necessário.

## B.2 Representação matricial da polarização do campo eletromagnético

Neste anexo, o autor se propõe a resolver a problemática anteriormente apresentada, identificando se no campo eletromagnético estatisticamente estacionário é possível introduzir, para cada ponto no espaço, uma polarização de grau único. Para responder a essa questão é mostrado que a matriz densidade  $3 \times 3$  do campo elétrico para qualquer ponto do espaço pode ser expressado como a soma de três matrizes. A primeira representa o campo totalmente polarizado, enquanto as demais matrizes estão relacionadas com as partes despolarizadas. A razão entre a intensidade média da parte polarizada com a intensidade média total do campo nesse ponto, claramente, pode ser identificada como a definição há muito procurado para o grau de polarização para qualquer ponto escolhido aleatoriamente do campo eletromagnético tridimensional estatisticamente estacionário. É encontrado para ser expresso de forma simples, em termos dos autovalores da matriz densidade  $3 \times 3$  do campo elétrico e reduz a expressão usual para o grau de polarização quando o campo é como um feixe.

Para derivar estes resultados, primeiramente lembra-se que as propriedades de correlação de segunda-ordem para cada campo pode ser caracterizada pela matriz correlação  $3 \times 3$ .

$$\vec{W}(r_1, r_2, \omega) = [W_{ij}(r_1, r_2, \omega)] = [E_i^*(r_1, \omega)E_j(r_2, \omega)]. \quad (\text{B.1})$$

Aqui,  $E_i$  ( $i = x, y, z$ ) é o membro do conjunto estatístico de realizações monocromáticas do campo elétrico flutuante em um ponto  $r$  e frequência  $\omega$  e os colchetes angulares denotam a

média, seguindo o exemplo do conjunto de realizações de acordo com a teoria coerente e no domínio do espaço-frequência [52]. A matriz validada para o ponto  $r_1 = r_2 \equiv r$ , pode ser unicamente representada como a soma da participação de três campos que são mutuamente não correlacionados. Diferente da maneira de decomposição tradicional dos campos tridimensionais usando as matrizes de Gell-Mann, a qual era usada frequentemente em tentativas anteriores para analisar as propriedades da polarização de cada campo, o novo método de decomposição tem sido usado e é de clara interpretação física.

Desde que a matriz densidade para um único ponto  $r$  e frequência  $\omega$  seja definida como Matriz Hermitiana não-negativa, existe a matriz unitária:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} E_{x1}^* & E_{x2}^* & E_{x3}^* \\ E_{y1}^* & E_{y2}^* & E_{y3}^* \\ E_{z1}^* & E_{z2}^* & E_{z3}^* \end{pmatrix}^\dagger. \quad (\text{B.2})$$

Que vai diagonalizar  $\vec{W}$ . Os elementos da matriz diagonal são os autovalores de  $\vec{W}$  e são necessariamente reais e não negativos. Esta matriz unitária pode ser representada de única forma pela ordenação dos autovalores como  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$

A diagonalização da matriz densidade então é dada por:

$$\vec{U}^\dagger \vec{W} \vec{U} = \vec{D} = \sum_1 \lambda_1 \vec{D}_i = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Definindo o conjunto de matrizes  $[w_i]$  ( $i = 1,2,3$ ) correspondentes a  $\vec{D}_i$  no quadro de coordenadas originais, rapidamente encontramos que:

$$\vec{w}(r, r, \omega) \equiv \vec{U} \vec{D}_i \vec{U}^\dagger = \begin{pmatrix} |E_{xi}|^2 & E_{xi}E_{yi}^* & E_{xi}E_{xi}^* \\ E_{xi}^*E_{yi} & |E_{yi}|^2 & E_{yi}E_{xi}^* \\ E_{xi}^*E_{xi} & E_{yi}^*E_{xi} & |E_{xi}|^2 \end{pmatrix}^\dagger. \quad (\text{B.4})$$

O qual representa o campo totalmente polarizado [56] cuja intensidade média para o ponto  $r$  e frequência  $\omega$  é independente do índice  $i$ . Por totalmente polarizada, entende-se o campo de tal forma que o ponto final do vetor campo elétrico move-se como uma elipse ou equivalentemente, o campo para o qual a matriz densidade avaliada num ponto  $r$  tem um

único autovalor não nulo [56]. É evidente que a equação (B.3) expressa a matriz  $\vec{W}(r, r, \omega)$  unicamente como a soma de três matrizes não correlacionadas, campos polarizados ortogonalmente. Esta interpretação da Eq. (B.3) sugere que a decomposição a seguir da matriz  $3 \times 3$   $\vec{W}(r, r, \omega)$  que é semelhante a matriz de correlação  $2 \times 2$  do feixe do campo.

$$\vec{W}(r, r, \omega) \equiv \vec{M}^{(1)} + \vec{M}^{(2)} + \vec{M}^{(3)}. \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{M}^{(1)}(r, r, \omega) \equiv (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^\dagger = (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{w}_1. \quad (\text{B.6a})$$

$$\vec{M}^{(2)}(r, r, \omega) \equiv (\lambda_2 - \lambda_3) \vec{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^\dagger = (\lambda_2 - \lambda_3) (\vec{w}_1 + \vec{w}_2). \quad (\text{B.6b})$$

$$\vec{M}^{(3)}(r, r, \omega) \equiv \lambda \vec{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U^\dagger = \lambda_3 (\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3). \quad (\text{B.6c})$$

A matriz  $\vec{M}^{(1)}(r, r, \omega)$  representa o campo que é completamente polarizado para o ponto  $r$  e frequência  $\omega$ , como mostrado em artigo [56]. As matrizes  $\vec{M}^{(2)}(r, r, \omega)$  e  $\vec{M}^{(3)}(r, r, \omega)$  sendo soma de dois e três campos despolarizados mutuamente ortogonais das componentes despolarizadas bi e tri dimensionais. Esta interpretação foi discutida em outra publicação [58].

## B.2 Grau de Polarização genérico

Está claro, a partir destes resultados, que se pode associar com qualquer ponto aleatório, o campo elétrico estatisticamente estacionário a um único espectro do grau de polarização, que é a razão da intensidade média  $I^{(p)}$  da parte polarizada do campo com a intensidade média total  $I$  do campo para este ponto, assim:

$$P \equiv \frac{I^{(p)}}{I} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad (\text{B.7})$$

É claro que  $0 \leq P \leq 1$  com  $P = 0$  representando o campo totalmente polarizado e  $P = 1$  representando o campo completamente polarizado para o ponto  $r$ . Isto é notado quando o campo é bidimensional, logo  $\lambda_3 = 0$ , e então a Eq. (B.7) reduz a expressão usual para o grau de polarização [52].

Os principais resultados com a teoria são demonstrados pelos exemplos. Suponha que uma onda aleatória evanescente com o campo elétrico representado pelo conjunto estatisticamente estacionário das quais se comporta da forma:

$$E(r, \omega) = e_0 x_i e^{ik \cdot r} (x = x_1 x_2 x_3, x = k, x_k = 0). \quad (\text{B.8})$$

Onde  $e_0$  é a variável aleatória, é incidente na metade do comprimento  $z \geq 0$  contido na radiação do corpo negro. Assumimos que a onda linearmente polarizada através do eixo  $x$  decai exponencialmente na direção do eixo positivo  $z$ ,  $e_0$  é (geralmente complexa) a amplitude e o vetor complexo  $k$  tem componentes  $(0, K_y, K_z = k'_z + ik''_z)$  com  $k'_z$  e  $k''_z$  reais  $k \cdot k^* = \omega^2/c^2$  e  $*$  denota o complexo conjugado de  $k$ . A matriz de correlação deste conjunto tem forma:

$$\begin{aligned} W_{ij}^{(e)}(r_1, r_2, \omega) &= \langle |e_0|^2 x_i x_j \exp[-i(k^* \cdot r_1 - k \cdot r_2)] \rangle. \\ &= \langle |e_0|^2 \rangle x_i x_j \exp[-ik_y(y_1 - y_2) - ik'_z(z_1 - z_2) - k''_z(z_1 + z_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Com  $r_2 = r_1$ , evidentemente temos:

$$W_{ij}^{(e)}(r, r, \omega) = \langle |e_0|^2 \rangle x_i x_j \exp(-2k''_z z). \quad (\text{B.10})$$

A matriz densidade de radiação do corpo negro é dada por [64]:

$$W_{ij}^{(bb)}(r_1, r_2, \omega) = \pi A \{ \delta_{ij} [j_0(R) - (1/R)j_1(R)] + (R_i R_j / R^2) j_2(R) \}. \quad (\text{B.11})$$

Onde  $R = (\omega/c)|r_2 - r_1|$  e:

$$A = \frac{h}{\pi^2} \left( \frac{\omega}{c} \right)^3 \frac{1}{\exp\{h\omega/2\pi kT\} - 1}. \quad (\text{B.12})$$



É a lei da distribuição de Plank, o  $j$ 's são funções da esfera de Bessel e  $\delta_{ij}$  é o símbolo do delta de Kronecker. Tendo o limite como  $|r_2 - r_1| \rightarrow 0$ , logo, conclui-se que:

$$W_{ij}^{(bb)}(r_1, r_2, \omega) = \frac{2\pi A}{3} \delta_{ij}. \quad (\text{B.13})$$

Para o campo total tem-se:

$$W_{ij}(r, r, \omega) = W_{ij}^{(e)}(r, r, \omega) + W_{ij}^{(bb)}(r, r, \omega). \quad (\text{B.14})$$

Ou, usando as equações (B.10) e (B.13),

$$W_{ij}(r, r, \omega) = I^{(e)} x_i x_j \exp(-2k_z'' z) + I^{(bb)} \delta_{ij}. \quad (\text{B.15})$$

Onde  $I^{(e)}$  é a intensidade inicial do campo evanescente, isto é, para  $z = 0$  e  $I^{(bb)}$  é a intensidade do campo do corpo negro. Os autovetores da matriz (B.15) são:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

E os autovalores são:

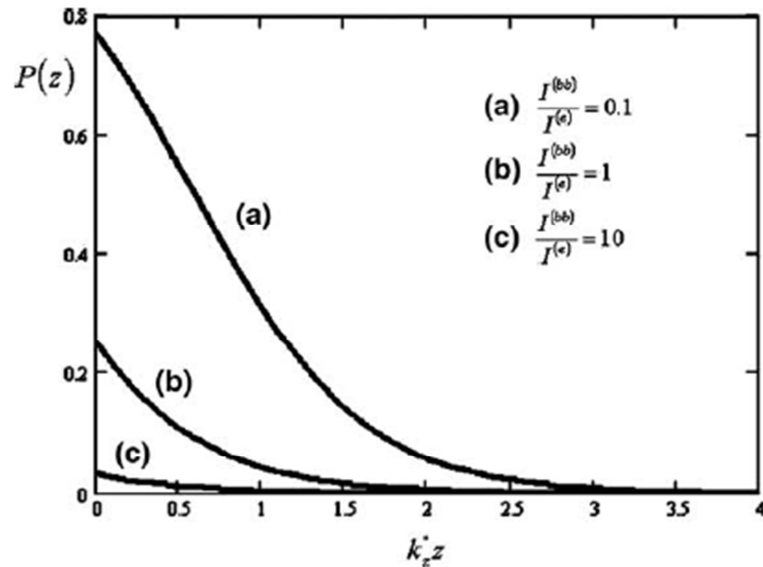
$$\lambda_1 = I^{(bb)} + I^{(e)} \exp(-2k_z'' z); \lambda_2 = \lambda_3 = I^{(bb)}. \quad (\text{B.17})$$

O grau de polarização total do campo é obtido pela substituição da Eq. (B.17) pela generalização da fórmula (B.7), logo, rapidamente encontra-se que a expressão é dada por:

$$P(z) = \frac{1}{3(I^{(bb)}/I^{(e)}) \exp(-2k_z'' z) + 1}. \quad (\text{B.18})$$

Na figura B.1, o grau de polarização total do campo é plotado em função de  $k_z'' z$  pelos mesmos valores selecionados da razão  $I^{(bb)}/I^{(e)}$ . Isto mostra que o grau de polarização  $P(z)$  decresce com a distância  $z$  do limite e que  $P(z) \rightarrow \infty$  com  $I^{(bb)}/I^{(e)} \rightarrow 0$  e  $P(z) \rightarrow 1$  com  $I^{(bb)}/I^{(e)} \rightarrow 0$ , como seria de se esperar.

Gráfico B.1 – O grau de polarização em função de  $z$  do campo consiste na superposição do conjunto das ondas aleatórias evanescentes e a radiação do corpo negro ocupando meio comprimento  $z > 0$ . A onda evanescente decresce exponencialmente com o crescimento de  $z$ .  $I^{(bb)}$  mostra a intensidade do campo do corpo negro e  $I^{(e)}$  mostra a intensidade da onda evanescente no plano  $z = 0$ .



Fonte: Optics Communications (2005)

### B.3 Conclusão

O autor resolve esta controversa questão com uma importante contribuição para a óptica estatística através da introdução da definição do grau de polarização generalizado (ou seja, não somente para os casos em que o campo se comporta como um feixe) do campo eletromagnético tridimensional estatisticamente estacionário. Demonstrou-se que a matriz densidade do campo elétrico do campo para qualquer ponto  $r$  pode ser unicamente representado como a soma de três matrizes, que tem um claro significado físico. Isto conduz a uma clara definição do grau de polarização para qualquer ponto  $r$  de qualquer campo elétrico tridimensional estatisticamente estacionário, como a razão da intensidade média da componente polarizada sobre a intensidade média total do campo para aquele ponto. Para campos como feixe, nossa definição do grau de polarização nos mostrou uma simplificação da definição usual.

A decomposição e a definição do grau de polarização para qualquer campo eletromagnético estatisticamente estacionário que os autores determinaram tem-se introduzido encontrar soluções para diferentes áreas da física a partir do campo da óptica.