



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
MESTRADO ACADÊMICO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

RAYANE GOMES DE CASTRO

COLORAÇÃO BACKBONE EM GRAFOS: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
INTRODUÇÃO DE UMA VERSÃO DIRECIONADA

FORTALEZA

2025

RAYANE GOMES DE CASTRO

COLORAÇÃO BACKBONE EM GRAFOS: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E INTRODUÇÃO
DE UMA VERSÃO DIRECIONADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará (UFC), como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C353c Castro, Rayane Gomes de.
Coloração Backbone em Grafos: Revisão Bibliográfica e Introdução de uma Versão Direcionada / Rayane Gomes de Castro. – 2025.
120 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo.
1. Coloração Backbone Direcionada. 2. Teoria dos Grafos. 3. Coloração Backbone. 4. Coloração de Grafos. 5. Número cromático. I. Título.

CDD 005

RAYANE GOMES DE CASTRO

COLORAÇÃO BACKBONE EM GRAFOS: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E INTRODUÇÃO
DE UMA VERSÃO DIRECIONADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará (UFC), como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Teoria da Computação.

Aprovada em: 29/01/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dra. Cláudia Linhares Sales
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre Talon
Université Grenoble Alpes (UGA)

Aos meus pais, Júnior e Marly, pela confiança e pelo constante incentivo em cada etapa da minha vida. Vocês são inspirações de dedicação e trabalho árduo. Que Cristo continue iluminando e abençoando suas vidas abundantemente!

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que não apenas me amou primeiro, mas provou o seu amor ao morrer em nosso favor quando ainda éramos pecadores, como é dito em Romanos 5:8. Sem Ele e sua graça abundante, eu não estaria aqui, por isso tenho um coração grato por Ele ter me sustentado durante esses anos e por ter me capacitado e me animado durante todo o processo de escrita.

Agradeço aos meus pais, Júnior e Marly, por terem me acompanhado durante todo esse tempo, e especialmente ao meu pai por todo o incentivo ao estudo, sem vocês, eu não seria quem eu sou hoje, louvo a Deus pela vida de vocês! Agradeço também ao meu irmão Anderson, minha cunhada Jullyanne e a um membro bem especial na minha família, meu sobrinho Matteo, que até o momento dessa escrita não saiu do forninho, vocês são especiais demais para mim e amo ver o amor de Cristo através da família que vocês estão formando juntos.

Um agradecimento mais que especial para o meu orientador, Júlio Araújo, que teve muita paciência em ler todo esse texto, e não só isso, teve muita paciência comigo, me auxiliando em cada passo da minha pesquisa desde a graduação, principalmente me incentivando acerca dos passos futuros após o mestrado. Admiro muito sua animação e dedicação ao longo desses anos.

Agradeço aos membros que constituíram a banca examinadora, Atilio Gomes, Cláudia Linhares e Alex Talon, por todo o tempo dedicado à leitura desse texto, além das sugestões de correções e direções para o meu trabalho. Um agradecimento especial para o Alex Talon, pelo breve momento que você esteve aqui no Brasil, dando-me a oportunidade de pesquisar com você nesse problema.

Agradeço a amigos especiais que fiz ao longo desses anos, que por um fator de organização e espaço, irei citar alguns em uma ordem que só faz sentido na minha cabeça. Agradeço a minhas amigas e irmãs em Cristo, Débora, Gabi, Grazi, Karén, Karem, Leane, Leonília, Raiele, Rayanne e Thais, obrigada por todas as conversas e orações, vocês tornam a vida desse lado da eternidade mais alegre. E como havia prometido à Débora, obrigada, amiga, por ter sido a primeira pessoa a ler o primeiro texto dessa dissertação. Agradeço aos meus amigos da IBJ, da Cru Campus e da UFC, em especial, Airlane e Jales, por todos os conselhos que me ajudaram nesse período. Agradeço a minhas amigas, agora à distância, Bella, Evelyn, Gab e Gabi, vocês tornaram janeiro de 2024 um mês muito especial.

Agradeço à FUNCAP, pelo apoio financeiro.

“Aquele amor que passou pela transformação da eternidade, em se tornando dever, não está libertado dos infortúnios, mas está a salvo do desespero; no infortúnio e na boa fortuna igualmente a salvo do desespero.”

(Søren Kierkegaard)

RESUMO

Dado um inteiro $q \geq 2$, um grafo G e um subgrafo gerador H de G , chamado de *backbone* de G , definimos uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) como sendo uma k -coloração própria c de G tal que, para todo $uv \in E(H)$, a seguinte condição é satisfeita: $|c(u) - c(v)| \geq q$. Neste trabalho, apresentamos uma revisão bibliográfica que aborda resultados gerais sobre um parâmetro crucial relacionado a essa coloração, conhecido como número cromático q -*backbone*, denotado por $BBC_q(G, H)$. O número cromático q -*backbone* é o menor inteiro k tal que existe uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) . Adicionalmente, apresentamos nossas contribuições para essa coloração e introduzimos uma variação direcionada, denominada Coloração *Backbone* Direcionada. Também discutimos os resultados obtidos referentes ao seu número cromático correspondente.

Palavras-chave: coloração de grafos; coloração *backbone*; número cromático; coloração *backbone* direcionada.

ABSTRACT

Given an integer $q \geq 2$, a graph G , and a spanning subgraph H of G , called the *backbone* of G , we define a q -backbone k -coloring of (G, H) as a proper k -coloring c of G such that, for every $uv \in E(H)$, the following condition is satisfied: $|c(u) - c(v)| \geq q$. In this work, we present a literature review that covers general results on a crucial parameter related to this coloring, known as the q -backbone chromatic number, denoted by $\text{BBC}_q(G, H)$. The q -backbone chromatic number is the smallest integer k such that there exists a q -backbone k -coloring of (G, H) . Additionally, we present our contributions to this coloring and introduce a directed variation, called the Directed *Backbone* Coloring. We also discuss the results obtained regarding its corresponding chromatic number.

Keywords: graph coloring; *backbone* coloring; chromatic number; directed *backbone* coloring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O grafo de Petersen colorido com cores distintas.	17
Figura 2 – Construção de uma coloração ótima para o grafo de Petersen.	18
Figura 3 – Uma coloração ótima do grafo de Petersen.	18
Figura 4 – Uma coloração do mapa do Brasil utilizando 4 cores.	19
Figura 5 – Uma coloração distância-2 ótima do grafo de Petersen.	20
Figura 6 – Uma $L(2, 1)$ -rotulação ótima do grafo de Petersen.	21
Figura 7 – Uma distribuição de antenas.	21
Figura 8 – Uma coloração dos vértices da distribuição de antenas.	22
Figura 9 – Uma coloração ótima dos vértices da distribuição de antenas.	22
Figura 10 – Uma distribuição de antenas (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito). . . .	23
Figura 11 – Uma 4-coloração 2- <i>backbone</i> de (G, H) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) com $BBC_2(G, H) = 4$	24
Figura 12 – Uma coloração ótima de G e uma coloração 2- <i>backbone</i> ótima de (G, G) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito), onde G é o grafo de Petersen. . . .	25
Figura 13 – Uma estrela com centro em x e uma galáxia (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) no grafo de Petersen.	26
Figura 14 – A pipa (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	26
Figura 15 – A pipa corrigida (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	27
Figura 16 – Uma coloração 2- <i>backbone</i> circular de (G, M) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) com $CBC_2(G, M) = 4$	28
Figura 17 – Uma coloração 2- <i>backbone</i> de (G, M) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) com $BBC_2(G, M) = 4$, que não é 2- <i>backbone</i> circular.	28
Figura 18 – Uma coloração 2- <i>backbone</i> de (G, H) (com as arestas do <i>backbone</i> em ne- grito) com $BBC_2(G, H) = 4$	29
Figura 19 – Uma orientação do <i>backbone</i> (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho) de um grafo G	29
Figura 20 – Uma coloração 2- <i>backbone</i> direcionada de (G, \vec{H}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho) com $BBC_2(G, \vec{H}) = 5$	30
Figura 21 – As pontes de Königsberg.	34
Figura 22 – A representação das pontes de Königsberg usando vértices e arestas. . . .	34
Figura 23 – Um grafo G	35

Figura 24 – Um grafo G com laços e arestas múltiplas.	35
Figura 25 – Um grafo G e um grafo H isomorfos.	36
Figura 26 – Um grafo G e o seu complementar \bar{G}	37
Figura 27 – Um grafo <i>split</i> G com uma clique C e um conjunto independente S que particiona $V(G)$	38
Figura 28 – Um grafo bipartido G	38
Figura 29 – Um grafo não bipartido G	38
Figura 30 – Exemplos de grafos completos e grafos bipartidos completos.	39
Figura 31 – Um grafo G não simples.	40
Figura 32 – O grafo de Petersen com cintura 5.	40
Figura 33 – O grafo de Petersen e o C_5	41
Figura 34 – Um grafo G e suas componentes conexas.	41
Figura 35 – Um grafo G que não tem C_4 e P_5 como subgrafos induzidos.	42
Figura 36 – Uma galáxia.	43
Figura 37 – O grafo de Petersen com um emparelhamento perfeito em negrito.	43
Figura 38 – Uma 3-coloração do grafo de Petersen.	44
Figura 39 – K_5 e $K_{3,3}$ não são grafos planares.	45
Figura 40 – Uma orientação de um grafo G	47
Figura 41 – Uma coloração ótima do grafo G com $\chi(G) = 3$	52
Figura 42 – Um grafo G com seu <i>backbone</i> M (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	52
Figura 43 – Uma 4-coloração 2- <i>backbone</i> ótima de (G, M) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	52
Figura 44 – Coloração ótima do grafo G e coloração 2- <i>backbone</i> ótima dos pares (G, H) e (G, G) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	54
Figura 45 – Um grafo G com $\chi(G) = 3$ e um caminho hamiltoniano P em G tal que $BBC_2(G, P) = 5$ (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	56
Figura 46 – Um grafo planar G com $\chi(G) = 4$ e uma árvore geradora T de G tal que $BBC_4(G, T) = 10$ (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	56
Figura 47 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	59
Figura 48 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tais que $BBC_2(G, T) = 6$	59

Figura 49 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tal que $\text{BBC}_2(G, T) = 5$	60
Figura 50 – Um grafo planar G com $\chi(G) = 4$ e uma árvore geradora T de G (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tal que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$	63
Figura 51 – Um paraquedas em v (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	64
Figura 52 – Um par (G, P) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tal que $\chi(G) = 3$ e $\text{BBC}_2(G, P) = 5$	68
Figura 53 – Uma 5-coloração 2- <i>backbone</i> ótima de (G, P) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	69
Figura 54 – Grafos planares G_1 e G_2 com caminho hamiltoniano como <i>backbone</i> (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	70
Figura 55 – Uma 6-coloração 2- <i>backbone</i> de (G_2, P) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	70
Figura 56 – Um grafo planar G com uma galáxia H , cujo grau máximo é 3, tal que $\text{BBC}_q(G, H) = q + 4$ (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	72
Figura 57 – Um par (G, M) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 5$	77
Figura 58 – Uma 5-coloração 2- <i>backbone</i> de (G, M) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	77
Figura 59 – A construção do grafo G com o caminho hamiltoniano P (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	82
Figura 60 – A construção do grafo G com o emparelhamento perfeito M (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	83
Figura 61 – Um paraquedas em v (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	87
Figura 62 – A pipa (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	88
Figura 63 – A pipa corrigida (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	89
Figura 64 – A ideia da construção da coloração para o grafo <i>split</i> (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito).	90
Figura 65 – Um par (G, T) (com as arestas do <i>backbone</i> em negrito) tal que G é um grafo <i>split</i> e T uma árvore geradora de G	91
Figura 66 – Ideia da construção do par (G, \vec{H}) quando $\chi(G) = 3$ e $\text{diam}(\vec{H}) = 2$ (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho).	96

Figura 67 – Ideia da construção do par (G, \vec{M}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho).	98
Figura 68 – Um par (G, \vec{M}) , onde G é um grafo planar, tal que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 6$ (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho).	99
Figura 69 – Um grafo planar G livre de triângulos tal que $\chi(G) = 3$.	100
Figura 70 – Um par (G, \vec{M}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho) tal que $\Delta(G) = 2$ e $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 4$.	102
Figura 71 – Um par (G, \vec{H}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho), onde G é um grafo planar e $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) = q + 6$.	103
Figura 72 – A construção do par (G, \vec{M}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho).	108
Figura 73 – A construção do par (G, \vec{F}) (com os arcos do <i>backbone</i> em vermelho).	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos na Coloração <i>Backbone</i> Direcionada com a Coloração <i>Backbone</i>	113
---	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

$V(G)$	Conjunto de vértices de G
$E(G)$	Conjunto de arestas de G
$F(G)$	Conjunto de faces de G
$A(D)$	Conjunto de arcos de D
$H \subseteq G$	H é subgrafo de G
$H \cong G$	H é isomorfo a G
$G[S]$	Subgrafo induzido por $S \subseteq V(G)$ em G
$d_G(v)$	Grau de $v \in V(G)$ em G
$N_G(v)$	Vizinhança de $v \in V(G)$ em G
$\delta(G)$	Grau mínimo de G
$\Delta(G)$	Grau máximo de G
$d_D^-(v)$	Grau de entrada de $v \in V(D)$ em D
$d_D^+(v)$	Grau de saída de $v \in V(D)$ em D
$\delta^-(D)$	Grau mínimo de entrada de D
$\Delta^-(D)$	Grau máximo de entrada de D
$\delta^+(D)$	Grau mínimo de saída de D
$\Delta^+(D)$	Grau máximo de saída de D
$d_G(f)$	Grau de $f \in F(G)$ em G
\overline{G}	Complementar de G
G^2	Quadrado de G
$n(G)$	Cardinalidade do conjunto de vértices de G
$m(G)$	Cardinalidade do conjunto de arestas de G
$Ad(G)$	Grau médio de G
$\alpha(G)$	Tamanho do maior conjunto independente em G
$\omega(G)$	Tamanho da maior clique em G
K_n	Grafo completo com n vértices

$K_{r,s}$	Grafo bipartido completo com partições de r e s vértices
P_n	Caminho com n vértices
C_n	Ciclo com n vértices
$g(G)$	Cintura de G
$G - v$	Grafo obtido de G ao remover $v \in V(G)$
$G - S$	Grafo obtido de G ao remover $S \subseteq V(G)$
$G - e$	Grafo obtido de G ao remover $e \in E(G)$
$G - M$	Grafo obtido de G ao remover $M \subseteq E(G)$
$d_G(u, v)$	Distância entre $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$ em G
$\text{diam}(G)$	Diâmetro de G
$\chi(G)$	Número cromático de G
$\chi_2(G)$	Número cromático distância-2 de G
$\text{BBC}_q(G, H)$	Número cromático q -backbone de (G, H)
$\text{CBC}_q(G, H)$	Número cromático q -backbone circular de (G, H)
$\text{BBC}_q(G, \vec{H})$	Número cromático q -backbone direcionado de (G, \vec{H})

SUMÁRIO

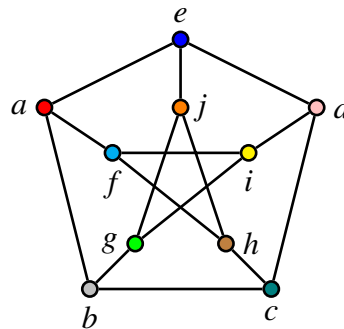
1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	33
2.1	Teoria dos Grafos	33
2.1.1	<i>Definições básicas</i>	34
2.1.2	<i>Florestas, árvores e emparelhamentos</i>	42
2.1.3	<i>Coloração de vértices e planaridade</i>	43
2.1.4	<i>Grafos direcionados</i>	46
2.2	Complexidade Computacional	48
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	51
3.1	Conceitos fundamentais na Coloração <i>Backbone</i>	51
3.2	Limitantes gerais da Coloração <i>Backbone</i>	53
3.3	Floresta como <i>backbone</i>	58
3.3.1	<i>Caminho hamiltoniano como backbone</i>	66
3.3.2	<i>Galáxia como backbone</i>	72
3.3.3	<i>Emparelhamento como backbone</i>	73
3.3.4	<i>Complexidade Computacional</i>	79
4	RESULTADOS	87
4.1	Coloração <i>Backbone</i>	87
4.2	Coloração em Backbones Direcionados	92
4.2.1	<i>Emparelhamentos como backbone</i>	96
4.2.2	<i>Galáxia e caminho como backbone</i>	102
4.2.3	<i>Complexidade Computacional</i>	104
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	112
	REFERÊNCIAS	115
	ÍNDICE	118

1 INTRODUÇÃO

O problema da Coloração de Vértices é um problema clássico na Teoria dos Grafos. Uma *k-coloração própria* de um grafo G , ou simplesmente uma *k-coloração* de G , é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que atribui cores aos vértices de modo que vértices adjacentes não compartilhem a mesma cor. O problema consiste em determinar o menor número de cores necessárias para colorir o grafo respeitando essa restrição, valor conhecido como o *número cromático* do grafo, representado por $\chi(G)$. Uma coloração de vértices que utiliza exatamente $\chi(G)$ cores é denominada *coloração ótima* do grafo G .

Uma maneira simples de obter uma coloração de vértices é usar cores diferentes para cada um deles. Na Figura 1, os vértices do grafo de Petersen estão coloridos de forma distinta, requerendo assim 10 cores, que coincidem com o número de vértices desse grafo.

Figura 1 – O grafo de Petersen colorido com cores distintas.

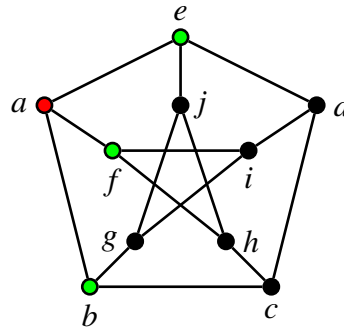


Fonte: Autoria própria, 2024.

Ao estudarmos colorações de vértices em grafos, nosso objetivo é reduzir o número de cores utilizadas, ou seja, descobrir o número cromático do grafo. Podemos construir uma coloração ótima no grafo de Petersen da seguinte maneira: inicialmente, colorimos o vértice a com uma cor, como o vermelho. Em seguida, para respeitar a condição da coloração de vértices, precisamos colorir os vizinhos de a com cores diferentes. Como b , e e f não compartilham arestas e nosso objetivo é minimizar o número de cores utilizadas, podemos atribuir a cor verde a esses três vértices. Na Figura 2, é possível visualizar a coloração que estamos construindo para o grafo de Petersen.

Para continuar a construção da coloração ótima no grafo de Petersen, seguindo as restrições da coloração de vértices e buscando minimizar o número de cores utilizadas, podemos observar que os vértices d , g e h não têm arestas entre si nem com o vértice vermelho a , mas estão conectados a vértices verdes. Portanto, podemos colori-los de vermelho. Já os vértices c ,

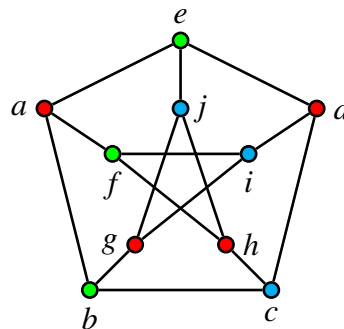
Figura 2 – Construção de uma coloração ótima para o grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

i e j , que não compartilham arestas entre si, mas compartilham arestas com vértices de cores verde e vermelha, devem receber uma nova cor, como o azul. Assim, na Figura 3, é possível visualizar essa coloração do grafo de Petersen usando apenas 3 cores.

Figura 3 – Uma coloração ótima do grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

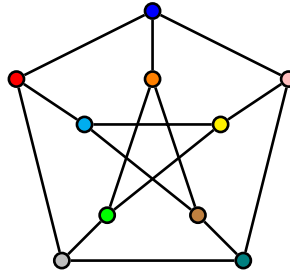
Um dos teoremas mais famosos da Teoria dos Grafos relacionado à Coloração de Vértices é o *Teorema das Quatro Cores*. Esse teorema foi inicialmente conjecturado em 1852 pelo matemático sul-africano Francis Guthrie enquanto estudava a coloração do mapa político do mundo, chegando a compartilhar sua conjectura com seu irmão Frederick (APPEL; HAKEN, 1978). Sua conjectura afirmava que, para qualquer mapa político, são suficientes apenas quatro cores para colorir os países de modo que países vizinhos não compartilhem a mesma cor. Note que, em um mapa político, não ocorrem situações em que as fronteiras de dois países se intersectam em apenas um número finito de pontos. Portanto, consideramos como vizinhos os países cujas fronteiras se intersectam em um número infinito de pontos.

Por exemplo, considerando os estados de um país em vez de países, podemos colorir os estados brasileiros no mapa do Brasil usando apenas quatro cores, garantindo que estados vizinhos não tenham a mesma cor. Essa coloração pode ser vista na Figura 4, onde cada cor

que estão a uma distância 2 em G_1 , ou seja, $G_2 = G_1^2$. A coloração distância-2 consiste em encontrar uma coloração de vértices para G_2 e, por conseguinte, para G_1 .

Similar à Coloração de Vértices, o *número cromático distância-2*, denotado por $\chi_2(G)$, é o menor inteiro k para o qual G admite uma coloração distância-2 que usa exatamente k cores. Essa coloração de G , que atinge $\chi_2(G)$, é chamada de *ótima*. No exemplo do grafo de Petersen, como todo vértice do grafo é vizinho ou está a distância 2 dos demais vértices, precisamos de cores distintas para todos os vértices do grafo. Na Figura 5, podemos ver uma coloração distância-2 do grafo de Petersen, onde o número cromático distância-2 é 10, pois o grafo de Petersen tem 10 vértices.

Figura 5 – Uma coloração distância-2 ótima do grafo de Petersen.

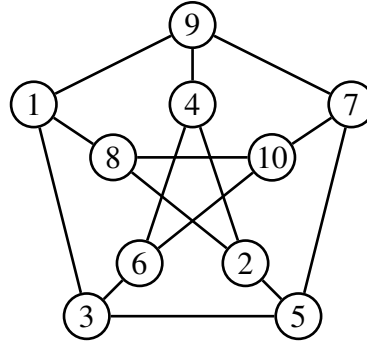


Fonte: Autoria própria, 2024.

Outra variação, descrita em (BROERSMA, 2003), é a $L(2,1)$ -rotulação ($L(2,1)$ -labeling), também conhecida como λ -rotulação. Uma $L(2,1)$ -rotulação de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f: V \rightarrow \mathbb{N}^+$ que satisfaz $|f(u) - f(v)| \geq 2$ para vértices adjacentes u e v , e $|f(u) - f(v)| \geq 1$ para pares de vértices u e v a uma distância 2. A *amplitude* (*span*) de uma $L(2,1)$ -rotulação f é definida como $\max_{v \in V} f(v)$, ou seja, é o maior inteiro atribuído aos vértices de G . Dizemos que a $L(2,1)$ -rotulação de um grafo G é *ótima*, quando alcançamos a menor amplitude possível para G e a amplitude dessa rotulação é representada por $\lambda(G)$.

Na Figura 6, podemos observar uma $L(2,1)$ -rotulação ótima do grafo de Petersen, onde cada vértice recebe um rótulo distinto devido à sua distância no máximo 2 em relação aos demais vértices. A construção dessa rotulação foi realizada da seguinte maneira: nos vértices do ciclo externo de tamanho 5 do grafo, atribuímos rótulos com números ímpares, garantindo que vértices adjacentes nesse ciclo tenham rótulos distanciados em 2 unidades. Para os vértices do ciclo interno de tamanho 5, utilizamos rótulos com números pares, assegurando que vértices vizinhos nesse ciclo também tenham rótulos distanciados em 2 unidades. No entanto, ao selecionar os rótulos para o ciclo interno, fizemos essa escolha de forma a evitar rótulos consecutivos aos rótulos dos vértices vizinhos do ciclo externo no grafo de Petersen.

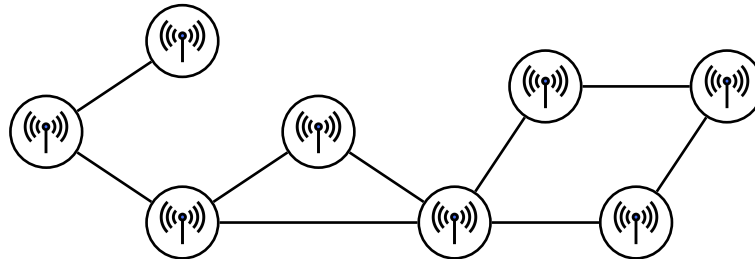
Figura 6 – Uma $L(2, 1)$ -rotulação ótima do grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Colorações *Backbone*. A variação da Coloração de Vértices que será abordada neste trabalho, introduzida em (BROERSMA *et al.*, 2003), é conhecida como Coloração *Backbone*. A atribuição de frequências é uma motivação fundamental na aplicação da Coloração *Backbone*, onde os grafos são usados para modelar as redes de transmissores, como antenas. Nesse problema, as antenas são representadas pelos vértices do grafo, e uma aresta entre dois vértices indica que as antenas correspondentes estão suficientemente próximas para causar interferência caso operem no mesmo canal de frequência. Na Figura 7, apresentamos uma distribuição de antenas que atende às condições mencionadas.

Figura 7 – Uma distribuição de antenas.

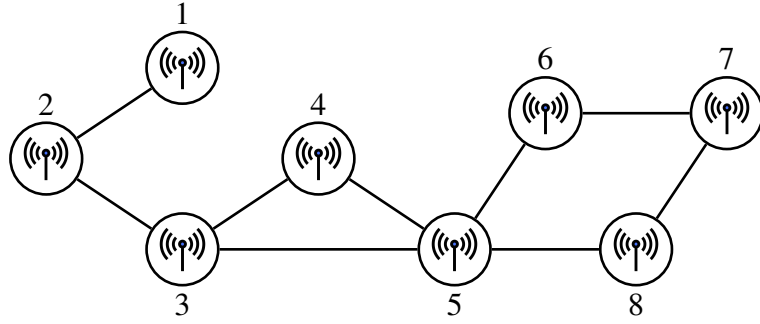


Fonte: Autoria própria, 2024.

A Coloração de Vértices permite atribuir diferentes canais de frequência às antenas, evitando interferências na comunicação. Cada vértice do grafo, representando uma antena, recebe uma cor que representa um canal de frequência, assegurando que antenas adjacentes não compartilhem a mesma cor. Na Figura 8, apresentamos uma coloração da distribuição de antenas, onde cada canal de frequência é distinto para os vértices, garantindo que quaisquer antenas vizinhas não tenham a mesma cor.

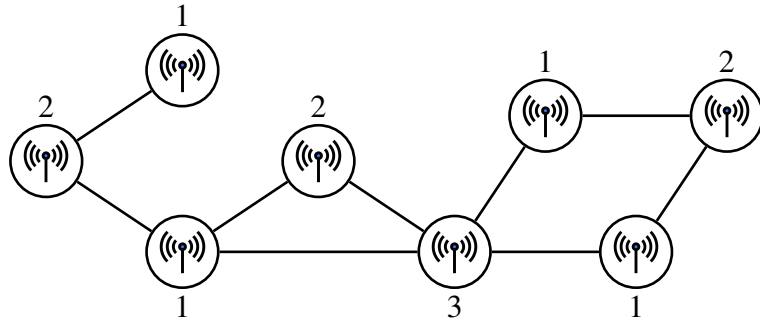
Ao tentar minimizar o número de cores utilizadas, apresentamos na Figura 9 uma coloração ótima que utiliza apenas 3 cores. Observe que há três vértices que são mutuamente adjacentes, o que torna impossível a coloração com um número menor de cores.

Figura 8 – Uma coloração dos vértices da distribuição de antenas.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Figura 9 – Uma coloração ótima dos vértices da distribuição de antenas.



Fonte: Autoria própria, 2024.

No entanto, no contexto da Coloração *Backbone*, temos uma estrutura especial chamada de *backbone* do grafo. Nesse caso, as conexões entre alguns pares de antenas são tão fortes que a simples atribuição de canais distintos não é suficiente para evitar interferências. É necessário manter uma certa distância nos canais atribuídos às antenas no *backbone*, a fim de garantir um nível aceitável de interferência.

Agora, podemos definir formalmente a Coloração *Backbone*. Considerando um grafo $G = (V, E)$ e um subgrafo gerador H de G , chamado de *backbone* de G , uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que atende às seguintes condições: $|f(u) - f(v)| \geq 1$ para toda $uv \in E(G)$ e $|f(u) - f(v)| \geq q$ para toda $uv \in E(H)$. Esta última será chamada de *condição do backbone*.

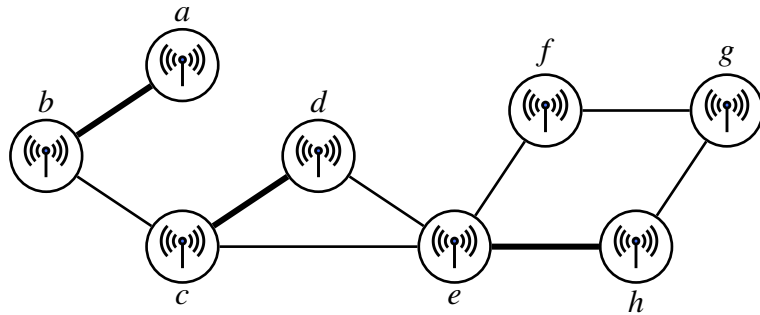
O número cromático q -*backbone* de (G, H) , denotado por $BBC_q(G, H)$, é o menor inteiro k para o qual existe uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) . Quando temos uma coloração q -*backbone* do par (G, H) que utiliza exatamente $BBC_q(G, H)$ cores, chamamos essa coloração de *ótima*. Dizemos que duas cores c_1 e c_2 em uma coloração q -*backbone* são *vizinhas* se $|c_1 - c_2| < q$. Observe que duas cores vizinhas não podem ser usadas nas extremidades de uma aresta no *backbone*, pois isso violaria a condição do *backbone*.

Outra definição importante para a Coloração *Backbone* é a de coloração simétrica, mencionada brevemente no artigo de Broersma et al. (BROERSMA *et al.*, 2007), sem ser formalmente definida. No entanto, no artigo de Bu et al., essa definição aparece explicitamente em um lema, ao citar o resultado de Broersma et al. (BU; LI, 2011).

Sejam G um grafo, H um subgrafo gerador de G , e f e g duas k -colorações de G que satisfaçam $f(v) + g(v) = k + 1$ para todo vértice v de G . Note que, se f é uma k -coloração q -backbone de (G, H) , então a coloração g também é uma k -coloração q -backbone de (G, H) . Diz-se, então, que f é uma *coloração simétrica* (ou simplesmente *simétrica*) de g (BROERSMA *et al.*, 2007; BU; LI, 2011). Vale ressaltar que esses autores definiram colorações simétricas apenas no contexto de árvores como *backbone* e para $q = 2$, embora a definição possa ser estendida para um *backbone* qualquer e para um inteiro $q \geq 2$.

Voltando à distribuição de antenas vista anteriormente, se considerarmos que as arestas em negrito pertencem ao *backbone*, conforme mostrado na Figura 10, podemos tentar construir uma coloração 2-backbone ótima para esse grafo.

Figura 10 – Uma distribuição de antenas (com as arestas do *backbone* em negrito).

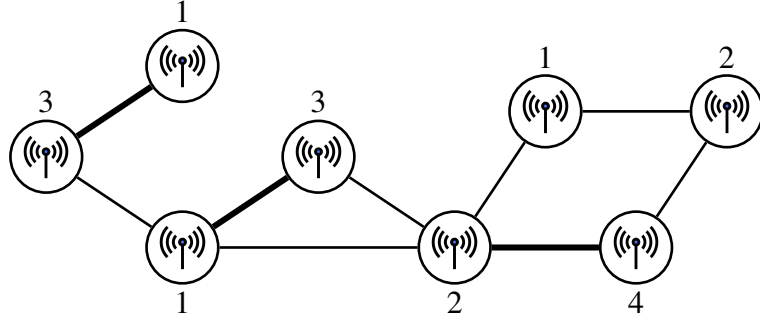


Fonte: Autoria própria, 2024.

Sendo (G, H) o par da Figura 10, como mencionado ao tentar mostrar que $\chi(G) = 3$, os vértices c , d e e formam uma clique, ou seja, são mutuamente adjacentes. Assim, é impossível utilizar menos de 3 cores na coloração. Ao tentar construir uma 3-coloração 2-backbone de (G, H) , não podemos colorir os vértices u ou v com a cor 2 para qualquer aresta uv no *backbone*, pois 2 é uma cor vizinha de 1 e 3, as únicas cores disponíveis para serem usadas nesta coloração. Como os vértices c , d e e formam uma clique, são extremidades de arestas no *backbone* e a cor 2 não pode ser usada, não conseguimos completar uma 3-coloração 2-backbone de (G, H) . Na Figura 11, vemos uma 4-coloração 2-backbone desse par, e como não conseguimos fazer com menos cores, concluímos que $BBC_2(G, H) = 4$.

Bu et al. comparam a $L(2, 1)$ -rotulação com a Coloração *Backbone*. Dado um grafo

Figura 11 – Uma 4-coloração 2-backbone de (G, H) (com as arestas do *backbone* em negrito) com $BBC_2(G, H) = 4$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

G , uma $L(2, 1)$ -rotulação de G é equivalente a uma coloração 2-backbone de (G^2, G) , onde G^2 é o *quadrado* de G , isto é, o grafo G^2 é obtido a partir de G ao adicionar arestas entre os vértices de G que estão a uma distância 2 em G (BU *et al.*, 2013).

Se o *backbone* for um grafo vazio, ou seja, sem arestas, Havet *et al.* afirmam que $BBC_q(G, H) = \chi(G)$, pois, nesse caso, a coloração realizada em (G, H) é simplesmente uma coloração própria de G (HAVET *et al.*, 2014).

Como toda coloração q -backbone é, em particular, uma coloração própria dos vértices de um grafo G , temos o seguinte resultado de complexidade computacional: para $k \geq 3$, decidir se o número cromático *backbone* do par (G, H) é menor ou igual a k é NP-completo. Isso se deve ao fato de que o problema de decidir se um grafo pode ser propriamente colorido com k cores é NP-completo para $k \geq 3$ (GAREY; JOHNSON, 1979).

Em (HAVET *et al.*, 2014), também são discutidos limitantes gerais do número cromático da Coloração *Backbone*. Considerando G como um grafo e H como um subgrafo gerador de G , os limitantes apresentados são os seguintes:

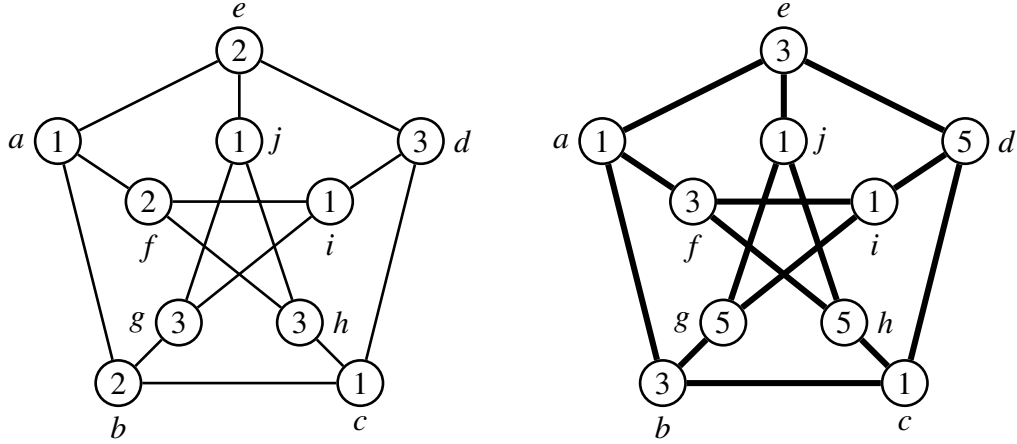
$$BBC_q(H, H) \leq BBC_q(G, H) \leq BBC_q(G, G) \quad (1.1)$$

$$q \cdot \chi(H) - q + 1 \leq BBC_q(G, H) \leq q \cdot \chi(G) - q + 1 \quad (1.2)$$

Note que toda coloração q -backbone de um par (G, H) será também uma coloração q -backbone para qualquer par (G', H') , onde $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$. Isso explica os limitantes em (1.1). Seja f uma $\chi(G)$ -coloração de G . Definimos uma nova função g como $g(v) = q \cdot f(v) - q + 1$, onde a ideia é garantir que todas as cores estejam a uma distância de q , assegurando que a condição do *backbone* seja satisfeita. Portanto, g é uma $(q \cdot \chi(G) - q + 1)$ -coloração q -backbone de (G, H) . Como g é uma coloração ótima quando $G = H$, obtemos os limitantes descritos em (1.2).

Na Figura 12, podemos observar uma coloração ótima e uma coloração 2-backbone ótima do grafo de Petersen, quando o *backbone* é o próprio grafo de Petersen. Para construir a coloração 2-backbone ótima, utilizamos a função g conforme discutido para demonstrar o limitante de (1.2), onde f é uma coloração ótima do grafo de Petersen ilustrada na Figura 12.

Figura 12 – Uma coloração ótima de G e uma coloração 2-backbone ótima de (G, G) (com as arestas do *backbone* em negrito), onde G é o grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Nossas contribuições. Um dos nossos primeiros resultados está relacionado com um teorema demonstrado em (HAVET *et al.*, 2014). Para enunciar esse teorema, é necessário definir algumas classes de grafos. Uma *floresta* é um grafo que não possui ciclos, ou seja, um *grafo acíclico*. Por outro lado, uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Uma *estrela* é uma árvore em que um vértice x , denominado *centro da estrela*, é adjacente a todos os outros vértices do grafo. Finalmente, uma *galáxia* é uma floresta de estrelas. Na Figura 13, são ilustrados exemplos de uma estrela com centro no vértice x e de uma galáxia como *backbone* no grafo de Petersen, com centros das estrelas nos vértices a , d e j .

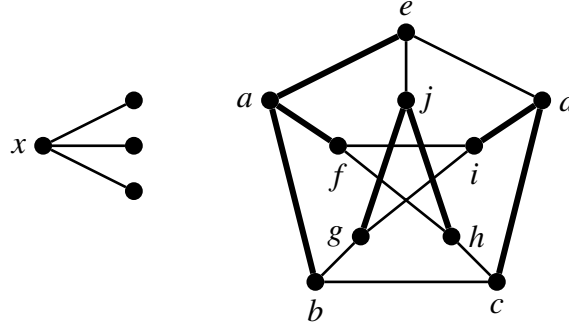
Teorema 1. (HAVET *et al.*, 2014) Para todo inteiro $q \geq 3$, o seguinte problema é NP-completo.

Entrada: Um grafo planar G e uma galáxia F em G com grau máximo 3.

Pergunta: $BBC_q(G, F) \leq q + 3$?

No VII Encontro de Teoria da Computação (ETC), apresentamos um resumo estendido (CASTRO *et al.*, 2022), no qual corrigimos a demonstração do Teorema 1. Para demonstrar o Teorema 1, Havet et al. provam o seguinte lema sobre um *gadget* utilizado na demonstração, denominado pipa (representado na Figura 14):

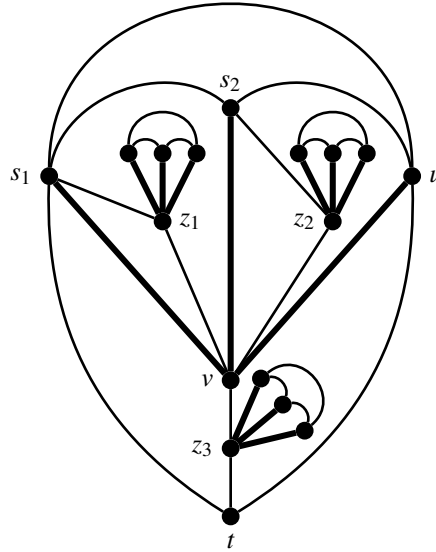
Figura 13 – Uma estrela com centro em x e uma galáxia (com as arestas do *backbone* em negrito) no grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Lema 2. (HAVET *et al.*, 2014) Se ϕ é uma $(q+3)$ -coloração q -backbone de uma pipa tal que $\phi(t) \in \{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$, então ou $\phi(t) \in \{1, 2, 3\}$ e $\phi(u) = q+3$, ou $\phi(t) \in \{q+1, q+2, q+3\}$ e $\phi(u) = 1$.

Figura 14 – A pipa (com as arestas do *backbone* em negrito).

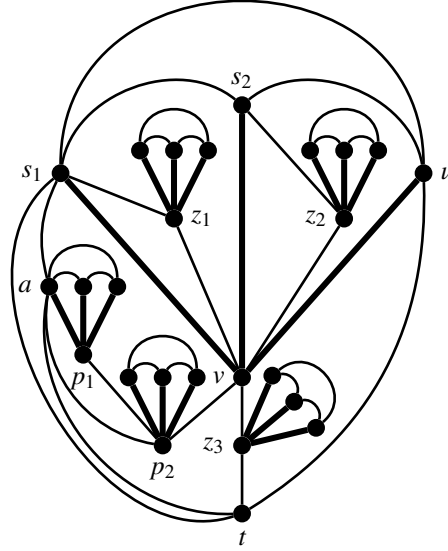


Fonte: Autoria própria, adaptado de (HAVET *et al.*, 2014), 2024.

A partir da pipa representada na Figura 14, identificamos um erro no resultado esperado do Lema 2. Para garantir a validade desse lema, construímos uma nova versão da pipa, ilustrada na Figura 15, preservando suas propriedades de planaridade e de ter um *backbone* em forma de galáxia com grau máximo 3, conforme exigido pelo Teorema 1.

Outro resultado, também apresentado no VII Encontro de Teoria da Computação (ETC), envolve uma variação circular da Coloração *Backbone*, denominada Coloração *Backbone* Circular. Esta coloração é bem definida e diversos resultados sobre ela podem ser encontrados

Figura 15 – A pipa corrigida (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

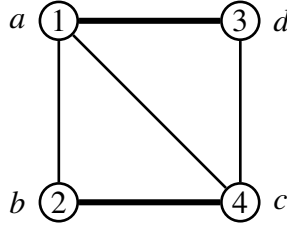
em (HAVET *et al.*, 2014). Antes de enunciarmos nosso resultado, introduziremos algumas noções básicas dessa coloração.

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um subgrafo gerador H de G , o *backbone* de G , dizemos que uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que satisfaz as seguintes condições: $|f(u) - f(v)| \geq 1$, para toda aresta $uv \in E(G)$ e $q \leq |f(u) - f(v)| \leq k - q$, para toda aresta $uv \in E(H)$. De forma semelhante a Coloração *Backbone*, o *número cromático q -backbone circular*, denotado por $\text{CBC}_q(G, H)$, é o menor inteiro k para o qual existe uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) .

Observe que toda coloração q -backbone circular é, em particular, uma coloração q -backbone, mas nem toda coloração q -backbone é uma coloração q -backbone circular para um par (G, H) . Na Figura 16, temos uma coloração que é tanto 2-backbone circular quanto 2-backbone para o par (G, M) . Já na Figura 17, observe que os vértices a e d , que são vizinhos no *backbone*, estão coloridos com cores que não satisfazem a condição da versão circular da coloração *backbone*. Dessa forma, esta é uma coloração 2-backbone que não é 2-backbone circular.

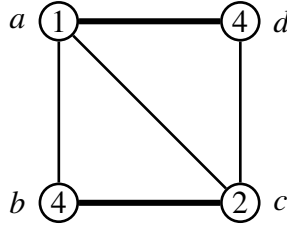
Em (BROERSMA *et al.*, 2009a), para um grafo planar G e um emparelhamento M de G , é provado que $\text{CBC}_2(G, M) \leq 6$ usando o Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976). Havet *et al.* observam que esse resultado pode ser generalizado para qualquer $q \geq 2$, resultando em $\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q + 2$ (HAVET *et al.*, 2014). Provamos o seguinte resultado

Figura 16 – Uma coloração 2-backbone circular de (G, M) (com as arestas do backbone em negrito) com $CBC_2(G, M) = 4$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Figura 17 – Uma coloração 2-backbone de (G, M) (com as arestas do backbone em negrito) com $BBC_2(G, M) = 4$, que não é 2-backbone circular.



Fonte: Autoria própria, 2024.

sobre esse limitante sem utilizar o Teorema das Quatro Cores:

Teorema 3. (CASTRO et al., 2022) Se G é um grafo planar e M um emparelhamento de G , então $CBC_q(G, M) \leq q + 5$ quando $q \in \{2, 3\}$.

Neste trabalho, também corrigimos um erro em uma demonstração de um teorema de Broersma et al. e mostramos que o resultado do limitante superior do Teorema 4 continua válido.

Teorema 4. (BROERSMA et al., 2003) Se G é um grafo split e T uma árvore geradora de G , então, se $\chi(G) \geq 3$, temos que $BBC_2(G, T) \leq \chi(G) + 2$. Esse limitante é o melhor possível.

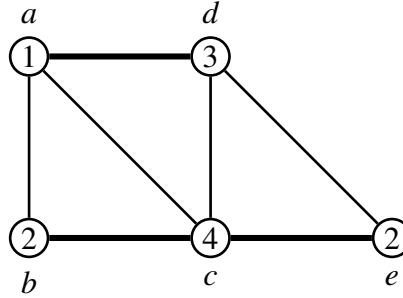
Neste trabalho, introduzimos e estudamos uma variação direcionada da Coloração Backbone denominada Coloração Backbone Direcionada. Ao contrário da Coloração Backbone original, nossa abordagem considera uma orientação acíclica do backbone. Em outras palavras, isso significa que, dado um subgrafo gerador de G , cada aresta desse subgrafo é orientada de modo a impedir a formação de ciclos direcionados.

Considerando um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} do subgrafo gerador H de G , uma k -coloração q -backbone direcionada é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que satisfaz as seguintes condições: $|f(u) - f(v)| \geq 1$ para toda $uv \in E(G)$ e $f(v) - f(u) \geq q$ para todo $(u, v) \in \vec{H}$. Note que é necessário afirmar que a orientação é acíclica para garantir a boa definição da coloração, já que para todo $(u, v) \in \vec{H}$, precisamos que $f(v) > f(u)$.

Similarmente à Coloração *Backbone*, definimos o *número cromático q -backbone direcionado*, denotado por $BBC_q(G, \vec{H})$, como o menor inteiro k para o qual existe uma k -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{H}) . Quando temos uma coloração q -backbone direcionada que usa exatamente $BBC_q(G, \vec{H})$ cores, dizemos que essa coloração é *ótima*.

Para compreender como a Coloração *Backbone* Direcionada difere da Coloração *Backbone*, observamos a Figura 18, que mostra uma 4-coloração 2-backbone de um grafo G e seu backbone H . De forma semelhante ao que discutimos sobre o par ilustrado na Figura 10, não é possível obter uma 3-coloração 2-backbone para o par (G, H) . Assim, temos que $BBC_2(G, H) = 4$, e a coloração apresentada na Figura 18 é ótima.

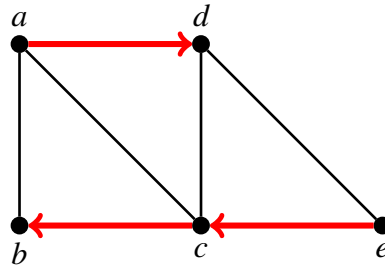
Figura 18 – Uma coloração 2-backbone de (G, H) (com as arestas do backbone em negrito) com $BBC_2(G, H) = 4$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Observe que, ao orientar H conforme a Figura 19 para obter o par (G, \vec{H}) , a coloração 2-backbone mostrada na Figura 18 não satisfaz as restrições da coloração 2-backbone direcionada. Isso ocorre porque $(c, b) \in \vec{H}$, o que significa que a cor atribuída a c deve ser menor que a cor atribuída a b , respeitando a direção do arco na coloração.

Figura 19 – Uma orientação do backbone (com os arcos do backbone em vermelho) de um grafo G .



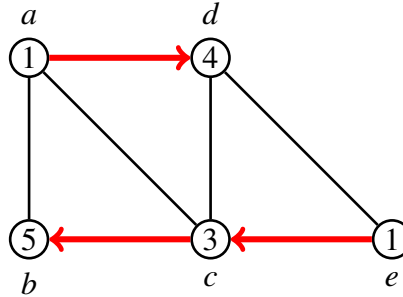
Fonte: Autoria própria, 2024.

Ao tentar construir uma coloração 2-backbone direcionada ótima f para o par (G, \vec{H}) da Figura 19, observe que, devido à existência de um caminho direcionado nos vértices e, c e

b , as restrições da coloração exigem que cada vértice que recebe um arco seja colorido com uma cor $\alpha \geq 3$, de modo que as cores desses vértices estejam a uma distância de 2 da cauda do arco. Assim, os vértices b , c e d devem receber cores maiores ou iguais a 3. Além disso, como $(c, b) \in \vec{H}$, é necessário que $f(b) - f(c) \geq 2$. Sabendo que $f(c) \geq 3$, obtemos que $f(b) \geq 5$. Portanto, são necessárias pelo menos 5 cores para colorir o par (G, \vec{H}) .

Consequentemente, ao tentar minimizar o número de cores usadas, a Figura 20 apresenta uma coloração 2-backbone direcionada do par (G, \vec{H}) que utiliza exatamente 5 cores. Assim, essa coloração é ótima.

Figura 20 – Uma coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{H}) (com os arcos do backbone em vermelho) com $\text{BBC}_2(G, \vec{H}) = 5$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Apresentamos agora alguns resultados gerais para a versão direcionada da Coloração Backbone. Antes de enunciar o primeiro resultado, é necessário definir dois parâmetros:

$$\text{BBC}_q^-(G, H) = \min\{\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \mid \vec{H} \text{ é uma orientação acíclica de } H\} \quad (1.3)$$

$$\text{BBC}_q^+(G, H) = \max\{\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \mid \vec{H} \text{ é uma orientação acíclica de } H\} \quad (1.4)$$

Considerando um grafo G e seu subgrafo gerador H , o nosso primeiro teorema estabelece uma comparação entre os números cromáticos da coloração backbone e da coloração backbone direcionada.

Teorema 5. Se G é um grafo e H um subgrafo gerador de G , então

$$\text{BBC}_q^-(G, H) = \text{BBC}_q(G, H) \leq \text{BBC}_q^+(G, H).$$

O nosso segundo teorema estabelece um limitante superior para o número cromático q -backbone direcionado em função do diâmetro de \vec{H} , de $\chi(G)$ e de um inteiro $q \geq 2$, considerando um grafo G arbitrário e uma orientação acíclica \vec{H} de um subgrafo gerador H de G . Além disso, demonstramos que esse limitante é ótimo.

Teorema 6. Se G é um grafo e \vec{H} uma orientação acíclica do subgrafo gerador H de G , então $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq \text{diam}(\vec{H}) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$. Esse limitante é o melhor possível.

Além dos resultados gerais, ao considerar um grafo G com uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M em G , obtemos alguns resultados específicos para o par (G, \vec{M}) . Demonstramos, por exemplo, que o limitante superior estabelecido no Teorema 6 é ótimo mesmo sob essas condições.

Para um grafo G e uma galáxia H em G , se existe uma orientação acíclica \vec{H} de H tal que cada vértice v de G seja exclusivamente uma cabeça ou uma cauda dos arcos de \vec{H} , chamamos \vec{H} de uma *galáxia direcionada* de G . Nesse caso, vale que $\text{diam}(\vec{H}) \leq 1$.

Portanto, se G é um grafo planar e \vec{H} uma galáxia direcionada de G , então concluímos, a partir do Teorema 6 e do Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), que $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq q + 6$. Demonstramos também que esse limitante é ótimo nessas condições.

Considerando um grafo G com n vértices e um caminho hamiltoniano P em G . Se \vec{P} é uma orientação de P formando um caminho direcionado, chamamos \vec{P} de *caminho hamiltoniano direcionado* de G . Provamos que, neste caso, $\text{BBC}_q(G, \vec{P}) = (n - 1) \cdot q + 1$.

Para apresentar os resultados obtidos sobre a complexidade computacional na Coloração *Backbone* Direcionada, definimos o problema de complexidade computacional da seguinte forma:

EMP. ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE DIRECIONADA

Entrada: Um grafo G e uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, \vec{M}) \leq \ell$?

Demonstramos que o problema EMP. ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA é resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 4$, mas torna-se NP-completo para $\ell \geq 5$. Além disso, generalizamos esse resultado para o caso em que \vec{F} é uma orientação de uma floresta de k -caminhos, onde cada k -caminho é um caminho direcionado na orientação \vec{F} .

A estrutura desta dissertação é organizada da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta as definições e teoremas básicos utilizados ao longo do trabalho. No Capítulo 3, realizamos uma revisão bibliográfica abrangente dos principais resultados conhecidos na Coloração *Backbone*, com ênfase em algumas classes de grafos associadas ao *backbone*. O Capítulo 4 destaca as contribuições obtidas, dividindo-se em duas seções distintas: a primeira concentra-se na

Coloração *Backbone*, enquanto a segunda aborda a variação denominada Coloração *Backbone* Direcionada, apresentando as definições básicas desta variação, bem como os resultados obtidos. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais, juntamente com possíveis direções para pesquisas futuras na Coloração *Backbone* e na sua versão direcionada.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, introduzimos conceitos fundamentais de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional que serão essenciais para o desenvolvimento desta dissertação. Esses conceitos foram baseados em três livros que recomendamos para um aprofundamento na área: “*Introduction to Graph Theory*” de Douglas B. West (WEST, 2001), “*Graph Theory with Applications*” de John A. Bondy e Uppaluri S. R. Murty (BONDY; MURTY, 1976) e “*Introduction to Algorithms*” de Thomas R. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest e Clifford Stein (CORMEN *et al.*, 2022).

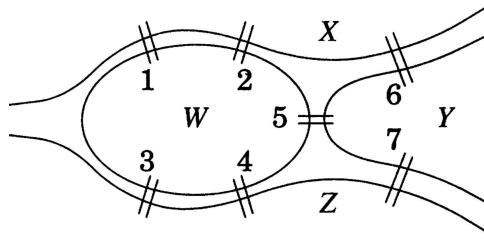
2.1 Teoria dos Grafos

Estruturamos esta seção em quatro subseções. A primeira cobre definições básicas, incluindo a definição formal de grafo, cliques, conjuntos independentes, ciclos e caminhos, além de resultados iniciais relevantes, como o Teorema de König, que caracteriza grafos bipartidos. A segunda subseção foca em florestas, árvores e emparelhamentos, conceitos fundamentais para o estudo das classes de *backbone*. Na terceira subseção, abordamos a k -coloração de um grafo G , o algoritmo guloso para coloração, limitantes para o número cromático, além de planaridade, encerrando com o Teorema das Quatro Cores. Por fim, a quarta subseção apresenta definições básicas de grafos direcionados, essenciais para a versão direcionada da coloração *backbone* nesta dissertação.

Antes de abordar as definições básicas da Teoria dos Grafos, podemos começar apresentando o problema que deu origem a essa área, conforme destacado em (WEST, 2001). Trata-se do Problema das Pontes de Königsberg. Nesse problema, a cidade de Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia) tinha sete pontes que ligavam quatro áreas de terra separadas pelo rio Prególia, conforme mostrado na Figura 21. O desafio consistia em descobrir se era possível fazer um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

Podemos representar as pontes de Königsberg como arestas e cada área de terra como um vértice, conforme ilustrado na Figura 22, facilitando a visualização do problema. Note que, ao entrar e sair de uma área de terra, usamos duas pontes conectadas a essa área, o que requer que cada área de terra tenha um número par de pontes terminando nela se quisermos cruzar todas as pontes uma única vez. No entanto, isso não ocorre nas pontes de Königsberg,

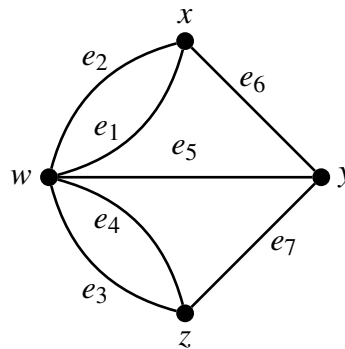
Figura 21 – As pontes de Königsberg.



Fonte: (WEST, 2001).

como fica claro na Figura 22, já que, por exemplo, o vértice y tem três pontes terminando nele.

Figura 22 – A representação das pontes de Königsberg usando vértices e arestas.



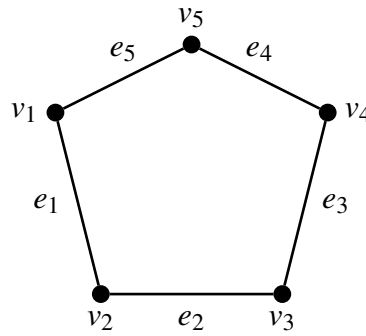
Fonte: Autoria própria, 2024.

2.1.1 Definições básicas

Um *grafo* G é uma tripla composta de um *conjunto de vértices* $V(G)$, um *conjunto de arestas* $E(G)$ e uma *função de incidência* ϕ_G que associa cada aresta a dois vértices (não necessariamente distintos), chamados de *extremidades* da aresta. Se as extremidades de uma aresta e são u e v , dizemos que u e v são *vizinhos* ou *adjacentes*. Se u é extremidade da aresta e , dizemos que u e e são *incidentes*.

Quando o grafo em questão está claro no contexto, utilizamos as notações V e E para representar os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente. Na Figura 23, temos um exemplo de um grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e ϕ_G é definida da seguinte forma: $\phi_G(e_1) = v_1v_2$, $\phi_G(e_2) = v_2v_3$, $\phi_G(e_3) = v_3v_4$, $\phi_G(e_4) = v_4v_5$ e $\phi_G(e_5) = v_5v_1$.

Como cada aresta está associada a um par de vértices pela função de incidência, podemos visualizar as arestas como os pares de vértices que lhes correspondem. Se e é uma aresta com extremidades em u e v , podemos representá-la como $e = uv$ (ou $e = vu$). Observe que, na Figura 23, não há arestas cujas extremidades estão no mesmo vértice, nem duas arestas

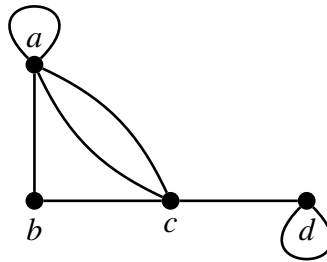
Figura 23 – Um grafo G .

Fonte: Autoria própria, 2024.

com as mesmas extremidades. No entanto, isso pode ocorrer em outros grafos, e existe uma definição apropriada para esses casos.

Um *laço* é uma aresta cujas extremidades estão no mesmo vértice, isto é, se e é uma aresta, então $e = uu$, onde u é um vértice do grafo. Quando temos arestas que compartilham as mesmas extremidades, chamamos essas arestas de *arestas múltiplas*. Um grafo G que não possui laços nem arestas múltiplas é chamado de *grafo simples*.

Na Figura 24, podemos ver um grafo com laços nos vértices a e d , além de arestas múltiplas entre os vértices a e c . Portanto, esse grafo não é simples. Contudo, de acordo com essa definição, o grafo da Figura 23 é um grafo simples.

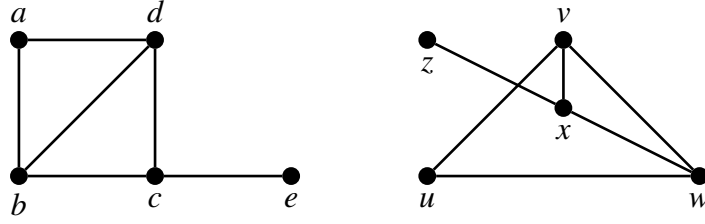
Figura 24 – Um grafo G com laços e arestas múltiplas.

Fonte: Autoria própria, 2024.

Dados grafos simples G e H , um *isomorfismo* $f: V(G) \rightarrow V(H)$ é uma função bijetora que satisfaz a condição: $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Quando isso ocorre, dizemos que G é *isomorfo* a H e denotamos por $G \cong H$.

Na Figura 25, apresentamos dois grafos G e H para os quais vale $G \cong H$, com o isomorfismo f definido como segue: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = x$, $f(d) = v$, e $f(e) = z$.

Dado um grafo simples G , o *grau* de um vértice v , denotado por $d_G(v)$ (ou $d(v)$ quando o grafo estiver claro no contexto), é o número de arestas incidentes em v . Se o grafo não

Figura 25 – Um grafo G e um grafo H isomorfos.

Fonte: Autoria própria, 2024.

for simples, cada laço é contado duas vezes. A *vizinhança* de um vértice v , denotada por $N_G(v)$ (ou $N(v)$, quando o grafo for claro no contexto), é o conjunto de vértices adjacentes a v .

O *grau máximo* de G é representado por $\Delta(G)$, enquanto o *grau mínimo* de G é representado por $\delta(G)$. Dizemos que G é *regular* se $\Delta(G) = \delta(G)$, e, se $\Delta(G) = \delta(G) = k$, G é chamado de *k-regular*.

Ao observar o grafo da Figura 24, podemos identificar as vizinhanças dos vértices: $N_G(a) = \{a, b, c\}$, $N_G(b) = \{a, c\}$, $N_G(c) = \{a, b, d\}$ e $N_G(d) = \{c, d\}$. Quanto aos graus dos vértices, temos: $d_G(a) = 5$, $d_G(b) = 2$, $d_G(c) = 4$ e $d_G(d) = 3$.

Um grafo *finito* é um grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são finitos. Se o conjunto de vértices de um grafo é vazio, ele é chamado de *grafo nulo*. Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de *grafo vazio*. Quando um grafo possui somente um vértice, ele é chamado de *grafo trivial*.

Os grafos estudados nesse trabalho serão sempre simples, finitos, não-nulos e não-rotulados.

Dado um grafo G , o número de vértices de G , chamado de *ordem* de G , é denotado por $n(G)$ (ou simplesmente n) e o número de arestas de G , chamado de *tamanho* de G , é denotado por $m(G)$ (ou simplesmente m).

A próxima proposição, conhecida como o “Lema do Aperto de Mão”, apresenta um resultado relacionado aos graus dos vértices de um grafo.

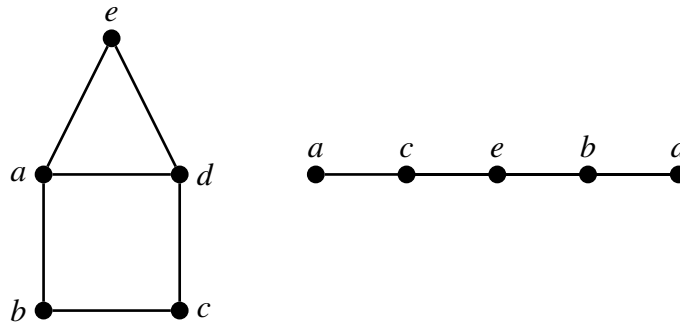
Proposição 7. *Se G é um grafo, então*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m(G).$$

O *grau médio* de um grafo G , denotado por $\text{Ad}(G)$, é $\frac{2m(G)}{n(G)}$. Para um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, dado que $\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$ e usando a Proposição 7, temos que $\delta(G) \leq \text{Ad}(G) \leq \Delta(G)$.

O *complementar* de um grafo simples G , denotado por \bar{G} , é o grafo tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e que respeita a seguinte condição: $uv \in E(\bar{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$. Na Figura 26, temos um grafo G e seu complementar \bar{G} . Note que, em G , o vértice e não é vizinho dos vértices b e c . Portanto, no complementar \bar{G} , as arestas eb e ec estão presentes.

Figura 26 – Um grafo G e o seu complementar \bar{G} .



Fonte: Autoria própria, 2024.

Uma *clique* em um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ em que todos os vértices de S são adjacentes entre si. Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto $I \subseteq V(G)$ em que todos os vértices de I são dois a dois não adjacentes. O tamanho da maior clique e do maior conjunto independente do grafo G são denotados por $\omega(G)$ e $\alpha(G)$, respectivamente.

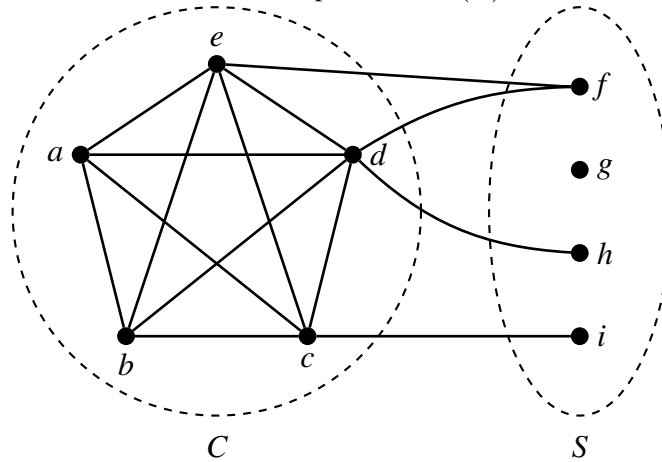
Como exemplo, na Figura 26, os vértices a , d e e no grafo G formam uma clique, que é a maior clique do grafo G , portanto $\omega(G) = 3$. No grafo complementar \bar{G} , os mesmos vértices a , d e e formam um conjunto independente, que é o maior conjunto independente do grafo \bar{G} , portanto $\alpha(\bar{G}) = 3$. Note que as cliques de um grafo G tornam-se conjuntos independentes no grafo complementar \bar{G} , e vice-versa.

Um *grafo split* é um grafo G em que o conjunto de vértices $V(G)$ é particionado em uma clique e um conjunto independente (podendo existir arestas conectando esses dois conjuntos). Na Figura 27, observe o grafo G cujo conjunto de vértices é particionado em uma clique $C = \{a, b, c, d, e\}$ e um conjunto independente $S = \{f, g, h, i\}$. Note que existem arestas conectando vértices de C a vértices de S , como as arestas df e ci .

O grafo *split* é conhecido por sua estrutura simples, o que resulta em uma ampla variedade de resultados para essa classe de grafos. Outro grafo de grande interesse de estudo é o grafo bipartido, que também tem sido extensivamente estudado.

Um *grafo bipartido* é um grafo G em que o conjunto de vértices $V(G)$ é particionado em dois conjuntos independentes, podendo existir arestas conectando esses dois conjuntos. Um

Figura 27 – Um grafo *split* G com uma clique C e um conjunto independente S que particiona $V(G)$.

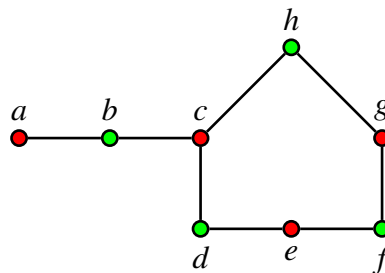


Fonte: Autoria própria, 2024.

grafo G é *k-partido*, se o seu conjunto de vértices é particionado em k conjuntos independentes.

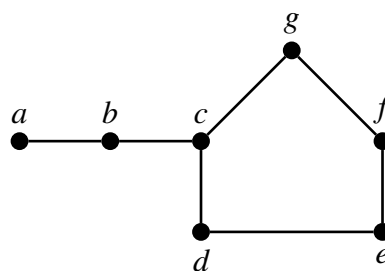
A Figura 28 apresenta um exemplo de grafo bipartido, no qual os vértices vermelhos formam um conjunto independente, enquanto os vértices verdes constituem o segundo conjunto independente. No entanto, é importante observar que nem todo grafo é bipartido. A Figura 29 ilustra um grafo que não é bipartido. Adiante, explicaremos por que esse grafo não pode ser bipartido.

Figura 28 – Um grafo bipartido G .



Fonte: Autoria própria, 2024.

Figura 29 – Um grafo não bipartido G .

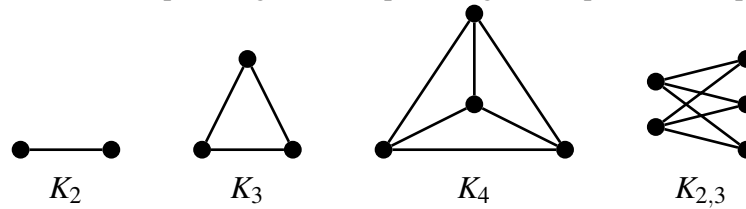


Fonte: Autoria própria, 2024.

Um *grafo completo* é um grafo em que todos os pares de vértices u e v são adjacentes. Se o grafo possui n vértices, ele é denotado por K_n . Um *grafo bipartido completo*, também chamado de *biclique*, é um grafo bipartido com partições A e B tal que, para cada par $(u, v) \in A \times B$, temos $uv \in E(G)$. Quando $|A| = r$ e $|B| = s$, a biclique é denotada por $K_{r,s}$.

Um grafo G é *k-partido completo* se for k -partido, com as partições V_1, \dots, V_k de $V(G)$, em que $uv \in E(G)$ para quaisquer $u \in V_i$ e $v \in V_j$, sempre que $i \neq j$. A Figura 30 apresenta exemplos de grafos completos e bipartidos completos.

Figura 30 – Exemplos de grafos completos e grafos bipartidos completos.



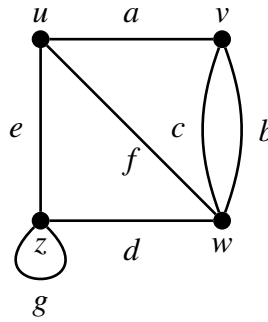
Fonte: Autoria própria, 2024.

Um *passeio* é uma sequência alternada de vértices e arestas, $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, que começa e termina em vértices, com cada aresta $e_i = v_{i-1}v_i$. Esse passeio é denominado (v_0, v_k) -passeio. Os vértices v_0 e v_k são chamados, respectivamente, de *origem* e *término* do passeio, enquanto os demais vértices na sequência são os *vértices internos*. O *comprimento* de um passeio corresponde ao número de arestas presentes nele. Um *passeio fechado* é um passeio em que $v_0 = v_k$. Uma *trilha* é um passeio que não repete arestas, e uma *trilha fechada* é um passeio fechado que também não repete arestas.

Um *caminho* é uma trilha que não repete vértices. Um *ciclo* é uma trilha fechada que não repete vértices, exceto a origem e o término (v_0 e v_k). Quando um grafo G consiste apenas de um caminho (ciclo) com n vértices, denotamos o grafo G por P_n (C_n). Um (u, v) -caminho é um caminho que se inicia no vértice u e termina no vértice v . Um ciclo com comprimento k é chamado de *k-ciclo*. Um k -ciclo é *par* ou *ímpar*, se k é par ou ímpar, respectivamente. Um 3-ciclo é também chamado de *triângulo*.

Dado um grafo G , um *caminho hamiltoniano* é um caminho que percorre todos os vértices de G exatamente uma vez. Na Figura 31, (u, a, v, b, w, f, u) representa um exemplo de ciclo em G , enquanto $(v, b, w, f, u, e, z, g, z, d, w, c, v)$ é um exemplo de trilha fechada no grafo G . Já (u, a, v, c, w, d, z) é um exemplo de um caminho hamiltoniano em G .

O teorema a seguir, provado por Dénes König em 1936 (KÖNIG, 1936), explica por que o grafo da Figura 29 não é bipartido: os vértices c, d, e, f e g formam um ciclo ímpar no

Figura 31 – Um grafo G não simples.

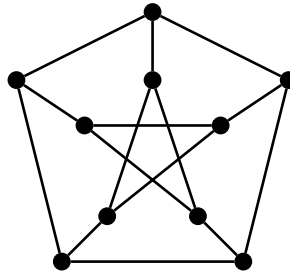
Fonte: Autoria própria, 2024.

grafo.

Teorema 8. (KÖNIG, 1936) *Um grafo é bipartido se, e somente se, ele não contém nenhum ciclo ímpar.*

A *cintura* de um grafo G , denotado por $g(G)$, é o comprimento do menor ciclo que existe no grafo. Se o grafo não tem ciclos, então $g(G) = \infty$. O grafo de Petersen, ilustrado na Figura 32, possui cintura 5. Como o grafo de Petersen é um grafo simples, não contém ciclos de comprimento 1 ou 2. Devido à sua estrutura, ele também não apresenta ciclos de comprimento 3 ou 4. Além disso, como há um ciclo externo de comprimento 5 no grafo de Petersen, este é o menor ciclo presente no grafo.

Figura 32 – O grafo de Petersen com cintura 5.



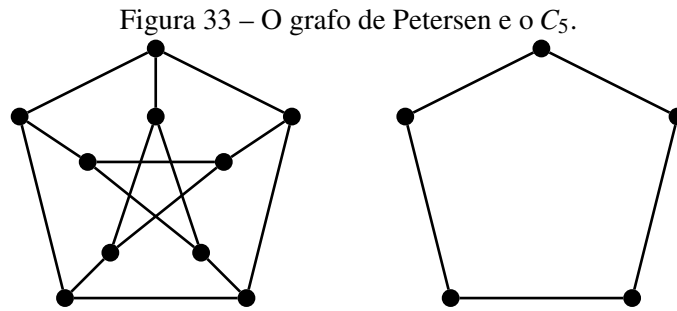
Fonte: Autoria própria, 2024.

Dados dois vértices u e v de um grafo G , se existe um (u, v) -caminho em G , a *distância* entre u e v , denotada por $d_G(u, v)$ (ou simplesmente $d(u, v)$ quando G estiver claro no contexto), é o menor comprimento de um (u, v) -caminho em G . Caso contrário, se não existir um (u, v) -caminho, definimos $d(u, v) = \infty$. O *diâmetro* de um grafo G , denotado por $\text{diam}(G)$, é a maior distância entre quaisquer dois vértices de G , isto é, $\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$.

Observe que, devido à construção do grafo de Petersen (ilustrado na Figura 32), quaisquer dois vértices que não sejam adjacentes têm um vizinho em comum. Dessa forma,

podemos afirmar que o diâmetro do grafo de Petersen é igual a 2.

Um *subgrafo* do grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Além disso, para cada aresta $e = uv$ em H deve existir uma aresta correspondente em G que conecta os mesmos vértices. Denotamos por $H \subseteq G$ quando H é um subgrafo de G . Observe na Figura 33 o grafo de Petersen, que contém o C_5 como subgrafo.

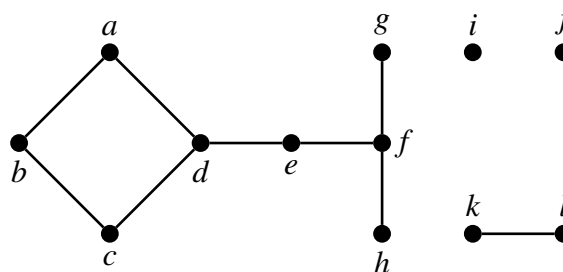


Fonte: Autoria própria, 2024.

Um grafo G é *conexo* se existe um (u,v) -caminho em G , para quaisquer vértices $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$. Caso contrário, G é *desconexo*. Uma *componente conexa* (ou simplesmente *componente*) de um grafo G é um subgrafo maximal conexo de G . Um *vértice isolado* é um vértice de grau 0.

Considerando o grafo G da Figura 34, podemos observar que não há nenhum caminho em G que conecte os vértices g e k , indicando que G é um grafo desconexo. Suas componentes conexas são: C_1 , cujos vértices são $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; C_2 , cujo vértice é $\{i\}$; C_3 , cujo vértice é $\{j\}$; e C_4 , cujos vértices são $\{k, l\}$. As componentes C_2 e C_3 são formadas apenas por vértices isolados.

Figura 34 – Um grafo G e suas componentes conexas.



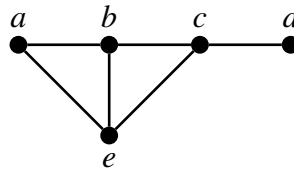
Fonte: Autoria própria, 2024.

O subgrafo de G obtido ao remover um vértice v (um conjunto de vértices S) é denotado por $G - v$ ($G - S$). Da mesma forma, o subgrafo de G obtido ao remover uma aresta e (um conjunto de arestas M) é denotado por $G - e$ ($G - M$). Uma *articulação* ou um *vértice*

de corte v em um grafo G é um vértice tal que $G - v$ possui mais componentes que G . De maneira análoga, uma *ponte* ou *aresta de corte* e em G é uma aresta tal que $G - e$ possui mais componentes que G . Um *subgrafo induzido* por um conjunto $S \subseteq V(G)$ em G , denotado por $G[S]$, é o subgrafo obtido removendo-se todos os vértices em \bar{S} , isto é, $G - \bar{S}$. Dizemos que um grafo G é H -livre se não contém H como subgrafo induzido.

No grafo G da Figura 35, o vértice c é uma articulação e a aresta cd é uma ponte. Podemos observar que nem todo subgrafo de um grafo G é um subgrafo induzido desse grafo. Por exemplo, C_4 e P_5 são subgrafos de G , mas não são subgrafos induzidos. As arestas ab , bc , ce e ca formam um C_4 como subgrafo, porém, devido à presença da aresta bc , o subgrafo induzido pelos vértices a , b , c e d não é um C_4 . Portanto, em outras palavras, o grafo G da Figura 35 é C_4 -livre.

Figura 35 – Um grafo G que não tem C_4 e P_5 como subgrafos induzidos.



Fonte: Autoria própria, 2024.

2.1.2 Florestas, árvores e emparelhamentos

Um grafo G é *acíclico* se não possui ciclos. Uma *floresta* F é um grafo acíclico. Uma *árvore* é uma floresta conexa. Uma *folha* é um vértice de grau 1. Um *subgrafo gerador* H de G é um subgrafo que contém todos os vértices de G . Uma *árvore geradora* é um subgrafo gerador que é uma árvore.

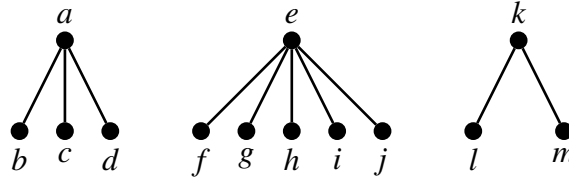
As árvores e florestas são classes de grafos amplamente estudadas na Teoria dos Grafos. Um exemplo simples de árvore é o caminho com n vértices, denotado por P_n . Um resultado básico, frequentemente utilizado em demonstrações envolvendo árvores, é o seguinte: toda árvore T com $n(T) \geq 2$ vértices possui pelo menos duas folhas.

Um *grafo k -degenerado* é um grafo G no qual, para todo subgrafo $H \subseteq G$, existe pelo menos um vértice em H com grau no máximo k . É importante notar que todo grafo 1-degenerado é uma floresta.

Uma *estrela* S é uma árvore composta por um vértice x , denominado o *centro da estrela*, que é adjacente a todos os outros vértices. Uma estrela com n vértices é o grafo bipartido

completo $K_{1,n-1}$. Uma *galáxia* é uma floresta de estrelas. Podemos observar um exemplo de uma galáxia na Figura 36, na qual as estrelas têm centros em a , e e k .

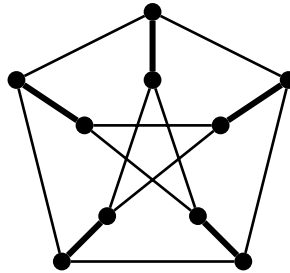
Figura 36 – Uma galáxia.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Dado um grafo simples G , um *emparelhamento* M é um conjunto de arestas de G no qual não há duas arestas que compartilham um vértice em comum como extremidade. Em outras palavras, para qualquer par de arestas distintas $e, f \in M$, as extremidades de e e f são vértices distintos. Dizemos que um vértice é *saturado* por M , ou M -saturado, se ele é uma extremidade de alguma aresta em M ; caso contrário, o vértice é *insaturado* por M , ou M -insaturado. Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento que satura todos os vértices de G . Um exemplo de emparelhamento perfeito no grafo de Petersen é apresentado na Figura 37.

Figura 37 – O grafo de Petersen com um emparelhamento perfeito em negrito.



Fonte: Autoria própria, 2024.

2.1.3 Coloração de vértices e planaridade

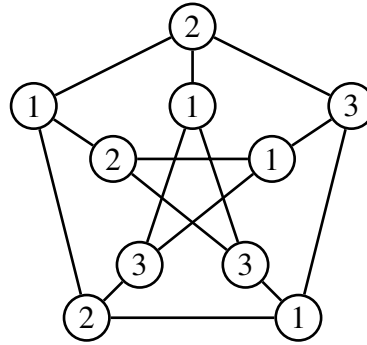
Dado um grafo G , uma k -coloração própria de G , ou simplesmente uma k -coloração de G , é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que atribui cores aos vértices de modo que vértices adjacentes não compartilhem a mesma cor. Quando G admite uma k -coloração, dizemos que G é k -colorível. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G é k -colorível. Se $\chi(G) = k$, dizemos que G é um grafo k -cromático. Uma k -coloração de um grafo k -cromático G é chamada de *coloração ótima*.

Considerando uma k -coloração f de um grafo G , uma *classe de cor* é o conjunto de

vértices que são coloridos com a mesma cor. Por definição de coloração, cada classe de cor é um conjunto independente. Portanto, saber que um grafo admite uma k -coloração é equivalente a saber se ele é k -partido, como foi definido anteriormente.

Sendo G o grafo de Petersen (ilustrado na Figura 32), sabemos que G contém um ciclo ímpar (o ciclo externo, de comprimento 5). Portanto, pelo Teorema 8, sabemos que o grafo de Petersen não é bipartido e, conseqüentemente, não admite uma 2-coloração. Assim, $\chi(G) \geq 3$. Uma 3-coloração do grafo de Petersen é apresentada na Figura 38, o que prova que $\chi(G) = 3$.

Figura 38 – Uma 3-coloração do grafo de Petersen.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Outro fato que decorre da definição de k -coloração de um grafo G é que $\chi(G) \geq \omega(G)$, pois uma clique C em G exige pelo menos $|C|$ cores distintas. O grafo de Petersen ilustra um caso em que essa desigualdade é estrita, pois satisfaz $3 = \chi(G) > \omega(G) = 2$, onde G é o grafo de Petersen.

Um grafo G é dito *perfeito* se todo subgrafo induzido H satisfaz $\chi(H) = \omega(H)$. Como todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo, e sabemos que $\chi(H) = \omega(H)$ para qualquer grafo completo H , concluímos que o grafo completo é perfeito. No entanto, existe outro tipo de grafo importante que também possui essa propriedade.

Dado um ciclo C em um grafo G , dizemos que uma aresta e é uma *corda* de C se e não pertence ao ciclo C , mas suas extremidades estão em C . Um grafo G é chamado de *cordal* se todo ciclo de comprimento pelo menos 4 possui uma corda. Dizemos que um vértice v de G é *simplicial* se $N_G(v)$ é uma clique. Uma propriedade importante dos grafos cordais é que eles sempre possuem vértices simpliciais. A partir da existência desses vértices simpliciais, pode-se provar que os grafos cordais são perfeitos.

Considerando um ordenamento dos vértices $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ de um grafo G , uma *coloração gulosa* consiste em colorir os vértices seguindo a ordem σ , atribuindo a cada vértice

$v \in V(G)$ a menor cor que não aparece nos seus vizinhos já coloridos. Com essa coloração, obtemos um limitante superior para o número cromático de um grafo, isto é, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, uma vez que cada vértice possui no máximo $\Delta(G)$ vizinhos que podem já ter sido coloridos na ordem dada.

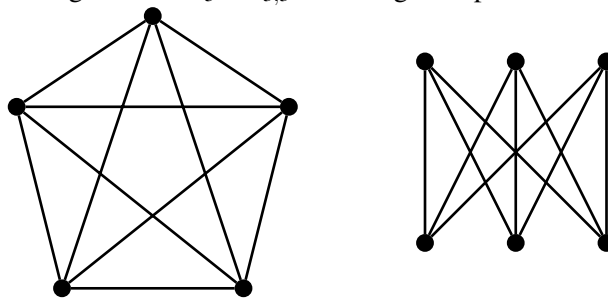
Se o grafo G é completo ou um ciclo ímpar, temos a igualdade $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Nos demais casos, o seguinte teorema, demonstrado por L. Brooks em 1941, aprimora o limitante superior:

Teorema 9. (BROOKS, 1941) *Se G é um grafo conexo que não é completo nem um ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Um grafo G é *planar* se ele pode ser desenhado no plano de forma que suas arestas não se cruzem. Esse desenho é chamado de *imersão* de G no plano. Um grafo *plano* é uma imersão de um grafo planar. O grafo plano divide o plano em regiões conexas, sendo que cada uma dessas regiões fechadas, limitadas pelas arestas de G , é chamada de *face* de G . O conjunto das faces de um grafo plano G é denotado por $F(G)$.

Nem todo grafo é planar. Os grafos apresentados na Figura 39 exemplificam grafos que não possuem essa propriedade.

Figura 39 – K_5 e $K_{3,3}$ não são grafos planares.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Dizemos que uma face f é *incidente* aos vértices e arestas que estão em sua fronteira. Portanto, toda aresta que não é uma ponte é incidente a duas faces distintas. O *grau* da face f em um grafo plano G , denotado por $d_G(f)$ (ou apenas $d(f)$ quando G estiver claro no contexto), é o número de arestas incidentes a f , sendo que as pontes são contadas duas vezes. Sobre a soma total dos graus das faces, é verdade que:

Proposição 10. *Se G é um grafo plano, então $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2 \cdot |E(G)|$.*

Um teorema muito conhecido sobre os grafos planos é a “Fórmula de Euler”, que foi provado em 1758 por Leonhard Euler.

Teorema 11. (EULER, 1758) *Se G é um grafo plano conexo, então*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Se G é um grafo planar e livre de triângulos, Grötzsch provou em 1958 o seguinte resultado sobre o número cromático desse grafo.

Teorema 12. (GRÖTZSCH, 1959) *Se G é um grafo planar e livre de triângulos, então $\chi(G) \leq 3$.*

Em 1976, Appel e Haken demonstraram um resultado mais abrangente para a classe de grafos planares, conhecido como o “Teorema das Quatro Cores”. Este é um dos resultados mais famosos na teoria de coloração de vértices (APPEL; HAKEN, 1976).

Teorema 13. (APPEL; HAKEN, 1976) *Todo grafo planar é 4-colorível.*

2.1.4 Grafos direcionados

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* D é definido pela tripla ordenada $(V(D), A(D), \phi_D)$, onde $V(D)$ é o conjunto de vértices de D , $A(D)$ é o conjunto de arcos (ou arestas direcionadas), e ϕ_D é uma função de incidência que associa cada arco a um par ordenado de vértices em D . Se $a \in A(D)$ e $\phi_D(a) = (u, v)$ para u e v vértices de D , então a é um arco que vai de u para v . Nesse caso, chamamos u de *cauda* e v de *cabeça* do arco.

Dado um grafo G , podemos obter um grafo direcionado D orientando as arestas de G . Isso significa que, para cada aresta $uv \in E(G)$, substituímos uv por um arco (u, v) ou (v, u) . O grafo direcionado resultante é chamado de uma *orientação* de G . Quando G é um grafo completo, a orientação de G é chamada de *torneio*.

Seja D um grafo direcionado, definimos o *grafo subjacente* de D como o grafo G obtido ao substituir cada arco $(u, v) \in A(D)$ por uma aresta não orientada $uv \in E(G)$. Dizemos que D é *fracamente conectado* se o seu grafo subjacente G é conexo.

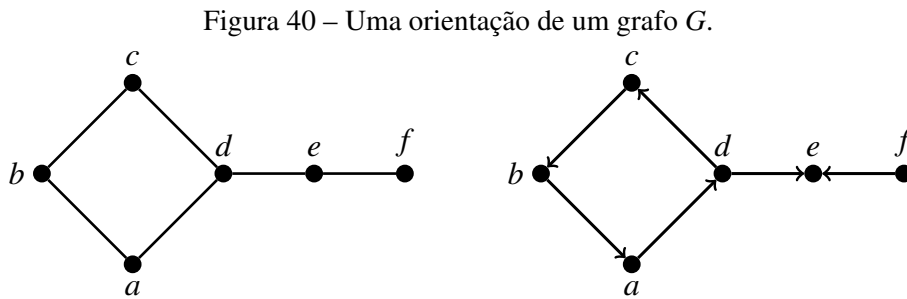
Considerando um grafo direcionado D , o *grau de entrada* de um vértice v em D , denotado por $d_D^-(v)$ (ou simplesmente $d^-(v)$ quando D estiver claro no contexto), é o número de arcos com cabeça em v , já o *grau de saída* de um vértice v em D , denotado por $d_D^+(v)$ (ou simplesmente $d^+(v)$ quando D estiver claro no contexto), é o número de arcos com cauda em

v . Uma *fonte* em D é um vértice v tal que $d^-(v) = 0$, ou seja, não há arcos que chegam em v . Por outro lado, um *sumidouro* em D é um vértice v tal que $d^+(v) = 0$, ou seja, não há arcos saindo de v . Os *graus máximos e mínimos de entrada e saída* de um grafo direcionado D serão representados por $\Delta^-(D)$, $\Delta^+(D)$, $\delta^-(D)$ e $\delta^+(D)$, respectivamente.

Um *caminho direcionado* em um grafo direcionado é uma sequência de vértices na qual os vértices podem ser ordenados de modo que exista um arco $a = (u, v)$ se, e somente se, v aparece imediatamente após u nessa ordem. Um *ciclo direcionado* é definido de maneira similar, com a diferença de que ele admite também o arco (v_n, v_1) , onde v_1 e v_n são, respectivamente, o primeiro e o último vértice da sequência, completando assim o ciclo. O *comprimento* de um caminho ou ciclo direcionado é a quantidade de arcos presentes nele.

Assim como ocorre no caso não direcionado, também podemos considerar grafos direcionados que não contêm ciclos direcionados, os quais seriam análogos às florestas na versão direcionada. Definimos formalmente que um grafo direcionado D é *acíclico* se ele não admite nenhum ciclo direcionado. Todo grafo direcionado acíclico D possui pelo menos uma fonte e um sumidouro.

Na Figura 40, temos um grafo G e uma orientação de G . O grafo direcionado obtido de G contém um ciclo direcionado (d, c, b, a, d) , e, portanto, não é acíclico.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Dados dois vértices u e v de um grafo direcionado D , se existe um caminho direcionado que liga u a v , a *distância* entre u e v , denotada por $d_D(u, v)$ (ou simplesmente $d(u, v)$ quando D estiver claro no contexto), é o menor comprimento de um caminho direcionado que liga u a v . Se não existe esse caminho direcionado, definimos $d_D(u, v) = \infty$. O *diâmetro* de um grafo direcionado G , denotado por $\text{diam}(D)$, é a maior distância entre quaisquer dois vértices de D , isto é, $\text{diam}(D) = \max_{u, v \in V(D)} d(u, v)$.

2.2 Complexidade Computacional

Nesta seção, apresentamos as definições fundamentais de complexidade computacional utilizadas nesta dissertação, com o objetivo de compreender as classes de complexidade polinomial P e a classe de problemas NP-completos.

Um *algoritmo* é um procedimento computacional que recebe um conjunto de valores como *entrada* e , em um período finito de tempo, produz um conjunto de valores como *saída*. Os algoritmos são usados para resolver problemas computacionais. Uma *instância* de um problema consiste em um conjunto específico de valores de entrada que atendem às condições estabelecidas pelo problema. Esses valores são processados pelo algoritmo para computar a solução correspondente.

Por exemplo, considere o problema de ordenação (*sorting problem*), que pode ser formulado da seguinte forma: dada uma sequência de n números como entrada, o objetivo é reordená-los em ordem não decrescente. A saída esperada é uma sequência de n números dispostos nessa ordem. Nesse caso, se a entrada for $I = (28, 7, 10, 80, 5)$, um algoritmo que resolve o problema de ordenação produzirá como saída $S = (5, 7, 10, 28, 80)$. Nesse contexto, I é uma instância do problema de ordenação.

Os *passos* de um algoritmo correspondem às operações elementares realizadas durante sua execução, como, por exemplo, operações aritméticas, lógicas, atribuições e comparações. O *tempo de execução* de um algoritmo para uma determinada entrada é o número de passos executados. Dizemos que um algoritmo é *correto* para um problema computacional se, para toda instância válida do problema, ele produz uma solução correta ao ser executado com essa entrada.

Podemos formalizar o conceito de um problema de forma mais precisa. Um *problema abstrato* Q é definido como uma relação binária entre dois conjuntos: o conjunto de instâncias do problema I e o conjunto de soluções do problema S .

Por exemplo, no problema do caminho mínimo, uma instância consiste em um grafo G , dois vértices u e v em G . A solução para essa instância é uma sequência de vértices que representa o (u, v) -caminho de menor comprimento em G , caso tal caminho exista. Caso contrário, a solução é definida como uma sequência vazia.

Um *problema de decisão* é um tipo específico de problema abstrato cuja solução está restrita a duas respostas possíveis: “sim” ou “não”. Por sua vez, um *problema concreto* é aquele cujo conjunto de instâncias é formado por *strings* binárias. O *tamanho* de uma instância i em um problema concreto é definido como o comprimento da *string* que a representa, ou seja, o número

total de *bits* necessários para representar i . Esse tamanho é denotado por $|i|$.

Uma noção importante sobre os algoritmos é determinar o tempo necessário para o algoritmo computar a solução de um problema concreto. Para isso, precisamos da definição da notação- \mathcal{O} , que permite descrever limites assintóticos superiores para funções de complexidade. Seja $g(n)$ uma função, definimos:

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \text{existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}.$$

De forma simples, dizer que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ significa que o crescimento de $f(n)$ é limitado superiormente pelo crescimento de $g(n)$, para valores suficientemente grandes de n . Um *algoritmo de tempo polinomial* é definido como um algoritmo que, dado uma entrada x , existe uma constante k tal que ele produz a saída em tempo $\mathcal{O}(|x|^k)$.

Dizemos que um algoritmo resolve um problema concreto em tempo $\mathcal{O}(T(n))$ se, para uma instância i do problema com $|i| = n$, o algoritmo computa uma solução em tempo $\mathcal{O}(T(n))$. Um *problema concreto é resolvido em tempo polinomial* se existe um algoritmo que o resolve em tempo $\mathcal{O}(n^k)$, para alguma constante k . Portanto, a classe de complexidade P é definida como o conjunto de problemas concretos de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Um *alfabeto* Σ é um conjunto finito de símbolos. Uma *palavra* (*string*) é definida como uma sequência finita de símbolos pertencentes a Σ . Uma *linguagem* L é um conjunto de palavras formadas a partir de Σ . Dado um alfabeto Σ , o conjunto de todas as palavras possíveis em Σ é denotado por Σ^* .

Em problemas de decisão, consideramos o alfabeto como $\Sigma = \{0, 1\}$, onde 0 representa a resposta “*não*” e 1 representa “*sim*”. Dizemos que um algoritmo A *aceita* uma palavra $x \in \{0, 1\}^*$, se, ao receber x como entrada, A produz como saída 1. Denotando $A(x)$ como a saída do algoritmo A para a entrada x , a *linguagem aceita* L pelo algoritmo A é definida como $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid A(x) = 1\}$. Contudo, quando $A(x) = 0$, dizemos que o algoritmo A *rejeita* a palavra x .

Uma linguagem L é *decidida* por um algoritmo A se A aceita toda palavra $x \in L$ e rejeita toda palavra $x \notin L$. Além disso, dizemos que uma linguagem L é *aceita em tempo polinomial* por um algoritmo A se A aceita L e existe uma constante k tal que, para toda palavra $x \in L$ de comprimento n , A aceita x em tempo $\mathcal{O}(n^k)$. Por fim, uma linguagem L é *decidida em tempo polinomial* por um algoritmo A se existe uma constante k tal que, para qualquer palavra $x \in \{0, 1\}^*$ de comprimento n , o algoritmo decide corretamente se $x \in L$ em tempo $\mathcal{O}(n^k)$.

Considere, por exemplo, o problema do ciclo hamiltoniano. Dado um grafo G , a pergunta é: "Existe um ciclo hamiltoniano em G ?". Esse problema pode ser representado por uma linguagem, em que as palavras correspondem às instâncias do problema com resposta positiva. Formalmente, definimos a linguagem:

$$\text{CICLO-HAM} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ admite um ciclo hamiltoniano}\}.$$

Dada uma instância $\langle G \rangle$ do problema, um algoritmo de decisão para essa linguagem enumera todas as permutações possíveis dos vértices do grafo G e verifica se alguma delas corresponde a um ciclo hamiltoniano. Se encontrar uma permutação que seja um ciclo hamiltoniano, o algoritmo interrompe a execução e retorna 1 como saída. Caso contrário, após garantir que nenhuma permutação corresponde a um ciclo hamiltoniano, o algoritmo retorna 0.

Um *algoritmo de verificação* para uma linguagem é um algoritmo A de dois argumentos: uma palavra de entrada x e uma palavra binária y , essa última é chamada de *certificado*. Dizemos que o algoritmo A *verifica* a entrada x se existe um certificado y tal que $A(x, y) = 1$. A *linguagem verificada* por um algoritmo A é definida por $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid \exists y \in \{0, 1\}^* \text{ tal que } A(x, y) = 1\}$. Em outras palavras, o algoritmo A verifica uma linguagem L se, para cada $x \in L$, existe um certificado y que o algoritmo utiliza para provar que $x \in L$. Por outro lado, se $x \notin L$, não existe nenhum certificado y que faça o algoritmo concluir que $x \in L$.

A classe de complexidade NP é a classe de linguagens que podem ser verificadas por um algoritmo de tempo polinomial no tamanho da instância.

Uma função $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ é *computável em tempo polinomial* se existe um algoritmo de tempo polinomial A tal que para toda entrada $x \in \{0, 1\}^*$, A produz $f(x)$ como saída. Dizemos que uma linguagem L_1 é *reduzível em tempo polinomial* a uma linguagem L_2 se existe uma função computável em tempo polinomial $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ tal que, para todo $x \in \{0, 1\}^*$, vale que $x \in L_1$ se, e somente se, $f(x) \in L_2$. Nesse caso, denotamos $L_1 \leq_P L_2$, e chamamos f de *função de redução* e o algoritmo de tempo polinomial F que calcula f de *algoritmo de redução*.

Essas reduções permitem demonstrar que a dificuldade de um problema é, no mínimo, comparável à de outro, diferindo apenas por um fator polinomial. Com isso, podemos finalmente definir a classe dos problemas mais difíceis em NP, conhecidos como problemas NP-completos. Uma linguagem $L \subseteq \{0, 1\}^*$ é *NP-completa* se $L \in \text{NP}$ e $L^* \leq_P L$, para todo $L^* \in \text{NP}$. Se uma linguagem L só satisfaz essa última condição, dizemos que L é *NP-difícil*.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, realizamos uma revisão bibliográfica abordando os principais resultados da Coloração *Backbone*. Omitimos os resultados da Coloração *Backbone* Circular, pois nosso interesse é apresentar os resultados para a variação direcionada, definida nesta dissertação, que não adota uma noção circular das cores. Para uma revisão bibliográfica em português sobre os resultados da versão circular da Coloração *Backbone*, recomendamos a dissertação da Camila S. Araújo (ARAÚJO, 2021). O capítulo está dividido da seguinte forma: a primeira seção aborda as definições básicas dessa coloração, a segunda seção trata dos limitantes gerais para um *backbone* qualquer, a terceira seção discute os limitantes em classes específicas de *backbone* e a quarta seção traz resultados relacionados a problemas de complexidade.

3.1 Conceitos fundamentais na Coloração *Backbone*

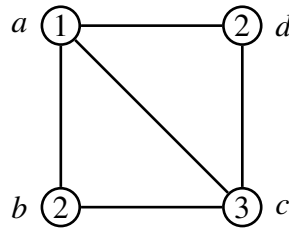
A Coloração *Backbone* é uma variação do problema de Coloração de Vértices de um grafo e esta coloração foi introduzida no artigo (BROERSMA *et al.*, 2003). Considerando um grafo $G = (V, E)$ e um subgrafo gerador H de G , que será chamado de *backbone* de G , uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que atende às seguintes condições: $|f(u) - f(v)| \geq 1$ para toda $uv \in E(G)$ e $|f(u) - f(v)| \geq q$ para toda $uv \in E(H)$. Esta última condição é chamada de *condição do backbone*.

O número cromático q -*backbone* de (G, H) , denotado por $BBC_q(G, H)$, é o menor inteiro k para o qual existe uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) . Quando uma coloração q -*backbone* do par (G, H) utiliza exatamente $BBC_q(G, H)$ cores, essa coloração é chamada de *ótima*. Em uma coloração q -*backbone*, duas cores c_1 e c_2 são chamadas de *vizinhas* se $|c_1 - c_2| < q$. Portanto, observe que cores vizinhas não podem ser usadas nas extremidades de uma aresta no *backbone*, pois isso violaria a condição do *backbone*.

Para comparar os parâmetros da Coloração de Vértices com a Coloração *Backbone*, ilustramos uma 3-coloração de um grafo G na Figura 41. Note que esta é uma coloração ótima do grafo, pois os vértices a , b e c formam uma clique, ou seja, esses vértices são mutuamente adjacentes. Portanto, são necessárias pelo menos três cores para colorir o grafo propriamente.

Note que, para o mesmo grafo G com $\chi(G) = 3$, ao considerarmos as arestas ad e bc como parte do *backbone*, obtemos um emparelhamento, que denotamos por M . Por definição, o *backbone* é um subgrafo de G e M é um conjunto de arestas, ao tratar M como *backbone*,

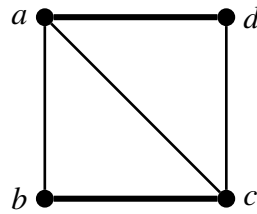
Figura 41 – Uma coloração ótima do grafo G com $\chi(G) = 3$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

estamos, na verdade, considerando o subgrafo $H = (V(G), M)$, onde $E(H) = M$. Para simplificar, passaremos a referir-nos a M diretamente como esse subgrafo. A Figura 42 ilustra o grafo G junto com seu *backbone* M .

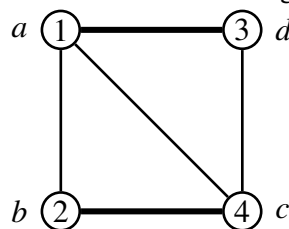
Figura 42 – Um grafo G com seu *backbone* M (com as arestas do *backbone* em **negrito**).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Observe que, ao tentar construir uma 3-coloração 2-*backbone* para o par (G, M) da Figura 42, a cor 2 não pode ser utilizada, pois impede o uso das cores 1 e 3 nas extremidades opostas das arestas do *backbone*, já que a cor 2 é vizinha tanto da cor 1 quanto da cor 3. Dessa forma, somos forçados a usar as cores 1 e 3 nas extremidades das arestas do *backbone*. No entanto, os vértices a , b e c formam uma clique, ou seja, são mutuamente adjacentes, exigindo, portanto, três cores distintas (excluindo a cor 2). Portanto, não é possível construir uma 3-coloração 2-*backbone* para (G, M) . Na Figura 43, apresentamos uma 4-coloração 2-*backbone* de (G, M) . Como não é possível colorir com apenas 3 cores, concluímos que $BBC_2(G, M) = 4$.

Figura 43 – Uma 4-coloração 2-*backbone* ótima de (G, M) (com as arestas do *backbone* em **negrito**).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Uma definição amplamente utilizada em demonstrações de resultados sobre coloração *backbone* é a de coloração simétrica. Broersma et al. e Bu e Li definem essa coloração para um caso específico de *backbone* e para $q = 2$, mas essa definição pode ser estendida para qualquer *backbone* e para qualquer inteiro $q \geq 2$ (BROERSMA *et al.*, 2007; BU; LI, 2011).

Dados um grafo G e um subgrafo gerador H de G , considere f e g como duas k -colorações de G que satisfazem $f(v) + g(v) = k + 1$ para todo vértice v de G . Se f é uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) , então, pela relação dada, temos que $|g(u) - g(v)| = |f(u) - f(v)| \geq q$ para todo $uv \in E(H)$, uma vez que f satisfaz a condição do *backbone*. Logo, g também será uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) .

Assim, dizemos que f é uma *coloração simétrica*, ou simplesmente *simétrica*, de g se f e g são k -colorações de um grafo G que satisfazem $f(v) + g(v) = k + 1$ para todo $v \in V(G)$, e se f ser uma k -coloração q -*backbone* de (G, H) implica que g também é, onde H é um subgrafo gerador de G .

Considerando os pares de grafos (G, H) e (G', H') , dizemos que (G', H') é um *subpar* de (G, H) , denotado por $(G', H') \subseteq (G, H)$, se $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$. Neste caso, temos que $\text{BBC}_q(G', H') \leq \text{BBC}_q(G, H)$, pois toda coloração q -*backbone* de (G, H) é, em particular, uma coloração q -*backbone* para (G', H') .

Se c é uma k -coloração q -*backbone* de um subpar de (G, H) , então dizemos que c é uma k -coloração q -*backbone* *parcial* de (G, H) . Sendo c uma k -coloração q -*backbone* parcial de um par (G, H) , uma cor α é dita *disponível* para um vértice $v \in V(G)$ se nenhum vizinho de v em G está colorido com essa cor em c e se nenhum vizinho de v no *backbone* está colorido com uma cor vizinha a α em c . Caso contrário, a cor α é dita *proibida* para v .

3.2 Limitantes gerais da Coloração *Backbone*

Nesta seção, discutimos limitantes gerais conhecidos na Coloração *Backbone*, válidos para qualquer *backbone*. Dados um grafo G e um subgrafo gerador H de G , sabemos que toda k -coloração q -*backbone* de (G, H) é, necessariamente, uma k -coloração de G . Portanto, temos o limitante básico $\text{BBC}_q(G, H) \geq \chi(G)$. Havet et al. destacam que há igualdade quando o *backbone* é um grafo vazio, ou seja, sem arestas, pois a condição do *backbone* é satisfeita por vacuidade, resultando em uma coloração própria do grafo G (HAVET *et al.*, 2014).

Proposição 14. (HAVET *et al.*, 2014) *Sejam G um grafo e H um subgrafo gerador de G . Dado*

$q \geq 2$, temos $q \cdot \chi(H) - q + 1 \leq \text{BBC}_q(G, H) \leq q \cdot \chi(G) - q + 1$.

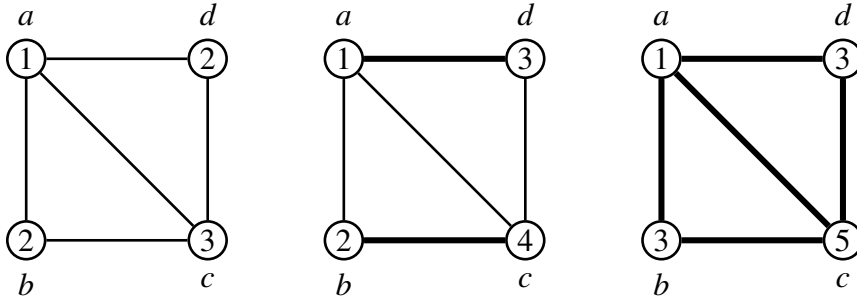
Demonstração. Dado que $(H, H) \subseteq (G, H) \subseteq (G, G)$, temos $\text{BBC}_q(H, H) \leq \text{BBC}_q(G, H) \leq \text{BBC}_q(G, G)$, conforme afirmamos anteriormente. Sejam $Y \in \{G, H\}$ e f uma $\chi(Y)$ -coloração de Y . Vamos construir a coloração h da seguinte forma: $h(v) = q \cdot f(v) - q + 1$, para todo $v \in V(G)$. Note que h é uma coloração de Y , pois, para todo $uv \in E(Y)$, temos

$$h(v) - h(u) = q \cdot f(v) - q + 1 - q \cdot f(u) + q - 1 = q \cdot (f(v) - f(u)) \neq 0,$$

visto que f é uma $\chi(Y)$ -coloração de Y e $q \geq 2$. A condição do *backbone* também é satisfeita, pois, dado $uv \in E(Y)$, temos $|h(v) - h(u)| = q \cdot |f(v) - f(u)| \geq q$, uma vez que f é uma coloração de Y , garantindo que $|f(v) - f(u)| \geq 1$. A coloração h é ótima, pois, em sua definição, ela apenas distancia todas as cores de f em q unidades (exceto a primeira cor), assegurando que a condição do *backbone* é satisfeita para todas as arestas do grafo Y , uma vez que todas elas estão no *backbone*. \square

Na Figura 44, são apresentados um grafo G e dois pares de grafos, (G, H) e (G, G) , onde H é um subgrafo de G . No grafo G , observa-se uma 3-coloração ótima f , enquanto para o par (G, H) é ilustrada uma 4-coloração 2-backbone ótima. Ao aplicarmos a função mencionada na prova da Proposição 14 na coloração f , conseguimos construir uma 5-coloração 2-backbone ótima também para (G, G) .

Figura 44 – Coloração ótima do grafo G e coloração 2-backbone ótima dos pares (G, H) e (G, G) (com as arestas do backbone em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Para $q = 2$, decorre da Proposição 14 o seguinte corolário.

Corolário 15. (BROERSMA et al., 2007) Se G é um grafo e H um subgrafo gerador de G , então $\text{BBC}_2(G, H) \leq 2 \cdot \chi(G) - 1$.

Wang et al. resumem alguns resultados que seguem diretamente do Corolário 15 (WANG *et al.*, 2012). Dados um grafo G e um *backbone* H de G , se G for planar, pelo Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), temos que $\chi(G) \leq 4$. Assim, pelo Corolário 15, conclui-se que $\text{BBC}_2(G, H) \leq 7$. Além disso, se G for bipartido, sabemos que $\chi(G) \leq 2$, e, aplicando o mesmo corolário, temos que $\text{BBC}_2(G, H) \leq 3$. Agora, se G for um grafo planar livre de triângulos, pelo Teorema de Grötzsch (GRÖTZSCH, 1959), sabemos que $\chi(G) \leq 3$ e com o corolário, obtemos que $\text{BBC}_2(G, H) \leq 5$. Se G for um grafo k -degenerado, então $\chi(G) \leq k + 1$, e, portanto, $\text{BBC}_2(G, H) \leq 2k + 1$, conforme o Corolário 15.

Proposição 16. (HAVET *et al.*, 2014) *Sejam G um grafo e H um subgrafo gerador de G . Dado $q \geq 2$, temos $\text{BBC}_q(G, H) \leq (\chi(G) + q - 2) \cdot \chi(H) - q + 2$.*

Demonstração. Sejam g uma $\chi(G)$ -coloração de G e h uma $\chi(H)$ -coloração de H . Para $v \in V(G)$, definimos a coloração f como segue:

$$f(v) = \begin{cases} (h(v) - 1) \cdot (q - 2 + \chi(G)) + g(v) & , \text{ se } h(v) \text{ é ímpar;} \\ (h(v) - 1) \cdot (q - 2 + \chi(G)) + \chi(G) + 1 - g(v) & , \text{ se } h(v) \text{ é par.} \end{cases}$$

Para mostrar que f é uma $((\chi(G) + q - 2) \cdot \chi(H) - q + 2)$ -coloração 2-backbone de (G, H) , consideramos $uv \in E(G)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $h(u) \geq h(v)$. Se $h(u) = h(v)$ e, como g é uma coloração de G , concluimos que

$$|f(u) - f(v)| = |g(u) - g(v)| \neq 0.$$

Agora, suponha que $h(u) > h(v)$. Se $h(u)$ e $h(v)$ têm a mesma paridade, e considerando que $|g(u) - g(v)| \leq \chi(G) - 1$ (pois g é uma coloração de G), temos

$$|f(u) - f(v)| \geq 2 \cdot (q - 2 + \chi(G)) - |g(u) - g(v)| \geq q + (q - 2) + (\chi(G) - 1) \geq q.$$

Se $h(u)$ é par e $h(v)$ é ímpar, e sabendo que $g(u) + g(v) \leq 2 \cdot \chi(G) - 1$ (pois g é uma coloração de G), então

$$|f(u) - f(v)| \geq q + 2 \cdot \chi(G) - 1 - (g(u) + g(v)) \geq q.$$

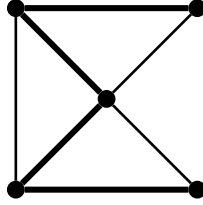
Se $h(u)$ é ímpar e $h(v)$ é par, e sabendo que $g(u) + g(v) \geq 3$ (pois g é uma coloração de G), então

$$|f(u) - f(v)| \geq q - 3 + g(u) + g(v) \geq q.$$

O que conclui a demonstração. □

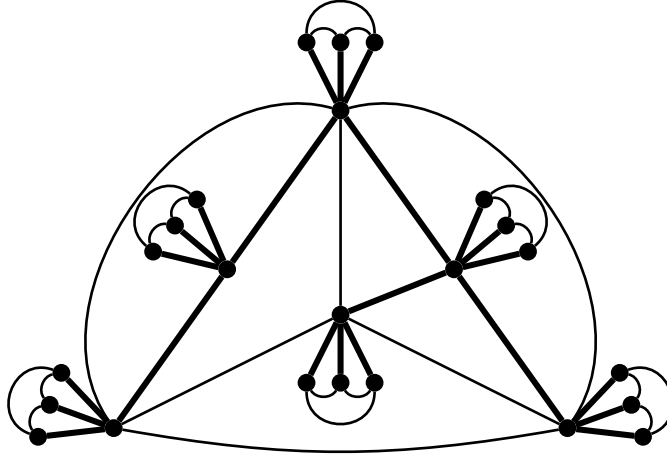
Podemos comparar a otimalidade dos limitantes superiores das Proposições 14 e 16. Para o par (G, P) da Figura 45 e $q = 2$, o limitante da Proposição 14 é ótimo, com $BBC_2(G, P) \leq 5$. Em contraste, o outro limitante é $BBC_2(G, P) \leq 6$, uma vez que $\chi(P) \leq 2$ para um caminho P . Já para o par (G, T) da Figura 46 e $q = 4$, o limitante da Proposição 16 é ótimo, com $BBC_4(G, T) \leq 10$, pois $\chi(T) \leq 2$ para uma árvore T , enquanto o primeiro limitante é pior, com $BBC_4(G, T) \leq 13$. Ambos os exemplos aparecem em artigos, acompanhados das respectivas provas dos seus números cromáticos *backbone*, que serão apresentados posteriormente (BROERSMA *et al.*, 2007; HAVET *et al.*, 2014).

Figura 45 – Um grafo G com $\chi(G) = 3$ e um caminho hamiltoniano P em G tal que $BBC_2(G, P) = 5$ (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, adaptado de (BROERSMA *et al.*, 2007), 2024.

Figura 46 – Um grafo planar G com $\chi(G) = 4$ e uma árvore geradora T de G tal que $BBC_4(G, T) = 10$ (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, adaptado de (HAVET *et al.*, 2014), 2024.

Um outro limitante geral que aparece na literatura sobre coloração *backbone* depende do número cromático do *backbone* e do número de vértices do grafo, conforme apresentado a seguir e provado por Janczewski e Turowski (JANCZEWSKI; TUROWSKI, 2015a).

Proposição 17. (JANCZEWSKI; TUROWSKI, 2015a) *Sejam G um grafo com n vértices e H um subgrafo gerador de G . Dado $q \geq 2$, temos $BBC_q(G, H) \leq q \cdot (\chi(H) - 1) + n - \chi(H) + 1$.*

No artigo de Bu et al., os autores apresentam um resultado geral sobre a determinação do número cromático *2-backbone* de um par ser igual a 3. Eles provam que, para um grafo conexo G com $n(G) \geq 2$ e um subgrafo gerador H de G , vale que $\text{BBC}_2(G, H) = 3$ se, e somente se, G é bipartido. Esse resultado, enunciado na proposição a seguir, é amplamente utilizado em provas de complexidade computacional e pode ser generalizado para qualquer inteiro $q \geq 2$ e para $\delta(H) \geq 1$ (BU; ZHANG, 2011).

Proposição 18. (BU; ZHANG, 2011) *Se G é um grafo conexo e H um subgrafo gerador de G com $\delta(H) \geq 1$, então $\text{BBC}_q(G, H) = q + 1$ se, e somente se, G é um grafo bipartido.*

Demonstração. Considerando G e H como no enunciado da proposição.

(\Rightarrow) Suponha que $\text{BBC}_q(G, H) = q + 1$ e seja f uma $(q + 1)$ -coloração *q-backbone* de (G, H) . Afirmamos que não há vértice v em G colorido com a cor α , onde $2 \leq \alpha \leq q$, o que é equivalente a dizer que f é uma coloração de G que utiliza apenas duas cores, as cores 1 e $q + 1$. Isso implica que G é bipartido. Para mostrar isso, suponha, por absurdo, que existe $u \in V(G)$ tal que $f(u) = \alpha$, com $2 \leq \alpha \leq q$. Como $\delta(H) \geq 1$, existe $v \in V(G)$ tal que $uv \in E(H)$, como α é cor vizinha das cores em $\{1, 2, \dots, q + 1\}$, não há cor disponível para colorir o vértice v , contradizendo que f é uma coloração *q-backbone* de (G, H) .

(\Leftarrow) Suponha agora que G é um grafo bipartido e que g é uma 2-coloração de G . Definimos uma nova coloração h da seguinte forma: $h(v) = g(v)$ se $g(v) = 1$, e $h(v) = q + 1$ se $g(v) = 2$, para todo $v \in V(G)$. Note que h é uma $(q + 1)$ -coloração *q-backbone* de (G, H) , pois, dados dois vértices u e v de G tais que $uv \in E(H)$, como g é uma coloração de G , temos que $g(u) \neq g(v)$. Sem perda de generalidade, suponha que $g(u) = 1$ e $g(v) = 2$. Assim, pela definição de h , temos que $h(u) = 1$ e $h(v) = q + 1$, de modo que $h(v) - h(u) = q + 1 - 1 = q$. Isso satisfaz a condição do *backbone* e, claramente, a condição de ser uma coloração própria. Como $\delta(H) \geq 1$, existe uma aresta $ab \in E(H)$ para algum $a, b \in V(G)$. Assim, em qualquer coloração *q-backbone* f , deve-se ter $|f(a) - f(b)| \geq q$, para garantir que a condição do *backbone* seja satisfeita. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) - f(b) \geq q$. Como toda coloração *q-backbone* atribui valores inteiros positivos para os vértices, segue que $f(b) \geq 1$ e, consequentemente, $f(a) \geq q + 1$. Portanto, concluímos que $\text{BBC}_q(G, H) \geq q + 1$. \square

Miškuf et al. apresentam um resultado relacionado ao Teorema de Brooks para coloração *2-backbone*, ao comparar o número cromático *2-backbone* com o grau máximo, mas restrito a grafos d -degenerados (MIŠKUF et al., 2010).

Teorema 19. (MIŠKUF et al., 2010) Se G é um grafo de grau máximo $\Delta(G)$ e H um subgrafo gerador d -degenerado de G , então $\text{BBC}_2(G, H) \leq \Delta(G) + d + 1$.

Como os autores ressaltam, para $d = 1$, o limitante do Teorema 19 é o melhor possível quando G é um ciclo ímpar ou um grafo completo (MIŠKUF et al., 2010). Além disso, eles destacam que, embora ciclos ímpares e grafos completos sejam exemplos que tornam o limitante apertado no caso $d = 1$, existem outros grafos que também não conseguimos encontrar limitantes melhores. Isso mostra que o teorema apresentado não é exatamente equivalente ao Teorema de Brooks na coloração 2-*backbone*.

Proposição 20. (MIŠKUF et al., 2010) Seja $\Delta(G) \in \mathbb{N}$. Existe um grafo G , que não é completo nem um ciclo, com grau máximo $\Delta(G)$ e uma árvore geradora T de G tal que $\text{BBC}_2(G, T) = \Delta(G) + 2$.

Os autores também comentam que, no caso acima, tínhamos $\Delta(T) = \Delta(G)$. Portanto, eles apresentam outro resultado que demonstra a existência de pares de grafos com $\Delta(H) < \Delta(G)$, onde G é um grafo e H o *backbone* de G , que ainda tornam o limitante do Teorema 19 apertado para $d = 1$.

Proposição 21. (MIŠKUF et al., 2010) Seja $\Delta(G) \in \mathbb{N}$. Existe um grafo G , que não é completo nem um ciclo, com grau máximo $\Delta(G)$ e uma floresta F em G com $\Delta(F) = \Delta(G) - 1$ tal que $\text{BBC}_2(G, F) = \Delta(G) + 2$.

3.3 Floresta como *backbone*

Nesta seção, apresentamos resultados conhecidos para o caso em que o *backbone* é uma floresta, com foco especial em resultados específicos para árvores. Restritos ao caso em que $q = 2$ e motivados por saber o quão distantes estão os parâmetros $\chi(G)$ e $\text{BBC}_2(G, H)$, os autores estudaram alguns limitantes em (BROERSMA et al., 2003). Para enunciar o primeiro resultado, para todo inteiro $k \geq 1$, vamos definir $\tau(k)$ como sendo:

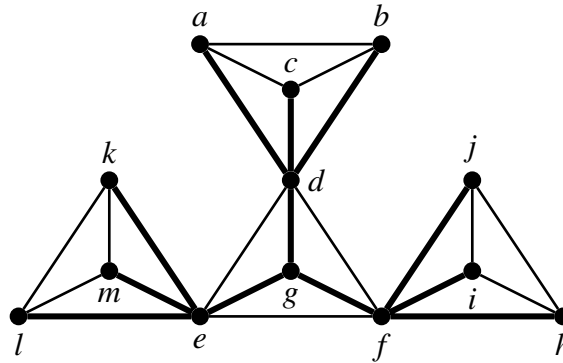
$$\tau(k) = \max\{\text{BBC}_2(G, T) \mid G \text{ grafo com árvore geradora } T \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Teorema 22. (BROERSMA et al., 2003) Para todo inteiro $k \geq 1$, temos $\tau(k) = 2k - 1$.

Pode-se aplicar o resultado obtido no Teorema 22 ao caso em que o grafo G é planar. De acordo com o Teorema das Quatro Cores, sabemos que $\chi(G) = 4$ (APPEL; HAKEN, 1976).

Agora, considerando uma árvore geradora T de G , estabelecemos o limitante $\text{BBC}_2(G, T) \leq 7$. No artigo expandido (BROERSMA *et al.*, 2007), os autores apresentam um exemplo de um grafo planar G com sua árvore geradora T , ilustrados na Figura 47, demonstrando que esse limitante não pode ser melhorado para 5.

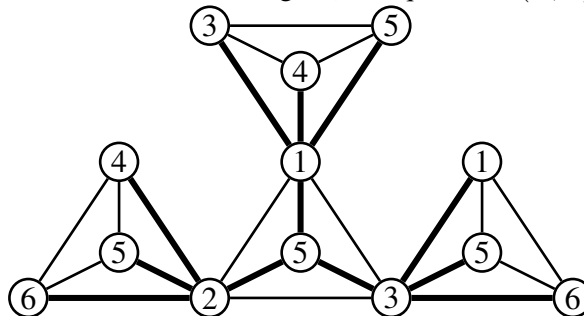
Figura 47 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, adaptado de (BROERSMA *et al.*, 2007), 2024.

Para demonstrar que o par (G, T) não pode ser colorido com 5 cores em uma coloração 2-*backbone*, consideramos as estrelas com centro em d , e e f no *backbone*. Essas estrelas têm exatamente 3 folhas em T , formando uma clique no grafo G . Ao tentar usar apenas as 5 cores, os centros das estrelas devem ser coloridos com 1 ou 5 para completar as colorações em suas folhas, de forma a satisfazer a condição do *backbone*. No entanto, os vértices d , e e f também formam uma clique, o que impossibilita a conclusão dessa coloração de maneira consistente. Na Figura 48, podemos observar uma 6-coloração 2-*backbone* desse par.

Figura 48 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do *backbone* em negrito) tais que $\text{BBC}_2(G, T) = 6$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Com esse exemplo que demonstra que o limitante não pode ser melhorado para 5, ao utilizar o Teorema das Quatro Cores, os autores destacam os seguintes problemas em aberto para

grafos planares.

Problema em Aberto 1. (BROERSMA et al., 2007) Se G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, T) \leq 6$?

Problema em Aberto 2. (BROERSMA et al., 2007) Se G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G , conseguimos provar que $\text{BBC}_2(G, T) \leq 7$ sem usar o Teorema das Quatro Cores?

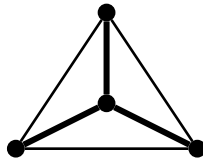
Em 2013, foi provado como verdadeiro o Problema em Aberto 1 parcialmente para árvores geradoras com diâmetro no máximo 4. Como Campos et al. ressaltam, esse resultado é o melhor possível, pois a árvore geradora T do grafo G da Figura 47 tem diâmetro no máximo 4 (CAMPOS et al., 2013).

Teorema 23. (CAMPOS et al., 2013) Se G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G com diâmetro no máximo 4, então $\text{BBC}_2(G, T) \leq 6$.

Campos et al. aprimoram o limitante superior para 5 quando T é uma árvore geradora de G com diâmetro no máximo 3. Além disso, os autores apresentam um exemplo, ilustrado na Figura 49, que prova que esse limitante superior é ótimo.

Proposição 24. (CAMPOS et al., 2013) Se G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G com diâmetro no máximo 3, então $\text{BBC}_2(G, T) \leq 5$.

Figura 49 – Um grafo planar G com uma árvore geradora T (com as arestas do *backbone* em negrito) tal que $\text{BBC}_2(G, T) = 5$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

No artigo de Broersma et al., o segundo resultado comparando números cromáticos se aplica à classe de grafos *split*. O teorema é introduzido na versão inicial do artigo (BROERSMA et al., 2003), enquanto sua demonstração completa pode ser encontrada no artigo expandido (BROERSMA et al., 2007). Identificamos um pequeno erro na demonstração do Teorema 4 e apresentaremos a prova completa e a correção desse erro no Capítulo 4.

Teorema 4. (BROERSMA et al., 2003) *Se G é um grafo split e T uma árvore geradora de G , então, se $\chi(G) \geq 3$, temos que $\text{BBC}_2(G, T) \leq \chi(G) + 2$. Esse limitante é o melhor possível.*

Ainda interessados em entender a relação entre o número cromático 2-backbone e o número cromático do grafo, Broersma et al. apresentam o seguinte problema em aberto para grafos cordais (BROERSMA et al., 2007).

Problema em Aberto 3. (BROERSMA et al., 2007) *Se G é um grafo cordal e T uma árvore geradora de G , existe uma constante c tal que $\text{BBC}_2(G, T) \leq \chi(G) + c$?*

O problema análogo ao Problema em Aberto 3, considerando grafos livres de triângulos, foi conjecturado no artigo (BROERSMA et al., 2007) e, dois anos mais tarde, foi demonstrado como falso em (MIŠKUF et al., 2009). A prova foi feita mostrando a existência de pares (R_n, T_n) , onde R_n é um grafo livre de triângulos com $\chi(R_n) = n$ e T_n é uma árvore geradora de R_n , tal que $\text{BBC}_2(R_n, T_n) = 2\chi(R_n) - 1 = 2n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 25. (MIŠKUF et al., 2009) *Se G é um grafo livre de triângulos e T uma árvore geradora de G , não existe uma constante c tal que $\text{BBC}_2(G, T) \leq \chi(G) + c$.*

Após provar esse resultado, Miškuf et al. deixam o seguinte problema em aberto: existe um grafo G com cintura alta tal que $\text{BBC}_2(G, T) = 2\chi(G) - 1$ para alguma árvore geradora T de G (MIŠKUF et al., 2009). Bu et al. provam esse resultado com o teorema a seguir (BU et al., 2013).

Teorema 26. (BU et al., 2013) *Para todos os naturais n e l , existem um grafo G com cintura maior que l e $\chi(G) = n$, e uma floresta geradora F de G tal que $\text{BBC}_2(G, F) = 2n - 1$.*

Em seu artigo de 2006, Salman aborda o problema para um $q \geq 2$ arbitrário e generaliza esse resultado, como apresentado no teorema a seguir (SALMAN, 2006).

Teorema 27. (SALMAN, 2006) *Sejam um inteiro $q \geq 2$ e um grafo split G com $\chi(G) = k \geq 2$. Para toda árvore geradora T de G , temos:*

$$\text{BBC}_q(G, T) \leq \begin{cases} 1 & , \text{ se } \chi(G) = 1; \\ 1 + q & , \text{ se } \chi(G) = 2; \\ \chi(G) + q & , \text{ se } \chi(G) \geq 3. \end{cases}$$

Esses limitantes são os melhores possíveis.

Após Broersma et al. apresentarem o Teorema 22, que mostra a relação entre o número cromático $\chi(G)$ e o número cromático 2-backbone $\text{BBC}_2(G, T)$, para um par (G, T) , onde G é um grafo e T uma árvore geradora de G , em outro artigo focado em resultados para outras classes de backbone (BROERSMA et al., 2009a). Nesse mesmo trabalho, eles enunciam o seguinte problema em aberto, com o objetivo de generalizar esse resultado. Antes de enunciar o problema em aberto, vamos definir $\tau_q(k)$, para todo inteiro $k \geq 1$, como sendo:

$$\tau_q(k) = \max\{\text{BBC}_q(G, T) \mid G \text{ grafo com árvore geradora } T \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Problema em Aberto 4. (BROERSMA et al., 2009a) *Quais os valores para $\tau_q(k)$ quando $q \geq 3$?*

Saputro e Salman, interessados nesse problema, provam limitantes para $q \geq 3$ com o teorema a seguir (SAPUTRO; SALMAN, 2013).

Teorema 28. (SAPUTRO; SALMAN, 2013) *Para todos os inteiros $q \geq 3$ e $k \geq 1$, temos:*

- (a) Para $k \in \{2, 3\}$, $\tau_q(k) = 1 + (k - 1) \cdot q$;
- (b) Para $3 \leq k \leq q$, $\tau_q(k) = q + 2k - 2$;
- (c) Para $q + 1 \leq k \leq 2q - 2$, $\tau_q(k) = 2q + k - 1$;
- (d) Para $k \geq 2q - 1$, $\tau_q(k) = 2k$.

Os autores, ao aplicarem os Teoremas 22 e 28, juntamente com o Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), conseguem estabelecer alguns limitantes para grafos planares. Especificamente, para um grafo planar G e uma árvore geradora T de G , os seguintes limitantes são provados (SAPUTRO; SALMAN, 2013).

Corolário 29. (SAPUTRO; SALMAN, 2013) *Dados um inteiro $q \geq 2$ e um grafo planar G . Para toda árvore geradora T de G , temos:*

$$\text{BBC}_q(G, T) \leq \begin{cases} 7 & , \text{ se } q = 2; \\ 9 & , \text{ se } q = 3; \\ q + 6 & , \text{ se } q \geq 4. \end{cases}$$

Sendo ℓ o limitante estabelecido pelo Corolário 29 para uma coloração q -backbone de (G, T) , onde G é um grafo com $\chi(G) = k$ e T uma árvore geradora de G , os autores questionam se é possível melhorar o resultado do corolário para $\text{BBC}_q(G, T) \leq \ell - 1$. No entanto, Saputro e Salman demonstram que o par (G, T) apresentado na Figura 47 serve como contraprova, mostrando que esse limitante não pode ser melhorado para $\ell - 2$ (SAPUTRO; SALMAN, 2013).

Problema em Aberto 5. (SAPUTRO; SALMAN, 2013) Se G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G , é verdade que

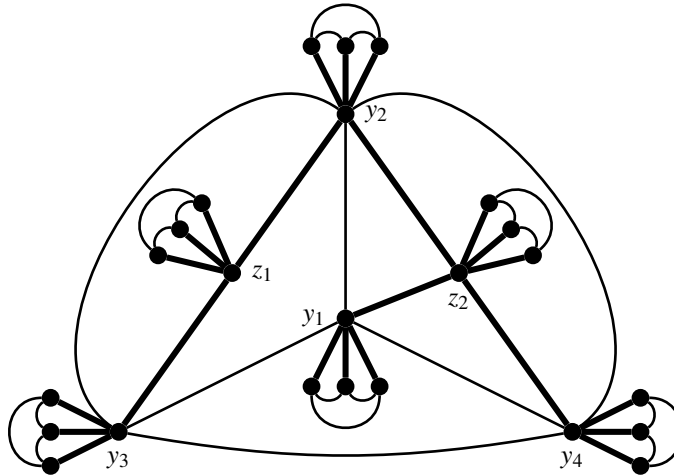
$$\text{BBC}_q(G, T) \leq \begin{cases} 6 & , \text{ se } q = 2; \\ 8 & , \text{ se } q = 3; \\ q + 5 & , \text{ se } q \geq 4? \end{cases}$$

Havet et al. provam o mesmo limitante do Corolário 29, usando a Proposição 14 para um grafo planar G (uma vez que sabemos que $\chi(G) \leq 4$ pelo Teorema das Quatro Cores) e F uma floresta em G (sabendo que $\chi(F) \leq 2$) (HAVET et al., 2014).

Teorema 30. (HAVET et al., 2014) Se G é um grafo planar e F uma floresta em G , então $\text{BBC}_q(G, F) \leq q + 6$.

No mesmo artigo, Havet et al. apresentam um par (G, T) , onde G é um grafo planar e T é uma árvore geradora de G , tal que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$ para todo $q \geq 4$, mostrando que esse limitante é o melhor possível para $q \geq 4$ (HAVET et al., 2014). Isso demonstra que o último limitante do Problema em Aberto 5 é falso.

Figura 50 – Um grafo planar G com $\chi(G) = 4$ e uma árvore geradora T de G (com as arestas do *backbone* em negrito) tal que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$.



Fonte: Autoria própria, adaptado de (HAVET et al., 2014), 2024.

Sendo (G, T) conforme a Figura 50, onde G é um grafo planar e T uma árvore geradora de G . Para demonstrar que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$, precisamos antes definir um grafo que aparece como subgrafo em G chamado de paraquedas, dizemos que um *paraquedas* em v é um grafo completo que têm quatro vértices, onde as três arestas incidentes ao vértice v estão no

backbone, conforme ilustrado na Figura 51. Nesse exemplo, temos paraquedas nos vértices y_1, y_2, y_3, y_4, z_1 e z_2 , Havet et al. provam uma proposição que diz respeito a colorir esses paraquedas, que será útil na demonstração que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$ (HAVET et al., 2014).

Figura 51 – Um paraquedas em v (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Proposição 31. (HAVET et al., 2014) Para $q \geq 4$, se ϕ é uma $(q + 5)$ -coloração q -backbone de um paraquedas em v , temos que $\phi(v) \in \{1, 2, 3, q + 3, q + 4, q + 5\}$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que $4 \leq \phi(v) \leq q + 2$. Há, no máximo, duas cores que não são vizinhas da cor $\phi(v)$. Como v é adjacente a três vértices que formam uma clique, seriam necessárias três cores distintas que não são vizinhas de $\phi(v)$, o que gera uma contradição. \square

Proposição 32. (HAVET et al., 2014) Sejam G o grafo e T a árvore geradora de G conforme ilustrado na Figura 50. Para $q \geq 4$, temos $\text{BBC}_q(G, T) \geq q + 6$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista uma $(q + 5)$ -coloração q -backbone ϕ de (G, T) . Pela Proposição 31, os vértices y_1, y_2, y_3, y_4, z_1 e z_2 são coloridos com cores em $\{1, 2, 3, q + 3, q + 4, q + 5\}$. Sem perda de generalidade, assuma que $\phi(y_2) \in \{1, 2, 3\}$. Como $y_2 z_2 \in E(T)$ e $y_2 z_1 \in E(T)$, e dado que a condição do *backbone* também precisa ser satisfeita, temos que $\{\phi(z_1), \phi(z_2)\} \subseteq \{q + 3, q + 4, q + 5\}$. Além disso, como há as arestas $y_1 z_2, y_4 z_2$ e $y_3 z_1$ no *backbone*, e novamente pela condição do *backbone*, temos que $\{\phi(y_1), \phi(y_3), \phi(y_4)\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. No entanto, como $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ formam uma clique, esses vértices precisam ser coloridos com cores distintas, o que contradiz o fato de que eles devem ser coloridos com apenas 3 cores. \square

Podemos construir uma $(q + 6)$ -coloração q -backbone ϕ para (G, T) , onde (G, T) é o par da Figura 50, da seguinte forma: atribuímos $\phi(y_1) = 1, \phi(y_2) = 2, \phi(y_3) = 3, \phi(y_4) = 4, \phi(z_1) = q + 3$ e $\phi(z_2) = q + 4$. Para os vértices adjacentes a y_i no paraquedas, utilizamos as cores em $\{q + 4, q + 5, q + 6\}$, para todo $1 \leq i \leq 4$. Já para os vértices adjacentes a z_j no paraquedas, usamos as cores em $\{1, 2, 3\}$, para todo $j \in \{1, 2\}$. Assim, com a coloração ϕ e a Proposição 32, provamos que $\text{BBC}_q(G, T) = q + 6$, como desejado.

Havet et al. generalizam o Problema em Aberto 5 para uma floresta como *backbone*, considerando os casos $q = 2$ e $q = 3$ (HAVET *et al.*, 2014).

Problema em Aberto 6. (HAVET *et al.*, 2014) Se G é um grafo planar e F uma floresta geradora de G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, F) \leq 6$?

Problema em Aberto 7. (HAVET *et al.*, 2014) Se G é um grafo planar e F uma floresta geradora de G , é verdade que $\text{BBC}_3(G, F) \leq 8$?

Os autores demonstram que, além de serem limitantes ótimos, caso sejam provados como verdadeiros, esses dois problemas em aberto apresentam uma relação de implicação: se o Problema em Aberto 6 for verdadeiro, isso implica que o Problema em Aberto 7 também é verdadeiro (HAVET *et al.*, 2014).

Proposição 33. (HAVET *et al.*, 2014) Sejam G um grafo planar e F uma floresta geradora de G . Se $\text{BBC}_2(G, F) \leq 6$, então $\text{BBC}_3(G, F) \leq 8$.

Demonstração. Sejam G um grafo planar e F uma floresta geradora de G . Assuma que $\text{BBC}_2(G, F) \leq 6$, portanto, (G, F) admite uma 6-coloração 2-backbone ϕ . Vamos construir uma 8-coloração 3-backbone ϕ' para (G, F) da seguinte forma: $\phi'(v) = \phi(v)$ se $\phi(v) \in \{1, 2\}$, $\phi'(v) = \phi(v) + 1$ se $\phi(v) \in \{3, 4\}$ e $\phi'(v) = \phi(v) + 2$ se $\phi(v) \in \{5, 6\}$. É fácil verificar que a condição do *backbone* é satisfeita. \square

Seja β o menor inteiro k tal que, para todo grafo planar não bipartido G com cintura de pelo menos k , existe uma árvore geradora T de G que satisfaça $\text{BBC}_2(G, T) = 4$. Bu et al. estudam o problema de determinar o valor de β (BU; ZHANG, 2011).

Bu, Bao, Li, Zhang e Wang provam esse problema parcialmente para grafos livres de ciclos especiais (BU; ZHANG, 2011; BU; LI, 2011; BU; BAO, 2015; WANG, 2012; ZHANG; BU, 2010). Araújo et al. provam um resultado mais geral em seu artigo (ARAÚJO *et al.*, 2017).

Teorema 34. (ARAÚJO *et al.*, 2017) Se G é um grafo, então existe uma árvore geradora T de G tal que $\text{BBC}_q(G, T) = \max \left\{ \chi(G), \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} + q \right\rceil \right\}$.

Para $q = 2$ e um grafo planar G , pelo Teorema das Quatro Cores, sabemos que $\chi(G) \leq 4$, logo, ao substituir os valores no Teorema 34, obtemos o que queríamos, isto é, $\text{BBC}_2(G, T) = 4$, onde T é uma árvore geradora de G . Farzad et al. provam o mesmo resultado do Teorema 34 para $q = 2$, com o seguinte teorema (FARZAD *et al.*, 2016).

Teorema 35. (FARZAD et al., 2016) Para todo grafo G , se $\chi(G) \leq 4$, então existe uma árvore geradora T de G tal que $\text{BBC}_2(G, T) = \chi(G)$. Se $\chi(G) = 3$, então existe uma árvore geradora T de G tal que $\text{BBC}_2(G, T) = 4$.

No mesmo artigo, Farzad et al. provam um resultado mais forte, do qual o Teorema 35 é decorrente.

Teorema 36. (FARZAD et al., 2016) Para todo grafo G com $\chi(G) = k$, existem uma árvore geradora T de G e uma k -coloração própria f de G tal que $|f(u) - f(v)| = 1$, para todo $uv \in E(T)$.

3.3.1 Caminho hamiltoniano como backbone

Nesta seção, abordamos os principais resultados da literatura referentes ao caso em que o *backbone* é um caminho hamiltoniano. Broersma et al., ao investigar a situação em que $q = 2$ e buscando compreender a relação entre os números cromáticos $\chi(G)$ e $\text{BBC}_2(G, P)$ para um grafo G e um caminho hamiltoniano P em G , apresentam alguns limitantes (BROERSMA et al., 2003). Antes de enunciar o primeiro resultado, definimos $\mathcal{P}(k)$, para um inteiro $k \geq 1$, da seguinte forma:

$$\mathcal{P}(k) = \max\{\text{BBC}_2(G, P) \mid G \text{ grafo com caminho hamiltoniano } P \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Teorema 37. (BROERSMA et al., 2003) Para todo inteiro $k \geq 1$, temos:

- (a) Para $1 \leq k \leq 4$, $\mathcal{P}(k) = 2k - 1$;
- (b) $\mathcal{P}(5) = 8$ e $\mathcal{P}(6) = 10$;
- (c) Para $k \geq 7$ e $k = 4t$, $\mathcal{P}(4t) = 6t$;
- (d) Para $k \geq 7$ e $k = 4t + 1$, $\mathcal{P}(4t + 1) = 6t + 1$;
- (e) Para $k \geq 7$ e $k = 4t + 2$, $\mathcal{P}(4t + 2) = 6t + 3$;
- (f) Para $k \geq 7$ e $k = 4t + 3$, $\mathcal{P}(4t + 3) = 6t + 5$.

Ideia de Prova. A prova do limitante inferior é feita pela construção de um grafo k -partido completo G com um caminho hamiltoniano P (usando permutações), tal que $\chi(G) = k$ e $\text{BBC}_2(G, P)$ atinge o valor desejado em cada caso. No entanto, devido à extensão da prova, omitiremos os detalhes aqui. Agora, para demonstrar os limitantes superiores, seja f uma k -coloração de G , vamos analisar cada caso individualmente:

- (a) $1 \leq k \leq 4$:

O limitante superior é consequência direta do Teorema 22, já que todo caminho hamiltoniano é uma árvore.

(b) $5 \leq k \leq 6$:

Para $k = 5$, vamos construir uma 8-coloração 2-*backbone* h para (G, P) . Utilizaremos conjuntos de cores definidos da seguinte forma: $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{3\}$, $D_3 = \{5\}$, $D_4 = \{8\}$ e $D_5 = \{2, 6, 7\}$. Para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, cada vértice v , colorido com a cor i em f , será colorido em h com a cor correspondente do conjunto D_i . Após colorir todos os vértices de cores 1, 2, 3 e 4, os vértices coloridos com a cor 5 em f serão coloridos de forma gulosa com uma das cores do conjunto D_5 , respeitando a condição do *backbone*. Ou seja, dado $v \in V(G)$ tal que $f(v) = 5$, sendo u e w o antecessor e o sucessor de v no caminho hamiltoniano P , colorimos v com a menor cor de D_5 tal que essa cor não seja vizinha de $h(u)$ nem de $h(w)$.

Note que as novas cores dos vértices coloridos em f com as cores 1, 2, 3 e 4 não são vizinhas, garantindo a condição do *backbone* para as arestas entre esses vértices. Agora, considere um vértice v colorido em f com a cor 5. Vamos mostrar que a cor escolhida para ele respeitará a condição do *backbone*. Sejam u e w os únicos vértices vizinhos de v no caminho hamiltoniano P , e assumimos que esses vértices são coloridos em h com as cores x e y (lembrando que $x, y \notin D_5$), respectivamente.

Suponha, por absurdo, que não conseguimos completar a coloração para o vértice v . Como $x, y \notin D_5$ e a condição do *backbone* deve ser satisfeita, para que não tenhamos cores disponíveis para v , as cores de D_5 devem ser vizinhas de x ou y (o que violaria a condição do *backbone*), ou seja, $D_5 \subseteq \{x-1, x+1, y-1, y+1\}$, o último conjunto formado pelas cores vizinhas a x ou y .

Nessa situação, como as cores 6 e 7 de D_5 são vizinhas, podemos supor, sem perda de generalidade, que $6 \in \{x-1, x+1\}$ e $7 \in \{y-1, y+1\}$, já que $x-1$ e $x+1$ não são cores vizinhas, assim como $y-1$ e $y+1$. Observe também que, nesse caso, $2 \notin \{x-1, x+1, y-1, y+1\}$, pois a cor 2 está a pelo menos 4 unidades de distância das cores 6 e 7. Já as cores $x-1$ e $x+1$ estão a no máximo 2 unidades da cor 6, assim como $y-1$ e $y+1$ em relação à cor 7. Isso contradiz a suposição de que $D_5 \subseteq \{x-1, x+1, y-1, y+1\}$. Portanto, sempre conseguimos completar a 8-coloração 2-*backbone* de (G, P) .

Para $k = 6$, a prova é feita de forma análoga, apenas adicionando o conjunto de cor $D_6 = \{10\}$.

(c) $k \geq 7$ e $k = 4t$:

Para $i \in \{1, 2, \dots, 4t\}$, defina V_i como sendo o conjunto dos vértices coloridos com a cor i em f . Para construir uma $(6t)$ -coloração 2-*backbone* h de (G, P) , definimos os seguintes conjuntos de cores: $C_j = \{2j - 1\}$, para $j \in \{1, 2, \dots, 3t\}$ e $C_j^* = \{2j, 2t + 2j, 4t + 2j\}$, para $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Seja $v \in V_j$, o vértice será colorido em h com a cor do conjunto C_j , para $j \in \{1, 2, \dots, 3t\}$. Seja $v \in V_{3t+j}$, o vértice será colorido em h de forma gulosa com uma das cores do conjunto C_j^* , para $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, respeitando a condição do *backbone*.

(d)-(e) $k \geq 7$ e, $k = 4t + 1$ ou $k = 4t + 2$:

A prova é feita de forma análoga a (c), apenas adicionando os conjuntos de cores $C_{3t+1} = \{6t + 1\}$ e $C_{3t+2} = \{6t + 3\}$.

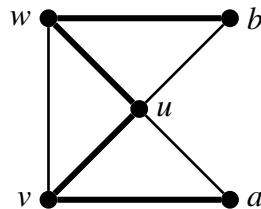
(f) $k \geq 7$ e $k = 4t + 3$:

Para $k > 7$, a prova é feita de forma análoga a (c), apenas adicionando os conjuntos de cores $C_{3t+1} = \{6t + 1\}$, $C_{3t+2} = \{6t + 3\}$ e $C_{3t+3} = \{6t + 5\}$. Para $k = 7$, a prova é feita de forma análoga a (b), utilizando os seguintes conjuntos de cores: $D_1^* = \{1\}$, $D_2^* = \{3\}$, $D_3^* = \{5\}$, $D_4^* = \{7\}$, $D_5^* = \{9\}$, $D_6^* = \{11\}$ e $D_7^* = \{2, 6, 10\}$. \diamond

Outro resultado encontrado na literatura, dentro da classe de grafos *split*, foi apresentado por Broersma et al. no artigo (BROERSMA et al., 2003). A demonstração completa do teorema pode ser consultada na versão expandida desse trabalho, disponível em (BROERSMA et al., 2007).

Teorema 38. (BROERSMA et al., 2003) Se G é um grafo *split* e P um caminho hamiltoniano em G , então, se $\omega(G) \neq 3$, temos que $\text{BBC}_2(G, P) \leq \chi(G) + 1$. Esse limitante é o melhor possível.

Figura 52 – Um par (G, P) (com as arestas do *backbone* em negrito) tal que $\chi(G) = 3$ e $\text{BBC}_2(G, P) = 5$.



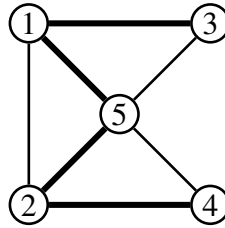
Fonte: Autoria própria, adaptado de (BROERSMA et al., 2003), 2024.

Os autores justificam a necessidade da hipótese $\omega(G) \neq 3$ no Teorema 38. Considere o grafo *split* G e seu caminho hamiltoniano P , conforme ilustrado na Figura 52. Uma vez que os vértices u , v e w formam uma clique e não há uma clique maior no grafo G , temos $\omega(G) = 3$. Agora, suponha, por contradição, que (G, P) admita uma 4-coloração 2-*backbone* f . Observe

que, dado que uv e uw são arestas do *backbone*, se $f(u) = 2$ ou $f(u) = 3$, isso implicaria que v e w teriam que receber a mesma cor, o que não é possível, pois eles são vértices adjacentes em G .

Portanto, o vértice u é colorido em f com a cor 1 ou a cor 4. Sem perda de generalidade, assumimos $f(u) = 1$. Consequentemente, a cor 2 é proibida para os vértices v e w , já que ambos são vizinhos de u no *backbone*. Portanto, v e w devem ser coloridos com as cores 3 e 4. Novamente, sem perda de generalidade, assumimos $f(v) = 3$. Observe que, como $av \in E(P)$, o vértice a deve ser colorido com a cor 1. Além disso, dado que $au \in E(G)$ e ambos estão coloridos com a mesma cor em f , isso contradiz nossa hipótese de que (G, P) admitia uma 4-coloração 2-*backbone*. Assim, concluímos que $\text{BBC}_2(G, P) > 4 = \chi(G) + 1$. A Figura 53 apresenta uma 5-coloração 2-*backbone* de (G, P) .

Figura 53 – Uma 5-coloração 2-*backbone* ótima de (G, P) (com as arestas do *backbone* em negrito).



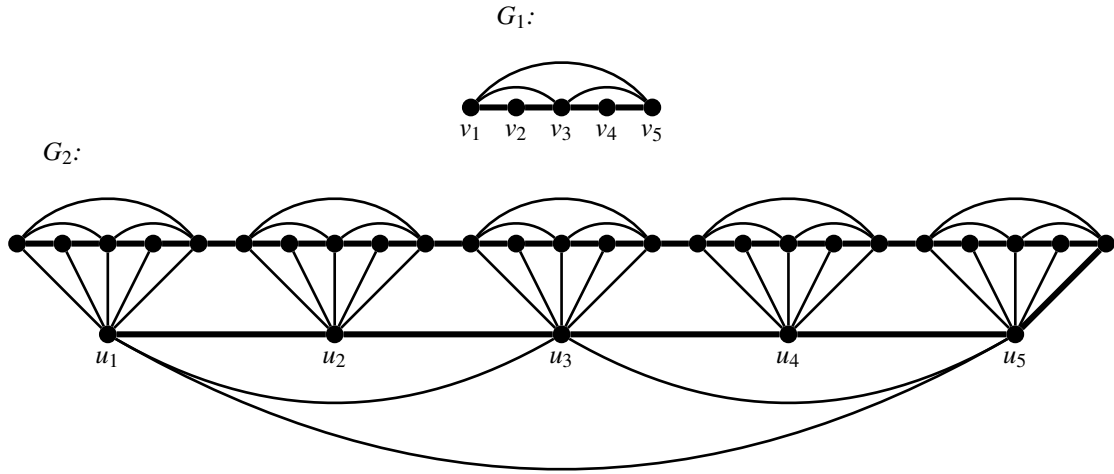
Fonte: Autoria própria, 2024.

Pode-se aplicar o resultado obtido no Teorema 37 ao caso em que o grafo G é planar. De acordo com o Teorema das Quatro Cores, sabemos que $\chi(G) \leq 4$ (APPEL; HAKEN, 1976). Agora, considerando um caminho hamiltoniano P em G , estabelecemos o limitante $\text{BBC}_2(G, P) \leq 7$. No artigo (BROERSMA *et al.*, 2003), os autores apresentam um exemplo de um grafo planar G_2 com seu caminho hamiltoniano P , ilustrados na Figura 54, demonstrando que esse limitante não pode ser melhorado para 5.

Para demonstrar que o par (G_2, P) não admite uma 5-coloração 2-*backbone*, começamos analisando o grafo G_1 . Argumentaremos que, em qualquer 5-coloração 2-*backbone* de G_1 , há um vértice v_i , para algum $1 \leq i \leq 5$, que deve ser colorido com a cor 3. Caso contrário, existiria uma coloração 2-*backbone* c de G_1 com 5 cores que não utiliza a cor 3. Suponha que c seja essa coloração e, sem perda de generalidade, que $c(v_1) \in \{1, 2\}$. Isso implicaria que $c(v_2)$ e $c(v_4)$ pertencem a $\{4, 5\}$, enquanto $c(v_3)$ e $c(v_5)$ pertencem a $\{1, 2\}$. No entanto, essa configuração é contraditória, pois v_1 , v_3 e v_5 formam uma clique.

Portanto, em uma 5-coloração 2-*backbone* de G_2 , os vértices u_1 , u_2 , u_3 , u_4 e u_5 têm algum vizinho que é colorido com a cor 3, de modo que não podem receber essa cor. Além

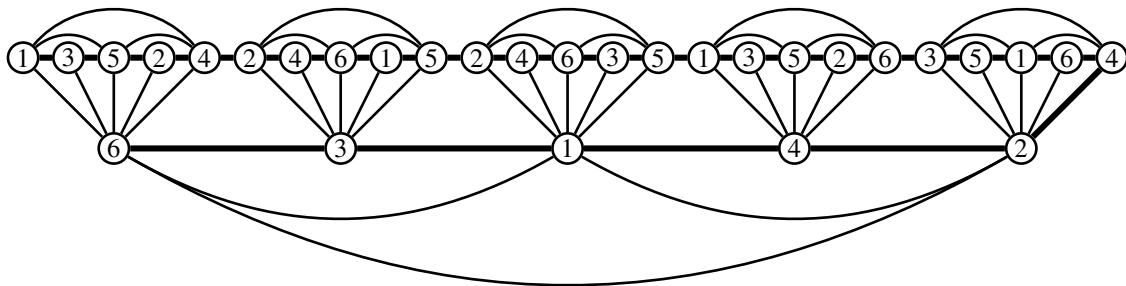
Figura 54 – Grafos planares G_1 e G_2 com caminho hamiltoniano como *backbone* (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, adaptado de (BROERSMA *et al.*, 2003), 2024.

disso, observe que $G[\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}] \cong G_1$, o que contradiz a possibilidade dessa coloração, já que não aparece a cor 3 nesse subgrafo. Na Figura 55, podemos observar uma 6-coloração 2-backbone desse par.

Figura 55 – Uma 6-coloração 2-backbone de (G_2, P) (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Além disso, os autores destacam os seguintes problemas em aberto:

Problema em Aberto 8. (BROERSMA *et al.*, 2003) Se G é um grafo planar e P um caminho hamiltoniano em G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, P) \leq 6$?

Problema em Aberto 9. (BROERSMA *et al.*, 2007) Se G é um grafo planar e P um caminho hamiltoniano em G , conseguimos provar que $\text{BBC}_2(G, P) \leq 7$ sem usar o Teorema das Quatro Cores?

Ao restringir o Problema em aberto 3 ao caso em que o *backbone* é um caminho hamiltoniano, Broersma et al. demonstraram o seguinte resultado:

Proposição 39. (BROERSMA et al., 2007) *Se G é um grafo cordal e P um caminho hamiltoniano em G , então $\text{BBC}_2(G, P) \leq \chi(G) + 4$.*

Demonstração. Considerando G e P como descritos na proposição, provaremos por indução no número de vértices $n(G)$ que $\text{BBC}_2(G, P) \leq \chi(G) + 4$. O caso base, quando $n(G) = 1$, é trivial. Agora, para $k \geq 2$, suponha que, para todo grafo cordal G com $k - 1$ vértices e qualquer caminho hamiltoniano P em G , vale a desigualdade $\text{BBC}_2(G, P) \leq \chi(G) + 4$.

Sejam G um grafo cordal com k vértices e P um caminho hamiltoniano em G . Como G é cordal, existe um vértice simplicial v , ou seja, seus vizinhos $N_G(v)$ formam uma clique em G . Ao remover v , o grafo $G - v$ continua sendo cordal, pois remover um vértice preserva a cordalidade de um grafo. Sejam u e w os únicos vizinhos de v em P . O caminho hamiltoniano P' é obtido de P ao substituir as arestas uv e vw pela aresta uw (como $N_G(v)$ forma uma clique, temos a aresta uw em G , permitindo sua inclusão no *backbone*). Assim, P' é um caminho hamiltoniano em $G - v$. Pela hipótese indutiva, existe uma $(\chi(G - v) + 4)$ -coloração 2-*backbone* c para $(G - v, P')$.

Vamos estender a coloração c para todo o grafo G . Para colorir o vértice v , observe que $|N_G(v)|$ cores estão proibidas, já que a vizinhança de v forma uma clique em G . Além disso, até 4 cores adicionais podem ser proibidas devido à condição do *backbone*, em respeito aos dois vizinhos de v em P . Assim, no total, no máximo $|N_G(v)| + 4$ cores são proibidas para v , sendo necessário adicionar apenas uma nova cor para colorir v , se necessário. Note que $\chi(G - v) \leq \chi(G)$ e, como $N_G(v)$ junto a v formam uma clique, temos $\chi(G) \geq |N_G(v)| + 1$. Portanto, podemos estender a coloração c para todo o grafo G , utilizando no máximo $\chi(G) + 4$ cores, pois $\chi(G) + 4 \geq |N_G(v)| + 5$, como queríamos demonstrar. \square

Em um artigo focado em resultados para outras classes de *backbone*, Broersma et al. citam o Teorema 37, que relaciona os números cromáticos da coloração própria e da coloração 2-*backbone*, ao enunciarem os principais limitantes já conhecidos (BROERSMA et al., 2009a). Buscando uma generalização desse problema para um q qualquer, os autores apresentam o seguinte problema em aberto. Antes de enunciar o problema em aberto, precisamos definir $\mathcal{P}_q(k)$, para todo inteiro $k \geq 1$, da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_q(k) = \max\{\text{BBC}_q(G, P) \mid G \text{ grafo com caminho hamiltoniano } P \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Problema em Aberto 10. (BROERSMA et al., 2009a) Quais os valores para $\mathcal{P}_q(k)$ quando $q \geq 3$?

3.3.2 Galáxia como backbone

Nesta seção, apresentamos resultados conhecidos para o caso em que o *backbone* é uma galáxia. O primeiro resultado foi apresentado por Salman no seu artigo (SALMAN, 2006). Para enunciá-lo, precisamos definir $\mathcal{H}_q(k)$ para todo inteiro $k \geq 1$, da seguinte forma:

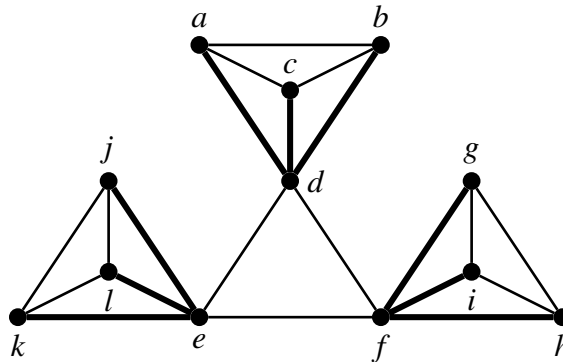
$$\mathcal{H}_q(k) = \max\{\text{BBC}_q(G, H) \mid G \text{ grafo com galáxia } H \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Teorema 40. (SALMAN, 2006) Para todos os inteiros $q \geq 2$ e $k \geq 1$, temos:

- (a) $\mathcal{H}_q(2) = q + 1$;
- (b) Para $3 \leq k \leq 2q - 3$, $\mathcal{H}_q(k) = \lceil \frac{3k}{2} \rceil + q - 2$;
- (c) Para $2q - 2 \leq k \leq 2q - 1$ com $q \geq 3$, $\mathcal{H}_q(k) = k + 2q - 2$; $\mathcal{H}_2(3) = 5$;
- (d) Para $k = 2q$ com $q \geq 3$, $\mathcal{H}_q(k) = 2k - 1$; $\mathcal{H}_2(4) = 6$;
- (e) Para $k \geq 2q + 1$, $\mathcal{H}_q(k) = 2k - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor$.

Ao aplicar o teorema anterior em um grafo planar G , pelo Teorema das Quatro Cores, temos $\chi(G) \leq 4$ (APPEL; HAKEN, 1976). Portanto, usando o limitante (b) do Teorema 40, obtemos que $\text{BBC}_q(G, H) \leq q + 4$ para uma galáxia H em G . Havet et al. destacam que esse limitante é o melhor possível, mesmo quando a galáxia H tem grau máximo 3, como o exemplo ilustrado na Figura 56 (HAVET et al., 2014).

Figura 56 – Um grafo planar G com uma galáxia H , cujo grau máximo é 3, tal que $\text{BBC}_q(G, H) = q + 4$ (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, adaptado de (HAVET et al., 2014), 2024.

Para mostrar que o par (G, H) da Figura 56 não admite uma $(q + 3)$ -coloração q -backbone, procederemos por absurdo. Suponha que ϕ seja uma $(q + 3)$ -coloração q -backbone de

(G, H) . Antes de avançar, provemos um resultado análogo à Proposição 31, também apresentada no artigo de Havet et al. (HAVET *et al.*, 2014).

Observe que existem paraquedas nos vértices d, e e f . Se algum desses vértices fosse colorido com uma cor $2 \leq \alpha \leq q+2$, haveria no máximo duas cores que não são adjacentes à cor α . Isso é um absurdo, pois d, e e f são vizinhos no *backbone* de três vértices que formam uma clique em G . Assim, concluímos que $\phi(d), \phi(e)$ e $\phi(f)$ devem pertencer ao conjunto $\{1, q+3\}$. No entanto, como d, e e f formam uma clique em G , isso gera a contradição que buscávamos.

Para construir uma $(q+4)$ -coloração q -*backbone* ϕ para o par (G, H) da Figura 56, basta definir $\phi(d) = 1, \phi(f) = 2$ e $\phi(e) = q+4$. Em seguida, colorimos os vértices a, b, c, g, i e h com cores no conjunto $\{q+2, q+3, q+4\}$. Finalmente, colorimos os vértices j, k e l com cores no conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Havet et al. investigam o limitante de grafos planares com galáxias de grau máximo 2 como *backbone*. Os autores apresentam pares que alcançam o número cromático 2-*backbone* igual a 6 quando $q = 2$ e propõem o seguinte problema em aberto para $q \geq 3$ (HAVET *et al.*, 2014).

Problema em Aberto 11. (HAVET *et al.*, 2014) Para todo inteiro $q \geq 3$, se G é um grafo planar e F uma galáxia de grau máximo 2, é verdade que $\text{BBC}_q(G, F) \leq q+3$?

Salman também apresenta resultados para grafos *split*, conforme enunciado a seguir (SALMAN, 2006). A prova do teorema abaixo pode ser encontrada no artigo de Broersma et al. (BROERSMA *et al.*, 2009b).

Teorema 41. (SALMAN, 2006) Dado um inteiro $q \geq 2$ e um grafo *split* G com $\chi(G) = k \geq 2$. Para toda galáxia H em G , temos:

$$\text{BBC}_q(G, H) \leq \begin{cases} \chi(G) + q & , \text{ se } k = 3 \text{ ou } q = 2 \text{ e } k \geq 4; \\ \chi(G) + q - 1 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Esses limitantes são os melhores possíveis.

3.3.3 Emparelhamento como backbone

Nesta seção, apresentamos os resultados da literatura sobre o caso em que o *backbone* é um emparelhamento. Ao focar no caso específico em que $q = 2$, e buscando entender a relação entre os parâmetros $\chi(G)$ e $\text{BBC}_2(G, H)$, Broersma et al. exploraram alguns limitantes em

(BROERSMA *et al.*, 2003). Para enunciar um dos seus resultados, os autores definem $\mathcal{M}(k)$ para todo inteiro $k \geq 1$ da seguinte forma:

$$\mathcal{M}(k) = \max\{\text{BBC}_2(G, M) \mid G \text{ grafo com emparelhamento perfeito } M \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Teorema 42. (BROERSMA *et al.*, 2003) Para todo inteiro $k \geq 1$, temos:

- (a) $\mathcal{M}(4) = 6$;
- (b) Para $k = 3t$, $\mathcal{M}(3t) = 4t$;
- (c) Para $k \neq 4$ e $k = 3t + 1$, $\mathcal{M}(3t + 1) = 4t + 1$;
- (d) Para $k = 3t + 2$, $\mathcal{M}(3t + 2) = 4t + 3$.

Demonstração. Vamos demonstrar os limitantes superiores, seja c uma k -coloração de G . Para um vértice $v \in V(G)$, denotamos por $n(v)$ o vizinho de v no emparelhamento M . Se $k = 1$, é trivial. Se $k = 2$, ao recolorir os vértices v tal que $c(v) = 2$ para a cor 3, obtemos uma 3-coloração 2-backbone de (G, M) .

Se $k = 3$, vamos construir uma 4-coloração 2-backbone f de (G, M) da seguinte forma:

- Se $c(v) = 1$, então $f(v) = 1$;
- Se $c(v) = 2$, então $f(v) = 4$;
- Se $c(v) = 3$ e $c(n(v)) = 1$, então $f(v) = 3$;
- Se $c(v) = 3$ e $c(n(v)) = 2$, então $f(v) = 2$.

Se $k = 4$, vamos construir uma 6-coloração 2-backbone f de (G, M) da seguinte forma:

- Se $c(v) = 1$, então $f(v) = 1$;
- Se $c(v) = 2$, então $f(v) = 3$;
- Se $c(v) = 3$, então $f(v) = 6$;
- Se $c(v) = 4$ e $c(n(v)) = 1$ ou 2 , então $f(v) = 5$;
- Se $c(v) = 4$ e $c(n(v)) = 3$, então $f(v) = 4$.

Se $k = 5$, vamos construir uma 7-coloração 2-backbone f de (G, M) da seguinte forma:

- Se $c(v) = 1$, então $f(v) = 1$;
- Se $c(v) = 2$, então $f(v) = 3$;
- Se $c(v) = 3$, então $f(v) = 5$;
- Se $c(v) = 4$, então $f(v) = 7$;
- Se $c(v) = 5$ e $c(n(v)) = 1$ ou 2 , então $f(v) = 6$;

- Se $c(v) = 5$ e $c(n(v)) = 3$ ou 4 , então $f(v) = 2$.

Se $k \geq 6$, vamos considerar os casos individualmente, para $t \geq 2$, de acordo com suas congruências módulo 3.

(b) $k = 3t$:

Para $i \in \{1, 2, \dots, 4t\}$, defina V_i como sendo o conjunto dos vértices coloridos com a cor i em c . Para construir uma $(4t)$ -coloração 2-backbone f de (G, M) , definimos os seguintes conjuntos de cores: $C_j = \{2j - 1\}$, para $j \in \{1, 2, \dots, 2t\}$ e $C_j^* = \{2j, 2t + 2j\}$, para $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Para cada $v \in V_j$, o vértice v será colorido em f com a cor do conjunto C_j , para $j \in \{1, 2, \dots, 2t\}$. Para cada $v \in V_{2t+j}$, o vértice v será colorido em f de forma gulosa com uma das cores do conjunto C_j^* , para $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, respeitando a condição do *backbone*.

(c)-(d) $k = 3t + 1$ ou $k = 3t + 2$:

A prova é feita de forma análoga a (b), apenas adicionando os conjuntos de cores $C_{2t+1} = \{4t + 1\}$ e $C_{2t+2} = \{4t + 3\}$.

Agora, para provar os limitantes superiores, construiremos um par (G, M) , onde G é um grafo com $\chi(G) = k$ e M é um emparelhamento perfeito em G , de forma que $\text{BBC}_2(G, M)$ atinja o valor desejado. O caso em que $k = 1$ é trivial.

Para $k \geq 2$, considere G como um grafo k -partido completo, com V_1, V_2, \dots, V_k sendo os conjuntos independentes de G , cada um contendo $k - 1$ vértices. Claramente, temos $\chi(G) = k$. Renomearemos os vértices de V_i como $\{v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$. O emparelhamento perfeito M será formado pelas arestas $\{v_{i,j}v_{j,i} \mid 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}$.

Seja c uma ℓ -coloração 2-backbone de (G, M) . Definimos C_i como o conjunto de cores atribuídas aos vértices de V_i , para todo i . Como G é um grafo k -partido completo, nenhuma cor em C_i pode aparecer em C_j para $i \neq j$. Se $|C_i| = 1$, chamamos V_i de monocromático, pois ele está colorido por uma única cor. Se $|C_i| \geq 2$, chamamos V_i de policromático. Para um conjunto monocromático V_i , denotamos sua única cor por c_i . Definimos s_1 e s_2 como o número de conjuntos monocromáticos e policromáticos, respectivamente. Claramente, temos $s_1 + s_2 = k$ e $s_1 + 2s_2 \leq \ell$, que juntos implicam que:

$$s_1 \geq 2k - \ell \quad (3.1)$$

Sendo V_i e V_j conjuntos monocromáticos com $i \neq j$, pela construção de M , existe a aresta $v_{i,j}v_{j,i} \in E(M)$. Como a condição do *backbone* deve ser respeitada, devemos ter $|c(v_{i,j}) - c(v_{j,i})| = |c_i - c_j| \geq 2$. Isso implica que $\ell \geq 2s_1 - 1$. Juntando essa desigualdade com

a Desigualdade (3.1), temos que $3\ell \geq 4k - 1$, satisfazendo todos os limitantes inferiores para $k \geq 2$, exceto o caso $k = 4$.

Agora, vamos tratar o caso $k = 4$ separadamente. Com o mesmo par (G, M) construído anteriormente, seja c uma ℓ -coloração 2-backbone de (G, M) . Suponha, por absurdo, que $\ell \leq 5$. Pela Desigualdade (3.1), temos que $s_1 \geq 8 - \ell \geq 3$. Sem perda de generalidade, suponha que V_1, V_2 e V_3 são conjuntos monocromáticos. Assim, as arestas $v_{1,2}v_{2,1}$, $v_{1,3}v_{3,1}$ e $v_{2,3}v_{3,2}$ estão em M , e pela condição do backbone, temos $|c_1 - c_2|, |c_2 - c_3|, |c_1 - c_3| \geq 2$.

Como $\ell \leq 5$, segue que $\{c_1, c_2, c_3\} \subseteq \{1, 3, 5\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $c_1 = 3$. Além disso, como nenhuma cor de V_i pode aparecer em V_j para $i \neq j$, temos que $C_4 \subseteq \{2, 4\}$. Note que $v_{4,1} \in V_4$ e existe a aresta $v_{4,1}v_{1,4}$ em M . Como as cores de V_4 são vizinhas da cor 3, que colore o vértice $v_{1,4}$, não podemos satisfazer a condição do backbone nessa aresta, levando a uma contradição. \square

Miškuf et al. apresentam dois resultados, um para ciclos e outro para grafos completos (MIŠKUF et al., 2010).

Teorema 43. (MIŠKUF et al., 2010) *Se C_n é um ciclo com n vértices e M um emparelhamento de C_n , então $\text{BBC}_2(C_n, M) \leq 3$.*

Teorema 44. (MIŠKUF et al., 2010) *Se K_n é um grafo completo com n vértices e M um emparelhamento de K_n , então $\text{BBC}_2(K_n, M) \leq n$.*

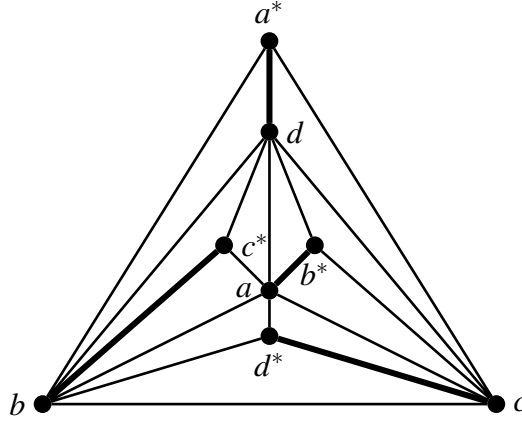
Ao tentar alcançar resultados mais gerais, olhando para grafos de grau máximo $\Delta(G)$, os autores no artigo (MIŠKUF et al., 2010) apresentam o seguinte teorema.

Teorema 45. (MIŠKUF et al., 2010) *Se G é um grafo de grau máximo $\Delta(G)$ e M um emparelhamento de G , então $\text{BBC}_2(G, M) \leq \Delta(G) + 1$.*

Apesar de o enunciado ser válido, a prova original fornecida para o Teorema 45 foi identificada como incorreta, sendo posteriormente corrigida por Araújo et al. em (ARAÚJO et al., 2019).

Pode-se aplicar o resultado obtido no Teorema 42 ao caso em que o grafo G é planar. De acordo com o Teorema das Quatro Cores, sabemos que $\chi(G) \leq 4$. Agora, considerando um emparelhamento perfeito M de G , estabelecemos o limitante $\text{BBC}_2(G, M) \leq 6$. No artigo (BROERSMA et al., 2003), os autores apresentam um exemplo de um grafo planar G com seu

Figura 57 – Um par (G, M) (com as arestas do *backbone* em negrito) tal que $BBC_2(G, M) = 5$.



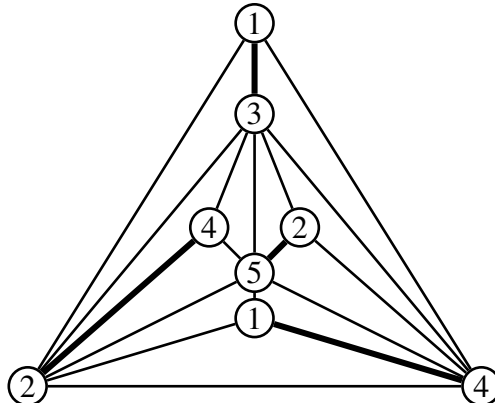
Fonte: Autoria própria, adaptado de (BROERSMA *et al.*, 2003), 2024.

emparelhamento perfeito M , ilustrados na Figura 57, demonstrando que esse limitante não pode ser melhorado para 4.

Para provar que o par (G, M) da Figura 57 não pode ser colorido com 4 cores, suponha, por contradição, que ϕ seja uma 4-coloração 2-backbone de (G, M) . Seja $x \in \{a, b, c, d\}$ um vértice qualquer. Chamamos o vértice x^* de oposto de x . Observe que os vértices a, b, c e d formam uma clique, de modo que todos eles são coloridos com cores distintas. Além disso, o vértice x deve ser colorido com a mesma cor que o seu vértice oposto x^* , pois x^* é adjacente aos vértices do conjunto $\{a, b, c, d\} \setminus \{x\}$.

Sem perda de generalidade, suponha que os vértices a e a^* sejam coloridos com a cor 2. Devido à condição do *backbone*, os vértices b^* e d serão coloridos com a cor 4, implicando que a cor do vértice b também seja 4, o que é um absurdo, pois b e d são adjacentes no grafo G . Na Figura 58, apresentamos uma 5-coloração 2-backbone de (G, M) .

Figura 58 – Uma 5-coloração 2-backbone de (G, M) (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Os autores destacam também os seguintes problemas em aberto:

Problema em Aberto 12. (BROERSMA et al., 2003) Se G é um grafo planar e M um emparelhamento perfeito de G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, M) \leq 5$?

Problema em Aberto 13. (BROERSMA et al., 2007) Se G é um grafo planar e M um emparelhamento perfeito de G , conseguimos provar que $\text{BBC}_2(G, M) \leq 6$ sem usar o Teorema das Quatro Cores?

Araújo et al. fornecem uma prova parcial para esses dois problemas em aberto, considerando G como um grafo planar sem duas faces de grau 3 que compartilham uma aresta. Os autores demonstram os limitantes, usando o método da descarga, para a versão circular da Coloração *Backbone*, o que implica diretamente nos limitantes dos problemas em aberto, sem utilizar o Teorema das Quatro Cores, já que $\text{BBC}_2(G, H) \leq \text{CBC}_2(G, H) \leq \text{BBC}_2(G, H) + 1$ para todo par (G, H) (ARAÚJO et al., 2018).

Teorema 46. (ARAÚJO et al., 2018) Se G é um grafo planar sem duas faces de grau 3 que compartilham uma aresta e M um emparelhamento perfeito em G , então $\text{CBC}_2(G, M) \leq 6$.

No artigo de Salman (SALMAN, 2006), o Teorema 42 é generalizado para o caso em que $q \geq 2$. Para enunciar, para todo inteiro $k \geq 1$, definimos $\mathcal{M}_q(k)$ como sendo:

$$\mathcal{M}_q(k) = \max\{\text{BBC}_q(G, M) \mid G \text{ grafo com emparelhamento perfeito } M \text{ e } \chi(G) = k\}.$$

Teorema 47. (SALMAN, 2006) Para todos os inteiros $q \geq 2$ e $k \geq 1$, temos:

- (a) Para $2 \leq k \leq q$, $\mathcal{M}_q(k) = q + k - 1$;
- (b) Para $q + 1 \leq k \leq 2q$, $\mathcal{M}_q(k) = 2k - 2$;
- (c) Para $k = 2q + 1$, $\mathcal{M}_q(k) = 2k - 3$;
- (d) Para $k = t \cdot (q + 1)$ com $t \geq 2$, $\mathcal{M}_q(k) = (2t) \cdot q$;
- (e) Para $k = t \cdot (q + 1) + c$ com $t \geq 2$ e $1 \leq c < \frac{q+3}{2}$, $\mathcal{M}_q(k) = (2t) \cdot q + 2c - 1$;
- (f) Para $k = t \cdot (q + 1) + c$ com $t \geq 2$ e $\frac{q+3}{2} \leq c \leq q$, $\mathcal{M}_q(k) = (2t) \cdot q + 2c - 2$.

Sendo G um grafo planar, pelo Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), temos que $\chi(G) \leq 4$. Considerando $k = 4$ no Teorema 47, obtemos o limitante $\text{BBC}_q(G, M) \leq q + 3$ para $q \geq 4$ e um emparelhamento perfeito M em G .

No caso de um grafo *split* G , Salman apresenta um teorema com limitantes para qualquer $q \geq 2$, semelhante ao Teorema 47, mas específico para a classe dos grafos *split*

(SALMAN, 2006). No artigo de Broersma et al., os limitantes aparecem de forma mais concisa, conforme enunciado a seguir (BROERSMA *et al.*, 2009b).

Teorema 48. (BROERSMA *et al.*, 2009b) *Dado um inteiro $q \geq 2$ e um grafo split G com $\chi(G) = k \geq 2$. Para todo emparelhamento perfeito M em G , temos:*

$$\text{BBC}_q(G, M) \leq \begin{cases} q+1 & , \text{ se } k=2; \\ k+1 & , \text{ se } k=4 \text{ e } q \leq \min \left\{ \frac{k}{2}, \frac{k+5}{3} \right\}; \\ k+2 & , \text{ se } k=9 \text{ ou } k \geq 11 \text{ e } \frac{k+6}{3} \leq q \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil; \\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + q & , \text{ se } k=3, 5, 7 \text{ e } q \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil; \\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + q + 1 & , \text{ se } k=4, 6 \text{ ou } k \geq 8 \text{ e } q \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1. \end{cases}$$

Esses limitantes são os melhores possíveis.

3.3.4 Complexidade Computacional

Nesta seção, apresentamos alguns resultados conhecidos de complexidade computacional na Coloração *Backbone* nas seguintes classes de grafos para o *backbone*: árvore, caminho hamiltoniano, galáxia e emparelhamento, os quais temos interesse em estender para a variação direcionada da Coloração *Backbone*.

Os autores em (BROERSMA *et al.*, 2003) abordam a complexidade computacional para $q = 2$ do seguinte problema:

ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE

Entrada: Um grafo G e um subgrafo gerador H de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, H) \leq \ell$?

O problema ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE é NP-completo para $\ell \geq 3$, uma vez que toda ℓ -coloração q -backbone de (G, H) , com H sendo um grafo vazio, é também uma ℓ -coloração do grafo G . Além disso, sabemos que decidir se um grafo é ℓ -colorível é NP-completo para $\ell \geq 3$ (GAREY; JOHNSON, 1979).

Havet et al. destacam que, para um grafo G e um subgrafo gerador H de G com $\delta(H) \geq 1$, decidir se $\text{BBC}_q(G, H) \leq q+1$ pode ser resolvido em tempo polinomial, uma vez que $\text{BBC}_q(G, H) = q+1$ se, e somente se, G é bipartido (como foi provado na Proposição 18). Isso se deve ao fato de que o problema de determinar se um grafo é bipartido pode ser resolvido em tempo polinomial (GAREY; JOHNSON, 1979; HAVET *et al.*, 2014).

Os autores também provam um resultado mais geral ao considerarem o *backbone* como conexo (HAVET *et al.*, 2014), mostrando que o problema ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE, quando restrito a outras condições, pode ser resolvido em tempo polinomial (HAVET *et al.*, 2014).

Teorema 49. (HAVET *et al.*, 2014) *Se G é um grafo conexo e H um subgrafo gerador conexo de G , então decidir se $\text{BBC}_q(G, H) \leq q + 2$ pode ser resolvido em tempo polinomial.*

No entanto, ao remover a condição de que o *backbone* seja conexo e ao considerar H como um emparelhamento perfeito, os autores provam que esse problema é NP-completo (HAVET *et al.*, 2014).

Teorema 50. (HAVET *et al.*, 2014) *Se G é um grafo planar e H um emparelhamento perfeito de G , então decidir se $\text{BBC}_q(G, H) \leq q + 2$ é NP-completo.*

Quando o *backbone* é uma árvore geradora T ou um caminho hamiltoniano P , Broersma *et al.* apresentam resultados importantes sobre esses casos. A prova completa do teorema é detalhada no artigo expandido (BROERSMA *et al.*, 2007). Antes de enunciar o teorema, vamos definir os problemas específicos para essas classes de *backbone*.

ÁRVORE ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE

Entrada: Um grafo G e uma árvore geradora T de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, T) \leq \ell$?

CAMINHO ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE

Entrada: Um grafo G e um caminho hamiltoniano P em G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, P) \leq \ell$?

Teorema 51. (BROERSMA *et al.*, 2003)

- (a) *O problema ÁRVORE ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 4$.*
- (b) *O problema CAMINHO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE é NP-completo para $\ell \geq 5$.*

Demonstração. Assuma que $\ell \leq 4$. Primeiro, note que, para $\ell = 1$, decidir se $\text{BBC}_2(G, T) \leq 1$ é verdade é equivalente a saber se $E(G) = \emptyset$. Se houver pelo menos uma aresta em G , a resposta ao

problema é imediatamente *não*. Para $\ell = 2$, a verificação está relacionada à existência de arestas no *backbone*. Se houver qualquer aresta no *backbone*, a resposta ao problema é prontamente *não*. Caso contrário, basta verificar se o grafo G é bipartido.

Observe que T é uma árvore geradora. Portanto, no cenário em que $E(T) = \emptyset$, temos que G é um grafo trivial, implicando que apenas uma cor é necessária para a coloração. Logo, a resposta ao problema é imediatamente *sim*, quando $E(T) = \emptyset$ e $\ell \geq 1$.

Pela Proposição 18, ao substituir $q = 2$, temos que $\text{BBC}_2(G, T) = 3$ se, e somente se, G é um grafo bipartido, que sabemos que pode ser decidido em tempo polinomial, o que resolve o problema para $\ell = 3$.

Suponha agora que $\ell \geq 4$. Considere o grafo $G = (V, E)$ e sua árvore geradora $T = (V, E_T)$. Como toda árvore é 2-colorível propriamente, seja c uma 2-coloração de T . Agora, examinaremos a bipartição dos vértices de G induzida por essa coloração c , denotando-a como $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são os conjuntos de vértices coloridos com as cores 1 e 2, respectivamente, de acordo com a coloração c .

Agora, para $\ell = 4$, considere uma 4-coloração 2-*backbone* f de (G, T) . Seja v^* um vértice de V_1 e suponha, sem perda de generalidade, que $f(v^*) \in \{1, 2\}$. Consequentemente, os vértices nos conjuntos V_1 e V_2 são coloridos com as cores pertencentes a $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$, respectivamente. Portanto, podemos afirmar que $\text{BBC}_2(G, T) = 4$ se, e somente se, ambos os subgrafos de G induzidos pelos conjuntos V_1 e V_2 são bipartidos, e nenhuma aresta de E_T conecta um vértice de cor 2 em V_1 a um vértice de cor 3 em V_2 . Isso ocorre porque a condição de *backbone* deve ser satisfeita, e as cores 2 e 3 são cores vizinhas. Este problema pode ser reduzido ao problema 2-SAT, que é conhecido por ser resolvido em tempo polinomial (GAREY; JOHNSON, 1979).

Para realizar a redução, criamos duas variáveis *booleanas*, x_v e y_v , para cada vértice $v \in V(G)$. Os literais x_v e \bar{x}_v correspondem a colorir o vértice v com as cores 1 e 2, respectivamente, enquanto os literais y_v e \bar{y}_v correspondem a atribuir as cores 3 e 4 ao vértice v , respectivamente. Dessa forma, observe que $G[V_1]$ é bipartido se, e somente se, existe uma atribuição satisfatória para a fórmula *booleana* $(x_u \vee x_v) \wedge (\bar{x}_u \vee \bar{x}_v)$ para toda aresta $uv \in E(G[V_1])$. Esta fórmula assegura que, para cada aresta uv em G , um vértice u recebe uma cor e o vértice v recebe uma cor diferente dentro do conjunto de cores $\{1, 2\}$. Para o subgrafo $G[V_2]$, o processo é análogo.

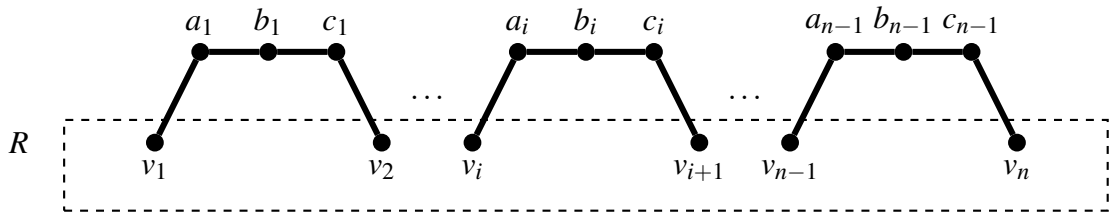
Além disso, para uma aresta $uv \in E_T$ com $u \in V_1$ e $v \in V_2$, os vértices serão coloridos

de maneira a satisfazer as condições de uma 4-coloração 2-*backbone* se, e somente se, houver uma atribuição satisfatível para a fórmula booleana $x_u \vee \overline{y_v}$. Como as cores 2 e 3 são vizinhas, não é permitido que uma aresta no *backbone* tenha suas extremidades coloridas com essas duas cores. Assim, a fórmula proíbe que as cores 2 e 3 apareçam simultaneamente em uma aresta do *backbone*, garantindo que ou a cor 1 (x_u) ou a cor 4 ($\overline{y_v}$) sempre apareça em uma de suas extremidades.

Assuma agora que $\ell \geq 5$. A redução é realizada a partir de um problema clássico que é NP-completo: o problema da ℓ -coloração (mais informações sobre este problema podem ser encontradas em (GAREY; JOHNSON, 1979)). O problema consiste em, dado um grafo R , responder à seguinte pergunta: existe uma ℓ -coloração de R ?

Vamos construir um grafo G e um caminho hamiltoniano P . Seja $R = (V_R, E_R)$ uma instância do problema de ℓ -coloração e v_1, v_2, \dots, v_n uma enumeração dos vértices de R . Para cada $1 \leq i \leq n-1$, criamos os vértices a_i, b_i e c_i , e adicionamos as arestas $v_i a_i, a_i b_i, b_i c_i$ e $c_i v_{i+1}$ no *backbone* P , conforme ilustrado na Figura 59. O grafo resultante será o grafo G . Dessa forma, é claro que $(v_1, a_1, b_1, c_1, v_2, \dots, v_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, v_n)$ é um caminho hamiltoniano P em G . Afirmamos que $\text{BBC}_2(G, P) \leq \ell$ se, e somente se, $\chi(R) \leq \ell$.

Figura 59 – A construção do grafo G com o caminho hamiltoniano P (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Suponha que $\text{BBC}_2(G, P) \leq \ell$ e seja f tal coloração 2-*backbone* de (G, P) . A restrição de f aos vértices de R é uma ℓ -coloração de R , logo $\chi(R) \leq \ell$. Agora, suponha que $\chi(R) \leq \ell$ e seja ϕ tal ℓ -coloração de R . Para cada $1 \leq i \leq n-1$, vamos estender ϕ para (G, P) da seguinte forma:

- Se $f(v_i) \leq 3$, então $\phi(a_i) = \ell$;
- Se $f(v_i) \geq 4$, então $\phi(a_i) = 1$;
- Se $f(v_{i+1}) \leq 3$, então $\phi(c_i) = \ell$;
- Se $f(v_{i+1}) \geq 4$, então $\phi(c_i) = 1$;
- $\phi(b_i) = 3$.

Assim, concluímos que $\text{BBC}_2(G, P) \leq \ell$. \square

Os autores em (BROERSMA *et al.*, 2003) analisam o mesmo problema de complexidade computacional para uma classe distinta de grafos, em que o *backbone* consiste em um emparelhamento perfeito, com $q = 2$. Sob essas condições, o problema, que inicialmente pode ser resolvido em tempo polinomial, torna-se NP-completo quando $\ell \geq 4$. Antes de enunciar o teorema, vamos definir o problema no contexto de emparelhamentos perfeitos.

EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE

Entrada: Um grafo G e um emparelhamento perfeito M de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, M) \leq \ell$?

Teorema 52. (BROERSMA *et al.*, 2003)

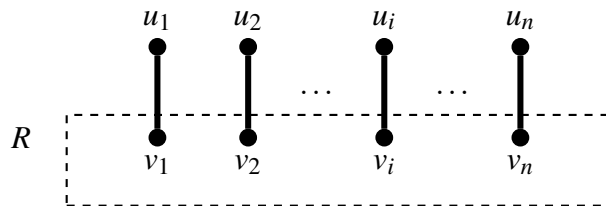
- (a) O problema EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 3$.
- (b) O problema EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE é NP-completo para $\ell \geq 4$.

Demonstração. Os casos em que $1 \leq \ell \leq 3$ seguem de maneira análoga à prova do Teorema 51.

Assuma que $\ell \geq 4$. Vamos reduzir novamente o problema EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE ao problema da ℓ -coloração.

Vamos construir um grafo G e um emparelhamento perfeito M . Seja $R = (V_R, E_R)$ uma instância do problema de ℓ -coloração e v_1, v_2, \dots, v_n uma enumeração dos vértices de R . Para cada $1 \leq i \leq n$, criamos o vértice u_i e adicionamos a aresta $v_i u_i$ no *backbone* M , conforme ilustrado na Figura 60. O grafo resultante será o grafo G e as arestas $v_1 u_1, \dots, v_n u_n$ formam o emparelhamento perfeito M em G . Afirmamos que $\text{BBC}_2(G, M) \leq \ell$ se, e somente se, $\chi(R) \leq \ell$.

Figura 60 – A construção do grafo G com o emparelhamento perfeito M (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Suponha que $\text{BBC}_2(G, M) \leq \ell$ e seja f tal coloração *2-backbone* de (G, M) . A restrição de f aos vértices de R é uma ℓ -coloração própria de R , logo $\chi(R) \leq \ell$. Agora, suponha que $\chi(R) \leq \ell$ e seja ϕ tal ℓ -coloração de R . Para cada $1 \leq i \leq n$, vamos estender ϕ para (G, M) da seguinte forma:

- Se $f(v_i) \leq 2$, então $\phi(u_i) = \ell$;
- Se $f(v_i) \geq 3$, então $\phi(u_i) = 1$.

Assim, concluímos que $\text{BBC}_2(G, M) \leq \ell$. □

Turowski apresenta um algoritmo polinomial para encontrar o número cromático *2-backbone* de (G, M) , onde G é um grafo *split* e M é um emparelhamento em G . O algoritmo e a demonstração desse resultado podem ser encontrados em (TUROWSKI, 2015).

No artigo de Broersma et al., é apresentado o problema computacional para galáxias como *backbone* (BROERSMA et al., 2009a). Os autores apresentam resultados para qualquer $q \geq 2$, analisando a complexidade computacional do problema nesse contexto. A seguir, enunciaremos o problema para galáxias.

GALÁXIA ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE

Entrada: Um grafo G e uma galáxia H de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, H) \leq \ell$?

Teorema 53. (BROERSMA et al., 2009a)

- (a) O problema GALÁXIA ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq q + 1$.
- (b) O problema GALÁXIA ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE é NP-completo para $\ell \geq q + 2$.

Os autores ressaltam que o Teorema 53 continua válido mesmo quando o *backbone* é um emparelhamento perfeito, conforme enunciado a seguir.

Teorema 54. (BROERSMA et al., 2009a)

- (a) O problema EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq q + 1$.
- (b) O problema EMPARELHAMENTO ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE é NP-completo para $\ell \geq q + 2$.

Havet et al. observam que ao comparar os resultados do Teorema 54 com o Teorema 50, o problema continua sendo NP-completo, mesmo quando consideramos G como um

grafo planar. Em contraste, o Teorema 49 implica que, ao tomarmos o *backbone* como uma árvore geradora de G , o problema pode ser resolvido em tempo polinomial (HAVET *et al.*, 2014).

Havet et al., ao estudar problemas para grafos planares, provam limitantes, como o Teorema 30, que demonstra que, para um grafo planar G e uma floresta geradora F de G , temos $BBC_q(G, F) \leq q + 6$, além de mostrar um par de grafos que atinge esse limitante para cada $q \geq 4$. Além disso, os autores também apresentam resultados de complexidade, provando que decidir se $BBC_q(G, T) \leq q + 5$ é NP-completo para $q \geq 4$, onde T é uma árvore geradora de G (HAVET *et al.*, 2014).

Teorema 55. (HAVET *et al.*, 2014) Para todo inteiro $q \geq 4$, o seguinte problema é NP-completo.

Entrada: Um grafo planar G e uma árvore geradora T de G .

Pergunta: $BBC_q(G, T) \leq q + 5$?

Como consequência do Teorema 40, Havet et al. provam que, para um grafo planar G e uma galáxia H em G , vale que $BBC_q(G, H) \leq q + 4$. Eles também apresentam um par (G, H) que atinge esse limitante superior, onde H é uma galáxia com grau máximo 3. A partir desse resultado, os autores examinam o seguinte problema de complexidade computacional, provando separadamente os casos em que $q = 2$ e $q \geq 3$ (HAVET *et al.*, 2014).

Teorema 56. (HAVET *et al.*, 2014) Para todo inteiro $q \geq 2$, o seguinte problema é NP-completo.

Entrada: Um grafo planar G e uma galáxia F em G com grau máximo 3.

Pergunta: $BBC_q(G, F) \leq q + 3$?

Corrigimos um dos *gadgets* utilizados em um lema para provar o Teorema 56 para $q \geq 3$. No Capítulo 4, apresentamos o erro, o *gadget* corrigido e a prova completa desse lema. Havet et al. demonstram que esse problema permanece NP-completo, mesmo ao considerarmos F como uma galáxia com grau máximo 2 (HAVET *et al.*, 2014).

Como discutido anteriormente, Broersma et al. provaram que $BBC_2(G, P) \leq 7$ para um grafo planar G com um caminho hamiltoniano P . No entanto, os autores deixam em aberto o problema de melhorar esse limitante superior para 6 (Problema em Aberto 8). Em contrapartida, Havet et al. demonstram que o resultado do Teorema 51-(b) permanece NP-completo mesmo quando G é um grafo planar (HAVET *et al.*, 2014).

Teorema 57. (HAVET *et al.*, 2014) O seguinte problema é NP-completo.

Entrada: Um grafo planar G e um caminho hamiltoniano P em G .

Pergunta: $BBC_2(G, P) \leq 5$?

De maneira análoga ao caso em que o *backbone* é uma árvore geradora, Broersma et al. demonstram que $\text{BBC}_2(G, T) \leq 7$. O Problema em Aberto 6 questiona se esse limitante superior pode ser reduzido para 6. Havet et al., por sua vez, provam que decidir se $\text{BBC}_2(G, T) \leq 5$ é um problema NP-completo, considerando um grafo planar G e uma árvore geradora T de G . Esse resultado é uma consequência do Teorema 56 para $q = 2$ (HAVET *et al.*, 2014).

Janczewski e Turowski investigam, em (JANCZEWSKI; TUROWSKI, 2015a), a complexidade de encontrar colorações *q-backbone* ótimas para pares (G, H) , onde G é um grafo completo e H é bipartido. Em outro trabalho, os autores analisam a complexidade da coloração *q-backbone* quando G é um grafo planar e o *backbone* H é conexo (JANCZEWSKI; TUROWSKI, 2015b).

4 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos nossas contribuições para a Coloração *Backbone* na primeira seção. Na segunda seção, introduzimos uma variação direcionada para esta coloração, a Coloração *Backbone* Direcionada, e apresentamos nossos resultados para esta coloração.

4.1 Coloração Backbone

Nesta seção, focamos em nossos resultados na Coloração *Backbone*. Vale destacar que os resultados desta seção foram desenvolvidos em colaboração com Alexandre A. Cezar e Júlio Araújo. O primeiro deles é uma correção de um dos *gadgets* usados para provar o seguinte resultado de complexidade computacional.

Teorema 1. (HAVET et al., 2014) Para todo inteiro $q \geq 3$, o seguinte problema é NP-completo.

Entrada: Um grafo planar G e uma galáxia F em G com grau máximo 3.

Pergunta: $BBC_q(G, F) \leq q + 3$?

Para demonstrar o Teorema 1, são utilizados dois lemas, apresentados e provados em (HAVET et al., 2014). Antes de enunciar esses lemas, é necessário definir dois tipos de grafos que são usados na demonstração: paraquedas e pipa. Um *paraquedas em v* é um grafo completo com 4 vértices, onde as arestas incidentes ao vértice v estão no *backbone*, conforme ilustrado na Figura 61. Por sua vez, chamamos de *pipa* um grafo com a estrutura apresentada na Figura 62, onde os vértices t e u são denominados, respectivamente, de *ponta* e *borda* da pipa.

Figura 61 – Um paraquedas em v (com as arestas do *backbone* em negrito).

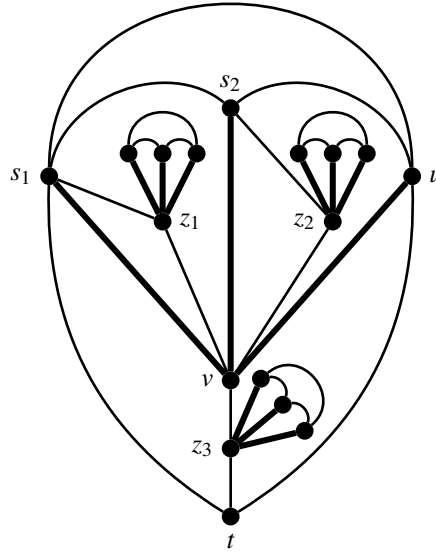


Fonte: Autoria própria, 2024.

Lema 58. (HAVET et al., 2014) Para $q \geq 2$, se ϕ é uma $(q + 3)$ -coloração q -backbone de um paraquedas em v , temos que $\phi(v) \in \{1, q + 3\}$.

Lema 2. (HAVET et al., 2014) Se ϕ é uma $(q + 3)$ -coloração q -backbone de uma pipa tal que $\phi(t) \in \{1, 2, 3, q + 1, q + 2, q + 3\}$, então ou $\phi(t) \in \{1, 2, 3\}$ e $\phi(u) = q + 3$, ou $\phi(t) \in \{q + 1, q + 2, q + 3\}$ e $\phi(u) = 1$.

Figura 62 – A pipa (com as arestas do *backbone* em negrito).



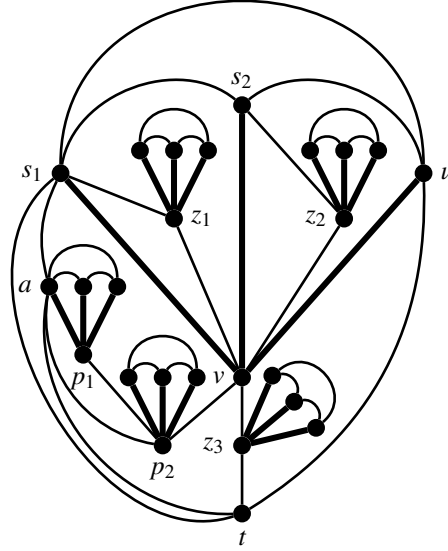
Fonte: Autoria própria, adaptado de (HAVET *et al.*, 2014), 2024.

A demonstração feita para o Lema 58 está correta e é uma rápida análise de casos, supondo, por contradição, que a cor de v difere destas duas. Já no Lema 2, há uma imprecisão, a prova seguiu-se a partir da análise de dois casos. Voltando para a Figura 62, observe que temos paraquedas nos vértices v , z_1 , z_2 e z_3 , logo, pelo Lema 58, esses vértices têm cor em $\{1, q+3\}$ em toda $(q+3)$ -coloração q -backbone. Ao analisar o primeiro caso, em que $f(v) = 1$, temos $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = q+3$, pois v é adjacente a todos esses vértices em G . Analisando as adjacências dos vértices, tanto em G como no backbone, é deduzido que $\{f(s_1), f(s_2)\} = \{q+1, q+2\}$ e $f(u) = q+3$. Em (HAVET *et al.*, 2014), na finalização do argumento, temos que com essa atribuição de cores, poderíamos concluir que $f(t) = \{1, 2, 3\}$. O segundo caso é análogo, supondo que $f(v) = q+3$, de forma simétrica, seria deduzido que $f(u) = 1$ e $f(t) = \{q+1, q+2, q+3\}$.

Porém, ao estudar detalhadamente a demonstração, como o vértice t , pela hipótese do lema, só pode ser colorido com as cores do conjunto $\{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$, logo, no primeiro caso (onde $f(v) = 1$), temos a restrição da cor $q+3$ para t , pois u é adjacente a t em G . A outra cor que é proibida para t é a cor atribuída ao vértice s_1 , que nesse caso é $q+1$ ou $q+2$. Portanto, o vértice t pode ser colorido em $\{1, 2, 3, q+1, q+2\} \setminus \{f(s_1)\}$. É feito de forma análoga para o segundo caso. Para corrigir o problema e prosseguir na demonstração do Teorema 1, podemos adicionar dois paraquedas que serão chamados de p_1 e p_2 . A nova estrutura da pipa é apresentada na Figura 63 e a demonstração corrigida do Lema 2 é apresentada a seguir.

Lema 59. (CASTRO *et al.*, 2022) Se ϕ é uma $(q+3)$ -coloração q -backbone de uma pipa

Figura 63 – A pipa corrigida (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

ilustrada na Figura 63 tal que $\phi(t) \in \{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$, então ou $\phi(t) \in \{1, 2, 3\}$ e $\phi(u) = q+3$, ou $\phi(t) \in \{q+1, q+2, q+3\}$ e $\phi(u) = 1$.

Demonstração. Seja f uma $(q+3)$ -coloração q -backbone de uma pipa, conforme a Figura 63, com $f(t) \in \{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$. Como temos paraquedas em v , z_1 , z_2 e z_3 , pelo Lema 58, sabemos que eles são coloridos com $\{1, q+3\}$. Sem perda de generalidade, assuma que $f(v) = 1$.

Para $i \in \{1, 2, 3\}$, observe que $vz_i \in E(G)$, logo $f(z_i) = q+3$. Como s_1 , s_2 e u são adjacentes a v no *backbone*, então esses três vértices são coloridos em $\{q+1, q+2, q+3\}$, ademais, eles formam uma clique em G , não podendo ter cores iguais. Com essa análise e o fato de que $s_i z_i \in E(G)$, para $i \in \{1, 2\}$, então s_i não poderá ser colorido com $q+3$. Assim, concluímos que $f(u) = q+3$.

Uma vez que temos um paraquedas em p_2 e p_2 é adjacente a v em G , pelo Lema 58, concluímos que $f(p_2) = q+3$. De forma análoga, ao considerar o paraquedas em p_1 , e sabendo que ele é vizinho de p_2 em G , o vértice p_1 é colorido com a cor 1. Sendo a o vértice do paraquedas em p_1 , conforme a Figura 63, como p_1 é colorido com 1 e pela estrutura do paraquedas, a é colorido em $\{q+1, q+2, q+3\}$. Porém, como as_1 e ap_2 são arestas em G , a é colorido com a cor $\{q+1, q+2\} \setminus \{f(s_1)\}$. Dado que t é adjacente aos vértices s_1 , u e a , então t é colorido em $\{1, 2, 3\}$. \square

O segundo resultado na Coloração *Backbone* consiste em corrigir uma imprecisão em um argumento no meio da demonstração de um teorema provado por Broersma et al. (BRO-

ERSMA *et al.*, 2003). Para isso, apresentaremos a prova, identificaremos o erro ao longo da argumentação e mostraremos como corrigi-lo, mantendo o resultado do seguinte teorema.

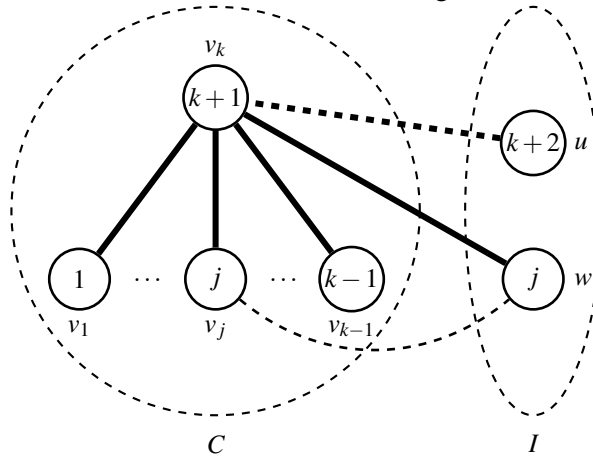
Teorema 4. (BROERSMA *et al.*, 2003) *Se G é um grafo split e T uma árvore geradora de G , então, se $\chi(G) \geq 3$, temos que $\text{BBC}_2(G, T) \leq \chi(G) + 2$. Esse limitante é o melhor possível.*

Demonstração. Dados um grafo *split* G e uma árvore geradora T desse grafo, definem-se as partições C e I de $V(G)$, onde C é uma clique máxima e I é um conjunto independente. Se $|C| = k$, como os grafos *split* são grafos perfeitos, ou seja, $\chi(G) = \omega(G)$, concluímos que $\chi(G) = k$. Ao considerar a restrição de T a C , temos dois casos.

O primeiro caso ocorre quando a restrição de T a C forma uma estrela $K_{1,k-1}$. Nesse cenário, os vértices da clique são nomeados como v_1, v_2, \dots, v_{k-1} , representando as folhas da estrela, enquanto v_k é o centro da estrela. A construção de uma $(k+2)$ -coloração 2-backbone para (G, T) é realizada da seguinte maneira: para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, atribui-se a cor i ao vértice v_i , e ao centro da estrela v_k é dada a cor $k+1$.

Para completar a coloração dos vértices pertencentes ao conjunto I , considere os seguintes subcasos: se $u \in I$ e $uv_k \notin E(T)$, podemos atribuir a cor $k+2$ ao vértice u . Se $w \in I$ e $wv_k \in E(T)$, não podemos colorir esse vértice com $k+2$ devido à condição do *backbone*. No entanto, existe um vértice v_j , para algum $1 \leq j \leq k-1$, tal que $wv_j \notin E(G)$, pois, caso contrário, $C \cup \{w\}$ seria uma clique de tamanho maior que C , o que é impossível, uma vez que C é uma clique máxima. Assim, basta colorir o vértice w com a cor j . A Figura 64 ilustra como essa coloração é realizada.

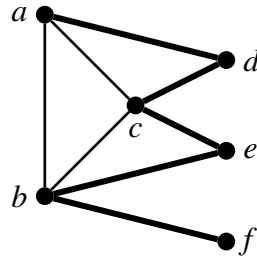
Figura 64 – A ideia da construção da coloração para o grafo *split* (com as arestas do *backbone* em negrito).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Para o segundo caso, em que a restrição de T a C não forma uma estrela, os autores consideram uma 2-coloração de T tal que $|C_1| \geq 2$ e $|C_2| \geq 2$, onde C_1 e C_2 são os conjuntos de vértices da clique coloridos com as cores 1 e 2, respectivamente. No entanto, considerando o par (G, T) da Figura 65, observe que os vértices a, b e c formam uma clique máxima C em G , e a restrição de T a C não forma uma estrela. Contudo, não conseguimos encontrar uma 2-coloração de T como os autores propuseram, pois $|C| = 3$.

Figura 65 – Um par (G, T) (com as arestas do *backbone* em negrito) tal que G é um grafo *split* e T uma árvore geradora de G .



Fonte: Autoria própria, 2024.

Portanto, para corrigir esse argumento, tomaremos uma 2-coloração de T , denotada por f . O primeiro subcaso ocorre quando f é constante em C , ou seja, $|C_1| = 0$ ou $|C_2| = 0$. No segundo subcaso, f satisfaz $|C_1| \geq 1$ e $|C_2| \geq 1$, e, além disso, existe $(x, y) \notin E(T)$ para algum $x \in C_1$ e $y \in C_2$. Aqui novamente, C_1 e C_2 são os conjuntos de vértices da clique coloridos com as cores 1 e 2 em f , respectivamente. A existência de uma coloração f que satisfaça as condições do segundo subcaso decorre do fato de que, pela hipótese do teorema, temos $\chi(G) = \omega(G) \geq 3$, o que garante $|C| \geq 3$. Além disso, como T é uma árvore, ela não contém ciclos e, pela hipótese do segundo caso, sua restrição a C não forma uma estrela.

Vamos renomear os vértices da clique C da seguinte forma: $v_1, \dots, v_{|C_1|}$ para os vértices de C_1 e $v_{|C_1|+1}, \dots, v_{|C_1|+|C_2|}$ para os vértices de C_2 , onde $v_{|C_1|} = x$ e $v_{|C_1|+1} = y$. Para construir uma $(k+2)$ -coloração 2-backbone para (G, T) , sabendo que $|C_1| + |C_2| = k$, vamos colorir os vértices v_i da clique C com a cor i , para todo $1 \leq i \leq k$. Já os vértices do conjunto independente I serão coloridos com a cor $k+2$, satisfazendo assim a condição do *backbone*.

Limitante ótimo. Vamos construir um grafo *split* G e uma árvore geradora T de G , onde $V(G) = C \cup I$. O conjunto C é uma clique com k vértices, nomeados v_1, \dots, v_k , e I é um conjunto independente com $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ vértices, nomeados $u_i^{(j)}$, para cada $1 \leq i \neq j \leq k-1$. As arestas $v_s u_i^{(j)}$ pertencem a $E(G)$ para todo $s \neq i$. No *backbone* T , adicionamos as arestas $v_s v_k$ para todo $1 \leq s \leq k-1$, formando uma estrela com centro em v_k . Além disso, inserimos a aresta $v_j u_i^{(j)}$ em

T para todo $1 \leq i \neq j \leq k-1$, onde os vértices $u_i^{(j)}$ são folhas de T .

Claramente, temos que $\chi(G) = k$. Agora, suponha, por absurdo, que $\text{BBC}_2(G, T) \leq k+1$, e considere c uma $(k+1)$ -coloração 2-backbone de (G, T) . Como C é uma clique, os vértices v_1, \dots, v_k devem ser coloridos com k cores distintas. Além disso, como os vértices da clique formam uma estrela em T , o vértice v_k deve ser colorido com 1 ou $k+1$. Como a coloração 2-backbone é simétrica, sem perda de generalidade, suponha que $c(v_k) = 1$. Portanto, a cor 2 não é usada na clique. Agora, sejam v_i e v_j os vértices da clique C que são coloridos com as cores 4 e 3 em c , respectivamente.

Por construção, o vértice $u_i^{(j)}$ é adjacente a v_ℓ em G para todo $1 \leq \ell \neq i \leq k$. As cores disponíveis para $u_i^{(j)}$ são 2 (já que a cor 2 não aparece em C) e 4. No entanto, como $v_j u_i^{(j)} \in E(T)$ e v_j foi colorido com a cor 3, pela condição do backbone, as cores 2 e 4 são proibidas para $u_i^{(j)}$. Portanto, não há cor possível para $u_i^{(j)}$, o que contradiz a suposição de que c é uma $(k+1)$ -coloração 2-backbone de (G, T) . \square

Outros resultados foram obtidos na versão circular da Coloração Backbone, conhecida como Coloração Circular Backbone, definida em (HAVET *et al.*, 2014). Esses resultados podem ser encontrados no nosso resumo estendido em (CASTRO *et al.*, 2022), apresentado no VII Encontro de Teoria da Computação (ETC).

4.2 Coloração em Backbones Direcionados

Nesta seção, introduzimos uma variação da Coloração Backbone, além de apresentar alguns resultados iniciais desta coloração, que foram estudados em colaboração com Alexandre Talon, Atílio G. Luiz e Júlio Araújo. A seção é estruturada em três partes distintas: a primeira abordando o caso em que o backbone é um emparelhamento, a segunda tratando do cenário em que o backbone é uma galáxia ou um caminho hamiltoniano e a terceira apresentando os resultados de complexidade computacional.

Considerando um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} do subgrafo gerador H de G , uma k -coloração q -backbone direcionada é uma função $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que satisfaz as seguintes condições: $|f(u) - f(v)| \geq 1$ para toda $uv \in E(G)$ e $f(v) - f(u) \geq q$ para todo $(u, v) \in \vec{H}$. Esta última será chamada de *condição do backbone direcionado*. Note que é necessário afirmar que a orientação é acíclica para garantir a boa definição da coloração.

De forma semelhante à Coloração Backbone, definimos o *número cromático q -*

backbone *direcionado*, denotado por $\text{BBC}_q(G, \vec{H})$, como o menor inteiro k para o qual existe uma k -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{H}) . Quando temos uma coloração q -backbone direcionada que usa exatamente $\text{BBC}_q(G, \vec{H})$ cores, dizemos que essa coloração é *ótima*. Em uma coloração q -backbone direcionada, duas cores c_1 e c_2 são chamadas de *vizinhas* se $|c_1 - c_2| < q$. Portanto, observe que cores vizinhas não podem ser usadas nas extremidades de um arco em \vec{H} , pois isso violaria a condição do backbone direcionado.

Para enunciar o primeiro resultado que compara o número cromático q -backbone direcionado com o número cromático q -backbone, é necessário primeiro definir os seguintes parâmetros:

$$\text{BBC}_q^-(G, H) = \min\{\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \mid \vec{H} \text{ é uma orientação acíclica de } H\} \quad (4.1)$$

$$\text{BBC}_q^+(G, H) = \max\{\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \mid \vec{H} \text{ é uma orientação acíclica de } H\} \quad (4.2)$$

Além disso, dados um grafo G e um subgrafo gerador H de G , seja \vec{H} uma orientação acíclica que satisfaz $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) = \text{BBC}_q^-(G, H)$. Nesse caso, dizemos que \vec{H} é uma *orientação mínima* de H . De forma análoga, para $\text{BBC}_q^+(G, H)$, definimos uma *orientação máxima* de H .

Teorema 5. *Se G é um grafo e H um subgrafo gerador de G , então*

$$\text{BBC}_q^-(G, H) = \text{BBC}_q(G, H) \leq \text{BBC}_q^+(G, H).$$

Demonstração. Para demonstrar que $\text{BBC}_q^-(G, H) \leq \text{BBC}_q(G, H)$, seja f uma coloração q -backbone ótima de (G, H) . Construímos uma orientação para H da seguinte forma: seja $uv \in E(H)$, se $f(u) < f(v)$, então orientamos de u para v ; caso contrário, orientamos de v para u . Dessa maneira, todos os arcos $(u, v) \in \vec{H}$ satisfazem a condição do backbone direcionado, pois $f(u) < f(v)$ e $f(v) - f(u) \geq q$.

Para mostrar que $\text{BBC}_q^-(G, H) \geq \text{BBC}_q(G, H)$, considere \vec{H} uma orientação mínima de H e f uma coloração q -backbone direcionada ótima de (G, \vec{H}) . Note que f também é uma coloração q -backbone de (G, H) ao remover a orientação dos arcos.

A prova de que $\text{BBC}_q^+(G, H) \geq \text{BBC}_q(G, H)$ é feita de forma análoga, considerando \vec{H} uma orientação máxima de H e f uma coloração q -backbone direcionada ótima de (G, \vec{H}) .

□

O segundo resultado apresenta um limitante ótimo para um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} de um subgrafo gerador H de G , em função do diâmetro de H e do número cromático de G .

Teorema 6. Se G é um grafo e \vec{H} uma orientação acíclica do subgrafo gerador H de G , então $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq \text{diam}(\vec{H}) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$. Esse limitante é o melhor possível.

Demonstração. Sejam G e \vec{H} como no enunciado do Teorema, com $\text{diam}(\vec{H}) = k$ e $\phi = \text{diam}(\vec{H}) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$, vamos construir uma partição para os vértices de G . O conjunto V_0 será formado pelos vértices que são fontes em \vec{H} (incluindo possíveis vértices isolados em \vec{H}). Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, seja V_i o conjunto de vértices que são fontes em $\vec{H} - (V_0 \cup \dots \cup V_{i-1})$. Dessa forma, conforme a construção de cada V_i , $\{V_0, \dots, V_k\}$ é uma partição de $V(G)$, já que H é um subgrafo gerador e \vec{H} é acíclico.

Seja c uma $\chi(G)$ -coloração de G . Vamos construir uma ϕ -coloração q -backbone direcionada f para o par (G, \vec{H}) , colorindo cada conjunto V_i sucessivamente. Começaremos colorindo V_0 da seguinte forma: para cada vértice $v \in V_0$, definimos $f(v) = c(v)$. Em seguida, mostraremos como definir a coloração f para os vértices em V_1 e, posteriormente, generalizaremos o processo para qualquer V_i , com $i \geq 1$.

Dado um vértice $v \in V_1$, atribuímos $f(v) = \chi(G) + q - 1 + (\chi(G) - c(v))$. Observe que, se existe $u \in V_1$ tal que $c(u) = \chi(G)$, então u recebe a cor $\chi(G) + q - 1$ na coloração f , o que garante uma distância de q unidades em relação a todas as cores atribuídas em V_0 , exceto aos vértices de V_0 que foram coloridos com $\chi(G)$ em f . No entanto, isso não é um problema, pois sendo w um vértice de V_0 tal que $f(w) = \chi(G)$, pela definição de f em V_0 , temos que $c(w) = \chi(G)$. Portanto, como c é uma coloração de G , é impossível que $uw \in E(G)$, e, consequentemente, o arco $(w, u) \notin \vec{H}$. Assim, a condição do *backbone* direcionado é satisfeita nessa situação, por vacuidade.

Sendo $1 \leq i \leq k$ um inteiro, vamos definir f da seguinte forma para $v \in V_i$:

$$f(v) = \begin{cases} (i-1) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G) + q - 1 + (\chi(G) - c(v)) & , \text{ se } i \text{ é ímpar;} \\ (i-1) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G) + q - 1 + (c(v) - 1) & , \text{ se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Vamos provar que f é de fato uma ϕ -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{H}) . Considere $uv \in E(G)$. Sem perda de generalidade, suponha que $u \in V_\alpha$ e $v \in V_\beta$, com $1 \leq \alpha \leq \beta \leq k$. Se $\alpha = \beta$, então $|f(v) - f(u)| = |c(v) - c(u)| \geq 1$, pois c é uma $\chi(G)$ -coloração de G .

Agora, suponha que $\alpha < \beta$. Se α e β possuem a mesma paridade, então:

$$|f(v) - f(u)| \geq 2 \cdot (\chi(G) + q - 2) - |c(v) - c(u)|.$$

Como c é uma $\chi(G)$ -coloração de G e sabemos que $uv \in E(G)$, temos que $|c(v) - c(u)| \leq \chi(G) - 1$. Portanto, a desigualdade se torna:

$$|f(u) - f(v)| \geq 2 \cdot (\chi(G) + q - 2) - \chi(G) + 1 \geq (\chi(G) - 1) + (q - 2) + q \geq q.$$

Se α é par e β é ímpar, e sabendo que $c(u) + c(v) \leq 2 \cdot \chi(G) - 1$ (pois c é uma $\chi(G)$ -coloração de G), temos

$$|f(v) - f(u)| \geq 2 \cdot \chi(G) + q - 1 - (c(v) + c(u)) \geq q.$$

Se α é ímpar e β é par, e sabendo que $c(u) + c(v) \geq 3$ (pois c é uma $\chi(G)$ -coloração de G), então

$$|f(v) - f(u)| \geq q - 3 + c(u) + c(v) \geq q.$$

O que conclui a demonstração.

Limitante ótimo. Seja $\text{diam}(\vec{H}) = k$. Vamos construir um grafo $\chi(G)$ -partido completo G . Os vértices de G são definidos da seguinte forma: para cada $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$, o conjunto $V_i = \{u_i^{(j)} \mid 0 \leq j \leq k\}$ é independente, e temos que $V(G) = \bigcup_{i=1}^{\chi(G)} V_i$. As arestas de G são dadas por:

$$E(G) = \{(u_{i_1}^{(j_1)}, u_{i_2}^{(j_2)}) \mid 1 \leq i_1 \neq i_2 \leq \chi(G) \text{ e } 0 \leq j_1 \neq j_2 \leq k\}$$

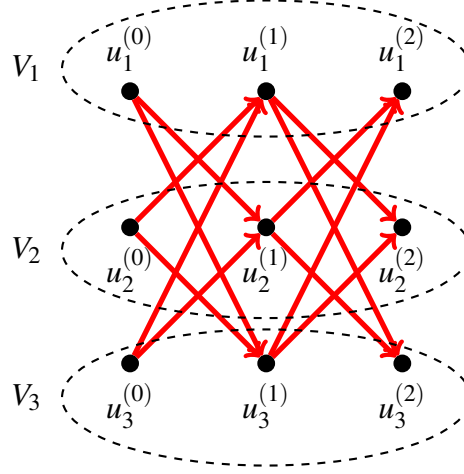
Logo, para $u_i^{(\alpha)} \in V_i$ e $u_j^{(\beta)} \in V_j$, com $i \neq j$, temos que $u_i^{(\alpha)} u_j^{(\beta)} \in E(G)$, sempre que $\alpha \neq \beta$. Agora, definimos os arcos de \vec{H} da seguinte forma:

$$A(\vec{H}) = \{(u_{i_1}^{(j)}, u_{i_2}^{(j+1)}) \mid 1 \leq i_1 \neq i_2 \leq \chi(G) \text{ e } 0 \leq j \leq k-1\}$$

Dado um vértice $u_i^{(j)}$, o índice i indica a qual conjunto independente V_i o vértice pertence, enquanto o índice j indica sua posição no caminho direcionado maximal em \vec{H} . Observe que \vec{H} é acíclico, uma vez que não há arco do tipo $(u_{i_1}^{(j)}, u_{i_2}^{(\ell)})$ em \vec{H} com $j > \ell$. Por construção, os caminhos direcionados maximais em \vec{H} são da forma $(u_{i_0}^{(0)}, u_{i_1}^{(1)}, \dots, u_{i_k}^{(k)})$, para todo $1 \leq i_\ell \leq \chi(G)$, com $i_\ell \neq i_{\ell+1}$, e para todo $0 \leq \ell \leq k$. A Figura 66 ilustra a ideia da construção desse par, mostrando os arcos de \vec{H} no caso em que $\chi(G) = 3$ e $\text{diam}(\vec{H}) = 2$.

Seja c uma $\text{BBC}_q(G, \vec{H})$ -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{H}) . Vamos provar por indução que, para todo $0 \leq j \leq k$, vale a seguinte propriedade: $\max\{c(u_i^{(j)}) \mid 1 \leq i \leq \chi(G)\} \geq j \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$. Com essa propriedade, ao substituir $j = k$, conseguimos o limitante que queríamos.

Figura 66 – Ideia da construção do par (G, \vec{H}) quando $\chi(G) = 3$ e $\text{diam}(\vec{H}) = 2$ (com os arcos do *backbone* em vermelho).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Se $j = 0$, o conjunto $\{u_i^{(0)} \mid 1 \leq i \leq \chi(G)\}$ forma uma clique, pois G é um grafo $\chi(G)$ -partido completo. Portanto, todos os vértices nesse conjunto devem receber cores distintas, assim, temos $\max\{c(u_i^{(0)}) \mid 1 \leq i \leq \chi(G)\} \geq \chi(G)$, como queríamos demonstrar.

Agora, seja $j \geq 1$. Assuma que a propriedade é satisfeita para todo $1 \leq \ell \leq j-1$. Então, existe $0 \leq \alpha \leq \chi(G)$ tal que $c(u_\alpha^{(j-1)}) \geq (j-1) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$. Pela construção, há $\chi(G) - 1$ arcos cuja a cauda é $u_\alpha^{(j-1)}$ e a cabeça está em V_j . Como a condição do *backbone* direcionado deve ser atendida, para todo $i \neq \alpha$, temos $c(u_i^{(j)}) - c(u_\alpha^{(j-1)}) \geq q$, o que implica:

$$c(u_i^{(j)}) \geq c(u_\alpha^{(j-1)}) + q \geq (j-1) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G) + q. \quad (4.3)$$

Como $\{u_i^{(j)} \mid 1 \leq i \neq \alpha \leq \chi(G)\}$ é uma clique, devido à construção de G , precisamos de $\chi(G) - 1$ cores distintas que satisfaçam a Desigualdade (4.3). Isso implica que:

$$\max\{c(u_i^{(j)}) \mid 1 \leq i \neq \alpha \leq \chi(G)\} \geq (j-1) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G) + q + \chi(G) - 2.$$

O que equivale a:

$$\max\{c(u_i^{(j)}) \mid 1 \leq i \neq \alpha \leq \chi(G)\} \geq j \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G).$$

Isso conclui a prova. □

4.2.1 Emparelhamentos como backbone

Nesta seção, estudamos o caso em que o *backbone* é um emparelhamento no grafo. Para uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M em um grafo G , todo vértice do

grafo é ou cabeça ou cauda. Vamos definir dois conjuntos, $V_-(\vec{M})$ e $V_+(\vec{M})$ como sendo, respectivamente, o conjunto dos vértices que são cabeças e o conjunto dos vértices que são caudas.

A demonstração do limitante superior no teorema a seguir é uma consequência direta do Teorema 6, obtido ao considerar $\text{diam}(\vec{H}) = 1$. Apresentamos um par (G, \vec{M}) que atinge esse limitante, demonstrando que ele é apertado. Vale notar que o exemplo apertado no Teorema 6 não tem um emparelhamento como *backbone*. Em outras palavras, o resultado abaixo demonstra que o limitante do Teorema 6 é apertado quando $\text{diam}(\vec{H}) = 1$, mesmo que \vec{H} seja uma orientação de um emparelhamento perfeito em G . Além disso, este teorema generaliza um resultado previamente obtido, que foi provado para $q = 2$ antes da formulação do Teorema 6.

Teorema 60. *Se G é um grafo k -cromático, \vec{M} uma orientação de um emparelhamento perfeito M de G e $q \geq 2$ um inteiro, então $\text{BBC}_q(G, \vec{M}) \leq 2k + q - 2$. Esse limitante é o melhor possível.*

Demonstração. Provar que $\text{BBC}_q(G, \vec{M}) \leq 2k + q - 2$ segue diretamente do Teorema 6. Mostremos que esse limitante superior é o melhor possível ao exibir um par que atinge exatamente esse número.

Vamos construir um grafo k -partido completo G . Os vértices de G serão particionados nos conjuntos V_1, \dots, V_k , onde cada $V_i = V_i^+ \cup V_i^-$ é um conjunto independente. Para cada inteiro $1 \leq i \leq k$, definimos que $V_i^+ = \{v_i^{(i,j)} \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ e $V_i^- = \{v_i^{(j,i)} \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$.

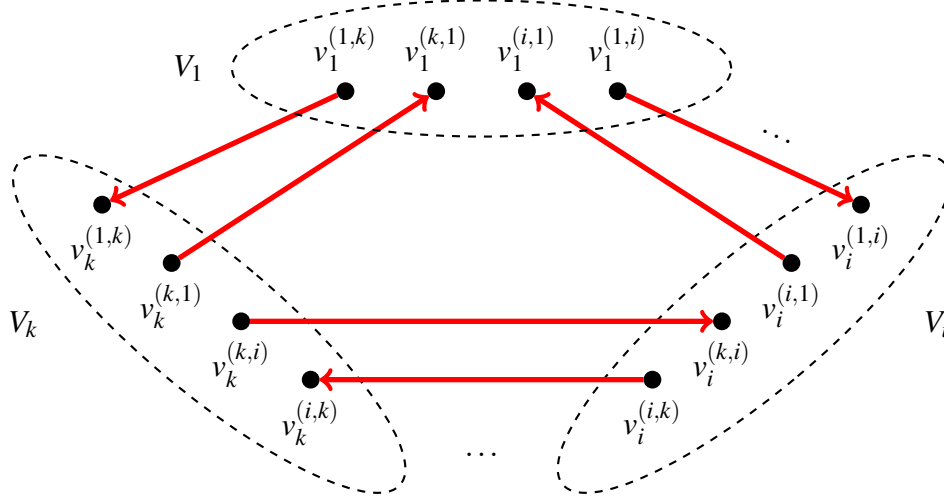
As arestas de G e os arcos de \vec{M} são definidos da seguinte maneira: para inteiros $i \neq j$, se $u \in V_i$ e $v \in V_j$, adicionamos a aresta uv em G . Além disso, incluímos o arco $(v_i^{(i,j)}, v_j^{(i,j)})$ em \vec{M} . Assim, o conjunto V_i^- contém todos os vértices em que os arcos têm cabeça em i , enquanto o conjunto V_i^+ contém todos os vértices onde os arcos têm cauda em i . Na Figura 67, ilustramos a ideia da construção do par (G, \vec{M}) , omitindo os vértices dos conjuntos V_j que não estão representados na figura.

Seja c uma ℓ -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{M}) e suponha, por absurdo, que $\ell \leq 2k + q - 3$. Para cada i , definimos C_i como o conjunto de cores atribuídas aos vértices de V_i . Como G é um grafo k -partido completo, nenhuma cor em C_i pode aparecer em C_j para $i \neq j$.

Defina também α_i^- e α_i^+ como a menor e a maior cor em C_i , respectivamente, para todo inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$.

Afirmção 61. *Para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\alpha_i^- \leq \ell - k - q + 2$ e $\alpha_i^+ \geq k + q - 1$.*

Figura 67 – Ideia da construção do par (G, \vec{M}) (com os arcos do *backbone* em vermelho).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Prova da Afirmação. Seja $1 \leq i \leq k$. Definimos $M_i = \max\{c(v_j^{(j,i)}) \mid j \neq i\}$, e seja j_{M_i} o índice j tal que $c(v_j^{(j,i)}) = M_i$. De maneira análoga, definimos $m_i = \min\{c(v_j^{(i,j)}) \mid j \neq i\}$, e seja j_{m_i} o índice j tal que $c(v_j^{(i,j)}) = m_i$. Como nenhuma cor de $C_{j'}$ pode aparecer em $C_{j''}$ para $j' \neq j''$, temos que $M_i \geq k - 1$ e $m_i \leq \ell - k + 2$.

Pela construção do par (G, \vec{M}) , existe o arco $e = (v_{j_M}^{(j_M,i)}, v_i^{(j_M,i)})$ em \vec{M} . Como a condição do *backbone* direcionado deve ser respeitada, temos que:

$$q \leq c(v_i^{(j_M,i)}) - c(v_{j_M}^{(j_M,i)}) \leq \alpha_i^+ - M_i \leq \alpha_i^+ - k + 1.$$

Assim, obtemos $\alpha_i^+ \geq k + q - 1$.

De maneira análoga para j_m , existe o arco $f = (v_i^{(i,j_m)}, v_{j_m}^{(i,j_m)})$ em \vec{M} . Como a condição do *backbone* direcionado deve ser respeitada, temos que:

$$q \leq c(v_{j_m}^{(i,j_m)}) - c(v_i^{(i,j_m)}) \leq m_i - \alpha_i^- \leq \ell - k + 2 - \alpha_i^-.$$

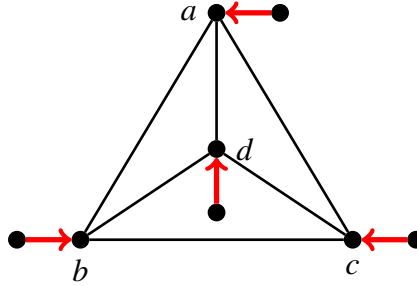
Assim, obtemos $\alpha_i^- \leq \ell - k - q + 2$. ■

Sendo $1 \leq i \leq k$, como temos que $\ell \leq 2k + q - 3$, ao aplicar a Afirmação 61, obtemos que $\alpha_i^- \leq k - 1$ e $\alpha_i^+ \geq k + q - 1$, onde α_i^- é a menor cor de C_i e α_i^+ a maior cor de C_i .

Novamente, como nenhuma cor de $C_{j'}$ pode aparecer em $C_{j''}$ para $j' \neq j''$, temos que $\alpha_{j'}^- \neq \alpha_{j''}^-$ e precisamos de k cores distintas em $\llbracket 1, 2, \dots, k - 1 \rrbracket$ (pois $|\{\alpha_1^-, \dots, \alpha_k^-\}| = k$), o que é impossível, pois só temos $k - 1$ cores neste intervalo. Isso contradiz nossa hipótese de que $\ell \leq 2k + q - 3$, portanto $\ell = 2k + q - 2$. □

Seja G um grafo planar. Pelo Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), temos $\chi(G) \leq 4$. Substituindo $k = 4$ e $q = 2$ no Teorema 60, obtemos $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 8$. Observe que o par (G, \vec{M}) com o limitante ótimo do Teorema 60 é planar apenas quando $k \leq 2$. Isso levanta a questão se esse limitante pode ser melhorado no caso planar. Para o par (G, \vec{M}) representado na Figura 68, temos $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 6$, o que mostra que esse limitante não pode ser reduzido para 5.

Figura 68 – Um par (G, \vec{M}) , onde G é um grafo planar, tal que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 6$ (com os arcos do *backbone* em vermelho).



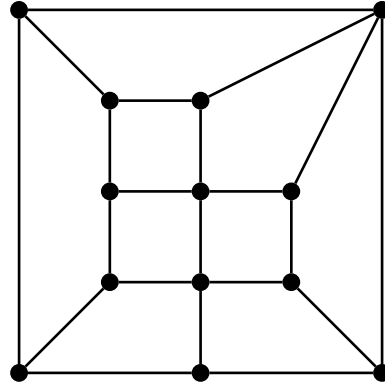
Fonte: Autoria própria, 2024.

Considerando (G, \vec{M}) conforme ilustrado na Figura 68, provamos a igualdade $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 6$. Em uma ℓ -coloração 2-*backbone* direcionada f de (G, \vec{M}) , como os vértices a, b, c e d são cabeças de arcos em \vec{M} , temos $f(x) \geq 3$ para cada $x \in \{a, b, c, d\}$, de modo a satisfazer a condição do *backbone* direcionado. Além disso, como esses vértices formam uma clique em G , concluímos que $\ell \geq 6$. Para construir uma 6-coloração 2-*backbone* direcionada f para (G, \vec{M}) , definimos $f(a) = 3$, $f(b) = 4$, $f(c) = 5$ e $f(d) = 6$, enquanto os demais vértices recebem a cor 1.

Quando G é um grafo planar livre de triângulos, o Teorema de Grötzsch assegura que $\chi(G) \leq 3$ (GRÖTZSCH, 1959). Como consequência do Teorema 60, temos $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 6$. Considerando o grafo G da Figura 69, podemos construir um par (G', \vec{M}) a partir de G de forma similar à Figura 68. Para cada vértice $v \in V(G)$, adicionamos um vértice correspondente v' e o arco $(v', v) \in \vec{M}$. O par resultante satisfaz $\text{BBC}_2(G', \vec{M}) = 5$, sendo possível obter uma imersão plana para esse par.

É interessante explorar o limitante superior para grafos planares sem ciclos de comprimento 4 e 5. Da literatura sobre coloração de grafos, Cohen-Addad et al. provam que existe um contraexemplo para a Conjectura de Steinberg, que afirma que todo grafo sem ciclos de comprimento 4 ou 5 é 3-colorível (COHEN-ADDAD et al., 2017). Novamente, pelo Teorema 60,

Figura 69 – Um grafo planar G livre de triângulos tal que $\chi(G) = 3$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

temos que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 8$ (pois $\chi(G) \leq 4$). Para esse caso, deixamos o seguinte problema em aberto:

Problema em Aberto 14. Se G é um grafo planar sem ciclos de comprimento 4 e 5 e \vec{M} uma orientação de um emparelhamento M em G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 7$?

Seja \vec{M} uma orientação de um emparelhamento M em um grafo G . Definimos os conjuntos $V_\emptyset(\vec{M})$, $V_-(\vec{M})$ e $V_+(\vec{M})$ como segue: $V_\emptyset(\vec{M})$ é o conjunto de vértices que não são extremidades de arcos em \vec{M} , enquanto $V_-(\vec{M})$ e $V_+(\vec{M})$ correspondem aos vértices que aparecem como cabeças e caudas dos arcos em \vec{M} , respectivamente. A partir dessas definições, provamos alguns resultados mais básicos, os dois teoremas seguintes consideram os casos em que $G = C_n$ e $G = K_n$. No caso não direcionado, Miskuf et al. provam que $\text{BBC}_2(C_n, M) \leq 3$ (Teorema 43) e $\text{BBC}_2(K_n, M) \leq n$ (Teorema 44).

Teorema 62. Se C_n é um ciclo com n vértices e \vec{M} uma orientação de um emparelhamento M em C_n , então $\text{BBC}_2(C_n, \vec{M}) \leq 4$.

Demonstração. Seja $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ o ciclo com n vértices. Se n é par, então C_n admite uma 2-coloração. Seja c uma tal coloração. Para $1 \leq i \leq n$, vamos construir uma 4-coloração 2-backbone direcionada f de (C_n, \vec{M}) da seguinte forma:

- Se $c(v_i) = 1$ e $v_i \in V_+(\vec{M})$, então $f(v_i) = 1$;
- Se $c(v_i) = 1$ e $v_i \in V_-(\vec{M})$, então $f(v_i) = 4$;
- Se $c(v_i) = 2$ e $v_i \in V_+(\vec{M})$, então $f(v_i) = 2$;
- Se $c(v_i) = 2$ e $v_i \in V_-(\vec{M})$, então $f(v_i) = 3$.
- Se $v_i \in V_\emptyset(\vec{M})$, então $f(v_i)$ recebe a menor cor em $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$.

Por definição de f , sempre temos que $uv \in E(G)$ implica $f(u) \neq f(v)$. Se $(u, v) \in \vec{M}$, como c é uma coloração de G , sabemos que $c(u) \neq c(v)$. Suponha que $c(u) = 1$ e $c(v) = 2$, então $f(v) - f(u) = 3 - 1 = 2$, satisfazendo a condição do *backbone* direcionado. Da mesma forma, se $c(u) = 2$ e $c(v) = 1$, então $f(v) - f(u) = 4 - 2 = 2$.

Se n é ímpar, então existe $v_\ell \in V(C_n)$ tal que $v_\ell \in V_\emptyset(\vec{M})$. Seja c uma 3-coloração de C_n tal que $c(v_\ell) = 3$ e $c(v_i) \in \{1, 2\}$ para os outros vértices de C_n . Para $1 \leq i \leq n$, vamos construir uma 4-coloração 2-*backbone* direcionada f de (C_n, \vec{M}) da seguinte forma:

- Se $c(v_i) = 1$ e $v_i \in V_+(\vec{M})$, então $f(v_i) = 1$;
- Se $c(v_i) = 1$ e $v_i \in V_-(\vec{M})$, então $f(v_i) = 4$;
- Se $c(v_i) = 2$ e $v_i \in V_+(\vec{M})$, então $f(v_i) = 2$;
- Se $c(v_i) = 2$ e $v_i \in V_-(\vec{M})$, então $f(v_i) = 3$;
- Se $v_i \in V_\emptyset(\vec{M})$, então $f(v_i)$ recebe a menor cor em $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{f(v_{i-1}), f(v_{i+1})\}$.

□

Teorema 63. Se K_n é um grafo completo com n vértices e \vec{M} uma orientação de um emparelhamento M em K_n , então $\text{BBC}_2(K_n, \vec{M}) \leq n$.

Demonstração. Seja K_n o grafo completo com n vértices. Definimos γ como sendo o número de arcos de \vec{M} . Vamos construir uma n -coloração 2-*backbone* direcionada f de (K_n, \vec{M}) .

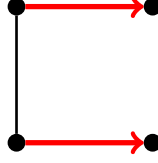
Suponha que $\gamma = 1$. Seja $(u, v) \in \vec{M}$ o único arco desse par, definimos $f(u) = 1$, $f(v) = 3$, e colorimos o restante do grafo com as cores $\{2, 4, 5, \dots, n\}$. Assuma agora que $\gamma \geq 2$. Para $i \in \{1, \dots, \gamma\}$, sejam $(u_i, v_i) \in \vec{M}$ os arcos desse par. Definimos $f(u_i) = i$, $f(v_i) = \gamma + i$ e colorimos o restante do grafo com as cores $\{2\gamma + 1, 2\gamma + 2, \dots, n\}$. Como $\gamma \geq 2$, para $(u_i, v_i) \in \vec{M}$, temos que $f(v_i) - f(u_i) = \gamma + i - i = \gamma \geq 2$, satisfazendo assim a condição do *backbone* direcionado.

□

Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G)$. Provamos que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 2 \cdot \Delta(G) + 1$, aplicando uma coloração gulosa que respeita a condição do *backbone* direcionado. Esse limitante superior não pode ser reduzido para $2 \cdot \Delta(G) - 1$, pois, no caso em que $\Delta(G) = 2$, exibimos na Figura 70 um exemplo de par que atinge exatamente $2 \cdot \Delta(G) = 4$.

Teorema 64. Se G é um grafo com grau máximo Δ e \vec{M} uma orientação de um emparelhamento M em G , então $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 2\Delta + 1$.

Figura 70 – Um par (G, \vec{M}) (com os arcos do *backbone* em vermelho) tal que $\Delta(G) = 2$ e $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 4$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Demonstração. Seja (G, \vec{M}) conforme enunciado no Teorema. Sendo $|V_+(\vec{M})| = \alpha$, $|V_-(\vec{M})| = \beta$ e $|V_\emptyset(\vec{M})| = \gamma$. Seja $\sigma = (v_1, \dots, v_\alpha, v_{\alpha+1}, \dots, v_{\alpha+\beta}, v_{\alpha+\beta+1}, \dots, v_n)$ um ordenamento para a coloração tal que:

- $v_i \in V_+(\vec{M})$, se $1 \leq i \leq \alpha$;
- $v_i \in V_-(\vec{M})$, se $\alpha + 1 \leq i \leq \alpha + \beta$;
- $v_i \in V_\emptyset(\vec{M})$, se $\alpha + \beta + 1 \leq i \leq \alpha + \beta + \gamma = n(G)$.

Vamos construir uma $(2\Delta + 1)$ -coloração *2-backbone* direcionada f para (G, \vec{M}) de forma gulosa. Seguindo a ordem σ , para todo inteiro i , vamos colorir o vértice v_i com a menor cor $\mu \in \llbracket 1, \dots, 2\Delta + 1 \rrbracket$ tal que nenhum vizinho em G já colorido recebeu essa cor e nenhum vizinho em \vec{M} já colorido recebeu a cor $\mu - 1$.

Se $u \in V_\emptyset(\vec{M})$, sabemos que há no máximo Δ cores proibidas para u , logo $f(u) \leq \Delta + 1$, já que u não tem vizinho em \vec{M} . Agora, seja $(u, v) \in \vec{M}$ com $u \in V_+(\vec{M})$ e $v \in V_-(\vec{M})$. Em respeito a ordem σ , u tem no máximo $\Delta - 1$ cores proibidas (já que v é colorido depois de u), então $f(u) \leq \Delta$. No pior dos casos, temos que $f(v) \geq \Delta + 2$, pois a condição do *backbone* direcionado deve ser satisfeita.

Note que, para $v \in V_-(\vec{M})$, temos no máximo $\Delta - 1$ cores proibidas, sem considerar o vizinho u em \vec{M} . No pior dos casos, temos que $f(v) \geq \Delta + 2 + \Delta - 1 = 2\Delta + 1$, ao considerar o vizinho u em \vec{M} . \square

4.2.2 Galáxia e caminho como backbone

Nesta seção, provamos resultados para os casos em que o *backbone* é uma galáxia ou um caminho. Considerando \vec{H} como uma orientação de uma galáxia H em um grafo G , denominamos \vec{H} como uma *galáxia direcionada* de G quando os centros das estrelas da galáxia são exclusivamente cabeças ou caudas dos arcos em \vec{H} .

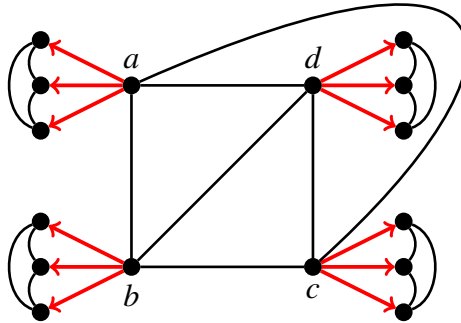
Pelo Teorema 6 e aplicando o Teorema das Quatro Cores (APPEL; HAKEN, 1976), temos que $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq q + 6$, para um grafo planar G com uma galáxia direcionada \vec{H} . Além

disso, mostramos que esse limitante é ótimo, mesmo quando \vec{H} é uma galáxia direcionada de G .

Teorema 65. *Se G é um grafo planar e \vec{H} uma galáxia direcionada de G , então $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq q + 6$. Esse limitante é o melhor possível.*

Demonstração. Provar que $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq q + 6$ segue diretamente do Teorema 6. Mostraremos que esse limitante superior é o melhor possível ao exibir um par que atinge exatamente $q + 6$.

Figura 71 – Um par (G, \vec{H}) (com os arcos do *backbone* em vermelho), onde G é um grafo planar e $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) = q + 6$.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Considere o par (G, \vec{H}) ilustrado na Figura 71, para o qual provaremos a igualdade $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) = q + 6$. Seja f uma ℓ -coloração q -backbone direcionada desse par. Suponha, por contradição, que $\ell \leq q + 5$. Como os vértices a, b, c e d formam uma clique em G , é necessário usar pelo menos quatro cores distintas para esses vértices. Denotemos por $w \in \{a, b, c, d\}$ um vértice com $f(w) \geq 4$. Como w possui três vizinhos em \vec{M} , seja w' um desses vizinhos. Para satisfazer a condição do *backbone* direcionado, temos que $f(w') \geq f(w) + q \geq q + 4$. Observe que esses três vizinhos de w em \vec{M} também formam uma clique, portanto, precisamos de três cores distintas que satisfaçam $f(w') \geq q + 4$. Isso implica que $\ell \geq q + 6$, o que contradiz nossa hipótese inicial e confirma que o limitante $q + 6$ é, de fato, o melhor possível. \square

Agora, considerando \vec{P} uma orientação de um caminho hamiltoniano P de um grafo G . Definimos \vec{P} como um *caminho hamiltoniano direcionado* de G se \vec{P} é um caminho direcionado em G . Dados G um grafo e \vec{P} um caminho hamiltoniano direcionado, provamos o seguinte teorema que estabelece $\text{BBC}_q(G, \vec{P})$ em função de $n(G)$.

Teorema 66. *Se G é um grafo com n vértices e \vec{P} um caminho hamiltoniano direcionado de G , então $\text{BBC}_q(G, \vec{P}) = (n - 1) \cdot q + 1$.*

Demonstração. Sejam G um grafo com n vértices e $\vec{P} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ um caminho hamiltoniano direcionado de G . Vamos primeiro mostrar que $\text{BBC}_q(G, \vec{P}) \leq (n-1) \cdot q + 1$. Para isso, vamos construir uma coloração q -backbone direcionada f para (G, \vec{P}) da seguinte forma:

$$f(v_i) = (i-1) \cdot q + 1, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Observe que f é uma coloração de G , pois cada vértice recebe uma cor distinta. Além disso, a condição do *backbone* direcionado é satisfeita, já que para todo $2 \leq i \leq n$, temos que:

$$f(v_i) - f(v_{i-1}) = (i-1) \cdot q + 1 - (i-2) \cdot q - 1 = q.$$

Isso prova que f é uma $((n-1) \cdot q + 1)$ -coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{P}) . Para mostrar que $\text{BBC}_q(G, \vec{P}) \geq (n-1) \cdot q + 1$, seja c uma $\text{BBC}_q(G, \vec{P})$ -coloração q -backbone de (G, \vec{P}) . Note que, para todo $2 \leq i \leq n$, como $(v_{i-1}, v_i) \in \vec{P}$, para satisfazer a condição do *backbone* direcionado, devemos ter $c(v_i) \geq c(v_{i-1}) + q$. Juntando essas desigualdades, obtemos

$$c(v_n) \geq c(v_{n-1}) + q \geq c(v_{n-2}) + 2 \cdot q \geq \dots \geq c(v_1) + (n-1) \cdot q.$$

Pelas desigualdade acima e sabendo que $c(v_1) \geq 1$, concluímos que $c(v_n) \geq 1 + (n-1) \cdot q$. Logo, $\text{BBC}_q(G, \vec{P}) \geq 1 + (n-1) \cdot q$. \square

4.2.3 Complexidade Computacional

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos sobre a complexidade computacional na Coloração *Backbone* Direcionada. Para introduzir nosso estudo, definimos o problema geral:

ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE DIRECIONADA

Entrada: Um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} de um subgrafo gerador H de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq \ell$?

Assim como demonstrado para a Coloração *Backbone*, o problema ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE DIRECIONADA é NP-completo para $\ell \geq 3$. Isso ocorre porque decidir se um grafo é ℓ -colorível é NP-completo para $\ell \geq 3$ (GAREY; JOHNSON, 1979), e, por definição, toda ℓ -coloração q -backbone direcionada também é uma ℓ -coloração do grafo.

O primeiro resultado de complexidade computacional que apresentamos trata do caso em que \vec{M} é uma orientação de um emparelhamento perfeito M de um grafo G . Para isso, tentamos estender o Teorema 52 para a Coloração *Backbone* Direcionada. Antes de enunciar o teorema, introduzimos uma definição e um lema correspondentes à situação apresentada na Proposição 18, mas adaptados para a versão direcionada.

Definição 67. *Dados um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} do subgrafo gerador H de G , dizemos que (G, \vec{H}) é bipartido de saída se $V(G)$ puder ser particionado em dois conjuntos A e B , que são independentes em G , onde A é formado pelas fontes de \vec{H} e B é formado pelos sumidouros de \vec{H} . Dizemos que A e B são bipartições de saída de (G, \vec{H}) .*

Lema 68. *Se G é um grafo e \vec{M} uma orientação de um emparelhamento perfeito M de G , então $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 3$ se, e somente se, (G, \vec{M}) é bipartido de saída.*

Demonstração. Considerando G e \vec{M} como no enunciado do lema.

(\Rightarrow) Suponha que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 3$ e que f seja uma 3-coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{M}) . Afirmamos que nenhum vértice v em G está colorido com a cor 2, o que equivale a dizer que f é uma coloração de G utilizando apenas duas cores: 1 e 3. Para demonstrar isso, suponha, por absurdo, que existe $u \in V(G)$ tal que $f(u) = 2$. Como M é um emparelhamento perfeito, existe $v \in V(G)$ tal que $(u, v) \in \vec{M}$ ou $(v, u) \in \vec{M}$. Sem perda de generalidade, suponha que $(u, v) \in \vec{M}$. Nesse caso, como a cor 2 é vizinha a ambas as cores 1 e 3, não há cor disponível para colorir v , o que contradiz a suposição de que f é uma coloração q -backbone direcionada de (G, \vec{M}) .

Assim, V_1 e V_2 formam uma bipartição de saída de (G, \vec{M}) , onde V_1 e V_2 representam os conjuntos de vértices coloridos com as cores 1 e 3, respectivamente, conforme a coloração f . Observe que os vértices de V_1 são fontes em \vec{M} , pois, caso existissem vértices $u \in V_1$ e $v \in V_2$ tal que $(v, u) \in \vec{M}$, a condição do backbone direcionado implicaria $f(u) \geq f(v) + 2 \geq 3$, o que é uma contradição. De forma análoga, provamos que V_2 é formado apenas por sumidouros de \vec{M} . Logo, concluímos que (G, \vec{M}) é bipartido de saída.

(\Leftarrow) Seja (G, \vec{M}) um grafo bipartido de saída, com bipartições de saída A e B . Como (G, \vec{M}) é bipartido de saída, assumimos, sem perda de generalidade, que A é a bipartição composta pelas fontes de \vec{M} e B pela dos sumidouros. Definimos então uma nova coloração h de forma que todos os vértices de A sejam coloridos com a cor 1, enquanto os vértices de B recebem a cor 3. Com essa definição, é claro que h constitui uma 3-coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{M}) . \square

Vamos definir o seguinte problema de complexidade computacional:

EMP. ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE DIRECIONADA

Entrada: Um grafo G e uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, \vec{M}) \leq \ell$?

Além da Definição 67 e do Lema 68, precisamos da seguinte definição:

Definição 69. *Dados um grafo G e uma orientação acíclica \vec{H} do subgrafo gerador H de G , dizemos que (G, \vec{H}) é quase-bipartido de saída se $V(G)$ puder ser particionado em dois conjuntos A e B , onde A é formado pelas fontes de \vec{H} e B é formado pelos sumidouros de \vec{H} . Dizemos que A e B são quase-bipartições de saída de (G, \vec{H}) .*

Note que a diferença entre as Definições 67 e 69 é no fato de que, para um par (G, \vec{H}) ser quase-bipartido, não exigimos que as quase-bipartições sejam conjuntos independentes em G , ao contrário do que ocorre no caso de ser bipartido de saída.

Finalmente, apresentamos o teorema sobre a complexidade computacional do problema EMP. ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA (quando $q = 2$). Note que, ao contrário do resultado para a Coloração *Backbone* no Teorema 52, o salto de polinomial para NP-completo ocorre quando $\ell = 5$.

Teorema 70. *É verdade que:*

- (a) *O problema EMP. ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 4$.*
- (b) *O problema EMP. ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA é NP-completo para $\ell \geq 5$.*

Demonstração. Assuma que $\ell \leq 4$. Primeiro, note que, para $\ell = 1$, decidir se $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 1$ é verdade é equivalente a saber se $E(G) = \emptyset$. Para $\ell = 2$, a verificação está relacionada à existência de arcos em \vec{M} . Se existe arco em \vec{M} , a resposta ao problema é prontamente *não*. Se não existe arco em \vec{M} , a resposta ao problema é equivalente a saber se G é um grafo bipartido.

Como \vec{M} é uma orientação de um emparelhamento perfeito M em G , no cenário em que $A(\vec{M}) = \emptyset$, temos G um grafo trivial, implicando que apenas uma cor é necessária para a coloração. Logo, a resposta ao problema é imediatamente *sim*, quando $A(T) = \emptyset$ e $\ell \geq 1$.

Pelo Lema 68, temos que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 3$ se, e somente se, (G, \vec{M}) é bipartido de saída, que pode ser decidido em tempo polinomial, o que resolve o problema para $\ell = 3$.

Suponha agora que $\ell \geq 4$. Considere o grafo $G = (V, E)$ e a orientação \vec{M} do emparelhamento perfeito M em G .

Assuma que $\ell = 4$. Seja ϕ uma 4-coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{M}) . Como (G, \vec{M}) é quase-bipartido, pois \vec{M} é uma orientação de um emparelhamento perfeito e todo vértice é uma fonte ou um sumidouro em \vec{M} . Considere as quase-bipartições V_1 e V_2 , onde V_1 é o conjunto das fontes de \vec{M} e V_2 o conjunto dos sumidouros de \vec{M} . Para satisfazer a condição do backbone direcionado, sabemos que os vértices nos conjuntos V_1 e V_2 são coloridos com as cores pertencentes a $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$, respectivamente. Portanto, note que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) = 4$ se, e somente se, ambos os subgrafos de G induzidos pelos conjuntos V_1 e V_2 são bipartidos, e nenhum arco de \vec{M} conecta um vértice de cor 2 em V_1 a um vértice de cor 3 em V_2 . Isso ocorre porque a condição de backbone direcionado deve ser satisfeita, e as cores 2 e 3 são cores vizinhas. Este problema pode ser reduzido ao problema 2-SAT, que é conhecido por ser resolvido em tempo polinomial (GAREY; JOHNSON, 1979).

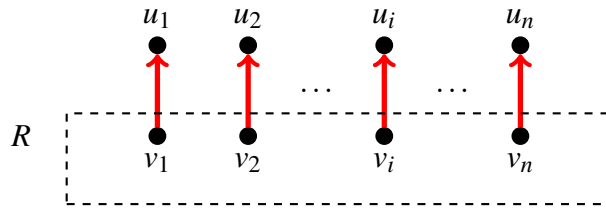
Para realizar a redução, criamos duas variáveis booleanas, x_v e y_v , para cada vértice $v \in V$. Os literais x_v e \bar{x}_v correspondem a colorir o vértice v com as cores 1 e 2, respectivamente, enquanto os literais y_v e \bar{y}_v correspondem a atribuir as cores 3 e 4 ao vértice v , respectivamente. Dessa forma, observe que $G[V_1]$ é bipartido se, e somente se, existe uma atribuição satisfatível para a fórmula booleana $(x_u \vee x_v) \wedge (\bar{x}_u \vee \bar{x}_v)$ para toda aresta $uv \in E(G[V_1])$. Esta fórmula assegura que, para cada aresta uv em G , um vértice u recebe uma cor e o vértice v recebe uma cor diferente dentro do conjunto de cores $\{1, 2\}$. Para o subgrafo $G[V_2]$, o processo é análogo.

Além disso, para um arco $(u, v) \in \vec{M}$ com $u \in V_1$ e $v \in V_2$, os vértices serão coloridos de maneira a satisfazer a condição do backbone direcionado se, e somente se, houver uma atribuição satisfatível para a fórmula booleana $x_u \vee \bar{y}_v$. Como as cores 2 e 3 são vizinhas, não é permitido que um arco em \vec{M} tenha suas extremidades coloridas com essas duas cores. Assim, a fórmula proíbe que as cores 2 e 3 apareçam simultaneamente em um arco de \vec{M} , garantindo que ou a cor 1 (x_u) ou a cor 4 (\bar{y}_v) sempre apareça em uma de suas extremidades.

Assuma agora que $\ell \geq 5$. A redução é realizada a partir de um problema clássico que é NP-completo: o problema da ℓ -coloração (ver mais informações sobre este problema em (GAREY; JOHNSON, 1979)). Este problema consiste em, dado um grafo R , responder à seguinte pergunta: existe uma ℓ -coloração de R ?

Vamos construir um grafo G e uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M em G . Seja $R = (V_R, E_R)$ uma instância do problema de ℓ -coloração e v_1, v_2, \dots, v_n uma enumeração dos vértices de R . Para cada $1 \leq i \leq n$, criamos o vértice u_i e adicionamos o arco (v_i, u_i) em \vec{M} , conforme ilustrado na Figura 72. O par resultante será (G, \vec{M}) . Dessa forma, é claro que os arcos $((v_1, u_1), \dots, (v_n, u_n))$ formam uma orientação \vec{M} de um emparelhamento perfeito M em G . Afirmamos que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq \ell + 2$ se, e somente se, $\chi(R) \leq \ell$.

Figura 72 – A construção do par (G, \vec{M}) (com os arcos do *backbone* em vermelho).



Fonte: Autoria própria, 2024.

Suponha que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq \ell + 2$ e seja ϕ uma $(\ell + 2)$ -coloração *2-backbone* direcionada de (G, \vec{M}) . Para satisfazer a condição do *backbone* direcionado, sabemos que a existência do arco $(v_i, u_i) \in \vec{M}$ implica $\phi(v_i) \leq \phi(u_i) - 2 \leq (\ell + 2) - 2 = \ell$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, a restrição de ϕ aos vértices de R é uma ℓ -coloração de R , o que implica que $\chi(R) \leq \ell$. Agora, suponha que $\chi(R) \leq \ell$ e seja f uma ℓ -coloração de R . Para cada $1 \leq i \leq n$, podemos estender f para (G, \vec{M}) colorindo os vértices u_i com a cor $\ell + 2$. Assim, concluímos que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq \ell + 2$. \square

Antes de enunciar o segundo resultado de complexidade computacional, é necessário introduzir algumas definições. Uma *floresta de caminhos* F é uma floresta em que cada componente é um caminho. Se cada componente C for um caminho com k vértices, ou seja, $C \cong P_k$, então dizemos que F é uma *floresta de k-caminhos*.

Dados G um grafo e F uma floresta geradora de k -caminhos em G . Sendo \vec{F} uma orientação de uma floresta de k -caminhos F . Dizemos que \vec{F} é uma *floresta de k-caminhos direcionada* de G se, para cada componente C de F , o caminho correspondente for direcionado.

A seguir, apresentamos o problema de complexidade computacional para uma floresta de k -caminhos direcionada.

k -CAMINHO ℓ -COLORAÇÃO q -BACKBONE DIRECIONADA

Entrada: Um grafo G e uma floresta de k -caminhos direcionada \vec{F} de G .

Pergunta: $\text{BBC}_q(G, \vec{F}) \leq \ell$?

O teorema a seguir é uma generalização do Teorema 70.

Teorema 71. *Para $k \geq 2$, é verdade que:*

- (a) *O problema k -CAMINHO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 2k$.*
- (b) *O problema k -CAMINHO ℓ -COLORAÇÃO 2-BACKBONE DIRECIONADA é NP-completo para $\ell \geq 2k + 1$.*

Demonstração. Os casos em que $1 \leq \ell \leq 2$ e $\ell \geq 3$ com $A(\vec{F}) = \emptyset$ seguem de maneira análoga à prova do Teorema 70.

Suponha agora que $\ell \geq 3$. Considere o grafo G e uma floresta de k -caminhos direcionada \vec{F} de G tal que $A(\vec{F}) \neq \emptyset$, uma vez que F é uma floresta geradora de k -caminhos de G .

Assuma que $3 \leq \ell \leq 2k$. Seja C uma componente de F . Como \vec{F} é uma floresta de k -caminhos direcionada e F é uma floresta geradora, temos que $G[V(C)] \cong P_k$. Assim, pelo Teorema 66, são necessárias pelo menos $2k - 1$ cores para uma coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{F}) . Portanto, quando $3 \leq \ell \leq 2k - 2$, a resposta é prontamente *não*.

Suponha que $\ell = 2k - 1$. Portanto, temos que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) \geq 2k - 1$, pelo argumento anterior. Defina os seguintes conjuntos: para todo inteiro $1 \leq i \leq k$, o conjunto V_i é formado pelos vértices v tal que $d_{\vec{F}}(x, v) = i - 1$, onde x é a fonte do k -caminho direcionado ao qual v pertence. Note que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) = 2k - 1$ se, e somente se, cada V_i é um conjunto independente. Logo, esse problema é decidido em tempo polinomial.

Assumindo que $\ell = 2k$. Seja ϕ uma $(2k)$ -coloração 2-backbone direcionada de (G, \vec{F}) . Os vértices do conjunto V_i são coloridos com as cores pertencentes a $\{2i - 1, 2i\}$, para todo inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$, pois a condição do backbone direcionado precisa ser satisfeita. Portanto, note que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) = 2k$ se, e somente se, cada V_i é bipartido e nenhum arco de \vec{F} conecta um vértice de cor $2i$ em V_i a um vértice de cor $2i + 1$ em V_{i+1} , para todo inteiro $1 \leq i \leq k$. Isso ocorre porque a condição de backbone direcionado deve ser satisfeita, e as cores $2i$ e $2i + 1$

são cores vizinhas. Também podemos reduzir este problema para o problema 2-SAT, que é resolvido em tempo polinomial (GAREY; JOHNSON, 1979), como fizemos no Teorema 70.

Para realizar a redução, criamos k variáveis *booleanas*, $x_1(v), \dots, x_k(v)$ para cada vértice $v \in V(G)$. Os literais $x_i(v)$ e $\overline{x_i(v)}$ correspondem a colorir o vértice v com as cores $2i - 1$ e $2i$, respectivamente, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Dessa forma, observe que $G[V_i]$ é bipartido se, e somente se, existe uma atribuição satisfatível para a fórmula *booleana* $(x_i(u) \vee x_i(v)) \wedge (\overline{x_i(u)} \vee \overline{x_i(v)})$ para toda aresta $uv \in E(G[V_i])$. Esta fórmula assegura que, para cada aresta uv em $E(G[V_i])$, um vértice u recebe uma cor e o vértice v recebe uma cor diferente dentro do conjunto de cores $\{2i - 1, 2i\}$.

Além disso, para um arco $(u, v) \in \vec{M}$ com $u \in V_i$ e $v \in V_{i+1}$, os vértices serão coloridos de maneira a satisfazer a condição do *backbone* direcionado se, e somente se, houver uma atribuição satisfatível para a fórmula booleana $x_i(u) \vee \overline{x_{i+1}(v)}$. Como as cores $2i$ e $2i + 1$ são vizinhas, não é permitido que um arco em \vec{M} tenha suas extremidades coloridas com essas duas cores. Assim, a fórmula proíbe que as cores $2i$ e $2i + 1$ apareçam simultaneamente em um arco de \vec{M} , garantindo que ou a cor $2i - 1$ ($x_i(u)$) ou a cor $2i + 2$ ($\overline{x_{i+1}(v)}$) sempre apareça em uma de suas extremidades.

Assuma agora que $\ell \geq 2k + 1$. Assim como na prova do Teorema 70, faremos uma redução para o problema de ℓ -coloração, que é NP-completo para $\ell \geq 3$ (GAREY; JOHNSON, 1979). Dado um grafo R , o problema de ℓ -coloração pergunta se existe uma ℓ -coloração de R .

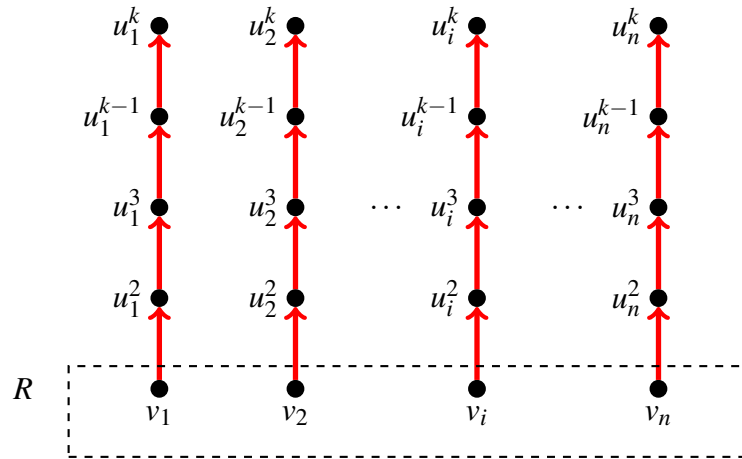
Vamos construir um grafo G e uma floresta de k -caminhos direcionada \vec{F} de G . Seja $R = (V_R, E_R)$ uma instância do problema de ℓ -coloração, e suponha que os vértices de R estão enumerados como v_1, v_2, \dots, v_n . Para cada vértice $v_i \in V_R$, criamos os vértices $u_i^2, u_i^3, \dots, u_i^k$ e adicionamos os arcos (v_i, u_i^2) e (u_i^j, u_i^{j+1}) para todo inteiro $2 \leq j \leq k - 1$, conforme ilustrado na Figura 73. O par resultante será (G, \vec{F}) . Dessa forma, é claro que os arcos $((v_i, u_i^2), \dots, (u_i^{k-1}, u_i^k))$ formam um k -caminho direcionado, para todo inteiro $1 \leq i \leq n$. Afirmamos que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) \leq \ell + 2k - 2$ se, e somente se, $\chi(R) \leq \ell$.

Suponha que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) \leq \ell + 2k - 2$ e seja ϕ uma $(\ell + 2k - 2)$ -coloração 2-*backbone* direcionada de (G, \vec{F}) . Para satisfazer a condição do *backbone* direcionado, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, a existência do k -caminho direcionado implica que:

$$\phi(v_i) \leq \phi(u_i^2) - 2 \leq \dots \leq \phi(u_i^k) - 2 \cdot (k - 1) \leq (\ell + 2k - 2) - 2 \cdot (k - 1) = \ell.$$

Portanto, a restrição de ϕ aos vértices de R é uma ℓ -coloração de R , o que implica que $\chi(R) \leq \ell$. Agora, suponha que $\chi(R) \leq \ell$ e seja f uma ℓ -coloração de R . Para cada $1 \leq i \leq n$, podemos

Figura 73 – A construção do par (G, \vec{F}) (com os arcos do *backbone* em vermelho).



Fonte: Autoria própria, 2024.

estender f para (G, \vec{F}) colorindo os vértices u_i^j com a cor $\ell + 2 \cdot (j - 1)$ para $j \in \{2, \dots, k\}$. Assim, concluímos que $\text{BBC}_2(G, \vec{F}) \leq \ell + 2k - 2$. \square

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

A Coloração *Backbone*, introduzida por Broersma et al. em 2003 (BROERSMA *et al.*, 2003), já conta com mais de 30 artigos publicados, abrangendo variações como as versões circular e por listas. Nesta dissertação, realizamos uma revisão bibliográfica no Capítulo 3, com foco na versão original da Coloração *Backbone*, sem ser circular ou por listas. Apresentamos resultados relevantes da literatura relacionados a limitantes gerais para o número cromático q -*backbone* de (G, H) , considerando H como um grafo arbitrário, e discutimos casos específicos em que o *backbone* é uma árvore, um emparelhamento, um caminho hamiltoniano ou uma galáxia. Além de reunir esses limitantes, apresentamos também resultados de complexidade computacional de problemas na Coloração *Backbone*.

As primeiras contribuições desta dissertação, apresentadas no Capítulo 4, consistem em correções de dois resultados publicados em artigos importantes para o estudo da Coloração *Backbone* (BROERSMA *et al.*, 2003; HAVET *et al.*, 2014). Contudo, o principal foco desta dissertação é a introdução de uma nova variação da Coloração *Backbone*, denominada Coloração *Backbone* Direcionada. Nesse contexto, provamos o Teorema 6, que estabelece que $BBC_q(G, \vec{H}) \leq \text{diam}(\vec{H}) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$, para qualquer inteiro $q \geq 2$, grafo G e orientação acíclica \vec{H} de um subgrafo gerador H de G . Este resultado oferece um limitante superior apertado em um caso mais geral dessa nova coloração.

Também apresentamos resultados específicos quando \vec{H} é uma orientação de um emparelhamento perfeito, além de análises para os casos em que \vec{H} é uma orientação de uma galáxia ou de um caminho hamiltoniano. Além disso, provamos dois novos resultados sobre a complexidade computacional relacionados à Coloração *Backbone* Direcionada.

Como direções futuras de pesquisa, propomos a extensão de limitantes já conhecidos para a Coloração *Backbone* ao contexto da Coloração *Backbone* Direcionada, bem como a investigação de novos resultados relacionados à complexidade computacional dessa variação. Na Tabela 1, apresentamos um resumo dos resultados obtidos para a Coloração *Backbone* Direcionada, comparando-os com os resultados correspondentes para a Coloração *Backbone* na literatura.

Em particular, sugerimos o estudo dos limitantes para o número cromático q -*backbone* direcionado quando o grafo G é um grafo *split*, além disso, deixamos o seguinte problema em aberto quando o *backbone* é um emparelhamento, que apresentamos no Capítulo 4:

Problema em Aberto 14. Se G é um grafo planar sem ciclos de comprimento 4 e 5 e \vec{M} uma

orientação de um emparelhamento M em G , é verdade que $\text{BBC}_2(G, \vec{M}) \leq 7$?

Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos na Coloração *Backbone* Direcionada com a Coloração *Backbone*.

Classe de G	Classe de H	$\text{BBC}_q(G, H) \leq \ell$	$\text{BBC}_q(G, \vec{H}) \leq \ell$
Geral	Geral	$(\chi(G) + q - 2) \cdot \chi(H) - q + 2$	$\text{diam}(\vec{H}) \cdot (\chi(G) + q - 2) + \chi(G)$
Geral	Emp. Perf.	Teorema 47	$2 \cdot \chi(G) + q - 2$
C_n	Emp.	3, se $q = 2$	4, se $q = 2$
K_n	Emp.	n , se $q = 2$	n , se $q = 2$
Geral	Emp.	$\Delta(G) + 1$, se $q = 2$	$2 \cdot \Delta(G) + 1$, se $q = 2$
Planar	Galáxia	$q + 4$	$q + 6$
Geral	Cam. Ham.	Teorema 37, se $q = 2$	$(n(G) - 1) \cdot q + 1$
		?, se $q \geq 3$	
Geral	Emp. Perf.	P, se $\ell \leq 3$ e $q = 2$	P, se $\ell \leq 4$ e $q = 2$
		NP-completo, se $\ell \geq 4$ e $q = 2$	NP-completo, se $\ell \geq 5$ e $q = 2$
Geral	Fl. de k -cam.		P, se $\ell \leq 2k$ e $q = 2$
			NP, se $\ell \geq 2k + 1$ e $q = 2$

?: problema em aberto.

Fonte: Autoria própria, 2024.

No contexto da Coloração *Backbone*, no Capítulo 3, deixamos alguns problemas em abertos da literatura, o qual enfatizamos o seguinte problema em aberto, na classe de grafos cordais.

Problema em Aberto 3. (BROERSMA et al., 2007) Se G é um grafo cordal e T uma árvore geradora de G , existe uma constante c tal que $\text{BBC}_2(G, T) \leq \chi(G) + c$?

Outra direção futura de pesquisa é investigar problemas ainda não estudados na literatura em classes específicas de grafos, como grafos *split* e cactos. Há artigos que estudam problemas em grafos *split* (BROERSMA et al., 2003; SALMAN, 2006; BROERSMA et al., 2009b), quando o *backbone* é um emparelhamento, uma árvore ou um caminho hamiltoniano. Contudo, por exemplo, não há, até o momento, um teorema que estabeleça limitantes superiores para o número cromático q -*backbone* de (G, P) , onde G é um grafo *split*, P é um caminho hamiltoniano em G e $q \geq 3$.

Na literatura, o artigo de Janczewski et al. estuda grafos cactos, provando resultados quando o *backbone* é um grafo conexo (JANCZEWSKI; TUROWSKI, 2015b). Isso abre espaço para explorar novos resultados ao variar a estrutura do *backbone*.

Por fim, outro trabalho futuro consiste em investigar problemas relacionados a classes de grafos ainda não abordadas na literatura, como o produto de grafos. Um exemplo seria estender a definição do produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 para pares de grafos (G_1, H_1) e (G_2, H_2) , em que H_1 e H_2 representam os *backbones* de G_1 e G_2 , respectivamente, e estudar o

número cromático q -*backbone* do produto cartesiano desses pares.

Além disso, não há resultados ou problemas em aberto sobre a classe de grafos cordais (exceto o Problema em Aberto 3), o que possibilita novos estudos nessa área, incluindo a exploração de subclasses específicas, como os grafos de intervalo.

REFERÊNCIAS

- APPEL, K.; HAKEN, W. **Every planar map is four colorable**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1976. v. 82. 711-712 p.
- APPEL, K.; HAKEN, W. The four-color problem. In: **Mathematics Today Twelve Informal Essays**. [S.l.]: Springer, 1978. p. 153–180.
- ARAÚJO, C.; ARAÚJO, J.; SILVA, A.; CEZAR, A. Backbone coloring of graphs with galaxy backbones. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 346, p. 53–64, 2019.
- ARAÚJO, C. S. **Colorações backbone em grafos com galáxias backbone**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2021. Acessado em: 12 de novembro de 2024. Disponível em: <<https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/69637>>.
- ARAÚJO, J.; BENEVIDES, F.; CEZAR, A.; SILVA, A. Circular backbone colorings: On matching and tree backbones of planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 251, p. 69–82, 2018.
- ARAÚJO, J.; CEZAR, A. A.; SILVA, A. On the existence of tree backbones that realize the chromatic number on a backbone coloring. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 85, n. 4, p. 808–813, 2017.
- BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory with Applications**. New York: North Holland, 1976.
- BROERSMA, H. A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. In: SPRINGER. **Indonesia-Japan Joint Conference on Combinatorial Geometry and Graph Theory**. [S.l.], 2003. p. 65–79.
- BROERSMA, H.; FOMIN, F. V.; GOLOVACH, P. A.; WOEGINGER, G. J. Backbone colorings for networks. **International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science**, Springer, p. 131–142, 2003.
- BROERSMA, H.; FOMIN, F. V.; GOLOVACH, P. A.; WOEGINGER, G. J. Backbone colorings for graphs: tree and path backbones. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 55, n. 2, p. 137–152, 2007.
- BROERSMA, H.; FUJISAWA, J.; YOSHIMOTO, K. Backbone colorings along perfect matchings. **Preprint**, v. 8308, p. 101–108, 2003.
- BROERSMA, H. J.; FUJISAWA, J.; MARCHAL, L.; PAULUSMA, D.; SALMAN, A.; YOSHIMOTO, K. λ -backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 309, n. 18, p. 5596–5609, 2009.
- BROERSMA, H. J.; MARCHAL, L.; PAULUSMA, D.; SALMAN, A. Backbone colorings along stars and matchings in split graphs: their span is close to the chromatic number. **Discussiones mathematicae. Graph theory**, De Gruyter Open, v. 29, n. 1, 2009.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 37, p. 194 – 197, 1941.
- BU, Y.; BAO, X. Backbone coloring of planar graphs for c_8 -free or c_9 -free. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 580, p. 50–58, 2015.

BU, Y.; LI, Y. Backbone coloring of planar graphs without special circles. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 412, n. 46, p. 6464–6468, 2011.

BU, Y.; LIU, D. D.-F.; ZHU, X. Backbone coloring for graphs with large girths. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 313, n. 18, p. 1799–1804, 2013.

BU, Y.; ZHANG, S. Backbone coloring for c_4 -free planar graphs. **Science China Mathematics**, v. 41, n. 2, p. 197–206, 2011.

CAMPOS, V.; HAVET, F.; SAMPAIO, R.; SILVA, A. Backbone colouring: Tree backbones with small diameter in planar graphs. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 487, p. 50–64, 2013.

CASTRO, R.; ARAÚJO, J.; CEZAR, A. Galáxias como backbone em colorações backbone. In: **Anais do VII Encontro de Teoria da Computação**. SBC, 2022. p. 89–92. ISSN 2595-6116. Disponível em: <<https://sol.sbc.org.br/index.php/etc/article/view/20666>>.

COHEN-ADDAD, V.; HEBDIGE, M.; LI, Z.; SALGADO, E. *et al.* Steinberg's conjecture is false. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 122, p. 452–456, 2017.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2022.

EULER, L. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. **Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 140–160, 1758.

FARZAD, B.; GOLESTANIAN, A.; MOLLOY, M. Backbone colourings of graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 339, n. 11, p. 2721–2722, 2016.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. Computers and intractability. **A Guide to the Theory of NP-Completeness**, W.H. Freeman and Company, 1979.

GRÖTZSCH, H. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. **Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Nat. Reihe**, v. 8, p. 109–120, 1959.

HAVET, F.; KING, A. D.; LIEDLOFF, M.; TODINCA, I. (circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 169, p. 119–134, 2014.

JANCZEWSKI, R.; TUROWSKI, K. The backbone coloring problem for bipartite backbones. **Graphs and Combinatorics**, Springer, v. 31, n. 5, p. 1487–1496, 2015.

JANCZEWSKI, R.; TUROWSKI, K. The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 184, p. 237–242, 2015.

KÖNIG, D. **Theorie der endlichen und unendlichen Graphen**. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.

MIŠKUF, J.; ŠKREKOVSKI, R.; TANCER, M. Backbone colorings and generalized mycielski graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, v. 23, n. 2, p. 1063–1070, 2009.

MIŠKUF, J.; ŠKREKOVSKI, R.; TANCER, M. Backbone colorings of graphs with bounded degree. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 158, n. 5, p. 534–542, 2010.

SALMAN, A. N. M. λ -backbone coloring numbers of split graphs with tree backbones. In: **Proceeding of The Second IMT-GT 2006 Regional Conference on Mathematics, Statistics and Applications**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 43–47.

SAPUTRO, S.; SALMAN, A. The λ -backbone colorings of graphs with tree backbones. **AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics**, Taylor & Francis, v. 10, n. 2, p. 229–236, 2013.

TUROWSKI, K. Optimal backbone coloring of split graphs with matching backbones. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, Uniwersytet Zielonogórski. Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, v. 35, n. 1, p. 157–169, 2015.

WANG, W.; BU, Y.; MONTASSIER, M.; RASPAUD, A. On backbone coloring of graphs. **Journal of combinatorial optimization**, Springer, v. 23, n. 1, p. 79–93, 2012.

WANG, X. Backbone colouring of connected planar graphs without c_8 and adjacent triangles. In: **Algebra Colloq.** [S.l.: s.n.], 2012. v. 22, n. 1.

WEST, D. B. **Introduction to graph theory**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001. v. 2.

ZHANG, S.; BU, Y. Backbone colouring for c_5 -free planar graphs. **Journal of Mathematical Study**, p. 43–4, 2010.

ÍNDICE

- (u, v) -caminho, 39
- λ -rotulação, 20
- adjacente, 34
- alfabeto, 49
- algoritmo, 48
 - correto, 48
 - de redução, 50
 - de tempo polinomial, 49
 - de verificação, 50
- amplitude, 20
- aresta de corte, 42
- arestas múltiplas, 35
- articulação, 41
- backbone, 22, 51
- biclique, 39
- bipartido de saída, 105
- bipartição de saída, 105
- borda da pipa, 87
- cabeça, 46
- caminho, 39
 - direcionado, 47
 - hamiltoniano, 39
 - direcionado, 31, 103
- cauda, 46
- centro da estrela, 25, 42
- certificado, 50
- ciclo, 39
 - direcionado, 47
 - par, 39
 - ímpar, 39
- cintura, 40
- classe de cor, 43
- clique, 37
- coloração
 - distância-2, 19
 - ótima, 20
 - gulosa, 44
 - própria, 17, 43
 - q-backbone, 22, 51
 - circular, 27
 - direcionada, 28, 92
 - ótima, 22, 51
 - simétrica, 23, 53
 - ótima, 17, 43
- componente, 41
 - conexa, 41
- comprimento, 39, 47
- condição
 - do backbone, 22, 51
 - direcionado, 92
- conjunto
 - de arestas, 34
 - de vértices, 34
 - independente, 37
- cor
 - disponível, 53
 - proibida, 53
 - vizinha, 22, 51, 93
- corda, 44

- digrafo, 46
- distância, 19, 40, 47
- diâmetro, 40, 47
- emparelhamento, 43
 - perfeito, 43
- entrada, 48
- estrela, 25, 42
- extremidade, 34
- face, 45
- floresta, 25, 42
 - de caminhos, 108
 - de k-caminhos, 108
 - direcionada, 108
- folha, 42
- fonte, 47
- fracamente conectado, 46
- função
 - computável em tempo polinomial, 50
 - de incidência, 34
 - de redução, 50
- galáxia, 25, 43
 - direcionada, 31, 102
- grafo, 34
 - acíclico, 25, 42, 47
 - bipartido, 37
 - completo, 39
 - complementar, 37
 - completo, 39
 - conexo, 41
 - cordal, 44
 - desconexo, 41
 - direcionado, 46
 - finito, 36
 - k-degenerado, 42
 - nulo, 36
 - perfeito, 44
 - planar, 19, 45
 - plano, 45
 - quadrado, 24
 - regular, 36
 - simples, 35
 - split, 37
 - subjacente, 46
 - trivial, 36
 - vazio, 36
- grau, 35, 45
 - de entrada, 46
 - de saída, 46
 - máximo, 36
 - de entrada, 47
 - de saída, 47
 - médio, 36
 - mínimo, 36
 - de entrada, 47
 - de saída, 47
- H-livre, 42
- imersão, 45
- incidente, 34, 45
- instância, 48
- isomorfismo, 35
- isomorfo, 35
- k-ciclo, 39

- k-coloração, 17, 43
 - q-backbone, 22, 51
 - circular, 27
 - direcionada, 28, 92
 - parcial, 53
- k-colorível, 43
- k-cromático, 43
- k-partido, 38
 - completo, 39
- k-regular, 36
- $L(2,1)$ -rotulação, 20
 - ótima, 20
- laço, 35
- linguagem, 49
 - NP-completa, 50
 - NP-difícil, 50
 - aceita, 49
 - em tempo polinomial, 49
 - decidida, 49
 - em tempo polinomial, 49
 - reduzível em tempo polinomial, 50
 - verificada, 50
- número cromático, 17, 43
 - distância-2, 20
 - q-backbone, 22, 51
 - circular, 27
 - direcionado, 29, 93
- ordem, 36
- orientação, 46
 - máxima, 93
 - mínima, 93
- origem, 39
- palavra, 49
 - aceita, 49
 - rejeita, 49
- paraquedas, 63, 87
- passeio, 39
 - fechado, 39
- passos, 48
- pipa, 87
- ponta da pipa, 87
- ponte, 42
- problema
 - abstrato, 48
 - concreto, 48
 - resolvido em tempo polinomial, 49
 - de decisão, 48
- quase-bipartido de saída, 106
- quase-bipartição de saída, 106
- saída, 48
- subgrafo, 41
 - gerador, 42
 - induzido, 42
- subpar, 53
- sumidouro, 47
- tamanho, 36
- tempo de execução, 48
- Teorema das Quatro Cores, 18
- torneio, 46
- trilha, 39
 - fechada, 39
- triângulo, 39

término, 39

verifica, 50

vizinhança, 36

vizinho, 34

vértice

- de corte, 42

- insaturado, 43

- interno, 39

- isolado, 41

- saturado, 43

- simplicial, 44

árvore, 25, 42

- geradora, 42