



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

JEFFERSON CALIXTO FIGUEIREDO

**ESTRATÉGIA DE PARTICIONAMENTO E PRÉ-ALINHAMENTO BASEADO EM
DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN PARA O REGISTRO DE NUVENS DE PONTOS**

FORTALEZA

2024

JEFFERSON CALIXTO FIGUEIREDO

ESTRATÉGIA DE PARTICIONAMENTO E PRÉ-ALINHAMENTO BASEADO EM
DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN PARA O REGISTRO DE NUVENS DE PONTOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Engenharia de Teleinformática

Orientador: Prof. Dr. José Marques Soares

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- F49e Figueiredo, Jefferson Calixto.
Estratégia de particionamento e pré-alinhamento baseado em distância de Wasserstein para o registro de nuvens de pontos / Jefferson Calixto Figueiredo. – 2024.
61 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. José Marques Soares.
1. Registro de nuvens de pontos 3D. 2. Distância de Wasserstein. 3. Pré-alinhamento. 4. Visão computacional. 5. Fatiamento de nuvens de pontos 3D. I. Título.
- CDD 621.38
-

JEFFERSON CALIXTO FIGUEIREDO

ESTRATÉGIA DE PARTICIONAMENTO E PRÉ-ALINHAMENTO BASEADO EM
DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN PARA O REGISTRO DE NUVENS DE PONTOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Engenharia de Teleinformática

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Marques Soares (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. George André Pereira Thé (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Cesar Cortez
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Plácido Rogério Pinheiro
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

À minha esposa Jamile, pelo apoio, incentivo e companheirismo. À “pessoinha” que eu ainda pretendo conhecer, que motiva todo esse trabalho.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Jamile Martins, pelo incentivo, pela capacidade de me permitir vislumbrar o futuro, por enfrentar de frente os momentos de dificuldade, por engrandecer os momentos de produtividade. Aos meus sogros, Maria das Graças e Francisco Genésio, pelo suporte de emergência e pelas garrafas de café, que serviram como combustível para continuar seguindo no trabalho.

Ao Prof. Dr. José Marques Soares e ao Prof. Dr. George A. P. Thé, pela ponderada e assertiva orientação, pelo apoio, compreensão e paciência durante todo o período de mestrado. Sem dúvida alguma, as observações, ideias e humanidade de ambos foram fundamentais para a realização deste trabalho. Agradeço imensamente a disponibilidade e a disposição em todo o processo.

Aos colegas do Grupo Interfaces, em especial o Arthur, por condicionarem as discussões e a fagulha teórica necessária para que as investigações propostas nesse trabalho sequer existissem.

Aos amigos e colegas de trabalho, dentre outras pessoas que, por ventura, tenham contribuído de alguma forma (direta ou indireta) para realização deste trabalho.

“Tudo o que temos a decidir é o que fazer com o tempo que nos foi concedido.”

(Gandalf - O Senhor dos Anéis)

RESUMO

O processamento de nuvens de pontos 3D é utilizado em múltiplas áreas de interesse, como, por exemplo, visão computacional, robótica e realidade aumentada. Da mesma forma, são muitas as aplicações que fazem uso dessa representação, como o reconhecimento de faces e os sistemas de navegação automática, entre outras. Contudo, o benefício da representação de objetos e cenários em 3D é limitado pela auto-occlusão pois, durante a aquisição de imagens em forma de nuvens de pontos, o sensor não consegue, de uma única perspectiva, capturar toda a superfície de interesse. Em geral, é preciso realizar mais de uma aquisição em diferentes perspectivas, sendo necessária, em seguida, a combinação das visões em uma mesma referência no espaço tridimensional. Esta operação é denominada registro de nuvens de pontos, e diversas técnicas foram desenvolvidas para esta finalidade. Porém, o registro é um problema desafiador e computacionalmente intensivo, principalmente no que se refere a encontrar as correspondências de pontos de diferentes regiões e as transformações geométricas necessárias para obter o alinhamento desejado. O desalinhamento inicial acentuado entre as visões parciais pode comprometer o desempenho e a qualidade de muitas técnicas de registro, e tem sido objeto de pesquisa em muitos trabalhos científicos. Neste contexto, é realizada uma investigação com dois focos para auxiliar a melhoria dos algoritmos de registro: (i) utilização da distância de Wasserstein para identificação da correspondência entre regiões de nuvens submetidas ao registro e; (ii) busca de um pré-alinhamento das regiões com maior índice de similaridade para eliminar o problema da severidade do desalinhamento inicial. Como resultado, é disponibilizada uma nova técnica de pré-alinhamento de baixa complexidade que aumenta a robustez de algoritmos de registros disponíveis em situação de desalinhamento severo. Os experimentos baseados na distância de Wasserstein sugerem ser uma medida com potencial tanto para obtenção de correspondências entre as segmentos de nuvens de pontos distintas, quanto no processo de pré-alinhamento, mostrando-se ainda uma abordagem promissora para futuras investigações que visem o desenvolvimento de métodos que independam de outros algoritmos para obtenção do alinhamento completo. Futuros trabalhos podem, igualmente, explorar a distância de Wasserstein para a aferição da qualidade do registro em qualquer contexto, partindo de correspondências de alta similaridade identificadas nas nuvens de pontos utilizadas.

Palavras-chave: registro de nuvens de pontos; distância de wasserstein; pré-alinhamento; correspondência de regiões; visão computacional; fatiamento; *slices*; rotação indireta.

ABSTRACT

3D point cloud processing is used in multiple areas of interest, such as computer vision, robotics and augmented reality. Likewise, there are many applications that make use of this representation, such as face recognition and automatic navigation systems, among others. However, the benefit of representing objects and scenes in 3D is limited by self-occlusion because, during the acquisition of images in the form of point clouds, the sensor cannot, from a single perspective, capture the entire surface of interest. In general, it is necessary to carry out more than one acquisition in different perspectives, and then combine the views in the same reference in three-dimensional space. This operation is known as point cloud registration, and several techniques have been developed for this purpose. However, registration is a challenging and computationally intensive problem, especially when it comes to finding point correspondences from different regions and the geometric transformations necessary to obtain the desired alignment. The pronounced initial misalignment between partial views can compromise the performance and quality of many recording techniques, and has been the subject of research in many scientific works. In this context, an investigation is carried out with two focuses to help improve registration algorithms: (i) use of the Wasserstein distance to identify correspondence between cloud regions submitted to registration and; (ii) search for a pre-alignment of regions with the highest similarity index to eliminate the problem of the severity of the initial misalignment. As a result, a new pre-alignment technique with low complexity is available that increases the robustness of available registration algorithms in situations of severe misalignment. Experiments based on the Wasserstein distance suggest that it is a measure with potential both for obtaining correspondences between segments of different point clouds and in the pre-alignment process, proving to be a promising approach for future investigations aimed at developing methods that are independent of other algorithms to obtain complete alignment. Future work can also explore the Wasserstein distance to measure the quality of the record in any context, using high similarity correspondences identified in the point clouds presented.

Keywords: point cloud registration; wasserstein distance; pre-alignment; region matching; computer vision; segmentation; slices; indirect rotation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Duas perspectivas de um mesmo modelo (em vermelho e azul) e a versão unida das duas após registro na posição mais à direita.	16
Figura 2 – Duas perspectivas do modelo <i>Bunny</i> com seus respectivos <i>slices</i> destacados. À direita, os <i>slices</i> são mostrados isoladamente para ilustrar o nível de similaridade entre ambos.	18
Figura 3 – Em um estado inicial de severo desalinhamento, o processo de seleção de pontos correspondentes do ICP leva o algoritmo a uma falha no alinhamento.	22
Figura 4 – Ilustração de um problema de transporte ótimo entre dois domínios 2D.	23
Figura 5 – Exemplos de aplicação de uma transformação causando distorção na nuvem <i>source</i> . Da esquerda para a direita: Par de nuvens nas posições originais; Par de nuvens com mapeamento; Nuvem <i>source</i> distorcida.	25
Figura 6 – Exemplos de pares de <i>slices</i> com considerável similaridade para a nuvem <i>Dragon</i>	25
Figura 7 – <i>Pipeline</i> da estratégia proposta para registro.	30
Figura 8 – Modelos de exemplo da base de dados Stanford.	32
Figura 9 – Fatiamento do modelo <i>Bunny</i> nos eixos <i>x</i> , <i>y</i> e <i>z</i>	34
Figura 10 – Resultado do fatiamento triaxial na nuvem <i>target</i> do modelo <i>Fountain</i>	35
Figura 11 – Resultado do fatiamento triaxial na nuvem <i>source</i> do modelo <i>Fountain</i>	36
Figura 12 – Configuração inicial das nuvens <i>target</i> (em vermelho) e <i>source</i> (em azul) do modelo <i>Fountain</i> antes de sofrerem o fatiamento triaxial.	36
Figura 13 – Os cinco pares mais similares segundo o critério da distância de Wasserstein para o modelo <i>Aquarius</i> . Os pares estão dispostos em ordem crescente de distância, da esquerda para a direita.	37
Figura 14 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Aquarius</i>	42
Figura 15 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Buddha</i>	43
Figura 16 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Bunny</i>	44
Figura 17 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Dragon</i>	45
Figura 18 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Eagle</i>	46
Figura 19 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Fountain</i>	47
Figura 20 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Hammer</i>	48
Figura 21 – Os cinco pares de <i>slices</i> mais similares do modelo <i>Horse</i>	48

Figura 22 – Processo de registro do modelo <i>Aquarius</i> , apenas com o <i>Iterative Closest Point</i> (ICP) e com a estratégia proposta.	50
Figura 23 – Processo de registro do modelo <i>Buddha</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	50
Figura 24 – Processo de registro do modelo <i>Bunny</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	50
Figura 25 – Processo de registro do modelo <i>Dragon</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	51
Figura 26 – Processo de registro do modelo <i>Eagle</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	51
Figura 27 – Processo de registro do modelo <i>Fountain</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	51
Figura 28 – Processo de registro do modelo <i>Hammer</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	51
Figura 29 – Processo de registro do modelo <i>Horse</i> , apenas com o ICP e com a estratégia proposta.	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Aquarius</i>	42
Tabela 2	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Buddha</i>	43
Tabela 3	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Bunny</i>	44
Tabela 4	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Dragon</i>	45
Tabela 5	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Eagle</i>	46
Tabela 6	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Fountain</i>	47
Tabela 7	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Hammer</i>	48
Tabela 8	– Resultados obtidos com os pares de <i>slices</i> do modelo <i>Horse</i>	49
Tabela 9	– Resultados obtidos de registro: RMSE e Distância de Wasserstein	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GICP	<i>Generalized-ICP</i>
GMM	<i>Gaussian Mixture Model</i>
ICP	<i>Iterative Closest Point</i>
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i>
UPS	<i>Uniaxial Partitioning Strategy</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

C_i	Matriz de Covariância da i-ésima nuvem de pontos
m_i	Baricentro da i-ésima nuvem de pontos
μ_i	Representação da i-ésima nuvem de pontos
R	Matriz de Rotação, dimensões: (3×3)
t	Vetor de Translação, dimensões: (1×3)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivos	18
1.2	Publicações	19
1.3	Organização da Dissertação	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	Registro de Nuvens de Pontos	20
2.2	Distância de Wasserstein	22
2.2.1	<i>Distância de Wasserstein como Norteadora do Registro</i>	<i>24</i>
2.2.2	<i>Modelagem Matemática</i>	<i>26</i>
2.2.3	<i>Rotação Indireta</i>	<i>27</i>
2.3	Considerações Finais	29
3	METODOLOGIA	30
3.1	Estrutura do Experimento	30
3.2	Particionamento de Nuvens de Pontos	32
3.2.1	<i>Fatiamento Triaxial</i>	<i>34</i>
3.3	Seleção de Pares de Slices	37
3.4	Pré-Alinhamento com Rotação Indireta	38
3.4.1	<i>Busca Exaustiva de Ângulos</i>	<i>38</i>
3.4.1.1	<i>Busca Local-Global</i>	<i>38</i>
3.4.2	<i>Validação do Pré-Alinhamento</i>	<i>39</i>
3.5	Configuração de Operação do ICP	39
3.6	Considerações Finais	40
4	RESULTADOS	41
4.1	Regiões de Correspondência	41
4.1.1	<i>Fatiamento Aquarius</i>	<i>41</i>
4.1.2	<i>Fatiamento Buddha</i>	<i>43</i>
4.1.3	<i>Fatiamento Bunny</i>	<i>44</i>
4.1.4	<i>Fatiamento Dragon</i>	<i>45</i>
4.1.5	<i>Fatiamento Eagle</i>	<i>45</i>
4.1.6	<i>Fatiamento Fountain</i>	<i>46</i>

4.1.7	<i>Fatiamento Hammer</i>	47
4.1.8	<i>Fatiamento Horse</i>	48
4.2	Registros Obtidos	49
4.2.1	<i>Discussão dos Resultados de Registro</i>	52
4.3	Considerações Finais	54
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	56
5.1	Trabalhos Futuros	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

Nuvens de pontos 3D podem ser definidas como conjuntos de pontos distribuídos no espaço. Tais nuvens são uma das formas de representar imagens em três dimensões. Diversas aplicações utilizam esse tipo de perspectiva 3D como fonte de informações. Dentre elas, estão: navegação autônoma (Pak; Son, ; Pfrunder *et al.*,), várias sub-áreas dentro da robótica (Tang; Tomizuka, 2019; Pomerleau; Colas; Siegwart, 2015; Jerbić *et al.*, 2015), reconhecimento facial (Soltanpour; Boufama; Jonathan Wu, 2017; Tomar; Zele,), visão computacional (Börcs; Nagy; Benedek, 2017), além de realidade aumentada (Kohlisch; Koch; May,). Isso mostra a importância desse tipo de dado no campo de processamento de imagens.

Porém, a aquisição dessa informação 3D possui algumas peculiaridades. Os sensores que capturam essas informações possuem a limitação do campo de visão, que é restrito a apenas uma região da superfície do objeto ou cenário capturado. Além disso, a perspectiva da captura do sensor está sujeita à oclusão de outros objetos ou uma auto-occlusão (ou seja, a própria perspectiva encobre parte da superfície a ser capturada). Isso faz com que sejam necessárias múltiplas capturas para obter os dados completos de um objeto ou cena, cada captura abrangendo partes da região de interesse. Assim, quando uma superfície em 3D é capturada, gera-se duas ou mais nuvens de pontos que precisam ser unidas em uma única nuvem. A Figura 1 mostra um exemplo de duas perspectivas de um mesmo modelo sendo unidas em uma única superfície.

O processo que realiza essa união é denominado Registro de Nuvens de Pontos 3D. É definido como o processo que alinha múltiplas nuvens num mesmo sistema de coordenadas. Devido à natureza da captura de superfícies em 3D, o registro de nuvens de pontos se faz presente

Figura 1 – Duas perspectivas de um mesmo modelo (em vermelho e azul) e a versão unida das duas após registro na posição mais à direita.



Fonte: o autor.

com frequência nos *pipelines* de processamento de nuvens de pontos. Como consequência, diversas técnicas e estratégias de registro foram criadas. Em Brightman, Fan & Zhao (2023), Xie *et al.* () e Xu, Qin & Song (2023) temos exemplos de abordagens de registro.

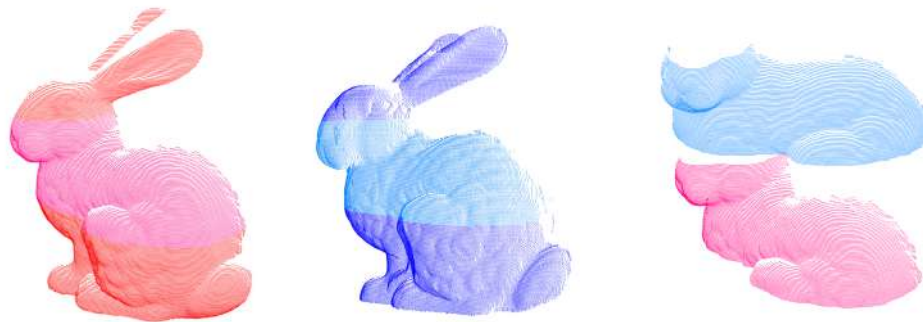
O processo de registro de nuvens de pontos frequentemente funciona da seguinte forma:

- determina-se uma das nuvens como uma referência fixa denominada *target*;
- a outra nuvem é denominada *source* e sofrerá uma transformação rígida que a alinhe com a nuvem *target*;
- em seguida a técnica busca a melhor transformação (translação e rotação) possível para alinhar a nuvem *source* à nuvem *target*.

Porém, diversas técnicas de registro possuem limitações que podem inviabilizar o registro em determinadas circunstâncias. Uma delas é o desalinhamento severo, que pode fazer com que algoritmos clássicos, como o ICP, falhem. Assim, estratégias preliminares, como o pré-alinhamento, podem ser propostas para melhor condicionar o estado das nuvens a serem alinhadas. Neste trabalho, uma abordagem de pré-alinhamento é proposta através da minimização da Distância de Wasserstein, métrica estudada na área de transporte ótimo (Peyré; Cuturi, 2019).

Além disso, uma das dificuldades do processo de registro de nuvens de pontos está em determinar a correspondência entre pontos ou regiões e diversas técnicas são dependentes dessas correspondências serem corretamente obtidas (Zhu; Ghaffari; Peng, ; Li *et al.*, 2020). Como consequência, técnicas baseadas em particionamento de nuvens buscam identificar regiões que facilitem o registro e que reduzam o custo do processo (Sousa; Soares; Thé, 2022). Nesse contexto, este trabalho também traz a perspectiva de que a distância de Wasserstein pode ser usada para localizar regiões correspondentes entre nuvens diferentes, o que pode facilitar o registro. Na estratégia proposta por este trabalho, segmentos das nuvens são selecionados como correspondentes e fornecidos como informação inicial para pré-alinhamento. Realizado o pré-alinhamento com a distância de Wasserstein norteando a melhor transformação, o alinhamento final com ICP ponto-ao-plano é facilitado, aumentando a robustez do processo. A Figura 2 mostra um exemplo de *slices* extraídos de duas perspectivas distintas do mesmo modelo e que apresentam um alto grau de correspondência. O quadro mais à direita mostra os dois *slices* isolados para ilustração do nível de similaridade. Esse é o tipo de partição com correspondência que a estratégia proposta por este trabalho busca.

Figura 2 – Duas perspectivas do modelo *Bunny* com seus respectivos *slices* destacados. À direita, os *slices* são mostrados isoladamente para ilustrar o nível de similaridade entre ambos.



Fonte: o autor.

1.1 Objetivos

Neste trabalho, é determinado como o objetivo principal validar a distância de Wasserstein como ferramenta para o processo de registro de nuvens de pontos. Para isso, experimentos são realizados com o intuito de verificar a potencialidade dessa métrica.

Dentre os objetivos específicos a serem atingidos nesta dissertação, estão:

- obter estratégias de registro usando técnica da área de transporte ótimo, incluindo a restrição de não distorção da nuvem transportada no processo;
- investigar se subnuvens com certo nível de similaridade podem ser alinhadas com a distância de Wasserstein, mesmo que não sejam perfeitamente idênticas;
- avaliar o potencial da distância de Wasserstein no processo de selecionar partições correspondentes entre as nuvens para aumentar a qualidade do registro;
- comparar o pré-alinhamento obtido com o desempenho de um algoritmo de registro tradicional para entender o nível de robustez que pode ser adicionado em condições de desalinhamento severo;
- otimizar o método de alinhamento com a distância de Wasserstein através de uma transformação indireta, reduzindo o custo computacional de cada iteração;
- avaliar a potencialidade da métrica da distância de Wasserstein para abrir novos horizontes na pesquisa de registro de nuvens de pontos no sentido de obter uma avaliação de qualidade automatizada do registro realizado.

1.2 Publicações

Partes do trabalho descrito nesta dissertação foram aceitas e serão publicadas em dois congressos a serem realizados no segundo semestre de 2024. O primeiro artigo, com o título "Pré-alinhamento Baseado na Distância de Wasserstein para o Registro de Nuvens de Pontos", será publicado no XLIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Porto de Galinhas-PE, em Setembro de 2024 (Martins *et al.*, 2024). O segundo artigo, com o título "Estratégia de Particionamento e Pré-Alinhamento Baseado em Distância de Wasserstein para Registro de Nuvens de Pontos", será publicado no Congresso Brasileiro de Automática (CBA) 2024, Rio de Janeiro-RJ, em Outubro de 2024 (Figueiredo *et al.*, 2024).

1.3 Organização da Dissertação

A estrutura desta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** são discutidos os aspectos que fundamentam e dão suporte ao registro de nuvens de pontos, bem como aqueles presentes no arcabouço do transporte ótimo;
- **Capítulo 3:** é descrita a metodologia proposta para a realização de registro com auxílio da distância de Wasserstein e para a obtenção de partições correspondentes entre as nuvens através dessa métrica;
- **Capítulo 4:** são apresentados e discutidos os resultados dos testes realizados;
- **Capítulo 5:** apresenta as principais conclusões alcançadas bem como suas limitações e possibilidades de melhorias.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são discutidos os principais conceitos no que se refere ao registro de nuvens de pontos, bem como apresentadas algumas técnicas e estratégias para o problema. Além disso, são apresentados alguns conceitos básicos da área de transporte ótimo, no intuito de discutir como o processo de registro de nuvens de pontos pode se favorecer com a métrica da Distância de Wasserstein. Tal métrica trata do custo mínimo necessário para transportar uma distribuição de massa para outro formato e outra posição. Porém, são apresentadas perspectivas que nos permitem modelar as nuvens de pontos a fim de encontrar regiões aproximadamente correspondentes e buscar um pré-alinhamento dessas regiões correspondentes para favorecer o processo de registro. Também é demonstrado um artifício matemático capaz de permitir que qualquer técnica estime iterativamente a transformação desejada para o alinhamento sem aplicar sequencialmente transformações diretamente na nuvem, desde que se trabalhe a minimização da Distância de Wasserstein.

2.1 Registro de Nuvens de Pontos

O processo de registro de nuvens de pontos geralmente consiste em determinar uma nuvem como referência fixa (denominada *target*) e outra como aquela que vai sofrer uma transformação rígida (denominada *source*); em seguida, busca-se determinar a transformação rígida que, aplicada à nuvem *source*, irá colocá-la sob o mesmo referencial cartesiano, alinhando-a com a nuvem *target*. Diversas abordagens foram desenvolvidas na literatura para resolver esse problema (Huang *et al.*, 2021).

As técnicas de registro podem ser divididas em Globais e Locais no que se refere ao método de alinhamento (Huang; Mei; Zhang, 2020). Os métodos Globais costumam definir intervalos de operação para o registro. Tais métodos podem ser realizados extraindo-se características globais da nuvem ou obtendo os limites da função custo a ser otimizada no processo de alinhamento. O resultado dessas estratégias é a realização de um alinhamento grosseiro, ou pré-alinhamento. Já os métodos Locais buscam aproximar elementos regionais a fim de realizar um tipo de ajuste fino ao processo do registro. Frequentemente, estes métodos buscam correspondências entre pontos ou regiões próximas a fim de descobrir a transformação ótima que aproxima tais elementos (Yang *et al.*, 2016; Zeng *et al.*, ; Gojcic *et al.*,). Por causa de suas abordagens distintas, os métodos Globais e Locais costumam ter limitações complementares

e, por isso, tendem a ser usados em conjunto (um pré-alinhamento seguido de um ajuste fino) (Brightman; Fan; Zhao, 2023).

Dentre as técnicas de registro local para nuvens de pontos 3D, o algoritmo ICP, proposto por Besl & McKay (1992), é um dos mais populares na literatura e possui diversas variantes (Park; Zhou; Koltun,). Além da versão mais básica do ICP, conhecida como ICP ponto-ao-ponto, temos, dentre suas variantes: ICP ponto-ao-plano, ICP plano-ao-plano e *Generalized-ICP* (GICP) (Chen; Medioni, 1992; Segal; Hähnel; Thrun, 2009; Pomerleau *et al.*, 2013).

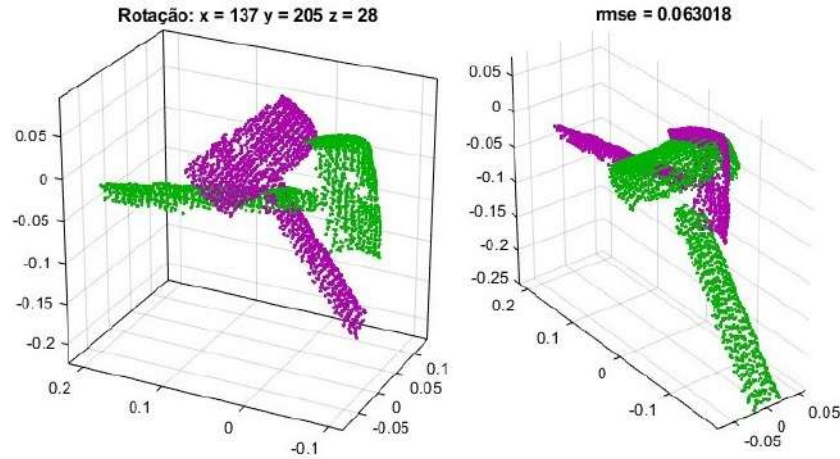
O algoritmo, em sua essência, consiste em achar pontos correspondentes entre as duas nuvens (*source* e *target*) e minimizar a função de raiz da distância quadrática média entre os pontos, de modo a encontrar uma transformação (translação e rotação) que aproxime a nuvem *source* da *target*. Assim, uma transformação é estimada e aplicada à nuvem *source*. Partindo desse ponto, todo o processo é repetido: buscam-se correspondências, estima-se a transformação, realiza-se a transformação sobre a nuvem *source*. O processo iterativo se encerra quando o valor de *Root Mean Squared Error* (RMSE) entre as nuvens é suficientemente pequeno. O valor RMSE é dado pela raiz do erro quadrático médio das distâncias entre os pares de pontos correspondentes.

É preciso notar que as correspondências entre as nuvens *source* e *target* não são normalmente fornecidas pelo problema, então cabe ao algoritmo determiná-las. Essa determinação, na forma ICP ponto-ao-ponto, é feita selecionando pares de pontos entre as nuvens *source* e *target* de modo que cada par selecionado tenha a menor distância euclidiana entre seus pontos; já as versões variantes citadas modificam como é feita essa seleção de correspondência, como no caso do ICP ponto-ao-plano, que busca minimizar a distância entre um ponto no conjunto de origem e o plano tangente no ponto correspondente no conjunto de destino. Determinados esses pares de pontos com menor distância entre si, assume-se que tais pontos são correspondentes. Isso nem sempre é verdadeiro. Por exemplo, se uma das nuvens tiver a face desejada numa orientação invertida (ou seja, as nuvens estão severamente desalinhadas), é possível que o algoritmo realize correspondências erradas, falhando no processo de alinhamento. A Figura 3 mostra um exemplo dessa situação. O desalinhamento severo entre as nuvens faz com que os pares de pontos mais próximos sejam não correspondentes, levando o algoritmo a aproximar esses pontos de modo que o registro falhe.

Outro exemplo de limitação do ICP está em um contexto de baixa correspondência entre as nuvens *source* e *target* a serem registradas, devido a diferenças nas perspectivas de

captura. Esse contexto geralmente faz o algoritmo cair em um mínimo local, o que o impede de prosseguir no processo iterativo até convergir no alinhamento desejável (Xie *et al.*,).

Figura 3 – Em um estado inicial de severo desalinhamento, o processo de seleção de pontos correspondentes do ICP leva o algoritmo a uma falha no alinhamento.



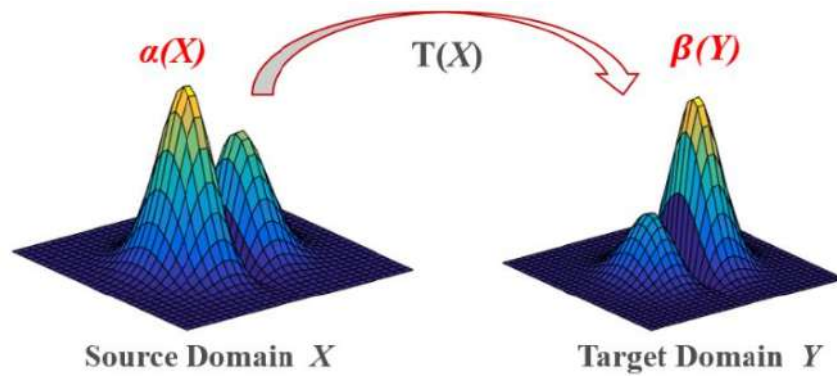
Fonte: o autor.

Notadamente, o desalinhamento mais severo costuma ser problemático para as técnicas de registro de escopo Local, como o ICP. Nesse sentido, técnicas de alinhamento Global podem contribuir. Porém, elas costumam utilizar alguma forma de extração de características, que frequentemente causam um aumento considerável no custo computacional. Algumas técnicas se baseiam em *Deep Learning*, o que enfatiza o nível de complexidade do problema (Brightman; Fan; Zhao, 2023). Sendo assim, as pesquisas com registro de nuvens de pontos baseadas em técnicas como ICP buscam aprimorar de alguma forma o pré-alinhamento ou algum pré-processamento que facilite o registro com o mínimo de impacto possível no custo computacional.

2.2 Distância de Wasserstein

A distância de Wasserstein é entendida como uma medida do custo mínimo para transportar a massa representada por uma distribuição para outra distribuição. A métrica leva em conta o posicionamento e a forma em que as distribuições se encontram. A título de exemplo para essa categoria de problema, considere um monte constituído de grãos de areia. Deseja-se preencher um buraco com essa areia. Tanto o buraco quanto o monte contêm o mesmo volume, mas diferem em formato e em posição no espaço. Essa categoria de problema é estudada na área da matemática chamada de transporte ótimo, formulada inicialmente em Monge (1781), e pode ser estudada em Peyré & Cuturi (2019). A Figura 4 exemplifica um caso de transporte

Figura 4 – Ilustração de um problema de transporte ótimo entre dois domínios 2D.



Fonte: Li *et al.* (2019)

ótimo entre dois domínios de duas dimensões. A distribuição passa da configuração *source* para a configuração *target*, através de um transporte de custo $T(x)$. As superfícies que se apresentam na terceira dimensão descrevem as distribuições 2D.

A distância de Wasserstein pode ser usada para calcular o custo mínimo de levar cada grão de areia para o buraco a fim de preenchê-lo completamente. Esse custo tende a ser maior quanto mais distante o monte está do buraco e quanto mais diferente é o formato de ambas as estruturas. Mais detalhes sobre a distância de Wasserstein podem ser encontrados em Bhatia, Jain & Lim (2019) e Takatsu (2011).

Um ponto importante desse problema é que, tal qual o exemplo dado, a massa inicial (monte de areia) é exatamente idêntica à massa final (monte de areia transportado inteiramente para o buraco a ser tapado). Isso significa que, considerando a massa total de distribuições quaisquer como 1, podemos tratar as distribuições estudadas como distribuições de probabilidade. Além disso, dependendo das restrições do problema, podemos, então, usar modelos conhecidos para representar o problema, sendo o gaussiano o mais comum.

Nessa perspectiva, o registro de nuvens de pontos pode se beneficiar do problema de transporte ótimo enquanto ferramenta. Contudo, essa não é a única perspectiva possível. Outros trabalhos, como Steuernagel, Kurda & Baum (), Mei *et al.* (2021) e Dai *et al.* (2023), mostram outras aplicações dos conceitos estudados na área de transporte ótimo no contexto de registro de nuvens de pontos, bem como o aspecto da modelagem com gaussianas em conjunto com a distância de Wasserstein.

2.2.1 Distância de Wasserstein como Norteadora do Registro

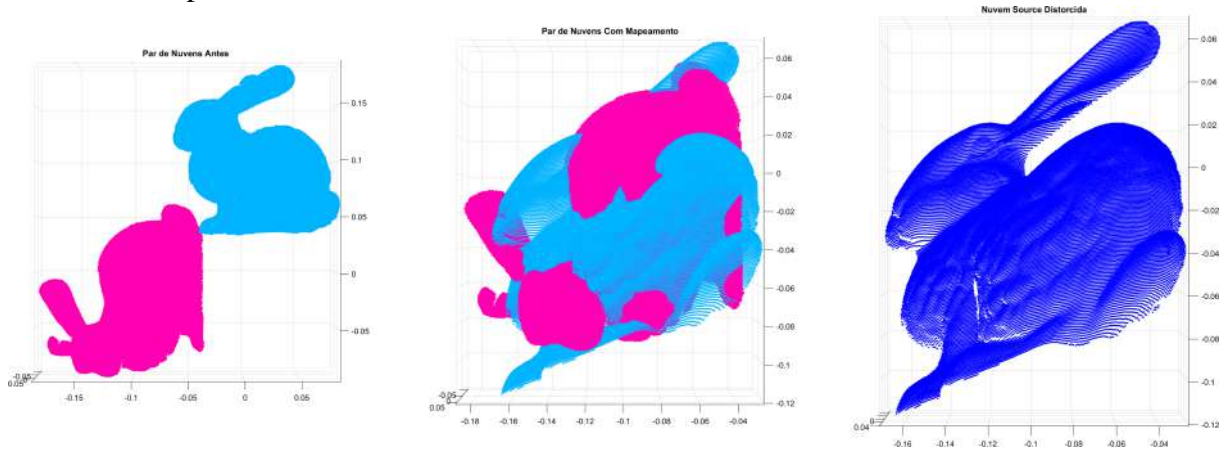
Como discutido anteriormente, é possível considerar uma nuvem de pontos como uma distribuição de massa e a distância de Wasserstein como uma medida de dissimilaridade entre duas nuvens. Neste sentido, trata-se de calcular o custo de “transportar” os pontos de uma posição e de um formato para outra posição em outro formato. Naturalmente, esse custo será menor quanto mais aproximadas as duas nuvens estiverem em distância, orientação e formato.

Essa abordagem nos concede o seguinte fato: se duas nuvens idênticas estiverem passando por um processo de registro, elas devem diferir apenas em distância e orientação, pois tem o mesmo formato. Assim, o custo de transporte entre as duas nuvens será o menor possível, ou zero, se ambas as nuvens coincidirem em posição e orientação. Portanto, no caso do registro de nuvens de pontos, a distância de Wasserstein pode nos informar sobre a qualidade do alinhamento. Consequentemente, uma estratégia de alinhamento utilizada pode checar a distância de Wasserstein para conferir se atingiu o melhor registro possível, contribuindo para o sucesso do registro.

Contudo, sabemos que a maior parte dos casos de registro é constituída de nuvens diferentes, mas com algum nível de superposição. Logo, apesar de haver alguma similaridade, o problema se estabelece com diferenças em posição, orientação e formato. Estratégias tradicionais de transporte ótimo buscam de fato transformar a distribuição inicial na distribuição final, modificando posição, orientação e formato. O resultado disso é a possibilidade de causar distorção na nuvem, prejudicando o registro. A Figura 5 mostra um exemplo de situação de distorção da nuvem *source* quando se aplica a transformação comumente obtida na área de transporte ótimo usando o transporte de gaussianas pela minimização da Distância de Wasserstein. Como o processo leva em consideração a modificação do formato da distribuição de massas, isso causa a distorção da nuvem.

Trata-se de uma limitação imposta pela diferente natureza dos dois problemas (registro e transporte ótimo). Todavia, parte fundamental do problema de registro é a existência da superposição entre as duas nuvens, ou seja, segmentos equivalentes entre nuvens diferentes. Sabe-se que o grau de superposição entre duas nuvens pode ser determinante na efetividade de um algoritmo de registro, piorando o desempenho quanto menor é a área de superposição (Li *et al.*, 2020). Esse elemento fundamental do problema (isto é, o nível de sobreposição entre as nuvens) pode ser utilizado para se beneficiar da distância de Wasserstein sem eliminar o propósito do registro ao tentar “encaixar” duas imagens diferentes ao ponto de distorcer uma

Figura 5 – Exemplos de aplicação de uma transformação causando distorção na nuvem *source*. Da esquerda para a direita: Par de nuvens nas posições originais; Par de nuvens com mapeamento; Nuvem *source* distorcida.



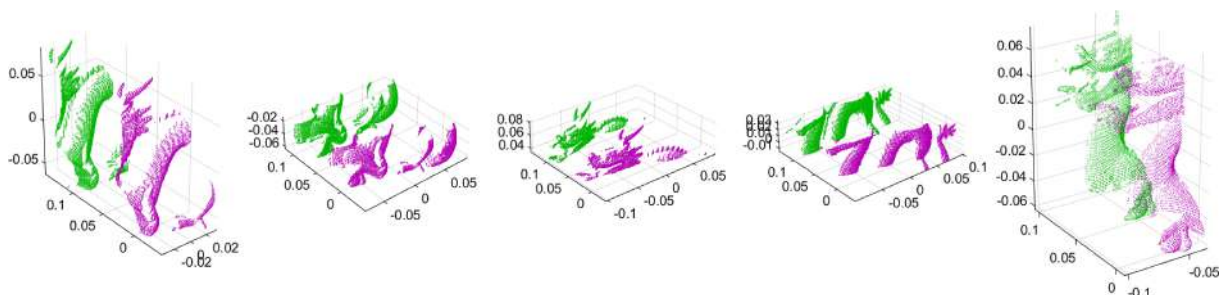
Fonte: o autor.

delas.

O problema se torna, portanto, descobrir segmentos (ou *slices*) idênticos ou, no mínimo, suficientemente similares. Aqui, entende-se por “suficientemente similares” aqueles segmentos de nuvens que nos fornece uma distância de Wasserstein próxima de zero, quando se encontram em mesma posição e orientação. Sendo assim, é necessário realizar o particionamento das nuvens a fim de encontrar quais pares de partições são mais similares. A similaridade é determinada pela menor distância de Wasserstein entre dois segmentos de nuvens, porém, há que se realizar uma segunda restrição: os segmentos particionados devem ter uma quantidade similar de pontos (massas iguais) para obedecer as restrições iniciais do problema de transporte ótimo.

A Figura 6 mostra exemplos de pares de segmentos de duas nuvens diferentes que representam o modelo *Dragon*. Esses pares foram selecionados pelo critério das menores distâncias de Wasserstein. É perceptível a olho nu que são segmentos com alta similaridade. Mais detalhes serão discutidos na constituição da metodologia (capítulo 3), onde será definido como esses segmentos serão obtidos e que vantagens e limitações o método apresenta.

Figura 6 – Exemplos de pares de *slices* com considerável similaridade para a nuvem *Dragon*.



Fonte: o autor.

2.2.2 Modelagem Matemática

A nuvem de pontos, no contexto de um problema de transporte ótimo, pode ser modelada como uma distribuição conhecida. Isso tem a finalidade de extrair um perfil estatístico da imagem e realizar o cálculo do custo de transporte ótimo, via distância de Wasserstein. Nesse trabalho, as imagens são modeladas como Gaussianas por ser uma distribuição frequentemente utilizada e que simplifica o processo. Nuvens de pontos são distribuições de dados com muita variedade de formatos e que podem obedecer a modelos de alta complexidade e, portanto, custo. Sendo o objetivo entender apenas o quão próximos estão duas nuvens entre si, entende-se que basta um modelo gaussiano. Além disso, a determinação do modelo mais adequado às nuvens de pontos 3D em geral constitui um estudo à parte, que se justifica se os resultados preliminares sugerirem que a modelagem gaussiana não é suficiente ou que o potencial da técnica será melhor explorado se for utilizada outra modelagem. Porém, acredita-se que a modelagem gaussiana fornecerá um resultado satisfatório à medida que a modelagem apenas deve oferecer uma descrição útil dos dados para a resolução eficiente do problema. Considerando as incontáveis formas que uma nuvem de pontos 3D pode possuir, modelos com características específicas podem falhar em descrever satisfatoriamente todas as nuvens a serem usadas no registro.

Assim, são encontradas duas gaussianas que representam a distribuição 3D das nuvens *source* e *target* e a distância de Wasserstein entre elas é obtida através da expressão (Peyré; Cuturi, 2019):

$$W_2(\mu_1, \mu_2)^2 = |m_1 - m_2|_2^2 + \text{tr}(C_1 + C_2 - 2(C_1^{1/2} C_2^{1/2})^{1/2}), \quad (2.1)$$

em que μ_i , m_i e C_i representam, respectivamente, uma distribuição gaussiana, seu vetor de médias (baricentro) e sua matriz de covariância; $|\cdot|_2^2$ representa o quadrado da norma euclidiana de um vetor e $\text{tr}(\cdot)$, a operação matricial traço.

Note que m_i e C_i são variantes à rotação. Isso porque o cálculo do ponto médio e da matriz de covariância depende diretamente de cada ponto contido na nuvem μ_i . Quando μ_i sofre rotação, os valores de cada ponto da nuvem serão alterados. Para que não reste dúvidas quanto a essa afirmação, observemos as definições de ponto médio e matriz de covariância de pontos:

$$m_i = \frac{1}{N} \sum x_k, \quad (2.2)$$

em que k varia de 1 a N , que representa o número total de pontos.

$$C_i = \frac{1}{N} (\mu_i - m_i)^T (\mu_i - m_i), \quad (2.3)$$

em que μ_i é dada como a matriz de pontos de dimensões $N \times 3$, ou seja, cada ponto é uma linha da matriz para as coordenadas x , y e z .

Note que a matriz de covariância depende do baricentro em sua expressão, porém, a translação da nuvem não implica em mudança na matriz de covariância, uma vez que a translação modifica cada ponto da nuvem e seu baricentro na mesma medida, assim, a influência dessa modificação se cancela na expressão $(\mu_i - m_i)$.

Com essas equações, concluímos que a distância de Wasserstein varia com a translação e com a rotação, sendo que a translação afeta somente o termo da expressão dependente dos baricentros. Esses aspectos serão utilizados no estudo proposto neste trabalho.

2.2.3 Rotação Indireta

Na equação 2.1, observamos que basta os baricentros e as matrizes de covariâncias de dois segmentos de nuvens para obtermos a distância de Wasserstein entre elas. Também foi discutido que tais elementos são variantes à rotação. Mas é possível ir além e obter o novo baricentro e a nova matriz de covariância de uma nuvem, após aplicar-lhe uma transformação. Ou seja, é possível calcular com exatidão a distância de Wasserstein entre duas nuvens dada uma possível transformação rígida estabelecida através do baricentro e da matriz de covariância de uma nuvem.

Considerando a transformação rígida aplicada a uma nuvem μ_i , com uma translação t , um vetor linha de dimensões 1×3 , e uma rotação R , uma matriz de dimensões 3×3 que, por definição, é ortogonal (ou seja, $R^T = R^{-1}$). A nuvem resultante será dada por:

$$\bar{\mu}_i = \mu_i \cdot R + t, \quad (2.4)$$

em que $\bar{\mu}_i$ é a nuvem resultante da transformação.

Calculando o baricentro \bar{m}_i , partindo da equação 2.2 e considerando como \bar{x}_k cada ponto em $\bar{\mu}_i$, temos que:

$$\bar{m}_i = \frac{1}{N} \sum \bar{x}_k = \frac{1}{N} \sum (x_k \cdot R + t) \quad (2.5)$$

Separando os termos em soma e, considerando que R e t são constantes, temos que:

$$\bar{m}_i = \frac{1}{N} \sum (x_k \cdot R + t) = \frac{1}{N} \sum (x_k \cdot R) + \frac{1}{N} \sum t = R \cdot \left[\frac{1}{N} \sum (x_k) \right] + \frac{1}{N} (N \cdot t) \quad (2.6)$$

Observando a equação 2.6, temos que o termo destacado em colchetes é apenas o baricentro da nuvem original. Além disso, o último termo é apenas t . Dessa forma, a equação

final do novo baricentro em função da rotação e da translação, é dada por:

$$\boxed{\overline{m}_i = m_i.R + t}. \quad (2.7)$$

A seguir, utiliza-se raciocínio similar para determinar a nova matriz de covariância em função da rotação e da translação, partindo da equação 2.3:

$$\overline{C}_i = \frac{1}{N} (\overline{\mu}_i - \overline{m}_i)^T (\overline{\mu}_i - \overline{m}_i). \quad (2.8)$$

Substituindo as equações 2.4 e 2.7 na equação 2.8, temos:

$$\overline{C}_i = \frac{1}{N} [(\mu_i.R + t) - (m_i.R + t)]^T [(\mu_i.R + t) - (m_i.R + t)] = \frac{1}{N} (\mu_i.R - m_i.R)^T (\mu_i.R - m_i.R). \quad (2.9)$$

Com isso, verificamos que a nova matriz de covariância não depende da translação, pois a influência de t na equação se cancela. Resta a influência de R . Nesse caso, em ambos os parênteses, podemos isolar a matriz de rotação pela direita resultando no seguinte:

$$\overline{C}_i = \frac{1}{N} [(\mu_i - m_i)R]^T (\mu_i - m_i)R. \quad (2.10)$$

Através de uma das propriedades da matriz transposta, e considerando que $\frac{1}{N}$ é um escalar constante e que, portanto, pode comutar na multiplicação com matrizes, podemos reorganizar a equação 2.10 da seguinte forma:

$$\overline{C}_i = R^T \left[\frac{1}{N} (\mu_i - m_i)^T (\mu_i - m_i) \right] R. \quad (2.11)$$

De forma similar ao baricentro, o termo destacado em colchetes na equação 2.11 é igual à definição de covariância na equação 2.3, ou seja, é precisamente a matriz de covariância original. Substituindo, temos a covariância resultante em função da rotação aplicada:

$$\boxed{\overline{C}_i = R^T.C_i.R}. \quad (2.12)$$

Em resumo, para cada R e t estipuladas, podemos calcular as novas matrizes de baricentro e covariância sem a necessidade de transformar cada ponto da nuvem apenas usando as equações 2.7 e 2.12. Isso significa que podemos determinar a distância de Wasserstein entre a nuvem *target* e a nuvem *source*, resultante da transformação, usando apenas as matrizes de covariância e do baricentro. O custo computacional dessa operação realizada diretamente na matriz de covariância e no baricentro originais da nuvem é o de operações com matrizes de dimensões 3×3 (1×3 , no caso do baricentro). Isso é consideravelmente menos custoso que realizar a transformação diretamente na nuvem, que geralmente contém milhares de pontos.

Essa estratégia, por ser de baixo custo computacional, pode ser testada diversas vezes em um algoritmo iterativo que busque a transformação que minimize a distância de Wasserstein. Além disso, como ambos os baricentros das nuvens *source* e *target* são alinhados na origem, o problema da busca da translação pode ser desconsiderado se a estratégia busca apenas o pré-alinhamento das nuvens. O motivo disso é que, com os baricentros coincidentes, costuma restar pouca translação a ser feita pelo algoritmo de registro fino. Com isso, modifica-se apenas a matriz de rotação para determinar a menor distância de Wasserstein sem rotacionar diretamente a nuvem *source*. Assim, essa estratégia foi nomeada como Rotação Indireta e é usada neste trabalho para processo de pré-alinhamento.

2.3 Considerações Finais

Neste capítulo, foram abordados conceitos e técnicas de registro de nuvem de pontos, bem como a utilização da Distância de Wasserstein pode contribuir para o alinhamento. É observado que não só a teoria proveniente da área de transporte ótimo pode nos fornecer a seleção de regiões similares entre duas nuvens de pontos, como também pode nos dar um indicativo da qualidade do alinhamento, no caso de nuvens idênticas. Também foi discutido como a Distância de Wasserstein pode ser utilizada para achar a melhor transformação possível para a nuvem *source* sem realizar transformações diretas na nuvem, no caso de uma técnica iterativa.

Tendo esses aspectos em mente, este trabalho propõe uma técnica capaz de selecionar pares de partições entre as nuvens *source* e *target* com um nível de similaridade visualmente perceptível e, a partir delas, achar uma rotação que configure um pré-alinhamento de simples execução. Todo esse processo é possibilitado usando a Distância de Wasserstein como ferramenta de modo a aumentar consideravelmente a robustez do alinhamento do ICP ou seus variantes.

No próximo capítulo, será apresentada a forma com que os experimentos são tomados para verificar a validade da estratégia.

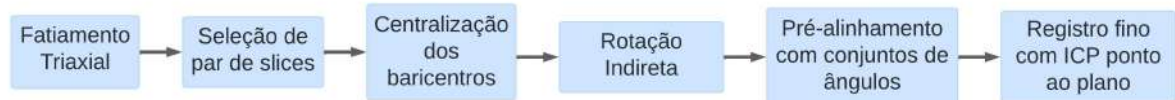
3 METODOLOGIA

Neste capítulo, são discutidos os aspectos dos experimentos realizados. Como foram concebidos, quais são seus principais elementos em detalhes e que estratégias serão usadas para avaliar os resultados gerados. Inicia-se abordando a visão ampla do *pipeline* de experimentos e que tipo de dados serão usados e suas condições. Em seguida, aborda-se cada elemento desse *pipeline* em maiores detalhes, mostrando como é seu funcionamento, que configurações foram usadas e a motivação por trás das escolhas. Por fim, discutem-se as hipóteses estipuladas e os critérios usados a fim de determinar a validade ou não delas.

3.1 Estrutura do Experimento

O processo de registro de nuvens de pontos 3D realizado neste trabalho constitui-se de dois passos fundamentais: um pré-alinhamento e um alinhamento fino usando um algoritmo de registro conhecido (no caso, ICP ponto-ao-plano). O passo de pré-alinhamento é onde se encontra a principal contribuição desta pesquisa e, portanto, é subdividido em diversas etapas preliminares. No total, seis etapas são destacadas como na Figura 7.

Figura 7 – *Pipeline* da estratégia proposta para registro.



Fonte: o autor.

Fatiamento triaxial: ambas as nuvens *source* e *target* são divididas em 3 *slices* (segmentos) igualmente espaçados ao longo de cada eixo principal (x , y e z), resultando em 9 *slices* (mais detalhes na sessão 3.2). O motivo da utilização de uma estratégia de fatiamento é para tentar destacar ao máximo regiões de sobreposição entre as duas nuvens a serem registradas, uma vez que elas são frequentemente diferentes. O critério da Distância de Wasserstein requer formatos semelhantes para que se restrinja, dentro do problema do transporte ótimo, a possibilidade de modificação da forma da distribuição original (essa questão é abordada na Seção 2.2.1).

Seleção de par de *slices*: partindo dos *slices* extraídos na etapa de fatiamento triaxial, é feita uma seleção de quais pares de *slices* (um de cada nuvem) são mais similares entre si. Além da similaridade, é observada a proporção de pontos entre os *slices* do par, uma vez que não

há nenhuma garantia que ambos tenham o mesmo tamanho. Logo, é realizada uma busca por, dentre os pares mais similares, aquele que tem a quantidade de pontos mais aproximada entre si.

Centralização de baricentros: ambas as nuvens *source* e *target* tem seus baricentros centralizados na origem das coordenadas (0,0,0). Isso é feito realizando-se uma translação simples. Essa etapa reduz significativamente os efeitos da distância entre as nuvens, restando o foco na rotação, que pode ou não ser severa em relação ao alinhamento correto. Note, porém, que a centralização dos baricentros é em relação às nuvens inteiras. Assim, seus *slices* não necessariamente estarão centralizados na origem.

Rotação indireta: nesta etapa, os pares de *slices* selecionados e posicionados em relação ao baricentro de suas nuvens *source* e *target* são submetidos a testes de rotação sem modificação direta nas nuvens. Isso é feito através de um processo iterativo de estimativa de matriz de rotação e cálculo da distância de Wasserstein entre os *slices*, utilizando a matriz de covariância resultante da aplicação da rotação diretamente na matriz de covariância do *slice source*. Esse processo é repetido até que se obtenha a menor distância de Wasserstein possível. Obtida essa menor distância possível, determinam-se os ângulos aplicados nos três eixos principais que geraram essas condições. Esses ângulos são utilizados como pré-alinhamento.

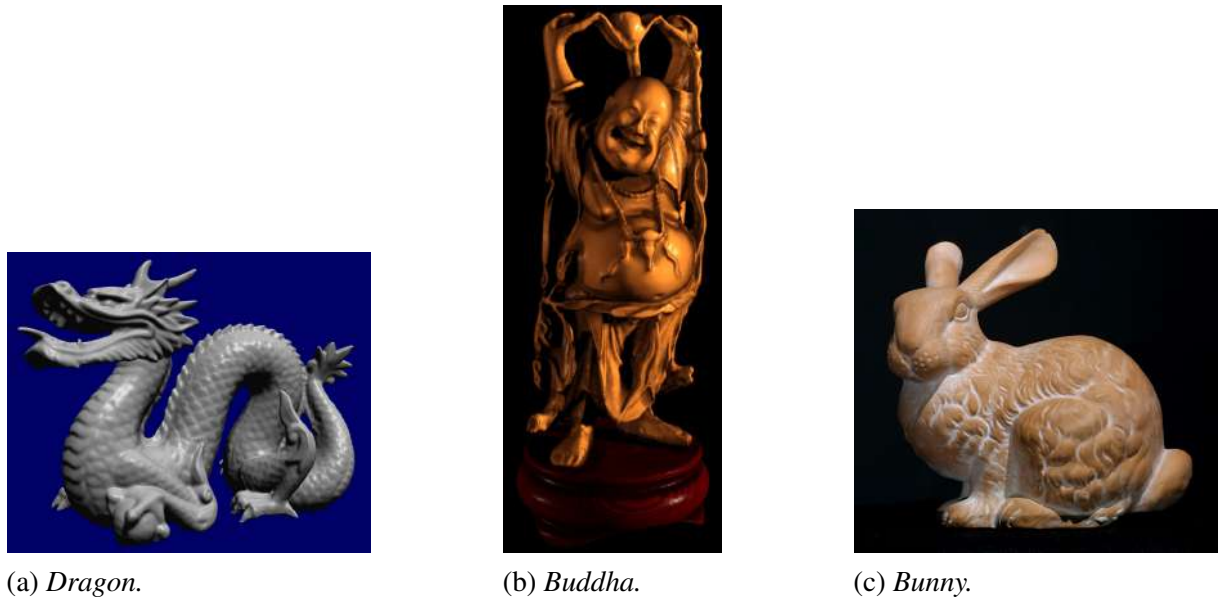
Pré-alinhamento com conjunto de ângulos: uma vez determinado o conjunto de ângulos que obtém a menor distância de Wasserstein, estes são utilizados para a transformação efetiva na nuvem *source* completa, obtendo como resultado o pré-alinhamento. Essa é a única vez no processo de pré-alinhamento que a nuvem *source* sofre uma transformação direta.

Registro final com ICP ponto-ao-plano: aqui, é feito um alinhamento final usando o algoritmo ICP ponto-ao-plano. Note que o algoritmo de registro fino pode ser qualquer um que cumpra a função de registro local, não se limitando ao ICP e seus variantes. Esse processo pode ser realizado em dois modos: (1) fornecendo a nuvem *source* já pré-alinhada ao ICP junto com a nuvem *target*; ou (2) fornecendo os *slices* ao ICP e utilizando a transformação gerada para finalmente transformar completamente a nuvem *source*. É importante frisar que a qualidade do pré-alinhamento afeta diretamente o desempenho do registro utilizado, não só porque pode tornar possível o registro correto em situações que o algoritmo não obteria sucesso, mas também porque isso vai reduzir significativamente o número de iterações necessárias para convergir no registro correto, otimizando o processo do próprio algoritmo de registro fino em questão.

As bases de dados de nuvens de pontos utilizadas para os experimentos são as obtidas em: Stanford (1996), Aleotti, Rizzini & Caselli (2014) e EPFL (2013). A Figura 8 mostra

exemplos de modelos utilizados dessas bases de dados.

Figura 8 – Modelos de exemplo da base de dados Stanford.



Fonte: Stanford (1996).

3.2 Particionamento de Nuvens de Pontos

Entendendo o potencial da distância de Wasserstein para identificar o nível de similaridade entre as nuvens, levantou-se uma questão: seria possível utilizar a métrica para, uma vez que se particiona a nuvem em fatias, detectar o par de fatias com maior similaridade?

A inspiração para essa investigação advém de duas observações principais:

1. É possível obter distância de Wasserstein zero quando as nuvens *source* e *target* são idênticas. Além disso, a distância tende a aumentar à medida que o alinhamento piora. Se é possível extrair de nuvens distintas partições que fossem aproximadamente equivalentes (considerando seu nível de superposição necessário para o alinhamento), então é possível utilizar essa propriedade da distância de Wasserstein para alinhar partes das nuvens e, daí, extrapolar a transformação determinada para a nuvem como um todo.
2. Encontramos na literatura propostas de particionamento das nuvens de pontos originais para redução da complexidade do registro. Ou seja, é entendido que a seleção de regiões das nuvens pode, em uma quantidade considerável de casos, facilitar o processo de alinhamento (Sousa; Soares; Thé, 2022; SOUZA NETO;

Soares; Thé, 2022).

Assim, se for possível determinar automaticamente quais pares de partições são mais similares entre si, podemos obter uma melhoria no registro, baseado na percepção de que correspondências corretas favorecem o registro. Porém, validar se o método identifica corretamente essas correspondências é um desafio, sem o apoio do critério humano. Devido a isso, a avaliação da similaridade encontrada pela técnica é feita a partir da inspeção visual, considerando que o ser humano é capaz de localizar de forma aproximada regiões correspondentes entre as nuvens.

Contudo, a possibilidade de automatização da seleção de partições não é a única questão a ser respondida: é possível que a distância de Wasserstein contribua para o registro de nuvens de pontos, desde que se compare partições similares das nuvens *source* e *target*? Assim, buscou-se inicialmente uma estratégia simples de particionamento das nuvens e uma seleção de pares por inspeção visual. Se esses pares permitissem bons resultados, estaria posta uma evidência de que buscar partições correspondentes entre nuvens permitiria a utilização da distância de Wasserstein para o alinhamento.

O conjunto das questões levantadas leva às seguintes hipóteses: (1) dado que a distância de Wasserstein pode ser utilizada para indicar o alinhamento correto de duas nuvens iguais (quando a distância é teoricamente zero), é possível utilizar a métrica para nortear o alinhamento de duas partições de nuvens equivalentes; e (2) dado que a distância de Wasserstein é uma métrica de dissimilaridade entre duas distribuições de dados e considerando a superposição entre regiões das nuvens *source* e *target*, é possível identificar regiões equivalentes entre as duas nuvens.

A avaliação dessas hipóteses se dá da seguinte forma:

1. verificação de que o alinhamento resultante foi o correto e que, nessas condições, tal alinhamento vem acompanhado de uma redução no valor de distância de Wasserstein, em que, quanto menor o valor (relativamente a outras configurações), mais preciso tende a ser o registro;
2. inspeção do nível de similaridade morfológica das regiões selecionadas para o pré-alinhamento, observando se as regiões com menores distâncias de Wasserstein entre si são as com maior nível de correspondência, favorecendo as que possuem quantidade similar de pontos (a fim de obedecer a restrição do problema de transporte ótimo, que supõe conservação da massa transportada).

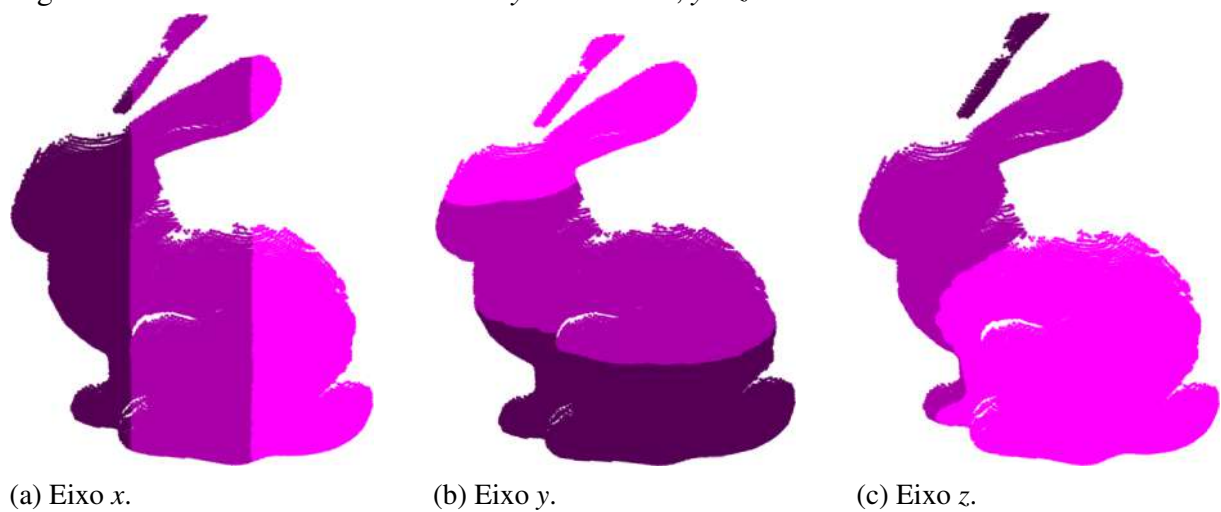
Assim, partiu-se para o primeiro tipo de experimento com o particionamento. O

fatiamento triaxial.

3.2.1 Fatiamento Triaxial

Esta técnica consiste em cortar a nuvem em fatias (ou *slices*) ao longo dos três eixos ortogonais. Isso é feito dividindo-se a imagem num corte perpendicular ao eixo de referência em pontos igualmente espaçados. A Figura 9 mostra um exemplo de nuvem de pontos fatiada nos 3 eixos principais (x , y e z). Cada tom de cor é uma fatia em específico.

Figura 9 – Fatiamento do modelo *Bunny* nos eixos x , y e z .



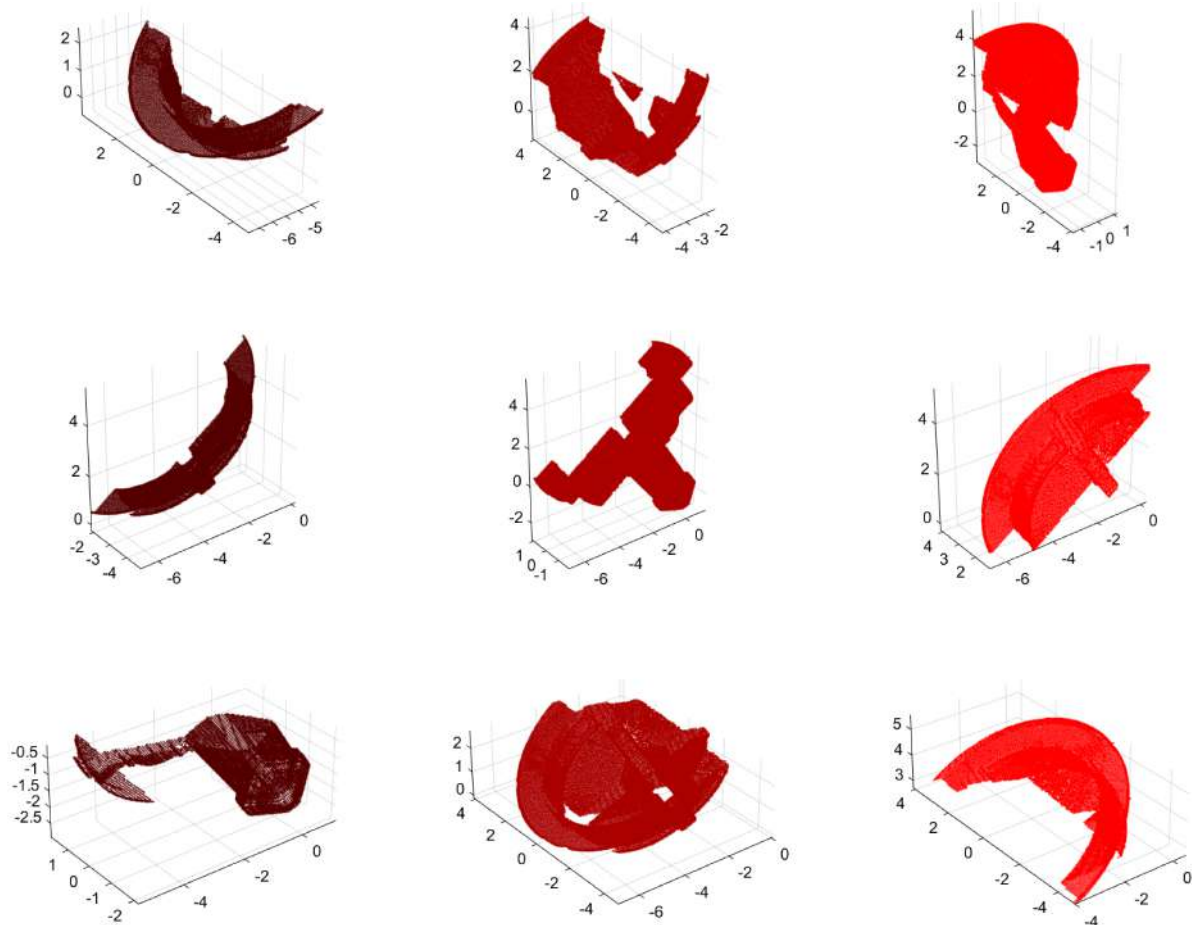
Fonte: o autor.

Como esse processo é feito nos três eixos principais, ele é conhecido como Fatiamento Triaxial. Esse processo é o mesmo aplicado em SOUZA NETO, Soares & Thé (2022), onde é apresentada a técnica *Uniaxial Partitioning Strategy* (UPS), com a diferença que a estratégia deste trabalho utiliza todos os 3 eixos, e não apenas um. A percepção é a de que não há como saber qual o melhor ângulo de corte em uma nuvem cuja orientação inicial não se conhece previamente. Porém, opta-se por segmentar a nuvem ao longo dos eixos principais a fim de observar se há como determinar, entre as duas nuvens, o par de fatias com maior similaridade. Essa é uma estratégia de simples execução, porém tem limitações, pois o ângulo de corte depende da orientação inicial das nuvens. Devido a isso, não é garantido que as fatias obtidas são favoráveis à identificação de similaridade. A perspectiva na utilização desse método é a de que, se for possível detectar similaridade considerável nessas condições, então a distância de Wasserstein demonstra significativa robustez para a identificação de similaridade. Ainda assim, é provável que estratégias diferentes, independentes dos eixos principais, possam tornar a seleção de pares

de partições correspondentes mais refinada, restando avaliar os impactos no custo computacional e no incremento da qualidade do processo, sendo uma natural investigação para aprimorar a técnica proposta neste trabalho, uma vez que estejam confirmadas suas hipóteses.

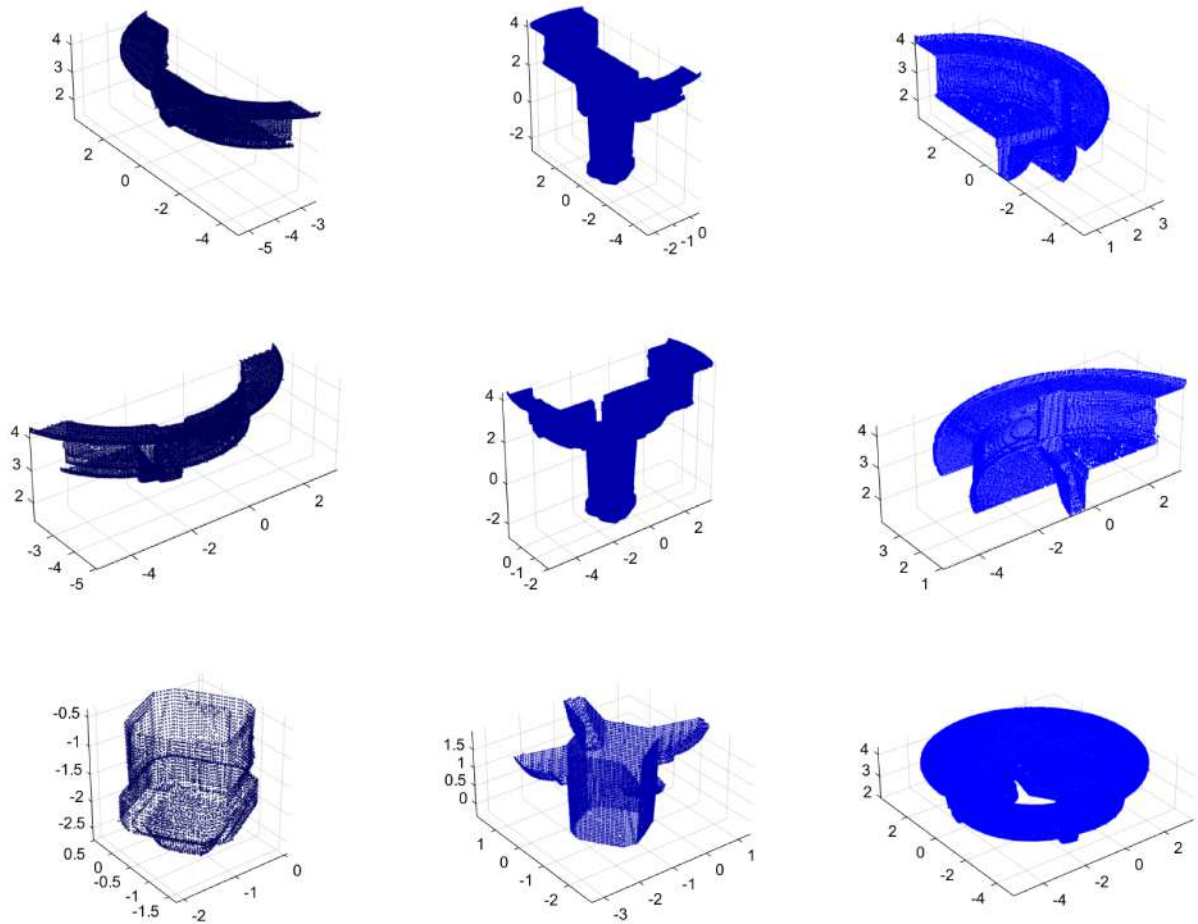
As Figuras 10 e 11 representam, respectivamente, o fatiamento triaxial da nuvem *target* (em tons de vermelho) e *source* (em tons de azul), onde cada linha representa um eixo de corte (respectivamente, x , y e z). Cada eixo foi fatiado em 3 *slices*, resultando em 9 *slices* para cada nuvem. Ambas as figuras servem para ilustrar que é possível, por inspeção visual, encontrar um par de *slices* (um vermelho e um azul) que tenham maior correspondência, embora diversas combinações tenham baixa similaridade. O modelo usado de exemplo (*Fountain*) foi fatiado conforme a configuração inicial apresentada na Figura 12, mantendo as mesmas cores: vermelho para *target* e azul para *source*.

Figura 10 – Resultado do fatiamento triaxial na nuvem *target* do modelo *Fountain*.



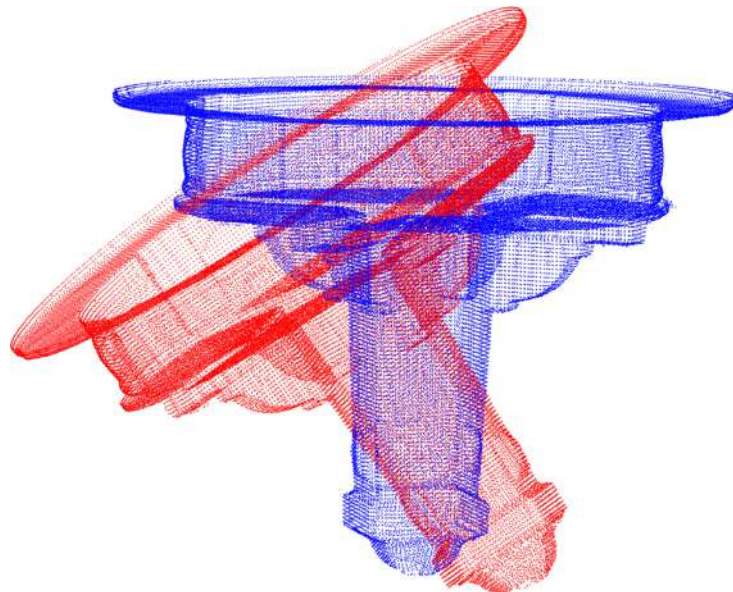
Fonte: o autor.

Figura 11 – Resultado do fatiamento triaxial na nuvem *source* do modelo *Fountain*.



Fonte: o autor.

Figura 12 – Configuração inicial das nuvens *target* (em vermelho) e *source* (em azul) do modelo *Fountain* antes de sofrerem o fatiamento triaxial.



Fonte: o autor.

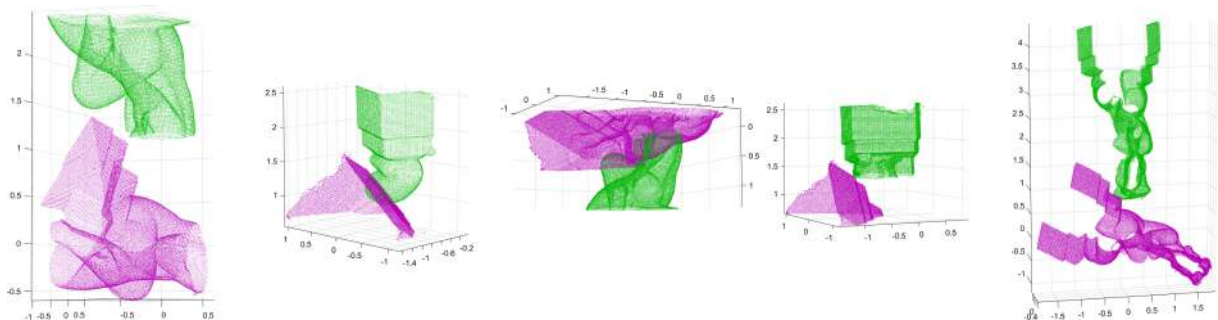
3.3 Seleção de Pares de Slices

Em posse de todos os *slices* obtidos no processo de fatiamento triaxial, testam-se todos os possíveis pares de *slices*, sendo um da nuvem *source* e o outro da nuvem *target*. No caso de 3 *slices* por eixo, tem-se um total de 81 combinações. Para cada uma delas, é calculada a Distância de Wasserstein que representa uma nota de dissimilaridade. Assim, quanto mais baixo o valor resultante, mais similares são os *slices*.

Em seguida, selecionam-se os cinco pares com menores distâncias de Wasserstein. Desses, é escolhido o par com maior equilíbrio em número de pontos. Ou seja, a proporção de pontos entre os *slices* deve ser o mais próxima possível de 1. Esse passo é feito por dois motivos:

1. O problema do transporte ótimo considera a conservação da massa a ser transportada. Assim, as quantidades de massa das duas distribuições comparadas devem ser iguais. Nesse sentido, deve-se favorecer o par que mais se aproxima dessa condição.
2. As nuvens de pontos são modeladas como gaussianas. Descontinuidades nas nuvens (buracos na superfície) ou o plano de corte podem resultar em distorções significativas na matriz de covariância do *slice* em questão, gerando dispersões maiores ou menores num eixo, podendo comprometer a seleção de *slices* correspondentes. A Figura 13 mostra um exemplo dos cinco pares de *slices* com menores distância de Wasserstein para o modelo *Aquarius*. Note que nem todos os pares possuem tamanhos e formas tão aproximados.

Figura 13 – Os cinco pares mais similares segundo o critério da distância de Wasserstein para o modelo *Aquarius*. Os pares estão dispostos em ordem crescente de distância, da esquerda para a direita.



Fonte: o autor.

3.4 Pré-Alinhamento com Rotação Indireta

Esta etapa se utiliza da distância de Wasserstein para determinar qual orientação do *slice source* é mais adequada como pré-alinhamento da nuvem *source* em relação à nuvem *target*. O processo é iterativo e consiste em buscar combinações de ângulos de rotação nos eixos principais (x , y e z) que produzam a menor distância de Wasserstein possível. Durante o desenvolvimento da estratégia, diferentes modos foram criados para realizar essa tarefa, que são apresentados nas próximas subseções.

3.4.1 Busca Exaustiva de Ângulos

A primeira forma empregada para encontrar a rotação adequada como pré-alinhamento foi a busca exaustiva, combinando três ângulos, que variam entre $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]$ e $[360^\circ, 360^\circ, 360^\circ]$, segundo um passo de rotação definido. Em se tratando de uma busca exaustiva com combinação de 3 variáveis, o custo computacional da operação é da ordem de $O(N^3)$ e, portanto, passos curtos demais geram um processo proibitivamente longo. Um teste exploratório foi realizado a fim de determinar passos tão grandes quanto possível sem comprometer o resultado. Foram testados os seguintes passos de rotação: 1° , 5° , 15° , 20° , 30° , 60° , 90° e 120° .

Era esperado que passos muito grandes, como 120° , dessem resultados insatisfatórios pelo fato de serem avaliadas poucas combinações na busca (precisamente 3 para cada eixo, sendo $3^3 = 27$ combinações, apenas). Da mesma forma, era esperado que um passo muito curto, como 1° , resultasse em um pré-alinhamento satisfatório, mas com um número de combinações de $360^3 = 46.656.000$, o que representa um custo computacional proibitivo. Os testes exploratórios mostraram que um passo de rotação de 30° é suficiente para a obtenção de um resultado satisfatório, determinando um processo iterativo de $12^3 = 1.728$ combinações.

Porém, essa é uma estratégia preliminar. É possível otimizar esse processo, uma vez que uma grande parte das combinações de ângulos vai resultar numa distância de Wasserstein alta, comparado ao que se busca no processo. Logo, buscou-se, em seguida, uma estratégia de refinamento da busca.

3.4.1.1 Busca Local-Global

Para reduzir o escopo da busca, foram adotadas duas etapas: uma busca global e uma busca local. Durante a etapa de busca global, é feita a mesma estratégia de busca exaustiva

exposta anteriormente, porém com passo de rotação de 90° , o que dá $4^3 = 64$ combinações. Partindo da combinação de ângulos que gerou a menor distância de Wasserstein, inicia-se a etapa de busca local. Essa busca é feita num intervalo entre -30° a 30° nos três eixos, ao passo de 20° , gerando um total outras $4^3 = 64$ combinações. Caso alguma combinação resulte numa distância de Wasserstein menor ainda, essa configuração é adotada; caso contrário, mantém-se a configuração obtida na busca global. Isso gera um total de 128 tentativas, que é menos de 10% do custo da busca exaustiva inicialmente estipulada.

3.4.2 Validação do Pré-Alinhamento

Para avaliar a qualidade do pré-alinhamento, foram criados diversos cenários de desalinhamento severo, com rotação e translação aleatórias sobre a nuvem *source* antes do processo de registro. É verificado se o ICP sozinho é capaz de alinhar satisfatoriamente e se há um alinhamento satisfatório quando as nuvens passam pelo *pipeline* proposto. Assim, obtém-se duas informações fundamentais: (1) se o pré-alinhamento permite um registro melhor do que o apresentado pelo ICP sozinho; e (2) se a inclusão do pré-alinhamento pode prejudicar de alguma forma o desempenho do ICP, especialmente em casos em que seria obtido resultado satisfatório sem auxílio.

3.5 Configuração de Operação do ICP

Para a realização do registro final, foi escolhido o ICP ponto-ao-plano nas seguintes configurações:

- Máximo de 30 iterações;
- Tolerância de 0,01 para o translado e de $0,5^\circ$ para a rotação;
- Condição de parada: quando a média da diferença em translação e rotação das últimas 3 iterações é menor que a tolerância ou o número total de iterações é maior que o máximo estabelecido.

A escolha desse algoritmo é feita como forma de fixar o algoritmo de registro para padronizar os experimentos. Contudo, é visto nos testes que um algoritmo de registro local que tenha algum nível de similaridade com o ICP é suficiente para o funcionamento da estratégia. Assim, o usuário tem a liberdade de definir o algoritmo que realizará o registro final, sem alteração na estratégia de pré-alinhamento.

3.6 Considerações Finais

Nesse capítulo foram discutidos os detalhes dos experimentos realizados a fim de verificar o potencial da distância de Wasserstein como apoio para o registro de nuvens de pontos. Foi apresentada a estrutura geral do experimento, envolvendo o fatiamento triaxial das nuvens, a seleção de um par de *slices* baseada na distância de Wasserstein, o processo de rotação indireta utilizando a distância de Wasserstein como guia para o pré-alinhamento e o passo de alinhamento final com o ICP ponto-ao-plano. Também foram documentadas as configurações utilizadas para fixar o *pipeline* a fim de controlar o experimento, bem como foram discutidos o processo de otimização da estratégia de pré-alinhamento com a rotação indireta, reduzindo o escopo de busca de 1728 combinações para apenas 128. Além disso, é explicado como se pretende testar a efetividade da distância de Wasserstein em duas frentes: a capacidade da métrica de determinar *slices* similares e a capacidade de determinar a qualidade do pré-alinhamento, garantindo ao algoritmo de registro local robustez contra condições de desalinhamento severo.

No próximo capítulo, são apresentados os resultados desses experimentos e discute-se a viabilidade da distância de Wasserstein como ferramenta, o que abre perspectivas para novas pesquisas visando o aprimoramento do registro de nuvens de pontos.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são discutidos os resultados em duas frentes específicas: (1) sobre a capacidade do uso da distância de Wasserstein para identificar pares de *slices* com nível de similaridade para determinar correspondência; e (2) a possibilidade de adoção do processo de rotação indireta, usando a distância de Wasserstein como critério, como solução para o pré-alinhamento, permitindo o alinhamento mesmo em casos de desalinhamento severo.

4.1 Regiões de Correspondência

Como visto no capítulo anterior, o processo de seleção de *slices* foi feito identificando-se os cinco pares que geraram as menores distâncias de Wasserstein e, partindo deles, escolhe-se o par que tem uma proporção de pontos mais próxima possível de 1. As Figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21 mostram resultados obtidos nesse experimento. Cada par está ordenado, da esquerda para a direita, em ordem crescente de distância de Wasserstein.

Além dessas figuras para avaliação visual, foram organizadas nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 os valores gerados relacionados a cada modelo. As colunas dessas tabelas seguem o seguinte padrão:

- **Par (tgt, src):** essa coluna define a qual par de *slices* geradas pelo fatiamento triaxial a linha se refere. Os valores vem no formato " $(eixo_n, eixo_n)$ ", indicando que eixo de corte foi usado (x , y , ou z) e o valor do índice indica qual *slice* do eixo de corte foi usado. Por exemplo, y_3 indica o terceiro *slice* cortado no eixo y . O primeiro elemento do par representa o *slice* da nuvem *target* (tgt) e o segundo, da nuvem *source*(src);
- **Dist. W:** indica o valor da distância de Wasserstein entre os *slices* do par;
- $|1 - N_{tgt}/N_{src}|$: indica a proporção de pontos ajustada para se aproximar de zero conforme o número de pontos dos dois *slices* se aproximam. Quanto mais os números de pontos se distanciam, mais alto esse valor será.
- A linha destacada representa o par selecionado automaticamente para o registro.

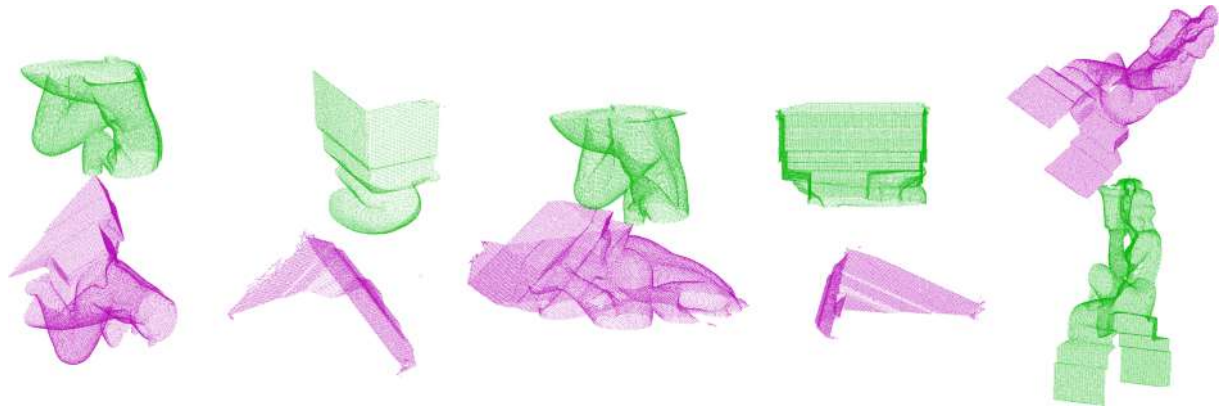
Sendo assim, será discutido cada modelo em separado.

4.1.1 Fatiamento Aquarius

O modelo *Aquarius* apresenta de forma mais clara as limitações de um fatiamento dependente dos eixos principais quando o processo de registro não traz qualquer garantia sobre as

orientações das imagens. Isso porque, apesar de todos os pares apresentarem alguma similaridade semântica, é notório que alguns deles não apresentam uma equivalência visual. Aqui entende-se por “similaridade semântica” a proximidade que os *slices* apresentam no que se refere à região específica do modelo, sem necessariamente terem formas iguais. Por exemplo: o segundo e o quarto pares da Figura 14 estão comparando pedaços da base da estátua (similaridade semântica), mas a forma do corte faz com que ambos os *slices* sejam consideravelmente diferentes em sua forma.

Figura 14 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Aquarius*



Fonte: o autor.

Além disso, exceto pelo quinto par (que fora selecionado), a relação entre os pontos determinada na terceira coluna da Tabela 1 está desproporcional, estando duas ordens de grandeza acima do par selecionado. A diferença quantitativa também se apresenta visualmente, uma vez que o par selecionado é o que detém a maior semelhança visual e a escolha foi compatível com o que seria escolhido pela inspeção visual.

Tabela 1 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Aquarius*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(x_2, z_2)	1.4651e-01	2.1235e-01
(z_3, x_1)	2.2595e-01	1.2753e-01
(z_2, z_2)	4.1601e-01	5.2665e-01
(z_3, z_3)	4.8218e-01	6.4270e-01
(y_2, y_2)	5.1533e-01	2.3174e-03

Fonte: o autor.

4.1.2 Fatiamento *Buddha*

O modelo *Buddha* é um dos que possuem bastante detalhes e ranhuras. Porém, mesmo assim, a modelagem como gaussianas permite ao processo de seleção operar sem problemas. Isso também sugere a robustez da distância de Wasserstein para uso em nuvens de pontos com superfícies com muitos detalhes.

Na Figura 15, alguns pares foram rotacionados para tornar a organização da imagem mais conveniente, porém, ainda é possível perceber que os cinco pares selecionados são consideravelmente similares ao olho nu.

Figura 15 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Buddha*



Fonte: o autor.

Já a Tabela 2 mostra que, apesar de os pares terem uma proporção de pontos com ordem de grandeza similar, há diferenças nas proporções de pontos entre cada par, sendo um par mais próximo de zero. Todos os pares seriam considerados similares em uma inspeção visual. Assim, a seleção automática foi satisfatória.

Tabela 2 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Buddha*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(z_2, z_2)	6.2341e-06	4.0498e-02
(x_3, x_3)	1.4260e-05	1.9121e-02
(z_3, z_3)	1.6934e-05	2.1351e-02
(z_1, z_1)	1.8490e-05	6.4715e-02
(x_2, x_2)	2.0110e-05	6.4411e-02

Fonte: o autor.

4.1.3 Fatiamento *Bunny*

O modelo *Bunny* apresentou *slices* com alta similaridade visual. Porém, mesmo na inspeção visual, é notável que há uma diferença nos ângulos de captura do modelo. Essa diferença gera a percepção de que detalhes de uma subnuvem se mostram ausentes na outra e vice-versa. Ou seja, existem regiões dentro dos *slices* que não deveriam estar no corte, pois não são correspondentes, o que mais uma vez expõe a limitação desse método de fatiamento.

Figura 16 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Bunny*



Fonte: o autor.

Contudo, o segundo e o terceiro par possuem, visualmente, uma proporção de número de pontos parecida. Essa percepção pode ser confirmada na Tabela 3, sendo esses os pares mais próximos da proporção ideal. No entanto, esses dados nos mostram que o terceiro par é ligeiramente mais próximo do ideal e, portanto, o mais adequado. Essa seleção corresponde com a percepção visual, mostrando-se novamente satisfatória.

Tabela 3 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Bunny*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(x_2, x_2)	1.5599e-04	1.1465e-01
(y_1, y_1)	4.6245e-04	6.8540e-02
(y_2, y_2)	4.8662e-04	1.5228e-02
(x_1, x_1)	6.5278e-04	2.0557e-01
(y_3, y_3)	8.0578e-04	1.2762e-01

Fonte: o autor.

4.1.4 Fatiamento Dragon

A Figura 17 mostra os pares de *slices* selecionados para o modelo *Dragon*. É notável que, assim como no caso do modelo *Bunny*, todos os pares trazem um alto grau de similaridade visual.

Figura 17 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Dragon*



Fonte: o autor.

Desta vez, como visto na Tabela 4, as diferenças nas proporções foram pequenas e os três primeiros pares tiveram valores muito parecidos, sendo o terceiro par selecionado. Aqui, todos os pares poderiam ser selecionados em uma inspeção visual. Considera-se, portanto, a seleção automática satisfatória.

Tabela 4 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Dragon*

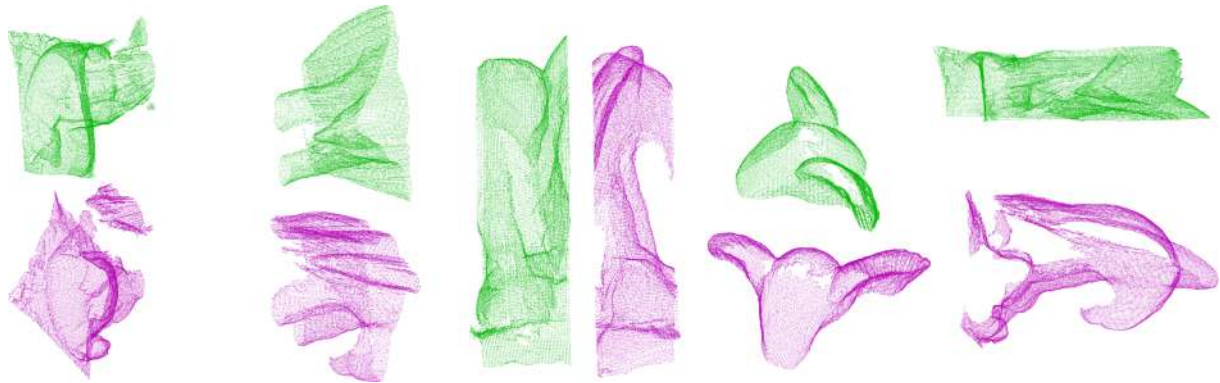
Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(x_2, x_2)	1.0819e-04	1.3741e-01
(z_1, z_1)	3.3736e-04	1.4993e-01
(z_3, z_3)	3.9963e-04	1.2688e-01
(z_2, z_2)	4.3107e-04	2.0199e-01
(x_1, x_1)	5.0687e-04	2.5179e-01

Fonte: o autor.

4.1.5 Fatiamento Eagle

O modelo *Eagle* também gerou alta similaridade semântica em todos os pares. Contudo, é visível que, pelo ângulo de corte, o terceiro e o quinto par apresentam consideráveis diferenças. Os outros três pares possivelmente seriam aprovados em uma inspeção visual.

Figura 18 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Eagle*



Fonte: o autor.

Já a Tabela 5 mostra exatamente que o terceiro e o quinto par apresentam os piores condicionamentos em termos de proporção de pontos, enquanto os outros três são consideravelmente similares nesse quesito. O par escolhido foi o quarto, o que é um resultado satisfatório. Além disso, nota-se que o par escolhido apresentou distância de Wasserstein na ordem de 10^0 , o que parece ser uma distância alta, considerando os valores de outros pares selecionados. Mas é preciso lembrar que a métrica depende da posição e orientação originais das nuvens, o que pode causar essa discrepância de ordem de grandeza. Por isso, a análise da distância de Wasserstein nessa aplicação deve ser relativa aos valores de distância obtidos entre os outros pares avaliados. Não parece haver um limiar experimental de contexto geral em que se possa dizer com segurança que, inferior a esse valor, a distância de Wasserstein identifica um par de *slices* com correspondência aceitável pelo critério da inspeção visual.

Tabela 5 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Eagle*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(y ₃ , y ₃)	4.7044e-01	2.0690e-04
(y ₂ , y ₂)	4.9634e-01	3.9895e-04
(z ₂ , z ₂)	9.9328e-01	1.6794e-01
(y ₁ , y ₁)	1.0018e+00	1.8634e-04
(x ₂ , z ₂)	1.1090e+00	7.9050e-02

Fonte: o autor.

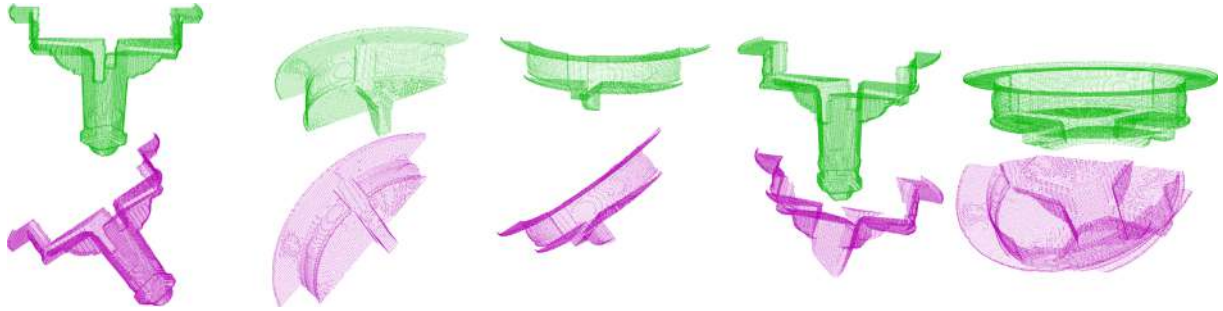
4.1.6 *Fatiamento Fountain*

O modelo *Fountain* possui uma característica importante: apresenta simetria em relação à sua coluna central, perpendicular à base. Por um lado, isso parece positivo, pois é possível achar pares correspondentes com mais facilidade, uma vez que outro ângulo de corte

pode servir tão bem quanto. Contudo, a simetria pode confundir algoritmos de registro, levando-os a caírem em um mínimo local com mais facilidade. Dito isso, *slices* cujo ângulo de corte elimine, ainda que parcialmente, essas simetrias, podem facilitar o alinhamento.

A Figura 19 mostram pares com alta similaridade em termos semânticos. Porém, os pares quatro e cinco não são tão similares, à medida que um *slice* parece uma parte do outro e não dois *slices* aproximadamente iguais.

Figura 19 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Fountain*



Fonte: o autor.

A Tabela 6 mostra que o primeiro par tem a melhor proporção de pontos e, portanto, foi escolhido, o que é um resultado satisfatório.

Tabela 6 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Fountain*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(y ₂ , y ₂)	3.3083e-01	1.5060e-03
(y ₃ , y ₃)	1.2475e+00	3.3634e-02
(y ₁ , y ₁)	1.2920e+00	3.1292e-02
(x ₂ , x ₂)	1.7201e+00	3.0584e-01
(z ₂ , z ₃)	2.5589e+00	2.4396e-01

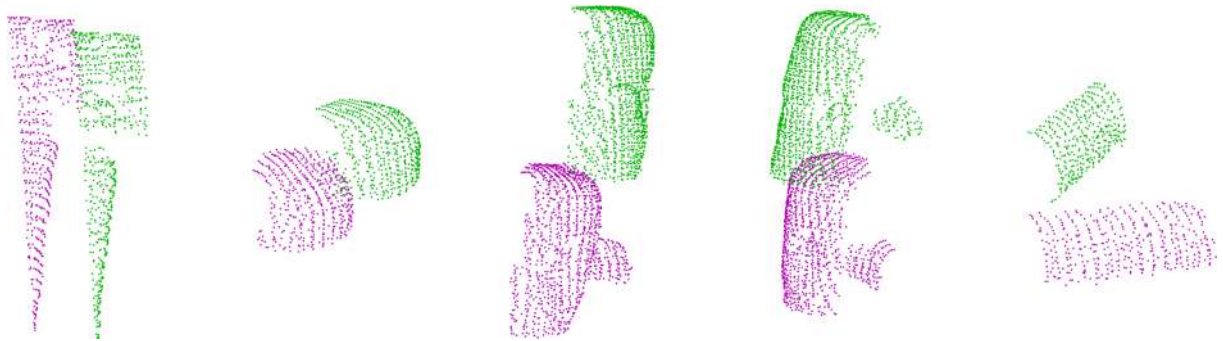
Fonte: o autor.

4.1.7 *FatiamentoHammer*

A Figura 20 mostra os pares de *slices* obtidos do modelo *Hammer*. Esse modelo possui como peculiaridade um número muito pequeno de pontos se comparado aos outros (cerca de 2 mil pontos cada nuvem). Porém, isso não impediu a estratégia proposta de encontrar pares de *slices* com alta similaridade, tanto semântica (representam a mesma região do modelo), quanto em termos de forma (são visualmente similares). Os cinco pares apresentam duas subnuvens visualmente muito parecidas e poderiam ser selecionadas por um ser humano.

Além disso, a Tabela 7 mostra que até as proporções da maioria dos pares foram

Figura 20 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Hammer*



Fonte: o autor.

muito similares, sendo que apenas o quinto par tem uma ordem de grandeza de diferença (10^{-2} em oposição à ordem de grandeza dos demais de 10^{-1}), sendo, portanto, o par selecionado. Nota-se que a similaridade entre os pares é tão acentuada que todos os valores de distância de Wasserstein são próximos. Assim, a seleção feita pela estratégia é satisfatória.

Tabela 7 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Hammer*

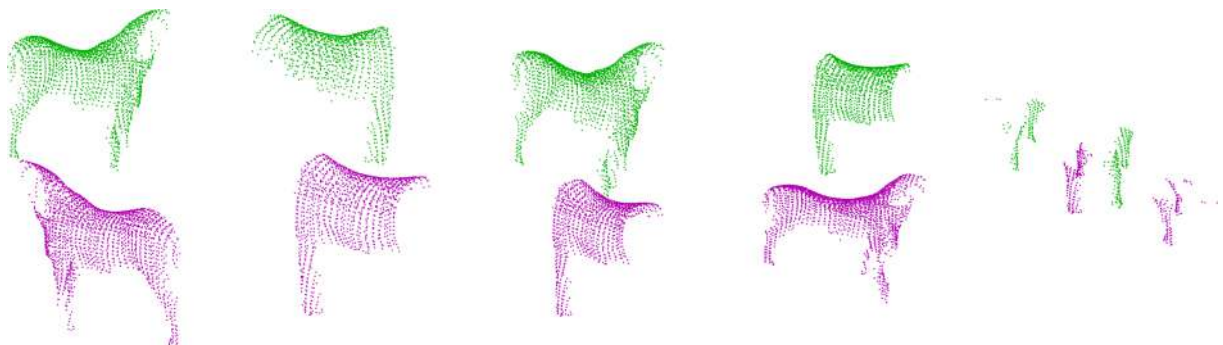
Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(z_2, z_2)	2.0081e-03	1.5257e-01
(z_3, z_3)	2.2824e-03	1.7667e-01
(y_1, y_1)	2.4609e-03	1.9663e-01
(y_1, x_3)	2.4692e-03	2.2230e-01
(y_2, y_2)	2.6920e-03	2.3316e-02

Fonte: o autor.

4.1.8 Fatiamento *Horse*

O modelo *Horse* (figura 21) apresenta pares semanticamente similares, porém, a forma de corte mostra que o terceiro e o quarto par são consideravelmente diferentes. Já os dois primeiros pares apresentam similaridade visual perceptível.

Figura 21 – Os cinco pares de *slices* mais similares do modelo *Horse*



Fonte: o autor.

Curiosamente, a proporção mostrada na Tabela 8 para os dois primeiros pares é zero. Isto não é uma aproximação numérica. Ambos os pares obtiveram *slices* com exatamente o mesmo número de pontos (exatamente 2086 e 1268 pontos, respectivamente). Esse é o caso em que, após o registro final, espera-se ser possível avaliar a qualidade do registro, pois os dados sugerem que são *slices* perfeitamente correspondentes. Idealmente, para esse caso, a distância de Wasserstein calculada comparando os dois *slices* após o registro será zero, denotando um alinhamento de qualidade máxima.

A seleção automática foi o do primeiro par, que, além de proporção perfeita de pontos, possui a menor distância de Wasserstein. Naturalmente, é um resultado satisfatório.

Tabela 8 – Resultados obtidos com os pares de *slices* do modelo *Horse*

Par (tgt,src)	Dist. W	$ 1 - N_{tgt} / N_{src} $
(x_2, x_2)	4.8388e-04	0.0000e+00
(y_2, y_2)	8.5362e-04	0.0000e+00
(y_2, x_2)	1.3391e-03	3.9214e-01
(x_2, y_2)	1.3391e-03	6.4511e-01
(z_1, z_1)	2.1208e-03	0.0000e+00

Fonte: o autor.

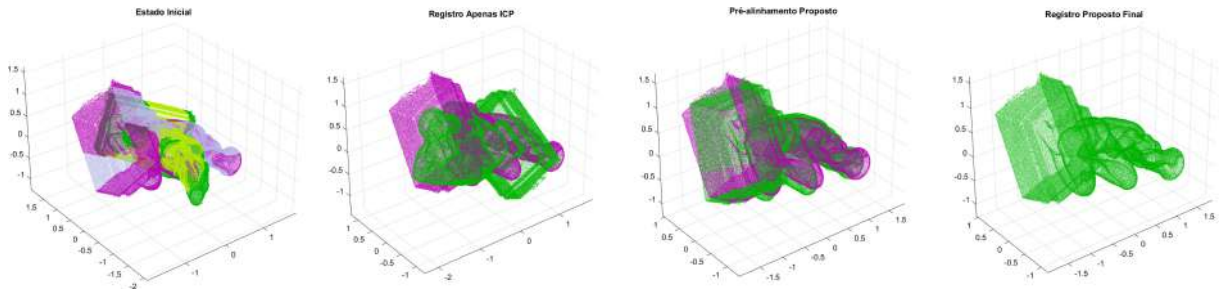
4.2 Registros Obtidos

As Figuras 22 a 29 apresentam os resultados do registro realizado a fim de comparar o desempenho do ICP sozinho com o *pipeline* de registro proposto neste trabalho. Cada figura representa um modelo e possui quatro gráficos observando o seguinte padrão:

- A primeira imagem mostra o estado inicial com desalinhamento severo, mas com os baricentros já centralizados na origem para facilitar a visualização. Note que os *slices* selecionados pelo experimento anterior estão destacados dentro das duas nuvens;
- A segunda imagem mostra o resultado do registro com apenas o ICP ponto-ao-plano;
- A terceira imagem mostra o resultado do pré-alinhamento proposto pelo trabalho;
- A quarta imagem mostra o resultado do registro final, ou seja, o registro com o ICP ponto-ao-plano partindo do resultado obtido na terceira imagem (pré-alinhamento). Note que em alguns modelos, a quarta imagem apresenta apenas uma cor de nuvem de pontos. Isso indica que ambas as nuvens são idênticas e que o registro obteve alinhamento perfeito. Ou seja, as nuvens se sobrepõem completamente.

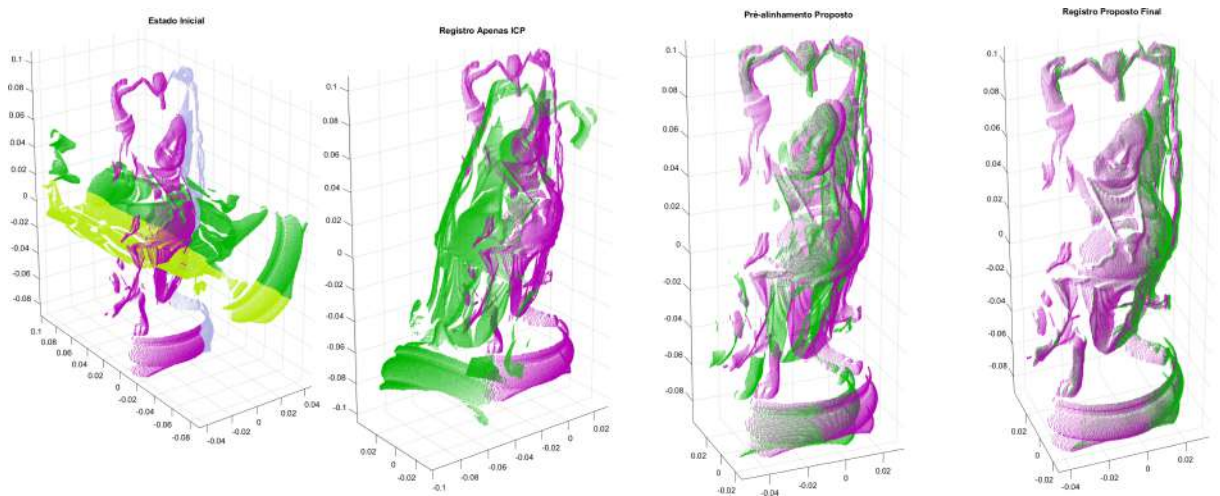
Além disso, a Tabela 9 mostra os resultados numéricos em termos de RMSE e

Figura 22 – Processo de registro do modelo *Aquarius*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



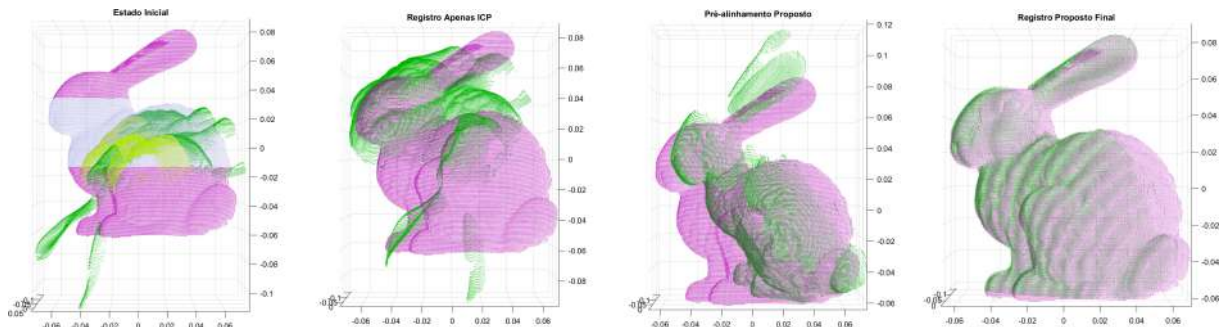
Fonte: o autor.

Figura 23 – Processo de registro do modelo *Buddha*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



Fonte: o autor.

Figura 24 – Processo de registro do modelo *Bunny*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.

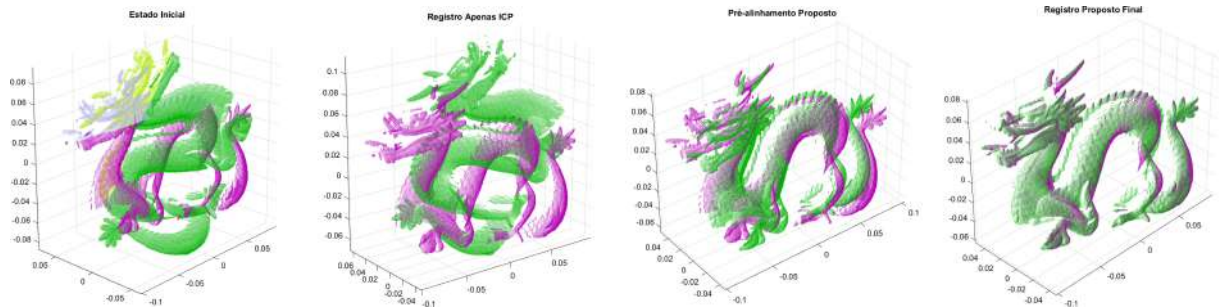


Fonte: o autor.

distância de Wasserstein, gerados nas várias etapas do experimento. As colunas da tabela obedecem o seguinte padrão:

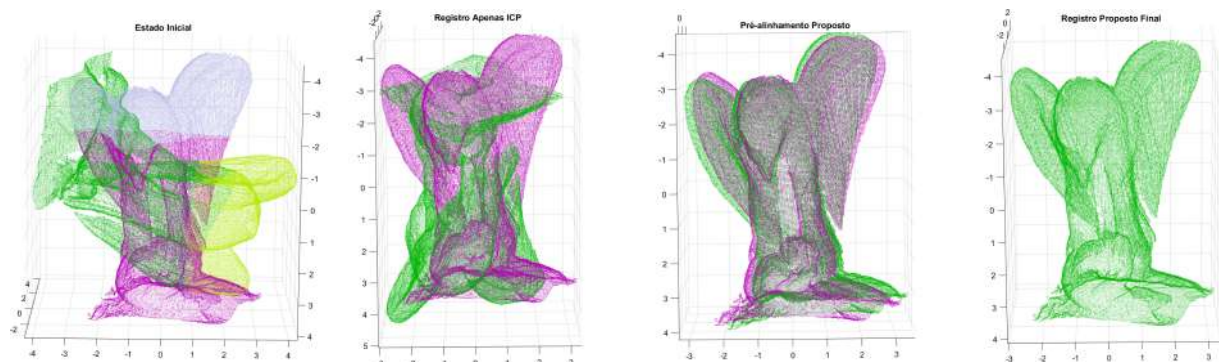
- Modelo: o nome do modelo referente aos valores gerados;
- $RMSE_{ICP}$: o resultado do RMSE obtido no experimento em que o ICP ponto-ao-plano foi usado sozinho para registro.
- $Dist.W_{pre}$: o valor da distância de Wasserstein resultante entre os pares de *slices* após o

Figura 25 – Processo de registro do modelo *Dragon*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



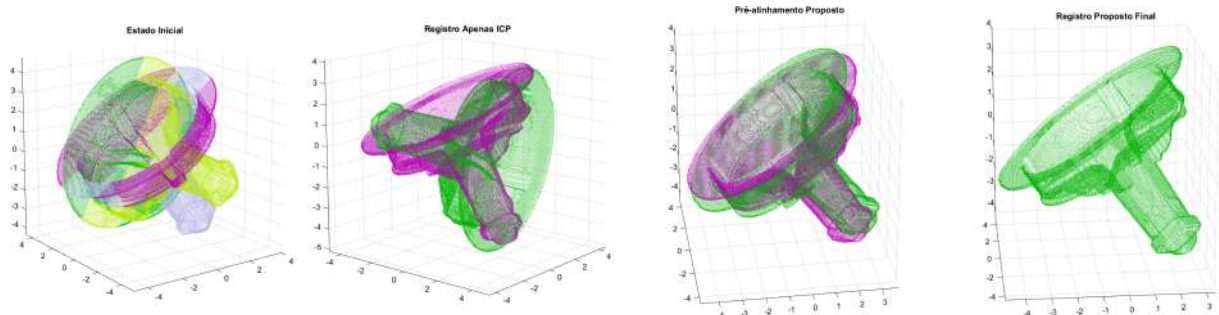
Fonte: o autor.

Figura 26 – Processo de registro do modelo *Eagle*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



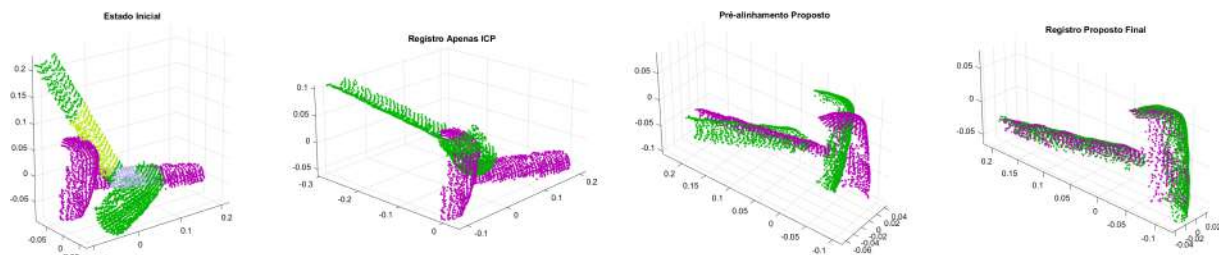
Fonte: o autor.

Figura 27 – Processo de registro do modelo *Fountain*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



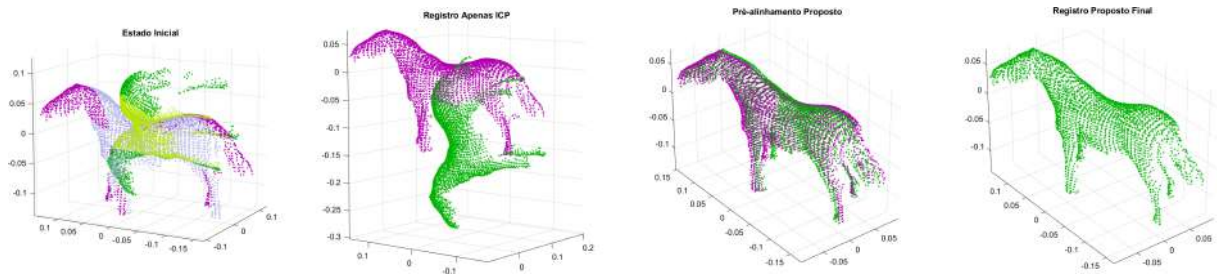
Fonte: o autor.

Figura 28 – Processo de registro do modelo *Hammer*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



Fonte: o autor.

Figura 29 – Processo de registro do modelo *Horse*, apenas com o ICP e com a estratégia proposta.



Fonte: o autor.

pré-alinhamento.

- $RMSE_{final}$: o valor do RMSE obtido pelo ICP ponto-ao-plano no fim do *pipeline* proposto por este trabalho (após o pré-alinhamento);
- $Dist.W_{final}$: o valor da distância de Wasserstein entre os pares de *slices* após o registro final com o ICP ponto-ao-plano;
- $Dist.W_{modelo}$: o valor da distância de Wasserstein entre as nuvens do modelo como um todo após o registro final com ICP ponto-ao-plano.

Note que é esperado que o RMSE após um registro de sucesso seja menor que o de um registro que falhou. Assim, a coluna $RMSE_{final}$ deve ser menor que a coluna $RMSE_{ICP}$, pois o ICP ponto-ao-plano sozinho visivelmente falhou no registro nos experimentos apresentados.

Outra expectativa é que a coluna $Dist.W_{pre}$ apresente sempre valores maiores que a coluna $Dist.W_{final}$. Isso porque o pré-alinhamento, por definição, não pode ser melhor que o alinhamento do registro final. Assim, a distância de Wasserstein relativa aos dois *slices* deve diminuir no decorrer do processo.

A título de comparação, a coluna $Dist.W_{modelo}$ apresenta a distância de Wasserstein do modelo como um todo (comparando a nuvem *source* com a *target*). No caso de nuvens diferentes, não há qualquer padrão esperado sobre o comportamento desse valor em comparação com os outros. Porém, há uma expectativa de que, em nuvens completamente idênticas, a distância de Wasserstein dessa coluna seja um valor muito próximo de zero, o que confirmaria uma das propriedades estudadas da métrica.

4.2.1 Discussão dos Resultados de Registro

Nos experimentos apresentados, o ICP ponto-ao-plano falhou em todos os modelos. Isso mostra a limitação do algoritmo em situações de desalinhamento severo, justificando a necessidade de incluir procedimentos extra no *pipeline* de registro.

Tabela 9 – Resultados obtidos de registro: RMSE e Distância de Wasserstein

Modelo	$RMSE_{ICP}$	$Dist.W_{pre}$	$RMSE_{final}$	$Dist.W_{final}$	$Dist.W_{modelo}$
<i>Aquarius</i>	2.8015e-01	1.5362e-02	1.8043e-07	5.7161e-06	-5.9605e-07
<i>Buddha</i>	2.0411e-02	2.3154e-05	2.4998e-03	1.0816e-04	1.0163e-04
<i>Bunny</i>	1.6733e-02	1.5399e-04	3.2906e-03	2.6155e-04	2.3407e-04
<i>Dragon</i>	1.4566e-02	2.3460e-04	1.7859e-03	1.2230e-05	3.0628e-05
<i>Eagle</i>	7.2222e-01	5.5204e-02	3.3424e-07	1.1130e-06	3.6613e-15
<i>Fountain</i>	9.3493e-01	2.2204e-02	3.6893e-07	2.6148e-03	-6.1989e-06
<i>Hammer</i>	8.5978e-02	4.3737e-04	7.0560e-03	2.5199e-04	1.3070e-03
<i>Horse</i>	7.2878e-02	3.5901e-05	7.7585e-09	-2.9104e-09	-8.1491e-09

Fonte: o autor.

Além disso, em cada um dos experimentos, o pré-alinhamento entregou uma configuração praticamente alinhada. Isso mostra o potencial da distância de Wasserstein como métrica norteadora do alinhamento. Este trabalho traz um experimento usando busca exaustiva ou uma busca relativamente otimizada. Uma técnica que indique um processo de otimização exato (como o modelo matemático que determina o algoritmo iterativo de alinhamento do ICP) provavelmente poderia encontrar o ajuste que falta para o registro correto. Isso é promissor, pois sugere que é possível utilizar essa métrica como uma técnica independente, que faria a função tanto de registro Global quanto Local e com complexidade computacional consideravelmente menor que um modelo de *Deep Learning*.

Ademais, esse resultado do pré-alinhamento sugere uma robustez na métrica, pois, mesmo com um processo de particionamento pouco favorável e simples, a distância de Wasserstein pôde nortear o alinhamento com pares de *slices* que possuem grande similaridade, mas podem conter muitas diferenças por causa do ângulo de corte, que pode ser prejudicado pelas condições iniciais do problema.

Como esperado, o RMSE reduz em pelo menos uma ordem de grandeza, quando comparamos o registro sem sucesso do experimento com o ICP ponto-ao-plano sozinho com o registro com sucesso no fim do *pipeline* proposto. Além disso, na maioria dos casos, a distância de Wasserstein entre dois *slices* reduziu, quando se compara o resultado obtido após o pré-alinhamento com o obtido após o registro final. Porém, isso não acontece nos modelos *Bunny* e *Buddha* (eles aumentam). Isso pode ser explicado pela limitação da estratégia de fatiamento, indicando que o corte gerou *slices* com diferenças ainda consideráveis para a distância de Wasserstein. Esse comportamento é observado quando duas nuvens diferentes são rotacionadas entre si. Nem sempre a posição de alinhamento desejável resulta na menor distância de Wasserstein possível. Esse comportamento é importante de ser notado pois mostra a

importância das subnuvens comparadas no processo de alinhamento serem tão similares quanto possível.

Outro resultado importante pode ser notado no caso dos registros de nuvens idênticas (*Aquarius*, *Eagle*, *Fountain* e *Horse*). No fim do processo de registro, a distância de Wasserstein caiu em várias ordens de grandeza, à exceção do modelo *Fountain* (que reduziu em apenas uma ordem de grandeza). Todas elas, com exceção da *Fountain*, possuem uma ordem de grandeza de 10^{-6} ou menor, o que pode ser aproximada como zero. Quando comparados com o modelo completo (última coluna da Tabela 9) a ordem de grandeza da métrica cai ainda mais. Mesmo o modelo *Fountain* cai para 10^{-6} , alguns valores chegam a se tornar negativo, o que pode indicar um valor tão pequeno que a precisão da variável utilizada gerou um valor interpretado como menor que zero. Isso pode indicar que, quanto mais dados (pontos) na comparação, mais confiável é a métrica como qualidade de alinhamento. O mesmo padrão não ocorre em caso de nuvens distintas e, quando consideramos a nuvem como um todo, as diferenças aumentam, causando um aumento da distância de Wasserstein em alguns casos. Esse resultado reforça a importância da correspondência para o registro com a métrica, pois a métrica, enquanto avaliação de qualidade do alinhamento, requer que as nuvens comparadas sejam o mais próximas possível, idealmente, idênticas. Nuvens diferentes não detém essa propriedade, exceto pelas zonas de sobreposição. Assim, deve-se buscar a maior área de equivalência possível entre duas nuvens para obter a uma qualidade superior na avaliação dessa qualidade de registro.

4.3 Considerações Finais

Neste capítulo, foram exibidos os resultados das duas frentes de investigação no experimento. Foi constatado o potencial da distância de Wasserstein de achar correspondências entre duas nuvens distintas. A percepção desse potencial é endossada inclusive pelos casos em que os *slices* eram consideravelmente diferentes, pois tinham forte similaridade no que se refere à semântica da região. Ou seja, mesmo diferentes, se aproximavam com relação à região do modelo que representavam. Isso sugere que a métrica pode nos ajudar a encontrar correspondências apesar das limitações da forma de particionamento utilizada.

Além disso, a distância de Wasserstein também apresentou resultados promissores no que se refere ao registro de nuvem de pontos, sendo o pré-alinhamento capaz de entregar configurações praticamente no estado de alinhamento completo, restando pouco trabalho para o registro fino promovido pelo ICP ponto ao plano, o que reduz o numero de iterações deste

algoritmo para a convergência do alinhamento.

A estratégia também se mostrou eficaz no sentido de trazer robustez a um estado inicial de desalinhamento severo. Tudo isso indica que o refinamento das técnicas e investigações futuras trarão resultados ainda mais satisfatórios, compatíveis com o estado da arte da área de registro de nuvens de pontos 3D.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foi investigada a utilização da distância de Wasserstein em técnicas de alinhamento Global como apoio para o processo de registro de nuvens de pontos 3D. Essa investigação se deu em duas frentes:

1. verificar a possibilidade de usar esta métrica para identificar partições similares e que possam ser usadas como partes correspondentes entre as duas nuvens *source* e *target* para o registro, desprezando-se os pontos das demais regiões das duas nuvens;
2. avaliar a possibilidade de usar a distância de Wasserstein como indicador de qualidade dentro do contexto do pré-alinhamento, buscando-se uma configuração de orientação que contribua para a obtenção de um melhor registro por um algoritmo de alinhamento Local.

Em condições iniciais de desalinhamento severo, tanto a redução da dimensionalidade do problema, com a seleção de regiões de alta correspondência, como o pré-alinhamento com técnicas de alinhamento Global possibilitam diminuir o custo computacional e aumentar a qualidade do registro realizado por algoritmos de alinhamento Local, como o ICP ponto-ao-plano, que foi utilizados nos experimentos apresentados no capítulo 3.

As hipóteses norteadoras deste trabalho tiveram origem na descoberta inicial de que a distância de Wasserstein resulta em valor zero (ou muito próxima de zero) quando duas nuvens idênticas encontram-se completamente sobrepostas, com a mesma posição e orientação. Isso indica que, encontrando partições de nuvens distintas que possuem alta correspondência, é possível achar uma transformação tal que realize o registro correto através da minimização da distância de Wasserstein. Também é indicado por essa descoberta inicial que a distância de Wasserstein pode indicar a qualidade do registro.

Inicialmente, testou-se a hipótese da distância de Wasserstein ser capaz de nortear o alinhamento de partições similares. Neste primeiro momento, a seleção de *slices* foi feita por inspeção visual e constatou-se ser possível, com esta métrica, aprimorar o processo de registro usando partes correspondentes. O fato de os *slices* das nuvens serem modelados como gaussianas foi explorado como recurso para dispensar a necessidade de partições idênticas, necessitando-se apenas que elas sejam suficientemente similares para possibilitar o registro. Isso também foi favorecido pelo fato de se buscar um pré-alinhamento, não um alinhamento fino preciso. A partir dos resultados obtidos, essa hipótese foi confirmada, pois, de fato, é possível usar a distância de

Wasserstein em conjunto com uma técnica de alinhamento Global simples, visando encontrar uma transformação preliminar que aproxime a nuvem *source* da localização e orientação da nuvem *target*.

Em seguida, avaliou-se a hipótese de também encontrar regiões de correspondência entre partições das nuvens *source* e *target* com o uso da distância de Wasserstein. Para essa verificação, optou-se pelo fatiamento triaxial das nuvens originais para selecionar pares de *slices* compatíveis com o que se pode observar por inspeção visual. Constatou-se que a métrica, auxiliada por uma avaliação do equilíbrio em número de pontos entre os dois *slices*, é capaz de permitir essa seleção compatível com a inspeção visual de forma automática.

A partir das verificações efetuadas neste trabalho, abre-se a perspectiva de elaboração de novas técnicas que realizem um registro completo, dispensando o auxílio de algoritmo de alinhamento Local e que são capazes de determinar regiões de correspondência entre as nuvens *source* e *target* de modo a identificar a região de superposição entre ambas, excluindo pontos fora da correspondência, o que pode impactar consideravelmente a área de pesquisa de registro de nuvens de pontos 3D.

5.1 Trabalhos Futuros

Considerando os resultados deste trabalho, os horizontes para novas investigações podem fornecer estratégias robustas para o registro. Há a possibilidade de aprofundar as pesquisas nas duas frentes de investigação propostas.

Para a seleção de partições correspondentes, por exemplo, é possível tentar estratégias de *clustering* para selecionar regiões com a distância de Wasserstein ou estratégias de fatiamento independentes dos eixos principais. A vantagem das estratégias de *clustering* está na maleabilidade dos formatos das partições, sendo a estratégia *Gaussian Mixture Model* (GMM) uma candidata natural, pois aproveita a modelagem dos dados como um conjunto de gaussianas, gerando assim partições já acomodadas com o método de comparação da métrica. A desvantagem das estratégias de *clustering* está na frequente utilização de elementos aleatórios, o que pode não garantir que as partições ideais sejam sempre selecionadas em diferentes repetições de um experimento. Uma possível forma de contornar essa limitação seria usar a própria distância de Wasserstein como critério para convergência do modelo, em vez de usá-la apenas para a seleção dos melhores pares determinados pela segmentação realizada.

Em relação ao registro Local, as técnicas utilizadas neste trabalho são básicas e

servem para verificar a validade da estratégia de usar a distância de Wasserstein como indicador de qualidade. Entretanto, é possível otimizar o processo e torná-lo mais robusto. Uma candidata natural para investigação é a técnica do gradiente descendente, que pode fornecer a direção da busca (o gradiente) da transformação mais indicada para o estado do problema. Encontrando-se a direção da busca a ser tomada, coloca-se em perspectiva a eliminação de alinhamento Local com outro algoritmo, desde que o processo busque minimizar a distância de Wasserstein até aproximadamente zero, quando a transformação correta será obtida.

Outra possível contribuição futura é a utilização de estratégias obtidas para a seleção de partições correspondentes e utilizá-las para determinar uma nota de qualidade no alinhamento, inclusive para outras técnicas de registro. Essa informação poderia ser utilizada para alimentar modelos de inteligência artificial com treinamento supervisionado a fim de obter modelos de altíssima capacidade de generalização. Com isso, diversos avanços na área de registro ainda não vislumbrados podem ser condicionados.

REFERÊNCIAS

- ALEOTTI, J.; RIZZINI, D. L.; CASELLI, S. Perception and grasping of object parts from active robot exploration. **Journal of Intelligent Robotic Systems**, Springer Science and Business Media LLC, Berlim, v. 76, n. 3–4, p. 401–425, mar. 2014.
- BESL, P.; MCKAY, N. D. A method for registration of 3-d shapes. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, IEEE, Piscataway, EUA, v. 14, n. 2, p. 239–256, fev 1992.
- BHATIA, R.; JAIN, T.; LIM, Y. On the bures–wasserstein distance between positive definite matrices. **Expositiones Mathematicae**, Elsevier, Amsterdã, Holanda, v. 37, n. 2, p. 165–191, jun 2019.
- BRIGHTMAN, N.; FAN, L.; ZHAO, Y. Point cloud registration: a mini-review of current state, challenging issues and future directions. **AIMS Geosciences**, AIMS Press, Singapura, v. 9, n. 1, p. 68–85, 2023. ISSN 2471-2132. Disponível em: <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/geosci.2023005>. Acesso em: 09 jun. 2024.
- BÖRCS, A.; NAGY, B.; BENEDEK, C. Instant object detection in lidar point clouds. **IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters**, IEEE, Piscataway, EUA, v. 14, n. 7, p. 992–996, jul 2017.
- CHEN, Y.; MEDIONI, G. Object modelling by registration of multiple range images. **Image and Vision Computing**, Elsevier, Amsterdã, Holanda, v. 10, n. 3, p. 145–155, mar 1992. ISSN 0262-8856. Range Image Understanding. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026288569290066C>. Acesso em: 14 mai. 2024.
- DAI, Z.; ZHAO, J.; DENG, X.; DUAN, F.; LI, D.; PAN, Z.; ZHOU, M. Cr-net: A robust craniofacial registration network by introducing wasserstein distance constraint and geometric attention mechanism. **Computers & Graphics**, Elsevier, Amsterdã, Holanda, v. 116, p. 194–205, nov 2023.
- EPFL. **Statues Model Repository**. Lausanne, Suíça: [s.n.], 2013. Online. Disponível em: https://lgg.epfl.ch/statues_dataset.php. Acesso em: 11 mar. 2024.
- FIGUEIREDO, J. C.; MARTINS, P. J. O.; SOARES, J. M.; THÉ, G. A. P. Estratégia de particionamento e pré-alinhamento baseado em distância de wasserstein para registro de nuvens de pontos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA), 2024, Rio de Janeiro, **Sociedade Brasileira de Automática (SBA)**, Rio de Janeiro, 2024.
- GOJCIC, Z.; ZHOU, C.; WEGNER, J. D.; WIESER, A. The perfect match: 3d point cloud matching with smoothed densities. In: 2019 IEEE/CVF CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION (CVPR), 2019, Long Beach, **Anais[...]**, Long Beach, Califórnia, 2019, p. 5540–5549.
- HUANG, X.; MEI, G.; ZHANG, J. Feature-metric registration: A fast semi-supervised approach for robust point cloud registration without correspondences. In: 2020 IEEE/CVF CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION (CVPR), 2020, Seattle, **IEEE**, Seattle, Washington, jun. 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.01138>. Acesso em: 03 jun. 2024.

- HUANG, X.; MEI, G.; ZHANG, J.; ABBAS, R. **A comprehensive survey on point cloud registration**. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2103.02690>. Acesso em: 14 mai. 2024.
- JERBIĆ, B.; ŠULIGOJ, F.; ŠVACO, M.; ŠEKORANJA, B. Robot assisted 3d point cloud object registration. **Procedia Engineering**, Amsterdam, v. 100, p. 847–852, 2015.
- KOHLISCH, N.; KOCH, P.; MAY, S. Lidar-based augmented reality for the development of test scenarios on safety for autonomous operation of a shunting locomotive. *In*: 2023 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON AUTONOMOUS ROBOT SYSTEMS AND COMPETITIONS (ICARSC), 2023, Lisboa, **Anais[...]**, Lisboa, Portugal, 2023, p. 23–28.
- LI, P.; WANG, R.; WANG, Y.; TAO, W. Evaluation of the icp algorithm in 3d point cloud registration. **IEEE Access**, Piscataway, NJ, USA, v. 8, p. 68030–68048, 2020.
- LI, P.; ZHAO, L.; XU, D.; LU, D. Optimal transport of deep feature for image style transfer. *In*: PROCEEDINGS OF THE 2019 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MULTIMEDIA SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING, 2019, Chongqing, **Anais[...]**, Chongqing, China, 2019. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:195777097>. Acesso em: 11 jun. 2024.
- MARTINS, P. J. O.; FIGUEIREDO, J. C.; SOARES, J. M.; THÉ, G. A. P. Pré-alinhamento baseado na distância de wasserstein para o registro de nuvens de pontos. *In*: PROCEEDING SERIES OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS. CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA (CNMAC), 2024, Porto de Galinhas, **Anais[...]**, Porto de Galinhas, PE, Brasil, 2024.
- MEI, G.; HUANG, X.; YU, L.; ZHANG, J.; BENNAMOUN, M. **COTReg: Coupled Optimal Transport based Point Cloud Registration**. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2112.14381>. Acesso em: 17 abr. 2024.
- MONGE, G. **Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais**. Paris: Imprimerie Royale, 1781. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IG7CGwAACAAJ>. Acesso em: 22 jun. 2024.
- PAK, J.; SON, H. I. Semantic slam-based autonomous tributary navigation system using 3d lidar point cloud for uav. *In*: 2022 22ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS (ICCAS), 2022, Busan, **Anais[...]**, Busan, South Korea, 2022, p. 1380–1382.
- PARK, J.; ZHOU, Q.-Y.; KOLTUN, V. Colored point cloud registration revisited. *In*: 2017 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION (ICCV), 2017, Venécia, **Anais[...]**, Venécia, Itália, 2017, p. 143–152.
- PEYRÉ, G.; CUTURI, M. Computational optimal transport. **Foundations and Trends in Machine Learning**, Boston, EUA, v. 11, n. 5-6, p. 355–607, 2019.
- PFRUNDER, A.; BORGES, P. V. K.; ROMERO, A. R.; CATT, G.; ELFES, A. Real-time autonomous ground vehicle navigation in heterogeneous environments using a 3d lidar. *In*: 2017 IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS (IROS), 2017, Vancouver, **Anais[...]**, Vancouver, Canadá, 2017, p. 2601–2608.
- POMERLEAU, F.; COLAS, F.; SIEGWART, R. **A Review of Point Cloud Registration Algorithms for Mobile Robotics**. [S.l.]: Now Foundations and Trends, 2015.

POMERLEAU, F.; COLAS, F.; SIEGWART, R.; MAGNENAT, S. Comparing icp variants on real-world data sets: Open-source library and experimental protocol. **Autonomous Robots**, Springer Science and Business Media LLC, v. 34, n. 3, p. 133–148, feb 2013. ISSN 1573-7527. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10514-013-9327-2>. Acesso em: 05 jun. 2024.

SEGAL, A.; HÄHNEL, D.; THRUN, S. Generalized-icp. *In*: ROBOTICS: SCIENCE AND SYSTEMS, 2009, Sattle, **The MIT Press**, Seattle, EUA, 2009. Disponível em: <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/rss/rss2009.html#SegalHT09>. Acesso em: 12 jun. 2024.

SOLTANPOUR, S.; BOUFAMA, B.; Jonathan Wu, Q. A survey of local feature methods for 3d face recognition. **Pattern Recognition**, Amsterdam, Países Baixos, v. 72, p. 391–406, 2017. ISSN 0031-3203. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320317303072>. Acesso em: 20 jun. 2024.

SOUSA, D. A. C.; SOARES, J. M.; THÉ, G. A. P. Uma revisão sobre as abordagens de particionamento e de seleção de regiões relevantes para registro de nuvens de pontos 3d. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA), 2022, Fortaleza, **Sociedade Brasileira de Automática (SBA)**, Fortaleza, v. 3, 2022. Disponível em: https://www.sba.org.br/cba2022/wp-content/uploads/artigos_cba2022/paper_6982.pdf. Acesso em: 07 jun. 2024.

SOUZA NETO, P.; SOARES, J. M.; THÉ, G. A. P. Uniaxial partitioning strategy for efficient point cloud registration. **Sensors**, Basel, Suíça, v. 22, n. 8, Abr. 2022.

STANFORD. **The Stanford 3D Scanning Repository**. 1996. Online. Disponível em: <https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>. Acesso em: 11 mar. 2024.

STEUERNAGEL, S.; KURDA, A.; BAUM, M. Point cloud registration based on gaussian mixtures and pairwise wasserstein distances. *In*: 2023 IEEE SYMPOSIUM SENSOR DATA FUSION AND INTERNATIONAL CONFERENCE ON MULTISENSOR FUSION AND INTEGRATION (SDF-MFI), 2023, Bonn, **Anais[...]**, Bonn, Alemanha, 2023, p. 1–8.

TAKATSU, A. Wasserstein geometry of gaussian measures. **Osaka Journal of Mathematics**, Osaka, Japão, v. 48, p. 1005–1026, 2011.

TANG, T.; TOMIZUKA, M. Track deformable objects from point clouds with structure preserved registration. **The International Journal of Robotics Research**, Los Angeles, Califórnia, EUA, v. 41, n. 6, p. 599–614, Abr 2019.

TOMAR, Y. P. S.; ZELE, R. H. Deep learning-based 3d face recognition using masked facial point cloud. *In*: 2022 INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL, COMPUTER, COMMUNICATIONS AND MECHATRONICS ENGINEERING (ICECCME), 2022, Malé, **Anais[...]**, Malé, Maldivas, 2022, p. 1–6.

XIE, D.; ZHU, W.; RONG, F.; XIA, X.; SHANG, H. Registration of point clouds: A survey. *In*: 2021 INTERNATIONAL CONFERENCE ON NETWORKING SYSTEMS OF AI (INSAI), 2021, Shanghai, **Anais[...]**, Shanghai, China, 2021, p. 136–142.

XU, N.; QIN, R.; SONG, S. Point cloud registration for lidar and photogrammetric data: A critical synthesis and performance analysis on classic and deep learning algorithms. **ISPRS Open Journal of Photogrammetry and Remote Sensing**, Amsterdã, Países Baixos, v. 8, p. 100032, 2023. ISSN 2667-3932. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667393223000030>. Acesso em: 14 mai. 2024.

YANG, J.; LI, H.; CAMPBELL, D.; JIA, Y. Go-icp: A globally optimal solution to 3d icp point-set registration. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Piscataway, EUA, v. 38, n. 11, p. 2241–2254, 2016.

ZENG, A.; SONG, S.; NIEßNER, M.; FISHER, M.; XIAO, J.; FUNKHOUSER, T. 3dmatch: Learning local geometric descriptors from rgb-d reconstructions. *In*: 2017 IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION (CVPR), 2017, Honolulu, **Anais[...]**, Honolulu, Havai, EUA, 2017, p. 199–208.

ZHU, M.; GHAFARI, M.; PENG, H. Correspondence-free point cloud registration with so(3)-equivariant implicit shape representations. *In*: PROCEEDINGS OF THE 5TH CONFERENCE ON ROBOT LEARNING, 2022, [s. l.], **Proceedings of Machine Learning Research (PMLR)** 08–11 Nov, 2022, p. 1412–1422. Disponível em: <https://proceedings.mlr.press/v164/zhu22b.html>. Acesso em: 02 jun. 2024.