UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

DAYANY BARROS FERREIRA

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS COM O RECURSO EDUCACIONAL DIGITAL O REINO DE ALJABAR

FORTALEZA

2024

DAYANY BARROS FERREIRA

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS COM O RECURSO EDUCACIONAL DIGITAL O REINO DE ALJABAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação. Área de concentração: Tecnologias Digitais na Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.
Coorientadora: Profa. Dra. Juscileide Braga de Castro

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F44i Ferreira, Dayany Barros.
Uma investigação sobre o pensamento algébrico nos Anos Iniciais com o recurso educacional digital o Reino de Aljabar / Dayany Barros Ferreira. – 2024.
132 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.
Coorientação: Profa. Dra. Juscileide Braga de Castro .

1. Pensamento Algébrico. 2. Álgebra nos anos iniciais. 3. Recurso Educacional Digital. I. Título.
CDD 370

DAYANY BARROS FERREIRA

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS COM O RECURSOS EDUCACIONAL DIGITAL O REINO DE ALJABAR.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação. Área de concentração: Tecnologias Digitais na Educação.

Aprovada em: 31/07/2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dra. Juscileide Braga de Castro (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Sandra Maria Pinto Magina (Examinadora Externa à Instituição)
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC-BA)

Aos meus pais.

Aos meus alunos, com o desejo de que explorem a beleza e a alegria que a Matemática pode proporcionar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me guiar e dar força ao longo desta jornada. À minha família, minha base, em especial aos meus pais, Domingos Ferreira e Anclé Barros, por todo o amor, apoio e ensinamentos que me trouxeram até aqui. Ao meu esposo, Davino Machado, pela paciência, compreensão e incentivo constantes. À minha irmã, Ingride Barros, que foi meu suporte durante toda a graduação e continua sendo meu porto seguro.

Ao grupo de pesquisa Proativa, que me acolheu com tanto carinho e me proporcionou um espaço de aprendizado e crescimento, deixo minha profunda gratidão. Um agradecimento especial aos meus orientadores, professor José Aires de Castro Filho e professora Juscileide Braga de Castro, por sua orientação, dedicação e confiança em meu trabalho. Vocês me mostraram que a academia pode ser um espaço de troca construtiva e leveza. Aos amigos e colegas que ganhei no grupo, em especial ao querido companheiro de pesquisa, Danilo do Carmo, que esteve presente em tantos momentos importantes dessa trajetória. À professora Sandra Magina, por suas generosas contribuições e prestatividade.

Aos amigos que, com palavras de incentivo e gestos de apoio, me ajudaram a seguir em frente, minha eterna gratidão. Dedico este trabalho aos colegas de profissão que, entre sonhos e desafios, conciliam a sala de aula com a pesquisa acadêmica. Sei que o caminho é árduo, mas também sei que ele é possível. Este trabalho é uma prova disso.

Agradeço especialmente aos alunos, pais e colegas professoras das escolas pesquisadas, que gentilmente abriram espaço para a realização desta pesquisa. E, por fim, aos meus queridos alunos, que são, ao mesmo tempo, a razão, a motivação e a inspiração para cada passo dado nessa caminhada.

RESUMO

A Matemática desempenha um papel importante na preparação dos estudantes para os desafios modernos. Contudo, os estudantes brasileiros têm demonstrado baixo desempenho nessa disciplina, especialmente em Álgebra, conforme indicado pelos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2021. A introdução da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, através do desenvolvimento do Pensamento Algébrico vai além da simples compreensão de símbolos e operações e apresenta-se como uma abordagem promissora para a superação desse problema. Essa implementação é preconizada Base Nacional Comum Curricular, documento que orienta o currículo nas escolas brasileiras, mas enfrenta desafios devido, em parte, à limitação de recursos didáticos. Os recursos educacionais digitais (RED) têm se mostrado como uma estratégia promissora para o ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, ainda são limitados os estudos que envolvem a articulação entre o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças dos anos iniciais com uso das tecnologias digitais. Nesse contexto, o presente estudo investigou o pensamento algébrico de estudantes do 3º e 4º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas municipais de Fortaleza, ao explorar os conceitos de equações, inequações e incógnitas, durante a realização de atividades envolvendo o RED Reino de Aljabar: o Desafio da Balança. Os instrumentos foram compostos por situações-problemas iniciais e finais, diários de campo, videografia, gravação de tela e entrevistas individuais. Os resultados apontam para avanços na capacidade de operar com quantidades desconhecidas, nas estratégias para resolver situações relacionadas à igualdade, desigualdade e incógnita e na leitura e interpretação de sentenças matemáticas utilizando símbolos matemáticos e materiais manipuláveis. Os estudantes também passaram a compreender o símbolo de igual não apenas como um indicador de resultado, mas como uma representação de equivalência entre expressões. Esses resultados contribuem para o entendimento do potencial das tecnologias digitais no ensino de Matemática e na superação de desafios no aprendizado, além de fornecer subsídios para práticas pedagógicas e pesquisas futuras nessa área.

Palavras-chave: pensamento algébrico; álgebra nos anos iniciais; recurso educacional digital.

ABSTRACT

Mathematics plays an important role in preparing students for modern challenges. However, Brazilian students have demonstrated low performance in this subject, especially in Algebra, as indicated by the results of the 2021 Program for International Student Assessment (PISA). The introduction of Algebra in the early years of Elementary School, through the development of Algebraic Thinking goes beyond the simple understanding of symbols and operations and presents itself as a promising approach to overcoming this problem. This implementation is recommended by the National Common Curricular Base (BNCC), a document that guides the curriculum in Brazilian schools, but faces challenges due, in part, to limited teaching resources. Digital educational resources (DER) have proven to be a promising strategy for teaching and learning mathematics. However, studies involving the articulation between the development of algebraic thinking in children in early years with the use of digital technologies are still limited. In this context, the present study investigated the algebraic thinking of students in the 3rd and 4th year of Elementary School at municipal public schools in Fortaleza, by exploring the concepts of equations, inequalities and unknowns, while carrying out activities involving the RED Aljabar Kingdom: the Scale Challenge. The instruments were composed of initial and final problems, field journals, videography, screen recording and individual interviews. The results point to advances in the ability to operate with unknown quantities, in strategies to resolve situations related to equality, inequality and unknowns and in the reading and interpretation of mathematical sentences using mathematical symbols and manipulatives. Students also began to understand the equal symbol not only as an indicator of result, but as a representation of equivalence between expressions. These results contribute to understanding the potential of digital technologies in teaching Mathematics and overcoming learning challenges, in addition to providing support for pedagogical practices and future research in this field.

Keywords: algebraical thinking; early algebra; digital educational resource.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
RED	Recurso Educacional Digital
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do conhecimento que desempenha importante papel na formação de habilidades cognitivas e na preparação para os desafios da vida moderna. No entanto, muitos estudantes apresentam dificuldades na Matemática, o que torna essa disciplina não apenas excludente, mas também um obstáculo à aprendizagem em outras áreas do saber. Em um cenário no qual a proficiência em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) se torna cada vez mais necessária, as dificuldades em Matemática podem criar um *déficit* no desenvolvimento de competências essenciais para a formação de cidadãos preparados para as demandas da sociedade contemporânea (Coelho; Aguiar, 2018; Ontario, 2013; Lins; Gimenez, 1997).

Dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) realizado em 2018, que avaliou estudantes do ensino médio com 15 anos de idade, mostram que a proficiência média dos estudantes brasileiros em Matemática foi de 384 pontos, abaixo da média dos países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que alcançaram 492 pontos. Em uma escala de 1 a 6, apenas cerca de 31,8% dos estudantes brasileiros atingiram o Nível 2 ou superior em Matemática, o que revela um baixo desempenho nessa área. O Nível 2 é considerado o nível básico de proficiência para novas oportunidades de aprendizado e participação plena no contexto social, econômico e cívico da sociedade moderna globalizada (Brasil, 2021). Os resultados do PISA indicam que os estudantes brasileiros enfrentam desafios significativos, especialmente no que diz respeito à Matemática, uma área em que essas dificuldades se aprofundam é a Álgebra.

O domínio de conceitos algébricos é fundamental para o desenvolvimento de habilidades matemáticas avançadas e do pensamento crítico, com implicações em diversas áreas acadêmicas e profissionais (Lins; Gimenez, 1997; Ontario, 2013). No entanto, à medida que os níveis de proficiência no PISA aumentam, a participação dos alunos brasileiros em pensamento algébrico mais elaborado diminui. Nos níveis 5 e 6, que envolvem habilidades de conceitualização, operações matemáticas simbólicas, modelagem e abordagens estratégicas, a representação dos alunos brasileiros é quase inexpressiva, 0,8% e 0,1% respectivamente (Brasil, 2021).

As dificuldades frequentemente enfrentadas por alunos em relação ao aprendizado da Álgebra podem ser atribuídas a uma série de fatores interligados. Um desses fatores é a abordagem centrada em algoritmos sem significado concreto, na qual letras e números são manipulados sem uma compreensão clara de sua representação (Lins; Gimenez, 1997;

Canavarro, 2007). Outro fator é a transição abrupta da aritmética para a álgebra, uma vez que a aritmética lidaria, principalmente, com números concretos e operações básicas, enquanto a álgebra ficaria relegada às abstrações e relações mais complexas. Nessas perspectivas, os primeiros anos de escolarização são dedicados ao desenvolvimento de uma boa base de aritmética, para só então, iniciar a aprendizagem à álgebra. (Lins; Gimenez, 1997; Carraher, Schliemann; Brizuela, 2001; Canavarro, 2007)

Na busca por superar tais dificuldades, que não são apenas de estudantes brasileiros, a abordagem de *Early Álgebra* começou a ganhar destaque nos anos 1990. Estudos têm demonstrado que crianças pequenas são capazes de construir conhecimento em Matemática, incluindo Álgebra, de maneira mais profunda do que muitas vezes é abordado nas escolas (Lins; Kaput, 2004; Sibgatullin, et al., 2022).

Na abordagem da *Early Álgebra*, a ideia principal não é que os conteúdos de álgebra sejam prematuramente antecipados às crianças menores, mas que seja promovido, desde muito cedo (Carraher; Schliemann; Schwarz, 2008). Esta proposta visa favorecer o desenvolvimento de um tipo de pensamento ativo, flexível e transversal aos mais diversos campos da matemática, o pensamento algébrico (Canavarro, 2007). Esse pensamento interconectado e abrangente tem especial ênfase na noção de generalização, um componente central que caracteriza o pensamento matemático. Assim, o propósito não é simplesmente aprimorar as habilidades de manipulação algébrica nas crianças, pois considera que a habilidade técnica, o simbolismo algébrico, representa somente uma parte do panorama e não é o objetivo primordial de álgebra (Carraher; Schliemann, 2010; Lins; Kaput, 2004; Coelho; Aguiar, 2018)

No Brasil, a introdução formal da álgebra nos anos iniciais (1º ao 5° ano), se deu a partir da promulgação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018). A partir de então, professores, alunos e recursos didáticos, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, passaram a ser gradualmente familiarizados com álgebra, incorporando conceitos relacionados à percepção e ao estabelecimento de padrões e regularidade, às propriedades das operações e ao sinal de igualdade, às ideias de proporcionalidade e equivalência, entre outros.

O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) abre oportunidades para aprimorar o ensino de Matemática, permitindo representações múltiplas e dinâmicas. A contínua evolução da TDIC na esfera educacional abre perspectivas nos processos de ensino e de aprendizagem, tornando mais acessível o alcance de informações. Esse avanço encontra aplicação no campo do ensino da Matemática, no qual pesquisas apontam benefícios tanto para o aprendizado dos alunos (Castro, 2012, Souza, 2019, Ribeiro; Paz, 2012), quanto para a ampliação das alternativas de recursos que fomentam as múltiplas representações de conceitos matemáticos (Freire, 2007; Pope; Mangram, 2015, Castro Filho, Castro; Freire, 2021, Amado, 2022).

O uso de múltiplas representações vai além de proporcionar diferentes estilos de aprendizagem. Ele possibilita o desenvolvimento de um conceito de maneira mais abrangente. De acordo com Vergnaud (1997), em sua Teoria dos Campos Conceituais, um conceito é composto por uma tríade de situações, representações e invariantes. Portanto, quanto mais representações um estudante dominar, maior será a profundidade de seu entendimento do conceito.

Desse modo, ao se apresentar conceitos algébricos por meio de uma variedade de representações, os alunos têm a oportunidade de conectar os conceitos a diferentes perspectivas e tornar seu entendimento mais sólido e abrangente. Isso também pode ajudar a tornar a matemática mais compreensível para os alunos, facilitando a transição entre diferentes formatos de problema e ajudando-os a visualizar melhor as relações matemáticas. (Freire, 2007; Canavarro, 2007; Amado, 2022). Os alunos podem raciocinar e verificar suas suposições observando como as interações com as representações afetam o que muda e o que permanece igual (Amado, 2022).

O recurso "Balança Interativa" desenvolvido nos anos 2000 (Castro, 2007) exemplifica como o uso das tecnologias digitais pode ampliar as possibilidades de representações em matemática. O recurso consistia em, por meio da manipulação de uma balança digital de dois pratos, fazer com que os alunos fossem instigados a construir conhecimentos algébricos. Em formato de jogo, com níveis de evolução gradual, o desafio constava de encontrar pesos de valores desconhecidos por meio da manipulação de pesos conhecidos e, observações sobre o equilíbrio ou desequilíbrio da balança; usando para isso, o mínimo de movimentos possíveis (Leite, 2006; Castro-Filho et. al., 2006; Macedo, 2008).

Freire e Castro Filho (2006) e Freire (2007) desenvolveram estudos com o Balança interativa visando investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos do 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Foram desenvolvidas atividades com e sem o uso do recurso digital para ajudar os alunos a formularem conceitos algébricos, como equivalência, incógnitas, igualdade e desigualdade. Os trabalhos apontam para a possibilidade de crianças pequenas pensarem algebricamente com o uso de materiais didáticos envolvendo o Balança Interativa e materiais manipulativos. Destacam a vantagem de se usar o recurso digital, tendo em vista a possibilidade de criação de hipóteses sobre a relação dos pesos, sem usar um valor aproximado a partir do seu peso real, como acontecia com a balança física, movimento que se assemelha mais com o pensamento algébrico que a estimativa.

o Recurso Educacional Digital (RED) **Reino de Aljabar, o desafio da Balança**[1] é uma versão atualizada do Balança Interativa. O RED mantém a metáfora da balança e incorpora uma contextualização, elementos de gamificação e as habilidades propostas na BNCC (Castro Filho et al., 2021).

No entanto, o RED ainda não foi estudado em termos de sua viabilidade pedagógica com professores e alunos. Diante das potencialidades apresentadas anteriormente para o ensino e aprendizagem de conceitos iniciais de álgebra, surge a necessidade de realizar pesquisas com o recurso.

Nas escolas brasileiras, a abordagem da *Early Álgebra* está em estágio inicial, emergindo como um território promissor para a investigação. Assim, a interseção entre a abordagem *Early Álgebra* e o uso estratégico de recursos digitais pode ampliar a compreensão sobre o desenvolvimento de habilidades do pensamento algébrico nos anos iniciais, e colaborar com a superação de desafios no ensino e aprendizagem de Matemática, além de, oportunizar entendimentos relevantes para educadores e futuras pesquisas. Dado o exposto, a pergunta norteadora desta pesquisa se delineia: Como o uso do recurso educacional digital "O Reino de Aljabar" pode colaborar para o pensamento algébrico de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental?

Durante minha formação em Pedagogia, tive a oportunidade de acompanhar estudos que exploraram a pesquisa, produção e utilização de recursos digitais em processos educacionais. Essas experiências me proporcionaram a compreensão das possibilidades que esses recursos podem trazer para a educação. Somado a isso, minha atuação como professora pedagoga nos anos iniciais do Ensino Fundamental nos últimos anos me permitiu estar diretamente envolvida com o ensino e a aprendizagem. Assim, pude perceber as dificuldades enfrentadas por alunos e professores no que diz respeito a conceitos matemáticos. Essa vivência reforçou a importância de abordagens inovadoras para superar desafios nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, especialmente quando se trata da recente implementação curricular, como é o caso da Álgebra nos primeiros anos escolares.

Somando a isso, minha recente experiência com pesquisas de inovação digital no programa Cientista-Chefe e a participação no Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem - PROATIVA ampliou minha perspectiva. Essas oportunidades permitiram a exploração de soluções tecnológicas que possam ser incorporadas ao ambiente educacional. Compreendi assim, tanto as dificuldades que os educadores das séries

[1] Disponível em: http://mide-balanca-interativa.netlify.app/

iniciais enfrentam na condução de aulas em Matemática, especificamente ao abordar conceitos algébricos e como a construção desses conceitos e habilidades podem ser favorecidos com a integração de Tecnologias Digitais.

Nesse sentido, o objetivo geral deste estudo foi: investigar o pensamento algébrico em estudantes do 3º e 4º ano do Ensino Fundamental, ao explorar os conceitos de equações, inequações e incógnitas, durante a utilização de recurso analógicos e do RED Reino de Aljabar: o Desafio da Balança. Já os objetivos específicos são: i) verificar quais conhecimentos as crianças apresentam em relação a equações, inequações e incógnitas antes do uso do RED, ii) mapear as estratégias que os alunos utilizaram durantes as atividades; iii) identificar quais mudanças e permanências ocorreram na aprendizagem dos alunos após a utilização dos recurso analógicos e do RED.

Para tanto, foi desenvolvida uma pesquisa, na modalidade de intervenção em uma escola pública municipal de Fortaleza com alunos do 3º e 4º ano, idades entre 7 a 10 anos, com ações planejadas contemplando as seguintes etapas metodológicas específicas: 1) **Situações-Problema Iniciais**: resolução de situações-problema para conhecer as habilidades algébricas dos alunos antes da intervenção; 2) **Intervenções**: utilização de balança de dois pratos e fichas e utilização do RED "O Reino de Aljabar: o desafio da balança"; 3) **Situações-problemas Finais**: resolução de novas situações-problema para identificar as mudanças ocorridas em suas habilidades algébricas.

A coleta de dados aconteceu por meio da utilização de recursos variados: a**)** **registros das crianças**: pré e pós-testes e registros digitais do recurso; b) **diário de campo**: anotações sobre as interações e comportamentos dos alunos durante as sessões de intervenção; c) **videografia:** registro em vídeo das sessões para análise detalhada posterior; d) **gravação de tela dos computadores:** durante o jogo dos alunos, a tela dos computadores foi gravada para documentar suas interações e desempenho; e) **entrevistas:** entrevistas individuais foram conduzidas com as crianças para compreender suas percepções e estratégias durante todas as atividades de intervenções, pré e pós-teste, balança convencional de dois pratos e RED.

Com a intenção de atender aos propósitos delineados, este projeto organiza-se em capítulos que oferecem uma abordagem sistemática do tema investigado. O primeiro capítulo é dedicado ao referencial teórico, apresentando uma análise dos fundamentos conceituais e teóricos que embasam a pesquisa, com especial atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico e às abordagens da *Early Algebra*, com base em autores como Kaput (2008), Canavarro (2007), Carraher, Schliemann e Brizuela (2001). No segundo capítulo, realiza-se um panorama do estado da arte, reunindo e discutindo os principais estudos e avanços relacionados ao uso de recursos educacionais digitais no ensino da matemática, com destaque para contribuições de Freire (2007), Castro Filho e Freire (2021) e Amado (2022). O terceiro capítulo, por sua vez, descreve os procedimentos metodológicos empregados, detalhando o desenho da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e o contexto em que se insere o estudo, garantindo a transparência e a robustez do processo investigativo.

2 *EARLY ALGEBRA*: ASPECTOS TEÓRICOS E ESTUDOS EMPÍRICOS

Este capítulo está organizado em quatro seções. Primeiramente, define-se o conceito de álgebra e suas diferentes características. Em seguida, abordam-se os principais desafios encontrados no ensino dessa área do conhecimento. Posteriormente, apresenta-se a *Early Algebra* como uma estratégia para lidar com esses desafios, respaldada por exemplos de estudos empíricos. Em seguida, discute-se o pensamento algébrico e a importância do seu desenvolvimento desde os primeiros anos de escolarização. Destaca-se a interconexão entre a abordagem *Early Algebra* e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, apresenta-se como esses conceitos estão contemplados na BNCC (Brasil, 2018), por meio de suas competências e habilidades. Por fim, considerando a emergente relevância das tecnologias digitais, discute-se resultados de pesquisas empíricas que investigam a convergência da abordagem *Early Algebra* com o desenvolvimento do pensamento algébrico, com o auxílio de recursos educacionais digitais.

2.1 Múltiplas Dimensões da Álgebra: Perspectivas e Desafios

Definir álgebra pode ser uma tarefa desafiadora, como evidenciado ao pesquisar o termo em diferentes dicionários. Segundo o dicionário Priberam, álgebra é a "ciência de cálculo das grandezas, representadas por letras". O dicionário Houaiss oferece duas definições distintas, descrevendo-a, como: a) uma extensão da aritmética que utiliza letras para representar números, e, como b) uma ciência que emprega fórmulas para resolver problemas, lidando tanto com conjuntos numéricos quanto não numéricos de forma abstrata. Já, o Dicio descreve a álgebra como "a ciência do cálculo das grandezas abstratas, representadas por letras", e ainda complementa com uma definição mais coloquial, referindo-se a álgebra como "coisa difícil de compreender: isto é álgebra". As diferentes definições destacam a complexidade do termo e como isso pode variar dependendo da perspectiva adotada.

Para Kaput (2008), a álgebra pode ser compreendida sob duas óticas: como um **domínio independente de conhecimento**, considerando-a como um aspecto cultural significativo, no qual se estrutura um sistema para generalizar padrões e restrições, e, como uma **atividade humana** centrada na resolução de problemas e na formulação de conceitos matemáticos, compreendida como um processo de raciocínio guiado e ações sobre essas generalizações expressas em sistemas simbólicos. Esses aspectos essenciais são desdobrados em três vertentes distintas, nas quais autor aborda com foco na Educação Matemática: 1) a álgebra como análise de estruturas e sistemas, 2) como estudo de funções e relações, e 3) como aplicação de linguagens de modelagem em vários campos de estudo, tanto dentro quanto fora da matemática.

O autor também destaca que há uma diversidade de opiniões entre os estudiosos da área e que não existe um consenso sobre qual dos aspectos centrais da álgebra é o mais relevante para sua definição, nem qual é o papel desses aspectos na aprendizagem inicial da álgebra:

> Alguns tratam as ações baseadas em regras sobre símbolos (Aspecto Central B) como a marca registrada do raciocínio algébrico, quer essas ações sirvam ou não para generalização ou modelagem e, portanto, não consideram grande parte da atividade descrita neste livro como verdadeiramente algébrica. Outros, cautelosos sobre o que Piaget (1964) chamou de *formalismo prematuro,* minimizam a sintaxe convencional em favor da expressão deliberada de generalizações e modelos de situações através de quaisquer meios disponíveis, mas especialmente linguagem natural e desenhos (Resnick, 1982). Somente depois que os alunos tivessem grande experiência em expressar-se nessas formas, eles seriam apresentados à notação algébrica, aos gráficos e a outras classes de representações. (Kaput, 2008, p.12 - tradução livre)

Para Lins e Gimenez (1997), a dificuldade em definir álgebra reside em não haver consenso sobre o que seja “pensar algebricamente” e sim em apresentar o que seriam as “coisas” da álgebra como, cálculo literal, equações e funções. Partindo desse entendimento, os autores trazem quatro concepções tendo como foco a atividade algébrica: **letrista**, **conteudista**, **ação** e **conceitual**.

Nas duas primeiras concepções, **letrista** e **conteudista**, a atividade algébrica foca no uso de símbolos, notações e por meio dos conteúdos matemáticos que a compõem em desconsideração aos que poderiam compô-la. Na terceira concepção - **ação**, a Álgebra é tida como o resultado do pensamento formal piagetiano, que envolve refletir sobre as operações matemáticas realizadas em um problema e suas consequências; no entanto, tende a desconsiderar a resolução de equações por uma criança, caso esta não dê indícios que atingiu o estágio operatório formal piagetiano. Segundo os autores:

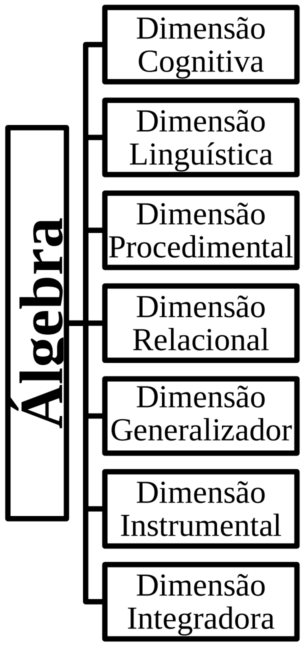
> Parece-nos que essa abordagem também deixa coisas de fora. Por exemplo, se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o *status* de atividade algébrica? (Lins; Gimenez, 1997, p. 100).

A concepção conceitual, com base na teoria proposta por Vergnaud (1997), substitui a ideia de conceitos isolados pela de campo conceitual, que envolve noções, conceitos e esquemas operacionais. Ela reconhece a existência de um "campo conceitual da Álgebra elementar" e destaca a importância de trabalhar com campos conceituais específicos, como o das equações do 1º grau.

A crítica dos autores a essas abordagens reside principalmente no fato delas se dedicarem a examinar onde os alunos estão, e o que lhes faltam e não considerar os caminhos divergentes encontrados pelos alunos, a preocupação é “trazê-lo” para o “lugar” considerado correto a se chegar. Para Lins e Gimenez (1997), essas concepções apontam para a necessidade de um olhar positivo para a atividade algébrica, de modo que, sabendo o ideal a ser atingido, considere a leitura positiva do engajamento do indivíduo, mesmo quando este a está realizando de modo “não- ideal”. Assim, o mais importante é a compreensão de como se processam os diferentes caminhos individuais na aprendizagem da álgebra, enfatizando a valorização do engajamento do aluno, mesmo quando este ocorre de maneira não convencional.

Em um estudo mais recente, os autores Bianchini e Lima (2023) tentam definir a álgebra destacando a variedade de entendimentos sobre o assunto. Eles argumentam que essas definições não se contrapõem, mas se articulam e se complementam formando uma visão abrangente da Álgebra. Os autores propõem o agrupamento das ideias sobre álgebra em sete dimensões que, embora não hierarquicamente, se articulam entre si; sendo a fusão dessas dimensões a caracterização do que seria a álgebra. A Figura 1 apresenta a articulação entre essas sete dimensões.

Figura 1 – Dimensões da Álgebra de acordo com Biachini e Lima (2023)



Fonte: Adaptado de Biachini e Lima (2023)

A dimensão cognitiva abrange os processos de pensamento e interpretação em situações cotidianas, permitindo a aplicação de métodos algébricos. A dimensão linguística, evolui historicamente em diferentes culturas, contribuindo com simbologias e regras específicas. A dimensão procedimental compreende os métodos para resolver equações e problemas, enquanto a dimensão relacional analisa as interações entre grandezas. A dimensão generalizadora amplia o escopo para empreendimentos matemáticos mais amplos, enquanto a dimensão instrumental destaca a Álgebra como uma ferramenta essencial em diversas áreas do conhecimento.

2.2 Ensino de Álgebra: Desafios e Propostas

Um ponto de convergência relevante entre estudiosos da álgebra é a constatação de que um dos principais desafios do ensino da Educação Algébrica reside na tendência de focar em dimensões limitadas da área. Isso se manifesta principalmente na ênfase na manipulação e aplicação de regras para símbolos (dimensão linguística) e na adoção de métodos procedimentais para resolver atividades específicas (dimensão procedimental), e, por vezes, o seu caráter utilitário dentro da própria Matemática e em outras áreas do conhecimento (Bianchini; Lima, 2023).

Segundo Coelho e Aguiar (2018), o ensino de Álgebra tem enfrentado desafios ao longo dos anos, devido à ênfase excessiva nos aspectos técnicos, em detrimento do desenvolvimento de conceitos e pensamento abstrato. Ao longo dos anos, diferentes abordagens foram adotadas no ensino de Álgebra, mas todas acabaram reduzindo o ensino a uma mera manipulação de regras algébricas. Portanto, o autor pontua a necessidade de repensar o ensino de Álgebra, dando mais ênfase ao desenvolvimento de conceitos e pensamento algébrico.

Outro "problema da Álgebra" (parafraseando Kaput, 2008) se dá pela tendência à hierarquização da aritmética em relação à álgebra, com esta última sendo destinada apenas aos alunos mais velhos, geralmente entre 11 e 12 anos, quando se supõe que já possuam uma maior maturidade de pensamento para lidar com as abstrações envolvidas na álgebra. Vale ressaltar aqui a influência das fases de desenvolvimento cognitivo propostas pelo pesquisador suíço Jean Piaget, segundo o qual o pensamento operatório concreto se desenvolve dos 6 aos 7 anos até os 12 anos, enquanto o pensamento operatório formal se estrutura a partir dos 11 ou 12 anos. Portanto, entre pesquisadores e educadores, postulou-se a compreensão de que a aritmética está intimamente relacionada ao pensamento concreto, envolvendo números e operações, enquanto a álgebra está associada ao pensamento formal, que lida com símbolos e operações de forma abstrata (Lins; Gimenez, 1997; Bianchini; Lima, 2023).

Por essa concepção, demanda-se primeiro que os alunos aprendam conteúdos relacionados à Aritmética, geralmente vistos como mais fáceis e basilares, pois trabalham com números, quatro operações, tabuada. Após aprender esses conteúdos, é que eles estariam prontos cognitivamente a aprender conteúdos relacionados à Álgebra, um conteúdo que possui procedimentos de formalização, generalizações e emprega maior lógica de representação.

Sobre essa abordagem, Gimenez e Lins (1997) dizem que essa perspectiva, denominada como "letrista", concentra-se primordialmente na realização de cálculos utilizando variáveis. Esta abordagem é comumente encontrada em materiais didáticos, em que os alunos são ensinados a aplicar algoritmos para resolver exercícios práticos, sem haver estímulo para compreenderem verdadeiramente a lógica simbólica por trás dos conceitos. Como resultado, os estudantes, ao se depararem com essa metodologia, muitas vezes enfrentam dificuldades em assimilar a linguagem matemática, uma vez que não foram previamente incentivados a desenvolver uma compreensão simbólica.

A pesquisa de Silva et al. (2018) examinaram as dificuldades dos alunos do sétimo ano em aprender álgebra, devido ao grande número de estudantes que enfrentaram problemas nessa área ao avançar para o Ensino Médio e Superior. Os resultados mostraram que os alunos tinham dificuldades em compreender e aplicar conceitos de álgebra, mostrando falta de interesse e de conexão com a vida cotidiana, dificuldades relacionadas à manipulação de símbolos e de procedimentos algébricos, e não conseguiram ver como esses conceitos se aplicam em situações reais.

2.3 *Early Álgebra*: Desenvolvimento de Pensamento Algébrico desde a Infância

Considerando os desafios da Educação em Álgebra até aqui apresentados, a partir da década de 80, diversos pesquisadores, como Kieran, Carraher, Blanton, Schliemann e Kaput, sugeriram que algumas atividades algébricas, como lidar com quantidades desconhecidas e alterar o *status* do sinal de igualdade, antes consideradas inadequadas para crianças mais jovens, poderiam ser incentivadas já nos primeiros anos de escolarização. Essa concepção evoluiu ao longo dos anos, culminando com a adoção do termo *Early Algebra*. (Kaput e Blanton, 2005; Freire, 2007, Canavarro, 2007; Blanton et al., 2015)

Essa nova abordagem busca enfatizar que a inserção da álgebra nos primeiros anos escolares não busca fornecer aos alunos pré-requisitos ou prepará-los para a futura álgebra nos anos escolares mais avançados, nem os introduzir prematuramente a conceitos e definições algébricas mais complexas. Em tradução literal, a Álgebra Inicial ou Precoce não seria o mesmo que "Álgebra antecipada" ou prematura, mas sim a promoção de estratégias e atividades para que as crianças, desde os primeiros anos, desenvolvessem um certo tipo de pensamento - o pensamento algébrico -, com níveis graduais de dificuldade e representação adaptada ao nível de maturidade dos alunos (Kaput e Blanton, 2005).

2.3.1 Pensamento Algébrico: Conceituações e Abordagens Práticas

Sobre o pensamento algébrico, apresentado aqui como o foco da álgebra nos anos iniciais, Kaput et al (2008) ressaltam que há uma certa dificuldade e necessidade em definir o que se constitui pensar algebricamente, mas que não seria correto limitar essa forma de pensar matematicamente a utilização de expressões e sintaxes próprias da álgebra. Conforme afirmam:

> Certamente, os educadores matemáticos precisam ser claros sobre o que entendem por pensamento algébrico, mesmo em situações em que os alunos não utilizam notação algébrica. No entanto, não parece razoável limitar o conceito de pensamento algébrico apenas a ocasiões em que os alunos usam notações como “f(n) = 3n – 7”. (Kaput et. al., 2008, p. xviii)

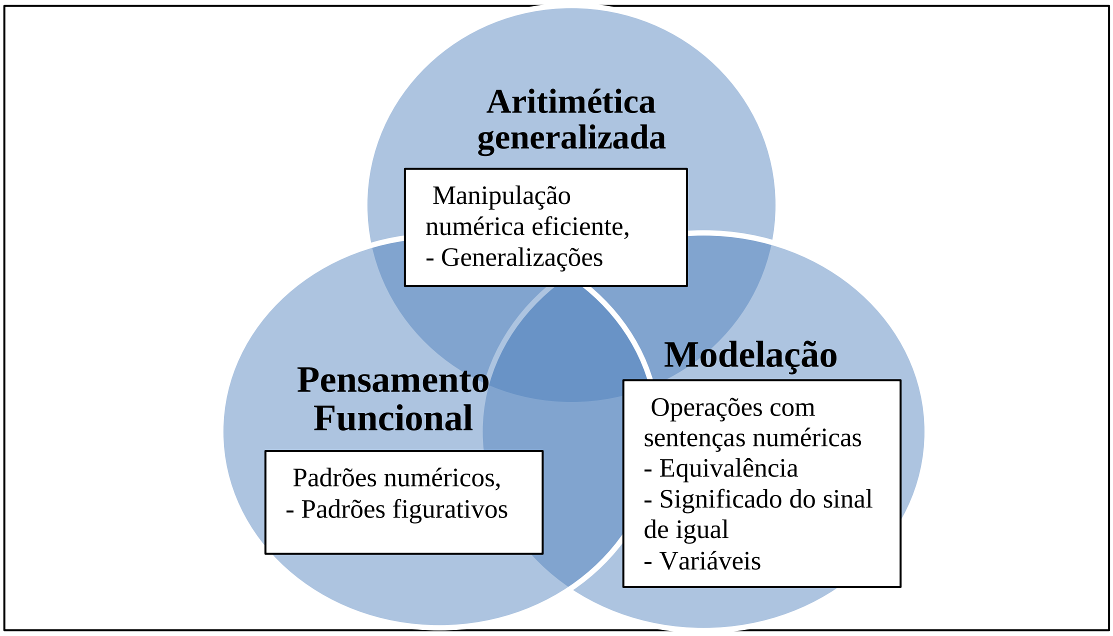
Kaput e Blaton (2005), pioneiros no uso do termo da *Early Algebra*, caracterizam o pensamento algébrico como sendo: “[...]o processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo e expressam-se nas formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade” (p. 413).

Para Lins (1992), pensar de maneira algébrica é uma abordagem, entre outras, para atribuir significado à álgebra. Sob essa perspectiva, o aluno está pensando de forma algébrica quando consegue atribuir significado a objetos algébricos, como equações e inequações. Para o autor, o aluno está pensando algebricamente quando consegue perceber: regularidades em operações aritméticas, como a propriedade comutativa da adição ou da multiplicação ou que o “x” está representando uma incógnita (em uma equação) ou uma variável (em uma função). (Bianchini; Lima, 2023).

Compreender o pensamento algébrico não é uma tarefa simples. Isso se deve ao fato de que a álgebra é um campo multifacetado. O pensamento algébrico abrange não somente a dimensão cognitiva (Bianchini; Lima, 2023), mas abarca, em parte, uma vasta gama de objetos de estudo como equações, inequações, sistemas de equações e inequações, funções, padrões, entre outros.

Nesse sentido, Kaput (2008) traz três dimensões que envolvem o pensamento algébrico: 1) Aritmética Generalizada que envolve generalização acerca das estruturas das operações aritméticas e suas propriedades e o pensamento sobre os números e suas relações; 2) Pensamento Funcional que envolve a generalização por meio da ideia de função, generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber, as relações de variações e de (co)variação e 3) Modelação, que implica na generalização de regularidades em situações do dia a dia qual a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa. Essas dimensões estão representadas na Figura 2, adaptados aos conteúdos dos anos iniciais.

Figura 2 – Dimensões do pensamento algébrico



Fonte: adaptado de Sibgatullin et. al 2022, p. 15

A partir dessas constatações percebe-se que **as generalizações** e sua expressão dos sistemas de símbolos algébricos são aspectos de destaque que caracterizam o pensamento algébrico. Outro aspecto relevante envolve o uso de **sistemas de símbolos** para criar generalizações de maneira organizada e orientada sintaticamente. O primeiro aspecto trata do pensamento representacional, que envolve os processos mentais para atribuir significado em um sistema de representações. Já o segundo aspecto, chamado de pensamento simbólico, está relacionado à compreensão e uso dos sistemas de símbolos e suas regras, focando nos próprios símbolos (Canavarro, 2007).

De acordo com Almeida e Câmara (2017), o pensamento algébrico se manifesta através de características essenciais, tais como: **estabelecer relações**, **generalizar, modelar**, **construir significado** e **operar com o desconhecido**. Os autores argumentam que, embora a habilidade de estabelecer relações esteja no centro dessas características, as outras não são menos significativas, estando intrinsecamente interligadas a ela. Assim, a primeira habilidade do pensamento algébrico que emerge e se revela em um indivíduo é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais.

Blanton et al. (2015) conduziram um estudo na perspectiva de aritmética generalizada, o qual investigou o impacto de uma intervenção em *Early Algebra* no entendimento de conceitos algébricos por alunos do terceiro ano. Os pesquisadores analisaram como o pensamento algébrico das crianças se desenvolveu, concentrando-se em estratégias e desempenho em testes escritos. A intervenção em *Early Algebra* foi implementada em duas turmas do terceiro ano ao longo de um ano, comparando um grupo que recebeu a intervenção com um grupo controle sem intervenção. Os alunos do grupo de intervenção foram expostos a atividades que contemplavam as ideias fundamentais da *Early Algebra*, divididos em quatro grupos de atividades: 1. Equivalência, expressões, equações e desigualdades, 2. Aritmética generalizada; 3. Pensamento funcional e 4. Variáveis. Os alunos do grupo controle seguiram com os métodos tradicionais baseados em aritmética.

Ao final do estudo, o grupo que recebeu a intervenção *em Early Algebra* demonstrou um ganho significativo de desempenho em comparação com o grupo controle. Os alunos do grupo experimental tiveram um ganho de 74% de pré-teste para o pós-teste em termos de respostas corretas, enquanto os alunos do grupo controle tiveram apenas um ganho de 8%. Além disso, 77% do grupo experimental usou uma estratégia computacional ou estrutural no pós-teste, e apenas 3% usaram uma estratégia operacional. Em contraste, 46% do grupo controle continuou a usar uma estratégia operacional no pós-teste, e apenas 5% usaram estratégias estruturais ou computacionais. Em resumo, os alunos do grupo experimental apresentaram ganhos estatisticamente significativos do pré-teste para pós-teste em quase todos os itens, enquanto o grupo controle não mostrou ganhos significativos em nenhum dos itens, indicando a vantagem da intervenção em comparação com os métodos aritméticos tradicionais. Outro destaque bastante relevante deste estudo foi a demonstração que a abordagem também contribuiu para o desenvolvimento de conceitos e habilidades matemáticas mais gerais, como a compreensão de propriedades fundamentais da aritmética e habilidades de representação de quantidades desconhecidas de maneira significativa, indicando que a intervenção teve impactos positivos na aprendizagem global (Blantlon, et al. 2015).

Outro estudo foi realizado por Canavarro (2007), no contexto de sala de aula com alunos dos 1º e 2º anos. A pesquisadora analisou o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes com idades entre sete e oito anos que resolveram uma situação chamada "Quantos telefonemas?". A pesquisa destaca que os estudantes abordaram o problema de maneira criativa, apresentando estratégias para encontrar soluções para uma situação complexa e desconhecida.

As soluções foram discutidas em grupo e uma das estratégias utilizadas envolveu o uso de cores diferentes para representar as chamadas telefônicas feitas pelos amigos, seguido de uma análise sistemática e ordenada para determinar o número de chamadas. Os estudantes conseguiram generalizar uma regra para determinar o número de chamadas feitas por qualquer número de alunos; demonstrando habilidades de raciocínio matemático sofisticadas para sua faixa etária.

Depreende-se assim que, as intervenções didáticas em *Early Algebra* de forma abrangente e sustentada, favorecem melhorias de aprendizagem não apenas de conceitos específicos de álgebra, mas também na compreensão matemática mais ampla, e que a educação matemática tradicional, com foco em aritmética, pouco contribui com esses ganhos. (Kaput, 2005; Freire, 2007, Canavarro, 2007; Blanton et al., 2015).

O cenário de pesquisa no Brasil no contexto da *Early Algebra* envolve também os estudos de Magina, Oliveira e Merlini (2018) nos anos iniciais, enquanto o foco dos demais estudos está nos anos finais do Ensino Fundamental e na formação de professores.

Teixeira (2016) investigou o raciocínio funcional introdutório dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foi apoiada em uma intervenção de ensino pautada em situações multiplicativas e sequenciais, icônicas e numéricas. Os resultados indicaram um pequeno, mas significativo, crescimento na capacidade dos estudantes de lidar com situações-problema envolvendo conceitos algébricos após uma intervenção de ensino. Este crescimento se manteve em um teste subsequente, sugerindo que a intervenção teve um efeito duradouro. No entanto, os resultados também mostraram que os estudantes enfrentaram dificuldades com certos tipos de problemas, como aqueles que exigiam a generalização de padrões, indicando a necessidade de estratégias de ensino mais eficazes para esses conceitos.

O estudo de Porto (2018), por sua vez, teve características de estudo diagnóstico com estudantes dos 3º e 5º anos. Focou em situações-problema envolvendo o conceito de sequência de padrão e equação. Os estudos revelaram que não houve diferença significativa entre o desempenho de estudantes dos 3º e 5º anos, assim como entre os do 6º e 9º anos, em problemas envolvendo conceitos algébricos. Isso sugere que a idade ou o ano escolar não são fatores determinantes na capacidade dos estudantes de resolver esses tipos de problemas. No entanto, foi observada uma diferença estatisticamente significativa entre os grupos dos anos iniciais (3º e 5º anos) e dos anos finais (6º e 9º anos), indicando um progresso no entendimento algébrico ao longo dos anos escolares, embora essa progressão não tenha sido considerada satisfatória.

Esses exemplos demonstram que, apesar do país ter pouco menos de meia década de formalização curricular da Álgebra, as pesquisas nessa temática já emergiram antes dela, com resultados que corroboram outros resultados internacionais. A próxima seção apresenta a formalização da *Early Algebra* na BNCC

2.4 *Early Algebra* e a BNCC

Embora o movimento em torno da Álgebra Inicial esteja em curso há várias décadas, tanto em contextos internacionais quanto nacionais (Magina; Oliveira; Merlini, 2018), no Brasil, a introdução formal da Álgebra no currículo dos Anos Iniciais ocorreu apenas após a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2018, com adesão gradual de todas as unidades escolares até o ano de 2020.

A BNCC não utiliza explicitamente a terminologia *Early Algebra*, mas faz referências claras a essa abordagem, destacando a importância de iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares. Conforme o documento, a Álgebra nos primeiros anos de escolarização visa desenvolver o pensamento algébrico, o qual é descrito como "essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas entre grandezas, bem como de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2018, p. 270).

Ainda sobre as características implícitas ao pensamento algébrico: aritmética generalizada, modelagem e funções. O documento faz ainda menção ao trabalho com ideias de regularidades, generalização de padrões e propriedades da igualdade, destacando que nessa fase ainda não se fará o uso de letras para expressar regularidades. Postula como necessária a relação da álgebra com a unidade temática Números e suas operações. Traz as ideias de equivalência por meio da compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas uma indicação do resultado de uma operação. A noção de função também é citada no texto da BNCC, indicando que deve ser explorada por meio da resolução de problemas que envolvam a relação direta entre duas grandezas (Brasil, 2018).

2.5 Tecnologias Digitais na *Early Algebra*: explorando novas fronteiras

De acordo com Canavarro (2007), ao considerar o contraste de ideais em torno do pensamento algébrico, destacam-se dois aspectos estruturais relevantes. Primeiramente, é importante notar que a notação algébrica convencional não é a única forma de expressar ideias algébricas. Diversos outros recursos notacionais são favorecidos e podem ser utilizados. Em segundo lugar, há uma ênfase significativa nos significados e na compreensão das escolhas e usos dessas diferentes notações. Segundo Canavarro (2007, p. 88), “No cerne do pensamento algébrico está os significados, está o uso dos símbolos para a representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão. Trata-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos”.

Algumas das estratégias utilizadas na abordagem *Early Álgebra* incluem o uso de **jogos manipulativos, gráficos e tabelas** (Canavarro, 2007; Adamuz-Povedano et al., 2021), bem como a **resolução de problemas** (Canavarro, 2007, Macedo, 2008) que envolvem variáveis e equações simples. A incorporação de recursos educacionais digitais, **como jogos** e **simulações** (Amado, 2022), também demonstra ser particularmente eficaz nessa abordagem, pois contribui para tornar a álgebra mais compreensível para os alunos. Além disso, pode atuar como ponte para facilitar a compreensão de abstrações algébricas mais elaboradas do que o uso de recursos analógicos como problemas no papel ou mesmo uma balança de dois pratos (Freire, 2007).

As TDIC oferecem aos estudantes a oportunidade de explorar a álgebra em uma variedade de situações antes de dominarem a manipulação das expressões (Lins; Kaput, 2004). Além disso, essas tecnologias permitem a realização de atividades que envolvem múltiplas representações. Dessa forma, crianças mais novas podem executar ações com o auxílio de ferramentas e desenvolver uma visão abrangente da álgebra e de suas aplicações. Esse desenvolvimento é mais desafiador de alcançar na abordagem tradicional de "primeiro a álgebra, depois as aplicações" ou mesmo ao usar situações concretas para facilitar a transição ou preencher a lacuna (Lins; Kaput, 2004). O efeito global desse cenário é estimular questionamentos sobre o que é viável e adequado para crianças mais jovens, ao mesmo tempo em que levanta questões sobre a natureza da própria matemática.

As tecnologias digitais são hoje reconhecidamente como necessárias para o processo de ensino e aprendizagem. A BNCC (Brasil, 2018) endossa o uso dessas tecnologias nas aulas de matemática, destacando a importância de empregar processos e ferramentas matemáticas, incluindo as tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Castro-Filho, Castro e Freire (2022), fundamentados em Kaput e Schorr (2007), apontam que a incorporação das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem não apenas amplia as oportunidades de aprendizado da matemática, mas também pode resultar em três importantes consequências:

> A primeira diz respeito ao poder da dinâmica na representação de conceitos [...] A segunda consequência do uso dessas tecnologias é a possibilidade de reconstrução de

> conceitos. A terceira consequência são as tecnologias que permitem aos alunos observarem e construir resultados numéricos ou representações gráficas de atividades de mediação em tempo real, mas também oferecem representações de simulações que podem ser manipuladas à vontade. (Castro-Filho; Castro; Freire, 2022, p. 225-226; tradução livre)

A respeito do uso TDIC direcionadas especificamente para o ensino e aprendizado da álgebra, é importante notar que esses recursos ainda não são amplamente discutidos na literatura em interseção com a *Early Algebra*. Observa-se uma maior tendência em intervenções que envolvam alunos em estágios escolares mais avançados, como os anos finais do Ensino Fundamental e o do Ensino Médio.

Um estudo conduzido por Freire (2007) investigou as estratégias desenvolvidas por estudantes do 3º e 5º ano, com idades entre 8 e 10 anos, ao resolver problemas apresentados em RED (Balança Interativa e Feira de Mercado), situações-problema orais e manipulação de uma balança convencional de dois pratos. Os alunos foram entrevistados individualmente com base no método clínico piagetiano e solicitados a explicar e justificar suas estratégias para resolver os problemas.

Os resultados mostraram que os alunos começaram a resolver a Balança Interativa por tentativa e erro, comparando cada peso desconhecido com cada peso conhecido. Embora tenham encontrado a resposta, perceberam que isso exigia muitos movimentos e começaram a desenvolver estratégias mais sofisticadas relacionadas à análise de valores possíveis para um desconhecido, testando um valor que era metade ou aproximadamente metade dos pesos possíveis e eliminando valores já encontrados. Os alunos usaram essas estratégias sistematicamente e foram capazes de verbalizá-las. O estudo além de demonstrar a viabilidade da utilização de RED para o desenvolvimento de habilidades do pensamento algébrico, ainda destacou que, o jogo digital possibilitou o desenvolvimento de estratégias mais elaboradas de pensamento algébrico que a manipulação física da balança e pesos, que ocorriam por estimativa comparação dos pesos com as mãos (Freire, 2007; Castro-Filho; Castro; Freire, 2022).

O trabalho de Pope e Mangram (2015) investigou se os alunos do 3º ano do EF poderiam desenvolver senso numérico ao utilizar o jogo *Wuzzit Trouble*, com enfoque na proficiência matemática além da fluência procedimental em operações matemáticas. Os resultados da pesquisa indicam que os alunos do 3º ano, que jogaram o jogo digital, apresentaram uma melhoria significativa no senso numérico em comparação com aqueles que não jogaram. O jogo promoveu o desenvolvimento da proficiência matemática ao exigir que os alunos considerassem múltiplas representações e tomassem decisões durante a resolução de problemas. Os autores destacam considerações importantes sobre o uso de jogos na educação matemática, ao apontar que as visões dos desenvolvedores desses jogos podem influenciar indevidamente concepções equivocadas sobre a aprendizagem da matemática. Conforme apontam, "Se alguém foi exposto a uma instrução matemática que enfatizou fatos isolados, procedimentos e memorização, então é provável que essa pessoa acredite que essa é a natureza da matemática" (Pope; Mangram, 2015, p. 6). Portanto, é relevante considerar o tipo de aprendizagem que um determinado recurso educacional digital promove e sob quais bases teóricas se orientam o seu desenvolvimento. Recursos que priorizam a rapidez e a memorização mecânica podem desenvolver habilidades nesses aspectos, mas não contribuirão para aprofundar a compreensão ou apoiar o desenvolvimento do pensamento matemático.

2.6 Implicações de pesquisa

Os estudos discutidos apontam que a álgebra como uma área multifacetada da matemática, que não se limita à mera manipulação simbólica ou procedimental e que não está em um nível hierárquico superior e desconectado da aritmética. Crianças, desde a tenra idade, podem ser introduzidas a conceitos algébricos por meio da promoção do pensamento algébrico, em um trabalho articulado com a aritmética. O pensamento algébrico não se restringe à expressão por meio da notação convencional, mas também permite a utilização de variados recursos para representações das ideias algébricas. Além disso, as TDIC oferecem possibilidades para o desenvolvimento das habilidades do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolarização.

Apesar dos resultados encontrados, ainda há escassez de literatura, principalmente nacional, sobre a contribuição de recursos educacionais digitais para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dessa forma, este estudo propõe intervenções articuladas entre álgebra e aritmética nos anos iniciais, utilizando RED não apenas como mais uma forma de representação algébrica, mas também como uma investigação do seu potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico

3 METODOLOGIA

Considerando os objetivos da pesquisa, optou-se pela abordagem de uma metodologia de pesquisa qualitativa. De acordo com Ludke e André (1986), na pesquisa qualitativa o pesquisador se envolve de forma mais direta e interativa com o ambiente em estudo, buscando compreender profundamente os fenômenos a partir das perspectivas dos participantes.

Em contraste com os métodos quantitativos, que muitas vezes se concentram em números e medições objetivas, a pesquisa qualitativa permite uma exploração ampla e contextualizada dos eventos e processos. Não se trata apenas de coletar dados, mas de mergulhar nas nuances e complexidades do contexto em que ocorrem os fenômenos estudados. Assim, o pesquisador pode capturar as experiências, percepções e significados atribuídos pelos participantes, oferecendo uma compreensão mais profunda e rica do tema em questão (Ludke; André, 1986).

No presente estudo, o interesse recai sobre as estratégias de resolução das situações-problema desenvolvidas pelos estudantes ao usar o RED "O Reino de Aljabar". Dessa forma, não haverá uma busca de dados quantitativos para estatística inferencial, o que justifica a escolha por métodos qualitativos.

Em relação aos objetivos desta pesquisa, o estudo será de cunho de intervenção, pois serão conduzidas situações de intervenção com as crianças, tanto com o uso quanto sem o uso do RED, promovidas e assistidas pela pesquisadora, a fim de observar as mudanças de aprendizagem relacionadas às habilidades algébricas.

De acordo com Lautert e Spinillo (2008), a pesquisa intervenção compreende não apenas a ação do pesquisador na produção do conhecimento, mas também na intervenção direta com os participantes. Caracteriza-se pela busca em promover mudanças, estabelecendo uma relação não horizontal, em que há uma assimetria de papéis, com um dos participantes responsável por conduzir, propor e orientar as atividades a serem realizadas.

3.1 Sujeitos

A amostra de participantes selecionados para esta pesquisa foi composta por oito alunos, com idades entre 7 e 10 anos, matriculados no 3º e 4º anos do Ensino Fundamental. Os participantes foram selecionados por conveniência, de acordo com interesse e disponibilidade. O recorte etário considera os pressupostos da BNCC, que estabelece diretrizes pedagógicas e recomendações para o ensino. A BNCC salienta que o desenvolvimento de habilidades relacionadas a igualdades e desigualdades na álgebra deve ser incentivado a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, conforme evidenciado na habilidade onze, que enfatiza a compreensão da ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença (Brasil, 2018).

O conceito de incógnita é introduzido pela BNCC a partir do 4º ano, conforme apresentado na habilidade específica de matemática EF04MA15: "Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais" (Brasil, 2018).

O estudo selecionou dois grupos, cada um composto por quatro crianças de diferentes anos escolares, que participaram de sessões individuais com a pesquisadora ao longo de quatro dias, com duração média de uma hora por sessão. Essa abordagem individualizada foi adotada para facilitar o mapeamento das estratégias utilizadas pelas crianças e assegurar o alcance dos objetivos propostos na pesquisa. Essa metodologia no estudo de aprendizagens específicas também foi destacada em pesquisas de Lautert (2005), Brizuela (2006) e Freire (2007).

A seleção das crianças para o estudo foi realizada de forma aleatória e conforme o interesse das crianças em participar. Em cada sala de aula, foram sorteadas duas crianças para participarem das intervenções de pesquisa. Os grupos diferem pela ordem de aplicação das intervenções: o Grupo 1 utilizou a balança física antes do RED, enquanto o Grupo 2 usou primeiro o RED e depois a balança física. Outra diferença entre os grupos é que, apesar de serem da mesma faixa etária e ano escolar, as crianças são de duas escolas distintas da rede pública municipal de Fortaleza. A composição dos grupos é apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Grupos e participantes do estudo

Grupo	**Nome**	**Ano escolar**	**Idade**	**Grupo**	**Nome**	**Ano escolar**	**Idade**
1	Ana	3º Ano	8 anos	**2**	Luane	3º Ano	8 anos
1	José	3º Ano	7 anos	**2**	Micael	3º Ano	9 anos
1	Daniel	4º Ano	10 anos	**2**	Wagner	4º Ano	10 anos
1	Vanessa	4º Ano	8 anos	**2**	Daniele	4º Ano	9 anos

Fonte: Elaborado pela autora.

O Grupo 1 foi composto por duas crianças do 4º ano, sendo uma menina de 9 anos e um menino de 10 anos; e duas crianças do 3º ano, uma menina e um menino, ambos com 8 anos. A fim de manter a confidencialidade dos nomes das crianças participantes da pesquisa, foram atribuídos nomes fictícios: do 4º ano, Daniel e Vanessa, e do 3º ano, Ana e José.

O Grupo 2 teve a mesma composição: uma dupla de menina e menino do 4º ano, com idades de 9 e 10 anos, respectivamente, e uma dupla de menina e menino do 3º ano, com 8 e 9 anos, respectivamente. Os nomes fictícios atribuídos são: do 4º ano, Wagner e Daniele, e do 3º ano, Luana e Micael.

3.2. Local

O estudo foi realizado em duas escolas públicas municipais de Fortaleza. A primeira escola, que atende todas as etapas do Ensino Fundamental Inicial, conta com recursos tecnológicos como uma sala de inovação equipada com 30 *Chromebooks*, tablets e rede *wi-fi*. A segunda escola atende apenas do 1º ao 4º ano e possui acesso limitado a tecnologias digitais, sem dispor de sala de inovação ou *Chromebooks*. A escolha por incluir duas escolas deveu-se à restrição de tempo e espaço na primeira, mas foi garantido que os alunos da segunda escola atendessem aos mesmos critérios de seleção. Essa decisão permitiu a ampliação da amostra, mantendo a equidade nas condições de participação. Desse modo, o Grupo 1 foi composto por alunos da primeira escola, e o Grupo 2 por alunos da segunda escola. Para minimizar distrações, as sessões individualizadas ocorreram em salas reservadas, de acordo com a disponibilidade de cada escola, durante o horário letivo dos alunos.

3.3. RED O Reino de Aljabar, o desafio da Balança

O "O Reino de Aljabar, o desafio da balança[2] (Castro-Filho et al., 2021) foi inspirado no Balança Interativa. Ele integra elementos de gamificação para envolver ativamente os alunos, proporcionando uma abordagem contextualizada que se alinha às recentes mudanças pedagógicas, legislativas (BNCC), e tecnológicas. O principal propósito é desenvolver habilidades algébricas relacionadas ao pensamento algébrico.

O jogo se desenvolve em uma narrativa contextualizada do reino de Aljabar (álgebra em árabe) em que o generoso califa Al Mansur deseja presentear seus súditos pelas

[2] http://mide-balanca-interativa.netlify.app/

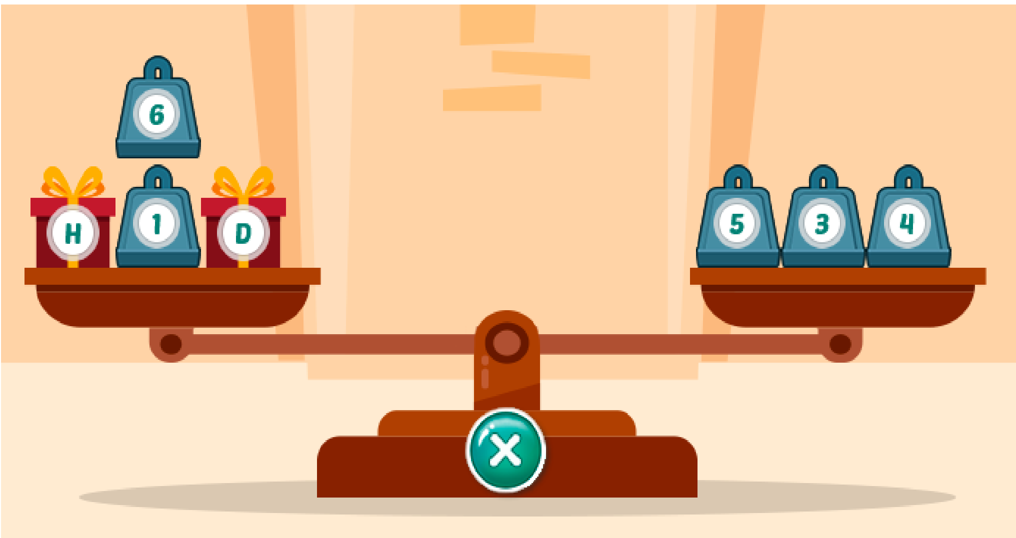
suas virtudes nobres com ele e o Reino: empatia, cooperação, responsabilidade e persistência. O califa deseja distribuir os presentes de forma justa. Assim, o jogador é convidado a assumir o avatar de um(a) sábio(a) e inserir seu nome para auxiliar o califa na distribuição justa dos presentes (Figura 3).

Figura 3 – Tela inicial do RED Reino de Aljabar

Fonte: telas do RED Reino de Aljabar

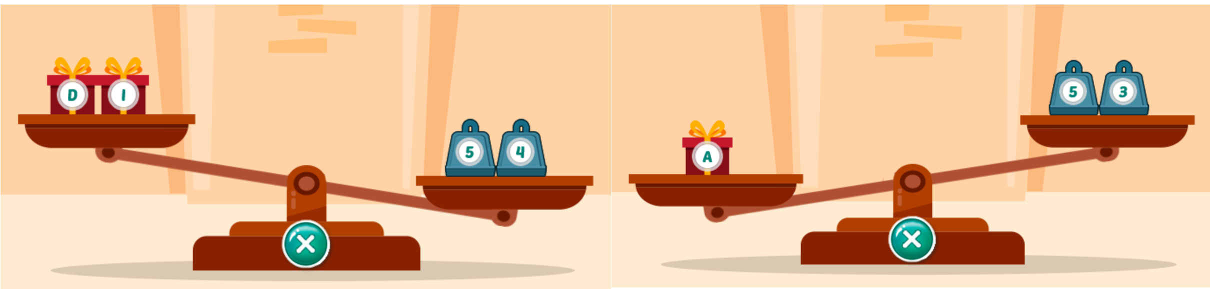
O desafio para o jogador consiste em determinar os pesos dos presentes, utilizando para isso, uma balança para comparar os pesos conhecidos com desconhecidos, A balança pode conter até 5 pesos por prato e apresenta três estágios (equilíbrio, desequilíbrio à direita e desequilíbrio à esquerda) apresentados na Figura 4 e 5. O equilíbrio ocorre quando os pesos e presentes posicionados nos pratos da balança são iguais. O desequilíbrio à direita se dá quando a soma dos pesos ou presentes colocados à direita da balança é maior que o da esquerda. Por sua vez, o desequilíbrio à esquerda se dá quando a soma dos pesos ou presentes colocados à direita da balança é maior que os posicionados à direita.

Figura 4 – Balança em equilíbrio



Fonte: telas do RED Reino de Aljabar

Figura 5 – Balança em desequilíbrio à direita e à esquerda, respectivamente



Fonte: telas do RED Reino de Aljabar.

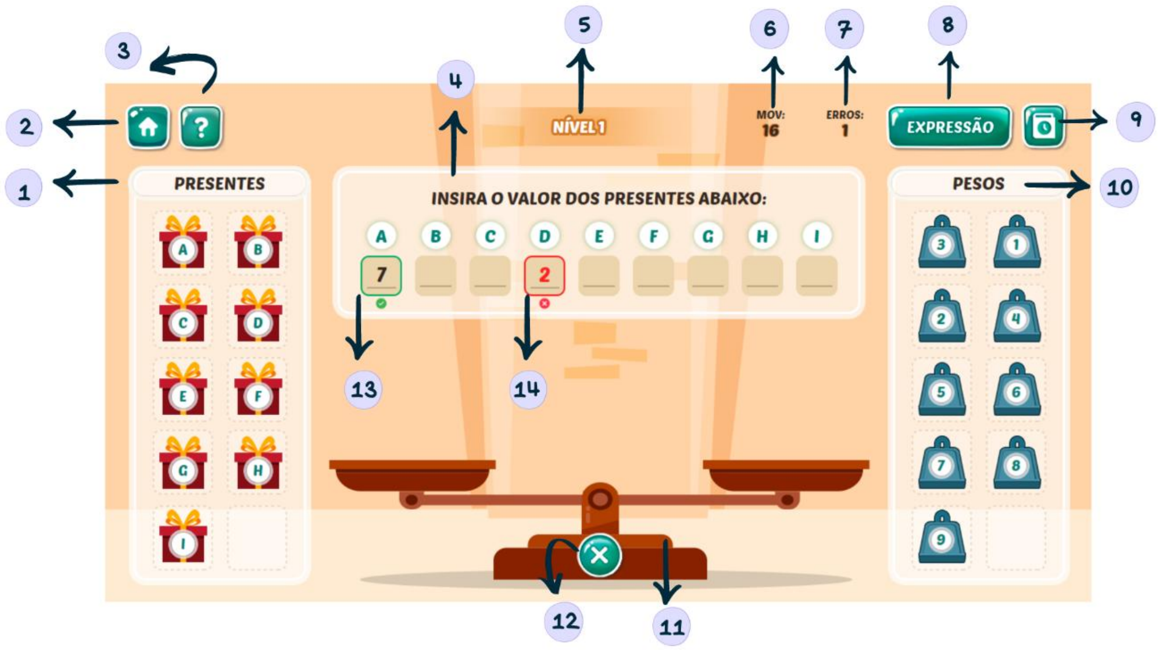
O jogo é estruturado em níveis, oferecendo a opção de escolha entre sequencial e livre. Há quatro níveis de dificuldade, desafiando os alunos a determinar os valores dos presentes com base nas indicações visuais da balança (Castro Filho, et al., 2021).

No primeiro nível, o objetivo principal é familiarizar o usuário com as regras gerais, botões e recursos. São apresentados pesos desconhecidos (representados por letras de A até I) com valores variando de 1 a 10, e pesos conhecidos variando de 1 a 9. O aluno tem a oportunidade de aprender o funcionamento do jogo e onde inserir as informações para receber *feedback*. Nos níveis subsequentes (2, 3 e 4), a dinâmica é semelhante à do nível 1, mas com algumas diferenças. O estudante terá à disposição 7, 5 e 3 pesos conhecidos, respectivamente, mantendo os pesos desconhecidos variando de 1 a 10. A menor disponibilidade de pesos conhecidos permite que o aluno aprimore a habilidade de utilizar o jogo para a resolução de problemas de álgebra sem se sentir sobrecarregado com informações e recursos excessivos.

Convém destacar que, para este estudo específico, optou-se pela utilização do modo sequencial do recurso, tendo em vista, a intenção de observar a possível evolução das habilidades algébricas nas crianças ao longo das diferentes fases do jogo. A opção pelo modo sequencial também visa possibilitar a observação do nível até o qual os alunos mais jovens ou com mais dificuldades conseguem avançar.

A figura 6 apresenta os botões e funcionalidades da tela principal do jogo, descritos em seguida.

Figura 6 – Tela da Balança Interativa



Fonte: telas do Reino de Aljabar

Funcionalidades:

1. **Presentes com pesos desconhecidos:** nomeados das letras A à I, representam as incógnitas a serem encontradas.
2. **Retornar ao início do jogo: permite** retornar ao começo do jogo e alterar o modo de jogo, sequencial ou livre.
3. **Notas de orientação: notas** com orientações sobre o jogo que podem ser acessadas a qualquer momento.
4. **Registro de pesos encontrados:** local para registro dos pesos dos presentes encontrados (incógnitas).
5. **Indicação de nível: indica** o nível que está sendo utilizado.
6. **Contagem de movimentos: indica** a quantidade de movimentos realizados.
7. **Registro de erros: registra** a quantidade de erros em cada nível.

8. **Expressão algébrica: apresenta** a expressão algébrica representada na balança virtual, a partir dos pesos conhecidos e presentes.
9. **Histórico de movimentos: permite** acesso ao histórico de movimentos realizados e anotações que podem ser feitas pelos usuários no decorrer do jogo.
10. **Valores dos pesos conhecidos: apresenta** os valores dos pesos conhecidos, que variam de quantidade de acordo com o nível.
11. **Balança virtual:** Balança para manipulação dos presentes e pesos conhecidos.
12. **Botão de reinício:** Botão que permite retirar todos os pesos da balança sem contagem de movimento.
13. ***Feedback* de acerto:** *feedback* de acerto de valor registrado.
14. ***Feedback* de erro:** *feedback* de erro do valor registrado.

Destinado a alunos do 4º ano do Ensino Fundamental (com idades entre 9 e 10 anos), o principal objetivo pedagógico é o desenvolvimento de habilidades do pensamento algébrico, com ênfase nas competências EF04MA14 e EF04MA15. A primeira envolve o reconhecimento da igualdade ao adicionar ou subtrair um número igual a ambos os termos. A segunda se refere à capacidade dos alunos determinarem valores desconhecidos para tornar verdadeiras igualdades em operações com números naturais, conforme definido pela BNCC (Brasil, 2018, p. 291):

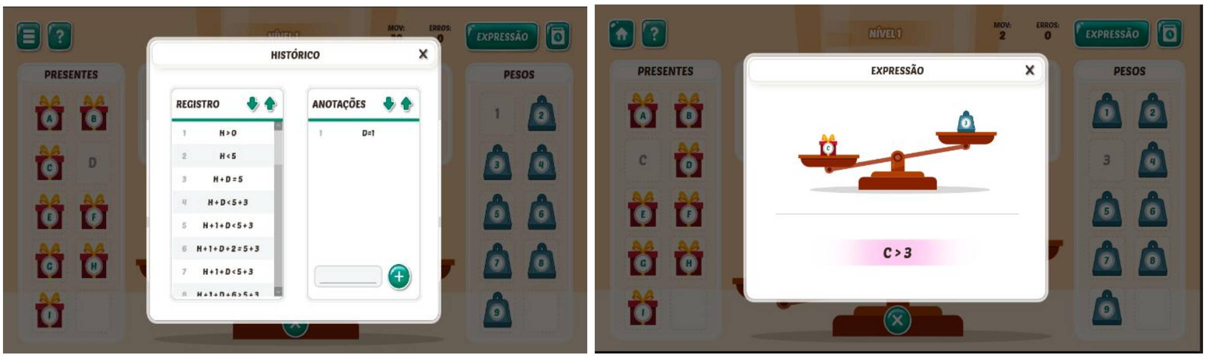
> **(EF04MA14)** Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
> **(EF04MA15)** Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Embora a BNCC oriente a introdução desses conceitos a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, o estudo de Freire (2007) indica que crianças com idades entre 7 e 8 anos, atualmente correspondente ao 3º ano, também são capazes de alcançar os objetivos de aprendizagem propostos pelo recurso. Os estudos realizados com essa faixa etária demonstraram que tais crianças foram bem-sucedidas na assimilação e construção dos conceitos. Essa constatação justifica a ampliação do escopo deste estudo, incluindo a utilização do recurso com alunos mais jovens do que o recomendado pelo documento referencial brasileiro.

Além de habilidades específicas da unidade temática álgebra, o RED também permite explorar habilidades da unidade temática números, por meio de atividades que propiciam: a) resolução de problemas que envolvem adição e subtração por meio de diferentes estratégias (EF04MA03), b) relação entre a adição e subtração (EF04MA04) e, uso de propriedades de operações para o desenvolvimento de estratégias de cálculo (EF04MA05). Essa abordagem está em consonância com os pressupostos de Lins e Gimenez (1997), os quais defendem que a Educação Matemática no século XXI deve transcender a dicotomia e hierarquização entre aritmética e álgebra, promovendo, ao invés disso, uma integração e coexistência dessas unidades. Ao explorar habilidades específicas tanto da unidade temática de álgebra quanto de números, o RED pode favorecer a fluidez entre essas unidades temáticas, contribuindo para uma compreensão mais holística da Matemática pelos alunos.

O RED também tem a possibilidade de acesso, em qualquer momento durante o jogo, a um **histórico** detalhado das movimentações realizadas pelos usuários. Esse histórico, bem como a função **expressão** (Figura 7), é apresentada em notação algébrica, indicando se os presentes são maiores, menores ou iguais ao peso, utilizando os símbolos matemáticos >, <, =. Essas funcionalidades registram os movimentos executados e podem introduzir notações formais, auxiliando os alunos na formulação de estratégias para superar os desafios propostos. Por exemplo, ao consultar o histórico, o usuário pode verificar se os presentes são representados como maior (>), menor (<) ou igual (=) ao peso.

Figura 7 – Função histórico e expressão



Fonte: telas do RED o Reino de Aljabar

Além de ter um *design* visualmente atrativo para crianças, no Reino de Aljabar, a ampliação dos recursos de gamificação é um destaque importante. Por meio de estratégias de gamificação, os jogadores são recompensados com itens árabes, perfumes, moedas e jóias, à medida que progridem nos níveis do jogo. Os jogadores podem escolher entre acumular mais prêmios jogando novamente ou avançar para o próximo nível (Figura 8), e durante o jogo, recebem *feedbacks* de acertos e erros.

Figura 8 – Exemplos de recompensas durante o jogo

Fonte: telas do RED, O Reino de Aljabar

Caso encontrem dificuldades, são notificados para escolher entre retornar ao nível anterior, reler as orientações ou continuar jogando. Ao incorporar elementos de jogos, como recompensas, *feedbacks* e níveis de dificuldade progressivos, a gamificação pode aumentar a motivação dos alunos e incentivá-los a se envolverem mais ativamente no processo de aprendizagem.

3.4. Instrumentos de coleta de dados

A coleta de dados utilizou instrumentos variados: a**) registros das crianças**: pré e pós-testes e registros digitais do recurso; b) **diário de campo**: anotações sobre as interações e comportamentos dos alunos durante as sessões de intervenção; c) **videogravações:** registro em vídeo para análise detalhada posterior incluindo a gravação de tela dos computadores para registrar as interações entre pesquisadora e estudante e o desempenho do estudante no jogo.

3.4.1. Sessão de intervenção

Visando investigar o processo de pensamento das crianças em relação às habilidades algébricas durante a utilização do recurso digital, na resolução das situações-problema e para compreensão de suas notações; as sessões de intervenção incluíram entrevistas individuais.

O procedimento se assemelha a entrevistas clínicas conforme originalmente proposto por Piaget (1975). Sobre as entrevistas clínicas, Queiroz e Lima (2010) apontam que é uma abordagem na qual o pesquisador conduz uma conversa aberta com o sujeito, visando entender suas ideias e explicações sobre um determinado tema. Durante a entrevista, o entrevistador intervém de forma sistemática para esclarecer o que o sujeito diz, seguindo uma estrutura básica de perguntas que são ampliadas e complementadas de acordo com as respostas do entrevistado. “Este método, descrito por Piaget, combina elementos de observação, experimentação e questionários abertos, permitindo uma conversa adaptada a cada participante para que ele possa expressar suas próprias atitudes mentais.” (Queiroz; Lima, 2010, p. 113).

3.4.2 Pré-teste e pós-teste.

Foram conduzidos dois testes: pré e pós-teste, denominados aqui como Situações-problema Iniciais (SI) e situações-problema Finais (SF), compostos por oito situações (Apêndice A e B) que foram apresentadas aos participantes antes e após a finalização das intervenções. Os testes visam observar a contribuição das intervenções na aprendizagem. O grau de dificuldade das situações-problema iniciais e finais é o mesmo, variando-se apenas nas quantidades e contextos dos problemas.

Com base nos estudos de Carraher, Brizuela e Jones (1998), Schliemann e Brizuela (2006) e Freire (2007; 2011), as situações-problema foram compostas de oito questões, divididas igualmente entre aquelas em que as quantidades das transformações são implícitas e explícitas. Assim, buscou-se verificar se os alunos compreendem que uma equação permanece equivalente quando adicionamos ou subtraímos a mesma quantidade em ambos os lados. No entanto, se as quantidades adicionadas ou subtraídas forem diferentes, resultará em uma inequação, indicando que os termos da equação não são iguais.

Após a aplicação piloto, foram acrescentadas duas situações envolvendo a relação entre variáveis e descoberta de incógnitas.

Os contextos das situações-problema são relacionados ao cotidiano geral, como presentes de aniversário, coleções de objetos e biscoitos; que estão organizadas em duas categorias, contendo cada uma das questões distintas: 1) aquelas em que as quantidades são conhecidas desde o início e, 2) aquelas em que as quantidades são desconhecidas.

Nas quatro situações-problema com quantidades conhecidas, os desafios envolvem adição ou subtração de quantidades pré-determinadas, que podem ser iguais ou diferentes. Ao final de cada situação, as crianças serão questionadas se a quantidade de itens permanece igual ou diferente, dependendo das situações realizadas

Na primeira questão, os personagens começam com a mesma quantidade de bolas de gude e, em seguida, são adicionadas quantidades iguais. Na segunda questão, a lógica é semelhante, mas agora são retiradas duas quantidades iguais da situação. Na terceira questão, ocorre novamente a adição de quantidades, porém, desta vez, com valores diferentes. Da mesma forma, na quarta situação, são retiradas quantidades diferentes.

Cada situação problema-possui uma estratégia cognitiva diferente de resolução, ou seja, cada uma possui uma estrutura algébrica variada. Por exemplo, as estruturas algébricas das primeiras quatro situações (Situações problemas iniciais) são as seguintes:

1. **Adição de quantidades iguais:**
   Estrutura Algébrica: $4+4=8 \Rightarrow 4+4(+2) = 8\ (+2)$?
2. **Subtração de quantidades iguais:**
   Estrutura Algébrica: $10+2=5+5+2 \Rightarrow 10+2(-2) = 5+5+2(-2)$?
3. **Adição de quantidades diferentes:**
   Estrutura Algébrica: $7=7 \Rightarrow 7(+6) = 7(+3)$?
4. **Subtração de Quantidades Diferentes:**
   Estrutura Algébrica: $6+4=3+3+4 \Rightarrow 6+4(-6) = 3+3+4(-3)$?

Já nas outras quatro situações-problema com quantidades desconhecidas, os problemas envolvem adição ou subtração de quantidades iguais ou diferentes que não são explicitamente indicadas no problema. A lógica dos questionamentos é a mesma das primeiras quatro situações, no entanto, como as quantidades são ocultadas, necessitam de maior abstração para serem respondidas.

A estrutura algébrica das quatro últimas situações-problema são as seguintes:

5. **Adição de quantidades desconhecidas iguais**
   Estrutura algébrica: $x = y + y \Rightarrow x\ (+ z) = y + y\ (+z)$?
6. **Subtração de quantidades desconhecidas iguais**
   Estrutura algébrica: $x = y + y \Rightarrow x\ (-z) = y + y\ (-z)$?
7. **Adição de quantidades desiguais desconhecidas:** com adição de quantidades desconhecidas, com uma quantidade maior que a outra.
   Estrutura algébrica: $x + y = x + y$, com $z > w \Rightarrow x + y\ (+ w) = x + y\ (+z)$?
8. **Subtração de quantidades desiguais desconhecidas**
   Estrutura algébrica: $x + z = y + y + z \Rightarrow x +z\ (-x) = y + y + z + (-y)$?

Nas duas situações envolvendo a descoberta de incógnitas, as crianças resolveram problemas que envolviam um sistema de equações. A primeira equação é uma relação entre duas variáveis, representada por x = y, indicando que as duas variáveis têm o mesmo valor. A segunda equação é uma equação que relaciona uma das variáveis (x) com um valor específico, retirado ou adicionado a ela. Estas questões se baseiam nos estudos de Godino, Gonzato, Whilhelmi (2014) e Almeida e Santos (2018),

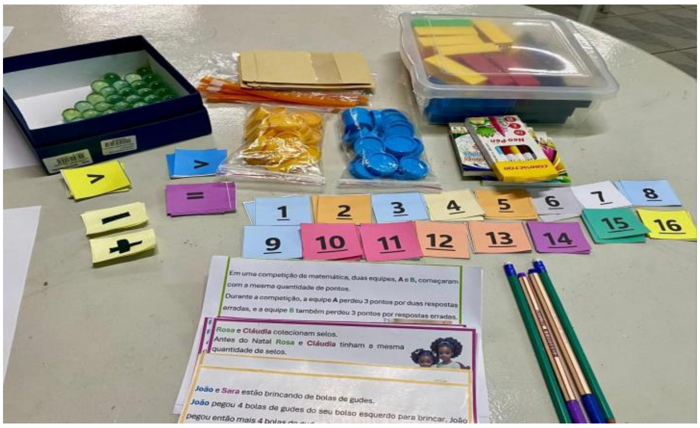
9. **Descoberta de incógnitas com adição de quantidades**
   Estrutura algébrica: x=y; onde x +2 = 10
10. **Descoberta de incógnitas com subtração de quantidades**
   Estrutura algébrica: x=y; onde 8 = x – 3

3.4.2.1 Procedimentos de intervenção na resolução das situações-problema

Os alunos resolveram todas as dez situações-problema, iniciais e finais, em um único momento de intervenção. Considerando a idade das crianças e a quantidade de situações-problema, optou-se por organizá-las e apresentá-las em níveis distintos.

As primeiras situações, com quantidades conhecidas, foram classificadas como Nível 1 e identificadas pela cor amarela. As situações com quantidades desconhecidas foram classificadas como Nível 2 e identificadas pela cor vermelha. As duas situações envolvendo a descoberta de incógnitas foram classificadas como Nível 3. Os nomes dos personagens também foram escritos em cores diferentes e destacadas em relação ao texto da situação-problema, considerando as possíveis dificuldades de leitura que as crianças poderiam enfrentar.

Figura 9 – Fichas de situações-problema e materiais manipuláveis



Fonte: arquivo de pesquisa.

Durante as resoluções, as crianças podiam optar por responder oralmente, utilizando recursos manipulativos disponíveis ou lápis e papel. Para apoiar esse processo, foram disponibilizados itens como lápis, papel e materiais de manipulação, como tampas de garrafa PET, palitos, caixas e fichas de numerais e símbolos matemáticos (Figura 9).

As situações-problema foram lidas pela pesquisadora, que em seguida verificou o entendimento dos enunciados pelas crianças. As fichas com as situações permaneciam à disposição das crianças para poderem reler quando necessário. Conforme as crianças resolviam as situações, eram indagadas pela pesquisadora sobre as estratégias e recursos utilizados para a resolução.

3.4.3 Intervenções com a balança e RED

Tendo como base, os estudos conduzidos por Freire (2007) e as orientações do Guia de Orientações Didática para o uso do RED, nas intervenções com os alunos foram utilizadas três estratégias: 1. Balança de dois pratos; 2. Utilização do recurso digital; 3. Notação com o RED e com lápis e papel.

Cada aluno participou das intervenções durante quatro dias de acompanhamento, cada uma com duração média de uma hora. O primeiro dia foi dedicado às situações-problema iniciais, sendo foram observadas as estratégias de resolução e conhecimentos iniciais. No segundo e terceiro dia, o aluno interagiu com a balança física de dois pratos ou utilizaram o RED.

3.4.3.1 Balança convencional de dois pratos

Compreendendo que uma balança tradicional do modelo com dois pratos, como representada no RED, não é mais tão comum no cotidiano ou do conhecimento infantil, a intervenção, além de intencionar resolver desafios com a balança aplicando conceitos algébricos como propriedades da igualdade e noção de equivalência, também pretendeu que as crianças compreendessem mais claramente o funcionamento desse tipo de balança. Assim, seguindo as sugestões de Castro-Filho et al (2021), nessa intervenção, de forma individual, as crianças tiveram acesso a uma balança de dois pratos e materiais, incluindo pesos conhecidos de 50g, 100g, 200g, 500g, 1kg e 2kg, além de sete recipientes diferentes pesando 150g (preto), 300g (verde e roxo), 350g (laranja), 400g (rosa), 450g (vermelho) e 900g (amarelo) com pesos não apresentados aos alunos (pesos desconhecidos); conforme apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Intervenção com a balança física de dois pratos

Fonte: arquivo de pesquisa

Os valores dos recipientes foram selecionados para exigir dos alunos o uso de diferentes estratégias para equilibrar a balança. Por exemplo, para descobrir o peso de um recipiente de 150g, a criança poderia colocar um peso conhecido de 200g em um prato da balança e, no outro prato, colocar o recipiente desconhecido junto com um peso de 150g. Se a balança ficasse equilibrada, a criança poderia concluir que o peso do recipiente desconhecido é 50g (200g - 150g). A criança também poderia colocar um peso conhecido de 100g em um prato da balança e, no outro prato, colocar o recipiente desconhecido juntamente com um peso de 50g. Se a balança equilibrasse, a criança poderia deduzir que o peso do recipiente é 150g (100g + 50g). Nos casos de dificuldade, foram realizados questionamentos orientadores e intervenções para ajudá-los a pensar sobre o equilíbrio da balança.

A intervenção foi iniciada com a explicação do propósito da atividade: descobrir o valor dos pesos desconhecidos utilizando a comparação de pesos conhecidos na balança de dois pratos. As perguntas iniciais para compreender o pensamento das crianças incluíram: "O que você sabe sobre balanças de dois pratos?", "Como você acha que essa balança funciona?", "O que você acha que acontecerá se colocarmos diferentes objetos em cada prato da balança?" e "Como você acha que podemos descobrir o peso de um objeto usando essa balança?".

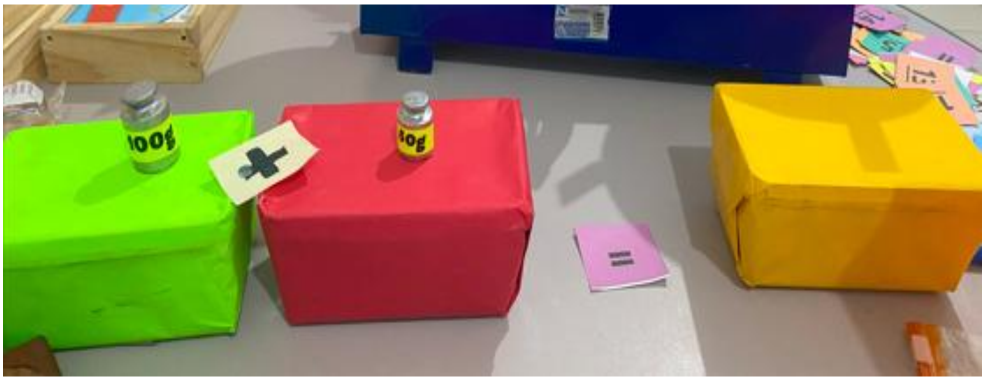
Em seguida, as crianças tentaram descobrir os pesos desconhecidos. Durante a atividade, foram observadas as interações das crianças com a balança. Algumas dificuldades que elas enfrentaram incluíram a compreensão do conceito de equilíbrio na balança, para o qual foi feita uma demonstração prática, a composição dos valores para formar o valor desconhecido e os conceitos de grama e quilograma.

Após a descoberta dos valores, foram apresentadas duas atividades. A primeira, baseada no estudo de Freire (2007), pedia que as crianças organizassem os pesos do mais leve para o mais pesado. A segunda, com base no estudo de Radford (2022), expunha as crianças a cinco sentenças matemáticas utilizando fichas de numerais, símbolos matemáticos (=, +, -, > e <), embalagens da atividade anterior e os pesos da balança convencional (Figura 11).

As sentenças matemáticas apresentadas às crianças foram:

1. Verde = Roxo
2. Verde (300g) + Vermelho (450g) + 150g = Amarelo (900g)
3. Amarelo (900g) – Rosa (400g) = Vermelho (450g) + 50g
4. Verde (300g) > Preto (150g)
5. Verde (300g) < Preto (150g) + 500g

Figura 11 – Sentenças matemáticas envolvendo embalagens, pesos e símbolos matemáticos



Fonte: arquivo de pesquisa

As crianças deveriam ler a sentença matemática e informar se eram verdadeiras ou falsas. A intenção foi verificar se as crianças conseguiam aplicar os conceitos algébricos de equivalência de forma prática, promovendo a compreensão das operações matemáticas e das relações entre os pesos.

3.4.3.2 RED Reino de Aljabar, o desafio da balança

Foi realizada a apresentação do recurso "O Reino de Aljabar, o Desafio da Balança" aos alunos, explicando o contexto, funcionamento do jogo, objetivos e formas de premiação e *feedback*. A contextualização envolveu explicar que os alunos teriam a oportunidade de ajudar o generoso califa Al Mansur a distribuir presentes de forma justa no Reino de Aljabar. Em conjunto com a criança, foi feita a leitura e contextualização do reino e do desafio enfrentado pelo califa.

A interação foi estimulada com as crianças assumindo o papel de sábios do reino, inserindo seus nomes e escolhendo um avatar masculino ou feminino. O funcionamento, incluindo como a balança virtual funciona, como os presentes com pesos desconhecidos são representados e como os alunos podem interagir com a balança para resolver os desafios, relacionando com a balança convencional. Os objetivos do jogo e as formas de premiação e *feedback* foram apresentados, conforme apareciam no recurso e as demandas das crianças.

Inicialmente, estava previsto que os alunos jogariam um primeiro nível como teste para garantir que compreendessem corretamente a dinâmica do jogo. No entanto, durante a aplicação piloto, observou-se que as crianças se cansavam ao repetir o mesmo nível, o que levou à decisão de remover o teste inicial no nível 1. Dessa forma, ficou a critério da criança repetir ou não o nível 1. As orientações sobre o uso das teclas, botões e os objetivos do jogo foram fornecidas, incluindo como movimentar os pesos, selecionar e posicionar os presentes com pesos desconhecidos, registrar os movimentos realizados, acessar o histórico de movimentos e anotações, e reiniciar a balança quando necessário.

Os alunos utilizaram o RED de forma sequencial, avançando pelos diferentes níveis de dificuldade e desenvolvendo estratégias para resolver os desafios com o menor número de movimentos possível. Durante o jogo, foram incentivados a prestar atenção às informações fornecidas nos botões "expressão" e "histórico" para auxiliá-los na progressão e avaliar a compreensão das notações algébricas presentes no RED. Os alunos foram questionados sobre o que os símbolos (=, >, <) que aparecem no botão expressão dizem sobre os pesos na balança e como eles poderiam ajudar a descobrir novos pesos de presentes. Também foram indagados sobre as “pistas” que o histórico de movimentos poderia fornecer para descobrir outros pesos de presentes. Foi dada a possibilidade de repetir o jogo, caso tivessem interesse.

Durante todo o processo do jogo, as crianças foram assistidas e indagadas sobre os motivos dos movimentos e estratégias utilizadas. O objetivo foi mapear as formas de pensamento e compreensão de como abordavam os desafios durante o jogo, buscando identificar padrões de pensamento, dificuldades e progressos ao longo dos níveis. Foram realizadas observações sobre as estratégias, movimentos e pensamentos dos alunos durante o jogo. Anotações foram feitas para registrar os padrões de pensamento, dificuldades e progressos identificados ao longo dos níveis, contribuindo para uma análise mais aprofundada das aprendizagens desenvolvidas pelas crianças durante a utilização do recurso "O Reino de Aljabar, o Desafio da Balança”.

3.5 Técnica de análise de dados

A análise de dados nesta pesquisa foi conduzida de maneira sistemática, considerando os instrumentos utilizados, as técnicas de coleta e a organização das informações, desde a tabulação até a identificação de padrões (Bogdan, Biklen, 1994). Como se trata de uma pesquisa qualitativa com delineamento metodológico de intervenção, optou-se pelo uso da técnica de codificação proposta por Strauss e Corbin (2008).

A técnica de codificação adotada consiste na segmentação e categorização dos dados de forma contínua, possibilitando uma análise comparativa das informações obtidas. Esse processo envolve a identificação de padrões emergentes, a construção de categorias interpretativas e a compreensão das relações entre os fenômenos observados. Especificamente, buscou-se compreender a evolução das estratégias empregadas pelas crianças, bem como a maneira como as aprendizagens algébricas foram sendo apresentadas ao longo das intervenções.

O processo de codificação foi baseado na metodologia da Teoria Fundamentada desenvolvida por Strauss e Corbin (1990, 2008). Essa abordagem estrutura a análise de dados qualitativos por meio de três tipos principais de codificação:

1. **Codificação Aberta**: Os dados foram fragmentados em unidades de análise, identificando-se conceitos e temas recorrentes nas respostas e interações das crianças durante a resolução das situações-problema, no uso do recurso digital e nas atividades com a balança de dois pratos.
2. **Codificação Axial**: Foram estabelecidas relações entre as categorias emergentes, conectando elementos que possibilitam uma visão integrada das estratégias utilizadas e das dificuldades encontradas pelas crianças.
3. **Codificação Seletiva**: Com base nas categorias definidas, foi realizada uma síntese interpretativa dos dados, permitindo a formulação de conclusões sobre a evolução do pensamento algébrico dos alunos ao longo do processo.

Dessa forma, as categorias de análise não foram estabelecidas a *priori*, mas emergiram do próprio processo de investigação, refletindo as dinâmicas observadas durante as intervenções. O rigor metodológico foi assegurado por meio da triangulação dos dados coletados, incluindo registros escritos, gravações audiovisuais e entrevistas, garantindo uma análise aprofundada e fundamentada na realidade dos participantes.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os resultados obtidos a partir da análise dos dados. Inicialmente são descritas as categorias utilizadas para a análise das situações iniciais e finais, em seguida, são apresentadas as respostas das crianças de acordo com cada categoria. Depois, são apresentadas as estratégias das crianças encontradas durante a utilização do recurso digital e da balança de dois pratos. Por fim, são comparados às respostas e registros das crianças das situações finais e iniciais

4.1. Categorias de análise das Situações-Problema

Para alcançar o objetivo de verificar quais conhecimentos as crianças possuem em relação à igualdade, desigualdade e incógnita, foram analisados os dados coletados das respostas dadas às situações-problema iniciais, bem como suas notações e respostas aos questionamentos da pesquisadora. Com base nos estudos de Freire (2007), as respostas das crianças foram observadas com base em três categorias principais: desempenho, estratégias de resolução e dificuldades observadas durante as intervenções, discutidas nas próximas seções.

4.1.1 Desempenho

O desempenho dos alunos foi observado tendo como base suas respostas às situações-problema e suas explicações que demonstram a compreensão sobre os conceitos de igualdade, desigualdade e incógnitas em situações-problema. O desempenho dos alunos foi analisado com base em três subcategorias, cada uma com seus próprios indicadores de desempenho, conforme descrito no quadro 2:

As categorias de desempenho: acerto imediato, correção de erro e erro contínuo, foram adaptados da pesquisa de Freire (2007), sendo neste estudo acrescentada a categoria, alteração do acerto.

Quadro 2 – Categorias de desempenho e indicadores

Desempenho	Descrição	Indicadores de Desempenho
1. Acerto Imediato	O aluno compreende imediatamente o conceito de igualdade, desigualdade ou descobre a incógnita no problema e acerta a resposta mesmo com refutações.	Consistência nas respostas corretas, compreensão clara dos conceitos de igualdade e desigualdade.
3. Correção do Erro	O aluno inicialmente erra ao identificar ou aplicar os conceitos de igualdade, desigualdade, não descobre ou erra a incógnita, mas consegue corrigir o erro após questionamentos.	Capacidade de reconhecer o erro, por meio de suas próprias explicações para adaptar estratégias e resolução.
4. Alteração do acerto	O aluno inicialmente acerta ao identificar ou aplicar os conceitos de igualdade, desigualdade ou descobre a incógnita, mas altera a resposta após questionamentos.	Insegurança na resposta, mudanças de respostas, dificuldades em compreender os conceitos ou de desenvolver alguma estratégia.
5. Erro Contínuo	O aluno continua errando na identificação ou aplicação dos conceitos mesmo após questionamentos.	Persistência no erro, dificuldades em compreender os conceitos ou de desenvolver alguma estratégia.

Fonte: Elaboração da autora

4.1.2 Estratégias de Resolução

As estratégias de resolução referem-se aos métodos que os alunos utilizam para abordar, resolver e explicar as situações-problema relacionadas aos conceitos de igualdade e desigualdade e incógnita. Estas estratégias são variadas e refletem diferentes níveis de compreensão matemática. Foram desenvolvidas com base em Freire (2007), sendo acrescentadas para este estudo, mais três categorias, sendo elas: material manipulável, iconumérica, e a representação física com materiais manipuláveis; e subcategorias: estratégia de cálculo mental e numérica. As estratégias identificadas são descritas no quadro 3.

Quadro 3 – Estratégias de resolução e indicadores

Estratégia	Descrição	Indicadores	Subcategorias
1. Cálculo Mental	O aluno resolve os problemas mentalmente, explicando oralmente como identificou a igualdade, desigualdade ou incógnita.	Não utilização de material manipulável ou registros numéricos, clareza no raciocínio sobre igualdade e desigualdade.	1.1 Adição ou subtração com comparação dos resultados 1.2 Sem adição ou subtração. Desconsideração das quantidades (iniciais, acrescentadas ou retiradas) iguais.
2. Icônica	O aluno utiliza ícones, desenhos ou representações visuais para resolver problemas que envolvem conceitos de igualdade, desigualdade e incógnita.	Uso de materiais concretos, desenhos ou esquemas para visualizar e diferenciar igualdade e desigualdade ou encontrar a incógnita.	
3. Numérica	O aluno utiliza números e operações matemáticas formais para resolver as situações-problema	Uso de expressões matemáticas, escrita de cálculos para demonstrar igualdade ou desigualdade	3.1 Operação para adicionar ou retirar valores e comparar quantidades finais 3.2 Operação para representar valores apresentados nas situações-problema e isolar as quantidades iguais adicionadas ou retiradas 3.3 Compor quantidades e comparar sentenças
4. Iconumérica	A criança mescla a utilização de elementos matemáticos e icônicos na resolução	Uso combinado de desenhos ou ícones e expressões matemáticas formais para resolver problemas	
5. Representação física	O aluno utiliza material manipulável para resolução das situações, como, tampas, sacos, bolas de gude.	Uso de materiais manipuláveis para visualizar e diferenciar igualdade e desigualdade ou encontrar a incógnita.	
6. Não definida	Adição de informações ao problema para justificar resolução	O aluno amplia o contexto do problema, introduz novas variáveis ou condições, utiliza conhecimentos prévios de outras áreas ou problemas semelhantes, e cria cenários hipotéticos, para explicar a resolução do problema	

Fonte: Elaboração da autora

Vale ressaltar que as estratégias de resolução nem sempre aparecem isoladas conforme descritas no Quadro 3. Neste estudo, em várias situações, as crianças combinaram duas ou mais estratégias, como, por exemplo, a utilização do cálculo mental juntamente com representações icônicas e numéricas.

4.1.3 Dificuldades

As dificuldades das crianças foram divididas em duas categorias de análises: manipular dados e resolver algoritmos, descritas no quadro 4:

Quadro 4 – Dificuldade de resolução e Indicadores

Categoria	Descrição	Indicadores
1. Manipular dados	O aluno tem dificuldade em manipular os dados dos problemas para identificar ou aplicar os conceitos de igualdade, desigualdade e incógnita, precisando ler várias vezes o enunciado para compreendê-lo.	Releituras frequentes do problema, dificuldade em identificar as informações relevantes para igualdade, desigualdade ou incógnita.
2. Resolver algoritmos	O aluno apresenta dificuldade em resolver problemas que envolvem algoritmos matemáticos para demonstrar igualdade ou desigualdade.	Erros em cálculos básicos, dificuldade em aplicar operações matemáticas corretamente para estabelecer igualdade ou desigualdade

Fonte: Elaboração da autora

4.2. Respostas às Situações Iniciais

Nesta seção, serão apresentadas as respostas das crianças de acordo com cada categoria, relacionando-as aos conceitos de igualdade e desigualdade com valores conhecidos; igualdade e desigualdade com quantidades desconhecidas; e a descoberta de incógnitas. Seguindo a ordem apresentada às crianças, as respostas estão organizadas em três grupos: situações-problema com valores conhecidos, situações-problema com valores desconhecidos, e as situações que mesclam valores conhecidos com desconhecidos.

4.2.1 Valores conhecidos

Foram apresentadas quatro situações com valores conhecidos do nível verde. Essas situações tinham como objetivo avaliar a compreensão das crianças sobre a aplicação direta dos conceitos de igualdade e desigualdade quando todos os valores eram fornecidos explicitamente.

4.2.1.1 Desempenho

Em relação ao desempenho, foram identificadas duas categorias de respostas: resposta imediata e correção de erro, exemplificadas a seguir com recortes das entrevistas com as crianças durante as sessões de intervenção. Foi verificado que as crianças não apresentaram "alteração de acerto" ou "erro contínuo" nas primeiras quatro situações.

<u>Resposta imediata:</u>

Para resolver a primeira SI[3] Daniele, aluna do 4º ano, responde à situação-problema 2 sobre a quantidade de bolas de gude de João e Sara:

> Danielle: Os dois têm 10.
> Pesquisadora: Os dois têm 10? Como que os dois têm 10? Explica para mim.
> Danielle: 4 mais 4 dá 8. Se a Sara tinha 8 também, e ela ganhou mais 2, dá 10.
> Pesquisadora: Mas por que você disse que 4 mais 4 dá 8? De quem é esse 4 mais 4?
> Danielle: Do João. João tinha 8 bolinhas, então Sara também tinha. Se a Sara também ganhou 2, dá 10.
> Danielle: João também ganhou mais 2, então isso significa que aqueles dois têm 10.

Do mesmo modo, Ana, do 3º ano, não teve dificuldade responder à situação e explicar como ela fez para chegar à solução da SI 4[4]:

> Ana: Daniel pegou 3. Patrícia pegou 6.

---

[3] João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

[4] Patrícia e Daniel estão brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram às suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez à sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas, Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

> Aí, Patrícia pegou mais 4. 7, 8, 9, 10.
> Daniel pegou mais 3 e pegou 6.
> Aí, Daniel voltou pela terceira vez. (lendo)
> Aí, Daniel pegou mais 4. Sete, oito, nove, dez...
> Dá a mesma quantidade.
> Aí, nessa hora, chegou um amigo deles, e a Patrícia deu para esse amigo seis (lendo).
> Aí, como ela deu seis, ela tinha...10...Deu seis. 9, 8, 7, 6, 5, 4.
> Ela ficou com 4
> E Daniel deu 3. Se ele tem 10... 9, 8, 7... Daniel tem mais
> Pesquisadora: Daniel tem mais? Por que que ele tem mais? Sabe dizer?
> Ana: Porque ele entregou, ele deu 3 e ela deu 6.
> E como ela tinha 10 e deu 6, fica 9, 8, 7, 6, 5, 4. Ela ficou com 4. Aí ele deu 3, 9, 8, 7, 6...

Nos dois exemplos, embora tenham optado por responder ao primeiro nível de perguntas apenas oralmente e informaram não saber como escrever as respostas com operações matemáticas, demonstram que as crianças foram capazes de resolver os problemas e comunicar seus processos de pensamento de forma coerente e lógica.

Correção do Erro:

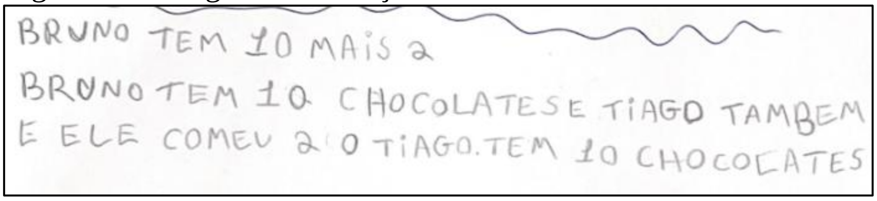
Na segunda SI[5], Wagner, inicialmente, teve dificuldade em entender como resolver, mas após releitura, corrigiu seu erro, como mostra o trecho a seguir:

> Wagner: Eu tava pensando em 30, tia.
> Pesquisadora: Por que 30?
> Wagner: Não sei. Deixa eu ver (pega a ficha do problema)
> Wagner: Ele (Thiago) comeu 2, o Thiago tem 10 chocolates. Então o Thiago ficou com 10 e o Bruno com 12.
> Pesquisadora: É isso? Posso ler de novo?
> Wagner: (confirma que sim com a cabeça)
> Pesquisadora: (leitura da situação) Você acha que após o recreio o Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que o Bruno ou você acha que um tem mais chocolates que o outro?
> Wagner: (apaga o dois do número 12 que havia escrito para o Bruno)
> Pesquisadora: Por que tu apagou o 2 aqui do Bruno?
> Wagner: Porque os dois tem 10. O Bruno comeu 2 no recreio. Ficou 10 também. É igual.

A Figura 12 a seguir apresenta a resolução feita por Wagner:

[5] Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro? Explique como pensou. Explique como pensou.

Figura 12 – Wagner - Resolução SI 2



Fonte: arquivo de pesquisa

Wagner inicialmente pensou que Tiago e Bruno teriam diferentes quantidades de chocolates após o recreio. No entanto, ao reler a situação-problema e reavaliar suas contas, ele percebeu seu erro e corrigiu seu raciocínio, concluindo corretamente que ambos teriam a mesma quantidade de chocolates. Esse exemplo ilustra a categoria "Correção do Erro", em que a criança, mesmo começando com uma resposta incorreta, consegue revisar seu pensamento e chegar à resposta correta através da autoavaliação e reflexão sobre o problema.

4.2.1.2 Estratégias de resolução

Durante a resolução do primeiro bloco de situações, nível amarelo, as crianças apresentaram estratégias que se inserem nas seguintes categorias: cálculo mental, icônica, numérica e representação físicas exemplificadas a seguir.

<u>Cálculo mental</u>

Nessa estratégia, as crianças não utilizaram qualquer forma de representação ou manipulação para resolver as situações, recorrendo apenas a cálculos realizados mentalmente. A estratégia de cálculo mental foi observada em duas situações: em situação de adição e subtração com comparação de valores totais e na situação sem adição ou subtração; conforme será detalhado a seguir.

Adição e Subtração com Comparação de Valores Totais

Luane, do 3º ano, para responder à primeira SI sobre a quantidade de bolas de gude, afirmou:

> Luane: Ele pegou 4 + 4 que dá 8 e depois ganhou mais duas, que deu dez. Ela também foi igual. Só que já tinha 8 e ganhou mais duas. Os dois ficaram iguais.

Danielle também utilizou a mesma estratégia que Luane ao adicionar mentalmente as quantidades da terceira SI [6] e comparou os resultados:

> Danielle: As duas não têm a mesma quantidade.
> Pesquisadora: Não têm a mesma quantidade? Por que não?
> Danielle: Porque se as duas tinham 7 e a Bárbara ganhou mais 6, ficou 13. Aí, a Joana recebeu só 13, então ela ficou com menos do que... a Bárbara.

Sem Adição ou Subtração

Além do cálculo mental em situação de adição e subtração com comparação de valores totais, Danielle continuou usando o cálculo mental, mas pareceu utilizar outra forma de pensamento para dar a mesma solução ao problema:

> Danielle: Elas ficaram com quantidade de presente diferente porque uma recebeu mais e a outra recebeu menos.
> Pesquisadora: Tá. Então elas não continuam com a mesma quantidade?
> Danielle: (Faz que sim com a cabeça)
> Pesquisadora: Certo. Quem tem mais é a...?
> Danielle: Bárbara. Porque recebeu mais.

Nessa segunda forma de resolução, Danielle não se ateve à adição das partes da situação. Ela apenas comparou as quantidades iniciais iguais e, ao perceber que as quantidades recebidas posteriormente eram diferentes, concluiu que não poderiam continuar iguais. Portanto, se Bárbara recebeu uma quantidade maior no segundo momento, ela teria mais presentes.

<u>Numérica</u>

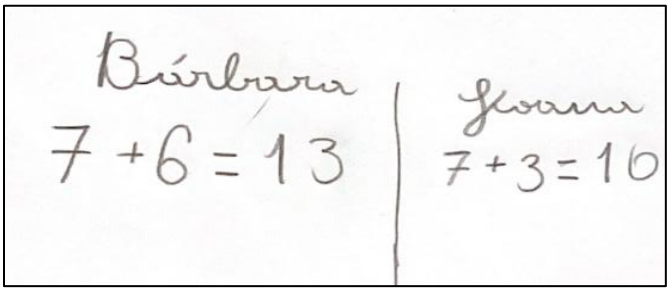
Nessa estratégia, as crianças utilizaram a representação numérica nas resoluções. A estratégia de numérica foi observada em duas situações: em situação de operação para adicionar ou retirar valores e comparar quantidades finais; e em situação de operação para representar valores apresentados nas situações-problema e isolar as quantidades iguais adicionadas ou retiradas; conforme será detalhado a seguir.

[6] Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia, Joana tem a mesma quantidade de presentes que Bárbara?

Operação para adicionar ou retirar valores e comparar quantidades finais

Para responder à quarta SI, Luane, adicionou as quantidades de laranjas, comparando os resultados das adições e escreveu a operação apresentada na Figura 13:

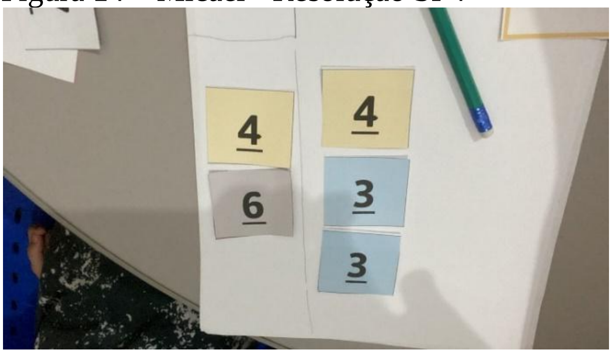
Figura 13 – Luane - Resolução SI 4



Fonte: arquivo de pesquisa

Já Micael fez das fichas de números impressos e operação escrita para resolver a SI 4 (Figura 14).

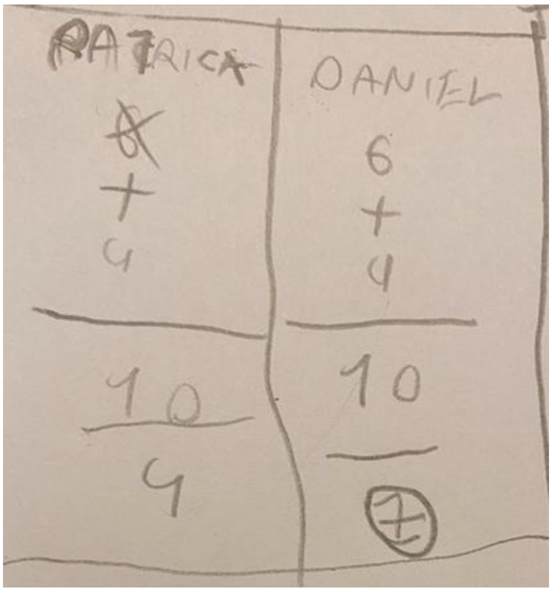
Figura 14 – Micael - Resolução SI 4



Fonte: arquivo de pesquisa

Ele utilizou as fichas conforme as quantidades apareciam no problema e depois removeu a quantidade, ficha do número 6 da Patrícia e a ficha de 3 do Daniel. Em seguida, escreveu operação (Figura 15)

Figura 15 – Micael – Resolução escrita SI 4



Fonte: arquivo de pesquisa

Micael riscou o número 6 de Patrícia para representar o valor que ela havia doado, registrou a quantidade total (10) e anotou o número 4 que restou nas fichas após a remoção do seis. Com as quantidades de Daniel, somou as duas quantidades que ele havia pegado inicialmente (3 + 3), escreveu seis, e mais quatro em seguida, registrando o valor total de 10. Em seguida, subtraiu a quantidade doada: “dez menos três é sete”

Operação para representar valores apresentados nas situações-problema e isolar as quantidades iguais adicionadas ou retiradas

José, aluno do 3º ano, também utilizou fichas numeradas para visualizar e organizar os valores atribuídos a Bárbara e Joana na terceira SI, mas utilizou outra forma de pensar. Ele isolou as quantidades iguais adicionadas, sem somar os totais das quantidades (Figura 16).

Figura 16 – Resolução SI 3 - José

Fonte: arquivo de pesquisa

José explicou como resolveu da seguinte forma:

> José: (procurando a ficha de número) Sete, sete, cadê o sete?
> Pesquisadora: O sete?
> José: É da Barbara.
> Pesquisadora: Tá, da Barbara
> José: Sete, mais sete da Joana. Seis.
> Pesquisadora: Seis? Para quem?
> José: Para Bárbara. Três, três, três, três, três (procurando a ficha de número). Três da Joana.
> Pesquisadora: E aí?
> José: Deixa eu ver se tem a mesma quantidade. Tem sete e sete. Três. Seis. Não, não tem.
> Pesquisadora: Não tem a mesma quantidade? Por quê?
> José: Porque, olha, sete, sete, né? Seis, aí tem um de três. Esse daqui tem que ter, aqui tem que ter mais três para transformar seis e ficar igual.

No recorte, José iniciou identificando as quantidades iniciais de cada personagem e adicionando quantidades mencionadas na situação-problema. Em vez de somar os valores totais, ele focou nas quantidades isoladas, verificando se cada parte tinha o mesmo valor. Quando observou que havia diferenças, José notou ainda que seria necessário ajustar as quantidades para alcançar a igualdade, demonstrando sua compreensão de como manipular as partes individuais para garantir que os valores finais fossem iguais.

Representação física

Nessa estratégia, as crianças utilizaram objetos físicos para auxiliar nas resoluções. Para representar a quantidade de bolinhas de gude que Joana e Tiago haviam ganho na SI 1, Daniel enfrentou dificuldades em somar os valores apresentados no problema. Para solucionar isso, ele utilizou bolinhas de gude como material manipulável (Figura 17)

Figura 17 – Resolução Daniel SI 1

Fonte: arquivo de pesquisa

Na Figura 17, Daniel separou as quantidades dos dois personagens e, conforme as operações do problema, foi adicionando e retirando as bolinhas de gude. Ao final, ele recontou a quantidade de bolinhas de cada personagem e verificou que os valores finais permaneciam iguais.

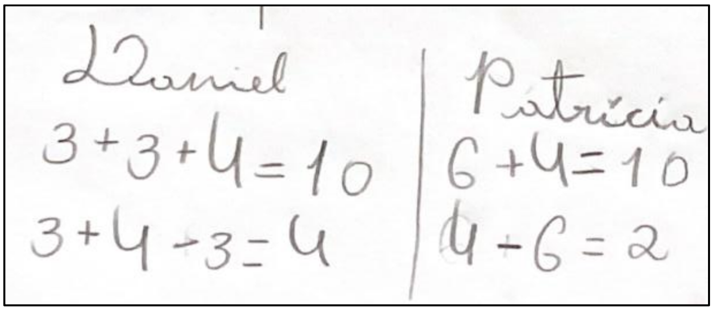
Wagner, embora tenha optado por cálculos mentais em outras questões, escolheu usar material manipulável nas situações que envolviam mais movimentos de adição e subtração. Na SI 4, onde um dos personagens retornava três vezes para pegar laranjas e o outro duas vezes, seguidas de retiradas de valores diferentes dos dois personagens, Wagner utilizou material manipulável. Ele adicionou e retirou as quantidades conforme apareciam no problema e recontou os objetos para chegar ao valor total correto.

Dificuldades

Nas situações com quantidades conhecidas as crianças tiveram dificuldades, apresentando erros em cálculos básicos, e dificuldade em aplicar operações matemáticas corretamente para estabelecer igualdade ou desigualdade.

Luane, por exemplo, concluiu corretamente, na SI 4, que Daniel terminou com uma quantidade maior que Patrícia e reconheceu a desigualdade entre eles. No entanto, cometeu erros nas operações ao determinar que Daniel tinha 6 laranjas e Patrícia 2 laranjas (Figura 18).

Figura 18 – Resolução Luane - SI 4



Fonte: arquivo de pesquisa

Ao registrar as operações de adição, se confundiu, indicando que 3 + 4 - 3 resultava em 4, sem considerar o valor total de Daniel, que era 10. O resultado correto seria subtrair os 3 adicionados, resultando em 7.

Da mesma forma, ao subtrair as quantidades de Patrícia, Luane indicou que ela pegou 6 laranjas inicialmente e depois mais 4, totalizando 10. Contudo, ao registrar a operação, subtraiu as 6 laranjas doadas das 4 adicionadas, em vez de subtrair do valor total (10) ou do valor inicial (6). Assim, concluiu que o valor final de laranjas de Patrícia era 2, ao invés de 4.

4.2.2 Valores desconhecidos

Foram apresentadas quatro situações com valores desconhecidos do nível vermelho. Essas situações tinham como objetivo avaliar a compreensão das crianças sobre a aplicação direta dos conceitos de igualdade e desigualdade quando todos os valores não eram fornecidos explicitamente.

<u>Desempenho</u>

Em relação ao desempenho, as crianças tiveram acerto imediato, alteração do acerto e erro contínuo.

Acerto imediato

Micael ouviu atentamente a leitura da quinta SI[7], releu silenciosamente e respondeu de forma precisa, utilizando fichas de números para representar as quantidades ganhas antes e depois do Natal:

> Micael: Elas tinham dez antes do Natal e ganharam mais dois. É um exemplo, tia!
> Pesquisadora: E os álbuns?
> Cláudia tinha dois e Rosa só um, não conta?
> Micael: E o álbum conta, tia? (releu o problema).
> Micael: Conta não! Aqui está falando é de selos, não de álbuns!

José teve desempenho parecido na oitava SI[8], quando concluiu que as quantidades finais não eram iguais, e conseguiu explicar claramente como chegou a essa resposta:

> José: Marcelo tem mais.
> Pesquisadora: Marcelo? Por que o Marcelo tem mais?
> André: Porque ele tem duas cestas. Colocou em duas cestas. Aí eles pegaram depois e juntaram, né?
> José: Aí depois, né, eles... Deram um para cada um.
> Pesquisadora: Deu para o irmão do Carlos.
> José: Uma cesta para o outro e outra cesta para o outro. Tá. Aí eles comeram, aí sobrou uma cesta do Marcelo.
> Pesquisadora: Ah, então o Marcelo ficou...com uma cesta.
> José: E mais o depósito.
> Pesquisadora: Ah, então o Marcelo ficou com a cesta e o depósito. E o Carlos?
> José: E o Carlos Ficou só com o depósito.

Nas duas situações, as crianças conseguiram operar com quantidades desconhecidas. Também foram capazes de identificar as informações importantes e isolar as irrelevantes, como se estivessem resolvendo uma equação. Micael focou na quantidade de selos, enquanto José distinguiu entre cestas e depósitos.

---

[7] Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

[8] Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais novo de Carlos foi à cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu para ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu para ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que o outro?

Alteração do Acerto

Luane teve dificuldade em compreender a situação sem quantidades claras, tentou se guiar pela ilustração da situação-problema. Afirmou que Cláudia, SI 5, teria maior quantidade porque ela teria colocado em dois álbuns e a outra apenas em um álbum, depois contestou e mudou de resposta.

> Luane: Eu não sei qual foi as quantidades que ela ganhou.
> Pesquisadora: Essa é a diferente desse nível. Não tem números. Mas você pode desenhar, se quiser.
> Luane: (tenta fazer o registro escrito, mas não consegue registrar algo sem quantidades).
> Luane: Mas, já tá dizendo aqui...mesma quantidade de selos antes e depois do Natal.

Novamente, quando indagada sobre os álbuns, repetiu que Claudia possuía mais selos, pois considerou a quantidade de álbuns.

Luane não conseguiu compreender que a quantidade de selos de Cláudia antes do Natal, x, e a quantidade de selos de Rosa também, x, pois a situação inicial é de igualdade. Se após o Natal, ambas receberam mais selos, y selos cada uma, então a nova quantidade de selos para ambas seria $x+y$. Independentemente de quantos álbuns elas possuam, se $x+y$ selos de Cláudia estão divididos em dois álbuns e os mesmos $x+y$ selos de Rosa em um álbum, a quantidade de selos permanece a mesma para ambas: $x+y=x+y$.

Erro contínuo

Danielle ouviu a leitura da SI 8, releu silenciosamente e compreendeu inicialmente de forma equivocada, concluindo que as quantidades de biscoitos ao final eram iguais. Mesmo após a explicação da pesquisadora, Danielle manteve sua resposta, afirmando que as quantidades de ambos os personagens permaneciam iguais.

> Danielle: Eles têm as mesmas quantidades.
> Pesquisadora: Por quê?
> Danielle: Porque se Marcelo deu uma cesta para... Não, Carlos deu uma cesta para o irmão mais novo dele, e Marcelo deu uma de suas cestas para Carlos, eles continuaram com as mesmas quantidades.
> Pesquisadora: Ele deu cesta para o Carlos? Não. O Carlos deu para o irmão uma cesta de biscoito e o Marcelo deu também para o irmão do Carlos uma das cestas de biscoito.
> Danielle: O Carlos ficou com a mesma quantidade que o Marcelo também.
> Pesquisadora: Por quê?
> Danielle: Se eles tinham a mesma quantidade de biscoito, eles botaram no depósito para depois comer. [...] Aí Carlos deu para ele sua cesta de biscoito. Marcelo deu

para ele uma de suas cestas. Uma de suas cestas.
Pesquisadora: Então, o Marcelo ficou com o quê e o Carlos ficou com o quê?
Danielle: O Carlos ficou com a mesma quantidade que ele tinha e o Marcelo também.
Pesquisadora: Tá, mas era a quantidade...
Danielle: Igual.
Pesquisadora: Igual. E os biscoitos que estavam nas cestas, não contam? E os do depósito? Pensa aí.
Danielle: Até mesmo com o depósito eles ficam com a mesma quantidade.
Pesquisadora: Certo, mesmo dando para o irmão do Carlos, eles continuaram com a mesma quantidade?
Danielle: Sim.

Daniel teve resolução parecida com a de Danielle, quando considerou que o Rodrigo tinha maior quantidade de conchas porque tinha mais caixas que André na SI 6[9].

Pesquisadora: Quem tem mais é o André?
Daniel: Por enquanto tá empate.
Pesquisadora: Empate?
Daniel: (lendo) Dividiu igualmente em duas caixas.
Pesquisadora: É, o Rodrigo.
Daniel: Então o André pegou as conchas e colocou numa caixa. E o Rodrigo?
Pesquisadora: Colocou em duas.
Daniel: O Rodrigo agora tá na frente.
Pesquisadora: Por que ele tá na frente?
Daniel: Porque Rodrigo pôs as conchas na caixa grande e André dividiu igualmente em duas caixas pequenas.
Pesquisadora: Está empate ou tem um ganhando?
Daniel: Rodrigo tá ganhando.
Pesquisadora: Por quê?
Daniel: Porque ele tem duas caixas.
Pesquisadora: E os sacos que eles encontraram?
Daniel: Os sacos sumiram.
Pesquisadora: Então só contam as caixas?
Daniel: É.
Pesquisadora: Quem tem mais conchas?
Daniel: Rodrigo.
Pesquisadora: Por que ele tem duas caixas?
Daniel: É.

É interessante notar que, embora os desempenhos de Danielle e Daniel sejam semelhantes e ambos sejam alunos do 4º ano, eles utilizam termos diferentes para expressar sua compreensão. Danielle usou expressões como "mesmas quantidades" e "igual", enquanto Daniel utilizou "empate" e "está na frente" para ilustrar igualdade e desigualdade. Isso pode demonstrar diferentes níveis de compreensão e de pensamento, revelando como cada aluno

---

[9] Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo pela manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez, cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

internaliza e comunica conceitos matemáticos de maneiras distintas.

Estratégias de Resolução

Para resolver as situações iniciais com valores desconhecidos, as crianças utilizaram cinco estratégias diferentes: cálculo mental, numérica, iconumérica, representação física e categoria de representação não definida.

Cálculo mental

Na resolução da SI 8, Apesar não utilizar nenhum registro escrito ou material de manipulação, André chegou corretamente à conclusão de que as quantidades finais não eram iguais, conforme o trecho da entrevista a seguir:

> José: Porque ele tem duas cestas. Colocou em duas cestas. Aí eles pegaram depois e juntaram, né?
> Pesquisadora: Aí depois pegaram mais.
> José: Aí depois, né, eles... Deram um para cada um.
> Pesquisadora: Deram para o irmão do Carlos.
> José: Uma cesta para o outro e outra cesta para o outro. Aí eles comeram, aí sobrou uma cesta do Marcelo.
> Pesquisadora: Ah, então o Marcelo ficou com uma cesta.
> José: E mais o depósito.
> Pesquisadora: Ah, então o Marcelo ficou com a cesta e o depósito. E o Carlos?
> José: E o Carlos Ficou só com o depósito.

José foi capaz de manipular mentalmente as quantidades, chegando à conclusão correta sobre a desigualdade das quantidades finais de biscoitos entre Marcelo e Carlos.

Wagner também usou a mesma estratégia solução para a SI 7:[10]

> Wagner: Lucas pescou mais.
> Pesquisadora: Mas tá dizendo aqui que no sábado eles pescaram igual. Então...o sábado não importa? Só importa o domingo?
> Wagner: Sim, importa o sábado e o domingo.
> Mas quando a senhora contar, o Lucas tinha mais que o Francisco. Então quando eu junto o sábado e o domingo...O Lucas tem mais.

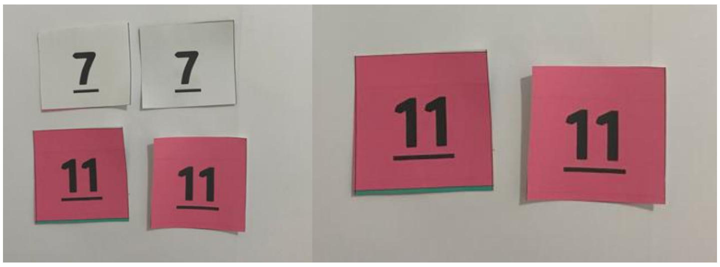
[10] Em um fim de semana, Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram que Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?

Numérica

Operação para adicionar ou retirar valores e comparar quantidades finais

Micael utilizou fichas numéricas (Figura 19) para representar os valores apresentados na SI 6 e isolar as quantidades iguais retiradas. Ele usou fichas de números para criar e representar quantidades encontradas pela manhã e à tarde, fichas com os números 7 e 11 para cada personagem.

Figura 19 – Resolução Micael – SI 6



Fonte: arquivo de pesquisa

Quando indagado sobre a quantidade de sacos, afirmou:

> Pesquisadora: E os sacos que sumiram?
> Micael: Tanto faz! Como eles encontraram a mesma quantidade de manhã e a mesma quantidade à tarde e os sacos sumiram, voltou a ficar igual do começo.

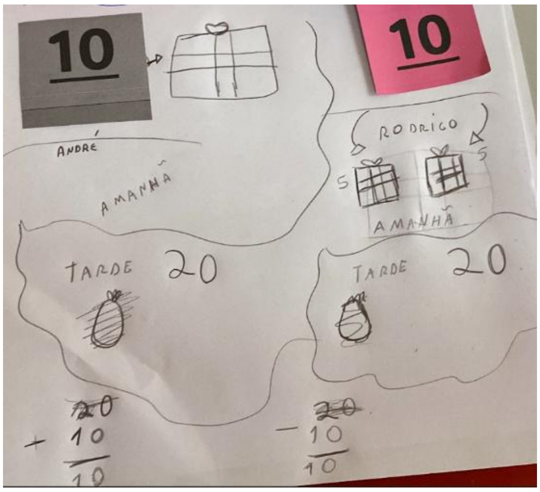
Micael removeu a ficha com o número 7 da representação, indicando que a quantidade dos sacos havia sumido, demonstrando a compreensão de que as quantidades finais voltaram a ser iguais após a remoção dos sacos.

Iconumérica

Na sexta SI (Figura 20), Vanessa utilizou desenhos e números para concluir que Rodrigo e André tinham quantidades iguais de conchas.

Na imagem, Vanessa desenhou uma caixa maior e escreveu o número dez para representar as conchas encontradas por André. Para Rodrigo, desenhou duas caixas menores com a mesma quantidade total, dividindo cinco conchas em cada. Para representar as quantidades encontradas à tarde, desenhou um saco para André e outro para Rodrigo, indicando vinte conchas para cada um. Em seguida, riscou os sacos para mostrar que foram perdidos. Vanessa registrou a operação 20 - 10 = 10, mas, em vez de realizar a subtração, simplesmente riscou o número 20 e manteve o número 10, indicando que as quantidades finais se mantiveram iguais.

Figura 20 – Resolução Vanessa - SI 6



Fonte: arquivo de pesquisa

Não definida

Diante da dificuldade de operar com quantidades desconhecidas, as crianças, na tentativa de encontrar uma solução, criaram situações e justificativas que pudessem responder ao questionamento, mesmo sem uma relação matemática clara.

- **Luane**, sobre as figuras e álbuns da quinta SI: "A Cláudia tem mais porque tem figuras repetidas."
- **Ana**, na quinta SI, justificou a quantidade maior de conchas de Rodrigo, contrariando as informações do texto: "Rodrigo tem mais. Porque ele foi de tarde, pegou mais conchas e o André não foi."
- **André**, para justificar a maior quantidade de peixes de Lucas na sexta SI, disse: "Ele pescou mais porque pescou peixes maiores."
- **Wagner**, sobre os depósitos e biscoitos da oitava SI: "Quem tem uma cesta tem muito mais que o depósito." Quando informado que as quantidades eram iguais, completou: "Só o Carlos deu biscoitos para seu irmão, por isso Marcelo tem mais," mesmo sendo informado que ambos os personagens doaram biscoitos.
- **Micael**, sobre a mesma situação com os biscoitos, respondeu: "Se eles guardaram para comer depois, não conta," mesmo sendo informado que todos os biscoitos contavam na situação.

Dificuldades

As dificuldades enfrentadas pelas crianças ao lidar com situações envolvendo quantidades desconhecidas, refletiu-se na manipulação dos dados das questões. Durante esses momentos, surgiram as seguintes informações e questionamentos:

- **Daniel**, insatisfeito com a ausência das quantidades de selos nos álbuns da SI 5, perguntou: "É... mas... e ela recebeu quanto aqui?"
- **José**, também sobre a quantidade de selos:

> José: Tá difícil.
> Pesquisadora: Por que tá difícil?
> José: Porque dessa vez não tem número.

- **Ana**, ao explicar o motivo de não saber as quantidades de biscoitos de Marcelo e Carlos, afirmou: "Não tem números, tia."
- **Wagner**, ao explicar por que considerava as questões do nível vermelho mais difíceis: "O amarelo é um pouquinho mais fácil. Porque tem números e dá para a gente lembrar."
- **Danielle**, ao explicar por que achou o nível vermelho mais difícil que o amarelo, afirmou:

> Danielle: O amarelo era mais fácil. [...] Porque a gente tinha número.
> Pesquisadora: E com o número é mais fácil por quê?
> Danielle: Porque dá para somar.
> Pesquisadora: E esse aqui não dá não? Por que não dá para somar esse?
> Danielle: Porque não tem número para somar.

As situações exemplificam as dificuldades das crianças ao lidar com problemas que envolvem quantidades desconhecidas.

4.2.3 Incógnitas

Foram apresentadas duas situações com descobertas de incógnita. Nestas situações, os alunos tiveram desempenho, correção do erro, erro contínuo, cálculo mental, numérica, manipulável e dificuldades que serão descritas a seguir.

Desempenho

As análises realizadas permitiram identificar três categorias principais no desempenho dos estudantes ao resolverem as situações-problema: acertos imediatos, correção de erros e erros contínuos que serão apresentadas a seguir.

Acerto imediato

Para resolver a SI 9 [11], Vanessa tentou descobrir a quantidade de adesivos que Lucas ganhou durante as férias, respondeu:

> Vanessa: Quatro.
> Porque cinco mais cinco, não dá 10
> Então é 9
> Pesquisadora: Porque que você queria chegar em 9?
> Vanessa: (releu) ele ganhou quatro, porque cinco mais cinco é 10 e baixa um
> Pesquisadora: Então, você queria chegar em 9 porque era o total do Pedro?
> Vanessa: Sim. E também porque diz aí "quantidades iguais"

No recorte, podemos observar que Vanessa está usando o pensamento algébrico, mesmo sem utilizar explicitamente símbolos ou notações algébricas. O processo pelo qual ela passa para encontrar a quantidade de adesivos que Lucas ganhou envolve a compreensão de uma incógnita, que é o número de adesivos ganhos nas férias.

Primeiro ela identifica que há uma quantidade desconhecida que precisa ser encontrada. Neste caso, é o número de adesivos que Lucas ganhou. Ela entende que a quantidade de adesivos deve satisfazer a condição de igualdade entre as quantidades ganhas por Pedro e Lucas e utiliza o cálculo mental para testar diferentes possibilidades, como testar "cinco mais cinco" e depois ajustar para encontrar o número que satisfaz a condição dada no problema. Ao perceber que "cinco mais cinco" dá 10, que é maior do que 9, ela ajusta seu pensamento para "cinco mais quatro", mostrando um entendimento de subtração como ajuste de valores para satisfazer uma condição de igualdade.

Correção do erro

[11] Lucas e Pedro começaram as férias com a mesma quantidade de adesivos. Durante as férias, Lucas ganhou 2 adesivos de seu primo e Pedro ganhou 2 adesivos de sua irmã. No final das férias, Lucas tinha 10 adesivos. Quantos adesivos Pedro tinha no início das férias?

José começou a responder à SI 10 [12]utilizando as fichas de números, como havia feito nas situações com quantidades conhecidas. Ele colocou as fichas dos números oito e três para cada personagem, pensou e parou. Ao ser indagado sobre com quantos pontos a equipe A começou, percebeu que talvez a estratégia das fichas não funcionasse, então repensou, mudou de estratégia e respondeu:

> José: Doze. (pensado)
> Pesquisadora: Doze? A equipe A começou com doze.. por que ela começou com doze?
> José: Por que se perder três.. Doze.. Menos três.. Faz se formar... Doze.. onze.. Onze.. Dez..nove.. (com os dedos)
> Pesquisadora: E...
> José: Aqui tá os três, né? (mostrando os três dedos)
> Pesquisadora: Os três que perderam, né?
> José: Os três que perderam, né? Aí, vou perder agora, deixa eu ver. Esse é o doze, aí onze, aí dez, aí nove, aí vai se formar oito (baixando os dedos).
> Pesquisadora: Como que se formou oito? Perdendo três. Tinha 12, perderam 3, aí ficou 8, ficou 9, depois se formou 8?
> José: O 9, olha... (pensando) [...]
> Pesquisadora: Como que o 9 se transformou em 8?
> José: Então eles tinham 11.
> Pesquisadora: É? Por Que que eles tinham 11?
> José: Porque...Olha.. 11, 10, 9, aí 8.
> Pesquisadora: Mas quem tinha 11 no começo?
> José: A equipe A.
> Pesquisadora: A equipe A? E a equipe B tinha quanto no começo?
> José: Tinha também 11.

Assim como Vanessa na seção anterior, José percebeu o valor a ser descoberto e a relação de igualdade que esse valor deveria corresponder. Ele testou o número doze, mas não conseguiu justificar por que dava nove e não o valor total esperado. Então, repensou e compreendeu que o valor inicial da equipe A seria 11, assim como também o da equipe B.

Erro contínuo

Para solucionar a SI 8, Micael também tenta utilizar as fichas numeradas. Mesmo sabendo que o valor total deveria ser nove, ele altera a ordem da situação, dizendo que havia ganho nove e ficado com 14.

No trecho, Micael, enquanto escuta a leitura da SI, inicia pegando fichas de números (estratégia numérica), cinco e nove para cada personagem

---

[12] Em uma competição de matemática, duas equipes, A e B, começaram com a mesma quantidade de pontos. Durante a competição, a equipe A perdeu 3 pontos por duas respostas erradas, e a equipe B também perdeu 3 pontos por respostas erradas. Se a equipe B terminou com 8 pontos, quantos pontos cada equipe tinha no início?

Micael: Eles tinham a mesma quantidade no começo e no final, tia?
Pesquisadora: É. Aí quer saber quantos adesivos o Lucas ganhou
Micael: 14? (Somando os dois valores das situações)
Pesquisadora: Eles tinham 5.. Ganharam...
Micael: Nove
Pesquisadora: E ficaram com 14?
Micael: Amham
Pesquisadora: Tá. O Lucas e o Pedro ganharam quanto?
Micael: É pra juntar os dois?
Pesquisadora: Não. Quer saber quanto cada um ganhou.
Pesquisadora: Eu sei que eles começaram com 5 e eu sei que eles terminaram com..9
Micael: (reler)
Pesquisadora: Diz quantos adesivos eles ganharam?
Micael: Não. Só a mesma quantidade
Pesquisadora: E aí, eles ganharam quanto?
Micael: A mesma quantidade
Pesquisadora: Mas qual a quantidade?
Micael: 14
Pesquisadora: Então, ele tinha 5 no começo, ganhou 14 e ficou com 9?
Micael: Não! Ele ganhou 9 e ficou com 14 no final
Pesquisadora: Onde tá dizendo que ele ganhou 9?
Micael: É mesmo! Mas... é 14, tia.

No recorte, Micael tenta encontrar a relação entre os valores iniciais e finais, mas inicialmente se confunde com a ordem e os valores, acreditando que deve somar os dois. Ao repensar a situação, ele tenta ajustar a situação à sua resposta, compreendendo que talvez a resposta não seja 14. No entanto, não conseguindo pensar em outra relação para as quantidades, mantém a resposta anterior.

Estratégias de resolução

As estratégias de resolução identificadas durante a análise foram classificadas em três categorias principais: **cálculo mental**, **abordagem numérica** e **uso de materiais manipuláveis**. Essas categorias refletem as diferentes formas utilizadas pelos estudantes para resolver as situações-problema, evidenciando tanto a diversidade quanto a adaptabilidade de suas estratégias ao contexto das atividades.

Cálculo mental

Wagner e Micael utilizaram cálculo mental para resolver as duas situações problemas com valores conhecidos e desconhecidos

Wagner durante a resolução da SI 9:

Wagner: Ganhou 9.

> Pesquisadora: Mas aqui tá querendo saber quantos adesivos eles ganharam aqui nas férias
> Wagner: Aqui tá dizendo que ele tem 9. O primo dele deu quatro pra ele
> Pesquisadora: Porque o primo deu quatro? Porque que tu acha que é 4?
> Wagner: E o Lucas... tem as mesma quantidade
> Pesquisadora: Mas porque que tu pensou que o primo deu quatro adesivos?
> Wagner: O Lucas e o Pedro ganharam cinco adesivos... no começo... o primo dele deu quatro...A irmã dele também deve ter dado quatro. E os dois tem a mesma quantidade
> Pesquisadora: Porque que tu pensou assim: "Eu acho que é quatro"
> Wagner: Tia, porque não tem um número maior que o quatro que dá nove.
> Pesquisadora: Aah! Então tu pensou em um número que juntando com o cinco desse nove?
> Wagner: Isso!

Micael durante a resolução da SI 10:

> Micael: Onze!
> Pesquisadora: Porque onze?
> Micael: Porque aqui tá dizendo que ela ficou com 8 pontos...
> Pesquisadora: Mas aqui tá falando da equipe B, eu tô perguntando da A
> Micael: a A também perdeu 3 pontos!
> Pesquisadora: Foi?
> Micael: Foi. As duas começaram com 11
> Pesquisadora: Porque que você pensou em 11?
> Micael: Porque aqui tinha 8, né? Aí coloquei o 8 na minha memória e contei mais três...Oito, nove, dez, onze!
> Pesquisadora: E porque que você somou mais 3?
> Micael: Por que eles não perderam três? Aí eu somei com quanto que eles começaram...

Embora tanto Micael quanto Wagner tenham chegado a respostas corretas e utilizado estratégias mentais para realizar as operações, os caminhos de pensamento que seguiram foram diferentes. Wagner conseguiu identificar a incógnita da questão e pensou em uma estratégia para solucioná-la, encontrando um número que somado a cinco resultasse em nove. Já Micael, do mesmo modo de resolução das outras questões, apenas somou os valores presentes na situação para chegar à resposta

Numérica

José, utilizou as fichas numeradas para encontrar a solução da nona SI (imagem N), colocando as quantidades de cada de Lucas e Pedro

> José: Cinco e cinco. (uma ficha de número para cada personagem)
> Pesquisadora: Tá, tinham cinco e cinco. Certo.
> José: 9 e 9 (para cada personagem)
> O Lucas ficou com o 5.
> Pesquisadora: Tá, Mas aqui tá perguntando quantos adesivos o Lucas ganhou.
> José: Porque no começo eles tinham cinco adesivos, né?
> Pesquisadora: O Pedro ficou com nove adesivos no total. Quantos adesivos o Lucas ganhou?

José: Nove também.
Pesquisadora: Ganhou nove? Mas aí nove é o total. Ele ganhou nove nas férias e ficou com nove, foi isso?
José: Ele ganhou cinco e dois, né? Aí depois ganhou nove da sua irmã.
Pesquisadora: É, ele ganhou nove da irmã. Então ele tinha cinco, ganhou dois e terminou com nove. Foi? Certeza?
André: Sim.

Na tentativa de continuar utilizando as fichas com números, José se confundiu na resolução da SI. Primeiro, disse que Lucas ficaria com cinco, mas, ao ser lembrado que deveria descobrir quantos adesivos Lucas havia ganho nas férias, disse que havia ganho cinco, depois dois, e mais nove da irmã.

Neste trecho, José tenta usar uma abordagem visual com os números para resolver o problema, mas se perde na contagem e no entendimento dos valores envolvidos. Ele inicialmente identifica os valores iniciais corretamente e a relação de igualdade entre eles, mas se confunde ao somar os valores ganhos e ao relacionar esses valores com o total final. A repetição e a tentativa de ajuste demonstram a dificuldade de José em manter a coerência na lógica de pensamento para a solução.

Material Manipulável

Para determinar com quantos pontos a equipe A começou o jogo da décima SI, Vanessa utilizou discos amarelos.

Andressa: três
Pesquisadora: três?
Andressa. Não. Quatro.
Pesquisadora: Quer dizer que a equipe A começou com quatro, por quê?
Vanessa: Não. Acho que ela começou com seis (Colou 6 discos amarelos para a equipe A)
Pesquisadora: Porque que tu colocou 6 para a equipe A?
Vanessa: Porque se ela perdeu três... (pensando)
(Coloca mais três discos na mesa)
Vanessa: Pronto já tenho a conclusão. (coloca mais dois discos)
Vanessa: Eles estavam com 11. Perderam... (retira três discos)
E a equipe B perdeu 3 também. Então, as equipes terminaram com a mesma quantidade.
Pesquisadora: E com quantos pontos a equipe A começou?
Vanessa: A equipe A começou com seis pontos.
Pesquisadora: E ela terminou com quanto a A?
Vanessa: terminou com três.

Vanessa utilizou uma abordagem prática para resolver o problema, manipulando discos amarelos para representar os pontos das equipes. Inicialmente, ela supôs um valor e depois ajustou sua estratégia, adicionando e retirando discos conforme pensava na relação entre os pontos ganhos e perdidos. Concluiu que ambas as equipes começaram com 11 pontos e terminaram com a mesma quantidade. No entanto, ao revisar sua solução, Vanessa voltou à ideia inicial de que a equipe A havia começado com 6 pontos e perdido três. Esse ajuste não reflete a estratégia de pensamento que ela construiu durante a resolução, nem o entendimento da igualdade entre as quantidades finais após subtrair os pontos perdidos.

<u>Dificuldades:</u>

Nas situações que envolviam valores conhecidos e desconhecidos, a principal dificuldade dos alunos residiu em compreender o contexto apresentado e em manipular adequadamente os dados fornecidos, especialmente no uso correto das operações de adição e subtração, conforme será apresentado a seguir.

Manipular dados:

Nas duas situações com incógnita, Luane teve bastante dificuldade em compreender o que a situação pediu e descobrir quais valores e operações deveriam ser manipulados

Luane durante a SI 9:

> Luane: 9 também
> Pesquisadora: Mas aqui tá dizendo que Lucas ganhou alguns adesivos e Pedro também ganhou alguns adesivos... E quer saber quantos adesivos Lucas ganhou
> Luane: Não sei
> Pesquisadora: O Lucas terminou com quanto? Sabe dizer?
> Luane: Não
> Pesquisadora: Não sabe?
> Luane: (releitura)
> Luane: Lucas tinha cinco igual do Pedro...E ganhou mais... não sei não

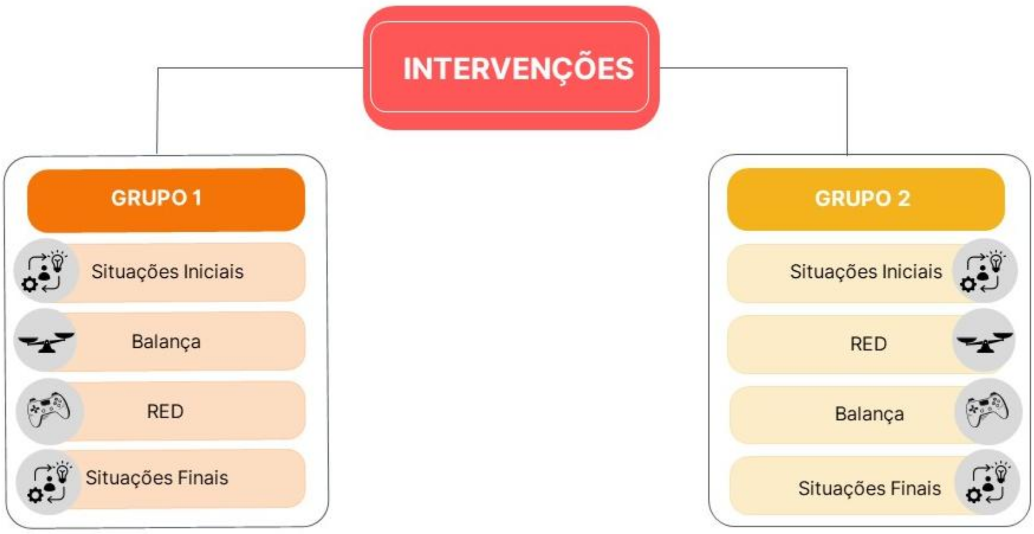
Luane na SI 10, escreve um papel a quantidade de pontos perdidos por cada equipe, 3, e a quantidade de respostas erradas, 2, e escreve a subtração 3-2, mas não consegue prosseguir na resolução. Assim como Luane, Daniel também não conseguiu chegar a uma compreensão e solução das situações que envolviam manipulação de números conhecidos e desconhecidos.

4.3 Estratégias na utilização do RED

Nesta seção, serão apresentadas e descritas as estratégias que os alunos utilizaram durante a interação com o recurso digital. As estratégias adotadas pelas crianças ao utilizarem o RED demonstram sua maturidade em matemática, bem como o nível de familiaridade com o recurso.

Para este estudo, as crianças foram divididas em dois grupos (Figura 21). Ambos realizaram as mesmas atividades, mas em sequências diferentes. As crianças do Grupo 1 começaram com as Situações Iniciais (SI), seguidas pela utilização da balança de dois pratos, depois o RED, e por fim, as Situações Finais (SF). Já no Grupo 2, a ordem da utilização do RED e da balança foi invertida: primeiro elas utilizaram o RED e depois a balança de manipulação física.

Figura 21 – Sequência de intervenção dos grupos



Fonte: elaboração da autora

Para categorizar as estratégias no uso do RED, baseamo-nos no estudo de Freire (2007), que utilizou a versão anterior do Reino de Aljabar, aplicando apenas o primeiro nível do recurso, no qual todos os pesos estavam disponíveis para descobrir os pesos dos presentes. Neste estudo, no entanto, as crianças utilizaram todos os quatro níveis, demandando estratégias mais elaboradas. À medida que o nível aumentava, a quantidade de pesos disponíveis para encontrar o valor dos presentes diminuía: começava com nove pesos conhecidos, depois sete pesos conhecidos, e em seguida apenas três pesos conhecidos. Dessa forma, as crianças precisaram adotar arranjos mais sofisticados para descobrir os pesos dos nove presentes, que variavam de 1 a 10.

Nas seções seguintes, cada estratégia será definida e exemplificada com situações vivenciadas durante o estudo. Após a descrição das estratégias e suas subcategorias, serão apresentadas as diferenças de procedimentos observadas entre os dois grupos de estudo.

4.3.1 Categorias de estratégias no uso do RED

O Reino de Aljabar tem como objetivo que as crianças utilizem pesos conhecidos para descobrir pesos desconhecidos (presentes) cujos valores variam de 1 a 10. Conforme o avanço dos níveis, a quantidade de pesos conhecidos diminui e as crianças precisam criar estratégias para descobrir os pesos desconhecidos. A intenção é que as crianças descubram os pesos dos presentes desconhecidos utilizando o menor número de movimentos possíveis, criando estratégias para reduzir os movimentos. Assim, quanto menos movimentos as crianças executam durante o jogo, mais acreditamos que elas estão criando estratégias eficientes.

Foram utilizadas as gravações de telas do RED e as entrevistas realizadas com as crianças durante a utilização do recurso, e as estratégias das crianças foram organizadas em categorias com base em Freire (2007).

No estudo de Freire (2007), foram categorizadas seis estratégias: 1. Análise do Intervalo, 2. Observação dos Pesos Registrados, 3. Busca pela Metade, 4. Intercalação de Pesos, 5. Sequência de Pesos e 6. Uso das Extremidades. As categorias de estratégias foram ampliadas e adaptadas, como na estratégia Intercalação de Pesos, que foi dividida entre Intercalação de Pesos Conhecidos e Intercalação de Pesos Desconhecidos. Outras estratégias e subcategorias foram encontradas para abranger os novos arranjos de pensamento que as crianças utilizaram para enfrentar os desafios. No quadro 5 são apresentadas e descritas as estratégias identificadas durante o estudo com o uso do RED.

As estratégias identificadas demonstram uma variedade de abordagens que as crianças utilizam para resolver os desafios no RED. Cada estratégia reflete um nível diferente de compreensão e de pensamento, mostrando como as crianças podem adaptar suas técnicas à medida que enfrentam níveis de dificuldade crescente. Nas próximas subseções, cada uma dessas estratégias será detalhada e ilustrada com exemplos práticos das interações das crianças durante o estudo

Quadro 5 – Estratégias no uso do RED

Estratégia	Descrição	Subcategorias
1. Análise do Intervalo	A criança escolhe um intervalo de possíveis pesos para encontrar o peso do presente, ajustando o intervalo com base em comparações.	1.1. Análise do Intervalo com uso da Expressão
		1.2 Análise do Intervalo com uso do Histórico
2. Observação dos Pesos Registrados	Observação dos pesos registrados escolhendo um peso ainda não utilizado.	
3. Busca pela Metade	Escolha de um peso intermediário, eliminação de metade dos pesos a serem testados.	
4. Intercalação de Pesos Conhecidos	Alternância entre pesos, identificados e novos pesos comparando com um peso desconhecido	4.1 Intercalação de Pesos por Adição ou Subtração
		4.2 Intercalação de Pesos por Redistribuição
5. Intercalação de Pesos Desconhecidos	A criança testa a relação entre pesos desconhecidos.	
6. Sequência de Pesos	Teste de pesos de forma ordenada, crescente ou decrescente.	6.1 Sequência de Pesos por Adição ou subtração
		6.2 Sequência de Pesos por Redistribuição
7. Uso das Extremidades	Os pesos são testados a partir das extremidades, como 1 ou 9.	
8. Troca de presentes	Trocar o presente por outro cujo peso seja mais fácil de determinar.	

Fonte: elaboração da autora

Análise do intervalo

A estratégia de análise do intervalo ocorre quando o aluno escolhe um peso e, com base no valor desse peso, faz comparações com os pesos disponíveis. Por exemplo, se ele escolhe o peso 6 e este é maior que o peso do presente a ser descoberto, ele passa a considerar apenas os pesos menores que 6. Do mesmo modo, se o peso for menor que o presente, a partir de então, ele passa a considerar apenas os pesos maiores que 6.

Ana, aluna do 3º ano, para encontrar o valor de D no nível 1 do jogo, testa o peso 4 e a balança registra que D é maior que 4. Ela verifica os pesos possíveis, maiores que 4, e escolhe o peso 8, considerando também os pesos maiores que quatro já registrados (5 e 6), chegando à conclusão de que o peso de D é 8.

> Pesquisadora: Por que você pegou o 8?
> Ana: Porque tinha que ser maior.
> Pesquisadora: Não dava para ser o 3?
> Ana: Não. Ele é menor.
> Pesquisadora: Mas não tinha outros números maiores que o 4?
> Ana: Tinha. Mas eu já usei o 5 e o 6.

Do mesmo modo, no nível 2, para descobrir o valor de F, ela coloca o peso 4. Como F é menor que 4, Ana testa os pesos 3 e 2, chegando ao resultado de F = 2. Nos níveis com menos pesos disponíveis, os alunos também utilizaram essa estratégia combinada a outras. Wagner, no nível 4 do jogo, para encontrar o valor de F, começa testando o peso 6; F > 6 e depois acrescenta o peso do lado contrário, F + 1 > 6.

> Pesquisadora: Olha, já sabemos que ele é menor que 6. Qual número maior que seis que pode ser?
> Wagner: (observa os números e presentes e faz o registro da resposta 8, sem testar nenhum peso na balança, tendo o *feedback* de acerto).
> Pesquisadora: Como você sabia que era oito?
> Wagner: O 7 já foi, tia. Maior do que seis... Eu pensei no sete, mas o sete já foi. Aí eu coloquei o oito.

Nos exemplos, vemos que Ana e Wagner utilizaram a estratégia de Análise do Intervalo para considerar pesos possíveis e desconsiderar os que não cabiam nos intervalos. Conforme os níveis avançam, as crianças combinam mais de uma estratégia. Nos dois exemplos de Ana, por exemplo, além da Análise do Intervalo, ela também faz Observação dos pesos disponíveis ao intervalo, desconsiderando os pesos que já haviam sido registrados ou que não cabiam no intervalo considerado. Do mesmo modo, Wagner faz a Análise do Intervalo, observa quais pesos estão disponíveis para uso dentro do intervalo e ainda utiliza a estratégia de Intercalação de pesos por Subtração.

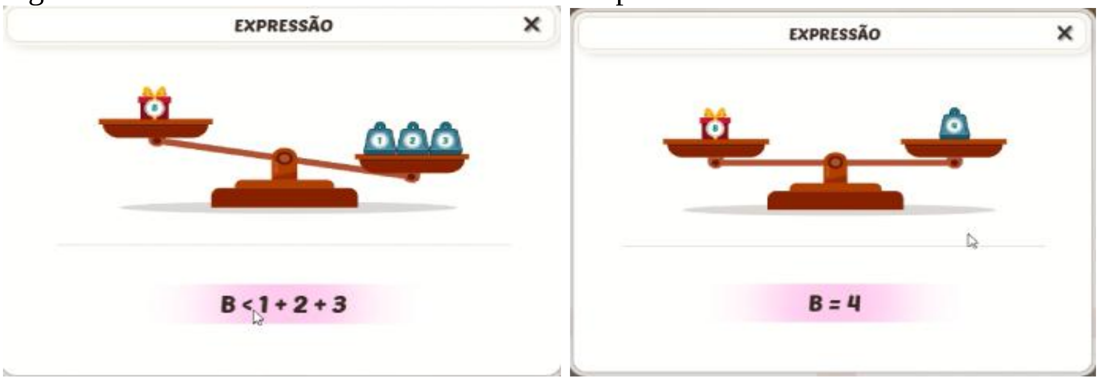
Outro incremento que surgiu nas observações e entrevistas com as crianças foi a utilização das ferramentas Expressão e Histórico para, a partir delas, analisar o intervalo disponível, apresentadas a seguir.

Análise do intervalo com uso da Expressão

Danielle, aluna do 4º ano, ao tentar descobrir o peso do presente de B no nível 1 do jogo, inicia o processo com o peso 6, mas percebe que precisa ajustá-lo, diminuindo para 3. Danielle então começa a adicionar pesos gradualmente: primeiro 1, depois 2 e, em seguida, 3.

> Pesquisadora: Vamos ler a expressão. O que está dizendo aqui?
> Danielle: Que o B é menor que 1 mais 2 mais 3.
> Pesquisadora: Isso. Quanto que dá aí?
> Danielle: Seis.
> Pesquisadora: Então, quer dizer o quê?
> Danielle: Que o B é menos do que 6.

Figura 22 – Análise do Intervalo com uso da Expressão



Fonte: arquivo de pesquisa

Para refinar sua busca, Danielle decide retirar o peso 1, ajustando a expressão para B < 2 + 3. Ela lê a nova expressão (Figura 22) e compreende que ainda precisa verificar se B é maior que 3. Danielle, então, retira o peso 2 e observa a balança. Ao fazer isso, ela nota que o presente é mais pesado que 3, indicando que B é maior que 3.

> Danielle: Então é o quatro. (Ela coloca o peso 4 na balança, verificando a sua hipótese.)
> Pesquisadora: Qual o peso do B?
> Danielle (lendo a expressão): B é igual a quatro.

Por meio dessa sequência de ajustes e verificações, Danielle utiliza a expressão para ajustar e confirmar que o peso do presente de B é 4, demonstrando a estratégia de análise do intervalo combinada com o uso da expressão.

Análise do Intervalo com Uso do Histórico

Andressa, jogando no nível 3, auxiliada pela pesquisadora, utiliza as informações do histórico de movimentos para orientar na determinação do peso do presente D. O histórico (Figura 23) indica que D é maior que 4 (3 + 1) e menor que 10 (3 + 1 + 6).

Figura 23 – Análise do intervalo com uso do histórico - Andressa

Fonte: arquivo de pesquisa

No trecho a seguir, a pesquisadora conduz Vanessa a entender que D está entre 7 e 9, levando Vanessa a testar o peso 8 e posteriormente, deduzir que D poderia ser 9. Após testar e ajustar os pesos, Vanessa confirma que D = 9.

> Pesquisadora: Olha aqui tá dizendo que o D é maior que (3 + 1)...
> Vanessa: Quatro
> Pesquisadora: O D é maior que 4. É menor que 3 + 1 + 6.. Quanto é?
> Vanessa: Dez.
> Pesquisadora: Menor do que 10. E maior do que 1 + 6
> Vanessa: sete
> (D > 7)
> Pesquisadora: Olha só, ele é menor do que 10 e maior do que 7.
> Vanessa: Se ele é maior do que 7, vou testar uma coisa...Ele é maior que o número 7
> (Testa comparar 7 + 1, D > 7 +1).
> Vanessa: Oito não é
> (deduzindo que D é igual a 9, procura maneiras de formar o valor 9)
> Vanessa: Então ele é 9 + 1. (D < 9 +1)
> Muda o peso 1 de prato, D + 1 > 9
> Vanessa: Vou tirar o 1, então: D = 9

Através da consulta ao histórico de movimentos e da expressão matemática fornecida pela balança, Andressa conseguiu melhorar sua análise, eliminando pesos que já haviam sido testados ou que não se encaixavam no intervalo possível.

Para descobrir o peso do presente A no nível 4, Wagner testa os pesos disponíveis: 1, 5 e 6; não conseguindo encontrar o peso do presente, consulta o histórico com autonomia, relembrando que A é maior que 1 e menor que 5.

Figura 24 – Análise do intervalo com uso do histórico – Wagner

Fonte: arquivo de pesquisa

Acrescenta então, o peso 1 no prato contrário (Figura 24), o peso de A continua sendo menor:

> Pesquisadora: O A tinha que ser quanto para ficar igual?
> Wagner: Quatro
> Pesquisadora: Então, a gente já sabe que o A é menor que 4. Qual número que é menor que 4 e maior que um?
> Wagner: O dois ou o três?
> Pesquisadora: Quer testar?
> (Wagner registra o peso 3 e tem o *feedback* de erro.
> Troca pelo número 2. A = 2)
> Wagner: O A é 2, tia.

No recorte, Wagner, jogando no nível 4, demonstra desenvoltura ao acessar e consultar as informações armazenadas no histórico para guiar suas próximas escolhas. Ele também mostra segurança na relação de igualdade entre os lados da balança e nas operações necessárias para alcançar o equilíbrio.

Com a progressão dos níveis, observa-se que os alunos têm mais necessidade em acessar o Histórico pelo decréscimo de pesos conhecidos e ganham mais desenvoltura em manuseá-lo. Eles começam a utilizá-lo de forma mais eficiente, demonstrando maior entendimento das relações entre os pesos e os presentes e a leitura de símbolos matemáticos.

<u>Observação dos pesos registrados</u>

Nesta estratégia as crianças, ao escolherem o próximo peso a ser testado na balança, observam antes os pesos já registrados, considerando que os pesos dos presentes não se repetem.

No nível 3, Micael, do 3º ano, ao buscar o valor do presente I, analisa os pesos já registrados. Ele inicia observando se o peso de I é igual a 1, mas a balança indica que I é maior do que 1. Então, Micael continua sua análise:

Micael: Já tem 3, então é 4... Já tem quatro, então é 5... Cinco já tem...
(Escolhe o peso 9. I < 9)
Micael: Tenho 7, tenho 8 e tenho 6...
(Coloca o peso 6 na balança; I = 6)

Ana também faz processo semelhante para descobrir o peso do presente G no nível 2 (Figura 25). Ela observa os pesos ainda não utilizados, percebe que o peso 3 ainda não foi utilizado e o coloca na balança, sendo G > 3. Ana já havia utilizado os pesos 5 e 6, então acrescenta o peso 4 para formar 7, que não está entre os pesos disponíveis.

Figura 25 – Observação dos pesos registrados - Ana

Fonte: arquivo de pesquisa

Ana, além de verificar os pesos disponíveis, busca formar um peso indisponível para manipulação na balança. Ela combina pesos já utilizados (3 e 4) para testar novas hipóteses, um procedimento que também é adotado por outras crianças em diferentes níveis do jogo, que se utilizam também como recurso o peso de presente recém-descobertos.

A observação dos pesos registrados é utilizada em várias situações do jogo, tornando-se mais recorrente nos finais de cada nível. Nesses momentos, quando as crianças, como Ana e Wagner, estão buscando determinar os pesos de I e G, os presentes finais do jogo, elas têm mais pesos registrados do que possibilidades de pesos disponíveis. Isso as leva a aplicar estratégias mais visuais e dedutivas, como a observações dos pesos registrados e análise do intervalo.

Busca pela metade

Essa estratégia é observada quando as crianças buscam um peso mediano, 5 ou aproximado, para começar suas análises de descobertas de pesos de presente, descartam assim metade dos pesos disponíveis para verificar na balança.

Ana utiliza a estratégia da Busca pela Metade para encontrar os valores dos presentes H, A, D e E no nível 1 do jogo. Para H, ela começa com o peso 5 e descobre que H > 5. Em seguida, troca para 7 e depois para 8 e encontra H = 8. Para A, ela começa novamente com 5 e logo descobre que A = 7. Com D, ela começa com 5 e, ao perceber que D é mais pesado que 5, mas mais leve que 7, testa o peso 6 e confirma que D = 6. Para E, ela inicia com 5 e conclui que E < 5. Após alguns ajustes, descobre que E = 2. Quando questionada sobre o motivo de escolher frequentemente o peso 5, Ana responde: "Não sei. Eu acho mais fácil".

Intercalação de pesos conhecidos

Nessa estratégia o aluno alterna pesos conhecidos sem a utilização de uma sequência clara para determinar o peso do presente. Ao empregar estratégia, é possível inferir que a criança não está utilizando uma estratégia de resolução específica, mas sim encontrando o valor por meio de tentativa e erro.

Daniel tem certa dificuldade em definir uma estratégia eficiente para descobrir os pesos dos presentes. Para encontrar o peso de C, começa com o peso 2, sendo D > 2, troca o peso por 5, B continua maior que 5:

> Pesquisadora: 5 é mais leve ou mais pesado?
> Daniel: É mais leve
> (ensaia colocar o 6, mas percebe que já saiu, coloca 8, sendo D > 8, troca por nove, D = 9)
> Daniel: Agora vai ficar mais difícil! (por entender que os pesos conhecidos já estão acabando)
> Daniel: (retira o presente D e mantem o peso 9, sendo E < 9)
> Pesquisadora: Quem é o mais pesado, o E ou o 9?
> Daniel: É o 9
> Pesquisadora: Então, tem que ser peso menor que o 9, não?
> Daniel: o 3 já foi, o 2 ainda não foi (coloca o 2, sendo E > 2)
> Daniel: Então é cinco. (E = 5)

Intercalação de pesos por Adição ou Subtração

Conforme avançam nos níveis do jogo, as crianças incrementam a estratégia de intercalação, utilizando a adição e subtração de pesos para lidar com a redução de opções disponíveis. Elas também começam a testar na balança os pesos dos presentes recém-descobertos, como mostra a Figura 26, Ana usa o peso do presente A para compor o peso de B.

Figura 26 – Intercalação de pesos por adição e subtração

Fonte: arquivo de pesquisa

Por exemplo, Ana utiliza adição e subtração para determinar os valores dos presentes. Para encontrar o valor de A, ela começa com o peso menor, 1, e adiciona o peso 3, resultando em A = 4. Essa adição permite a Ana combinar pesos menores para descobrir o valor desconhecido de forma incremental.

Para encontrar o valor de B, Ana mescla o peso do presente recém-descoberto com os pesos disponíveis. Ela primeira testa a combinação 6 + 1, percebendo que B é menor. Então, ela subtrai o peso 6, trocando-o pelo peso 3, e descobre que B ainda é menor. Finalmente, ela utiliza o peso recém-descoberto A (4) e soma com os pesos 1 e 3, concluindo que o valor de B é 8. Nesse processo, Ana alterna entre adicionar e subtrair pesos para ajustar e verificar suas hipóteses.

Assim, apesar de Ana utilizar a estratégia de intercalação de pesos, ela incrementa o uso da adição e subtração de pesos e presentes em um prato para encontrar o valor desconhecido de B. Isso reflete um pensamento algébrico, pois a manipulação de variáveis e constantes é utilizada para resolver problemas de forma lógica e sistemática.

Intercalação de Pesos por Redistribuição

Na intercalação de pesos por redistribuição, as crianças testam os pesos em ambos os lados balança, por observarem que, colocando peso do lado contrário da balança diminuem a desigualdade entre os pratos. Interessante notar, que embora essa intercalação de pesos foque apenas em buscar o equilíbrio da balança sem considerar as relações entre as quantidades obrigatoriamente, as crianças acabam formando uma sentença matemática composta por número e letras que precisam ser interpretadas para chegar ao peso do presente procurado.

Luane, para encontrar o peso do presente H testou várias combinações entre pesos e presentes, se atendo a manter a balança equilibrada, se um lado estava mais leve, acrescentava mais peso. Assim prosseguiu intercalando pesos, e os redistribuindo em ambos os pratos da balança até chegar ao equilíbrio mostrado na Figura 27.

Figura 27 – Intercalação de pesos por redistribuição - Luane

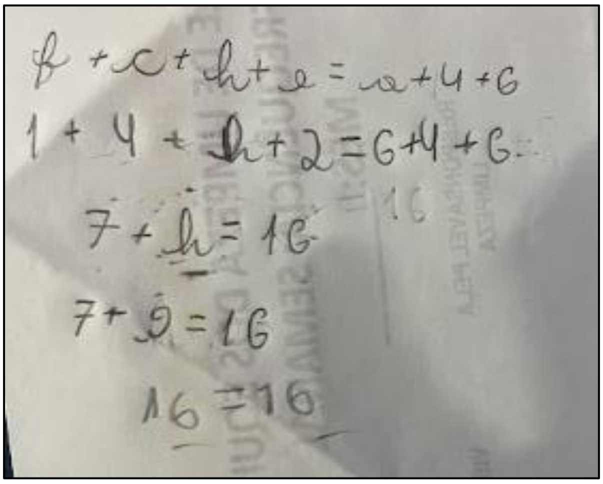
Fonte: arquivo de pesquisa

O recorte narra como Luane pensou parte da sua estratégia:

> Luane: Vou colocar logo o E que é 2. C + H + E < A + 6 + 4
> Pesquisadora: Quem ficou menor aí?
> Luane: Essa aqui continua menos
> (acrescentou o presente F ao prato mais leve) C + H + E + F = A + 6 + 4
> Pesquisadora: E agora como vamos saber o peso do H?
> Luane: (abre a expressão)
> Pesquisadora: A gente quer saber o valor de quê?
> Luane: Do H
> Pesquisadora: Quer escrever no papel?
> Luane: Quero

Luane escreve a expressão em um papel (Figura 28) e começa a substituir as letras pelos pesos que já conhecia: 1 (F) + 4 (C), H + 2 (E) = 6 + 4 + 6.

Figura 28 – Expressão feita pela aluna Luane



Fonte: arquivo de pesquisa

Durante o processo, ela vai dialogando com a pesquisadora, somando os pesos e ajustando suas suposições. Ela conclui que 7 mais o peso de H deve totalizar 16, e ao contar nos dedos, descobre que H é igual a 9. Após substituir o valor de H na expressão, verifica que 7 mais 9 é igual a 16, confirmando sua solução.

> Luane: O F é igual a um, O C é quatro, O H...
> Pesquisadora: O H você sabe?
> Luane: Não. Tô descobrindo
> Luane: (continua) E é 2. Dá igual a...
> (Soma os pesos após a igualdade)
> Luane: Seis mais quatro mais seis. Seis mais quatro é dez. Mais seis é igual a dezesseis!
> Pesquisadora: E os outros números?
> Luane: Um mais quatro, cinco mais dois, sete
> Pesquisadora: E o H?
> Luane: acho que agora eu não sei
> Pesquisadora: E agora que o H mais o sete tem que dar quanto?
> Luane: Dezesseis
> Pesquisadora: Qual o valor do H
> Luane: 16. Dá pra colocar 16 aqui?
> Pesquisadora: O valor do H é dezesseis?
> Luane: É
> Pesquisadora: É? Ou é o 7 mais o H que dá 16?
> Luane: O 7 mais o H
> Pesquisadora: Então qual valor que eu preciso juntar com o 7 para dar 16? Pode usar os dedos, se quiser.
> Luane: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16... Nove!
> Pesquisadora: Agora vamos aqui para o que você escreveu
> Luane: O 7 mais o H
> Pesquisadora: E quanto é o H?
> Luane: Nove
> Pesquisadora: Então, já pode trocar pra ver se é igual
> Luane: O sete mais o H...
> Pesquisadora: Quanto o H?
> Luane: Nove (apaga a letra H e troca por 9)
> Pesquisadora: Quanto que dá 7 mais 9?
> Luane: dezesseis

Pesquisadora: Deu igual?
Luane: Deu. Dezesseis é igual a dezesseis

Vanessa também utiliza a intercalação de pesos por redistribuição, mas já tem o objetivo claro de diminuir o peso do prato oposto. Suas decisões são tomadas após a leitura do histórico (Figura 29) dos movimentos realizados. Após várias tentativas para descobrir o peso de D, ela decide que precisa diminuir o valor total no prato oposto, mudando o peso de 1 de prato.

Figura 29 – Intercalação de pesos por redistribuição – Vanessa

Fonte: arquivo de pesquisa

No trecho da conversa com a pesquisadora, Vanessa demonstra como fez uma escolha, de redistribuir o peso para o outro prato da balança e como chegou a conclusão de que o peso de D era quatro:

Pesquisadora: O D é menor do que quem aqui?
Vanessa: que 2 mais 3, cinco
Pesquisadora: Ele é menor do que cinco... E ele é maior do que...
Vanessa: Dois!
Pesquisadora: Que número será ele?
Vanessa: E ele também é menor do que 6
Pesquisadora: Se ele é menor do que 5, também é menor que 6
Vanessa: Então, vou colocar o 1 pra cá.
(coloca o peso no prato do presente: D + 1 = 2 + 3)
Pesquisadora: Qual é o peso do D?
Vanessa: É cinco!
(Pesquisadora retira o peso 1 da balança e pergunta)
Pesquisadora: Então, o D é igual a cinco?
Vanessa: Não tia, é quatro

Intercalação de pesos desconhecidos

A intercalação de pesos desconhecidos ocorre quando as crianças, sem saber os pesos dos presentes, decidem observar na balança a relação entre eles, mesmo que isso não leve imediatamente à descoberta de um peso específico.

Por exemplo, Micael, jogando no nível 3, compara os valores dos presentes F e G (Figura 30) enquanto busca determinar o valor de F.

> Pesquisadora: Mas você sabe o valor do H?
> Micael: Não.
> Pesquisadora: E como vai te ajudar?
> Micael: ajuda que eu sei agora que o F é mais leve que ele (o presente G)

Ele observa a relação entre os presentes, concluindo que F < G. Em seguida, ele volta à descoberta do peso de F, combinando valores de pesos e presentes até chegar ao resultado de que F = 1 + I + 4. Faz os cálculos, substitui o valor de I por 1 e registra que F = 6.

Figura 30 – Comparação de pesos desconhecidos - Micael

Fonte: arquivo de pesquisa

Após encontrar o valor de F, Micael retoma a busca pelo peso de H, já considerando a relação observada anteriormente entre os presentes. Ele raciocina: "Se F é menor que H, então H é 7. Não, 7 já foi. Então, é 8." Coloca 8 na balança e confirma que H = 8.

Sequência de pesos

Essa estratégia foi observada quando o aluno tentou uma sequência de pesos para descobrir o valor desconhecido. Por exemplo, para descobrir o valor do peso C, o aluno colocou o peso 1 (um), logo depois o 2 (dois), em seguida o 3 (três) e assim sucessivamente até achar o valor correto do peso.

No Nível I do jogo, José começa com o presente A e utiliza a seguinte sequência de pesos para descobrir seu valor: primeiro, ele coloca o peso 1 na balança e verifica que A < 1; em seguida, coloca o peso 2 e verifica que A = 2. Para encontrar o peso de B, André continua na sequência de pesos de 2 até 5, todos menores que B. Ele então testa o peso 8, verificando que B < 8, e continua na sequência decrescente com o peso 7, encontrando B < 7. Finalmente, ele conclui: “Então é 6”, coloca o peso 6 na balança e confirma que B = 6.

Para encontrar o peso de C, José continua na sequência decrescente: 8, 7, 6, todos maiores que C, até chegar ao peso 5, achando C = 5.

Daniel utiliza a mesma estratégia, mas a adapta quando chega a níveis em que nem todos os pesos estão disponíveis. Primeiro, ele testa todos os valores disponíveis em sequência e, em seguida, testa as relações possíveis entre os pesos e os presentes para encontrar a solução correta.

Sequência de pesos por Adição ou Subtração

Essa estratégia foi observada quando as crianças para encontrar os pesos de forma que pensaram ser mais eficiente, começaram a adicionar ou remover pesos para chegar ao valor correto.

Danielle, para encontrar o valor do peso A (Figura 31), começa colocando o peso 1 na balança. Como o peso 1 é menor que o presente, ela acrescenta os pesos disponíveis em ordem. Primeiro, coloca o peso 2, que ainda é menor. Em seguida, acrescenta o peso 5, que também é insuficiente.

Figura 31 – Sequência de pesos por adição ou subtração - Danielle

Fonte: arquivo de pesquisa

> Pesquisadora: Quanto de peso que tem aí?
> Danielle: Ele é mais pesado que...6, 7, 8...Do que oito
> Acrescenta o peso seguinte, mais seis
> Pesquisadora: Agora não passou de 10?
> (retira o 6)
> Danielle: Ele é mais pesado do que seis
> Pesquisadora: E mais pesado do que oito
> (coloca o peso 7)
> Pesquisadora: O 7 é mais pesado do que oito?
> (testa o 7 na balança)
> Danielle: Não acredito que é o nove não
> (coloca o 9); A = 9

Embora Danielle tivesse disponível o peso 9 desde o início, ela começou a adicionar e subtrair pesos, o que pode não ter sido a escolha mais eficiente para a situação. No entanto, esse momento se torna interessante porque proporciona a Danielle uma revisão da compreensão da relação entre os pesos e os presentes, permitindo que suas estratégias se aperfeiçoassem nos passos seguintes.

Vanessa utiliza a mesma estratégia. Primeiro, tenta os pesos em sequência, mas não consegue equilibrar a balança. Então, começa a adicionar pesos em sequência para encontrar o valor do presente. Ela testa o presente C com o peso 1 ($C > 1$), depois com o peso 2 ($C > 2$), e em seguida acrescenta o peso 3 ao peso 2 ($C > 2 + 3$). Finalmente, acrescenta o peso 4, equilibrando a balança ($C = 2 + 3 + 4$).

> Pesquisadora: Qual o peso de C?
> Vanessa: Dois mais três, cinco, mais quatro, nove. C é 9! Olha, tia, só gastei 10 movimentos. Se esse homem tava procurando um gênio, ele encontrou.

Ana, utiliza tanto adição como subtração, para encontrar o valor de D. Ela começa pelo peso 3 e descobre que o presente é maior, vai então adicionando os pesos disponíveis em sequência, primeiro 1 e depois 2, e em seguida, 4 ficando o prato de pesos mais pesado que o de presentes (Figura 32).

> Pesquisadora: O D é mais leve ou mais pesado
> Ana: Mais leve
> Pesquisadora: Quanto que a gente tem aí?
> Ana: (calcula com os dedos) Dez!
> Pesquisadora: Então, o dez é maior que o D.
> (retira o peso 4 deixando o prato mais leve que o do presente)
> Pesquisadora: Agora ficou quanto?
> Ana: Seis
> Pesquisadora: O seis já tem, olha (o peso de A)
> (Ana retira o peso 1 e acrescenta o 4, deixando a balança equilibrada)
> Pesquisadora: Qual o peso de D?
> Ana: (consulta a expressão e calcula) É nove.

Figura 32 – Sequência de pesos por adição e subtração - Ana

Fonte: Arquivo de pesquisa

Sequência de Pesos por Redistribuição

Wagner, para encontrar o valor de C, testa o peso 4, o presente ficando menor, e não tendo o peso 3 disponível, acrescenta o 1 ao prato contrário chegando ao resultado de C + 1 = 4. Ao ser questionado o porquê de colocar o peso 1 no prato contrário, explica:

> Pesquisadora: Porque que você colocou o 1 do outro lado
> Wagner: Porque eu queria diminuir o peso desse outro. Já sei qual é o peso
> Pesquisadora: Sabe?
> Wagner: É cinco!
> Pesquisadora: Vamos ver se é cinco.
> (Wagner abre consulta a expressão)
> Pesquisadora: Se eu colocar o 5 + 1, vai dar quatro?
> Wagner: Não. É seis
> Pesquisadora: Então, não pode ser cinco
> Wagner: Lê a expressão, o C mais o um dá igual a cinco.
> (pensa) Ah! Já sei (registra 3 para o presente C)

A Figura 33 demonstra que, para encontrar o peso do presente F, Luane também utilizou estratégia similar à de Wagner. testa os pesos, 4 e 2 (presente E), o presente a ser descoberto continuando maior. Escolhe colocar presente do outro lado da balança.

Figura 33 – Sequência de pesos por redistribuição

Fonte: arquivo de pesquisa.

No recorte a seguir, Luane explica suas escolhas e como pensou a resolução:

> Luane: Vou colocar o E porque o E é 2.
> O dois mais o F tem o peso do 3.
> Pesquisadora: Consulta a expressão para te ajudar
> Luane: Não precisa mais tia. Porque se o E é 2 e tem que dar 3. É 1, tia

Jogando no nível 3, Luane mostra maior domínio nas relações de pesos e nas operações para equilibrar a balança. Ela lê e interpreta a expressão corretamente e isola a incógnita. Sua confiança ao dispensar a consulta à expressão sugere aumento na autoconfiança e independência na resolução de problemas.

Wagner, aluno do 4º ano, também demonstra progressão similar. Ele mostra compreensão dos conceitos de igualdade e desigualdade, aplicando-os para resolver problemas de forma eficiente. A diferença de idade entre Luane e Wagner destaca que, apesar de estarem em anos escolares diferentes, ambos conseguem avançar na mesma direção, especialmente na leitura e interpretação de expressões e no isolamento de incógnitas.

Uso das extremidades

O Uso das Extremidades é observado quando a criança opta por começar suas escolhas com o menor ou maior peso disponível. No primeiro nível essa escolha pode não ser uma estratégia interessantes, pois restaria um intervalo muito grande de pesos para ser testado.

Luane e Wagner, no primeiro nível, começaram observando os pesos a partir do menor valor, 1, e foram trocando os pesos até chegar ao peso do presente, encontrando 6 e 7, respectivamente. Micael também utilizou as extremidades, mas começou sua análise pelo maior peso disponível, 9. Ana, no nível 2, seguiu uma abordagem similar às extremidades. Sem o número 1 disponível, ela começou pelo peso 2. Quando esse não correspondeu ao peso procurado, ela alterou para o maior valor, 9, antes de considerar os números intermediários.

Daniel, jogando no nível 1, utiliza as extremidades, 1 e 9, mas demonstra dificuldade em compreender quais são os números possíveis dentro do intervalo que ele testou. Ele mostra uma tendência a se fixar nos valores extremos sem considerar os números intermediários. A interação com a pesquisadora revela os desafios enfrentados por Micael em aplicar os conceitos de maior e menor de forma mais abrangente:

> Daniel: Agora eu vou colocar um menor. (coloca o 1 na balança).
> Pesquisadora: Quem é maior agora?
> Daniel: A letra
> Pesquisadora: Então, troca por um peso maior

Daniel: Vou trocar por um maior (troca 1 por 9, sendo A < 9)
Pesquisadora: E agora?
Daniel: Não sei.
Pesquisadora: Quem é maior? O peso ou o presente?
Daniel: O peso.
Pesquisadora: Então, tem que mudar alguma coisa?
(Troca por 1 novamente porque considera o menor peso)
Pesquisadora: O 1 é mais pesado ou mais leve?
Daniel: Mais leve
Pesquisadora: Então, tem que ser...
Daniel: Maior do que 1. Mas eu já coloquei o 9.
Pesquisadora: E só tem o 9 que é maior do que 1?
Daniel: Então, vou usar o 5.

Apesar da dificuldade inicial, esse momento ajudou Daniel a compreender melhor as relações de maior e menor. Através da orientação da pesquisadora, ele começou a explorar os números intermediários, entendendo que existem várias possibilidades entre as extremidades que ele inicialmente escolheu.

Diante do demonstrado, apesar da análise das extremidades não parecer uma estratégia eficiente inicialmente, ela foi importante para a compreensão dos alunos sobre a sistemática do jogo e para o aprimoramento de suas estratégias. À medida que percebem que as extremidades deixam muitas alternativas de pesos, eles começam a analisar melhor suas escolhas de pesos nos desafios seguintes.

Troca de presente

A Estratégia Troca de Presentes foi observada quando as crianças, não encontravam o peso do presente que buscavam com os pesos e arranjos disponíveis, então decidiam trocar de presente, para depois, com mais pesos conhecidos disponíveis retornarem ao presente que buscavam.

Luane, ao jogar no nível 2 (colocar imagem), testa todos os pesos disponíveis e, percebendo que todos os pesos disponíveis são maiores que A, argumenta:

Luane: Tia, não é nenhum desses.
Pesquisadora: E agora, como você vai descobrir o peso do A?
Luane: Vou tentar o B. (B = 5)
Agora eu tenho que encontrar o valor de A.
Pesquisadora: Lembrando que você pode usar pesos e presentes dos dois lados da balança.
Luane: Posso? (coloca o 3 no prato de A e o peso 6 no prato contrário)
Pesquisadora: Quem deu maior aí?
Luane: O 6.
Pesquisadora: Então, o que a gente pode fazer aí?
Luane: Trocar por um peso menor do que 6.
Pesquisadora: Qual que é menor que 6 aí?
Luane: O quatro, mas ele já foi (já havia testado).
Pesquisadora: Não tem outro que pode ser menor que o 6?

> Luane: Ah! Tem o cinco (presente B), eu não tinha visto. (abre a expressão, A + B = 5)
> Pesquisadora: Leia aí o que está escrito.
> Luane: Que o A mais o B, dá cinco.
> Pesquisadora: Então, qual é o valor de B para juntando com o A dar cinco?
> Luane: Não sei. (pensa) Acho que é dois.
> Pesquisadora: Se a gente colocar 3 + 2 vai dar cinco?
> Luane: Vai.
> Pesquisadora: Então, pode estar certo.
> Luane: (Registra o peso de A como 5 e tem *feedback* de erro)
> Pesquisadora: É cinco o peso do A?
> Luane: Não. (reabre a expressão) Dois.

Daniel, no último nível do jogo, não altera os pesos nos pratos, mas muda o presente até encontrar um que se adeque ao peso. No nível 4 do jogo, com apenas os pesos 1, 3 e 5 conhecidos, ele testa todos em ordem. Depois, combina os pesos, como 1 + 3, 1 + 5 e 3 + 5, colocando-os no prato contrário. Após gastar 19 movimentos no jogo, Daniel desiste do presente A e o troca por F, descobrindo que F é igual a 5. Ao final do jogo, Daniel retorna ao presente A e, através da observação dos pesos registrados e da análise do intervalo, descobre que o peso de A é igual a 7.

4.3.2 Comparação entre os grupos

Os alunos do Grupo 1 tiveram um momento de intervenção com a balança convencional de dois pratos para encontrar pesos desconhecidos. Em contraste, os alunos do Grupo 2 não tiveram essa atividade prévia.

Os alunos do Grupo 1, já familiarizados com o funcionamento da balança, utilizaram mais movimentos nos níveis. Isso ocorreu porque, com o conhecimento prévio, eles exploram a possibilidade de mesclar pesos e presentes em ambos os pratos da balança, buscando estratégias mais complexas desde o início. Embora nos primeiros níveis esses arranjos não fossem necessários, pois todos os pesos dos presentes estavam disponíveis, com exceção do peso 10, eles optaram por métodos mais sofisticados.

Andressa, por exemplo, para encontrar o peso do primeiro presente, G, com peso 5, desde o início, começou a explorar ambos os lados da balança com pesos (Figura 34). Se tivesse optado por estratégias mais simples, como usar extremidades ou buscar pela metade, teria chegado ao peso do presente procurado com menos movimentos. Na imagem, Andressa começou com o peso 3, sendo mais leve que o presente. Ela acrescentou o peso 1 no prato contrário, o presente ficou mais pesado, então acrescentou o peso 5 no prato inicial e, em seguida, o peso 2 no prato do presente, chegando ao resultado de: C + 1 + 2 = 3 + 5.

Figura 34 – Composição do peso do presente G - Andressa

Fonte: arquivo de pesquisa

José, de modo semelhante, preferiu compor a igualdade com pesos e presentes para chegar ao peso do presente I (Figura 35). Ele utilizou uma estratégia complexa, combinando vários pesos e presentes, o que teria sido mais facilmente encontrado se ele tivesse optado por usar a busca pela metade, extremidades ou análise dos pesos já registrados.

Figura 35 – Composição do peso do presente I - José

Fonte: arquivo de pesquisa

Já os alunos do Grupo 2, que estavam conhecendo o funcionamento da balança virtual, inicialmente fizeram movimentos mais simples e diretos, manipulando os pesos individualmente. Somente depois de compreenderem melhor a dinâmica do jogo, começaram a realizar movimentos mais elaborados, como acrescentar presentes e pesos em ambos os lados da balança.

Essa diferença na abordagem resultou em uma média de movimentos menor para o

Grupo 2 no nível 1, como evidenciado pelos dados (Quadro 6). O Grupo 1 começou com estratégias mais elaboradas, combinando pesos em ambos os lados da balança, o que resultou em mais movimentos inicialmente. Já o Grupo 2, apesar de levar mais tempo para entender a sistemática da balança, utilizou menos movimentos no começo, conforme mostrado nos exemplos dos dados do nível 1.

Quadro 6 – Quantidade de movimentos por grupo - nível 1

Grupo 1	**Movimentos**	**Grupo 2**	**Movimentos**
Ana	47	Luane	50
Daniel	84	Micael	44
José	70	Wagner	47
Andressa	61	Daniele	80

Fonte: Elaborado pela autora

Interessante notar que Danielle, do Grupo 2, que teve mais movimentos dentro do seu grupo, utilizou estratégias de movimentos similares às do Grupo 1 devido à sua familiaridade com a balança no comércio do avô. Essa familiaridade prévia permitiu que ela explorasse combinações de pesos e presentes em ambos os lados da balança, apesar de ainda estar se adaptando ao jogo. Em contraste, Ana, do Grupo 1, teve menos movimentos porque utilizou estratégias de movimentos mais simples, sem combinações ou rearranjos de pesos, o que lhe fez ter menos movimentos no jogo.

Nos níveis seguintes do RED, no entanto, as diferenças entre os grupos não ficaram mais tão evidente, e a quantidade de movimentos e estratégias utilizadas demonstraram similaridades. Desse modo, a intervenção prévia com a balança física não pareceu comprometer significativamente o desempenho das crianças em ambos os grupos.

4.4 Intervenções com a balança física

A intervenção com a balança de dois pratos tinha por objetivo familiarizar as crianças com a sistemática da balança. Para isso, as crianças tiveram acesso a uma balança de dois pratos e materiais, incluindo pesos conhecidos de 50g, 100g, 200g, 500g, 1kg e 2kg, e recipientes com pesos desconhecidos (150g, 300g, 350g, 400g, 450g e 900g). O principal desafio era que as crianças encontrassem o peso dos recipientes.

Adicionalmente, as crianças realizaram mais duas atividades. Na primeira, organizaram os pesos do mais leve para o mais pesado. Na segunda, foram expostas a cinco sentenças matemáticas, utilizando fichas de numerais, símbolos matemáticos e os pesos da balança, para determinar se essas sentenças eram verdadeiras ou falsas. As sentenças apresentadas foram:

1. Verde = Roxo
2. Verde (300g) + Vermelho (450g) + 150g = Amarelo (900g)
3. Amarelo (900g) – Rosa (400g) = Vermelho (450g) + 50g
4. Verde (300g) > Preto (150g)
5. Verde (300g) < Preto (150g) + 500g

Como as intervenções com a balança física não eram um dos objetivos principais do trabalho, apresentaremos aqui apenas uma visão geral do desempenho das crianças e algumas diferenças observadas entre os dois grupos.

<u>Descoberta dos pesos dos recipientes</u>

Na atividade de descoberta dos pesos, todas as crianças conseguiram determinar os pesos dos seis recipientes. Considerando que o objetivo da intervenção era familiarizá-las com a sistemática da balança, a pesquisadora ofereceu assistência nas dificuldades encontradas pelas crianças, orientando-as tanto na operação da balança e dos pesos quanto nas dificuldades relacionadas à adição e subtração, bem como na compreensão da composição e decomposição da unidade de medida, quilo e quilograma.

De modo semelhante à seção anterior, o grupo de crianças que utilizou a balança física antes de usar o RED apresentou maior dificuldade em descobrir os pesos dos recipientes e em combinar pesos com embalagens de pesos recém-descobertos. Inicialmente, essas crianças encontraram mais obstáculos na utilização e variação de estratégias, necessitando de mais orientação e tempo para ajustar suas abordagens e compreender como equilibrar os pesos.

Por outro lado, os alunos que utilizaram a balança física após o uso do RED adotaram uma abordagem mais exploratória. Eles demonstraram maior criatividade e autonomia na mistura de pesos conhecidos e desconhecidos, testando diferentes combinações antes de chegarem à solução do desafio. Um exemplo interessante, é o de Danielle, que, após descobrir que o recipiente rosa pesava 400g, perguntou se poderia formar o mesmo peso de outra forma. Ela utilizou o recipiente verde, cujo peso já havia sido descoberto (300g), juntamente com um peso de 150g em um prato da balança, e no prato oposto manteve o recipiente rosa, adicionando um peso de 50g para equilibrar a balança. A partir desse ponto, Danielle decidiu formar os pesos descobertos de mais de uma maneira.

Sequência de pesos

Na atividade de sequenciamento dos recipientes, a ordem das intervenções não demonstrou impactar significativamente a forma de resolução das crianças. Em ambos os grupos, algumas crianças optaram por sequenciar os pesos com base nos valores recém-descobertos, enquanto outras decidiram testar novamente os pesos na balança e verificar a relação entre eles de forma mais visual, sem considerar os pesos já anotados. É importante destacar que, embora todas as crianças tenham conseguido realizar a atividade com sucesso, no grupo 1, os alunos Ana e Daniel precisaram de apoio para corrigir erros na sequência de pesos que criaram. Ana se baseou na estimativa dos pesos com as mãos, fato também observado no estudo de Freire (2007), e Daniel teve dificuldade em compreender suas anotações e interpretar que 500g é menor que 450g, por exemplo.

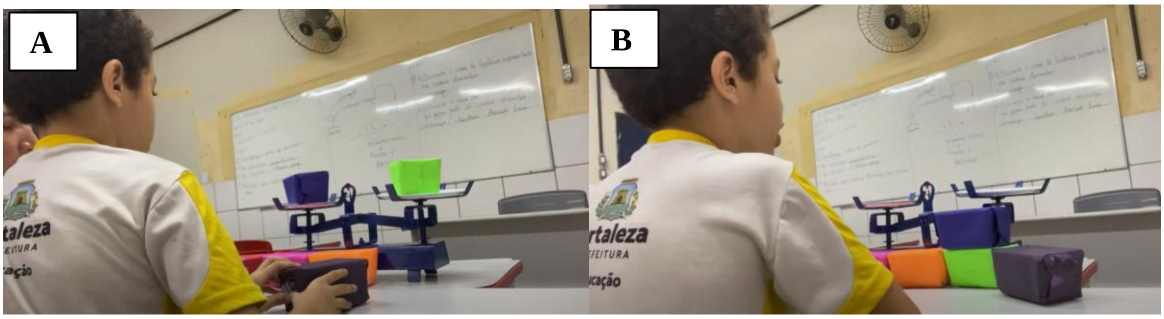
Na Figura 36, após Ana sequenciar os pesos com base na estimativa, ela é instigada pela pesquisadora a verificar na balança se a ordem que havia organizado estava correta. Ana, então, retorna à verificação dos pesos na balança e corrige sua sequência.

Figura 36 – Sequência (A) e comparação de pesos na balança (B) - Ana

Fonte: arquivo de pesquisa

Um ponto interessante dessa intervenção foi a solução que as crianças encontraram para organizar os pesos verde e roxo, ambos com 300g. Na Figura 37, Daniel inicialmente organizou os pesos verde e roxo um após o outro. Após ser indagado pela pesquisadora se um era maior que o outro por estarem nessa ordem, Daniel verificou na balança que ambos tinham o mesmo peso. Ele então decidiu organizá-los, colocando-os um sobre o outro para indicar que, na ordem dos pesos, eles ocupavam a mesma posição.

Figura 37 – Comparação (A) e sequência de pesos (B) - Micael



Fonte: arquivo de pesquisa

Outras crianças, ao perceberem a igualdade, optaram por colocar os pesos um sobre o outro ou lado a lado, mas na mesma posição na fila de recipientes.

Leitura das sentenças

Uma distinção observada entre os dois grupos foi que os alunos que manusearam primeiro o RED conseguiram ler e resolver a equação apresentada sem dificuldade e com maior autonomia, informando se a sentença apresentada era verdadeira ou falsa. Enquanto isso, as crianças do primeiro grupo, ao serem indagadas sobre a veracidade das sentenças, olhavam intrigadas para a pesquisadora, procurando pistas sobre o que estava sendo solicitado na atividade.

Enquanto as dificuldades do Grupo 1 estavam em compreender o que estava formulado nas sentenças, as dificuldades do Grupo 2 demonstraram ser mais de ordem aritmética. Eles necessitavam de auxílio quanto à subtração ou adição dos pesos e alguns alunos indagaram sobre a posição dos sinais de maior e menor. Por exemplo, Wagner, durante a leitura da quarta sentença, perguntou: “Esse é o que diz que desse lado tem mais, não é tia?”.

Sobre a construção da compreensão dos sinais das sentenças pelas crianças, é conveniente destacar os momentos em que elas fizeram essas assimilações durante a utilização do recurso digital. Nos primeiros níveis, as crianças eram instigadas a observar e abrir o botão de expressão do jogo, lendo o que estava demonstrado na balança. Esses momentos possivelmente contribuíram para a construção da capacidade de leitura das sentenças pelas crianças do segundo grupo.

Em relação ao sinal de menor, um dos momentos de uso do RED envolveu Luane, que para encontrar o peso do presente A, escolheu o peso 3, sendo A < 3, e teve a seguinte interação:

> Pesquisadora: O que tá dizendo aí?
> Luane: que o A é menor que o 3.
> Pesquisadora: Já conhecia esse sinal aí
> Luane: É o chapeuzinho das palavras
> Pesquisadora: É. Mas aqui com os números, ele mostra qual é o menor. Aqui A é menor do que 3.
> Luane: Então, pode ser o 2 e o 1.

Em outro momento, Micael buscando o peso do presente G, sendo G < 9, tem a seguinte interação:

> Pesquisadora: Vamos ler a expressão?
> Micael: Pra quê isso, tia?
> Pesquisadora: Pra gente ler na Matemática. Olha aqui tá dizendo que 9...Sabe que símbolo é esse?
> Micael: Não
> Pesquisadora: Menor. Tá dizendo que G é menor que nove. Então, já temos uma dica, o G é menor que 9
> Micael: Se não for o 8 é o 7
> Pesquisadora: Mas o oito já tem, não é? Pode ser ele?
> Micael: É mesmo.

Na Figura 38, Luane, que havia utilizado o RED antes da intervenção com a balança, ao tentar descobrir se a sentença Verde (300g) + Vermelho (450g) + 100 + 50g = Amarelo (900g) era verdadeira, reorganizou os pesos de modo que, a embalagem verde com o peso de 100g e a embalagem vermelha (450g) com o peso de 50g. Somando em seguida, 400g mais 500g, concluindo que os pesos em ambos os lados da igualdade eram iguais.

Figura 38 – Resolução das sentenças - Luane

Fonte: arquivo de pesquisa

Outra distinção entre os grupos foi a compreensão da função do sinal de igualdade como uma relação de equivalência. Enquanto os alunos do Grupo 1, ao serem questionados sobre o símbolo, informavam que era “para dar o resultado” ou “o final da conta”, conforme exemplificado no trecho com Daniel:

Daniel: Esse é o que dá a resposta.
Pesquisadora: Qual o nome dele, você sabe
Daniel: Sei não
Pesquisadora: É o sinal de igual
Daniel: Então, eu acho que já sabia o nome

As crianças do segundo grupo já respondiam de forma diferente, dizendo que “pra dizer que tem do mesmo tanto aqui e aqui” (os lados da equação), “que se somar aqui e aqui, dá igual”, “que vale o mesmo tanto”.

4.5 Situações Finais

Nesta seção, serão apresentadas as mudanças observadas nas estratégias de resolução utilizadas pelas crianças durante a resolução das Situações-Problemáticas Finais (SF). O objetivo é compreender as alterações e permanências nas estratégias das crianças após as intervenções com o RED Reino de Aljabar e a balança física, além de identificar possíveis mudanças na abordagem dos problemas.

Para alcançar essa compreensão, serão analisadas as respostas e registros obtidos durante a resolução das SF, assim como as entrevistas realizadas com a pesquisadora. Esses registros incluem tanto as notações feitas pelas crianças quanto suas explicações verbais, proporcionando uma visão mais abrangente do processo de pensamento e das estratégias empregadas pelas crianças.

As categorias de resolução já foram apresentadas e detalhadas na seção 4.1. Portanto, nesta seção, serão feitas apenas menções comparativas a essas categorias, focando nas mudanças e nos padrões emergentes observados durante a resolução das SF. Não haverá reapresentação detalhada das categorias, mas sim uma análise comparativa que evidencie as evoluções e persistências nas estratégias de resolução das crianças.

A análise das SF segue a mesma sequência utilizada nas Situações Iniciais (SI), organizando a discussão em torno de três tipos principais de situações-problema: aquelas com valores conhecidos, aquelas com valores desconhecidos e aquelas que envolvem incógnitas. Cada um desses tipos de situação é abordado separadamente, permitindo uma comparação direta entre os métodos utilizados pelas crianças nas diferentes fases do estudo.

Para facilitar a observação, as respostas das crianças foram organizadas a partir dos grupos de estratégia que utilizaram: por exemplo, na SI que envolviam situações com quantidades conhecidas, um grupo de crianças utilizou a estratégia de cálculo mental, outro grupo preferiu o registro numérico e outro usou materiais manipulativos. Nesta análise, serão observadas as estratégias desses grupos de crianças, verificando se mantiveram os métodos ou se apresentaram variações no modo de pensar e representar suas respostas.

4.5.1 Valores conhecidos SF

As situações-problema com valores conhecidos seguiram a mesma estrutura e quantidades das Situações Iniciais (SI), variando apenas em relação aos contextos.

Estratégias de resolução

Nessas quatro primeiras situações, as crianças utilizaram as seguintes estratégias de resolução no primeiro teste:

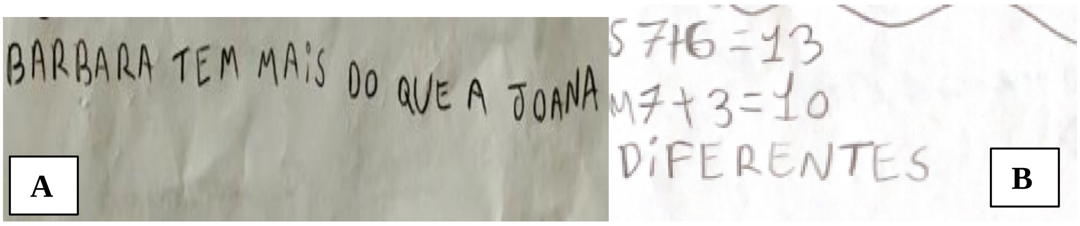
1. **Cálculo Mental**: Utilizando adição e subtração para comparar valores totais, e sem a necessidade de operações adicionais.
2. **Estratégia Numérica**: Adicionando ou subtraindo valores para comparar quantidades finais, e para representar os valores nas situações-problema e o isolamento das quantidades iguais adicionadas ou subtraídas.
3. **Representação Física**: Utilizando objetos para representar e resolver os problemas apresentados.

Cálculo mental

Das crianças que utilizaram a estratégia de cálculo mental, apesar de chegarem a resoluções corretas ou com pequenas correções, apenas o aluno José conseguiu registrar e explicar a operação utilizada quando questionado. Nas situações finais, observou-se um avanço, com as crianças demonstrando mais confiança e evolução no uso de registros matemáticos.

Wagner, nas SI, utilizou o cálculo mental para somar os valores totais, mas, quando indagado sobre como registrar sua resposta, afirmou não saber como fazê-lo e optou por apenas escrever os resultados, sem utilizar símbolos ou operações matemáticas. As figuras 39, A e B mostram a comparação de Wagner quanto ao registro e apresentação de solução para a SI3 e SF3.

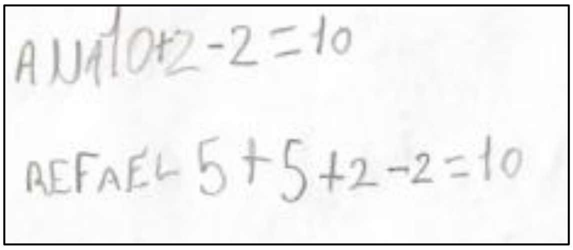
Figura 39 – Resolução SI3 (A) e SF3 (B) - Wagner



Fonte: arquivo de pesquisa

Ana, nas situações iniciais (SI), demonstrou insegurança em representar sua resolução, afirmando não ter o quê escrever. No entanto, nas SI, ela conseguiu registrar as etapas de resolução, anotando cada quantidade presente na situação, conforme ilustra a Figura 40. Ao ser questionada sobre o uso dos símbolos de adição e subtração, Ana demonstrou compreender seus significados, identificando a adição como o que foi ganho e a subtração como o que foi perdido pelos personagens. Nas situações finais (SF), Ana passou a utilizar a estratégia numérica com adição e comparação dos valores totais em suas resoluções, o que aumentou sua confiança nas respostas.

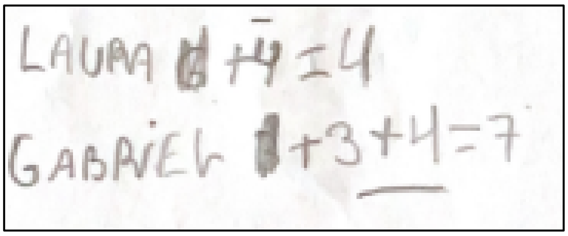
Figura 40 – Resolução SF 1 - Ana



Fonte: arquivo de pesquisa

O registro das operações proporcionou a Ana não apenas maior segurança em suas respostas, mas também um aprimoramento de suas estratégias de resolução. Na última situação do nível amarelo, por exemplo, ela demonstrou um raciocínio mais eficiente ao desconsiderar os valores retirados na situação (3 e 6) e comparar diretamente os valores restantes, concluindo que havia uma desigualdade (Figura 41).

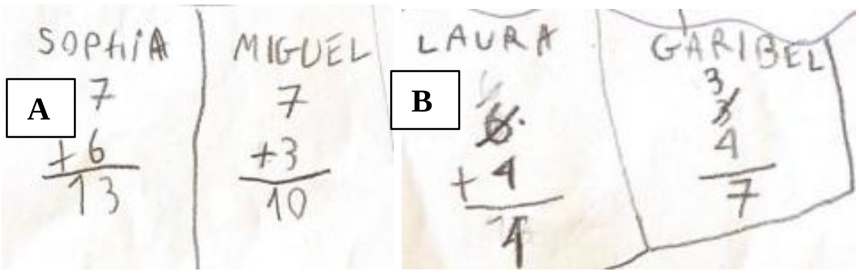
Figura 41 – Resolução SF 4 - Ana



Fonte: arquivo de pesquisa

Danielle, que havia utilizado o cálculo mental para comparar as quantidades diferentes adicionadas às quantidades iniciais, concluindo que não haveria como manter a igualdade, pareceu sistematizar essa forma de compreensão utilizando notação numérica e aplicá-la nas quatro situações do nível amarelo, passando a utilizar a estratégia de isolar quantidades para chegar à solução do problema, conforme ilustra a Figura 42, que apresenta a resolução da SF 3 (A) e SF 4 (B).

Figura 42 – Resolução SF 3 (A) e SF4 (B) - Danielle



Fonte: arquivo de pesquisa

Na SF3, Danielle somou as quantidades totais, observando que eram diferentes, mas em seguida, cobriu com o dedo as quantidades 7 de ambas as personagens, indicando que as quantidades iguais não seriam consideradas, pois a adição de quantidades diferentes, 3 e 6, impossibilitava uma equação, informando: "Olha, tia, nem precisava fazer conta porque os sete eram iguais, mas muda porque o seis e o três é diferente. Aí não dá para ser igual". Na SF4, riscou as quantidades que foram adicionadas, considerando apenas as quantidades restantes para chegar à conclusão de sua resolução.

Os exemplos de Ana, Wagner e Danielle ilustram a progressão no desenvolvimento das estratégias de resolução, desde o cálculo mental e a manipulação de objetos concretos até o registro numérico e a representação simbólica. Essa evolução demonstra o impacto positivo das intervenções no desenvolvimento do pensamento algébrico das crianças, com destaque para o papel do registro das operações e da abstração na compreensão da equivalência e na manipulação de incógnitas.

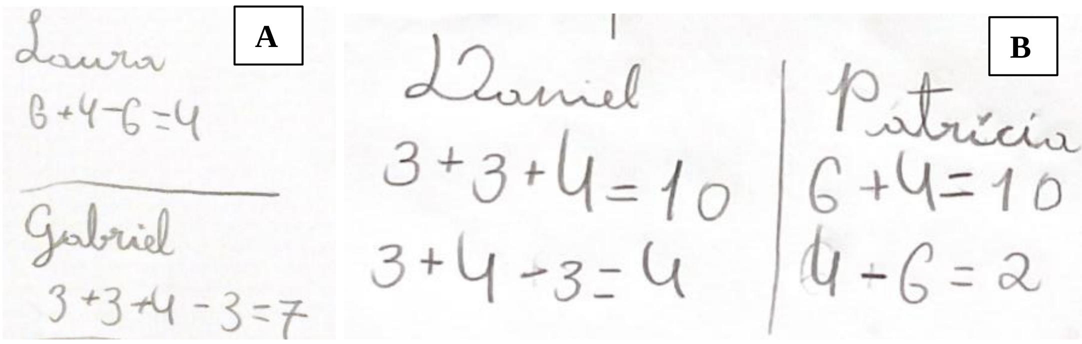
Estratégia numérica

Micael e José, que já haviam utilizado a estratégia numérica nas situações iniciais, demonstraram uma mudança em seus métodos de resolução nas situações finais. Embora tenham mantido a mesma estrutura de pensamento, priorizando o isolamento de quantidades, eles passaram a privilegiar o registro escrito das resoluções em detrimento do uso de fichas numeradas. Essa mudança sugere um avanço na compreensão da representação simbólica e na capacidade de formalizar o pensamento.

Luane e Vanessa, também utilizaram a estratégia numérica nas SI e demonstraram aprimoramento na compreensão e aplicação dos registros matemáticos nas SF.

Luane, por exemplo, passou a registrar suas operações de forma mais completa e justificar suas escolhas de adição e subtração, evidenciando maior consciência sobre a relação entre os símbolos matemáticos e as ações realizadas na resolução dos problemas que as observadas na SI. A Figura 43, A e B, mostram a resolução da SI 4, e da SF 4.

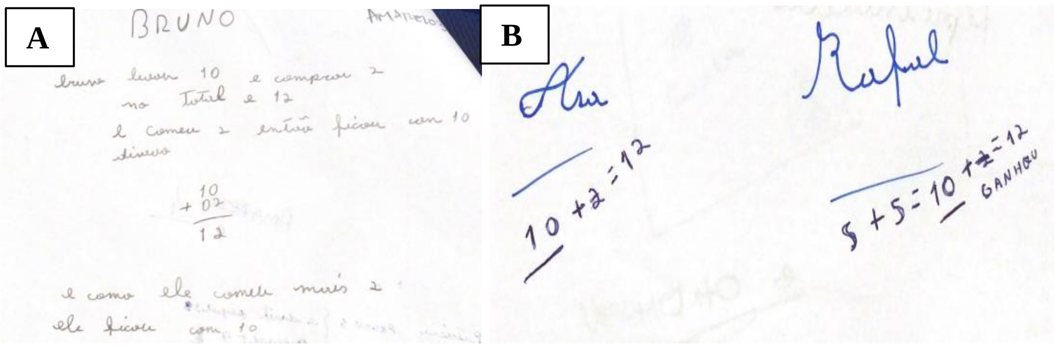
Figura 43 – Resolução SI 4 (A) e SF4 (B) - Luane



Fonte: arquivo de pesquisa

Já Vanessa, que inicialmente complementava suas resoluções com texto escrito devido à dificuldade em registrar as operações (Figura 44A), passou a representar as transformações ocorridas na situação-problema por meio de registros numéricos, como ilustra a Figura 44B. Essa mudança a ajudou a ter maior compreensão da equivalência e das operações matemáticas envolvidas, culminando na identificação da igualdade entre as quantidades de cada personagem de modo mais simplificado.

Figura 44 – Resolução SI 4 (A) e SF4 (B) - Vanessa



Fonte: arquivo de pesquisa

Ao registrar as operações, Andressa compreendeu que se os personagens tinham quantidades iguais (10), e ambos ganharam e perderam a mesma quantidade (2), eles retornariam à igualdade anterior (10), conforme ela grifa na resolução.

Representação física

Nas SI, as crianças recorreram à representação física quando as quantidades iniciais passavam por múltiplas transformações, como observado na SI 4. No entanto, nas SF, houve uma mudança de estratégia, com as crianças abandonando a manipulação física de objetos em favor do registro numérico das operações, como exemplificado nas resoluções de José, Micael e Daniel na SF4.

Essa transição sugere um avanço na capacidade de abstração e na compreensão das operações matemáticas, demonstrando que as crianças passaram a utilizar representações simbólicas para resolver problemas que antes exigiam o uso de materiais concretos.

4.5.2 Valores desconhecidos SF

Nas SI com valores conhecidos, as crianças utilizaram diferentes estratégias de resolução: cálculo mental, numérica, iconumérica e resolução não definida. No entanto, a estratégia mais utilizada por cinco das oito crianças foi a categoria de resolução não definida. Diante da prevalência dessa estratégia e da sua evolução nas SF, tendo em vista que a operação com valores desconhecidos é um aspecto crucial do Pensamento Algébrico, iniciaremos a análise comparativa por essa categoria.

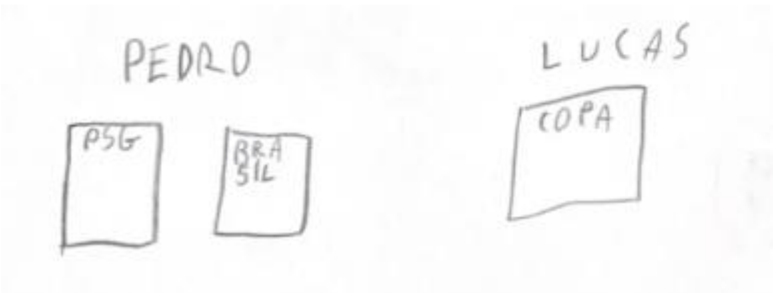
Categoria de representação não definida

Na categoria "representação não definida", as crianças, impossibilitadas de operar sem quantidades conhecidas, buscavam soluções contextuais para os problemas, acrescentando informações não presentes nas situações originais. Por exemplo, justificavam que um personagem havia pescado mais que o outro porque os peixes eram maiores, ou apresentavam respostas similares que não se baseavam em operações matemáticas formais ou informais.

As crianças Danielle, José, Luane e Wagner, que nas SI predominantemente utilizaram a estratégia de representação não definida, nas SF passaram a utilizar a representação icônica para chegar à resolução do problema. Essa mudança demonstra um avanço na capacidade de abstração e generalização, características importantes do pensamento algébrico.

Danielle (SF5) fez desenhos dos álbuns de Lucas e Pedro (Figura 45), informando que, embora a quantidade de álbuns fosse diferente, o que importava eram as figurinhas, que eram iguais nos dois álbuns.

Figura 45 – Resolução SF 5 - Danielle



Fonte: Arquivo de pesquisa

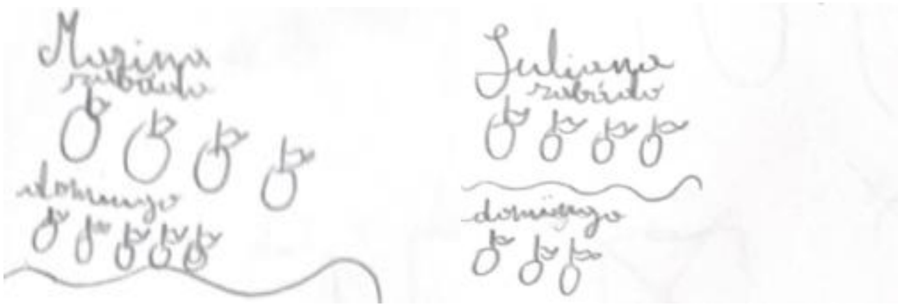
Na Figura 46, José, para descobrir a quantidade de bananas de Sofia e Clara na SF6, desenhou dois cestos para Clara, representando o que ela havia colhido pela manhã, e uma caixa para cada menina, representando o que haviam colhido à tarde. Em seguida, apagou as caixas que haviam sido perdidas, informando que as quantidades eram iguais porque nas cestas havia a mesma quantidade de bananas, mesmo que em cestos separados.

Figura 46 – Resolução SF 6 – José

Fonte: arquivo de pesquisa

Luane, para resolver a SF7, desenhou a mesma quantidade de frutas para Mariana e Juliana no sábado (Figura 47). Já para o domingo, colocou cinco frutas para Mariana, pois ela havia ganho mais, e três frutas para Juliana, que havia colhido menos no domingo. Ao final, disse que a quantidade era maior para Mariana porque ela havia colhido nove frutas no total e Juliana apenas sete, concluindo que os valores finais não eram iguais.

Figura 47 – Resolução SF 7– Luane



Fonte: arquivo de pesquisa

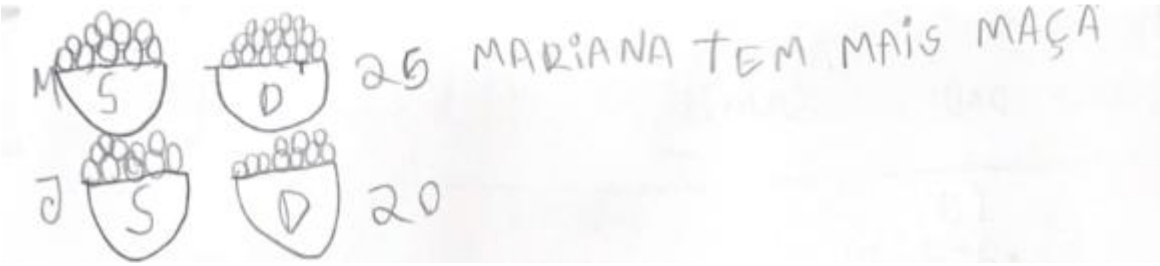
Wagner, para encontrar a solução da SF8, desenhou duas pastas para Rafael e uma pasta para Sophia, informando que havia a mesma quantidade de figuras, mas em pastas diferentes. Em seguida, desenhou um baú para cada personagem, indicando que havia as mesmas quantidades em ambos os baús (Figura 48). Depois, riscou uma pasta de cada personagem e concluiu que Rafael havia ficado com mais figurinhas, “porque a pasta pequena vale metade da pasta grande. A Sofia ficou só com o baú e o Rafael com uma pasta e o baú”

Figura 48 – Resolução SF 8 - Wagner

Fonte: arquivo de pesquisa

Wagner também utilizou a estratégia iconumérica para resolver a SF7 (Figura 49), fazendo o registro icônico e numérico das quantidades de frutas colhidas.

Figura 49 – Resolução SF 7 - Wagner



Fonte: arquivo de pesquisa.

Na SF 7, José e Danielle, utilizaram cálculo mental para concluir que Mariana e Juliana tinham quantidades finais diferentes, pois apesar de incialmente no sábado terem quantidades iguais de frutas, no domingo colheram quantidades diferentes. Perguntada sobre o porquê de não utilizar desenhos na situação, Danielle responde: “Essa não precisa. Já dá pra saber só pensando mesmo”.

A utilização de diferentes representações, aliada ao desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, sugere que as crianças se tornaram mais confiantes e eficientes na manipulação de valores desconhecidos, possivelmente devido à familiarização e à compreensão desses conceitos proporcionada pelas intervenções com o RED e a balança física.

Cálculo mental

As crianças Wagner e José, que haviam utilizado cálculo mental nas SI, demonstraram mudança em suas estratégias de resolução nas SF. Wagner, que havia utilizado cálculo mental para responder à SI7, sistematizou seu pensamento na SF7 (Figura 50), utilizando ícones e números para organizar sua resolução. Já José, que também havia concluído por cálculo mental que os valores não permaneceriam iguais após a retirada de quantidades diferentes, na SF7 estruturou seu pensamento. Ele desenhou duas pastas para Sophia e Rafael (Figura 48), informando que as personagens a mesma quantidade de figuras, e um baú para cada, também com quantidades iguais de figuras. Em seguida, após apagar as pastas doadas, concluiu que Rafael teria mais figuras, pois possuía uma pasta e um baú, enquanto Sophia tinha apenas um baú. Ao ser perguntado sobre a quantidade de figuras na pasta de Rafael, José respondeu: "Essa quantidade (apontando para a pasta de Sophia) só que colocada em dois".

Figura 50 – Resolução SF 7 - José

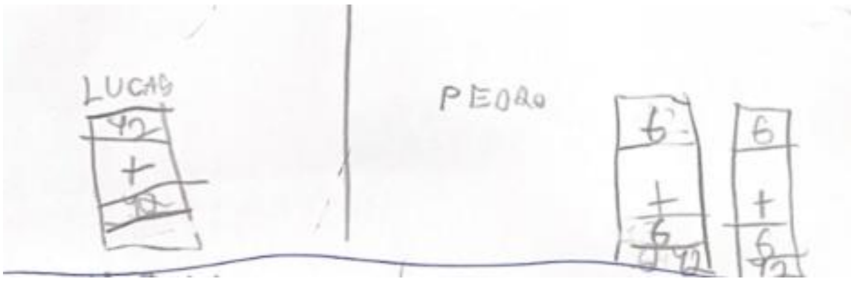
Fonte: arquivo de pesquisa

A capacidade de transitar entre diferentes estratégias e representações é um indicativo importante do desenvolvimento do pensamento algébrico, pois demonstra que as crianças não estão apenas aplicando procedimentos memorizados, mas sim compreendendo os conceitos subjacentes e utilizando diferentes ferramentas para resolvê-los.

Numérica

Micael, que já utilizava a estratégia numérica com fichas numeradas nas atividades iniciais, alternando entre considerar os valores totais e isolar quantidades, demonstrou uma mudança em sua abordagem nas SF. Ele passou a privilegiar o isolamento de quantidades, interpretando mentalmente as situações e utilizando exemplos numéricos para explicar seu raciocínio, como apresentado na Figura 51.

Figura 51 – Resolução da SF 5 - Micael



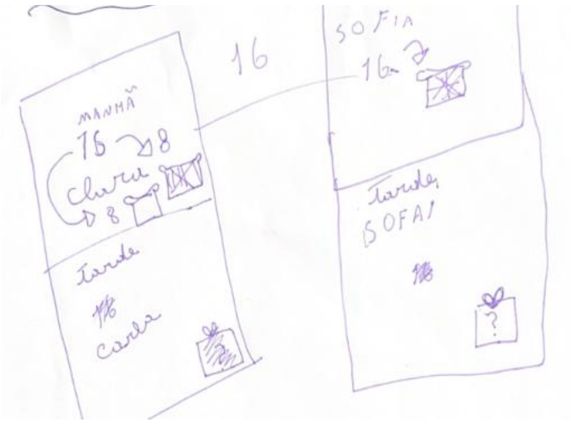
Fonte: arquivo de pesquisa

No exemplo, Micael resolveu a SF 5 atribuindo valores numéricos às quantidades de adesivos ganhos por Pedro antes e depois das férias (12 + 12). Para Lucas, dividiu a mesma quantidade inicial de Pedro em dois álbuns (6 + 6), mantendo as quantidades iniciais iguais para os dois personagens, e escreveu a mesma quantidade para Pedro após as férias (6 + 6). Ao ser indagado sobre os valores finais, respondeu: "Foi igual. Doze e doze."

<u>Iconumérica</u>

Vanessa, a única criança que utilizou a estratégia iconumérica nas situações iniciais, manteve essa abordagem nas situações finais, como demonstra a Figura 52 na resolução da SF5. No entanto, ela também demonstrou versatilidade ao empregar outras estratégias para resolver problemas com valores desconhecidos, como a representação icônica e a numérica isoladamete, evidenciando sua flexibilidade e compreensão das diferentes ferramentas disponíveis para abordar problemas matemáticos.

Figura 52 – Resolução SF 5 - Vanessa



Fonte: arquivo de pesquisa

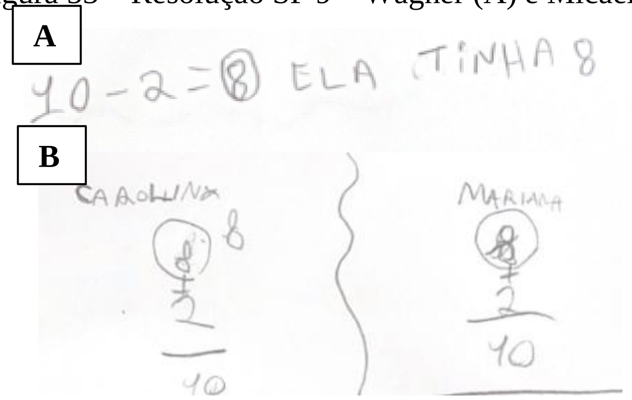
4.5.3 Incógnitas

Nas duas SF iniciais com incógnita, as crianças utilizaram três estratégias de resolução: cálculo mental, representação numérica e com material manipulável.

<u>Cálculo mental</u>

As crianças não utilizaram mais apenas cálculo mental para as situações com incógnitas, preferindo utilizar o registro numérico para basear suas resoluções. Wagner e Micael utilizaram o cálculo mental nas SI, mas com abordagens distintas. Nas situações finais, os alunos mantiveram o pensamento com operações mentais, mas sistematizaram suas respostas por meio de operações diferentes, como mostra a Figura 53 apresentando as repostas das crianças para a mesma situação, SF 9

Figura 53 – Resolução SF 9 – Wagner (A) e Micael (B)



Fonte: arquivo de pesquisa

Nas imagens, Wagner e Micael utilizaram diferentes estratégias para encontrar o valor inicial de bonecas de Carolina. Wagner partiu da quantidade final de bonecas de Carolina (10), assumindo que ambas terminaram com quantidades iguais, e subtraiu as duas que Carolina havia ganhado (Figura 53A), concluindo que Carolina tinha 8 bonecas inicialmente. Já Micael utilizou a operação inversa, adicionando valores ao valor recebido (2) até chegar à quantidade final (10), conforme a Figura 53B, chegando à mesma conclusão de que o valor inicial de Carolina também seria 8.

Na SF10, Micael demonstrou um aprimoramento em sua estratégia de resolução em relação à SI10. Enquanto na SI10 ele apenas somava os valores conhecidos, na SF10 ele compreendeu que, para encontrar a quantidade inicial de tintas de Julia, precisava considerar a quantidade final (8) e encontrar um valor que, subtraindo a quantidade utilizada durante a aula (3), resultasse nesse valor final (Figura 54). Essa mudança de abordagem indica um avanço na compreensão da relação entre valores iniciais e finais, e na utilização de operações inversas para encontrar incógnitas.

Figura 54 – Resolução SF10 - Micael

Fonte: arquivo de pesquisa

Convém destacar que outras crianças, preferiram a operação inversa, somando as quantidades finais (8) com as utilizadas durante a aula (3), no entanto, compreendendo as escolhas das operações, como exemplificado pela fala de Luane: “Se juntar o que tinha no final com o que eles gastaram vai dar quanto eles tinham no começo.”

Numérica

Nas situações iniciais, apenas José utilizou a estratégia numérica com fichas numeradas, mas não obteve sucesso na resolução dos problemas. Nas situações finais, no entanto, ele demonstrou progresso, utilizando a adição com números escritos para encontrar a solução da SF9 e aplicando a mesma operação na SF10. Essa mudança sugere que a experiência com o RED e a balança física pode ter contribuído para o desenvolvimento de sua compreensão da representação numérica e da aplicação da adição na resolução de problemas com incógnitas.

Material manipulável

Vanessa, que havia utilizado material manipulável para resolver as situações com incógnitas nas SI, demonstrou uma transição para o uso de registros numéricos nas SF. Essa mudança de estratégia foi marcada por um momento durante a resolução da SF9, quando a aluna disse: "Ah! Entendi como é. É igual no jogo. Tem que descobrir um número tirando o dois de dez." Essa fala evidencia a compreensão da relação entre a manipulação concreta de objetos e a representação simbólica das operações matemáticas, indicando um avanço na capacidade de abstração e na utilização de estratégias numéricas para resolver problemas com incógnitas.

4.6. Síntese dos Resultados: O que os dados sugerem sobre o Pensamento Algébrico?

Os resultados apresentados ao longo deste capítulo sugerem a evolução de alguns aspectos do pensamento algébrico, destacando quatro domínios fundamentais: **Generalizar, Estabelecer Relações, representar e Operar com o Desconhecido**.

No contexto teórico, esses quatro aspectos dialogam diretamente com as perspectivas da *Early Algebra* discutidas por Kaput (2008), que destaca a importância de explorar generalizações e padrões desde os primeiros anos escolares como base para o pensamento algébrico. Blanton et al. (2015) reforçam essa abordagem ao afirmar que o desenvolvimento do pensamento funcional permite que as crianças estabeleçam conexões entre ideias matemáticas e expressões simbólicas. Estudos de Carraher e Schliemann (2007) mostram como a introdução precoce de funções e relações facilita a compreensão de conceitos mais abstratos, enquanto Canavarro (2007) enfatiza o papel das múltiplas representações na construção de estratégias formais para operar com incógnitas. Além disso, Almeida e Câmara (2017) destacam que o pensamento algébrico envolve a capacidade de manipular valores desconhecidos e desenvolver estratégias para resolvê-los. Por fim, autores como Freire (2007) e Castro-Filho et al. (2022) ressaltam a importância do uso de tecnologias digitais no apoio à aprendizagem algébrica, promovendo transições mais suaves entre o concreto e o abstrato.

A capacidade de **generalizar** ideias matemáticas foi um dos aspectos evidentes ao longo do estudo. As crianças foram capazes de identificar padrões e aplicar regras aritméticas em situações variadas. Um exemplo disso foi observado quando uma criança, após resolver um problema envolvendo adição simples, aplicou a mesma estratégia a um problema que exigia a generalização de uma regra aritmética mais complexa, como a identificação de padrões na soma de múltiplos números. Esse resultado está alinhado com Kaput (2008), que descreve a generalização como a base para o pensamento algébrico, destacando que ela permite a formulação de conceitos matemáticos e generalizações expressas em sistemas simbólicos.

Conforme Blanton et al. (2015), essa capacidade de generalização está intimamente relacionada ao desenvolvimento do pensamento funcional, uma dimensão da *Early Algebra*. Estudos como os de Carraher e Schliemann (2007) destacaram a importância de introduzir funções e relações desde cedo, criando conexões sólidas para a compreensão de conceitos mais complexos.

A capacidade de **estabelecer relações** entre expressões e grandezas também se destacou, evidenciando o pensamento algébrico emergente nas crianças. Um exemplo disso foi a identificação de equivalências entre expressões numéricas, como reconhecer que 4 + 3 e 2 + 5 representam o mesmo resultado (7). Essa capacidade está alinhada com as ideias de Kaput (2008) sobre a importância de pensar funcionalmente, permitindo que os alunos percebam relações e variações entre grandezas.

Estudos como o de Canavarro (2007) mostraram que a capacidade de estabelecer relações é um componente crítico no desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo que os alunos avancem de representações concretas para abstratas. Carraher e Schliemann (2016) também reforçam que o pensamento relacional é fundamental para transições algébricas, ajudando os alunos a entenderem equações como comparações entre funções. Nesse sentido, o estudo confirmou que a introdução precoce dessas relações, por meio de atividades interativas e manipulativas, facilita a transição para a linguagem algébrica formal.

O aspecto de **representar** foi observado como uma capacidade em desenvolvimento gradual. Inicialmente, as crianças utilizavam desenhos e objetos físicos para modelar problemas matemáticos. Com as intervenções e o uso de recursos digitais, houve uma transição significativa para o uso de números e símbolos matemáticos, como o sinal de igualdade (“=”) e suas funcionalidades, um exemplo disso são as respostas de Daniel (página 109). Bianchini e Lima (2023) enfatizam que o uso de diferentes linguagens matemáticas – simbólicas, numéricas ou icônicas – é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa competência foi claramente observada, especialmente nas situações em que as crianças passaram a manipular expressões numéricas para representar problemas mais abstratos.

Conforme Kaput (2008), a representação simbólica desempenha um papel central na transição do pensamento concreto para o abstrato. Estudos como Carraher e Schliemann (2016) sugerem que expressões simbólicas aprimoram a compreensão funcional de equações, enquanto abordagens manipulativas fornecem uma ponte crucial para a abstração.

O aspecto de **operar com o desconhecido** foi identificado como um dos mais desafiadores para as crianças nas situações iniciais. Conforme Almeida e Câmara (2017), o pensamento algébrico envolve operar com o desconhecido como parte fundamental do desenvolvimento matemático. Inicialmente, os alunos utilizaram estratégias concretas, como desenhos e manipulações físicas, para lidar com valores desconhecidos.

Durante o uso do RED, as crianças começaram a experimentar soluções e visualizar relações matemáticas de forma interativa, demonstrando avanços na compreensão e manipulação de incógnitas. Em uma das atividades, as crianças representaram incógnitas com figuras geométricas, como quadrados e círculos, e utilizaram contagens para preencher os valores desconhecidos. Posteriormente, avançaram para registros simbólicos, como N + 3 e N - 2, mostrando flexibilidade no uso de variáveis para expressar relações matemáticas.

Esses avanços foram particularmente observados na resolução das Situações Finais, onde as crianças demonstraram maior autonomia e confiança na manipulação de incógnitas e na aplicação de estratégias para resolvê-las. Estudos de Carraher e Schliemann (2007) evidenciam que crianças podem utilizar variáveis simbólicas para representar valores desconhecidos e realizar operações sobre eles. Conforme Canavarro (2007), o uso de múltiplas representações, como o jogo virtual e a manipulação física, contribui para a construção de estratégias formais para lidar com incógnitas, permitindo às crianças interpretarem as variáveis como representações flexíveis e dinâmicas.

Os progressos apresentados refletem a importância de um suporte pedagógico que combine tecnologia e abordagens concretas para facilitar a transição do pensamento concreto para o abstrato, preparando as crianças para lidar com operações algébricas de forma mais acessível, o que reforça a importância do uso de tecnologias digitais no ensino da álgebra, conforme destacado por Freire (2007) e Castro-Filho et al. (2022).

A comparação entre os grupos que utilizaram o RED antes e depois da balança de dois pratos mostrou que, independentemente da ordem, o Reino de Aljabar desempenhou um papel importante ao fornecer aos alunos base para compreensão e aplicação de conceitos algébricos, especialmente em relação à compreensão e utilização de símbolos matemáticos e leitura de expressões. Uma vez que os alunos que utilizaram o RED antes da balança de dois pratos, tiveram maior facilidade na leitura e interpretação de expressões algébricas, identificando corretamente as situações de igualdade ou desigualdades nas situações apresentadas.

A análise dos dados sugere uma contribuição para compreensão mais ampla das dinâmicas de aprendizagem algébrica nos primeiros anos de escolarização e reforçam a importância de uma abordagem pedagógica integrada, que combine recursos digitais com atividades práticas para promover o desenvolvimento do pensamento abstrato. Com essas reflexões, o estudo avança agora para as Conclusões, onde serão discutidas as implicações pedagógicas e teóricas dos resultados obtidos, bem como as contribuições da pesquisa para o campo da educação matemática e para futuras investigações.

5 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, investigou-se o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 3º e 4º ano do Ensino Fundamental por meio da utilização do RED "O Reino de Aljabar: o Desafio da Balança", com o objetivo de explorar os conceitos de equações, inequações e incógnitas. Buscou-se verificar os conhecimentos prévios das crianças sobre os conceitos algébricos, mapear as estratégias utilizadas no uso do recurso digital e identificar as mudanças na aprendizagem após a utilização do RED.

Para atingir esses objetivos, foram desenvolvidas intervenções com oito alunos de idades entre 7 e 10 anos de duas escolas públicas municipais de Fortaleza. As etapas da intervenção incluíram: resolução de situações-problemas iniciais, resolução de situações-problemas com uma balança de dois pratos, utilização do RED "O Reino de Aljabar: o Desafio da Balança" e resolução de situações-problemas finais. Os dados foram coletados por meio de registros orais e escritos das resoluções das crianças, diários de campo, videografia, gravação de tela dos computadores e entrevistas individuais.

Os resultados obtidos indicam avanços na compreensão dos conceitos algébricos entre os estudantes, com destaque para a interpretação do sinal de igualdade como equivalência e a operação com incógnitas. Inicialmente, muitos alunos compreendiam o sinal de igual apenas como um indicativo de resultado. Contudo, após as intervenções, passaram a interpretá-lo também como uma representação de equivalência entre expressões matemáticas, fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Além disso, as crianças passaram a operar com valores desconhecidos, demonstrando a capacidade de compreender e manipular incógnitas em equações e inequações. Elas identificaram valores desconhecidos e desenvolveram estratégias para isolá-los e determinar seus valores, evidenciando um avanço na compreensão do conceito de incógnita e sua aplicação na resolução de problemas.

Os achados revelam que tanto a manipulação física da balança quanto o uso do RED colaboram para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois possibilitam trabalhar conceitos de equivalência e incógnitas por meio da generalização de conceitos aritméticos. A ordem de utilização desses métodos influencia diferentes aspectos do aprendizado: o uso prévio do RED parece favorecer a compreensão dos símbolos matemáticos, enquanto a manipulação prévia da balança física estimula o desenvolvimento de estratégias criativas e flexíveis de pensamento. As crianças que utilizaram primeiro a balança física apresentaram estratégias mais elaboradas no uso do RED, enquanto aquelas que utilizaram o RED inicialmente demonstraram maior capacidade de leitura e uso de operações matemáticas.

A idade e o ano escolar não influenciaram a realização das intervenções, uma vez que tanto as crianças do 3º quanto do 4º ano apresentaram dificuldades e estratégias de resolução similares. No entanto, o último nível do jogo demonstrou ser particularmente mais desafiador para as crianças do 3º ano, com algumas delas necessitando de mais de 100 movimentos para finalizar o nível. O tempo da atividade, cerca de uma hora para finalizar os 4 níveis, também pareceu ser mais cansativo para as crianças do 3º ano. Compreendendo a relevância do RED para o desenvolvimento do pensamento algébrico e o nível de desenvolvimento intelectual das crianças dessa faixa etária, sugere-se utilizar somente os níveis iniciais (1 e 2) em situações de sala de aula. Além disso, nessa etapa de escolarização, pode-se fazer o uso inicial da balança física e em seguida fazer uso do RED. Assim, pode-se diminuir o tempo de resolução dos primeiros níveis do RED, dada a familiarização prévia das crianças com a balança.

O estudo apontou algumas vantagens na utilização do RED em relação aos métodos convencionais, principalmente na capacidade de representar conceitos matemáticos de maneira visual e interativa, utilizando uma abordagem gamificada. Diferentemente dos métodos tradicionais, que muitas vezes se baseiam em instruções verbais e manipulação de materiais físicos, o RED facilitou a compreensão de conceitos mais abstratos e ofereceu uma experiência de aprendizado dinâmica. Além disso, possibilitou a personalização do ritmo de aprendizado, permitindo que cada aluno avançasse de acordo com suas capacidades e dificuldades. Essa flexibilidade, difícil de ser alcançada com métodos tradicionais que tendem a seguir um ritmo uniforme, é complementada pela variabilidade de desafios e possibilidades de respostas diversificadas oferecidas pelo RED, algo que seria mais difícil de reproduzir com materiais manipulativos convencionais. Esse achado corrobora com resultados anteriores de estudos com o Balança Interativa (Freire, 2007). Além disso, indica um pressuposto sobre o uso de recursos digitais, os quais devem possibilitar o trabalho com situações que são difíceis ou até mesmo impossíveis de serem realizadas com recursos analógicos (Carraher, 1992).

Esta pesquisa contribui de forma relevante para a área da Educação Matemática em dois aspectos principais: a ampliação da literatura sobre pensamento algébrico e tecnologias digitais, e a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra nos anos iniciais. Estudos anteriores, como os de Carraher e Schliemann (2007), já destacavam a capacidade das crianças em lidar com incógnitas e variáveis simbólicas desde cedo. A pesquisa atual reforça essa perspectiva ao demonstrar que, mesmo nos anos iniciais, os alunos são capazes de desenvolver estratégias para operar com valores desconhecidos, tanto em contextos concretos quanto simbólicos. Essa constatação amplia os resultados de Kaput (2008), que defendem a introdução precoce de atividades algébricas como base para o pensamento matemático formal.

Além disso, Canavarro (2007) ressalta a importância do uso de múltiplas representações para facilitar a transição entre pensamento concreto e abstrato. Os resultados deste estudo corroboram essa abordagem, demonstrando que o uso combinado da balança física e do RED proporcionou uma progressão eficaz para o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo aos alunos explorarem equivalências e relações de forma gradual. Pesquisas como as de Freire (2007) e Castro-Filho et al. (2022) enfatizam o papel das tecnologias digitais na criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos e personalizados. Este estudo reforça esses achados ao evidenciar como o RED possibilitou a experimentação e adaptação de estratégias pelos alunos, promovendo a autonomia e o raciocínio lógico na resolução de problemas algébricos.

Por fim, a pesquisa complementa as contribuições de Almeida e Câmara (2017), que destacam a necessidade de abordar conceitos algébricos de maneira gradual e contextualizada. Os achados confirmam que o uso de representações visuais e simbólicas contribui para a compreensão das propriedades matemáticas e a transição para o uso de linguagem formal, consolidando assim a aprendizagem algébrica nos anos iniciais.

No que se refere à literatura existente, a pesquisa colabora para superação de uma lacuna importante, uma vez que há escassez de estudos que abordam a *Early Algebra* e o uso de tecnologia digital de forma combinada. A maioria das pesquisas sobre álgebra e tecnologia digital tende a se concentrar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Este estudo amplia essa perspectiva, demonstrando que alunos dos anos iniciais podem não apenas se beneficiar dessas abordagens tecnológicas, mas também desenvolver aprendizagens algébricas relevantes por meio delas.

Em qualquer pesquisa acadêmica, é importante reconhecer as limitações inerentes ao estudo. Embora a dependência da tecnologia não seja uma questão exclusiva desta pesquisa, ela pode se tornar um obstáculo em contextos escolares com infraestrutura inadequada. Neste estudo, por exemplo, foi necessário o uso de computadores e recursos próprios, o que evidenciou as dificuldades de implementação em escolas com menor acesso a dispositivos digitais. Adicionalmente, os desafios de manuseio de acessórios, como o *mouse*, e a falta de adaptação do RED para *tablets* e sistemas *Android* podem restringir a interação das crianças com a ferramenta, afetando a uniformidade das experiências de aprendizagem. Essas questões ressaltam a necessidade de adaptações tecnológicas para ampliar o alcance e a aplicabilidade do RED em diferentes contextos escolares, assim propõe-se a adaptação do Reino de Aljabar para o sistema *Android,* considerando que, *tablets* e *smartphones* são atualmente mais acessíveis à realidade das escolas e alunos brasileiros.

Outro ponto a ser considerado é que, apesar da gamificação ser um elemento forte do RED, as premiações por nível não se mostraram tão envolventes para as crianças, pois a quantidade de bonificação não variou independentemente da quantidade de movimentos realizados, como era o esperado. O histórico de movimentos, embora bastante explorado pelas crianças, poderia ser mais indutivo. A ordem de apresentação dos movimentos (dos primeiros para os últimos) dificulta a leitura dos últimos movimentos realizados, especialmente para crianças pequenas, para quem essa sequência pode não ser intuitiva. Como sugestão, propõe-se a reorganização desse histórico em uma estrutura mais dinâmica, permitindo a navegação reversa e destacando os movimentos mais recentes. A inclusão de cores ou símbolos visuais para identificar tentativas bem-sucedidas e erros também poderia facilitar a análise e a revisão das estratégias aplicadas pelas crianças.

Outra limitação relevante deste estudo refere-se ao número reduzido de participantes, o que restringe a possibilidade de generalização dos resultados obtidos. Embora o pequeno grupo tenha permitido uma análise detalhada das interações e estratégias utilizadas pelos alunos, a extensão das conclusões para outros contextos educacionais demanda cautela. Nesse sentido, sugere-se a realização de investigações futuras com amostras mais amplas e diversificadas. Estudos com maior número de participantes, especialmente em turmas regulares de sala de aula, poderiam oferecer resultados mais robustos e comparáveis, possibilitando uma análise estatística mais aprofundada e a identificação de padrões mais abrangentes

A formação de professores para o uso de RED também se mostra um caminho de investigação relevante, visto que os resultados positivos deste estudo decorrem de mediações intencionais e planejadas. Investigar como capacitar os professores para integrar a tecnologia ao currículo e potencializar seus benefícios para o ensino e a aprendizagem é importante para garantir a adaptação e a progressão dos resultados obtidos.

Por fim, considerando que esta pesquisa abordou apenas alguns conceitos específicos relacionados ao pensamento algébrico, futuras investigações podem ampliar o escopo, explorando a aplicação de tecnologias digitais no desenvolvimento de outras formas de pensamento matemático e na abordagem de uma gama mais ampla de conceitos algébricos. Estudos futuros podem investigar o uso de outros REDs voltados aos anos iniciais que abordem outros aspectos, como os recursos desenvolvidos pelo Grupo Proativa da UFC, *Amalí: a árvore* *mágica, Chocomática 1* [13]*e Chocomática 2*[14], que oferecem diferentes abordagens para o ensino de padrões numéricos e sequências.

O *RED Amalí* [15]é voltado para alunos do 2º ano do Ensino Fundamental e utiliza desafios colaborativos para formar sequências numéricas com base em padrões de cores e números. Esse recurso explora relações matemáticas e promove a cooperação entre os alunos, incentivando a construção do raciocínio lógico por meio da interação. Já os *REDs Chocomática 1* e *Chocomática 2* trabalham com habilidades algébricas previstas na BNCC, como organização e reconhecimento de padrões. O primeiro tem foco individual, ajudando os alunos a organizarem objetos e formarem sequências baseadas em atributos e quantidades. O segundo expande essa abordagem para um formato colaborativo, desafiando os alunos a organizarem chocolates em prateleiras seguindo regras de agrupamento e progressão numérica.

A exploração de *REDs,* como os sugeridos, em futuras pesquisas permitirá analisar como diferentes formatos de interação, individuais e colaborativos, impactam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, será possível investigar como o uso dessas ferramentas pode ser integrado ao currículo escolar, contribuindo para a formação de competências matemáticas alinhadas à BNCC. Também se sugere a realização de estudos longitudinais para avaliar o impacto do uso contínuo dessas tecnologias na consolidação das aprendizagens algébricas e no desenvolvimento do raciocínio matemático em etapas posteriores da escolarização.

[13] RED Chocomática 1 disponível em: http://mide-chocomatica-treinamento.netlify.app/

[14] RED Chocomátoca 2 disponível em: http://mide-chocomatica-inauguracao.netlify.app/

[15] RED Amalí disponível em: http://mide-amali.netlify.app/

REFERÊNCIAS

ADAMUZ-POVEDANO, Natividad; FERNÁNDEZ-AHUMADA, Elvira; GARCÍA-PÉREZ, M. Teresa; MONTEJO-GÁMEZ, Jesús. Developing Number Sense: an approach to initiate algebraic thinking in primary education. **Mathematics**, [S.L.], v. 9, n. 5, p. 518, 2 mar. 2021. MDPI AG. http://dx.doi.org/10.3390/math9050518. Disponível em: Disponível: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/5/518. Acesso em: 14 de jan. 2024.

ALGEBRA. *In:* DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2024. Disponível em: https://www.dicio.com.br/algebra. Acesso em: 14 fev. 2024.

ALGEBRA. *In:* DICIONÁRIO Priberam da Língua Portuguesa. 2024. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/álgebra. Acesso em: 14 fev. 2024.

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. PENSAMENTO ALGÉBRICO: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 6, n. 10, p. 34-60, 20 nov. 2020. Universidade Estadual do Paraná - Unespar. http://dx.doi.org/10.33871/22385800.2017.6.10.34-60. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6055 Acesso em: 19 jan. 2024.

AMADO, Nélia. Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. **Educação e Matemática**, n. 166, p. 2-6, 4.º trim. 2022. Disponível em: https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica. Acesso em: 19 jan. 2024.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro. de (org.). **O pensamento matemático**: e os diferentes modos de pensar que o constituem. São Paulo, Sp: Livraria da Física, 2023.

BLANTON, Maria; STEPHENS, Ana; KNUTH, Eric; GARDINER, Angela Murphy; ISLER, Isil; KIM, Jee-Seon. The Development of Children's Algebraic Thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. **Journal For Research In Mathematics Education**, [S.L.], v. 46, n. 1, p. 39-87, jan. 2015. National Council of Teachers of Mathematics. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.46.1.0039. Acesso em 10 jan 2024.

BOGDAN, Robert.; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educaçã**o, Secretaria da Educação Básica, Brasília, DF: SEB, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em 20 de dez. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório dos resultados 2019**. Brasília, DF: INEP, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf. Acesso em 20 de out. 2023.

BRIZUELA, Bárbara. M. **Desenvolvimento matemático, na criança**: explorando notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 20 ago. 2023.

CARRAHER, David.W. A aprendizagem de conceitos com o auxílio do Computador. *In:* ALENCAR, M.E. **Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino-Aprendizagem**. São Paulo, Cortez Editora,1992.

CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analucia; BRIZUELA, Bárbara. Can Young Students Operate on Unknowns? *In:* VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (Ed.), **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Freudenthal Institute: Vol. 2, 2001. p. 2-169

CARRAHER, David. W.; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. D.; SCHWARTZ, Judah. L. Early algebra is not the same as algebra early. *In:* KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Org.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 235–272.

CARRAHER, David W.; BLANTON, Maria L. (Org.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates; Taylor & Francis Group, 2008, p. 5–18.

CARRAHER, David. W.; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. D. Algebraic reasoning in elementary school classrooms. *In:* LAMBDIN, D.; LESTER, F. K. (Org.). **Teaching and learning mathematics**: Translating research to the classroom. Reston, VA: NCTM, 2010. p. 23–29.

CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analucia; SCHWARZ, J.L. **Early algebra ≠ algebra early**. Algebra in the early grades. 2018, p. 235-272

CASTRO FILHO, José. Aires. Objetos de aprendizagem e sua utilização no ensino de matemática. IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte**. Anais Eletrônico** [...]. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, 2007. 15 p. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/kalinke/grupos-de pesquisa/pde/pdf/objetos_de_aprendizagem_e_EM.pdf. Acesso em: 2 nov. 2023.

CASTRO FILHO, José Aires.; FREIRE, Raquel; FERNANDES, Alisandra; LEITE, Monalisa. Quando objetos digitais são efetivamente para aprendizagem: o caso da matemática. *In:* XIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE), 2008, Fortaleza. **Anais** [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2008. v. 1. p. 583-592.

CASTRO FILHO, José. Aires; CASTRO, Juscileide; SOUZA, Monalisa; FREIRE, Raquel; NASCIMENTO, Gabriel. O reino de Aljabar: o desafio da balança: Um Recurso Educacional Digital para favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO CONCURSO APPS.EDU - PROTÓTIPO, 2021, Online. **Anais** [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira da Computação, 2021. v. 1. p. 197-204. Disponível em: https://sol.sbc.org.br/index.php/cbie_estendido/article/view/18210. Acesso em 10 de jan.2024.

CASTRO FILHO, José Aires; CASTRO, Juscileide; FREIRE, Raquel. Contributions of Digital Technologies to the Development of Algebraic Thinking at School. *In:* SPINILLO, Alina; LAUTERT Sintria; BORBA, Rute. (Org.). **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. 1ed.: Springer International Publishing, 2021, v.1, p. 219-238. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_10

CASTRO, Juscileide. **A utilização de objetos de aprendizagem para a compreensão e construção de gráficos estatísticos**. Orientador: José Aires de Castro Filho. 2012. 218f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

COELHO, Flávio; AGUIAR, Marcia. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, [S.L.], v. 32, n. 94, p. 171-187, dez. 2018. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/. Acesso em 20 dez. 2023

FREIRE, Raquel Santiago. **Ambientes computacionais para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. Orientador: José Aires de Castro Filho. 2007. 130f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza 2007. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3219/1/2007_Dis_RSFREIRE.pdf. Acesso em 15 de jun. 2023.

FREIRE, Raquel Santiago. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. Orientador: José Aires de Castro Filho. 2011. 181f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza 2011. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/3304. Acesso em 15 de jun. 2023.

FREIRE, Raquel; CASTRO FILHO, José Aires. Desenvolvendo conceitos algébricos no ensino fundamental com o auxílio de um Objeto de Aprendizagem. *In:* XXVI CONGRESSO DA SBC, 16. WIE XII Workshop de Informática na Escola. 12, 2006, Campo Grande. **Anais** [...]. Campo Grande: SBC, 2006. p. 156-163. Disponível em:https://www.researchgate.net/publication/277220074_Desenvolvendo_conceitos_algebricos_no_ensino_fundamental_com_o_auxilio_de_um_Objeto_de_Aprendizagem. Acesso em: 19 jan. 2025.

GODINO, Juan D.; AKÉ, Lilia P.; GONZATO, Margherita; WILHELMI, Miguel R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas**, [S.L.], v. 32, n. 1, p. 199-219, 3 mar. 2014. Universitat Autonoma de Barcelona. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965. Disponível em: https://ensciencias.uab.cat/article/view/v32-n1-godino-ake-gonzato-etal. Acesso em 12 de jan. 2024.

HOUAISS, A. **Grande Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 5. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2019.

KAPUT, James; BLANTON, Maria. Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systematic way. *In*: ROMBERG, T. A.; CARPENTER, T. P.; DREMOCK,

F. (Org.). **Understanding mathematics and science matters**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005. p. 99–125.

KAPUT, James. What is algebra? What is algebraic reasoning? *In:* KAPUT, James CARRAHER, David.; BLANTON, Maria (eds.), **Algebra in the early grades**, 2008, p. 235-272, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.

KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Org.) **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

KAPUT, J.; SCHORR, R. Changing representational infrastructures, changes most everything: the case of SimCalc, algebra and calculus. *In*: HEID, M. K.; BLUME, G. (Org.). **Research on technology in the learning and teaching of mathematics**: Syntheses and perspectives. Disponível em: http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/simcalc/cc1/library/changinginfrastruct.pdf. Acesso em: 08 out. 2023.

KAPUT, J.; SCHORR, R. Changing representational infrastructures, changes most everything: the case of SimCalc, algebra and calculus. *In:* HEID, M. K.; BLUME, G. (Org.). **Research on technology in the learning and teaching of mathematics**: Syntheses and perspectives. Bingley: Emerald Publishing Ltd (Iap), 2008. Disponível em:http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/simcalc/cc1/library/changinginfrastruct.pdf. Acesso em: 08 out. 2023.

LAUTERT, Sintra. L. **As dificuldades das crianças com a divisão**: um estudo de intervenção. Orientadora: Alina Galvão Spinillo. 2005. 326f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Programa de Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8334. Acesso em 20 de jan. 2024

LEITE, Monalisa. **Processos de mediação de conceitos algébricos durante o uso de um objeto de aprendizagem**. Orientador: José Aires de Castro Filho. 2006. 209f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.

QUEIROZ, Kelly Jessie; LIMA, Vanessa. Método Clínico piagetiano nos estudos sobre Psicologia Moral: o uso de dilemas. **Schème**: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, [S.L.], v. 3, n. 5, p. 110-131, 2010. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/1970. Acesso em: 02 fev. 2023.

LINS, R. C. **A Framework for Understanding What Algebraic Thinking Is**.2006. 372f. Tese (Doutorado em Psicologia) – University of Nottingham, Nottingham, 1992. Disponível em: https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf. Acesso em: 08 jan. 2024.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI**. Campinas- São Paulo: Papirus, 1997.

LINS, R.; KAPUT, J. The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. *In*: The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study, 2004.

Anais. [...] Springer Nature, 2004, v. 12 p. 47-70. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/1-4020-8131-6. Acesso em 20 jan. 2024.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACÊDO, Laécio. **Análise do uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos**. Orientadora: Síntria Labres Lautert. 2009. 172f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

MAGINA, Sandra; OLIVEIRA, Caio Fabio dos Santos de; MERLINI, Vera Lucia. O Raciocínio Algébrico no Ensino Fundamental: o debate a partir da visão de quatro estudos. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, [S.L.], v. 9, n. 1, p. 1-23, 16 jun. 2018. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/235070/pdf. Acesso em: 20 jan. 2024.

OLIVEIRA, Izabella; FARIAS, Luiz Márcio. BNCC: uma análise das tarefas prescritas na unidade temática álgebra. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, [S.L.], v. 12, n. 3, p. 1-24, 3 ago. 2021. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/250175. Acesso em: 14 jun. 2024.

ONTARIO. Ministry of Education. **Paying Attention to Algebraic Reasoning, K-12**: Support Document for Paying Attention to Mathematical Education. Ontário: Queen's Printer for Ontario, 2013. 23 p. Disponível em: https://dl.icdst.org/pdfs/files3/64eecb4ea2ef2a67953a74d80bdd4131.pdf. Acesso em: 20 jan. 2024.

PIAGET, Jean. A teoria de Piaget. *In*: MUSSEN, P. (Org.). **Desenvolvimento cognitivo**. v. 4. São Paulo: EDU, 1975. p. 71-115.

POPE, Holly; MANGRAM, Charmaine. Wuzzit Trouble: the influence of a digital math game on student number sense. **International Journal of Serious Games**, [S.L.], v. 2, n. 4, p. 5-22, 4 dez. 2015. Http://dx.doi.org/10.17083/ijsg.v2i4.88. Disponível em: https://journal.seriousgamessociety.org/index.php/IJSG/article/view/88. Acesso em: 18 abr. 2024.

PORTO, R.. **Early álgebra: prelúdio da álgebra por estudantes do 3° e 5º anos do ensino fundamental**. Orientadora: Sandra Maria Pinto Magina. 2018. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, 2018.

RADFORD, Luis**.** Early algebra: Simplifying equations. *In:* TWELFTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (CERME12), 12., 2022, Bozen-Bolzano, Itália. **Anais** [...]. Bozen-Bolzano: ERME, 2022. Disponível em: https://hal.science/hal-03745187v1. Acesso em 20 abr. 2024.

RIBEIRO, Flávia Martins; PAZ, Maria Goretti. O ensino da matemática por meio de novas tecnologias. **Revista Modelos**, FACOS/CNEC Osório, ano 2, v. 2, n. 2, p. 12-20. ago. 2012.

SCHLIEMANN, Ana Lucia; CARRAHER, David; BRIZUELA, Barbara; JONES, Wendy. Solving algebra problems before algebra instruction. In: SECOND EARLY ALGEBRA MEETING, 2., 1998, Medford, MA. **Anais eletrônicos**. University of Massachusetts at Dartmouth/Tufts University, 1998. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED446895. Acesso em:12 mar. 2024.

SIBGATULLIN, Iskander R.; KORZHUEV, Andrey V.; KHAIRULLINA, Elmira R.; SADYKOVA, Albina R.; BATURINA, Roza V.; CHAUZOVA, Vera. A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. **Eurasia Journal Of Mathematics, Science And Technology Education**, online, v. 18, n. 1, p. 1-15, 3 jan. 2022. Modestum Publishing Ltd. http://dx.doi.org/10.29333/ejmste/11486. Disponível em: https://www.ejmste.com/download/a-systematic-review-on-algebraic-thinking-in-education-11486.pdf. Acesso em: 02 fev. 2024.

SILVA, Maria Heloisa; PEREIRA, Cicero; ALVES, Francione. Dificuldades no aprendizado de álgebra e estratégias para a sua aprendizagem. *In:* ENCONTRO NACIONAL DAS LICENCIATURAS, 2018, Juazeiro do Norte. **Anais.** Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, 2018. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/enalic/2018/443-55311-28112018205731.pdf. Acesso em: 15 nov. 2023.

SOUZA, Danilo do Carmo de. **Tecnologias digitais e a aprendizagem de conceitos estatísticos:** a utilização do software Geogebra por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Orientador: José Aires de Castro Filho 2019. 116f. - Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/52833. Acesso em 15 dez. 2023.

SPINILLO, Alina.; LAUTERT, Síntria. Pesquisa-intervenção em psicologia do desenvolvimento cognitivo: princípios metodológicos, contribuição teórica e aplicada. *In*: CASTRO, L.R.; BESSET, V.L. (org.). **Pesquisa-intervenção na infância e juventude**. Rio de Janeiro: Editora FAPERJ, 2008. p.294-317.

STRAUSS, Anselm.; CORBIN, Juliet. **Pesquisa qualitativa:** técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TEIXEIRA, Antônio César. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental:** uma proposta de intervenção. 2016. 118f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, 2016.

APÊNDICE A – SITUAÇÕES-PROBLEMA INICIAIS

situações-problema desenvolvidas com base em: Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998), Schliemann e Brizuela (2006) e Freire (2007; 2011)

SITUAÇÕES COM QUANTIDADES CONHECIDAS

1. **Adição de duas quantidades iguais –** João e Sara estão brincando de bolas de gudes. João pegou 4 bolas de gudes do seu bolso esquerdo para brincar. João pegou então mais 4 bolas de gudes do seu bolso direito para brincar. Sara levou 8 bolas de gudes da sua coleção para brincar. Durante o jogo, Sara ganhou mais 2 bolas de gudes. João também ganhou 2 bolas de gude durante o jogo. Você acha que João tem a mesma quantidade de bolas de gude da Sara? Ou você acha que um tem mais bolas de gudes que outro?

2. **Subtração de duas quantidades iguais –** Bruno e Tiago adoram comer chocolate. Um dia, Bruno levou 10 chocolates para a escola e depois comprou mais 2 na loja da escola. Tiago levou 5 chocolates, comprou então mais 5 na loja da escola e ganhou mais 2 de um outro amigo. No recreio, Tiago comeu 2 de seus chocolates e Bruno comeu também 2 de seus chocolates. Você pensa que após o recreio Tiago tem a mesma quantidade de chocolates que Bruno? Ou, você acha que um tem mais chocolates do que o outro? Explique como pensou. Explique como pensou.

3. **Adição de duas quantidades diferentes –** Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas, e Joana também ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia, Joana tem a mesma quantidade de presentes que Bárbara?

4. **Subtração de duas quantidades diferentes –** Patrícia e Daniel estão brincando fora da vizinhança. Como os dois gostam de laranja, foram às suas casas pegar laranja. Patrícia pegou 6 laranjas e Daniel pegou 3. Depois eles voltaram para suas casas pegar mais laranja. Patrícia pegou mais 4 laranjas e Daniel pegou mais 3. Daniel voltou pela terceira vez à sua casa e retornou com mais 4 laranjas. Nessa hora chegou um amigo deles e Patrícia deu para esse amigo 6 laranjas e Daniel deu 3 laranjas. Você acha que, agora, depois de eles terem dado algumas laranjas, Patrícia e Daniel tem a mesma quantidade de laranjas? Ou você acha que um tem mais laranja que outro?

SITUAÇÕES COM QUANTIDADES DESCONHECIDAS

5. **Adição de duas quantidades iguais –** Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Cláudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Cláudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Cláudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra?

6. **Subtração de duas quantidades iguais –** Rodrigo e André foram pegar conchas do mar na praia cedo pela manhã. Rodrigo pôs as conchas que encontrou em uma caixa grande. André encontrou o mesmo número de conchas que Rodrigo, mas ele dividiu igualmente em duas

caixas pequenas. De tarde, foram novamente à praia e Rodrigo encontrou outra vez a mesma quantidade de conchas como as de André. Desta vez, cada menino pôs as conchas que eles tinham encontrado em um saco. No dia seguinte foram contar quantas conchas cada um tinha nas caixas, mas não encontraram os sacos. Você acha que Rodrigo tem o mesmo número de conchas que André? Ou você acha que um deles tem mais concha que o outro?

7. **Adição de duas quantidades diferentes –** Em um fim de semana, Lucas e Francisco foram pescar. No sábado eles pescaram a mesma quantidade de peixes. Lucas e Francisco pescaram no domingo também. No final do dia eles contaram a quantidade de peixes que cada um tinha pescado. Eles descobriram que Lucas pescou mais do que Francisco. No final do fim de semana, você acha que Lucas pescou a mesma quantidade de peixes de Francisco? Ou você acha que um pescou mais do que outro?

8. **Subtração de duas quantidades diferentes –** Carlos e Marcelo adoram biscoitos. Cada um deles possui um pacote de biscoito com a mesma quantidade. Carlos colocou todos seus biscoitos em uma cesta. Marcelo dividiu seus biscoitos em duas cestas. Então, eles pegaram um outro pacote. Carlos e Marcelo pegaram a mesma quantidade de biscoito, mas desta vez os dois colocaram os biscoitos em um depósito para comer depois. O irmão mais novo de Carlos foi à cozinha e disse que queria biscoito também. Carlos deu para ela sua cesta de biscoito e Marcelo deu para ela uma de suas cestas de biscoito. Agora, depois de ter dividido seus biscoitos, você acha que Carlos tem o mesmo número de biscoitos que Marcelo? Ou você acha que um tem mais biscoito que o outro?

SITUAÇÕES-PROBLEMA COM DESCOBERTA DE INCÓGNITAS

9. **Descoberta de um valor desconhecido, relacionando 2 variáveis:** Lucas e Pedro começaram as férias com a mesma quantidade de adesivos. Durante as férias, Lucas ganhou 2 adesivos de seu primo e Pedro ganhou 2 adesivos de sua irmã. No final das férias, Lucas tinha 10 adesivos. Quantos adesivos Pedro tinha no início das férias?

10. **Descoberta de um valor desconhecido, relacionando 2 variáveis:** Em uma competição de matemática, duas equipes, A e B, começaram com a mesma quantidade de pontos. Durante a competição, a equipe A perdeu 3 pontos por duas respostas erradas, e a equipe B também perdeu 3 pontos por respostas erradas. Se a equipe B terminou com 8 pontos, quantos pontos cada equipe tinha no início?

APÊNDICE B – SITUAÇÕES-PROBLEMA FINAIS

Situações-problema desenvolvidas com base em: Carraher, Brizuela e Jones (1998), Schliemann e Brizuela (2006) e Freire (2007; 2011)

SITUAÇÕES COM QUANTIDADES CONHECIDAS

1. **Adição de duas quantidades iguais** – Pedro e Lucas estão trocando cartas de um jogo de colecionador. Pedro tinha inicialmente 4 cartas em sua mão e pegou mais 4 cartas do baralho para trocar com Lucas. Enquanto isso, Lucas trouxe 8 cartas de sua coleção para a troca. Durante a troca, Lucas recebeu mais 2 cartas de um amigo. Da mesma forma, Pedro também ganhou 2 cartas de outro amigo durante a troca. Você acha que Pedro tem a mesma quantidade de cartas que Lucas agora? Ou você acha que um deles tem mais cartas que o outro? Explique sua resposta.

2. **Subtração de duas quantidades iguais –** Ana e Rafael são apaixonados por pirulitos. Um dia, Ana comprou 10 pirulitos na doceria e retornou para comprar mais 2. Enquanto isso, Rafael adquiriu 5 pirulitos na doceria e recebeu mais 5 de sua mãe. Mais tarde, Rafael ganhou 2 pirulitos extras de um amigo. Durante o dia, cada um comeu 2 dos pirulitos que haviam adquirido. Você acredita que, após esses acontecimentos, Ana possui a mesma quantidade de pirulitos que Rafael? Ou acredita que um deles possui mais pirulitos que o outro? Explique sua resposta.

3. **Adição de duas quantidades diferentes –** Sophia e Miguel estão fazendo uma coleção de figurinhas. Sophia conseguiu 7 figurinhas trocando com seus amigos, e Miguel também conseguiu 7 trocando com os dele. Mais tarde, os dois foram até uma banca e compraram mais figurinhas. Sophia comprou 6 e Miguel comprou 3. Você acha que, no final do dia, Sophia tem a mesma quantidade de figurinhas que Miguel? Explique sua resposta.

4. **Subtração de duas quantidades diferentes –** Laura e Gabriel estão trabalhando em um projeto de jardinagem. Laura plantou 6 flores em seu jardim, enquanto Gabriel plantou apenas 3. Mais tarde, eles foram à floricultura para pegar mais flores. Laura pegou mais 4 flores e Gabriel pegou mais 3. Gabriel decidiu voltar à floricultura pela terceira vez e trouxe mais 4 flores. Nesse momento, um amigo deles se juntou à atividade e Laura deu a ele 6 flores, enquanto Gabriel deu 3. Você acha que, agora, depois de darem algumas flores, Laura e Gabriel têm a mesma quantidade de flores plantadas? Explique sua resposta.

SITUAÇÕES COM QUANTIDADES DESCONHECIDAS

5. **Adição de duas quantidades iguais –** Lucas e Pedro são amigos que colecionam adesivos. Antes das férias de verão, Lucas e Pedro tinham a mesma quantidade de adesivos em suas coleções. Lucas decidiu colar todos os seus adesivos em um grande álbum, enquanto Pedro preferiu dividir seus adesivos em dois álbuns diferentes. Após as férias, eles receberam mais adesivos de presente de seus familiares. Ao compararem suas coleções, perceberam que tinham recebido a mesma quantidade de adesivos. Agora, eles estão curiosos para saber se Lucas e Pedro têm a mesma quantidade de adesivos. O que você acha? Eles têm a mesma quantidade ou um deles tem mais adesivos que o outro? Explique sua resposta.

6. **Subtração de duas quantidades iguais –** Clara e Sofia foram à colheita de maçãs em uma fazenda. Clara encheu um cesto grande com as maçãs que colheu, enquanto Sofia, que colheu o mesmo número de maçãs que Clara, decidiu dividir suas maçãs igualmente em dois cestos menores. Mais tarde, elas voltaram para colher mais maçãs e Clara encontrou novamente a mesma quantidade de maçãs que Sofia. Desta vez, cada uma colocou as maçãs que colheram em uma caixa. No dia seguinte, quando foram contar quantas maçãs tinham em seus cestos, descobriram que as caixas haviam sumido. Você acha que Clara tem o mesmo número de maçãs que Sofia? Ou você acha que uma delas tem mais maçãs que a outra?

7. **Adição de duas quantidades diferentes –** Mariana e Juliana foram ao parque no último final de semana. No sábado, elas colheram a mesma quantidade de flores. Mariana e Juliana decidiram voltar ao parque no domingo para colher mais flores. Ao final do dia, elas contaram quantas flores cada um tinha colhido. Surpreendentemente, Mariana colheu mais flores do que Juliana. Agora, ao final do fim de semana, você acha que Mariana colheu a mesma quantidade de flores que Juliana? Ou você acha que uma colheu mais do que a outra? Explique sua resposta.

8. **Subtração de duas quantidades diferentes** – Sophia e Rafael têm uma coleção de figurinhas. Cada um deles tem uma pilha de figurinhas com a mesma quantidade. Sophia decidiu colocar todas as suas figurinhas em uma pasta, enquanto Rafael dividiu suas figurinhas em duas pastas diferentes. Em seguida, eles ganharam um novo pacote de figurinhas. Sophia e Rafael pegaram a mesma quantidade de figurinhas do novo pacote, mas desta vez decidiram colocar todas as figurinhas em um baú para guardar. O irmão mais novo de Sophia viu o baú e ele quis algumas figurinhas. Sophia deu para ele sua pasta de figurinhas, enquanto Rafael deu para ele uma de suas pastas. Agora, depois de dividirem suas figurinhas, você acha que Sophia tem o mesmo número de figurinhas que Rafael? Ou você acha que um tem mais figurinhas que o outro? Explique sua resposta.

SITUAÇÕES COM INCÓGNITAS

9. Carolina e Mariana tinham a mesma quantidade de bonecas em suas coleções. No Dia das Crianças, Carolina ganhou 2 bonecas de sua avó e Mariana ganhou 2 bonecas de sua tia. No final do Dia das Crianças, Carolina tinha 10 bonecas em sua coleção. Quantas bonecas Mariana tinha antes do Dia das Crianças em sua coleção?

10. Na aula de pintura, dois alunos, Lucas e Julia, começaram com a mesma quantidade de potes de tinta. Durante a aula, Lucas usou 3 potes de tinta para pintar dois grandes quadros, e Julia também usou 3 potes de tinta para suas pinturas. Se Júlia terminou com 8 potes de tinta, quantos potes de tinta cada aluno tinha no início?

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos seu filho(a) para participar de uma pesquisa sobre: **"Desenvolvimento de recursos educacionais digitais para conteúdos de Língua Portuguesa e Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano."**

Para isso, ele(a) participará de entrevistas individuais, pré e pós-testes com oito situações-problemas e três estratégias de intervenção: uso da balança de dois pratos, utilização do recurso digital O Reino e Aljabar, e resolução de problemas com lápis e papel. As intervenções serão conduzidas na própria escola durante quatro dias, com uma hora de duração cada, onde serão observadas as estratégias e habilidades das crianças, bem como o aprendizado ao longo do processo.

Se ele(a) sentir cansaço ou não conseguir responder alguma atividade, não há problema em deixá-la sem responder, pois não se trata de um teste para a nota.

Você pode questionar qualquer aspecto da pesquisa a qualquer momento, pois estaremos prontos para acompanhá-lo(a) e esclarecer suas dúvidas. Caso surja algum risco para a aprendizagem dele(a), a equipe suspenderá as ações e buscará sanar o risco de não aprender, garantindo assistência integral aos participantes da pesquisa.

Seu filho(a) não é obrigado(a) a participar da pesquisa e tem total liberdade para desistir a qualquer momento sem nenhum prejuízo em suas atividades na escola. Como pesquisador responsável por este estudo, comprometo-me a manter em segredo todos os dados confidenciais. Garantimos, também, o direito de indenização caso ele(a) sofra algum prejuízo moral ou físico devido à participação na pesquisa.

Garantimos que ele(a) não terá nenhum gasto e nem receberá nenhum pagamento nesta pesquisa. Caso haja algum gasto, seu dinheiro será devolvido.

Portanto, se tudo estiver claro para você, pedimos que assine este documento. Seu assentimento deve estar de acordo com o interesse da criança, ou seja, se ela não concordar em participar, respeitaremos a opinião dela. Este termo foi impresso em duas vias iguais e você ficará com uma delas devidamente assinada.

Agradeço,

José Aires de Castro Filho - Coordenador do Projeto
Telefone para contato: (85) 3366.9029
e-mail: aires@virtual.ufc.br

Eu, ____,
aceito que a criança,
____, sob minha responsabilidade, participe das atividades da pesquisa: **"Desenvolvimento de recursos educacionais digitais para conteúdos de Língua Portuguesa e Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental"**. Fui claramente informado sobre a realização das atividades. Foi-me garantido que a criança poderá desistir da pesquisa a qualquer momento que desejar, sem que isto leve a quaisquer prejuízos em seu aprendizado na escola, e que as informações confidenciais serão mantidas em segredo.

______________,____/____/______ ....

Local **Data** **Assinatura**