UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DA REDE NORDESTE DE ENSINO

DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA

INVESTIGAÇÃO DA COMPLEXIFICAÇÃO, GENERALIZAÇÃO E MODELO COMBINATÓRIO DOS NÚMEROS DE PADOVAN E PERRIN COM ELEMENTOS DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA

FORTALEZA

2024

RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA

INVESTIGAÇÃO DA COMPLEXIFICAÇÃO, GENERALIZAÇÃO E MODELO COMBINATÓRIO DOS NÚMEROS DE PADOVAN E PERRIN COM ELEMENTOS DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Ensino, Currículo e Processos de Ensino e Aprendizagem.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

Coorientadora: Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V718i Vieira, Renata Passos Machado.
Investigação da complexificação, generalização e modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com elementos de uma engenharia didática / Renata Passos Machado Vieira. – 2024.
472 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.
Coorientação: Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino.

1. Abordagem combinatória. 2. Engenharia didática. 3. Sequência de Padovan. 4. Sequência de Perrin. 5. Teoria das situações didáticas. I. Título.

CDD 370.7

RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA

INVESTIGAÇÃO DA COMPLEXIFICAÇÃO, GENERALIZAÇÃO E MODELO COMBINATÓRIO DOS NÚMEROS DE PADOVAN E PERRIN COM ELEMENTOS DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Ensino, Currículo e Processos de Ensino e Aprendizagem.

Aprovada em: 28/11/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves. (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE)

Profa. Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino. (Coorientadora)
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD)

Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
(UFMS)

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Ao meu esposo David Clifte, minha filha Laís Passos e à minha mãe e ao meu pai (*in memoriam*) e minha tia Bia Passos (*in memoriam*) que sempre confiaram em mim e nunca me deixaram desistir.

AGRADECIMENTOS

À Deus e à Mãe Rainha. Sem a graça, sabedoria e força de Deus, esta jornada teria sido impossível. A fé em Deus me sustentou nos momentos de desafio e me inspirou a seguir em frente, sempre buscando o melhor de mim. A Ele, toda honra e glória. À Mãe Rainha, minha eterna devoção. Sua intercessão foi um farol em minha vida, guiando-me com amor e proteção. Nos momentos mais difíceis, foi a sua presença que me trouxe paz e coragem para continuar. Dedico esta conquista com o mais profundo respeito e gratidão.

À minha mãe (*in memorian*) e ao meu pai (*in memorian*), dedico este trabalho com todo o meu amor e saudade. Sua força, carinho e ensinamentos são e sempre serão a minha maior inspiração. À minha tia Bia (*in memorian*) agradeço por todo o apoio e afeto ao longo da vida. Você foi um exemplo extraordinário de mãe e de mulher. Agradeço por todas as orações, ensinamentos, amor, formação e dedicação que me proporcionou durante sua vida aqui na Terra. Sou imensamente grata a Deus por ter me presenteado com uma mãe tão maravilhosa, mesmo que sua missão tenha sido cumprida de forma rápida. Hoje, sinto que você está no céu, vibrando com mais esta conquista e me dando forças para seguir em frente.

Ao meu orientador Dr. Francisco Regis Vieira Alves e à minha coorientadora Dra. Paula Maria Machado Cruz Catarino, expresso minha mais sincera gratidão pela orientação, paciência e dedicação ao longo deste percurso, bem como as contribuições e discussões realizadas das quais foram cruciais para o desenvolvimento e sucesso deste trabalho.

Agradeço ao grupo de pesquisa e amigos do IFCE (Evamar Barros, Milena Mangueira, Renata de Sousa e Rosalide de Sousa), cujas discussões e contribuições me ajudaram no estudo tornando-o mais leve e me auxiliaram por meio da troca de experiências.

À Universidade Federal do Ceará e aos amigos RENOEN, expresso minha mais profunda gratidão por fornecer um ambiente acadêmico para a realização desta pesquisa e as trocas de experiências.

À Secretaria da Educação do Estado do Ceará pelo incentivo à formação profissional, permitindo o meu afastamento para o presente estudo.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento (FUNCAP), pelo financiamento da pesquisa de doutorado via bolsa de estudos.

Aos professores doutores, que fizeram parte da banca de qualificação, cujas sugestões e reflexões foram valiosas para a finalização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas

racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Ao meu esposo David Clifte, agradeço pelo amor, paciência e compreensão inabaláveis. Seu apoio e amor foram essenciais para que eu pudesse dedicar-me a esta tese. À minha filha Laís, minha maior alegria e motivação, agradeço por trazer luz e energia ao meu cotidiano.

À minha irmã e ao meu sobrinho, minha eterna gratidão por todo o suporte fornecido de forma incondicional e por acreditar em meus sonhos.

Aos meus familiares, por sempre permanecerem ao meu lado, compartilhando momentos de felicidade e força para superar os desafios juntos.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.” (Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

Perante uma análise da componente curricular de História da Matemática, observou-se a carência no ensino de sequências numéricas recorrentes. Desse modo, propõe-se o estudo das sequências de Padovan e Perrin, permitindo investigar os respectivos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Assim, esta tese tem como objetivo analisar as contribuições da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas para o ensino dos modelos desses números, diante de uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatória (campo epistêmico-matemático), no curso de formação inicial de professores, utilizando um material manipulável. Como metodologia, utilizaram-se os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue. O quadro teórico da pesquisa foi baseado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau para a elaboração de situações didáticas de ensino envolvendo os respectivos modelos combinatórios, promovendo o estímulo ao pensamento intuitivo dos estudantes e enfatizando a construção de definições com o uso de material manipulável. O campo epistêmico-matemático é desenvolvido sendo selecionados os modelos combinatórios por meio de situações de ensino para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, na componente curricular de História da Matemática e Práticas de Ensino de Matemática, em Instituições de Ensino Superior como o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE) *campus* Fortaleza, Universidade Regional do Cariri (URCA) *campus* Crajubar, Universidade Estadual do Ceará (UECE) *campi* Fortaleza e Quixadá, totalizando 48 alunos participantes. O desenvolvimento do tabuleiro mórfico proporciona um auxílio para o estudo das abordagens combinatórias dessas sequências. A análise dos dados permitiu concluir que a combinação do uso de materiais manipuláveis, juntamente com a Teoria das Situações Didáticas, possibilitou aos 48 estudantes empregar estratégias na formulação de suas definições. Os resultados revelam que a construção de definições, é utilizada nos momentos de busca da recorrência das sequências, podendo influenciar positivamente o processo de ensino. Por fim, foi possível proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de relações epistemológicas das sequências, aplicáveis ao ensino de História da Matemática em cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Palavras-chave: abordagem combinatória; engenharia didática; sequência de Padovan; sequência de Perrin; teoria das situações didáticas.

ABSTRACT

In the analysis of the History of Mathematics curriculum component, a gap was observed in the teaching of recurring numerical sequences. Thus, this study proposes the exploration of Padovan and Perrin sequences, enabling an investigation into their epistemological, cognitive, and didactic aspects. Thus, this thesis aims to analyze the contributions of Didactical Engineering and the Theory of Didactical Situations to teaching models of these numbers, within an investigation of the processes of generalization, complexification, and combinatorics (epistemic-mathematical field), in the context of initial teacher training courses, using a manipulative material. The methodology employed was based on the principles of Artigue's Didactical Engineering. The theoretical framework of the research drew on Brousseau's Theory of Didactical Situations to develop didactical teaching situations involving the respective combinatorial models, fostering students' intuitive thinking and emphasizing the construction of definitions using manipulative materials. The epistemic-mathematical field was developed by selecting combinatorial models through teaching situations for students in the Mathematics Teacher Education program, specifically in the curricular component of History of Mathematics and Mathematics Teaching Practices. This was conducted at higher education institutions such as IFCE Fortaleza campus, URCA Crajubar campus, and UECE Fortaleza and Quixadá campus, involving a total of 48 student participants. The development of the morphic board provided support for studying combinatorial approaches to these sequences. The data analysis led to the conclusion that combining the use of manipulative materials with the Theory of Didactical Situations enabled the 48 students to employ strategies in formulating their definitions. The results show that constructing definitions was employed during the search for the recurrence of sequences, potentially influencing the teaching process positively. Finally, the students were able to develop epistemological relationships concerning the sequences, applicable to the teaching of the History of Mathematics in initial teacher education programs for Mathematics.

Keywords: combinatorial approach; didactic engineering; Padovan sequence; Perrin sequence; theory of didactic situations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Processo histórico-evolutivo da sequência de Padovan 29
Figura 2 – O problema da criação de pares de “coelhos imortais”. 30
Figura 3 – Etapas do levantamento bibliográfico 42
Figura 4 – Quantidade de estudos obtidos e etapas da seleção 43
Figura 5 – Quantidade de estudos por ano 45
Figura 6 – Evolução da sequência de Padovan 53
Figura 7 – Evolução da sequência de Perrin 53
Figura 8 – Evolução das sequências de Padovan e Perrin 54
Figura 9 – Fases da metodologia 65
Figura 10 – Situação Fundamental 69
Figura 11 – Situação didática e adidática 73
Figura 12 – Hans van der Laan 83
Figura 13 – Gérard Cordonnier 83
Figura 14 – A ordem de tamanho de Van der Laan 86
Figura 15 – Espiral de Padovan 2D 93
Figura 16 – Espiral de Padovan com o material manipulável 94
Figura 17 – Espiral de Padovan como material manipulável para deficientes visuais . . . 95
Figura 18 – Espiral de Padovan como material manipulável 96
Figura 19 – Primeiros paralelepípedos para composição da Espiral de Padovan em 3D . 96
Figura 20 – Entrada para a estação de Laigle em Paris 96
Figura 21 – Raoul Perrin 97
Figura 22 – Espiral de Perrin em 2D 98
Figura 23 – Interpretação sobre a noção de n–tabuleiro 227
Figura 24 – Ladrilhamento de Padovan 230
Figura 25 – Caso 1 - União dos tabuleiros de tamanho n 230
Figura 26 – Caso 2 - União dos tabuleiros de tamanho n 231
Figura 27 – Tabuleiro de tamanho 10 e os casos da demonstração 232
Figura 28 – Mapeamento de $\mid p_n \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-5} \mid$ da identidade 232
Figura 29 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-2} \mid$ da identidade 233
Figura 30 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-3} \mid$ da identidade 234
Figura 31 – Ladrilhamentos de Padovan para p_1, p_2, p_3 e p_4 236

Figura 32 – Ladrilhamentos de Padovan de p_1 até p_9 236
Figura 33 – Mapeamento de | p_n | para | p_{n-1} | e | p_{n-5} | 237
Figura 34 – Mapeamento de | $p_n \cup p_{n-4}$ | para | p_{n-1} | e | p_{n-2} | 238
Figura 35 – Mapeamento de | $p_n \cup p_{n-6}$ | para | p_{n-1} e p_{n-3} | 238
Figura 36 – Triângulo de Pascal de Padovan 239
Figura 37 – Ladrilhamentos de Tridovan 247
Figura 38 – Ladrilhamentos de Tridovan de p_1^3 até p_9^3 248
Figura 39 – Ladrilhamentos de Tetradovan 250
Figura 40 – Ladrilhamentos de Tetradovan de p_1^4 até p_9^4 251
Figura 41 – Configuração dos ladrilhamentos de Z-dovan 252
Figura 42 – Configuração dos ladrilhamentos de Z-dovan (outra abordagem) 252
Figura 43 – Ladrilhamento polinomial de Padovan 255
Figura 44 – Ladrilhamento polinomial de Padovan 255
Figura 45 – Ladrilhamento polinomial de Tridovan 257
Figura 46 – Ladrilhamentos polinomiais de Tridovan de $p_1^3(x)$ até $p_9^3(x)$ 258
Figura 47 – Ladrilhamento polinomial de Tetradovan 260
Figura 48 – Ladrilhamentos de Tetradovan de $p_1^4(x)$ até $p_9^4(x)$ 261
Figura 49 – Configuração dos ladrilhamentos polinomiais de Z-dovan 262
Figura 50 – Configuração dos ladrilhamentos polinomiais de Z-dovan 263
Figura 51 – Braceletes de Lucas de tamanho 4 264
Figura 52 – Braceletes de Perrin para o caso $n = 5$ 266
Figura 53 – Braceletes de Perrin para os casos $n = 6,7,8$ 266
Figura 54 – Braceletes de Perrin de r_2 até r_5 267
Figura 55 – Bracelete de Perrin de tamanho 5 269
Figura 56 – Braceletes de Perrin 269
Figura 57 – Ladrilhamento de Tridovan 272
Figura 58 – Braceletes de Tetrarrin para o caso $n = 2$ 272
Figura 59 – Braceletes de Tetrarrin para os casos $n = 3,4,5$ 273
Figura 60 – Braceletes de Tetrarrin de r_2^4 até r_5^4 274
Figura 61 – Braceletes polinomiais de Perrin para o caso $n = 5$ 276
Figura 62 – Braceletes polinomiais de Perrin para os casos $n = 6,7,8$ 276
Figura 63 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin para o caso $n = 5$ 278

Figura 64 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin para os casos $n = 6,7,8$ 279
Figura 65 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin de $r_2^4(x)$ até $r_5^4(x)$ 280
Figura 66 – Tabuleiro Mórfico 285
Figura 67 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 1 295
Figura 68 – Ladrilhamento de Padovan 297
Figura 69 – Fase da ação situação-problema 1 pelo Grupo 1 298
Figura 70 – Iniciando a fase da ação no Grupo 1 da situação-problema 1 299
Figura 71 – Fase da ação no Grupo 1 da situação-problema 1 pelos estudantes A8 e A9 . 299
Figura 72 – Fase da formulação da situação-problema 1 por A2 e A4 do Grupo 1 300
Figura 73 – Fase da formulação da situação-problema 1 pelo A11 do Grupo 1 301
Figura 74 – Fase da validação da situação-problema 1 pelo A5 do Grupo 1 302
Figura 75 – Fase da validação da situação-problema 1 pelo A11 do Grupo 1 303
Figura 76 – Fase da ação da situação-problema 1 por B3 e B4 do Grupo 2 304
Figura 77 – Fase da formulação da situação-problema 1 do Grupo 2 305
Figura 78 – Fase da validação da situação-problema 1 por B8 do Grupo 2 306
Figura 79 – Início da fase da ação da situação-problema 1 por C3 e C5 do Grupo 3 . . . 307
Figura 80 – Fase da ação da situação-problema 1 por C1 e C8 do Grupo 3 307
Figura 81 – Fase da formulação da situação-problema 1 por C1 do Grupo 3 308
Figura 82 – Fase da validação da situação-problema 1 por C6 do Grupo 3 309
Figura 83 – Início da fase da ação da situação-problema 1 por D2 do Grupo 4 310
Figura 84 – Fase da ação da situação-problema 1 por D1 e D2 do Grupo 4 310
Figura 85 – Fase da formulação da situação-problema 1 por D1, D2 e D5 do Grupo 4 . . 311
Figura 86 – Fase da validação da situação-problema 1 por D15 do Grupo 4 312
Figura 87 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 2 314
Figura 88 – Ladrilhamentos de Tridovan de p_1^3 até p_9^3 315
Figura 89 – Fase da ação da situação-problema 2 pelo A6, A7 e A11 do Grupo 1 316
Figura 90 – Fase da formulação da situação-problema 2 pelo A11 do Grupo 1 317
Figura 91 – Fase da formulação da situação-problema 2 pelo A2 do Grupo 1 318
Figura 92 – Fase da validação da situação-problema 2 pelo A11 do Grupo 1 319
Figura 93 – Fase da validação da situação-problema 2 pelo A1 do Grupo 1 320
Figura 94 – Fase da ação da situação-problema 2 por B4, B6, B7 e B8 do Grupo 2 . . . 321
Figura 95 – Fase da formulação da situação-problema 2 por B4, B6, B7 e B8 do Grupo 2 322

Figura 96 – Fase da validação da situação-problema 2 por B9 do Grupo 2 323
Figura 97 – Fase da ação da situação-problema 2 por C1, C2, C3, C4 e C8 do Grupo 3 . 324
Figura 98 – Fase da formulação da situação-problema 2 por C1, C2, C3, C4 e C8 do Grupo 3 324
Figura 99 – Continuação da fase da formulação da situação-problema 2 por C1, C2, C4 e C8 do Grupo 3 325
Figura 100 – Fase da validação da situação-problema 2 por C6 do Grupo 3 326
Figura 101 – Continuação da fase da validação da situação-problema 2 por C2 e C4 do Grupo 3 327
Figura 102 – Fase da ação da situação-problema 2 por D14 do Grupo 4 327
Figura 103 – Fase da formulação da situação-problema 2 por D1, D6 e D14 do Grupo 4 . 328
Figura 104 – Início da fase da validação da situação-problema 2 por D1 do Grupo 4 . . . 328
Figura 105 – Fase da validação da situação-problema 2 por D2, D5 e D15 do Grupo 4 . . 329
Figura 106 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 3 331
Figura 107 – Ladrilhamentos polinomiais de Tridovan de $p_1^3(x)$ até $p_9^3(x)$ 333
Figura 108 – Fase da ação da situação-problema 3 pelo A7 do Grupo 1 334
Figura 109 – Fase da formulação da situação-problema 3 pelo A5 e A11 do Grupo 1 . . . 335
Figura 110 – Fase da validação da situação-problema 3 pelo A3 do Grupo 1 335
Figura 111 – Fase da validação da situação-problema 3 pelo A6 do Grupo 1 336
Figura 112 – Fase da ação da situação-problema 3 por B1, B6 e B8 do Grupo 2 337
Figura 113 – Fase da formulação da situação-problema 3 por B1, B6, B8 do Grupo 2 . . . 338
Figura 114 – Fase da validação da situação-problema 3 por B3 do Grupo 2 339
Figura 115 – Fase da validação da situação-problema 3 por B2 do Grupo 2 340
Figura 116 – Fase da ação da situação-problema 3 por C1, C4 e C5 do Grupo 3 341
Figura 117 – Fase da formulação da situação-problema 3 por C4 do Grupo 3 342
Figura 118 – Fase da validação da situação-problema 3 por C1, C2, C4 e C6 do Grupo 3 . 342
Figura 119 – Continuação da fase da validação da situação-problema 3 por C8 do Grupo 3 343
Figura 120 – Fase da ação da situação-problema 3 por D2, D4, D5, D10, D11 e D12 do Grupo 4 343
Figura 121 – Fase da formulação da situação-problema 3 por D14 do Grupo 4 345
Figura 122 – Continuação da fase da formulação da situação-problema 3 por D19 do Grupo 4 345
Figura 123 – Fase da validação da situação-problema 3 por D2 e D19 do Grupo 4 346

Figura 124 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 4 348
Figura 125 – Ladrilhamentos de Tetradovan de p_1^4 até p_9^4. 350
Figura 126 – Fase da ação da situação-problema 4 pelo A6, A7 e A10 do Grupo 1 350
Figura 127 – Fase da ação corrigida da situação-problema 4 por A9 e A11 do Grupo 1 . . 351
Figura 128 – Fase da formulação da situação-problema 4 pelo A7, A8 e A11 do Grupo 1 . 351
Figura 129 – Fase da validação da situação-problema 4 pelo A3 do Grupo 1 352
Figura 130 – Fase da validação da situação-problema 4 pelo A8 do Grupo 1 353
Figura 131 – Fase da ação da situação-problema 4 por B3, B6 e B7 do Grupo 2 353
Figura 132 – Fase da formulação da situação-problema 4 por B8 e B9 do Grupo 2 354
Figura 133 – Fase da validação da situação-problema 4 por B10 do Grupo 2 355
Figura 134 – Fase da ação da situação-problema 4 por C4 e C5 do Grupo 3 356
Figura 135 – Fase da formulação da situação-problema 4 por C1, C2, C4 e C5 do Grupo 3 357
Figura 136 – Fase da validação da situação-problema 4 por C3 do Grupo 3 358
Figura 137 – Fase da ação da situação-problema 4 por D2 do Grupo 4 359
Figura 138 – Fase da formulação da situação-problema 4 por D1, D2, D5, D11, D12, D13, D16 e D19 do Grupo 4 359
Figura 139 – Fase da validação da situação-problema 4 por D7 do Grupo 4 360
Figura 140 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 5 362
Figura 141 – Ladrilhamento polinomial de Tetradovan 364
Figura 142 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo A8, A10 e A11 do Grupo 1 365
Figura 143 – Fase da formulação da situação-problema 5 por A3 e A6 do Grupo 1 365
Figura 144 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo A8 e A11 do Grupo 1 366
Figura 145 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo A8 e A11 do Grupo 1 367
Figura 146 – Fase da ação da situação-problema 5 por B4, B5 e B9 do Grupo 2 367
Figura 147 – Fase da formulação da situação-problema 5 por B4 e B8 do Grupo 2 368
Figura 148 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo B3 do Grupo 2 369
Figura 149 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo B7 do Grupo 2 370
Figura 150 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo C1, C5 e C7 do Grupo 3 370
Figura 151 – Fase da formulação da situação-problema 5 pelo C5 e C7 do Grupo 3 371
Figura 152 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo C1 do Grupo 3 372
Figura 153 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo D2, D6, D9 e D12 do Grupo 4 . . 373

Figura 154 – Fase da formulação da situação-problema 5 pelo D2, D6, D7, D9 e D12 do Grupo 4 373
Figura 155 – Início da fase da validação da situação-problema 5 pelo D19 do Grupo 4 . . 374
Figura 156 – Continuação da fase da validação da situação-problema 5 pelo D7 do Grupo 4 375
Figura 157 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo D5, D9 e D12 do Grupo 4 . . 375
Figura 158 – Interpretação combinatória da sequência de Lucas para $n = 3$ 376
Figura 159 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 6 379
Figura 160 – Braceletes de Perrin por meio dos ladrilhamentos de Padovan 379
Figura 161 – Braceletes de Perrin para os casos $n = 6,7,8$ 380
Figura 162 – Fase da ação da situação-problema 6 pelo A7, A8 e A11 do Grupo 1 381
Figura 163 – Fase da formulação da situação-problema 6 pelo A8 do Grupo 1 382
Figura 164 – Fase da formulação da situação-problema 6 pelo A9 do Grupo 1 382
Figura 165 – Fase da validação da situação-problema 6 pelo A4 do Grupo 1 383
Figura 166 – Fase da ação da situação-problema 6 por B4, B6 e B7 do Grupo 2 384
Figura 167 – Fase da formulação da situação-problema 6 por B4, B5 e B7 do Grupo 2 . . 385
Figura 168 – Fase da validação da situação-problema 6 por B3 do Grupo 2 386
Figura 169 – Fase da ação da situação-problema 6 por C3 e C8 do Grupo 3 388
Figura 170 – Fase da formulação da situação-problema 6 por C1,C2, C3 e C8 do Grupo 3 389
Figura 171 – Fase da validação da situação-problema 6 por C7 do Grupo 3 390
Figura 172 – Fase da ação da situação-problema 6 por D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19 do Grupo 4 392
Figura 173 – Fase da formulação da situação-problema 6 por D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19 do Grupo 4 393
Figura 174 – Fase da validação da situação-problema 6 por D2, D5, D11, D15 e D19 do Grupo 4 393
Figura 175 – Espiral da sequência com o material manipulável 397
Figura 176 – Tela inicial dos ladrilhamentos no GeoGebra 447
Figura 177 – Ladrilhamentos de Fibonacci no GeoGebra - modelo de Benjamin e Quinn (2003b). 448
Figura 178 – Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a). 448
Figura 179 – Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra - modelo de Tedford (2019). . . . 449

Figura 180 – Ladrilhamentos de Tridovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a). 449
Figura 181 – Ladrilhamentos de Tridovan no GeoGebra. 449
Figura 182 – Ladrilhamentos de Tetradovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a). 450
Figura 183 – Ladrilhamentos de Tetradovan no GeoGebra. 450
Figura 184 – Mapeamento dos Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra para $n = 6$. . . . 451
Figura 185 – Mapeamento de p_n e p_{n-1}. 452
Figura 186 – Mapeamento de p_n para p_{n-5}. 453
Figura 187 – Fase da ação por C3 e C5. 454
Figura 188 – Continuação da fase da ação por C4 e C7. 455
Figura 189 – Fase da formulação por C1 e C2. 456
Figura 190 – Continuação da fase da formulação por C1 e C2. 457
Figura 191 – Fase da validação por C6 e C8. 457
Figura 192 – Continuação da fase da validação por C1 e C2. 458

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Bases de Dados da Pesquisa e Endereço (Link) 41
Quadro 2 – Critérios de inclusão e exclusão dos artigos 43
Quadro 3 – Trabalhos Analisados 44
Quadro 4 – Primeiros termos da sequência de Padovan 91
Quadro 5 – Primeiros termos da sequência de Perrin 98
Quadro 6 – Termos da sequência de Perrin - índice inteiro não positivo 108
Quadro 7 – Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$ 159
Quadro 8 – Tabela de multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$ 182
Quadro 9 – Tabela de multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$ 191
Quadro 10 – Tabela de multiplicação das unidades imaginárias dos bicomplexos 201
Quadro 11 – Tabela de multiplicação dos números hiperbólicos circulares 208
Quadro 12 – Interpretação Combinatória de Padovan 232
Quadro 13 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tridovan 247
Quadro 14 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tetradovan 249
Quadro 15 – Primeiros dez termos polinomiais de Padovan 254
Quadro 16 – Primeiros dez termos polinomiais de Tridovan 256
Quadro 17 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetradovan 259
Quadro 18 – Casos do modelo combinatório de Perrin 268
Quadro 19 – Primeiros dez termos polinomiais de Perrin 275
Quadro 20 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetrarrin 277
Quadro 21 – Demonstrativo de alunos por semestre 287
Quadro 22 – Planejamento das atividades 288
Quadro 23 – Grupos 290
Quadro 24 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tridovan 315
Quadro 25 – Primeiros dez termos da sequência polinomial investigada 332
Quadro 26 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tetradovan 349
Quadro 27 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetradovan 363
Quadro 28 – Categorização dos erros e dificuldades previstos 394
Quadro 29 – Glossário com as nomenclaturas elaboradas pelos Grupos 395

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de a_n 89
Tabela 2 – Termos da sequência de Tetrarrin - índice inteiro não positivo 114
Tabela 3 – Comparação dos erros e dificuldades previstos pelos Grupos 396

LISTA DE SÍMBOLOS

P_n	n-ésimo termo da sequência de Padovan
S_n	n-ésimo termo da sequência de Padovan-Perrin
R_n	n-ésimo termo da sequência de Perrin
$P_{4(n)}$	n-ésimo termo da sequência de Tetradovan
$R_{4(n)}$	n-ésimo termo da sequência de Tetrarrin
$P_{3(n)}$	n-ésimo termo da sequência de Tridovan
$P_{z(n)}$	n-ésimo termo da sequência de Z-dovan
$R_{z(n)}$	n-ésimo termo da sequência de Z-éssimorrin
$R_n^{(s,t)}$	n-ésimo termo da sequência (s,t)-Perrin
$R_{(n)}^{(s,t,u)^4}$	n-ésimo termo da sequência (s,t,u)-Tetrarrin
$R_{(n)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^4}$	n-ésimo termo da sequência $(s,t,\ldots,z)$-Z-éssimorrin
p_n	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 x n de Padovan
r_n	Número de formas de preencher um bracelete 1 x n de Perrin
$p_n(x)$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 x n da sequência polinomial de Padovan
$p_{4(n)}(x)$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 x n da sequência polinomial de Tetradovan
$p_{3(n)}(x)$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 x n da sequência polinomial de Tridovan
$p_{z(n)}(x)$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 x n da sequência polinomial de Z-dovan
$r_{4(n)}$	Número de formas de preencher um bracelete 1 x n de Tetrarrin
$r_{z(n)}$	Número de formas de preencher um bracelete 1 x n de Z-éssimorrin
$r_n(x)$	Número de formas de preencher um bracelete 1 x n da sequência polinomial de Perrin
$r_{4(n)}(x)$	Número de formas de preencher um bracelete 1 x n da sequência polinomial de Tetrarrin

$r_{z(n)}$	Número de formas de preencher um bracelete 1 *x n* da sequência polinomial de Z-éssimorrin
$p_{3(n)}$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 *x n* de Tridovan
$p_{4(n)}$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 *x n* de Tetradovan
$p_{z(n)}$	Número de formas de preencher um tabuleiro 1 *x n* de Z-dovan
ϕ	Número de ouro
ψ	Número de plástico ou número radiante

SUMÁRIO

1 PERCURSOS, MOTIVAÇÕES E *INSIGHTS* 24

2 INTRODUÇÃO 28

2.1 Justificativa e delimitação do problema 30

3 ABORDAGEM METODOLÓGICA: FUNDAMENTOS E ESTRATÉGIAS DE PESQUISA 36

4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS: BASES CONCEITUAIS 38

4.1 O estudo das sequências de padovan e perrin para o ensino de matemática 39

4.2 Quadro teórico 49

4.3 Engenharia didática 54

4.4 Teoria das situações didáticas 66

4.5 Sequências recorrentes 77

4.6 O número de plástico 81

4.7 Aspectos históricos e epistemológicos das sequências de padovan e perrin 87

4.8 Dimensão filosófica do estudo das definições 98

5 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO-MATEMÁTICO DA GENERALIZAÇÃO, COMPLEXIFICAÇÃO E MODELOS COMBINATÓRIOS DOS NÚMEROS DE PADOVAN E PERRIN 103

5.1 A generalização da forma matricial de perrin e da ordem da sequência . 103

***5.1.1 Sequência de Perrin* 103**

***5.1.2 Sequência de Tetrarrin* 110**

***5.1.3 Sequência de z-ésimorrin* 116**

5.2 O estudo da sequência (s,t)-perrin 119

***5.2.1 A sequência (s,t)-Perrin* 119**

***5.2.2 A sequência (s,t,u)-Tetrarrin* 125**

***5.2.3 A sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin* 128**

5.3 As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-padovan 129

***5.3.1 As relações bidimensionais da sequência (s,t)-Padovan* 130**

***5.3.2 As relações recorrentes tridimensionais da sequência (s,t)-Padovan* 133**

***5.3.3 Relações recorrentes n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan* 134**

5.4 As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-perrin 137

5.4.1 *As relações bidimensionais da sequência (s,t)-Perrin* 137
5.4.2 *As relações tridimensionais da sequência (s,t)-Perrin* 141
5.4.3 *As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Perrin* 142
5.5 **A generalização da sequência de padovan-perrin** 143
5.6 **Identidades dos números híbridos de padovan e perrin** 159
5.7 **Os números híbridos de k-padovan e k-perrin** 167
5.8 **Os quatérnios, octônios e sedenios de perrin** 172
5.8.1 *Os quatérnios de Perrin* 172
5.8.2 *Os octônios de Perrin* 181
5.8.3 *Os sedenios de Perrin* 190
5.9 **Os quatérnios bicomplexos de k-padovan e k-perrin** 200
5.10 **Os quatérnios de padovan e perrin circulares-hiperbólicos** 206
5.11 **As sequências dos quatérnios k-padovan e k-perrin hiperbólicas** 213
5.12 **Os números de padovan e perrin hibrinominais** 220
5.13 **O modelo combinatório de padovan** 226
5.14 **O modelo combinatório de Z-dovan** 246
5.14.1 *O modelo combinatório de Tridovan* 246
5.14.2 *O modelo combinatório de Tetradovan* 249
5.14.3 *O modelo combinatório de Z-dovan* 251
5.15 **O modelo combinatório polinomial de Z-dovan** 253
5.15.1 *O modelo combinatório polinomial de Padovan* 253
5.15.2 *O modelo combinatório polinomial de Tridovan* 256
5.15.3 *O modelo combinatório polinomial de Tetradovan* 258
5.15.4 *O modelo combinatório polinomial de Z-dovan* 261
5.16 **O modelo combinatório de perrin** 263
5.16.1 *O modelo combinatório de Tetrarrin* 270
5.17 **O modelo combinatório polinomial de perrin** 274
5.17.1 *O modelo combinatório polinomial de Tetrarrin* 276
6 **O CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO, A FORMAÇÃO INICIAL, A ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS** 281
6.1 **Concepção e análise a *priori* das situações didáticas** 282

6.2 **A experimentação** 286
6.3 **Análise a *posteriori* e validação interna e externa** 290
6.4 **Análise das atividades** 291
6.4.1 ***Situação-problema 1*** 292
6.4.1.1 *Análise a priori* *293*
6.4.1.2 *Análise a posteriori* *297*
6.4.2 ***Situação-problema 2*** 312
6.4.2.1 *Análise a priori* *313*
6.4.2.2 *Análise a posteriori* *315*
6.4.3 ***Situação-problema 3*** 329
6.4.3.1 *Análise a priori* *330*
6.4.3.2 *Análise a posteriori* *332*
6.4.4 ***Situação-problema 4*** 347
6.4.4.1 *Análise a priori* *347*
6.4.4.2 *Análise a posteriori* *349*
6.4.5 ***Situação-problema 5*** 360
6.4.5.1 *Análise a priori* *360*
6.4.5.2 *Análise a posteriori* *363*
6.4.6 ***Situação-problema 6*** 376
6.4.6.1 *Análise a priori* *377*
6.4.6.2 *Análise a posteriori* *380*
6.4.7 ***Situação-problema extra*** 396
6.4.7.1 *Análise a priori* *397*
6.5 **Análise e resultados dos estudantes da pesquisa** 399
7 **CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS** 420
REFERÊNCIAS 424
APÊNDICE A–INSTRUÇÕES DO TABULEIRO MÓRFICO 438
APÊNDICE B–APLICAÇÃO COM *SOFTWARE* GEOGEBRA 446
ANEXO A– PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA . . 460

1 PERCURSOS, MOTIVAÇÕES E *INSIGHTS*

A ideia de desenvolver uma pesquisa sobre o ensino das sequências de Padovan e Perrin com a Engenharia Didática (ED) em associação com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) surge em razão da minha experiência durante o mestrado e da necessidade premente na componente curricular de História da Matemática na formação inicial de prodessores (Licenciatura em Matemática) sem ocorrer o estudo da Matemática e de outras sequências recorrentes.

É importante destacar que durante o mestrado acadêmico, foi realizada uma pesquisa voltada para o processo de generalização e complexificação da sequência de Padovan com a ED e TSD no curso de formação inicial de professores de Matemática. Desse modo, tem-se como documento estruturante para o desenvolvimento desta tese, a dissertação de mestrado finalizada no ano de 2020 pelo programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática no IFCE.

Para a compreensão do cenário atual, é necessário entender os atributos da sociedade moderna. Assim, percebe-se a crescente utilização de novas técnicas de ensino, buscando solucionar demandas impostas pela própria sociedade. Para isso, é importante saber transformar a informação em conhecimento, sendo esta uma característica do professor moderno. É diante deste cenário que a área de ensino encontra um grande desafio: de que modo pode-se obter novas formas de construção do conhecimento com o viés de potencializar o aprendizado do estudante em formação inicial?

Com referência a esta situação, surgem os impulsos pessoais que motivam a realização do presente trabalho. Após a experiência de 11 anos como professora da educação básica de Matemática, compreender o processo de aprendizagem dos estudantes tornou-se algo desafiador e motivador, além da busca por melhorias nas práticas docentes. Com isso, veio o incentivo para a pesquisa na área de formação inicial de professores de Matemática, permitindo o feito da dissertação de mestrado.

Os impulsos para explorar novas abordagens educacionais surgiram ainda na época da graduação, num curso de Bacharelado em Engenharia de Telecomunicações. Na época, ministrava aulas de reforço em Matemática para estudantes de Ensino Fundamental. Em seguida, optei pela realização da segunda graduação em Licenciatura em Matemática. Embora ainda não estivesse familiarizado com algumas teorias e métodos para o ensino de Matemática, já buscava alternativas para o ensino em Matemática, sendo priorizando a Matemática por descoberta. Na experiência como professora da Educação Básica no Estado do Ceará, foram desenvolvidos

projetos para feiras estudantis, enfatizando o incentivo ao conhecimento pelos estudantes.

Durante o período de realização do mestrado, pesquisamos acerca da Didática da Matemática com francesa e, assim selecionando a ED e TSD por agradarem na forma como apresentam as caractarísticas referentes ao processo de ensino dos estudantes e sua busca por conhecimento. A escolha do objeto matemático, deu-se pela pesquisa em História da Matemática, obervando a ausência do estudo de outras sequências recorrentes. Desse modo, foi selecionada a sequência de Padovan, por apresentar similaridade com a sequência de Fibonacci (assunto abordado na componente curricular, estudado na componente curricular e bastante encontrada na literatura).

No início do mestrado e doutorado, foram desenvolvidos alguns trabalhos acerca da área de Matemática e na área de ensino de Matemática buscando apresentar soluções para o processo de ensino de sequências numéricas em cursos de formação inicial de professores de Matemática, toda a pesquisa orientada e acompanhada pelo professor Doutor Francisco Regis Vieira Alves e pela professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino. Nesse momento, ocorreu a inserção no grupo de pesquisa voltado para o Ensino de Matemática, coordenado pelo professor Doutor Francisco Regis Vieira Alves.

Com a aprovação no doutorado, foi decidido, com os orientadores, que seria dado continuidade a pesquisa desenvolvida durante o mestrado. Desse modo, foi apresentada a sequência de Perrin, permitindo um estudo desses números para o ensino de Matemática. Assim, surge a questão de pesquisa: em que medida a ED e da TSD podem contribuir para o ensino da generalização, complexificação e dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin no curso de formação inicial de professores de Matemática? O objetivo geral é desenvolvido em virtude da questão de pesquisa, sendo esse: Analisar as contribuições da ED e da TSD, para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, a partir do processo de generalização, complexificação e combinatório desses números (campo epistêmico-matemático), no curso de Formação Inicial de Professores com a utilização de um material manipulável.

A presente tese de doutorado se constitui como resultado de investigação desenvolvida pela autora e a partir das interações, publicações e estudo sistemático desenvolvido no grupo de pesquisa, certificado pelo Conselho Nacional Científico e Tecnológico, sob a liderança do professor doutor Francisco Regis Vieira Alves. Como proposta de instrumento para o desenvolvimento empírico da pesquisa foi realizada a criação do material manipulável como um facilitador do processo de ensino, conforme relatado pelas primeiras experiências com os

estudantes. Lorenzato (2006) afirma que a utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino de matemática são de extrema relevância para a formação dos professores, pois é nesses cursos que os educadores devem adquirir as competências necessárias para empregar esses recursos de maneira eficaz. Tão logo, esta tese parte da hipótese da utilização da ED e TSD para o ensino dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin com o material manipulável.

A partir da compreensão de definições, estudo e desenvolvimento de propriedades (relações, resultados, teoremas matemáticos), foram selecionados conteúdos para a elaboração de situações didáticas de ensino. Nesse sentido, o percurso metodológico segue com à aplicação dessas atividades propostas no curso de Licenciatura em Matemática nas instituições de ensino do IFCE *campus* Fortaleza, URCA *campus* Crajubar e UECE *campi* Fortaleza e Quixadá. No total, a pesquisa contou com 48 participantes, utilizando as técnicas de gravação de áudio, vídeo e registros fotográficos para a análise. Ao final, ocorreram entrevistas com todos os estudantes, de forma a discutir a percepção desses durante a realização do projeto.

Na seção seguinte, denominada Introdução, discorre-se uma explanação do objeto de pesquisa de forma a apresentar a justificativa e delimitação do problema, bem como a questão norteadora, objetivo geral e objetivos específicos. A seção da Abordagem Metodológica: Fundamentos e Estratégias de Pesquisa apresenta o procedimento metodológico da pesquisa.

Na seção Fundamentos Teóricos: Bases Conceituais, apresenta-se um levantamento bibliográfico das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática, bem como um quadro teórico referente ao avanço matemático desses números e trabalhos dos quais utilizam a metodologia de pesquisa e teoria de ensino. Além disso, tem-se uma discussão acerca da ED e suas fases e da teoria de ensino da TSD de forma a esclarecer as etapas investigadas durante a pesquisa. Ademais, ocorre um estudo de sequências recorrentes, permitindo um estudo acerca do número de plástico e das sequências de Padovan e Perrin. Finalizando a seção tem-se a abordagem da dimensão filosófica do estudo das definições.

Na seção do Estudo Epistemológico-Matemático da generalização, complexificação e modelos combinatórios dos números de Padovan e Perrin, são apresentados teoremas, definições e propriedades matemáticas permitindo um estudo acerca da complexificação, generalização e das abordagens combinatórias das sequências em estudo.

Na seção do Campo Epistêmico-Matemático, a Formação Inicial, a ED e a TSD, ocorre a seleção de alguns teoremas e definições desenvolvidas na seção anterior, para a elaboração de situações didáticas de ensino. Além disso, são previstos os possíveis

comportamentos dos estudantes segundo a teoria de ensino da TSD, realizando assim a concepção e análise a *priori* das situações didáticas. Dando continuidade ao projeto, as situações são aplicadas em sala de aula e analisados os comportamentos dos participantes da pesquisa, permitindo a experimentação e análise a *posteriori* e validação. Ainda naquela seção, são discutidos os resultados da aplicação, permitindo uma discussão acerca da percepção dos participantes da pesquisa realizados por meio de entrevistas.

Nesta seção, foi traçada uma breve trajetória acadêmica até o doutorado, permitindo detalhar os principais percursos, motivações e insights que marcaram essa jornada. Inicialmente, foram abordadas as etapas iniciais da formação acadêmica, destacando os momentos e decisões significativos que contribuíram para a escolha do tema e abordagem da pesquisa desenvolvida. Em seguida, foram discutidas as influências teóricas e práticas que moldaram o desenvolvimento do trabalho, proporcionando uma visão clara sobre o amadurecimento intelectual e científico ao longo do processo formativo.

Além disso, foi realizada uma breve descrição das seções subsequentes deste trabalho, com o objetivo de orientar o leitor quanto à estrutura e aos conteúdos abordados ao longo do texto. Cada seção foi apresentada de forma resumida, destacando seus objetivos principais, a relação com o tema central e sua contribuição para a compreensão do estudo como um todo. Dessa maneira, busca-se contextualizar o leitor e oferecer uma visão panorâmica do trabalho acadêmico, preparando-o para os detalhes e aprofundamentos que serão apresentados nas seções seguintes.

2 INTRODUÇÃO

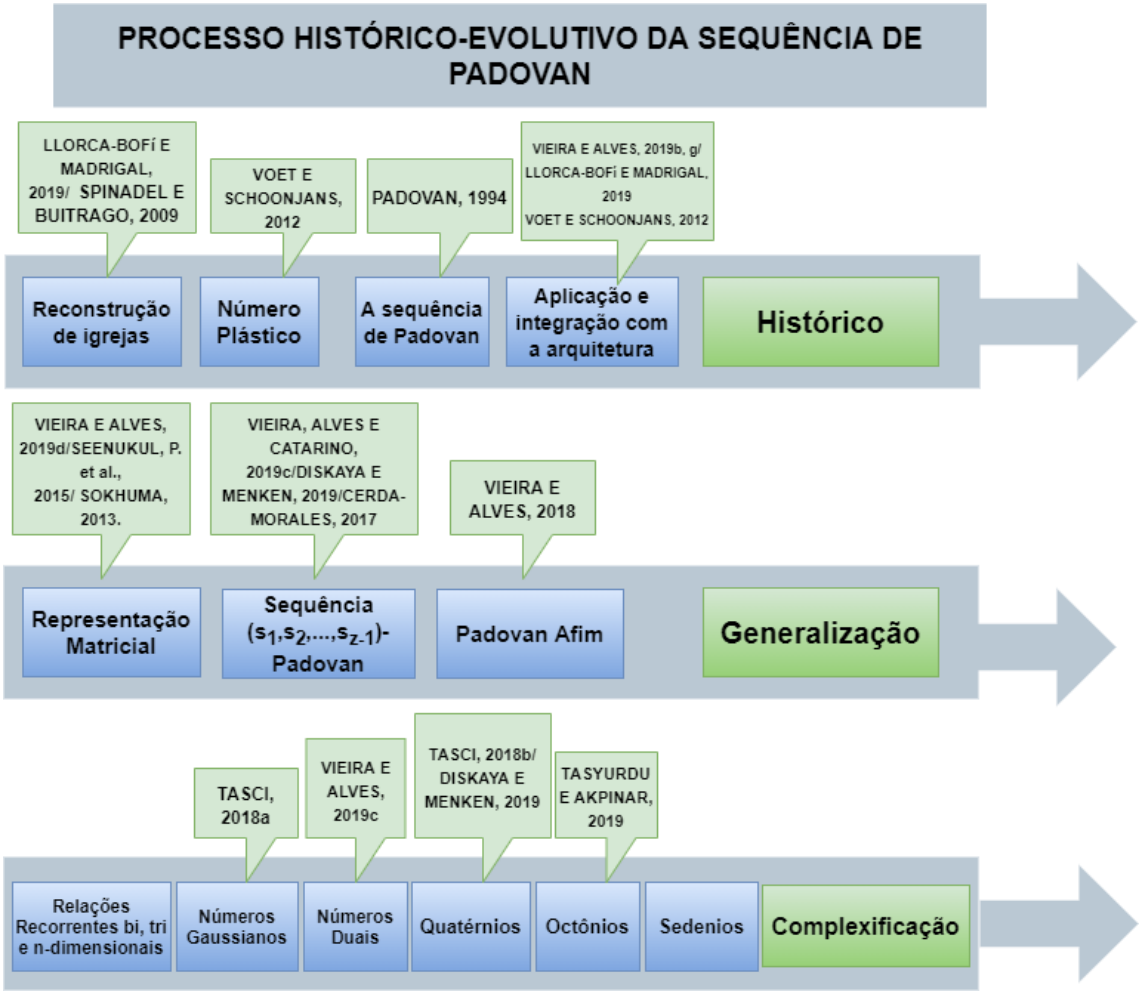
As sequências numéricas recorrentes são objetos de estudo em História da Matemática, destacando a sequência de Fibonacci com a sua gênese no registro da reprodução dos pares de coelhos imortais (Singh, 1985). No estudo dessa área, é possível estabelecer conexões entre outras sequências, selecionando assim as sequências de Padovan e Perrin, consideradas derivadas da sequência de Fibonacci (Vieira, 2019c). Por outro lado, se mostra imprescindível compreender determinados vestígios históricos que motivam um processo epistemológico e evolutivo de determinados objetos matemáticos e, de um modo amplo, determinadas teorias matemáticas. Assim, é realizada uma investigação das sequências de Padovan e Perrin, de modo a pesquisar as respectivas formas de generalização, complexificação e combinatorial dos números dessa sequência.

Destaca-se que esta pesquisa possui como documento estruturante a dissertação de mestrado de Vieira (2020), a qual desenvolveu uma investigação acerca do processo de generalização e complexificação da sequência de Padovan, promovendo situações didáticas de ensino com referência na metodologia da ED em associação com a TSD. Constata-se de fato uma grande contribuição para a evolução matemática da sequência, permitindo uma investigação referente à generalização com: generalização da ordem da sequência denominando-a de Z-dovan; dos coeficientes da recorrência e simultaneamente a ordem, definindo-a como $(s_1, s_2, \ldots, s_{z-1})$-Z-dovan, dos termos iniciais com a sequência de Padovan Afim e suas formas matriciais. Para o processo de complexificação foram realizadas pesquisas e definições matemáticas inétidas, tais como: as relações n-dimensionais da sequência, extensão aos gaussianos, duais, quatérnios, octônios e sedenios. A Figura 1 apresenta a evolução da sequência de Padovan, apresentando os trabalhos acerca do seu processo histórico e as demais contribuições referentes a generalização e complexificação dos números dessa sequência.

A investigação referente ao ensino da Matemática para o estudo de sequências numéricas recorrentes, contempla diversas pesquisas desenvolvidas, apresentando a ED como metodologia de pesquisa (Vieira, 2020; Oliveira, 2018; Vieira, 2021; Mangueira, 2022). Diante do desenvolvimento do campo epistêmico-matemático, são propostas situações-problemas em sala de aula, fundamentada na metodologia de ensino da TSD, encorajando os estudantes a experimentarem estratégias distintas de resoluções.

A propósito, sobre a Didática da Matemática, ressalta-se que é uma área de conhecimento em evolução, com o viés de elaborar conceitos e teorias compatíveis com as

Figura 1 – Processo histórico-evolutivo da sequência de Padovan



Fonte: Vieira (2020).

especificidades do saber matemático em níveis teórico e prático, discutindo o processo de ensino da Matemática (Brousseau, 1982; Brousseau, 2002; Artigue, 2014a; Artigue, 1995). Catarino (1995) destaca que as relações entre ensino e pesquisa não são triviais, devendo ocorrer orientações técnico-pedagógicas e subsídios de natureza sócio-política e econômica.

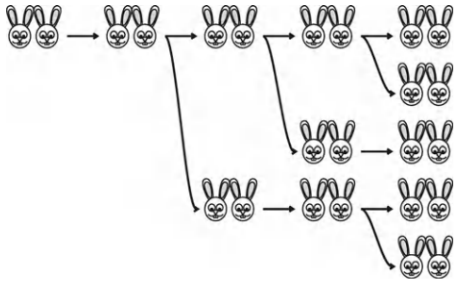
O presente estudo foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Ceará, conforme orientado pela Resolução CNS 466/2012 e 510/2016, tendo como número dos pareceres 5.911.836, 6.105.226 e 6.528.207 (ver Anexo A). Após aprovação, procedeu-se à construção das informações empíricas para o desenvolvimento desta investigação.

Esta tese, é amparada pelos pressupostos de uma ED na perspectiva de analisar os resultados de uma sequência didática que envolve as sequências de Padovan e Perrin, diante dos processos de aprendizagem do estudo de seus respectivos modelos combinatórios, para os estudantes matriculados na componente curricular de História da Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE.

2.1 Justificativa e delimitação do problema

Constata-se que, de modo predominante, diversos autores de livros de História da Matemática enfatizam curiosidades sobre sequências recorrentes, destacando a sequência de Fibonacci (Gispert, 2014; Burton, 2007; Gullberg, 1997; Grimaldi, 2012; Alves, 2017; Kauers; Paule, 2011). Um exemplo disso é dado no trabalho de Gullberg (1997) em que trata da problemática dos pares de "coelhos imortais", desconsiderando relevantes contribuições matemáticas e novos estudos evolutivos em relação aos números dessa sequência (ver Figura 2). Por outro lado, se mostra imprescindível compreender determinados vestígios históricos que motivam um processo epistemológico e evolutivo de determinados objetos matemáticos e, de um modo amplo, determinadas teorias matemáticas de outras sequências recorrentes.

Figura 2 – O problema da criação de pares de “coelhos imortais”.



Fonte: Kauers e Paule (2011).

De um modo geral, é notório o interesse existente em diversas formas de abordagem e generalização de sequências recorrentes, destacando a sequência de Fibonacci por sua contemporaneidade. Os números dessa sequência representam uma sequência de segunda ordem, apresentando diversas relações com o número de ouro, onde uma dessas existe pela razão de uma das raízes do polinômio característico de Fibonacci ser dado pelo valor $\phi \approx 1,61$ (número de ouro). Outras relações podem ser encontradas no trabalho de Dunlap (1997), expondo desde a descrição do crescimento das plantas até o desenvolvimento de algoritmos computacionais para realização de busca de dados.

À vista disso, pode-se apresentar a sequência de Padovan, a qual o nome é atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan (nascido em 1935). Essa sequência é do tipo recorrente e de terceira ordem. O seu polinômio característico possui como uma de suas soluções o número de plástico, de valor $\psi \approx 1,32$. Com isso, é possível notar uma das relações existentes entre a sequência de Padovan e o número de plástico, também conhecido como número radiante

(Padovan, 1994; Vieira, 2020). Marohnic, Kovacic e Radisic (2013) afirmam que o estudo da sequência de Padovan teve como referência no trabalho do arquiteto Hans van der Laan (1904-1991), o qual descobriu um novo número irracional, o número de plástico. Porém, ressalta-se que segundo as pesquisas de esse número foi estudado anteriormente por Gérard Cordonnier (1907-1977), assim essa sequência também é conhecida por sequência de Hans van der Laan ou Cordonnier (Alves; Catarino, 2022).

Uma outra sequência similar, é a sequência de Perrin, que por sua vez, tem o seu nome atribuído ao engenheiro francês Raoul Perrin (1841-1910), porém os números dessa sequência já haviam sido mencionados por Édouard Lucas (1842-1891) (Alves, 2020a). A sequência de Perrin formam uma sequência recorrente de terceira ordem, apresentando a mesma recorrência da sequência de Padovan, diferenciando em relação aos seus termos iniciais. Assim, a sequência de Perrin também possuem relação com o número de plástico, uma vez que apresentam o mesmo polinômio característico, sendo esta uma das relações existentes entre a sequência e o número de plástico.

A partir de estudos relacionados as propriedades existentes entre o número de ouro, também conhecido como proporção divina, surgiu então a definição dos números mórficos[1]. Esses números apresentam apenas duas soluções, uma sendo o número de plástico e a outra como sendo o número de ouro. Desse modo, observa-se a relação existente entre as três sequências: Fibonacci, Padovan e Perrin (Aarts, 2001; Ferreira, 2015).

Diante dessa relação existente entre esses números, surgiu a motivação em explorar outras sequências, potencializando os seus respectivos desenvolvimentos epistemológicos e matemáticos. De fato, constata-se o caráter inédito em relação à evolução matemática de Padovan e Perrin, proporcionando aos sujeitos participantes da pesquisa uma oportunidade de estudo ímpar. Esse fato justifica o interesse em desenvolver uma proposta de ensino para o estudo das sequências de Padovan e Perrin, enfatizando a generalização, complexificação e o modelo combinatório dos números dessas sequências.

Frente a isso, existe ainda a obrigatoriedade de construções de cenários de ensino, interligados com a necessidade dos estudantes. Assim, constata-se no desafio fornecido ao professor de Matemática em tornar as aulas mais atraentes, além de despertar nos estudantes

[1] Os números mórficos são valores intrinsecamente ligados à estética, à harmonia e à forma, encontrando aplicações abrangentes em diversas componentens curriculares, como geometria, aritmética, arquitetura e engenharia. Existem apenas dois números mórficos: o número de ouro e o número de plástico. Enquanto o estudo do primeiro remonta à Grécia Antiga, o segundo ganhou atenção no século XX, tornando-se uma área de pesquisa relativamente recente. Esses números são relacionados com as sequências de Fibonacci, Lucas, Padovan e Perrin (Ferreira, 2015).

o interesse em construir conceitos matemáticos, por meio de situações didáticas ativas que estimulem a curiosidade do estudante (Alves; Catarino, 2019; Alves, 2019; Alves, 2015). Com o objetivo de abordar essa necessidade de construção de cenários de ensino, direcionou-se o foco às teorias da Didática da Matemática, originadas na França, buscando identificar aquela que oferece uma análise abrangente dos obstáculos que surgem durante o processo de ensino, enquanto investiga também os elementos de cunho didático e cognitivo envolvidos. Dessa maneira, buscou-se compreender de forma mais profunda as complexidades inerentes ao ensino da Matemática e as maneiras pelas quais podemos superar os desafios que se apresentam nesse contexto, resultando na TSD (Brousseau, 2008). A seleção da metodologia de pesquisa também seguiu o mesmo viés de cunho francês, atribuindo a este trabalho a ED (Artigue, 1988; Artigue; Glorian, 1991), decorrente do estudo de Brousseau e das práticas das situações didáticas.

A ED estrutura os saberes que serão utilizados na atividade, sendo inicialmente levantadas as hipóteses e analisando-as posteriormente. Essa metodologia permite uma inovação didática, tendo como característica a organização de procedimentos metodológicos de pesquisa que estão sendo desenvolvidos em sala de aula. Assim, ao propor distintas situações didáticas, de modo a oportunizar a construção do conhecimento dos estudantes, é possível realizar a transposição de obstáculos de qualquer ramo da Matemática. Oliveira (2015, p. 30) afirma que:

> As atividades didáticas utilizando os princípios da ED são consideradas como práticas de investigação. Nessa prática, à medida que o professor vai trabalhando os saberes escolares, estes devem ser colocados em dúvida e discutidos. É com referência nessa abordagem metodológica que ocorre a concretização da aprendizagem. Na utilização da ED como metodologia, a atuação pedagógica do professor é transformada em objeto de investigação. A ED caracteriza-se como uma forma viável de proposta metodológica por considerar as peculiaridades dessa modalidade de pesquisa, pelo fato de buscar os conhecimentos prévios dos alunos e parte deles para a construção de um saber autêntico consciente e verdadeiro (Oliveira, 2015, p. 30).

A TSD possibilita o conhecimento matemático para o estudante, promovendo situações didáticas em sala de aula de modo a estimular o interesse dos participantes. Segundo Brousseau (2008), é interessante que o professor gere o desequilíbrio durante as resoluções das situações didáticas propostas, de maneira a que o estudante se sinta desafiado a resolver a atividade.

Dentre as pesquisas voltadas para o objeto matemático referente aos números dessas sequências de Padovan e Perrin, são apresentados os trabalhos mais relevantes: Koshy (2019), Koshy (2014), Koshy (2001), Tedford (2019), Craveiro (2004) e Benjamin e Quinn (2003b) que realizaram um estudo sobre as abordagens e interpretações combinatórias para as sequências de Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Pell e Padovan, bem como estudos paralelos envolvendo a

extensão dos números dessas sequências. Ressalta-se a ideia inicial da noção de ladrilhamentos e tabuleiro, a partir do trabalho de Spreafico (2014), o qual aborda de maneira primordial a interpretação combinatória no ramo de sequências recorrentes.

Para a área de ensino, destacam-se os estudos e as pesquisas mais relevantes para este trabalho: Silva (2019), Oliveira (2015), Silva (2015a), MagalhÃes (2009), Ferreira (2016) e Ouvrier-Buffet (2003), dos quais abordam a metodologia de pesquisa da ED aplicadas ao estudo de Geometria Analítica, operações com números racionais e o estudo epistemológico e didático de definições e conceitos matemáticos diante da teoria da situação fundamental. O livro de Artigue (2002) retrata a tradição européia da didática da Matemática.

Nesse sentido, tem-se a presente proposta, a qual consta do desenvolvimento de propriedades e definições matemáticas, realizando um estudo das sequências de Padovan e Perrin por meio de situações didáticas de ensino para estudantes em formação inicial de Matemática. Neste contexto, é desenvolvido o campo epistêmico-matemático dos números dessas sequências, potencializando os seus respectivos modelos combinatórios, bem como a generalização e complexificação. Diante disso, são elaboradas situações didáticas de ensino e aplicadas em sala de aula, para analisá-las e confrontar os resultados esperados com os obtidos. Assim, serão exploradas uma metodologia de pesquisa, a ED e uma teoria de ensino, a TSD, possibilitando aos sujeitos participantes da pesquisa um estudo de novas alternativas de ensino, além do objeto matemático.

O público alvo é composto por estudantes em formação inicial do curso de Licenciatura em Matemática, do IFCE, UECE e URCA, matriculados na componente curricular de História da Matemática no 6º semestre e Práticas de Ensino de Matemática no no 5º semestre. A seleção desse público alvo ocorreu devido a componente curricular possuir em sua ementa desenvolvimento histórico e representações dos números, possibilitando o estudo de sequências recorrentes. Com efeito, identificou-se a inclusão do tópico de sequências ao explorar a História da Matemática. Adicionalmente, é essencial que os estudantes possuam certos conhecimentos prévios pertinentes para aprofundar-se no estudo do conceito matemático abordado, sendo esses conhecimentos frequentemente adquiridos no contexto da componente curricular de Álgebra Linear. (IFCE, 2023a; IFCE, 2023b).

Os conhecimentos matemáticos possuem grande importância no processo de compreensão de vários conteúdos ensinados na área. Neste sentido, é fundamental explorar o lado intuitivo dos estudantes em formação inicial, para que esses possam compreender a

temática estudada e, aplicá-la em situações do cotidiano (Norma; Allevato, 2019). A exploração será realizada por meio de situações didáticas de ensino, permitindo que os estudantes resgatem em seus conhecimentos prévios as resoluções para as atividades propostas, de modo serem protagonistas do conhecimento e apresentando assim a importância dessa investigação. A partir do objeto de estudo, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin, tem-se a utilização da ED e TSD colaborando para a investigação com a formação inicial de professores, de modo a realizar uma transposição didáticas do conteúdo de Matemática para a área de ensino, bem como a visualização dos termos da sequência por meio do material manipulável e a construção das definições dessas sequências.

Destaca-se que a execução de algoritmos para a resolução de problemas propostos é deixada de lado, uma vez que ao realizar tal ação, os estudantes não compreendem a importância do conteúdo ensinado. Vale lembrar que um algoritmo é definido como "um conjunto de instruções detalhadas, passo a passo, para ser seguido pelo estudante até que o resultado seja obtido"(Araújo, 2020, p. 22). Rocha e Aguiar (2012) afirmam ainda que é necessário haver uma modificação acerca do modo de ensinar, ponderando também os conhecimentos pedagógicos durante os processos formativos, uma vez que esses representam uma combinação entre o conhecimento teórico e o modo de ensinar, tornando assim os conteúdos mais compreensíveis aos estudantes.

Por conta disso, busca-se responder à seguinte questão norteadora: *em que medida a ED e da TSD podem contribuir para o ensino da generalização, complexificação e dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin no curso de formação inicial de professores de Matemática?*

Como resposta, é proposta uma sequência didática elaborada e analisada com referência nas fases da ED e TSD. A vivência aconteceu com estudantes da componente curricular de História da Matemática, utilizando o material manipulável como instrumento didático para a abordagem das atividades propostas. A seguir, são apresentados os objetivos que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, compreendendo que processos investigativos permitem aperfeiçoar as práticas pedagógicas. Assim, tem-se como objetivo geral: Analisar as contribuições da ED e da TSD, para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, diante de uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatório dos números dessas sequências (campo epistêmico-matemático), no curso de Formação Inicial de Professores de Matemática. Com referência no objeto de estudo dado pela verificação da aprendizagem dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin e, do modelo de generalização de Perrin, tem-se os

seguintes objetivos específicos:

- Apresentar e discutir sobre à generalização e complexificação das sequências de Padovan e Perrin acerca das abordagens combinatórias;
- Compreender a abordagem combinatória para a sequência de Padovan e sequência de Perrin, para a sequência polinomial de Padovan, fundamentada na ED e TSD, na construção de definições envolvendo o conhecimento epistemológico-matemático dos modelos generalizados e combinatórios de Padovan e Perrin, mediante a elaboração de situações-problema em sala de aula;
- Desenvolver no contexto da formação inicial de professores de Matemática, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin, por intermédio de situações didáticas fundamentais, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin, bem como as as ações realizadas nas aulas da componente curricular de História da Matemáticae Práticas de Ensino de Matemática, envolvendo o conhecimento epistemológico-matemático dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin com a utilização do material manipulável.

A seguir, é realizado um estudo do referencial teórico da pesquisa, realizando um levantento do estudo das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática nos últimos cinco anos, ou sejam o intervalo de tempo de 2019 à 2024, uma discussão do quadro teórico acerca envolvendo os trabalhos mais relevantes acerca das sequência de Padovan e Perrin, bem como as teses e pesquisas que abordam a ED como metodologia. Além disso, são discutidas a metodologia da ED, a teoria de ensino da TSD, as sequências recorrentes, o número de plástico, sequências de Padovan e Perrin e a dimensão filosófica do estudo das definições.

3 ABORDAGEM METODOLÓGICA: FUNDAMENTOS E ESTRATÉGIAS DE PESQUISA

O presente estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa, por se enquadrar melhor nesta pesquisa, possuindo como abordagem da pesquisa a ED desenvolvendo teorias a partir de estudos empíricos. Desse modo, o conhecimento e a prática são investigados enquanto conhecimento e práticas locais. Destaca-se que a pesquisa qualitativa é uma abordagem investigativa voltada para a compreensão aprofundada de fenômenos, explorando significados, experiências, percepções e processos sociais. Utiliza métodos como entrevistas, observações e análise de documentos para coletar dados descritivos, com foco em interpretar a realidade sob a perspectiva dos participantes (Lukde, 1984; Lukde; Andre, 1986).

MagalhÃes (2009) retrata que os pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa precisa possuir um pouco de flexibilidade, uma vez que esse tipo de pesquisa observa a dinâmica e a construção social da investigação. Silva (2015a) afirma fundamentado em D'AmbrÓsio (2002) que a pesquisa qualitativa busca compreender e interpretar dados e discursos, inclusive quando envolve grupos de participantes.

Segundo Silva (2015a)

> A ED é uma metodologia de pesquisa do tipo qualitativa, de cunho experimental, que surgiu com a TSD, cujo objetivo é produzir conhecimento na área de Educação Matemática e verificar se os métodos criados são eficientes (Silva, 2015a, p. 134)

Assim, esta pesquisa tem como foco o estudo dos processos de ensino acerca do objeto matemático das sequências de Padovan e Perrin. Com isso, busca-se construção do ambiente de ação e reflexão nas instituições de ensino superior, proporcione contribuições na prática dos professores de Matemática em formação inicial.

Nesta seção descrevemos o procedimento metodológico realizado nesta pesquisa. Inicialmente, foi realizado um levantamento do referencial teórico, abordando a metodologia de pesquisa da ED, a teoria de ensino da TSD e o objeto matemático, realizando assim as análises preliminares da ED. Em relação ao objeto matemático, foram discutidos trabalhos da área de Matemática sobre as sequências de Padovan e Perrin, a fim de resgatar o estado da arte dessas sequências e permitir a transposição didática em sala de aula nas fases seguintes.

Com o objetivo de realizar a aplicação da pesquisa em curso de formação inicial de professores, foram selecionadas as componentes curriculares de História da Matemática e Práticas de Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática. A seleção do

público deu-se pela componente curricular possuir em sua ementa desenvolvimento histórico e representações dos números, possibilitando o estudo de sequências recorrentes. De fato, constatou-se a presença do conteúdo de sequências recorrentes ao discutir sobre a História da Matemática. Além disso, observa-se a busca por práticas pedagógicas, elencando a componente curricular de Práticas de Ensino de Matemática como forma de apresentar práticas pedagógicas mais eficazes no Ensino de Matemática aos estudantes em formação inicial. Diante disso, os estudantes devem possuir alguns conhecimentos prévios relevantes, como Álgebra Linear, para o estudo do objeto matemático em questão.

Com isso, a pesquisa foi aplicada com uma amostra de 48 estudantes participantes presentes nas referidas componentes curriculares, permitindo uma investigação com referência na ED e TSD. De fato, a pesquisa permite a contribuição do material manipulável como forma de transpor o conteúdo matemático para a área de ensino, além de vislumbrar a visualização dos termos da sequência diante da construção da definição.

Em seguida, foram realizadas atividades de ensino pela apresentação aos estudantes do curso de formação inicial de professores, abordando sequências numéricas recorrentes, a sequência de Fibonacci, noção de tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamentos. Ao total foram realizadas 8 aulas, sendo essas com caráter de proporcionar aos participantes uma base matemática para a construção da definição da nova sequência investigada.

Posteriormente, foram elaboradas seis situações-problema e analisados os possíveis comportamentos dos estudantes durante a aplicação, referencia e ênfase na teoria de ensino da TSD. Nesse momento, observou-se a realização da segunda fase da ED. Continuando o procedimento metodológico, a atividade proposta foi experimentada no curso de formação inicial de professores de Matemática, dando sequência à terceira fase da ED. Durante a experimentação, os participantes foram analisados fundamentadas na TSD, e os dados foram registrados e armazenados para posterior discussão na pesquisa. Por fim, confrontaram-se os dados previstos com os dados aplicados e validados, de acordo com a validação interna da ED, concluindo a quarta e última fase do processo.

4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS: BASES CONCEITUAIS

Nesta seção ocorre uma discussão da metodologia de pesquisa da ED e a teoria de ensino da TSD, perante o olhar francês da Didática da Matemática, para que haja uma compreensão da inserção dos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos no processo de ensino de Matemática no Brasil. Além disso, é realizado um estudo sobre as sequências numéricas para o ensino de Matemática de modo a realizar um levantamento das produções científicas nos últimos cinco anos. Por fim, ocorre um estudo acerca das sequências recorrentes, do número de plástico, das sequências de Padovan e Perrin e, da dimensão filosófica do estudo das definições.

Por mais de 20 anos, a pesquisa educacional tem lidado com processos de ensino em Matemática para níveis superiores, buscando aprimorar a compreensão acerca das dificuldades encontradas pelos estudantes e da disfunção do sistema educacional; também tentou obter maneiras de superar esses problemas (Artigue, 1988; Artigue; Glorian, 1991; Sriraman; English, 2010). Porém, foram surgindo outras pesquisas acerca de problemáticas ocorridas na educação básica, permitindo uma extensão da pesquisa para outros níveis de ensino.

De fato, entende-se que a pesquisa hoje pode auxiliar bastante, ao tornarmos os seus resultados acessíveis a um grande público, além de realizar esforços para que haja uma melhoria do vínculo entre pesquisa e a prática no ensino. Desse modo, busca-se que essa pesquisa contribua para que essa convicção não seja apenas pessoal.

No referencial teórico e metodológico desta pesquisa, são indicadas a influência francesa para a Didática da Matemática, diante de abordagens inspiradas por Artigue (Artigue, 2014b) e Brousseau (Brousseau, 2008), moldando a pesquisa de acordo com o respectivo problema norteador definido anteriormente. Desse modo, problemas de ensino enfrentados pelos docentes em diversas instituições de ensino são observados, permitindo a realização da pesquisa com o objetivo de fornecer alternativas para superar tais obstáculos, perante o estudo da Didática da Matemática.

Sem dúvida, a seleção da metodologia de pesquisa e da teoria de ensino foram induzidas por experiência própria como professora da educação básica e pesquisadora, além da realização da pesquisa durante o mestrado acadêmico acerca da metodologia de pesquisa e teoria de ensino, permitindo uma aplicação em sala de aula em formação inicial de professores (nível superior de ensino).

Diante disso, tem-se a realização da primeira fase da ED. Constituída como primeira

fase da ED. as análises preliminares incluem sistematicamente a inserção de um componente epistemológico. Durante a concepção de tarefas e situações, determinadas atividades possuem grande relevância, tais como: a busca por situações que desenvolvam a essência epistemológica da Matemática a aprender; otimização do meio para a busca da aprendizagem autônoma dos estudantes; e gestão dos processos de desconcentração e institucionalização. Desse modo, tem-se que a utilização da ED, permite adaptações necessárias em pesquisas perante todos os níveis de ensino, além de pesquisas envolvendo formação de professores.

Tal como acontece com a maioria das pesquisas em Educação Matemática, a observação dos fatos e sua análise são construídas no quadro de uma análise preliminar das atividades de aula propostas. Bessot e Comiti (1985) afirmam que:

> esta análise deve destacar vários fenômenos que podem ocorrer, em particular, identificando as principais classes de procedimentos de resolução e as condições que os geram, estudando as variáveis da situação (Bessot; Comiti, 1985, p. 312).

4.1 O estudo das sequências de padovan e perrin para o ensino de matemática

O estudo de sequências numéricas recorrentes é evidenciado pela sequência de Fibonacci, abordando o seu aspecto histórico e desconsiderando outros aspectos importantes sobre a contribuição matemática (Burton, 2007). Com isso, inúmeras outras sequências numéricas recorrentes são consideradas desconhecidas e não são estudadas em cursos de Formação Inicial de Professores, a exemplo disso tem-se as sequências de Padovan e Perrin.

Diante desse cenário, o estudo das sequências de Padovan e Perrin, podem contribuir para o ensino de Matemática, possibilitando uma abordagem de ensino significativa perante a utilização da ED. Segundo Zborowski e Pigatto (2018) a ED tem sua origem em decorrência da Didática da Matemática, após discussões em escolas francesas acerca do Ensino de Matemática.

O ensino de Matemática busca um aprendizado para a vida e não apenas para cumprir metas e executar algoritmos que não satisfaçam a busca do conhecimento. De fato, é notório a necessidade em adoção de metodologias que permitem uma reflexão na ação de ensinar, afetando consequentemente o processo de aprendizagem. Com isso, tem-se a abordagem metodológica da ED, norteando os objetos matemáticos das sequências de Padovan e Perrin. Apoiado à isso, tem-se a teoria de ensino da TSD, como um aporte às pesquisas guiadas pela ED (Vieira, 2023b).

Nesse contexto, a TSD auxilia no processo de análise das situações em sala de aula, possibilitando ao professor uma abordagem de prática docente voltada para o cunho investigativo, tornando o aluno o centro do processo de ensino. Assim, tem-se a necessidade de pensar na

formação inicial do professor de Matemática, apresentando metodologias/teorias de pesquisa e ensino, das quais possam ser utilizadas em suas práticas docentes no futuro.

Diante do exposto e da importância da temática, a qual trata do estudo das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática, percebeu-se a necessidade de organizar um levantamento bibliográfico dos trabalhos publicados no banco de dados no SciELO, Google Acadêmico e no Periódico da Capes. A revisão foi demarcada pelo período de 2018 a 15 de outubro de 2022, a fim de quantificar e analisar os trabalhos que abordam o estudo das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática com referência na ED, vislumbrando assim uma compilado de pesquisas na área. A revisão apresentada é justificada pela necessidade de discussão acerca do processo de estudo das sequências de Padovan e Perrin, com o viés de compreender a utilização da ED para o ensino de Matemática.

O levantamento bibliográfico consiste num processo sistêmico de investigação em relação aos trabalhos publicados em bases de literatura acadêmica. Fundamentada em Kitchenham, Brereton, Budgen, Turner, Bailey e Linkman (2009) e GalvÃo e Pereira (2014), esta revisão possui o viés de garimpar trabalhos publicados em periódicos no âmbito do estudo das sequências de Padovan e Perrin, fundamentada na ED. Com isso, é apresentada a questão central de pesquisa: Como realizar um estudo acerca das sequências de Padovan e Perrin com a utilização da ED para o estudo de História da Matemática em cursos de Formação Inicial de Professores?

Desse modo, foram selecionadas pesquisas associadas às sequências de Padovan e Perrin, ED e ao ensino de matemática. Diante disso, foram definidas algumas questões de pesquisa visando respondê-las com referência nas leituras dos trabalhos após os levantamentos realizados. As questões de pesquisa foram fundamentadas nas questões:

- Quais as principais problemáticas destacadas pelos autores dos trabalhos?
- Como a ED é abordada diante dos estudos referentes às sequências de Padovan e Perrin para o ensino de matemática?
- Quais as metodologias/teorias de ensino estão sendo utilizadas?

O objetivo do referido levantamento bibliográfico foi dividido em questões de pesquisa centrais e secundárias, sendo essas:

- Houve aumento significativo de estudos sobre a temática no decorrer dos anos?
- Em quais níveis de formação de ensino os estudos estão sendo realizados?
- Qual a quantidade de trabalhos referentes as sequências de Padovan e Perrin?

Quadro 1 – Bases de Dados da Pesquisa e Endereço (Link)

Base de Dados	Endereço Eletrônico
Google Acadêmico	https://scholar.google.com.br
Periódico da Capes	https://www-periodicos-capes-gov- br.ezl.periodicos.capes.gov.br
SciELO	https://www.scielo.org
Springer	https://link.springer.com/

Fonte: Elaborado pela autora.

Optou-se pela base de dados do Google Acadêmico, portal da CAPES e SciELO, com a seguinte definição da *string* de busca por meio das palavras-chave referentes ao assunto da sequência de Fibonacci, Padovan e Perrin, ED e ensino de matemática. Ressalta-se a inserção da palavra-chave referente à sequência de Fibonacci, uma vez que essa sequência é considerada a mais conhecida e estudada diante da área de sequências numéricas recorrentes. Desse modo, tem-se a utilização do operador lógico booleano AND, resultando na composição da *string* da seguinte forma: ("sequência de Padovan"OR "sequência de Perrin"OR "sequência de Fibonacci") AND ensino de Matemática AND Engenharia Didática. Ao tudo, buscando identificar quais artigos abordavam a temática pesquisada, foram lidos todos os títulos, palavras-chave e resumos de forma individual, para uma análise prévia e triagem do levantamento bibliográfico, de acordo com cada etapa analisada posteriormente.

A garimpagem realizada durante o processo primário, foi dada pela utilização das bases principais eletrônicas e científicas, com o viés de responder aos questionamentos realizados nas questões de principais e secundárias. A presente revisão considera apenas as buscas automáticas, publicadas em forma de artigos científicos nos últimos 5 anos, provenientes de estudos desenvolvidos internacionalmente, escritos em língua portuguesa, inglesa e francesa. Desse modo, apresenta-se o Quadro 1 com as referências bibliográficas utilizadas no estudo desta revisão.

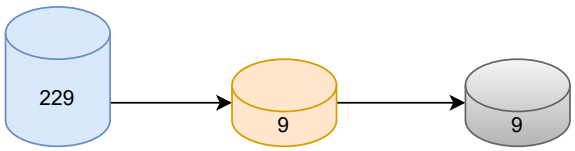
A execução da pesquisa foi dada por uma verificação inicial, observando os trabalhos e as questões de pesquisa definidas nesta revisão. A escolha dos artigos selecionados nessas bases foi realizada em três partes. A primeira foi por meio da leitura do título e do resumo do artigo para certificar que se enquadra na temática abordada. Desse modo, foram aplicadas as *strings* nas diferentes bases de dados analisadas, ajustando-se aos critérios de acordo com os mecanismos de cada plataforma. Assim, a busca com as expressões definidas resultou num total de 229 publicações, distribuídas da seguinte maneira: Google Acadêmico – 201; Periódico da Capes – 26; SciELO – 1; Springer - 1. Para a base de dados do SciELO, foi utilizada apenas a *string* Padovan sequence OR Perrin sequence, visto que não foram obtidos resultados para

a primeira *string* definida. Uma vez que nem todos os trabalhos estavam integrados com as questões de pesquisa, foi realizada uma triagem, selecionando apenas artigos relevantes para o estudo, segundo a temática similar bem como o objeto de estudo matemático e metodologias utilizadas.

A base de dados da Springer também foi utilizada para esta presente revisão, porém não foram obtidos trabalhos que abordam o assunto da sequência de Padovan ou Perrin e ED para o estudo. Diversas foram as buscas realizadas, porém os artigos contidos na plataforma tratavam apenas da ED ou das sequências de Padovan e Perrin na área de Matemática. Dessa forma, a Springer não foi disposta na análise deste levantamento bibliográfico.

Em seguida, na segunda fase, os trabalhos foram analisados e realizada uma leitura de seus títulos, resumos e palavras-chave, totalizando 9. Por fim, a terceira etapa permitiu a realização da leitura na íntegra dos 9 artigos selecionados, resultantes da fase anterior, visando responder as questões de pesquisa. É possível observar a quantidade de trabalhos filtrados durante as etapas na Figura 3.

Figura 3 – Etapas do levantamento bibliográfico



Fonte: Elaborado pela autora.

Destaca-se que durante todas as etapas foram aplicados os critérios de inclusão e exclusão que são apresentados no Quadro 2. É importante destacar que a inserção da *string* sequência de Fibonacci, permitiu obter trabalhos que tratam da sequência de Padovan ou Perrin, visto que em seus resumos e títulos não continham a palavra-chave referente aos números dessas sequências em estudo.

Assim, após a conclusão de todas as etapas, foi possível analisar 9 artigos que atendessem aos elementos relevantes deste estudo. Desse modo, as publicações foram dispostas no Quadro 3, contendo as informações mais relevantes dos trabalhos: título, ano da publicação, autores e base de dados. Nota-se que o Google Acadêmico foi a base de dados em que mais

Quadro 2 – Critérios de inclusão e exclusão dos artigos

Critérios de Inclusão	Critérios de Exclusão
Estar disponível em forma de artigo completo em uma biblioteca digital.	Artigos que não atendam aos critérios de inclusão.
Artigos que abordam a ED e a sequência de Padovan ou Perrin, ou que abordam essas sequências na área de ensino.	Artigos duplicados. Artigos que abordam outras sequências. Artigos de Matemática. Artigos apresentados em congressos, graduação e especialização.

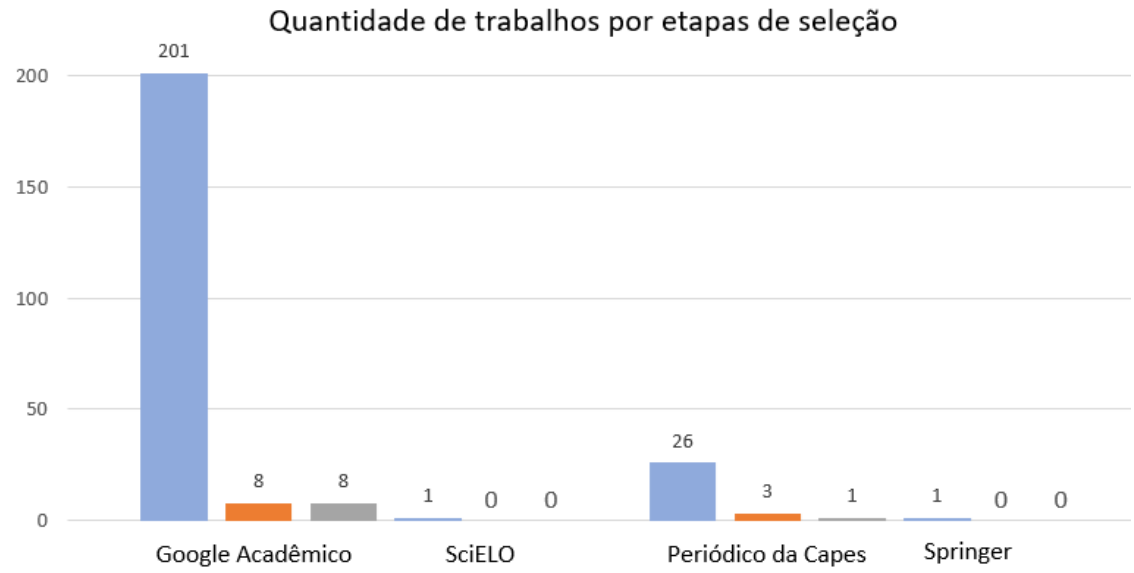
Fonte: Elaborado pela autora.

obteve destaque em relação a quantidade de trabalhos encontrados e selecionados, sendo 8 dos 9. O Periódico da Capes retornou 3, sendo 2 já presentes no Google Acadêmico. É importante destacar a presença de Alves em todos os trabalhos voltados para a área de Ensino dessas sequências.

Observou-se que alguns trabalhos encontrados abordam a sequência de Padovan ou Perrin, investigando a parte matemática da sequência, evoluindo matematicamente, enquadrando-se em trabalhos de Matemática. Desse modo, foram incluídos na análise, apenas os estudos que apresentam a sequência de Padovan ou Perrin como objeto de estudo, bem como a ED como metodologia de pesquisa.

A Figura 4, apresenta a quantidade de estudos encontrados por etapas de seleção da revisão, apresentando a maior contribuição em relação a base de dados do Google Acadêmico.

Figura 4 – Quantidade de estudos obtidos e etapas da seleção



Fonte: Elaborado pela autora.

Visando apresentar melhor o panorama da pesquisa, as questões de pesquisa foram

Quadro 3 – Trabalhos Analisados

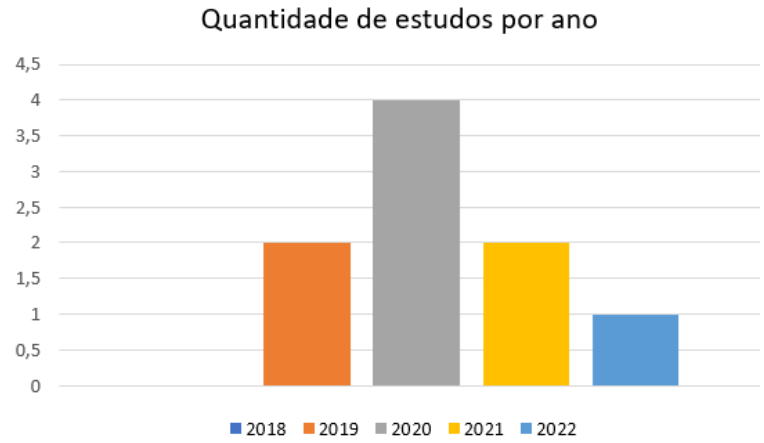
Título	Ano de Publicação	Autores	Base de Dados
Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática	2019	Vieira, Alves e Catarino	Google Acadêmico e Periódico da Capes
The Padovan Sequence and the plastic number: a prior analysis and a priori	2019	Vieira e Alves	Google Acadêmico
Engenharia Didática e a extensão da sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a *priori*	2020	Vieira e Alves	Google Acadêmico
Teoria das situações didáticas gamificadas: um esboço detalhado no ensino da sequência de Padovan	2020	Costa et al.	Google Acadêmico e Periódico da Capes
A Didactic Engineering in the Research Process of the Generalization of the Padovan sequence:An Experience in a Pre-Service Teacher Training Course	2020	Vieira, Alves e Catarino	Google Acadêmico
Construção da Forma Matricial de sequências lineares e recorrentes: um estudo da matriz geradora	2020	Vieira et al.	Periódico da Capes
Engenharia Didática para a visualização da sequência de Padovan por meio do *software* Geogebra	2021	Pinheiro e Alves	Google Acadêmico
Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Historical Eesearch in Brazil on Recurring Number Sequences	2021	Alves	Google Acadêmico
BRASIL X PORTUGAL: pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da história da matemática sobre sequências numéricas recorrentes	2022	Alves e Catarino	Google Acadêmico

Fonte: Elaborado pela autora.

analisadas, buscando respondê-las individualmente, permitindo uma discussão dos resultados além de possibilitar um detalhamento em relação aos artigos selecionados. As questões secundárias serão comentadas inicialmente, analisando quantitativamente os dados da pesquisa.

Considerando a questão: Houve aumento significativo de estudos sobre a temática no decorrer dos anos? Percebe-se, pela Figura 5, que durante os anos de 2018 até 2020 houve um aumento em relação as pesquisas envolvendo a ED e as sequências envolvidas. Porém, em 2021 e até a presente data do ano de 2022, consta uma redução desses trabalhos. Muitas são as variáveis que podem ter desencadeado esse resultado, mas um fato importante que deve ser levado em consideração é a ocorrência da pandemia durante os anos de 2020 e 2021. Diante dessa análise, percebe-se uma carência em pesquisas referente as sequências de Padovan e Perrin para a área de ensino de Matemática, visto que foram encontrados diversos trabalhos em relação a esses objetos matemáticos, porém muitos tratando apenas da área da Matemática.

Figura 5 – Quantidade de estudos por ano



Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação a segunda questão secundária, tem-se: Em quais níveis formação de ensino os estudos estão sendo realizados? Assim, todos os diversos trabalhos selecionados tratam da utilização da ED em cursos de Formação Inicial de Professores de Matemática, sendo portanto no nível superior. Existe ainda a vertente em que 4 desses trabalhos foram aplicados no curso de Licenciatura em Matemática; 4 utilizaram apenas as duas fases iniciais da ED, sugerindo a aplicação em cursos de Formação Inicial de Professores de Matemática e 1 trabalho utilizou a TSD para elaborar situações-problema propostas, para uma possível aplicação em sala de aula para o estudo da forma matricial das sequências numéricas recorrentes de um modo generalizado.

Finalizando as questões secundárias, tem-se: Qual a quantidade de trabalhos

referentes as sequências de Padovan e Perrin? Dos 13 trabalhos, 10 aprofundam o estudo em relação aos números da sequência de Padovan; 3 partem da sequência de Fibonacci e, de uma maneira generalista abordam as sequências de Padovan e Perrin. Nenhum deles aprofundam o estudo voltado para a o ensino da sequência de Perrin, com a utilização da ED.

Analisando o perfil dos autores, observa-se que a região do Nordeste do Brasil concentra os primeiros autores em sua totalidade, apresentando ainda contribuição de coautores de Portugal. Os autores principais possuem nível de formação distribuídos entre mestrandos, mestres, doutorandos e doutores. Os cursos de Pós-graduação *Stricto sensu* concluídos ou em andamentos pelos autores são na área de ensino de Matemática, trabalhando com a vertente da Didática da Matemática francesa (ED).

A análise qualitativa dos estudos foi realizada conforme as questões de pesquisas definidas no início do presente estudo. Desse modo, para a primeira questão de pesquisa, tem-se:

Quais as principais problemáticas destacadas pelos autores dos trabalhos?

As principais problemáticas identificadas pelos autores nos estudos analisados, foram referentes a carência de pesquisas voltadas ao ensino das sequências de Padovan e Perrin, diante do processo de estudo na componente curricular de História da Matemática em cursos de formação inicial de professores. Vieira e Alves (2020), após a identificação da problemática, permitem contribuir para o ensino da sequência de Padovan, conforme relatam:

> Desse modo, visando obter a identificação da escassez de trabalhos acerca do ensino da Sequência de Padovan, principalmente em cursos de formação inicial de professores, propõe-se a utilização da ED, sendo um tema relacionado ao processo matemático dessa sequência e a sua extensão (Vieira; Alves, 2020, p. 228)

Vieira, Alves e Catarino (2019c) discutem ainda que existem diversas pesquisas realizadas em cursos de pós-graduações na área de ensino de Ciências e Matemática por professores e, que não chegam à sala de aula, por diversos motivos. Assim, esses trabalhos deixam de oportunizar aos futuros professores a possibilidade de conhecer novas metodologias de ensino e pesquisa.

A ED é abordada em cursos de formação inicial de professores, potencializando o ensino das sequências e as fases da metodologia de pesquisa. Assim, são desenvolvidos meios para que os estudantes possuam conhecimentos prévios sustentando o estudo de sequências numéricas e recorrentes, a fim de permitir uma investigação e estímulo do raciocínio intuitivo e lógico dos participantes. Desse modo, a ED em sua fase inicial, busca trabalhos do objeto

de estudo matemático, com o viés de desenvolver o campo-epistêmico matemático. Esse comportamento investigativos dos estudantes é muito importante para que haja uma compreensão dos conteúdos, segundo Pinheiro e Alves (2022):

> Observa-se as dificuldades na compreensão da Matemática, no que diz respeito ao processo investigativo e histórico dos conteúdos. Tais fatores fortalecem a importância do estudo da componente curricular de História da Matemática, como suporte à compreensão da natureza e criações científicas dos mais variados tipos assuntos da Matemática. (Pinheiro; Alves, 2022, p. 469)

Pinheiro e Alves (2022) abordam o estudo da sequência de Padovan com a utilização do *software* GeoGebra, permitindo o uso de um recurso tecnológico para o conhecimento de propriedades matemáticas fundamentais em relação aos números dessa sequência. Costa, Sousa, Vieira, Alves, Castro e Sales (2020) permitiram uma contribuição com o processo de gamificação para o estudo da sequência de Padovan com as metodologias da ED e TSD.

Por fim, observa-se uma carência maior em trabalhos referente ao ensino da sequência de Perrin, bem como a utilização de tecnologias e recursos tecnológicos para o ensino das sequências analisadas. Apresentando poucos trabalhos com o uso do *software* GeoGebra e outro com o estudo realizado por meio da gamificação.

Quais as metodologias/teorias de ensino estão sendo utilizadas?

As metodologias de ensino utilizadas foram a TSD, complementando a ED em suas fases. Conforme Vieira, Alves e Catarino (2020a) relatam em sua pesquisa que

> Durante a fase da experimentação da ED, momento em que são aplicadas as sequências de ensino, necessita-se que essas sejam fundamentadas em situações didáticas estruturadas de ensino, sendo portanto direcionadas ao processo de ensino e aprendizagem. À vista disso, destaca-se a TSD, desenvolvida por Brousseau, como sendo uma clássica teoria da vertente francesa da Didática da Matemática, cujo um dos objetivos principais envolve a modelização de saberes (Tradução nossa) (Vieira, 2020a, p. 115).

Assim, percebe-se a necessidade em utilizar a TSD como meio de direcionar e validar o processo de ensino e a aplicação em sala de aula da pesquisa, por meio de situações de ensino propostas aos sujeitos participantes.

Destaca-se que o trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2020a) representa um recorte do projeto de dissertação de Mestrado Acadêmico de Vieira (2020), contendo uma robustez de dados e análises para uma investigação acerca dos números da sequência de Padovan, bem como no livro de Vieira, Alves e Catarino (2023d).

Diante disso, a metodologia de ensino utilizada permitiu uma elaboração de situações estruturadas, aplicadas ou a serem aplicadas em sala de aula, visando investigar o comportamento dos estudantes durante a resolução dos problemas propostos.

Após as análises qualitativas e todo o estudo discutido, a revisão possibilitou um levantamento de algumas conclusões e considerações. As análises realizadas demonstram que o estudo das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática possuem grandiosa carência na literatura. Diante das leituras selecionadas, também foi possível perceber que essa problemática se estende para livros referentes a História da Matemática (Grimaldi, 2012; Gispert, 2014). Dessa forma, o estudo de sequências numéricas recorrentes em cursos de formação inicial de professores, por muitas vezes, é discutido com referência na sequência de Fibonacci.

Dentro desse contexto, foi realizado o objetivo do trabalho com o desenvolvimento de um mapeamento de estudos acerca das sequências de Padovan e Perrin, com a utilização da ED para o estudo de História da Matemática em cursos de formação inicial de professores.

Durante a fase inicial da revisão, observou-se uma gama de trabalhos voltados para a área de Matemática acerca dessas sequências. Após as filtragens, notou-se uma drástica redução desse número. Esse fato permite uma conclusão clara perante a carência de trabalhos voltados para o ensino dos números da sequência de Padovan e Perrin.

As análises quantitativas permitiram compor o perfil dos autores, buscando uma investigação dos ambientes das pesquisas realizadas. Assim, identificou-se que os públicos foram todos de nível superior, em cursos de Licenciatura em Matemática, quando as pesquisas foram aplicadas em sala de aula. Para os trabalhos em que não realizaram a experimentação e coleta de dados, os autores destacaram uma possível aplicação em cursos de formação inicial de professores.

Em relação a redução de trabalhos durante os anos de 2021 e até o presente momento, pressupõem-se que seja pela ocorrência da Pandemia do Covid-19, dificultando a aplicação das pesquisas em formato remoto de ensino. Já para a vertente da pesquisa a qual não realiza a fase da experimentação, a sua redução justifica-se, possivelmente, pela dificuldade de discussão com grupos de estudos. De fato, como os trabalhos foram desenvolvidos por pós-graduandos, observou-se com a análise dos perfis dos autores, que esses participavam/participam de grupos de pesquisas, onde são realizadas discussões acerca das problemáticas e investigações estudadas.

Perante as problemáticas discutidas pelos autores, constata-se a necessidade do estudo das sequências de Padovan e Perrin para o ensino de Matemática, possibilitando aos

professores em formação inicial um aprofundamento em História da Matemática. A TSD presente como metodologia de ensino pelos autores, complementa a pesquisa com o apoio durante algumas fases da ED.

Por conseguinte, tendo analisado os trabalhos selecionados, constata-se a necessidade de explorar o estudo das sequências para o ensino de Matemática, desenvolvendo pesquisas voltadas para a área de ensino e sua aplicação em sala de aula.

4.2 Quadro teórico

Nesta seção, tem-se a continuação das análises preliminares dessa pesquisa sendo realizadas conforme prevista da ED e, estruturadas em duas etapas, sendo uma referente a metodologia de pesquisa e teoria de ensino, e a outra em relação aos aspectos didáticos e cognitivos das sequência de Padovan e Perrin. Os levantamentos bibliográficos realizados nessa fase servem como suporte para a construção das demais fases da ED.

Inicialmente, foram selecionadas teses que utilizassem a ED, TSD e a construção de definições matemáticas, sendo esses: Silva (2019), Oliveira (2015) e Ouvrier-Buffet (2003), Silva (2015a), MagalhÃes (2009), Ferreira (2016), das quais trazem constribuições relevantes para o presente estudo. A busca pelas pesquisas deu-se pela plataforma do Google Acadêmico e pela base de dados de teses da Pontífica Universidade Católica de São Paulo.

Silva (2019) tratou de uma pesquisa com os pressupostos da aprendizagem colaborativa, da ED e TSD, analisando as potencialidades da sequência didática acerca do conteúdo de Geometria Analítica para estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. O autor desenvolve um material didático em formato de tapete cartesiano, permitindo um estudo da Geometria Analítica perante o jogo desenvolvido. Desse modo, o autor analisa que com situações do cotidiano, o estudante consegue aplicar os conhecimentos obtidos, além de propor soluções. Com isso, estimula-se o desenvolvimento da criatividade e da aprendizagem.

Oliveira (2015) realizou um estudo acerca das regras operatórias fundamentais de frações, com o uso de calculadoras científicas para os estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental. Assim, o autor apoiou-se na ED, TSD e Teoria de Registros de Representação Semiótica para a elaboração da sequência didática, experimentação, análise dos resultados e articulação entre os registros numéricos. Com a utilização do recurso, foi possível observar que os estudantes conseguiram discutir e escrever regras para a adição e subtração de números fracionários com o mesmo denominador, multiplicação de números fracionários e divisão de números fracionários com numeradores e/ou denominadores múltiplos. O fato dos estudantes

não terem compreendido e estabelecido as regras para adição e subtração de números fracionários quaisquer, a autora atribui a ausência de utilização de outro recurso didático, um *software* como por exemplo.

Ouvrier-Buffet (2003) realiza um estudo epistemológico e didático da construção de definições e conceitos elaborados e aplicados com estudantes universitários, mediante a teoria da situação fundamental, com o objetivo de construir definições em matemática, potencializando os respectivos significados filosóficos desses conceitos. Assim, tem-se o estudo da construção de definições no âmbito da Matemática Discreta, possibilitando uma investigação do conceito de árvores, linhas retas discretas e movimento em uma grade. A autora realiza uma classificação, modelização e resolução de problemas, tendo como base os filósofos Aristóteles, Popper e Lakatas. As hipóteses elaboradas pela autora são baseadas em três pressupostos: escolha do nome neutro para o estudo de árvores; exemplos e contra-exemplos bem selecionados são suficientes para delegar a tarefa de definição; e necessidade de reinvestimento das definições construídas para estudar a sua valdiade e a sua operacionalidade. Com isso, são elaboradas atividades para que os estudantes possam construir definições.

Ferreira (2016) realizou uma abordagem didática que integra provas e demonstrações para ensinar o tópico quadriláteros em um curso de licenciatura em matemática. A metodologia utilizada foi a ED, apoiada em teorias como registros de representação semiótica, TSD e antropológica do didático. Um estudo preliminar revelou que as concepções dos alunos sobre provas e demonstrações eram influenciadas por livros didáticos. Durante a pesquisa, os alunos evoluíram de provas pragmáticas para provas conceituais, e as demonstrações passaram a cumprir funções de validação, explicação, sistematização e comunicação. Em resumo, a abordagem que combinou provas e demonstrações ajudou os alunos a reconstruir seu conhecimento sobre quadriláteros, provas e demonstrações.

MagalhÃes (2009) investigou se o uso de mapas conceituais promove o desenvolvimento de estratégias metacognitivas em estudantes de Ciência da Computação, especialmente aqueles que estão iniciando o curso. A pesquisa explorou como os estudantes usam estratégias metacognitivas ao criar mapas conceituais digitais para estudar funções matemáticas. A metodologia baseou-se na ED e utilizou a TSD como estrutura teórica, bem como os conceitos de metacognição e estudos de mapas conceituais. As atividades relacionadas ao conteúdo de funções lineares foram conduzidas em um ambiente computacional, enfatizando a investigação por parte dos alunos. A análise dos dados coletados mostrou que o uso de

mapas conceituais digitais, em conjunto com a TSD, permitiu que os alunos aplicassem estratégias metacognitivas na criação desses mapas. Os resultados sugerem que a metacognição é empregada durante a elaboração de mapas conceituais e que as características reflexivas e regulatórias proporcionadas pelas estratégias metacognitivas podem ter um impacto positivo no processo de aprendizagem.

Por sua vez, Silva (2015a) analisou como um ambiente de ação e reflexão, envolvendo a pré-análise, experimentação com alunos do Ensino Fundamental II, pós-análise e reflexões relacionadas a uma sequência didática sobre simetria ortogonal, afeta o conhecimento pedagógico de professores de Matemática nesse nível de ensino. A pesquisa visava responder à pergunta de como um ambiente de ação e reflexão nas Atividades Complementares pode influenciar o conhecimento dos professores sobre simetria ortogonal. A metodologia seguiu os princípios da ED e a TSD. A pesquisa também examinou as concepções dos alunos sobre simetria ortogonal, apresentando como resultados um ambiente de ação e reflexão na escola influenciado pelo conhecimento dos professores de Matemática, embora essa influência seja limitada. Durante a investigação, os professores avaliaram suas práticas de ensino e refletiram sobre seus métodos para entender seu impacto na aprendizagem dos alunos. Também foi observado que as concepções dos professores sobre simetria ortogonal podem estar relacionadas à forma como o conceito é apresentado nos livros didáticos.

Ainda para a área de ensino, destaca-se o livro de Artigue (2002) o qual retrata a tradição europeia da didática da Matemática, possibilitando o processo de construção dessa vertente francesa. Artigue (2014b) aborda a ED e a descrição de suas fases, permitindo uma melhor compreensão em tordo da metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho. Artigue, Haspekian e Corblin-Lenfant (2014), Brousseau (2008) abordam a TSD realizando um estudo da teoria de ensino, bem como as etapas de análise dos comportamentos dos estudantes, diante de uma situação-problema proposta.

Voltado para o objeto matemático, tem-se a dissertação de mestrado de Vieira (2020), a qual desenvolve um aprofundamento matemático e de ensino acerca da sequência de Padovan, enfatizando o processo de generalização e complexificação dos números dessa sequência. Assim, é possível aprofundar o estudo da generalização e complexificação dos números da sequência de Perrin, fundamentada na dissertação da autora e em outros trabalhos referenciados na pesquisa. Ademais, para as áreas de complexificação e generalização dessas sequências, tem-se os trabalhos de Orhan e Hamza (2019), Diskaya e Menken (2019), Sokhuma (2013), Mangueira, Vieira,

Alves e Catarino (2020), Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021a), Isbilir e Gurses (2021), Tasyurdu e Akpinar (2020), Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021b), com foco na forma matricial, relações n-dimensionais, hibridização, quatérnios, octônios e sedenios dessas duas sequências.

Para a investigação dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, apresenta-se a noção de tabuleiro e ladrilhamentos, definida por Spreafico (2014), estendendo a abordagem combinatória para sequências recorrentes. Tão logo, destacam-se os trabalhos de Koshy (2019), Koshy (2014), Koshy (2001), Craveiro (2004) e Benjamin e Quinn (2003b) onde foi possível estabelecer definições matemáticas acerca da interpretação combinatória de sequências, desenvolvendo o modelo combinatório de Fibonacci, Lucas, Jacobsthal e Pell. Acerca disso, são elaboradas definições matemáticas em prol do desenvolvimento dos modelos combinatórios das sequências tratadas como objeto de estudo matemático da presente pesquisa.

Ao tudo, as referências potencializadas servem como base para o desenvolvimento do campo epistêmico-matemático desta pesquisa. Foi possível elaborar definições, de modo a registrar a investigação matemática e evolutiva dos números da sequência de Padovan e Perrin, perante uma ED para o desenvolvimento, a *posteriori*, de situações didáticas de ensino fundamentadas na TSD.

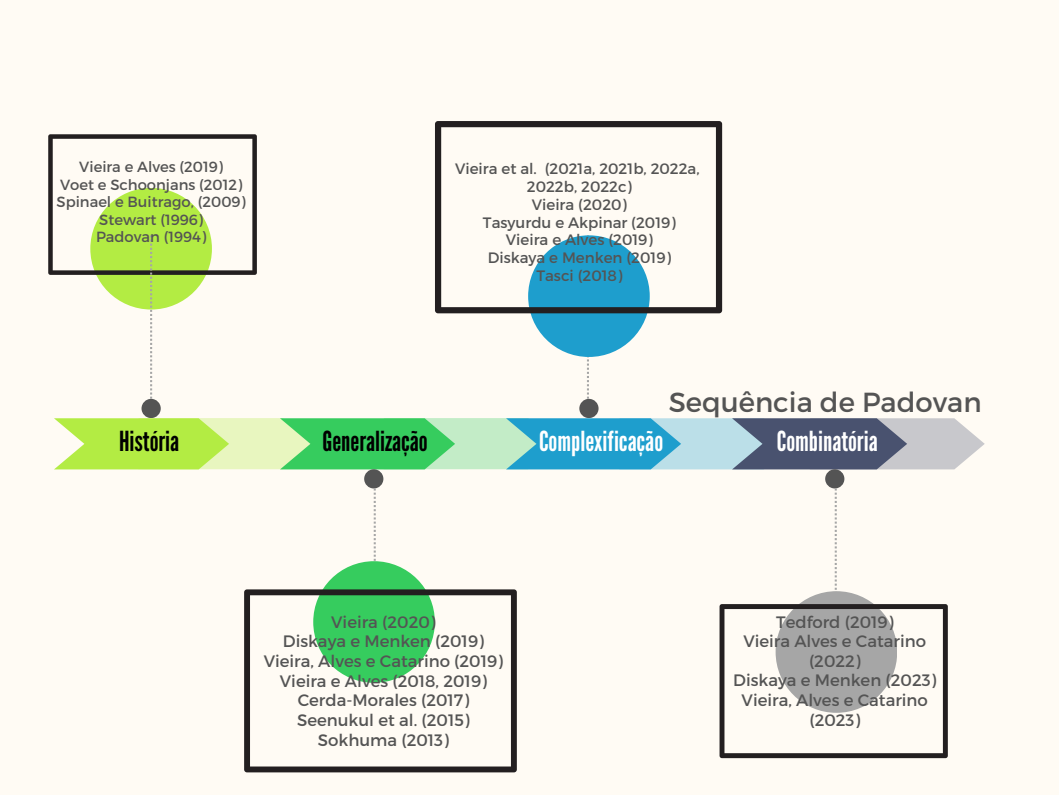
De modo a apresentar ao leitor uma melhor compreensão do procesos evolutivo dessas sequências, tem-se inicialmente a Figura 6, com os principais trabalhos contribuintes para o estudo evolutivo dos números da sequência de Padovan na área de Matemática.

A Figura 7, apresenta uma historiografia da sequência de Perrin, observando os principais trabalhos na área de Matemática, permitindo um aprofundamento dos números dessa sequência. De fato, pode-se observar a ausência da interpretação combinatória dessas duas sequências, apresentando trabalhos oriundos de pequenos recortes dessa pesquisa.

Desse modo, tem-se a Figura 8, em que retrata os pontos em destaque dessas duas sequências, iniciando com a história dos números dessa sequência e seguindo com a generalização, complexificação e abordagem combinatória. Por fim, tem-se o estudo na área de ensino e possíveis aplicações voltadas para o estudo dos números dessa sequência em cursos de formação inicial de professores de Matemática. Destaca-se que os retângulos em verde representam a abordagem das sequências para a área de ensino, de um modo geral. Já os retângulos de cor azul enfatizam a evolução dos números dessa sequência na área de Matemática.

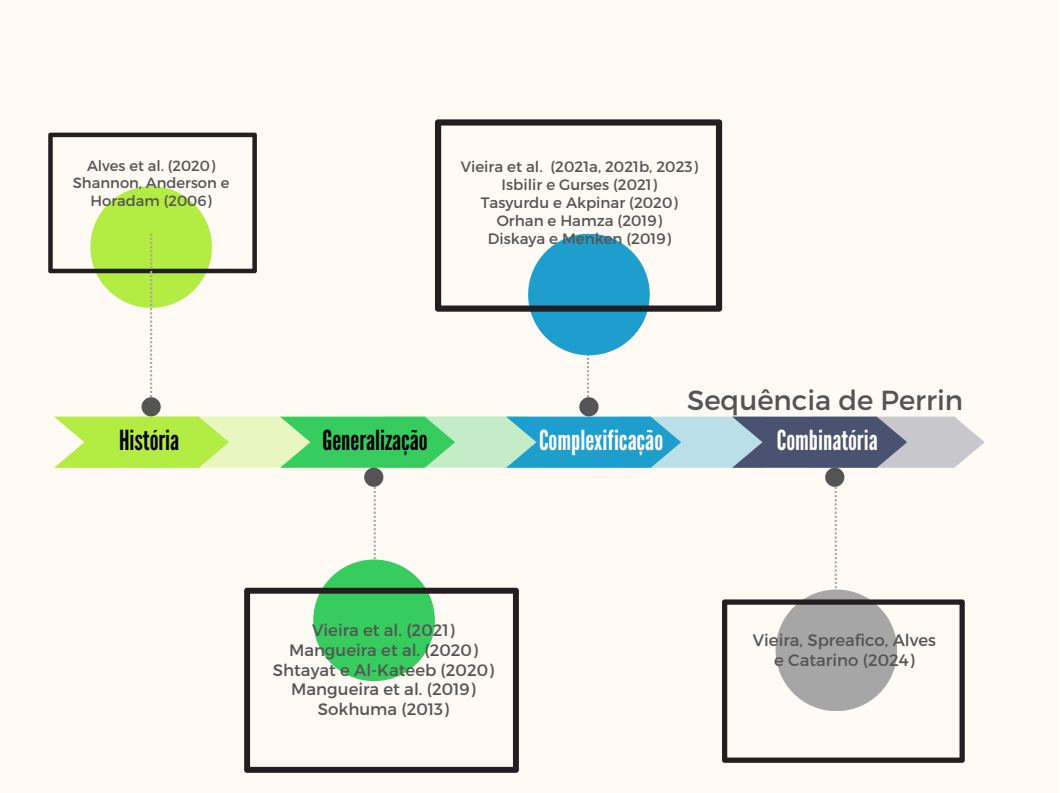
Tão logo, com o viés de descrever o contexto didático-cognitivo das sequências de

Figura 6 – Evolução da sequência de Padovan



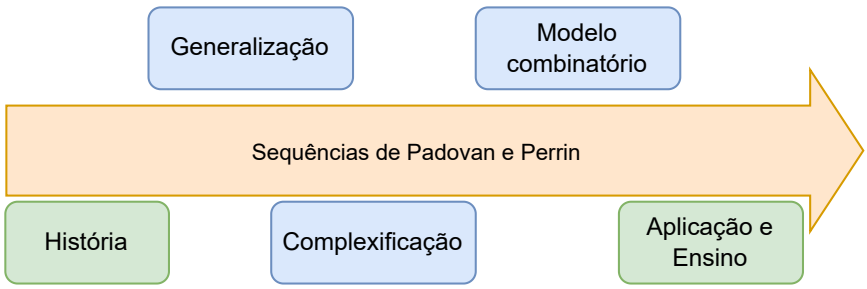
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 7 – Evolução da sequência de Perrin



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 8 – Evolução das sequências de Padovan e Perrin



Fonte: Elaborado pela autora.

Padovan e Perrin, define-se como local de aplicação desta pesquisa, após uma análise da matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE *campus* Fortaleza, a componente curricular de História da Matemática do referido curso de formação inicial de professores. Tão logo, a componente curricular abrange em sua matriz, os seguintes assuntos: conceito de número e os sistemas de numeração; desenvolvimento histórico da álgebra, geometria e aritmética nas diferentes épocas e civilizações; principais matemáticos da história e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática; História da Matemática no Brasil.

Desse modo, observou-se a presença do conteúdo de sequências recorrentes ao abordar, tendo como início dos estudos a sequência de Fibonacci. Não obstante, depara-se com a ausência do estudo de outras sequências semelhantes aos números da sequência de Fibonacci, ao realizar uma consulta em alguns livros de História da Matemática. Desse modo, tem-se a composição desses estudos da componente curricular, realizados por meio de artigos publicados em periódicos nacionais e internacionais, possuindo sua grande maioria, caráter na área de Matemática.

4.3 Engenharia didática

Estudos recentes da ED na França comprovam que a matemática está no centro da tradição didática francesam sendo muitos os fatores contribuintes para tal situação, destacando uma delas o engajamento dos matemáticos franceses diante de questões educacionais. Gispert (2014) afirma que esse engajamento já era visível durante a época da revolução francesa, observando o fato do matemático Condorcet presidir o Comitê de Instrução Pública, tendo a presença de matemáticos renomados, tais como Condorcet, Lagrange, Laplace, Monge e Legendre.

Tais pesquisadores tiveram papel importante, sendo este a busca pelo interesse pela Educação Matemática dos jovens. Por sua vez, teve a revisão do currículo, fato apoiado pelos matemáticos e desencadeando a produção de livros, palestras e entre outros materiais

voltados à Educação Matemática. Atualmente, os matemáticos continuam contribuindo em questões educacionais, seja de modo individual ou por meio de grupos e sociedades acadêmicas evidenciado pelo desempenho da Comissão Francesa de Educação Matemática.

Um outro fator importante nessa caminhada da Educação Matemática está presente nos Institutos de Investigação do Ensino da Matemática, sendo criado por meio de reivindicações da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público (Trouche, 2016). Consideradas de forma independentes, porém próximas dos departamentos de matemática, essas estruturas universitárias agregam matemáticos universitários, professores, formadores de professores, didáticos e historiadores da matemática que contribuem em grupos temáticos, desenvolvem pesquisas, formam professores a partir de atividades elaboradas e, produzem materiais didáticos. Tal estrutura influenciou o desenvolvimento da pesquisa didática francesa, sustentando relações institucionais e científicas entre didáticos e matemáticos. Também apoiou a forte sensibilidade da comunidade didática francesa para questões epistemológicas e históricas.

Com isso, a pesquisa didática conseguiu descobrir um meio natural, aproximando-se do ambiente do ensino fundamental e médio, e dos departamentos de matemática, construindo bases institucionais sólidas. Assim, os primeiros programas de doutorado foram criados em 1975 em Bordeaux, Paris e Estrasburgo, sendo criado posteriormente o Seminário Nacional de Didática da Matemática. Já em 1992, criou-se a Associação de Pesquisa em Educação Matemática, complementando o processo de institucionalização (Artigue, 2002).

A influência da ED em nossa pesquisa, possui o viés de explorar a tradição francesa da didática da Matemática, implementando a ED como metodologia de pesquisa. Desse modo, a ED, segundo CalderÓn e LeÓn (2012), apresenta uma correlação entre uma análise epistêmica e a implementação de uma estrutura didática. Os autores afirmam que a particularidade essencial desta metodologia de pesquisa é a análise fornecida durante o desenho das atividades (a *priori*) e a análise após a respetiva implementação (a *posteriori*).

Artigue, Douday, Moreno e Gómez (1995) caracterizam a ED como uma metodologia de realizações didáticas envolvendo a construção e execução de sequências de ensino para que possa realizar posteriormente uma análise dos resultados encontrados, conforme as fases definidas por tal metodologia no respectivo processo, sendo essas: Análise preliminar; Concepção e análise a *priori*; Experimentação; e, Análise a *posteriori* e validação. A validação pode ser realizada de forma interna ou externa, sendo a interna apoiada no contraste entre as análises a *priori* e a *posteriori*; já a validação externa realiza uma comparação entre grupos experimentais e de

controle.

Utilizada por diversos pesquisadores franceses e de demais países em Didática do Ensino de Matemática, a ED implementa os resultados da pesquisa na elaboração de estratégias pedagógicas e de materiais curriculares específicos no ensino da matemática. Nessa metodologia, tem-se que uma parte essencial do trabalho do professor é apresentar aos estudantes problemas cuja resolução envolvam o desenvolvimento da matemática (Artigue, 1988).

Oliveira (2015) afirma que a ED é uma proposta metodológica viável devido à sua consideração das peculiaridades da pesquisa, uma vez que ela se fundamenta no conhecimento prévio dos alunos e utiliza-o como ponto de partida para a construção de um conhecimento autêntico, consciente e verdadeiro.

Durante as análises preliminares e nas demais fases do projeto, é possível perceber a influência da TSD na metodologia de pesquisa da ED. Na fase das análises preliminares constata-se a inclusão sistemática do componente epistemológico. O desenho das tarefas e situações é realizado de forma particular, fornecendo importância perante a procura de situações que captem a essência epistemológica da matemática a aprender; para a otimização do potencial do meio para estudar aprendizagem autônoma dos alunos; e para a gestão dos processos de desconcentração e institucionalização (Artigue; Glorian, 1991). A ED tem sua base na TSD, cumprindo um duplo papel: servir como uma abordagem de produção para o ensino, embasada em resultados de pesquisa, e ao mesmo tempo, desempenhar o papel de uma metodologia de pesquisa (Ferreira, 2016).

A ED como metodologia de pesquisa, no entanto, tem se desenvolvido de forma contínua desde o início dos anos 80, realizando as devidas adaptações em pesquisas em todos os níveis educacionais. Desse modo, permite que os pesquisadores possam explorar o potencial de projetos educacionais que não são possíveis de serem observados em salas de aula comuns, desenhando um papel particular na identificação e no estudo do potencial de aprendizado e ensino de ambientes digitais (Laborde, 1995).

Segundo Artigue e Glorian (1991), a ED surgiu na didática da matemática na França no início dos anos 80, buscando definir e rotular uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro. Enquanto os engenheiros baseiam seu trabalho no conhecimento científico de sua área e consentem o controle da teoria, são obrigados a trabalhar com objetos mais complexos do que os objetos refinados da ciência. Assim, é necessário gerenciar problemas dos quais a ciência não quer ou ainda não é capaz de enfrentar. Essa definição foi compreendida

como uma alternativa de abordar duas questões cruciais na época, sendo essas: a relação entre pesquisa e ação no sistema de ensino; e o lugar atribuído nas metodologias de investigação às "performances didáticas" nas aulas.

Tão logo, Silva (2019) relata nas três possibilidades de aplicação da ED, sendo essas: como metodologia de pesquisa; pressuposto para atuação em sala de aula, elaborando sequências didáticas, analisando-as e explicando-as e; conjungando as duas alternativas. Diante disso, a presente pesquisa utiliza a ED como metodologia de pesquisa, como também para produção/aplicação no ensino de Matemática em sala de aula.

De fato, a ED teve a sua origem como sendo uma metodologia de pesquisa, possuindo o seu desenvolvimento baseado em vivências em sala de aula na forma de sequências de aulas, informadas pela teoria e colocando à prova ideias teóricas. Naquela época, o que predominava na comunidade didática francesa era a TSD, surgida no final da década de 60, tornando-a como suporte natural da ED. A sua perspetiva sistêmica, as suas construções e valores moldaram a ED, tornando-a progressivamente como uma metodologia de pesquisa privilegiada nesta comunidade. Na verdade, seria mais adequado dizer que as construções teóricas e a ED se desenvolveram de forma conjunta ao longo da década de 180. Assim, durante a aplicação, houve a institucionalização da ED como metodologia de pesquisa (Artigue, 1988).

À vista disso, essa pesquisa apresenta os resultados de cada uma das fases da ED, onde primeiro foi realizada uma análise epistêmica do desenvolvimento evolutivo das sequências de Padovan e Perrin. Em segundo lugar, uma concepção e análise a *priori*, baseada em um rastreamento do tipo documental derivado do estado da arte acerca do estudo de novas definições matemáticas acerca da generalização, complexificação e do modelo combinatório dessas sequências, com foco na interpretação da abordagem combinatória desses números.

Posteriormente, com referência na análise epistemológica e na concepção e análise a *priori*, estruturou-se, elaborou-se e aplicou-se um conjunto de situações didáticas de ensino, permitindo contribuir para o processo de ensino associado ao conceito das sequências de Padovan e Perrin. Em seguida, foram comparados os dados previstos com os dados obtidos, identificando e discutindo os progressos realizados pelos participantes diante dos modelos matemáticos propostos (na fase da Concepção e Análise a *priori* de cada situação-problema).

Segundo Artigue, Haspekian e Corblin-Lenfant (2014):

> It is a methodology which is structured around a phase of preliminary analysis combining epistemological, cognitive, and didactical perspectives, and aiming at the understanding of the conditions and constraints to which the didactical

> system considered is submitted, a phase of design and a priori analysis of situations reflecting its optimization ambition; and, after the implementation, a phase of a posteriori analysis and validation (Artigue, 2014, p. 50) [1].

Segundo Artigue (2014b) afirma que:

> A análise didática tem geralmente uma dimensão cognitiva substancial, mas esta dimensão cognitiva é apenas uma parte do quadro global, mesmo que se pretenda o desenvolvimento de uma estratégia didática que permita aos estudantes aprender melhor alguma parte da matemática. Do lado prático, tais metodologias foram julgadas necessárias para o estabelecimento de relações produtivas entre pesquisa e prática, pois permitem que os pesquisadores considerem os sistemas didáticos em seu funcionamento concreto, e prestem a devida atenção aos diferentes constrangimentos e forças que atuam sobre eles, que poderiam ser negligenciado caso contrário. A engenharia didática surgiu assim como uma metodologia de pesquisa e desenvolvimento baseada em realizações de sala de aula na forma de sequências de aulas, informadas pela teoria e colocando à prova ideias teóricas (Artigue, 2014b, p. 469).

Uma característica fundamental da ED utilizada como metodologia de pesquisa é que, ao contrário do uso tradicional de realizações em sala de aula na pesquisa educacional, essa não segue o paradigma da validação baseado na comparação dos grupos de controle e experimentais. A sua validação interna fundamenta-se na comparação entre as análises a *priori* e a *posteriori* das situações didáticas desenvolvidas. No comportamento da ED, a pesquisa em Educação Matemática (didática da matemática) é vista como um campo científico próprio, cujo interesse é o estudo da disseminação intencional do conhecimento matemático por meio de situações didáticas. O que se deve entender é em relação ao funcionamento de tais situações e fenômenos didáticos associados, exigindo um estudo aprofundado do seu funcionamento. A forma de validação das hipóteses engajadas na fase de concepção da ED não pode ser, portanto, uma questão de comparação entre o experimento e grupos de controle (Artigue, 1988).

Assim, tem-se uma breve discussão acerca das fases da ED, iniciando com as análises preliminares. As análises preliminares são a base para a fase de concepção do processo, envolvendo diferentes dimensões, e especialmente as três seguintes:

– Análise epistemológica do conteúdo em questão, abordando a parte histórica. Essa análise auxilia os pesquisadores a fixar os objetivos previstos, como também a identificação dos possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Essa análise ainda fornece suporte perante as buscas de situações matemáticas representativas do conhecimento

[1] Traduzido pela autora como: É uma metodologia que se estrutura em torno de uma fase de análise preliminar que combina epistemologia, cognição, e perspectivas didáticas, e visando a compreensão das condições e constrangimentos a que está submetido o sistema didático considerado, uma fase de concepção e análise a *priori* de situações que reflitam a sua ambição de otimização; e, após a implementação, uma fase de análise e validação a *posteriori* (Artigue, 2014, p. 50).

almejado, denominada pela TSD de situação fundamental. Uma situação fundamental é tida como situações problemáticas para a resolução, das quais este conhecimento é necessário. A análise epistemológica auxilia os pesquisadores a conquistar a posição necessária em relação ao ambiente educacional em que estão inseridos.

– Análise institucional, identificando as características do contexto em que se insere a ED, as condições e constrangimentos que são enfrentados. Essas condições e constrangimentos podem situar-se em diferentes níveis, chamado de hierarquia dos níveis de co-determinação (Chevallard, 2002). Esses podem ainda estar associadas a: escolhas curriculares, aos conteúdos referente as práticas pedagógicas associadas, as características curriculares mais gerais, ao ensino da componente curricular, aos recursos (tecnológicos) acessíveis, às práticas avaliativas, à organização escolar, às características dos estudantes e professores envolvidos, à forma como a escola se relaciona com o seu ambiente e entre outros. Dependendo dos objetivos precisos e do contexto da investigação, a importância atribuída a estes diferentes níveis podem sofrer variações.
– Análise didática, cujo objetivo é construir o que a pesquisa tem a oferecer referente ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo em questão e, se essa é susceptível de orientar o *design*.

Segundo Artigue (2014a):

> Preliminary analyses usually include three main dimensions: an epistemological analysis of the mathematical content at stake, an analysis of the conditions and constraints that the DE will face, and an analysis of what educational research has to offer for supporting the design (Artigue, 2014a, p. 160) [2].

As três dimensões que organizam a fase das análises preliminares refletem a perspectiva de organização da ED como metodologia de pesquisa, onde cada uma delas possui as suas especificidades e necessidades metodológicas. A análise epistemológica, muitas vezes, envolve o uso de fontes históricas e não apenas fontes secundárias. Já a análise institucional, geralmente, inclui uma dimensão histórica. Assim, conforme evidenciado pela teoria da transposição didática (Bosch; GascÓn, 2006), as organizações e escolhas curriculares são resultado de um longo processo histórico, não podendo ser compreendidos apenas pela análise dos currículos atuais, documentos oficiais e livros didáticos. Para ocorrer tal compreensão é

[2] Traduzido pela autora como: As análises preliminares geralmente incluem três Dimensões principais: uma análise epistemológica da o conteúdo matemático em jogo, uma análise as condições e condicionantes que o ED irá enfrentar, e uma análise do que a pesquisa educacional tem a oferecer para apoiar o *design* (Artigue, 2014a, p. 160).

necessário deixar claro a força das restrições enfrentadas, além do modo como algumas delas podem ser movidas no projeto.

Por fim, na análise didática existe, geralmente, uma dimensão cognitiva substancial, onde esta dimensão cognitiva representa apenas uma parte do quadro global, mesmo que haja o objetivo de desenvolver uma estratégia didática com o viés de permitir aos estudantes aprender melhor algum conteúdo específico da matemática. Deve-se ressaltar também que, de acordo com os objetivos da pesquisa, o que exatamente se investiga nessas dimensões e a respectiva importância atribuída a cada uma delas pode variar de forma substancial (Artigue, 1993).

O desenvolvimento de uma revisão bibliográfica é realizada nas análises preliminares, enfatizando as condições e os contextos existentes nos diversos níveis de ensino e no ambiente o qual a pesquisa está inserida. Além disso, é feita uma análise geral referente aos aspectos históricos-epistemológicos do conteúdo que será investigado, concepções, dificuldades e obstáculos encontrados pelos estudantes nesse contexto de ensino.

Uma fase crucial dessa metodologia é constituída na concepção e análise a *priori*, onde a partir das análises preliminares realizadas, tem-se a definição do local onde as hipóteses de pesquisa são explicitadas e engajadas na concepção de situações didáticas, sendo construídas teorias e postas à prova. Durante a concepção uma série de escolhas devem ser realizadas, situadas em diferentes níveis. Algumas dessas escolhas conduzem o projeto de forma global (macro-escolhas) e outras situam-se ao nível de uma situação particular (micro-escolhas). Essas escolhas determinam as variáveis didáticas, portanto, tem-se as variáveis macrodidáticas (macro-escolhas) e microdidáticas (micro-escolhas), condicionando o meio e, portanto, as interações entre os estudantes e o conhecimento; as interações entre os estudantes e entre os estudantes e o professor; as oportunidades exatas que os estudantes possuem para aprender, como e o que podem aprender.

Artigue, Douday, Moreno e Gómez (1995) afirmam que

> Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería. Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase (Artigue, 1995, p. 42) [3].

Seguindo com os fundamentos teóricos da ED, durante a seleção destas escolhas deve ser dada a devida atenção à pertinência epistemológica dos problemas apresentados e à

[3] Traduzido pela autora como: As variáveis macrodidáticas ou globais, são relativas à organização global da engenharia. E as variáveis microdidáticas ou locais, são relativas à organização local da engenharia, ou seja, à organização de uma sequência ou de uma fase. (Artigue, 1995, p. 42).

responsabilidade matemática atribuída aos estudantes.

Na concepção e análise a *priori* são enfatizadas as diferentes escolhas e a forma como elas se relacionam com as hipóteses de pesquisa e análises preliminares. Para cada situação, são identificadas as principais variáveis didáticas, ou seja, aquelas que influenciam a eficiência e o custo das possíveis estratégias desenvolvidas pelos estudantes, e as suas possíveis dinâmicas. Essas variáveis podem estar ligadas às características das tarefas propostas aos estudantes, como também podem ser vinculadas aos recursos fornecidos aos estudantes para resolver essas tarefas (que em teoria correspondem ao meio material da situação) e a maneira como a interação dos estudantes com o meio é organizada socialmente (Margolinas, 2012).

Artigue (2014a) afirma que:

> In the second phase, design and a priori analysis, research hypotheses are engaged in the process. Design requires a number of choices, from global to local. They determine didactic variables, which condition the interactions between students and knowledge, between students and between students and teachers, thus the opportunities that students have to learn (Artigue, 2014a, p. 160) [4].

A partir dessas características são realizadas conjecturas sobre o possível desenvolvimento da situação, a interação dos estudantes com o meio, as estratégias dos estudantes e sua evolução. Além disso é possível que haja a partilha das responsabilidades matemáticas entre o professor e os estudantes. É importante ressaltar que tais conjecturas não se referem aos indivíduos, e sim a um estudante genérico e epistêmico que participa da situação com algum suposto conhecimento prévio e acredita estar pronto para desempenhar o papel que a situação lhe propõe. Obviamente que a aplicação envolverá os estudantes com suas especificidades pessoais, relações e história, porém o objetivo da concepção e análise a *priori* não é antecipar o comportamento de cada estudante, em particular, e o seu respectivo benefício da situação. Na verdade, a intenção é apresentar o que a situação a *priori* pode oferecer em termos de aprendizagem no contexto em questão, elaborando referência com as quais as realizações em sala de aula serão constatadas.

Como destacado em diversos estudos sobre a Engenharia Didática, a validação interna é de extrema importância e implica confrontar os dados coletados tanto na parte empírica quanto na não empírica, levando em consideração as variáveis micro e macro didáticas.

[4] Traduzido pela autora como: Na segunda fase, concepção e análise a *priori*, as hipóteses de pesquisa estão envolvidas no processo. O *design* requer uma série de escolhas, do global ao local. Eles determinam variáveis didáticas, que condicionam as interações entre alunos e conhecimento, entre alunos e entre alunos e professores, assim, as oportunidades que os alunos têm que aprender (Artigue, 2014a, p. 160).

Ainda nesta fase, o professor adota uma abordagem sistêmica para visualizar o processo de ensino como o ponto de equilíbrio em um sistema dinâmico. Desse modo, pretende-se obter uma compreensão mais aprofundada e eficaz das possibilidades disponíveis. Essa estabilidade é examinada para entender suas razões em termos de restrições. Ao modificar pelo menos algumas dessas restrições, é possível esperar uma estabilização do sistema em um ponto de equilíbrio considerado mais satisfatório. Uma análise inadequada das restrições pode levar ao insucesso ou, mais provavelmente, a um ponto de operação mais satisfatório, que pode parecer viável apenas porque corresponde a um equilíbrio mantido.

> Such an analysis must distinguish between different types of constraint. Classically speaking, three types of constraint can be distinguished: 1. constraints of an epistemological nature linked to the mathematical knowledge at stake, to the characteristics of its development, and its current way of functioning; 2. constraints of a cognitive nature linked to the population targeted by teaching; 3. constraints of a didactical nature linked to the institutional functioning of the teaching, especially in the field concerned and in connected fields. (Artigue, 1993, p. 30) [5].

A identificação e análise das restrições resultam em uma distinção adicional entre restrições consideradas externas, em grande medida inevitáveis, exceto em casos de medidas excepcionais, e restrições que parecem ser limitações devido à internalização pelos participantes da relação didática, mas não têm mais validade no sistema atual. Essas últimas podem ser qualificadas como internas.

Segundo Ingar (2014), ainda na primeira fase da ED, deve ser considerados os tópicos:

> Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
> Analisar o que poderia estar em jogo nessa situação para o aluno em função das possibilidades de ação, seleção, controle e validação de que dispõe durante a experimentação;
> Prever os comportamentos possíveis dos alunos e procurar mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos e assumir, particularmente, que os comportamentos esperados, se intervierem, sejam resultado da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem. (Ingar, 2014, p. 77)

Durante a fase de experimentação, ocorre a coleta dos dados para análise a *posteriori*. A natureza desses dados extraídos possui dependência com os objetivos estabelecidos da ED, das

[5] Traduzido pela autora como: Tal análise deve distinguir entre diferentes tipos de restrições. Classicamente falando, três tipos de restrições podem ser distinguidos: 1. constrangimentos de natureza epistemológica ligados ao conhecimento matemático em causa, às características do seu desenvolvimento e ao seu modo de funcionamento atual; 2. constrangimentos de natureza cognitiva ligados à população alvo do ensino; 3. Constrangimentos de natureza didática ligados ao funcionamento institucional do ensino, especialmente na área em causa e em áreas conexas. (Artigue, 1993, p. 30).

hipóteses nela postas à prova e das conjecturas realizadas na concepção e análise a *priori*. No entanto, é dada particular atenção à coleta dos dados, permitindo ao investigador compreender a interação dos estudantes com o meio e, até que ponto essa interação suporta a sua passagem autônoma das estratégias iniciais para as estratégias visadas. Além disso, é realizada uma análise dos processos de desconcentração e institucionalização.

Esses dados coletados englobam as produções dos estudantes, incluindo arquivos de impressos ou digitais, quando a tecnologia é utilizada; obervações do pesquisador; gravações de áudios e vídeos. Os dados, recolhidos durante a experimentação podem ser complementados por dados adicionais (questionários, entrevistas a alunos e docentes, testes) permitindo uma melhor avaliação e análise dos resultados da ED.

Artigue (2014a) afirma ainda sobre a experimentação que:

> During the phase of realization, data are collected for the analysis a posteriori. The nature of these data depends on the precise goals of the DE, the hypotheses tested, and the conjectures made in the a priori analysis. The realization can lead to some adaptation of the design in itinere, especially when the DE is of substantial size. These adaptations are documented and taken into account in the a posteriori analysis (Artigue, 2014a, p. 160) [6].

De fato, ressalta-se que na experimentação, os pesquisadores estão na posição de observadores. Destaca-se ainda que durante a aplicação, existem muitos casos que ocorrem adaptações do projeto na fase da experimentação, principalmente quando o ED é de grande porte. Nesse caso, as adaptações devem ser documentadas juntamente com as suas respectivas justificativas e, levadas em consideração quando for realizada a análise a *posteriori*.

Na fase da análise a *posteriori* ocorre a organização dos dados coletados, sendo esses confrontados com os dados da fase da concepção e análise *priori*. Assim, são realizados alguns questionamentos: até que ponto os dados coletados durante a fase de experimentação suportam a concepção e análise a *priori*? quais as convergências e divergências significativas e, como essas podem ser interpretadas? o que ocorreu que não foi previsto e, como pode isso ser interpretado? Por meio dessa conexão entre a concepção e análise a *priori* e a análise *posteriori*, tem-se a validação das hipóteses subjacentes a estrutura da pesquisa. É importante ter ciência que sempre existem diferenças entre a referência fornecida pela concepção e análise a *priori* e a contingência analisada na análise a *posteriori*. Conforme observado, a concepção e análise a *priori* aborda os

[6] Traduzido pela autora como: Durante a fase de realização, os dados são coletados para análise a *posteriori*. A natureza desses dados depende dos objetivos precisos do ED, das hipóteses testadas e das conjecturas feitas na concepção e análise a *priori*. A realização pode levar a alguma adaptação do projeto em curso, especialmente quando o ED é de tamanho substancial. Essas adaptações são documentadas e levadas em consideração na análise a *posteriori* (Artigue, 2014a, p. 160).

estudantes de forma genérica e epistêmicos. Assim, a validação dessas hipóteses ao desenho não implica numa conferência realizada de forma perfeita entre as duas análises.

Artigue (2014a) relatam ainda sobre a validação que:

> The validation of the hypotheses underlying the design does not, thus impose perfect match between the two analyses. Moreover, the validation of the research hypotheses may require the collection of complementary data to those collected during the classroom, especially for appreciating the learning outcomes of the process. Statistical tools can be used, but what is essential is that validation is internal, not in terms of external comparison between control and experimental groups (Artigue, 2014a, p. 161) [7].

A validação da pesquisa, como afirma Laborde (1997, p. 105) ocorre como "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes". Alves (2016) discute que "uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários".

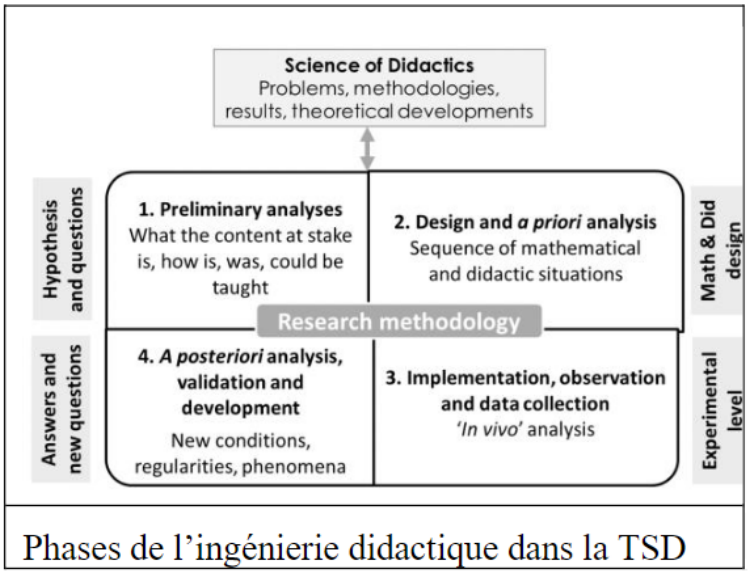
Catarino (2020) enfatiza que na ED a validação é essencialmente interna, realizando um confronto entre duas fases dessa metodologia, dados previstos (concepção e análise a *priori*) com os dados coletados. Dessa forma não existe a validação externa, baseado na comparação entre os grupos experimentais e de controle. As análises realizadas possuem natureza qualitativa, mesmo no caso em que pesquisadores utilizam ferramentas estatísticas para auxiliar nesse processo. Fundamentado na fundamentação teórica da ED, o que o pesquisador deve observar é a dinâmica de um sistema complexo, e o faz por meio da comparação da dinâmica observada com a referência fornecida pela concepção e análise a *priori*, tentando assim dar sentido às semelhanças e diferenças. As ferramentas que forem utilizadas, vão depender das questões de pesquisa e dos dados coletados.

Artigue (2020) relata que a ED fundamentada na TSD e o ensino de determinado objeto matemático, ganha destaque para a abordagem icônica de Brousseau. Desse modo, a abordagem de Brousseau é emblemática nesse contexto porque ele propõe uma teoria sobre o ensino da matemática, enfatizando a importância de considerar as situações concretas e os instrumentos utilizados na prática, visando promover uma compreensão mais profunda dos

[7] Traduzido pela autora como: A validação das hipóteses subjacentes ao *design* não impõe, portanto, uma correspondência perfeita entre as duas análises. Além disso, a validação das hipóteses de pesquisa pode exigir a coleta de dados complementares aos coletados em sala de aula, especialmente para a apreciação dos resultados de aprendizagem do processo. As ferramentas estatísticas podem ser usadas, mas o essencial é que a validação seja interna, não em termos de comparação externa entre os grupos controle e experimental (Artigue, 2014a, p. 161).

conceitos pelos alunos. Portanto, como apresentada na Figura 9 a ED ancorada na TSD refere-se a uma abordagem de ensino que considera o contexto situado de aprendizagem e valoriza a compreensão dos conceitos matemáticos por meio de práticas pedagógicas que se baseiam nas ideias propostas por Brousseau.

Figura 9 – Fases da metodologia



Fonte: Artigue (2020).

De fato, essa metodologia evoluiu ao longo dos anos, sendo influenciada pela evolução global da área, como também pela evolução tecnológica. De um modo generalista, os pesquisadores abordam os dados em diferentes escalas de análises. Essas escalas, cada vez mais incluem análises minuciosas, considerando a multimodalidade dos recursos e tecnologias utilizados por estudantes e professores hodiernamente. Pode ainda acrescentar que, a validação das hipóteses de investigação é um combinado entre a análise dos dados coletados durante a aplicação (experimentação) e dos dados complementares.

Por fim, Catarino (2020) realiza um estudo, fundamentado em Godino, Rivas, Arteaga, Lasa e Wilhelmi (2014), em que apresenta as peculiaridades da presente metodologia de pesquisa (ED), sendo essas: necessidade de uma teoria de ensino com basilar explícito, a TSD; importância de algumas questões epistemológicas, bem como o método de validação ser dado, principalmente, de forma interna, confrontando a fase da concepção e análise a *priori* com a fase da análise a *posteriori*.

4.4 Teoria das situações didáticas

Com referência em pesquisas francesas acerca da Didática da Matemática, observam-se dois elementos teóricos não independentes, porém distintos que remetem-se à preparação da Matemática para os estudantes, sendo esses: a teoria da transposição didática, desenvolvida por Chevallard (2002) na década de 80; e a TSD, desenvolvida por Brousseau (1986) na década de 70.

A TSD começou a ser desenvolvida na década de 60 por Brousseau, liderando e prosseguindo com os estudos e desenvolvimento desde então. Alguns aspectos importantes do desenvolvimento dessa teoria foram motivados pelo crescente investimento da TSD diante de estudos de salas de aula, e pelas contribuições de muitos pesquisadores de forma mundial.

Considerada com uma teoria cultivada, a TSD, possui contribuições de outros estudiosos. Assim, pesquisadores compartilham com o criador, a convicção de que a Educação Matemática necessita desenvolver suas próprias teorias e não apenas adaptar outras teorias já desenvolvidas (Sriraman; English, 2010). Essa teoria considera o processo de ensino em Matemática com referência nas três características: a natureza sistêmica do ensino e da aprendizagem; a epistemologia do conhecimento matemático; e a visão da aprendizagem como uma combinação de adaptação. Essas características determinam as perguntas que a TSD tenta responder, bem como as metodologias que a privilegiam (Brousseau, 1986).

Desde o início da sua criação, a TSD utiliza uma perspectiva sistêmica, fornecendo à Didática da Matemática como um estudo das condições para a disseminação e apropriação do conhecimento matemático por meio das instituições de ensino. Tal perspectiva sistêmica faz referência à organização da teoria acerca da ideia de situação, sendo uma situação considerada um sistema. Um sistema, segundo Brousseau, é "o conjunto de circunstâncias em que o aluno se encontra, as relações que o unem com seu meio, o conjunto de 'dados' que caracterizam uma ação ou uma evolução" Brousseau (2002, p. 214). Existe ainda o interesse presente na TSD por situações didáticas, ou seja, situações pensadas e utilizadas com determinados objetivos de ensino. Brousseau (1986) distingue ainda duas perspectivas possíveis sobre as situações didáticas: uma representando a forma como o ambiente do estudante é organizado e conduzido pelo professor; e a outra de uma forma mais ampla, incluindo o professor e o sistema educacional.

Uma característica importante existente na TSD é a relevância em relação à Matemática e ao seu estudo epistemológico, sendo proferida de formas distintas, destacando a noção de obstáculo epistemológico e de situação fundamental. Ainda segundo Ouvrier-Buffet

(2003)

> Rappelons que le concept de situation fondamentale repose sur la troisième hypothèse épistémologique de la théorie des situations : il existe pour tout savoir mathématique une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situations adidactiques qui en préserve le sens. Cette famille de situations sera ainsi appelée situation fondamentale. Savoir construire une définition est une compétence, et une compétence est une connaissance (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 13). [8]

Os obstáculos epistemológicos definem-se como formas de conhecimento considerados relevantes e bem sucedidos em contextos particulares, além dos contextos escolares, porém em determinado momento tornaram-se falsos ou inadequados (Brousseau, 2002). Esses estudos tiveram como referência Bachelard, em que descreveu uma lista de obstáculos de natureza epistemológica (Rodrigues; Grubba, 2012). A ideia de obstáculo vai sendo formada e modificada conforme acontece o processo de ensino, ampliando para além do campo da epistemologia, para as áreas da didática, psicologia e entre outras.

De fato, observa-se a noção de obstáculo como sendo fundamental para a busca do conhecimento tanto para a epistemologia quanto para o aprendizado ou ensino.

Uma situação fundamental é uma situação matemática, ou um conjunto delas, em que o conceito é constituído como uma solução ótima. Essa análise epistemológica conectada ao conhecimento e às situações matemáticas, constitui a teoria das situações matemáticas, sendo esta um primeiro nível de modelagem e análise em TSD. O segundo nível são as situações didáticas (Brousseau, 1982).

Esse tipo de situação, sengundo Brousseau (2002), proporcionam a construção do conhecimento amparado numa epistemologia científica, sendo os valores atribuídos às variáveis didáticas capazes de gerir situações que representam o conjunto dos saberes em questão.

Brousseau (2002) afirma ainda que

> Each item of knowledge can be characterized by a (or some) adidactical situation(s) which preserve(s) meaning; we shall call this a fundamental situation. But the student cannot solve any adidactical situation immediately; the teacher contrives one which the student can handle. These adidactical situations arranged with didactical purpose determine the knowledge taught at a given moment and the particular meaning that this knowledge is going to have

[8] Traduzido pela autora como: Recordemos que o conceito de situação fundamental se baseia na terceira hipótese epistemológica da teoria das situações: para todo conhecimento matemático existe uma família de situações capazes de lhe dar um significado correto. Cada conhecimento pode ser caracterizado por uma (ou mais) situações didáticas que preservam seu significado. Esta família de situações será então chamada de situação fundamental. Saber como construir uma definição é habilidade, e uma habilidade é conhecimento (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 13).

> because of the restrictions and deformations thus brought to the fundamental situation (Brousseau, 2002, p. 30) [9].

Assim, um conhecimento matemático pode ser modelado por meio de uma situação fundamental, ou um conjunto desses, preservando e devolvendo o sentido desse conhecimento. A situação fundamental representa o saber e as distintas soluções para o problema por meio do jogo com referência nas condições de cada caso, fornecendo assim um boa contribuição para o conhecimento.

Pode-se destacar ainda que as situações de ação, formulação e validação são idealizadas por uma situação fundamental, em que segundo Almouloud (2010)

> Cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos, uma situação adidática que preserva seu sentido e que é chamada de situação fundamental. Ela determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas em seu processo de organização e reorganização (Almouloud, 2010, p. 34).

Diante dessa perspectiva, vale destacar a noção de situação de devolução, em que o docente fornece ao estudante uma parte da responsabilidade da aprendizagem, provocando interações para que o sujeito possa desenvolver autonomia durante a situação proposta (Almouloud, 2016).

Segundo Margolinas (2002) a construção da situação fundamental, engloba a análise epistemológica do conhecimento e a estruturação do meio de acordo com determinada situação para que haja compreensão dos estudantes e professores em sala de aula.

De fato, as situações contidas na situação fundamental são pensadas e propostas pelo professor, apesar do estudante ter consciência de que essas situações envolvem exercícios e problemas para que os sujeitos possam adquirir um determinado conhecimento, não distinguindo o caráter didático e adidático. Para Brousseau (1986), relata que o professor auxiliar o estudante no que diz respeito a se livrar dos artifícios didáticos contidos numa situação, para assim ser possível aprender o conhecimento pessoal e objetivo.

Porém, Brousseau (2008) declara que uma situação fundamental não é a mais eficiente e nem representa uma situação ideal de ensino (a *priori*), visto que sua relevância

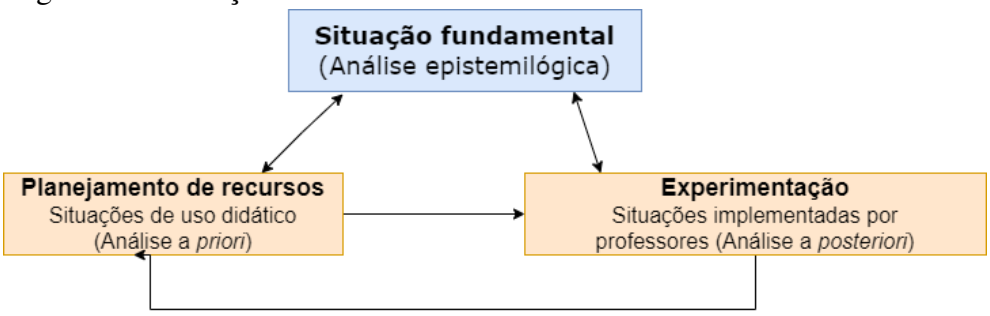
[9] Traduzido pela autora como: Cada conhecimento pode ser caracterizado por uma (ou algumas) situação(ões) didática(s) que preserva(m) o(s) significado(s); chamaremos isso de situação fundamental. Mas o aluno não consegue resolver nenhuma situação adidática imediatamente; o professor inventa um que o aluno pode manusear. Essas situações adidáticas dispostas com finalidade didática determinam o conhecimento ensinado em um determinado momento e o significado particular que esse conhecimento vai ter por causa das restrições e deformações assim trazidas para a situação fundamental (Brousseau, 2002, p. 30).

é verificada em função de inúmeros fatores externos. Desse modo, ao modelar as situações didáticas, tem-se o propósito de detectar os elementos que possam ser modificados para assim alcançar resultados diferentes aos que foram adquiridos na situação original, tendo assim a situação didática fundamental. Assim, o professor assume o papel de enunciar e promover essa delegação de responsabilidade, estimulando os sujeitos a ter o problema como um desafio para que possa ser resolvido. No entanto, os estudantes devem investigar as resoluções, verificando estratégias para que possam resolver a atividade proposta e assim iniciar o processo de aprendizagem.

A Figura 10 retrata a construção da situação fundamental por meio do estudo epistemológico do conceito matemático. Assim, é fornecido um modelo teórico podendo ser utilizado para pojetar situações para o recurso.

O primeiro passo consiste na construção de uma situação fundamental por meio de um estudo epistemológico do conceito matemático. Isto fornece um modelo teórico que pode ser usado como referência para projetar situações para o recurso. Tal como na maioria dos estudos de investigação baseados em design em educação matemática. Nas etapas de *design* de recursos e experimentação são apresentadas as idas e voltas dentro dessas fases, de modo a produzir um recurso utilizável para os professores

Figura 10 – Situação Fundamental



Fonte: Adaptado de Tempier (2016).

Diante disso, as atividades propostas e aplicadas nessa pesquisa são modeladas com referência na noção de situação didática fundamental, representando o saber e as distintas soluções para o problema por meio do jogo fundamentada nas condições de cada caso, fornecendo assim um boa contribuição para o conhecimento.

Outra característica importante na TSD com a epistemologia é o fato do conhecimento Matemático ser algo que permite agir sobre o meio o qual está inserido, porém o poder pragmático da Matemática está altamente dependente da linguagem específica à qual ela

desenvolve e a maneira como é validada. A presente característica é refletida na TSD por meio da distinção entre três tipos particulares de situações: situação de ação, situação de formulação e situação de validação.

A terceira característica importante refere-se à dimensão cognitiva dos estudantes, combinada com os processos de adaptação e socialização. No que diz respeito à adaptação, Brousseau (2002) relata que o estudante aprende quando ocorre uma adaptação do meio em que ele está inserido, pois esse gera contradições, dificuldades e desequilíbrios para a sua aprendizagem.

Porém, é importante destacar que apenas a adaptação não é suficiente. É necessário que haja uma socialização, para que possam vincular as construções dos estudantes com formas de conhecimento socialmente compartilhadas, culturalmente incorporadas e institucionalmente legitimadas. Essa mudança requer a intervenção didática do professor, podendo ser alcançada de diversas maneiras (Brousseau, 1982). Com isso, pode-se perceber que a construção da TSD considera esses dois tipos de processos: adaptação independente por meio das noções de situação adidática e meio, socialização por meio das noções de situação didática e contrato didático, e as relações entre esses processos por meio das noções duplas de devolução e institucionalização.

Os questionamentos levantados pela TSD consideram o funcionamento dos sistemas didáticos, identificando as regularidades e elaboração diante dos fenômenos didáticos; a determinação de situações fundamentais associadas aos conceitos Matemáticos específicos e suas possíveis atualizações em situações didáticas; a dependência entre as situações e a progressão do conhecimento em domínios particulares, potencializando a adaptação e a socialização dos processos.

É importante destacar que apesar da TSD possuir o viés de aprimorar a aprendizagem do estudante, esses não estão no centro da teoria, sendo prioridade à compreensão da forma como as condições e os constrangimentos dos sistemas didáticos permitem ou dificultam a aprendizagem, e como o funcionamento de tais sistemas pode ser melhorado.

O objetivo da TSD em desenvolver a didática como uma pesquisa fundamental e a sua aplicabilidade, traçam o desenvolvimento do percurso metodológico dessa teoria. Desse modo, metodologias que contribuem para o estudo da complexidade dos sistemas didáticas são implementadas em conjunto com a TSD, enfatizando assim a importância e utilização da ED. A TSD fornece ferramentas essenciais para que os pesquisadores possam projetar situações e realizem análises a *priori* e a *posteriori*. Na estruturação das situações de aprendizagem

é atribuída a devida atenção para a forma como o meio é organizado para o estudantes e a otimização das possibilidades que este oferece.

De fato, desde a década de 90, observa-se o crescimento da TSD com a sua utilização em sala de aula, desenvolvendo novas metodologias baseadas em observações participativas, destacando assim a ED como metodologia de pesquisa que possui ampla conexão com a teoria (Margolinas, 2012).

As noções de situação adidática e de meio estão ligadas à visão da aprendizagem como um processo de adaptação e à ambição de otimizar tal processo. Com isso, é necessário elaborar condições para que o conhecimento Matemático em questão manifeste interesse e interação do estudante com o meio, sendo essa uma solução ótima para o problema Matemático. Segundo Brousseau (2002), numa situação adidática os estudantes concordam em assumir a responsabilidade Matemática em resolver a atividade proposta. O professor não deve se manifestar durante o surgimento do conhecimento Matemático. Assim, tem-se a situação adidática, onde o prefixo "a" indica que a situação foi temporalmente liberada de sua intencionalidade didática.

O meio é o sistema em que os estudantes interagem na situação adidática. Nesse local, o professor ou pesquisador possui o papel essencial de organizar esse meio, incluindo recursos materiais, simbólicos e entre outros. Além disso, é necessário condicionar as variáveis didáticas da situação, ou seja, aquelas que afetam as estratégias de resolução. O meio deve possibilitar aos estudantes vivenciarem as limitações de suas estratégias iniciais, mas as suas possibilidades de ação também devem permitir uma evolução em direção a estratégias vencedoras, que atestam a construção de novos saberes. É importante que o meio seja um local que gere contradições, desequilíbrios e entre outros.

A seguir, são listadas algumas condições desejáveis aos problemas propostos, segundo Brousseau (2008):

- O conhecimento Matemático deve ser o único método de resolver o problema proposto;
- A atividade proposta não deve necessitar de nenhum conhecimento que se deseja que apareça;
- Pode acontecer dos estudantes começarem a utilizar alguns conhecimentos básicos inadequados;
- É possível que os estudantes digam por conta própria, se a tentativa de resolução foi bem-sucedida ou falha;

- Sem determinar a solução, essas verificações são apenas sugestivas;
- Os estudantes podem realizar diversas tentativas de “acerto e erro”, mas a antecipação deve ser favorecida;
- Diante das soluções aceitáveis, somente uma corresponde as objeções;
- A solução pode ser obtida e testada por alguns dos estudantes no período da aula normal, e imediatamente compartilhada e verificada pelos demais colegas;
- A situação pode ser reutilizada, sendo então disponibilizadas algumas questões que percorram todo o processo.

Em contrapartida, alguns pesquisadores observaram que uma teoria de situações matemáticas e adidáticas não seria suficiente para abordar o ensino e a aprendizagem em Matemática. Desse modo, tem-se a inserção dos processos de devolução e institucionalização de forma a conectar as dimensões de socialização e adaptação do sistema educacional, sendo esses de responsabilidade do professor.

Durante a descentralização, o professor faz com que os estudantes aceitem a responsabilidade Matemática de resolver a questão proposta sem tentar decodificar sua intenção didática e, mantendo assim as condições para o aprendizado por adaptação.

Na institucionalização, o professor auxilia os estudantes a conectarem o conhecimento contextualizado que construíram na situação adidática ao conhecimento cultural. Com isso, os estudantes irão organizar sua descontextualização e transformação em “saberes”. Logo, a intenção da interação didática é restaurada, que não era relevante na situação adidática, permitindo a socialização (Brousseau, 1986).

O processo de devolução não é trivial. Numa situação didática, o professor tem em mente um objetivo de aprendizagem preciso, mas, tudo o que é oferecido ao estudante para que esse desenvolva comportamentos previstos, acaba por privar das condições necessárias para a compreensão e para o aprendizado. Se o professor diz ao aluno o que fazer, o aluno não aprende. Na TSD, esse paradoxo está ligado a outra construção essencial, o contrato didático. O conceito de contrato didático expressa o fato de que as interações professor-estudante estão sujeitas a regras relativas ao conhecimento matemático em jogo. Estes constituem um conjunto de obrigações recíprocas e expectativas, e são o resultado de uma negociação muitas vezes implícita.

Borba, Lima e Cavalcanti (2024) afirmam que

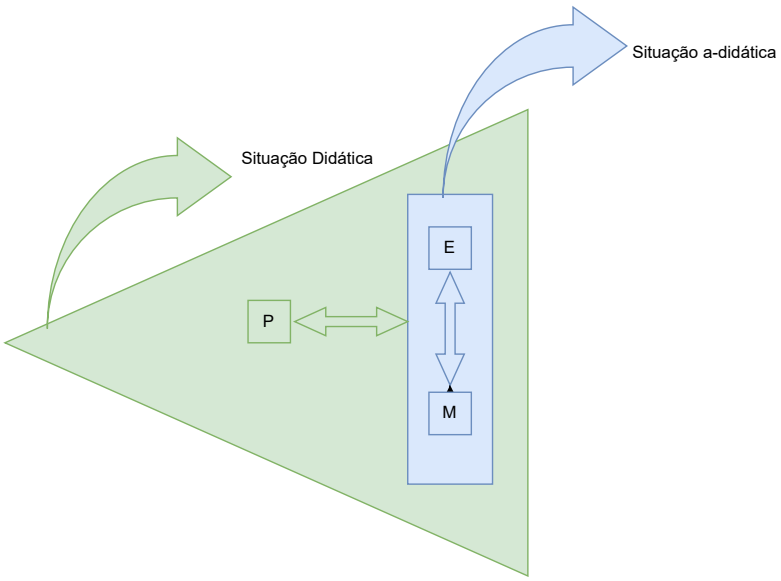
> Assim, o Contrato Didático diz respeito ao conjunto de regras explícitas e, principalmente, implícitas que regulam o funcionamento didático da sala de

> aula de uma escola. Inicialmente, tal noção se referiu à prática no plano específico de uma sala de aula de Matemática. (Borba, 2024, p. 4)

Desse modo, o contrato didático surge dentro do âmbito da interação didática, a qual encapsula uma variedade de interações sociais manifestadas no contexto sociotemporal e na dinâmica da sala de aula. Esta interação engloba um professor, seus alunos e um objeto de conhecimento.

A Figura 11, exemplifica uma situação adidática, em que ocorre interações entre o estudante (E) e o meio (M). Já na situação didática, ocorre a interação do professor (P) com o estudante e com o meio, sendo portanto, inserida numa situação adidática.

Figura 11 – Situação didática e adidática



Fonte: Elaborado pela autora com referência em Brousseau (2002).

Na TSD os estudantes são incentivados a participarem de um grupo em sala de aula, propondo conjecturas e discutindo a validade e importância dessas. Para que a metodologia seja bem-sucedida, o professor não deve revelar a sua opinião, ofertando tempo suficiente para que os estudantes desenvolvam argumentos diante das provocações realizadas, além de incentivá-los a participarem das atividades propostas de forma a obter a quantidade máxima de estudantes envolvidos no processo. Além disso, uma renegociação do contrato didático deve ser proposta aos estudantes, para que passem a compreender e aceitar as suas devidas responsabilidades no processo de construção do conhecimento.

É importante destacar a noção do contrato didático, sendo este referente ao

processo analítico de Brousseau, segundo a situação didática. Assim, quanto mais fácil o professor consegue identificar o comportamento buscado pelos estudantes, mais fácil será para os estudantes exibir esse comportamento sem gerá-lo. Ou seja, é importante treinar o comportamento, porém esse tende a ser inflexível. De fato, quando um professor aplica uma avaliação semelhante aos exercícios discutidos e treinados em sala de aula, é possível prever o comportamento dos estudantes acerca dessas atividades. Porém, quando o professor deseja que os estudantes investiguem e analisem a Matemática, lidando com situações incomuns, é necessário que a consciência dos estudantes sejam trabalhadas. Tão logo, é necessário que haja um estímulo para que os sujeitos sintam-se atraídos para trabalhar a Matemática e, não somente resolver a atividade proposta.

Desse modo, é interessante que o professor ao invés de apenas expor e explicar o conteúdo, estabeleça um contrato entre os estudantes, relatando que o material será discutido e trabalhado, desde que seja acordado que os participantes colaborem com o professor durante algum tempo. Assim, os estudantes irão apreciar o trabalho com ideias matemáticas, não somente trabalhando com elas. Brousseau (2008) relata que é essencial que por mais explícito que o professor tente ser com os estudantes, o contrato didático deverá manter um nível implícito para que não ocorra o fracasso.

Segundo a análise de Tahta (1980), toda atividade possui um aspecto explícito ou externo, sendo solicitado o que os sujeitos fazem em resposta ao que interpretam; é um aspecto implícito ou interno, o que os sujeitos encontrarão, provavelmente. Caso o aspecto implícito torne-se explícito, todo o propósito da atividade é perdido, de forma análoga pelo fato do cotidiano que acontece quando uma pista é revelada de modo proposital o sujeito sente-se desanimado em proseguir com o jogo. Tão logo, os estudantes podem imaginar que atingiram o objetivo da atividade ao fornecer respostas para os questionamentos do professor, enquanto na verdade eles podem falhar ao reconstruir ideias centrais. Brousseau (1982) afirma que o contrato implícito pode ser rompido ao observar perturbações nos hábitos estabelecidos diante de fatos interessantes que começam a acontecer.

Brousseau (1986) define quatro fases da situação didática como sendo: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na situação da ação, o estudante estabelece estratégias, ou seja, busca ensinar para si uma forma de resolver a atividade proposta. As interações sucessivas entre o estudante e o meio é chamada de dialética da ação, onde o estudante organiza as estratégias e constrói uma

maneira de representar a situação que lhe foi proposta, permitindo assim guiar as suas decisões (Brousseau, 1986).

Brousseau (2002) afirma que:

> The sequence of "situations of action" constitutes the process by which the student forms strategies, that is to say, "teaches herself' a method of solving her problem. This succession of interactions between the student and the milieu constitutes what we call a "dialectic of action". We use the word "dialectic" rather than the word "interaction" because, on the one hand, the student is capable of anticipating the results of her choices and, on the other hand, her strategies are, in a way, propositions confirmed or invalidated by experimentation in a sort of dialogue with the situation (Brousseau, 2002, p. 9) [10].

É nesse momento que o estudante busca em seus conhecimentos prévios as estratégias para que possam resolver a situação proposta, formulando métodos e ensinando para si mesmo como pode obter a solução da atividade.

Segundo Catarino (2020):

> The "didactic situations" of action are those in which the student, who is actively engaged in the search for a solution to a certain problem, performs certain more immediate actions, which result in the production of knowledge of a more operational nature (Catarino, 2020, p. 229) [11].

É nesse momento que o estudante realiza uma busca em seus conhecimentos prévios, com o viés de estabelecer estratégias para resolver a situação-problema. Destaca-se que uma situação-problema é definida por Brousseau (2002) como uma questão subjetiva, com enunciados claros e objetivos.

Na situação da formulação ocorre a discussão com o grupo sobre as estratégias elaboradas na situação da ação. Brousseau (2002) relata que:

> A dialectic of formulation would consist of progressively establishing a language that everyone could understand, which would take into account the objects and the relevant relationships of the situation in an adequate way (in other words, by permitting useful reasoning and actions). At each moment, this constructed language would be tested from the point of view of intelligibility, ease of construction and the length of the messages that it allows to be exchanged. The construction of such a language or code (repertoire, vocabulary, sometimes syntax) into an ordinary language or a formalized

[10] Traduzido pela autora como: A sequência de "situações de ação" constitui o processo pelo qual o aluno forma estratégias, ou seja, "ensina a si mesmo" um método para resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio constitui o que chamamos de "dialética da ação". Utilizamos a palavra "dialética" e não a palavra "interação" porque, por um lado, a aluna é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro, suas estratégias são, de certa forma, proposições confirmadas ou invalidada pela experimentação numa espécie de diálogo com a situação (Brousseau, 2002, p. 9).

[11] Traduzido pela autora como: As situações didáticas de ação são aquelas em que o aluno está ativamente engajado na busca de solução para determinado problema, realizando determinadas ações mais imediatas, resultando na produção de conhecimento de caráter mais operacional (Catarino, 2020, p. 229).

> language makes possible the explanation of actions and models of action (Brousseau, 2002, p. 12) [12].

De fato, na dialética de formulação consiste em estabelecer uma linguagem mais formal, para que assim todos possam compreender a resolução. É necessário levar em consideração os objetos e as relações relevantes da situação de forma adequada, permitindo raciocínios e ações úteis). A cada momento, a linguagem construída é verificada do ponto de vista da inteligibilidade, facilidade de construção e extensão das mensagens que permite a troca, tornando possível a explicação de ações e modelos de ação.

Catarino (2020) afirma que

> The "didactic situations" of formulation are those in which the student already uses, in solving the studied problem, some explicit theoretical models or schemes, in addition to showing an evident working with (Catarino, 2020, p. 230) [13].

É nesse momento que a estratégia de resolução é apresentada pelo estudante, enfatizando o conhecimento mais teórico e formalizando a linguagem utilizada, para que assim seja possível facilitar a validação dos argumentos posteriormente.

Na situação de validação, a prova deve ser formulada e apresentada enquanto é considerada e, portanto, na maioria das vezes escrita, e deve poder ser comparada com outras provas escritas que também tratem da mesma situação. Em geral, a prova só será formulável depois de ter sido utilizada e testada como uma regra implícita, seja essa na ação ou durante a discussão.

De acordo com Brousseau (2002):

> The didactical scheme of validation motivates the students to discuss a situation and favours the formulation of their implicit validations, but their reasoning is often insufficient, incorrect, clumsy. They adopt false theories, accept insufficient or false proofs. The didactical situation must lead them to evolve, to revise their opinions, to replace their false theory with a true one. This evolution has a dialectic character as well; a hypothesis must be sufficiently accepted—at least provisionally—even to show that it is false (Brousseau, 2002, p. 17) [14].

---

[12] Traduzido pela autora como: Uma dialética de formulação consistiria em estabelecer progressivamente uma linguagem em que todos pudessem compreender, que levasse em conta os objetos e as relações relevantes da situação de maneira adequada (ou seja, permitindo raciocínios e ações úteis). A cada momento, essa linguagem construída seria testada do ponto de vista da inteligibilidade, da facilidade de construção e da extensão das mensagens que permite a troca. A construção de tal linguagem ou código (repertório, vocabulário, às vezes sintaxe) em uma linguagem comum ou uma linguagem formalizada possibilita a explicação de ações e modelos de ação. (Brousseau, 2002, p. 12).

[13] Traduzido pela autora como: As "situações didáticas" de formulação são aquelas em que o aluno já utiliza, na resolução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de apresentar um evidente trabalho com informações teóricas de forma bem mais elaborada (Catarino, 2020, p. 230).

[14] Traduzido pela autora como: O esquema didático de validação motiva os alunos a discutir uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas, mas seu raciocínio é muitas vezes insuficiente, incorreto,

A dialética da validação motiva os estudantes a discutir uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas, mas seu raciocínio é muitas vezes insuficiente, incorreto, desajeitado. Existem casos em que os estudantes estabelecem teorias falsas, aceitam provas insuficientes ou falsas. A situação didática deve levá-los a evoluir, a rever suas opiniões, a substituir sua falsa teoria por uma verdadeira. Essa evolução também tem um caráter dialético.

Catarino (2020) enfatiza que

> The "didactic situations" of validation are those in which the student already uses mechanisms of proof and where knowledge is used for this purpose (Catarino, 2020, p. 230) [15].

Os estudantes demonstram e deverão convencer os demais participantes envolvidos, sobre os seus argumentos utilizados para a resolução da situação-problema.

A situação de institucionalização apresenta uma necessidade para fortalecer as práticas e seu uso em outros lugares. Assim, faz-se necessário que o estudante dê sentido à construção do conhecimento manipulado por ele (Brousseau, 1986).

Catarino (2020) discute que "the 'didactic situations' of institutionalization are those where the aim is to establish the character of objectivity and universality of knowledge (Catarino, 2020, p. 230) [16].

De fato, nessa última situação ocorre a revelação da intenção do problema proposto pelo professor, validando as discussões realizadas pelos estudantes durante as situações anteriores. É no momento da verificação das resoluções que ocorre a transferência do conhecimento e do saber científico. Margolinas (2012) revela ainda que o momento de devolução e conhecimento não são fases triviais durante o processo de ensino, para isso o professor deve propor situações didáticas de ensino, visando o conhecimento referente ao saber existente.

4.5 Sequências recorrentes

Iniciando o estudo sobre sequências, tem-se a descrição de um exemplo de sequência numérica, como sendo: são números reais, assim há um primeiro número, um segundo número e assim por diante. Esse tipo de sequência é chamado de sequência infinita, em que as listas não terminam. Exemplo: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

desajeitado. Adotam teorias falsas, aceitam provas insuficientes ou falsas. A situação didática deve levá-los a evoluir, a rever suas opiniões, a substituir sua falsa teoria por uma verdadeira. Essa evolução também tem um caráter dialético; uma hipótese deve ser suficientemente aceita - pelo menos provisoriamente - até mesmo para mostrar que é falsa (Brousseau, 2002, p. 17).

[15] Traduzido pela autora como: As "situações didáticas" de validação são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde conhecimento é usado para esse fim (Catarino, 2020, p. 230).

[16] Traduzido pela autora como: As 'situações didáticas' de institucionalização são aquelas onde o objetivo é estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento (Catarino, 2020, p. 230).

Definição 4.1. *Uma sequência numérica é uma função de domínio natural e contradomínio real, que associa a cada número natural n, um número real $f(n)$. Denota-se $f(1) = c_1, f(2) = c_2, f(3) = c_3, \ldots$ e a sequência por $(c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots)$, onde c_n é o n-ésimo termo da sequência e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Everest, 2003).*

Ressalta-se que geralmente é possível descrever algumas sequências por alguma fórmula, porém isso não é sempre válido (Everest, 2003). Há ainda outra maneira de descrever uma sequência, pelo processo de recursividade. A recursão é o processo de escolher um termo inicial e aplicar repetidamente o mesmo processo a cada termo para chegar ao termo seguinte. Esse processo requer que o valor do termo ou dos termos imediatamente antes do termo que se está tentando encontrar seja(m) conhecido(s). Desse modo, destaca-se a lei de recorrência, ou sequência recorrente, como sendo uma função f a qual permite determinar cada termo da sequência numérica por meio de seus anteriores, dada uma regra para definir o primeiro termo (ou os primeiros termos), em que $c_n = f(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1)$. Ainda pode-se falar de uma sequência recorrente de ordem k, como sendo representada por $c_{n+k} = f(c_{n+k-1}, c_{n+k-2}, \ldots, c_{n+1}, c_n)$.

Portanto, seja a sequência $C_n = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$. A obtenção da sua fórmula de recorrência (ou fórmula recursiva) é realizada em duas partes:

- definindo o valor inicial para o primeiro termo c_0;
- a equação de recursão para c_n como uma função de c_{n-1} (o termo anterior).

Definição 4.2. *Uma sequência $\{c_n\}_{n \geqslant 1}$ é dita recorrente (de coeficientes constantes), se existe um inteiro positivo k e números reais $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$, em que (Caminha, 2019):*

$$c_{n+k} = u_{k-1}c_{n+k-1} + \ldots + u_0 c_n.$$

O termo k natural, representa a ordem da sequência e a Definição 4.2 representa a relação de recorrência. Assim, tem-se que b_n é uma sequência recorrente de ordem k.

A derivação de relações de recorrência envolve métodos e habilidades diferentes de resolvê-las. À vista disso tem-se dois exemplos de sequências recorrentes e suas respectivas fórmulas de recorrências.

Exemplo 1. *Considere a sequência dada por: $c_n = 3c_{n-1} - 1$, com $c_0 = 1$. A fórmula de*

recorrência permite obter os termos c_1, c_2, c_3.

$$c_1 = 3c_0 - 1 = 2$$

$$c_2 = 3c_1 - 1 = 5$$

$$c_3 = 3c_2 - 1 = 14$$

Exemplo 2. *(Sequência de Fibonacci) Considere a sequência dada por:* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$*, com* $F_0 = 1, F_1 = 1$*. Tem-se que:*

$$F_2 = F_1 + F_0 = 2$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 3$$

O Exemplo 2, remete nos para a sequência bastante conhecida como sequência de Fiboancci, possuindo uma longa história na matemática. Essa sequência recebe o nome do matemático Leonardo Pisano (1180-1250) conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio". Nascido em Pisa, na Itália, Leonardo adquiriu um conhecimento matemático no mundo árabe e nas áreas de Álgebra e Aritmética, sendo lembrado pela razão do problema da reprodução dos coelhos imortais, gerando assim a sequência de Fibonacci (Santos, 2017). Essa sequência também possui diversas aplicações em outras áreas (Al-Suwaiyel, 2006).

A partir dessas discussões, tem-se que uma sequência recorrente permite que um dado termo seja calculado por meio de uma combinação linear de um ou mais termos anteriores, partindo da definição dos seus termos iniciais. Diante disso, sequências distintas podem possuir a mesma fórmula de recorrência, porém a modificação dos seus termos iniciais causa uma alteração nos demais termos da sequência (Zierler, 1959).

A ordem de cada sequência é definida de acordo com a sua recorrência, tão logo tem-se que uma sequência recorrente de primeira ordem é dada pela expressão $x_{n+1} = f(n, c_n) = t_n c_n + v_n$, em que t_n e v_n são sequências pré-determinadas. Com isso, a sequência do tipo $c_{n+1} = nc_n + 1$ é uma sequência recorrente de primeira ordem.

Com o viés de apresentar o assunto referente às sequências de terceira ordem, tem-se a sua forma dada por: $c_{n+3} = t_n c_{n+2} + v_n c_{n+1} + z_n c_n$, em que t_n, v_n, z_n, são sequências pré-estabelecidas. Nesse caso, pode-se citar as sequências de Padovan e Perrin, sendo o objeto matemático de estudo deste trabalho, sendo discutidas mais adiante nesta pesquisa.

De forma breve, pode-se destacar que cada sequência possuem uma forma de representar seus números por meio de matrizes, denominada de forma matricial. Essas formas

matriciais são originadas com referência na combinação linear, envolvendo uma parte escalar real composta pelos números de Fibonacci. Vieira, Alves, Catarino e Rodrigues (2020) realizaram um estudo das formas matriciais das sequências recorrentes, permitindo obter a sua matriz perante a fórmula de recorrência.

De um modo general, toda a sequência possui um polinômio característico, sendo este associado à ordem da sequência. Assim, as sequências podem possuir várias ordens, sendo estudadas, neste trabalho duas sequências de ordem 3, com coeficientes constantes cuja fórmula de recorrência é dada por: $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, em que $r, p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, pois caso $q = p = 0$ ou $q = 0$ e $p \neq 0$ a sequência passará a ser de primeira ou segunda ordem, respectivamente. Para cada recorrência de terceira ordem homogênea, com coeficientes constantes, expressa como $x_{n+3} + rx_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, será associado o seu polinômio de terceiro grau, $x^3 + rx^2 + px + q = 0$, denominado de polinômio característico (Silva, 2015b).

De fato, a partir da relação de recorrência é possível obter uma expressão para a sequência em função do valor de n (posição do termo).

Definição 4.3. *Seja a sequência $\{c_k\}_{k\geqslant 1}$, o seu polinômio característico é dado por $f \in \mathbb{C}[X]$ (Silva, 2015b):*

$$f(X) = X^k + u_{k-1}X^{k-1} + \ldots + u_1X + u_0,$$

em que u_k representa os coeficientes do polinômio característico.

A exemplo disso, tem-se o polinômio característico da sequência de Fibonacci (Exemplo 2), com recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Uma das formas de obter o seu polinômio característico é por meio do Teorema de Cayley-Hamilton (Gomes; Oliveira, 2019).

Logo:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, I é a matriz identidade, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e Q é a forma matricial de Fibonacci $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (Oliveira, 2018).

Assim:

$$p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Logo: $x^2 - x - 1 = 0$

A presente discussão resulta no suporte para o estudo dos objetos matemáticos deste trabalho. A seguir, são apresentadas as sequências de Padovan e Perrin, enfatizando os seus respectivos processos históricos para iniciar nas evoluções matemáticas dos números dessa sequência.

4.6 O número de plástico

De modo inicial, realiza-se uma alusão a um arquiteto, em que esse realiza a construção de um edifício como sendo a origem de tudo, permitindo a sua construção a partir de um número matemático especial. A primeira medição é então realizada sem ocorrer uma leitura prévia que forneça o número de origem. Este número é estudado nessa pesquisa como o número de plástico.

Além disso, existe o fato de que antigamente concretizou-se a vantagem em utilizar uma unidade e um sistema de medição de forma a harmonizarem com a medição inicial, ocorrendo portanto uma tendência em unificar esses sistemas e unidades, garantindo no mesmo país uma padronização de medidas. Desse modo, durante o estudo do sistema decimal como ordem de coisas e, do metro como medida universal, houve o favorecimento da separação entre essa medição e de todas as seguintes. Assim, pesquisadores da área buscaram sistemas e módulos impostos aos arquitetos durante o seu primeiro ato arquitetônico, como é o caso da origem do edifício.

O número de plástico possui sua origem relacionada com a característica de permanência em relação com a quantidade discreta do número abstrato, bem como com a continuidade da extensão concreta. Para a quantidade discreta do número, a unidade é absoluta e vem da própria natureza deste número, uma vez que sua base é a unidade individual das coisas que contamos. A unidade do número abstrato é, portanto, a mais precisa, uma vez que se coloca como absolutamente indivisível.

A grandeza concreta pode ser estudada de forma relativa, dependendo da condição em que são submetidas a uma determinada ordem em que se distinguem os tipos e ordens de grandeza. Cada ordem de grandeza possui em seu menor tipo uma espécie de unidade, podendo ser expressa em relação a esse tipo e fornecendo relação ao caráter preciso do número.

Doravante, é examinado o número abstrato, servindo portanto de base para o estudo do número de plástico. Um número é definido como uma determinada quantidade de coisas, expressa por uma determinada relação com a unidade. Não obstante, existe uma condição

para que haja relação entre esses, sendo portanto, a grandeza e a unidade serem distintas. Sem distinção, nenhuma relação é possível.

Para um número se diferenciar da unidade, deve haver uma diferença com a unidade de pelo menos o valor desta própria unidade, uma vez que a unidade é a menor quantidade disponível para estabelecer essa distinção. Desse modo, tem-se que o primeiro número que se difere da unidade é obtido ao adicionar a unidade a si mesmo (dois). O resultado, é denominado de duplo, representando a relação desse número com a unidade e, constituindo a relação fundamental do número abstrato.

Estudos realizados ao longo dos anos revelaram que o universo não foi criado em uma ordem comum, mas em uma escala sistemática a qual a mente humana não conseguia compreender. Este sistema do universo é, sem dúvida, baseado em números. Logo, tudo o que existe corresponde a um número. Quando considerados na dimensão filosófica, esses números são a base da existência e das leis naturais (Silva, 2015b).

Nesse sentido, a lei dos números que domina o universo, sem dúvida, revelará a ordem matemática daquele que nos criou. Uma das pistas mais relevantes para auxílio a verificar essa ordem é a proporção áurea. Essa proporção, que é encontrada muitas vezes na arte e na matemática, na verdade é baseada em uma regra simples. No entanto, o fato dessa proporção ser válida e consistente em todo o reino da existência que pode ser observada, revela um sistema sério que surpreenderá as pessoas. O fato de existir uma proporção consistente de $1,618$ em todos os seres desde a existência do universo, tem sido um domínio de estudo entre matemáticos, permitindo examinar as sequências recorrentes, relação entre a altura e a largura da pintura Mona Lisa de Leonardo da Vinci, relação da distância entre nossas sobrancelhas e nossos olhos e entre outros (Mcllroy, 1992). No entanto, as sequências são uma abordagem no mundo científico de hoje. Nos últimos anos, os pesquisadores têm falado sobre a "Proporção Plástica"$(1,32)$, uma proporção semelhante à proporção áurea, que está muito envolvida na arquitetura e na matemática.

De modo preliminar, tem-se o estudo do trabalho do arquiteto Hans van der Laan (1904-1991) (o qual é lembrado na Figura 12), o qual seguiu um padrão de arquitetura baseado na razão áurea, descobrindo então o número de plástico (ψ), onde esse possui profunda relação com as sequências estudadas nesta pesquisa. Tal descoberta foi considerada pelo arquiteto como uma redescoberta de um sistema esquecido, amplamente conhecido em tempos antigos (Laan, 1960). Por outro lado, Gérard Cordonnier (1907-1977) desenvolveu pesquisas contemporâneas

referente ao número de plástico, denominando esse número de radiante.

Figura 12 – Hans van der Laan

Fonte: Vieira (2020).

O número de plástico, é considerado um sistema de proporções que desempenha um papel tão importante em sua teoria da arquitetura, sendo construído com referência no número irracional de valor aproximado $\psi \approx 1,32 \approx \frac{4}{3}$ (Padovan, 2002). Segundo Padovan (1994), Hans van der Laan pesquisou a origem primitiva da arquitetura, permitindo identificar uma relação entre a arte de construção técnica com o espaço.

Vieira (2020) afirma que "Laan e seu irmão investigaram padrões para a arquitetura com referência em experimentos utilizando pedras e, posteriormente, materiais de construção", obtendo assim o número de plástico.

Em contrapartida, Yilmaz (2015) afirma que esses números foram estudados primeiramente pelo matemático francês Gérard Cordonnier em 1924, porém faleceu antes de publicar as suas pesquisas. Cordonnier (o qual é lembrado na Figura 13) ministrou palestras sobre o uso desses números em edifícios, investigou ainda a sua aplicação na arquitetura.

Figura 13 – Gérard Cordonnier

Fonte: Vieira (2020).

Muito antigamente, acreditava-se que o mundo natural havia sido projetado de acordo com uma grande ordem matemática. Desse modo, tem-se diversas ilustrações medievais do Gênesis, das quais retratam Deus como arquiteto criando o céu e a terra. Segundo a Bílbia, Deus "plana um horizonte sobre a face da terra" e, não apenas sobre a face da terra, mas também sobre a corpo humano. De fato, existe a famosa ilustração de proporção de Leonardo da Vinci do Homem Vitruviano, em que um homem se deita de costas com braços e pernas.

Essa harmonia universal, da qual, como produtos da natureza, supostamente somos intuitivamente sensíveis, é supostamente a causa subjacente de nossa resposta estética às proporções das coisas que são vistas.

A abordagem do número de plástico de Van der Laan difere das anteriormente estudadas na literatura matemática, seja pelo fato de ser inteiramente empírica e não baseada em nenhuma crença metafísica do universo planejado; estuda a escala e não a forma; não se preocupa com medidas precisas; o sistema é intrinsecamente tridimensional; a proporção é para Van der Laan a chave para a formação do espaço arquitetônico; e desempenha um papel formativo na sociedade humana.

A teoria da proporção que trouxe a definição do número de plástico, de Van der Laan, não advém de nenhuma crença religiosa, apesar do arquiteto acreditar na criação do mundo realizada por Deus, sendo portanto a sua crença totalmente empírica. Diante disso, Padovan (2002) realiza uma comparação do arquiteto com os filósofos Hume e Kant do século XVIII. O objetivo do número de plástico é genuinamente estético: não no sentido moderno, mas no significado grego original da palavra, que diz respeito não à beleza, mas à percepção.

A razão de solo ou proporção básica do número de plástico é a diferença de tamanho entre dois objetos que é apenas o suficiente para ser instantaneamente reconhecível, mesmo quando os objetos são vistos separadamente e não podem ser medidos diretamente um contra o outro. Há muitos anos, Van der Laan comparou o comprimento de diferentes tipos de cigarros e observou que a diferença acabou sendo quase exatamente a proporção básica do número de de plástico. De fato, pode-se dizer que o número de plástico difere de outros sistemas de proporção por se preocupar principalmente com a escala e não com a forma. Certas formas surgem dela, mas são secundárias.

O número de plástico não é um conjunto fixo de medidas matematicamente exatas, e sim uma série de relações aproximadas derivadas da experiência cotidiana. Ela parte da observação de que a quantidade espacial é um contínuo, em oposição à quantidade discreta de

coisas individuais que contamos. É assim que, na vida cotidiana, segundo Van der Laan, são vistos com a infinita continuidade de tamanhos que se observa na natureza: classificando-os em tipos de tamanho. Quando é difícil distinguir um do outro, um determinado grupo de objetos, dizem que são “do mesmo tipo de tamanho”. Não tendo a preocupação com o tamanho de cada folha individual de uma árvore ou de cada pedrinha de uma praia, mas são classificadas em pequenas, médias, grandes e assim por diante.

O número de plástico possui sua origem relacionada com a característica de permanência em relação com a quantidade discreta do número abstrato, bem como com a continuidade da extensão concreta. Para a quantidade discreta do número, a unidade é absoluta e vem da própria natureza deste número, uma vez que sua base é a unidade individual das coisas que contamos. A unidade do número abstrato é, portanto, a mais precisa, uma vez que se coloca como absolutamente indivisível.

Laan (1960) afirma que medir só pode ser caracterizado como contar quando as quantidades contínuas são medidas por meio de uma unidade correspondente ao seu aspecto. A exemplo disso, tem-se a realização de medição de comprimentos utilizando a unidade de comprimento padronizada; volume por meio da unidade de capacidade. Laan (1960) afirma que:

> L’étendue, en architecture, est d’ordre plastique. Il y est toujours question d’espace et de paroi massive. Seulement, la grandeur de ces éléments spatiaux ne se mesure pas au moyen d’une unité de capacité mais d’une unité linéaire. La "grandeur"dont il s’agit en architecture ne répond ni à une mesure de capacité ni à une mesure de surface; c’est la grandeur d’une donnée spatiale mesurée dans plusieurs directions distinctes, selon une unité de longueur. Connaître le contenu d’un espace ou d’une masse, et l’exprimer en mesures de capacité n’intéresse pas directement l’architecte. Seules l’intéressent, du point de vue de l’ordonnance architectonique, les longueurs, les hauteurs et les largeurs, exprimées dans leur relation avec l’unité linéaire (Laan, 1960, p. 38). [17]

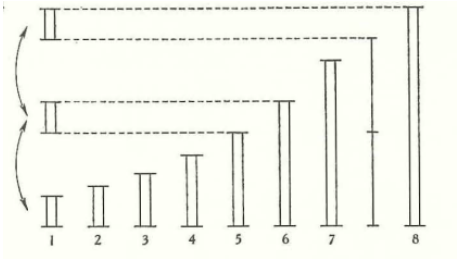
Esse número distingue-se, portanto, do número abstrato por apresentar sua unidade não absoluta e nem fornecida pela própria natureza desse número e, por ser relativo e artificialmente estabelecido. A relação com a unidade, que o número de plástico expressa, não é simples, e sim tripla. Sendo esta distinta da unidade menor que o expressa pelo duplo.

Em relação a ordem de tamanho, é estabelecido o ponto em que dois tamanhos começam a diferir apenas o suficiente para pertencerem a tipos reconhecivelmente diferentes,

[17] Traduzido pela autora como: A expansão, em arquitetura, é de ordem plástica. Há sempre uma questão de espaço e de uma parede maciça. Só que o tamanho desses elementos espaciais não é medido por meio de uma unidade de capacidade, mas de uma unidade linear. O "tamanho"em questão na arquitetura não corresponde a uma medida de capacidade nem a uma medida de superfície; é a magnitude de um dado espacial medido em várias direções distintas, de acordo com uma unidade de comprimento. Conhecer o conteúdo de um espaço ou massa e expressá-lo em termos de capacidade não interessa diretamente ao arquiteto. Apenas os comprimentos, alturas e larguras, expressos em sua relação com a unidade linear, lhe interessam, do ponto de vista do arranjo arquitetônico (Laan, 1960, p. 38).

determinando automaticamente também o limite do que Van der Laan chama de ordem de tamanho: isto é, o limite além do qual dois tamanhos deixar de contar um para o outro. A adição ou subtração que apenas começa a mudar o tipo de um determinado tamanho é, por definição, a menor porção desse tamanho que ainda conta apenas para ele. Assim como o tipo, a ordem está contida entre dois limites: um tamanho menor e um maior que ainda contam um para o outro - ou apenas começam a não contar. A ordem de tamanho abrange sete tipos consecutivos, contidos entre oito medidas (ver Figura 14).

Figura 14 – A ordem de tamanho de Van der Laan



Fonte: Laan (1960).

Por sua vez, o sistema gera um intervalo limitado de oito formas distintas, que podem ser expressas pelas proporções numéricas simples 1:1, 4:3, 7:4, 7:3, 3:1, 4:1, 16:3 e 7:1. A proporção extrema permitida pelo número de plástico é, portanto a de 7:1, sendo distinta de diversos sistemas.

Em relação as implicações do número de plástico na arquitetura, realiza-se uma alusão a um arquiteto, onde esse realiza a construção de um edifício como sendo a origem de tudo, permitindo a sua construção a partir de um número matemático especial. A primeira medição é então realizada sem ocorrer uma leitura prévia que forneça o número de origem.

Imagina-se um espaço urbano, em que todo esse pode assim ser composto com referência na forma sólida das paredes, que são as únicas coisas que são determinadas diretamente pelas suas dimensões e pela sua colocação em relação umas às outras. O processo arquitetônico pode assim ser resumido da seguinte forma: as medidas lineares definem as figuras de superfícies que determinam a forma da massa-parede, e é essa forma que, por sua vez, define a forma do espaço delimitado (Laan, 1960). Pode-se concluir que o número de plástico não é apenas um meio – algo que contribui utilmente para a construção de edifícios – mas um fim – a razão última pela qual é construída.

Por fim, Van der Laan compreendia não ter descoberto um novo princípio de

proporção arquitetônica, mas recuperado um antigo, há muito tempo esquecido. A inovação, que tanto inspira a arte moderna, não lhe interessava. O que o preocupava não era a inovação, mas a renovação, com a qual ele queria dizer o despojamento de tudo que não fosse essencial à arquitetura e à vida.

4.7 Aspectos históricos e epistemológicos das sequências de padovan e perrin

Assumindo o estudo acerca dos elementos de ordem epistemológica, bem como o processo evolutivo dos conhecimentos matemáticos e históricos, tem-se a discussão das sequências de Padovan e Perrin. Segundo Almouloud (2010) a epistemologia agrega as concepções contidas nas condições de existência dos objetos matemáticos. Preliminarmente, destaca-se a semelhança dessas sequências a de Fibonacci, oriundas das relações da divina proporção e das representações geométricas, ausentando uma discussão sobre as sequências de Padovan e Perrin.

Com referência no estudo referente ao número de plástico, observam-se os trabalhos dos arquitetos Hans Van der Laan, Padovan e do matemático Gérard Cordonnier. Assim, os números de Padovan possuem associação histórica com Cordonnier, Padovan e Hans Van der Laan (Alves, 2020b).

O número de plástico possui como uma das soluções reais da equação $x^3 - x - 1 = 0$, sendo este polinômio pertencente ao número mórfico, trinômio no formato: $x^n - x - 1 = 0, n = 2, 3, \ldots$ (Ferreira, 2015; Vieira, 2023d). Além disso, a equação desse número também é a equação característica das sequências de Padovan e Perrin.

Os números mórficos, segundo Aarts, Fokkink e Kruijtzer (2001), Vieira (2020), Ferreira (2015) e Vieira, Alves e Catarino (2023d), possuem como únicas soluções o número de ouro e o número de plástico.

Definição 4.4. *Um número real $p > 1$ é chamado de número mórfico quando existem números naturais m e n, com $m, n \in \mathbb{N}$, tais que:*

$$\begin{cases} p + 1 = p^m \\ p - 1 = p^{-n} \end{cases}$$

Assim, para os valores de $m = 2$ e $n = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} p+1=p^2 \\ p-1=p^{-1} \end{cases} \Longrightarrow p^2-p-1=0$$

Possuindo como soluções: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, sendo $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61$ o número de ouro.

Tão logo, para $m=3$ e $n=4$, tem-se:

$$\begin{cases} p+1=p^3 \\ p-1=p^{-4} \end{cases} \Longrightarrow p^3-p-1=0$$

Em que a solução real deste polinômio é dada pelo número racional $1,32$, conhecida como número de plástico.

Ferreira (2015) apresenta uma representação do número de plástico por meio de interações infinitas, em que: $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}}=\psi$. Efetivando a operação, constata-se que: $\psi=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}} \Longrightarrow \psi^3=1+\psi$.

É possível ainda comparar essa expressão representativa do número de plástico com a seguinte: $\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{1+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, é possível fazer correspondência ao número de ouro e, relacionar a sequência de Fibonacci com as sequências de Padovan e Perrin (Alves; Catarino, 2022).

O número de plástico ψ é um número real que satisfaz a equação cúbica $x^3-x-1=0$. Vieira (2020) demonstra que a operação realizada anteriormente é possível pelo fato de uma determinada sequência denominada de x_n, com recorrência $x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n}$ e $x_1=1$, ser convergente. Desse modo, a sequência é monótona crescente: uma vez que $x_1<x_2$, já que $x_1=1$ e $x_2=\sqrt[3]{1+1}$; e supondo $x_{n-1}<x_n$, tem-se $x_n^3=1+x_{n-1}<1+x_n=x_{n+1}^3$. A sequência é limitada superiormente: uma vez que $x_1<\psi$ e, supondo $x_n<\psi$, tem-se analogamente $x_{n+1}^3=1+x_n<1+\psi=\psi^3$. Tão logo, a sequência é convergente.

À vista disso, seja a_n uma nova sequência em que $a_n=\frac{P_{n+1}}{P_n}$. Perante aos fatos, será explorada a convergência dessa nova sequência $a_n=\frac{P_{n+1}}{P_n}$, onde $a_0=\frac{P_1}{P_0}=\frac{1}{1}=1, a_1=\frac{P_2}{P_1}=\frac{1}{1}=1, a_2=\frac{P_3}{P_2}=\frac{2}{1}=2, a_3=\frac{P_4}{P_3}=\frac{2}{2}=1$.

Explorando a convergência de $a_n=\frac{P_{n+1}}{P_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, é possível observar na Tabela 1 o cálculo dos 20 primeiros termos de a_n para $n \geqslant 0$.

Desse modo, pode-se perceber que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{P_{n+1}}{P_n} \approx \psi \approx 1,32$.

Tabela 1 – Valores de a_n

n	a_n	n	a_n
1	1	11	1,3125
2	2	12	1,3333...
3	1	13	1,3214
4	1,5	14	1,3243
5	1,3333...	15	1,3265
6	1,25	16	1,3230
7	1,4	17	1,3255
8	1,28	18	1,324561
9	1,3333 ...	19	1,3245033
10	1,6	20	1,325

Fonte: Elaborada pela autora.

Com referência nisso, tem-se a relação entre o número de plástico ψ e a nova sequência a_n dada por:

$$a_n \approx \psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\dots}}}$$

Esse fato é validado realizando a multiplicação de três termos consecutivos da nova sequência a_n. Assim:

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n+1}a_n &= \frac{P_{n+3}}{P_{n+2}}\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}\frac{P_{n+1}}{P_n} \\ &= \frac{P_{n+3}}{P_n} \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \approx \psi$, e $a_n \approx a_{n+1} \approx a_{n+2}$, tem-se:

$$\psi^3 = \frac{P_{n+3}}{P_n}$$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}}$$

Logo:

$$\begin{aligned} a_n \approx \psi &= \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}} = \sqrt[3]{\frac{P_{n+1}+P_n}{P_n}} \\ &= \sqrt[3]{1+\frac{P_{n+1}}{P_n}} \\ &= \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\dots}}} \end{aligned}$$

Por fim, diante constatação que a sequência x_n é convergente, é fácil ver, que a sequência a_n também é convergente.

Conforme discutido na seção anterior, em que toda sequência possui um determinado polinômio característico, tem-se que a partir dos embasamento acerca do número de plástico, o

polinômio característico das sequências de Padovan e Perrin é dado por $x^3 - x - 1 = 0$. Com isso, a resolução dessa equação cúbica pode ser realizada por diversos métodos matemáticos, verificando assim as seguintes soluções:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = 1,324717957244746025960908\ldots \approx 1,32$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$\approx -0,662359 \pm 0,56228i.$$

Perante os fatos apresentados, é possível apresentar a sequência de Padovan como sendo uma sequência recorrente de terceira ordem. Segundo Yilmaz (2015), os números de Padovan foram definidos por Stewart (1996) homenageando o arquiteto contemporâneo Richard Padovan (1935-). No entanto, esses números foram descobertos pela primeira vez em 1924 pelo estudante de arquitetura francês Gérard Cordonnier. Remodelado de forma independente pelo monge-arquiteto francês Dom Hans Van der Laan (1904-1991), tem-se que os números Padovan possuem associação histórica com Cordonnier, Padovan, Van Der Laan e Stewart, sendo conhecidos também por sequência de Cordonnier. Richard Padovan atribuiu em seu livro a sequência como sendo de Van der Laan (Padovan, 2002).

Considerando Tedford (2019), Vieira (2020), Diskaya e Menken (2019), Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2020b), Tas e Karaduman (2014), Tasci (2018), Stewart (1996), Vieira, Alves e Catarino (2023d), dentre outros trabalhos, que definem a sequência de Padovan com os valores iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e a sequência original tem como $P_0 = 1, P_1 = P_2 = 0$ (Padovan, 2007).

Definição 4.5. *A relação de recorrência da sequência de Padovan* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com os termos iniciais* $P_0 = P_1 = P_2 = 1$*, é dada por:*

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geqslant 3.$$

Os primeiros termos são calculados com referência na Definição 4.5 e apresentados no Quadro 4.

Existem outros métodos de obter os termos de uma sequência sem conhecer os seus termos anteriores, sendo algumas dessas a fórmula de Binet e a forma matricial. A fórmula de

Quadro 4 – Primeiros termos da sequência de Padovan

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

Fonte: Elaborado pela autora.

Binet foi desenvolvida por Abraham de Moivre (1667-1764), homenageando Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856).

A fórmula variante de Binet consiste num método para obter os termos de uma sequência, sem necessitar da recorrência definida, existindo a obrigação de conhecer o polinômio característico de sequência analisada. Assim, tem-se que o polinômio na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ pode ser expresso por:

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

sendo C_1, C_2 os coeficientes, r_1,r_2 as raízes distintas do polinômio $r^2 + pr + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $r_1 \neq r_2$.

Teorema 4.1. *A fórmula de Binet da sequência de Padovan, é dada por:*

$$P_{(n)} = A(\alpha)^n + B(\beta)^n + C(\gamma)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, α, β e γ são as raízes distintas da equação característica e os coeficientes são:

$$A = \frac{(\beta-1)(\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, B = \frac{(\alpha-1)(\gamma-1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, C = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Demonstração. De posse da fórmula de recorrência da sequência de Padovan ($P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_0 = P_1 = P_2 = 1$), possuindo equação característica $x^3 - x - 1 = 0$ com raízes α, β, γ. Com isso, $P_{(n)} = A(\alpha)^n + B(\beta)^n + C(\gamma)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C utiliza-se as condições iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e a partir daí, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C & = 1 \\ A\alpha + B\beta + C\gamma & = 1 \\ A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 & = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{-\beta + \beta\gamma - \gamma + 1}{\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma} = \frac{(\beta-1)(\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},$$
$$B = \frac{-\alpha + \alpha\gamma - \gamma + 1}{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma} = \frac{(\alpha-1)(\gamma-1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$
$$C = \frac{-\alpha + \alpha\beta - \beta + 1}{\gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

□

A forma matricial de uma sequência permite obter os termos dessa, a partir de uma matriz geradora. Assim, ao ser elevada a n-ésima potência, essa matriz permite obter os termos de uma determinada sequência recorrente (Sokhuma, 2013). Vieira (2020) realizou um estudo sobre a forma matricial de Padovan, tendo como base o trabalho de Sokhuma (2013).

Teorema 4.2. *Para* $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *tem-se* $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, *para todo* $n \geqslant 5$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$ tem-se:

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-5} & P_{k-3} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-5}+P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-4}+P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-3}+P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_k & P_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

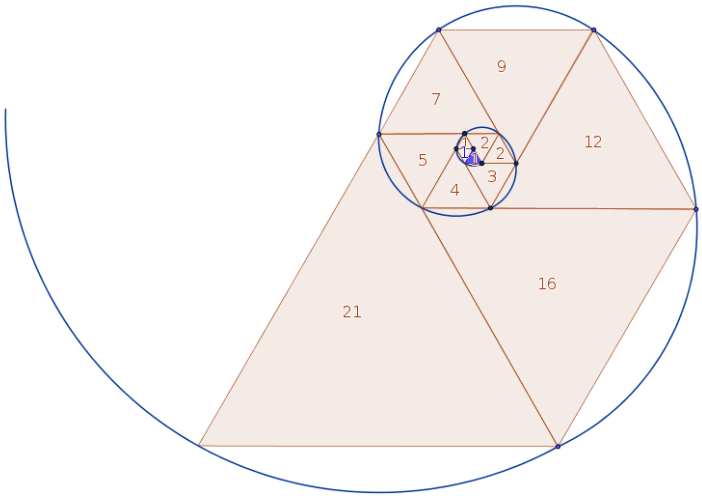
Seenukul, Netmanee, Panyakhun, Auiseekaen e Muangchan (2015), Yilmaz e Taskara (2013) investigaram outras formas matriciais diferentes, existindo portanto mais cinco formas matriciais de ordem 3, totalizando 6 formas matriciais válidas para os números de Padovan.

É importante destacar a existência da representação geométrica da sequência de Padovan, dada por meio da inserção de triângulo equiláteros, formando a espiral de Padovan, conforme mostra a Figura 15 desenvolvido no *software* Geogebra. A composição da espiral é feita, segundo Vieira (2020):

> pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica. Considere o triângulo de lado 1 destacado em azul como o triângulo inicial. A formação da espiral se dá pela adição de um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, inicialmente o triângulo azul. Após a adição dos demais triângulos é formado um novo polígono, conhecido como pentágono plástico. A espiral se apresenta ao conectar com um arco duas extremidades do novo triângulo adicionado (Vieira, 2020, p. 54) .

Assim, é possível inserir triângulo equiláteros de acordo com o maior lado do novo polígono formado.

Figura 15 – Espiral de Padovan 2D

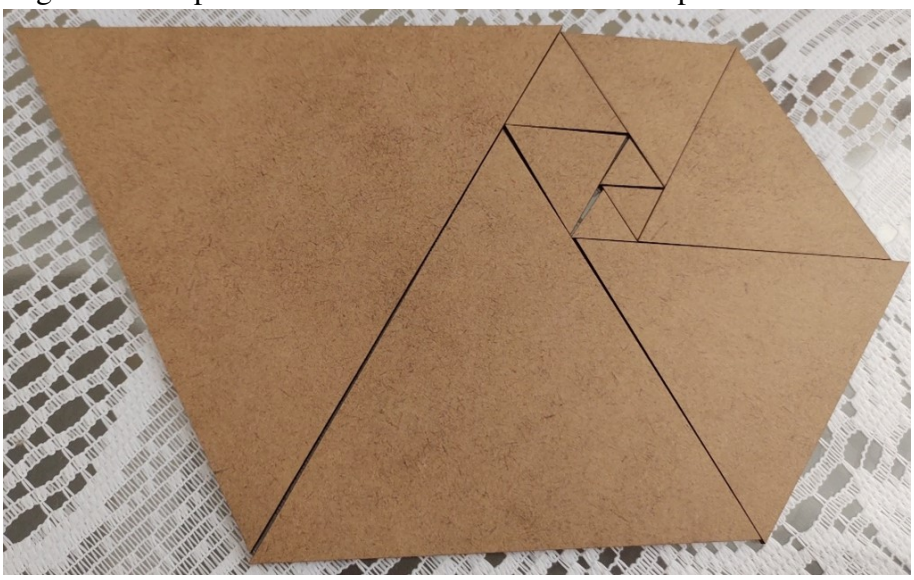


Fonte: Vieira (2020).

Uma construção desse espiral como objeto matemático em forma de material manipulável foi realizada em material de *Medium Density Fiberboard* (MDF), possibilitando aos estudantes uma apreciação da espiral de Padovan. Com isso, foram desenvolvidos 4 conjuntos, em que cada um é composto por 10 triângulos equiláteros, sendo esses: 3 triângulos de lado 2cm, 2 triângulos de lado 4cm, 1 triângulo de lado 6cm, 1 triângulo de lado 8cm, 1 triângulo de lado 10cm, 1 triângulo de lado 14cm, 1 triângulo de lado 18cm (ver Figura 16). É importante notar que as peças foram construídas de forma ampliada, sendo desenvolvidas duas vezes maior do que os triângulos definidos na espiral de Padovan.

Visando explorar a sequência de Padovan para portadores de deficiência visual, foi elaborada a espiral em MDF, com os números em braile. A confecção do produto deu-se por

Figura 16 – Espiral de Padovan com o material manipulável



Fonte: Confecção da autora.

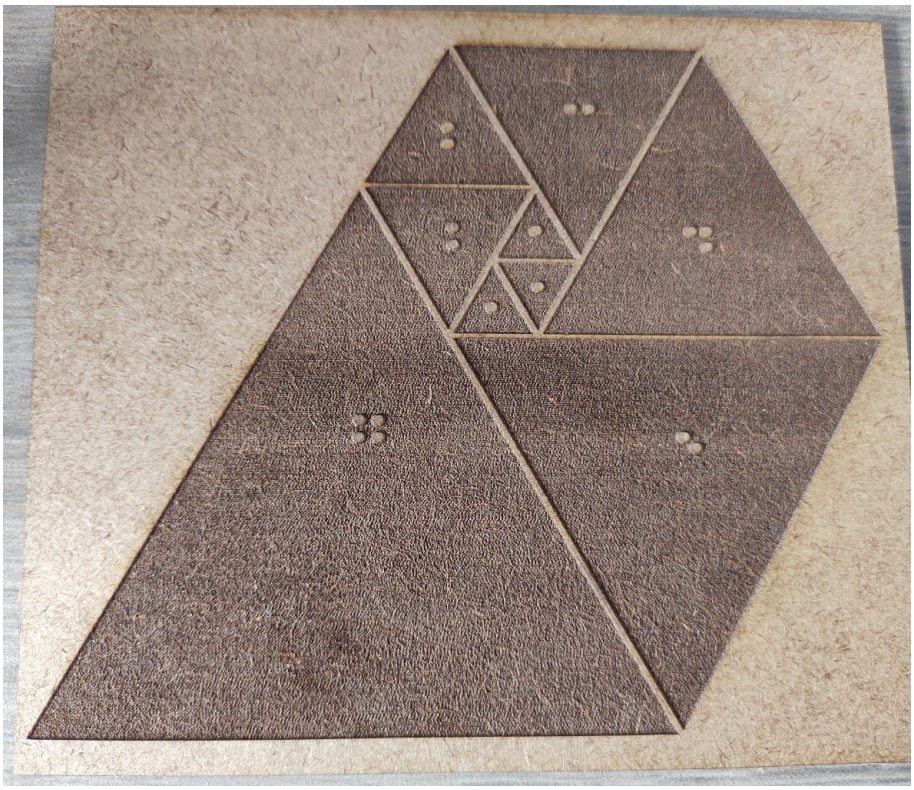
meio de uma placa em MDF de tamanho 10x15cm, com o protótipo do desenho desenvolvido em *software* de edição de imagens, para que a imagem construída fosse vetorizada e possuísse uma boa resolução e qualidade. Observa-se que o material se apresenta de forma reduzida da espiral de Padovan, finalizando no triângulo de lados iguais a 7. Essa redução ocorreu devido ao processo de confecção do material, uma vez que utilizando mais números pertencentes à sequência, acarretaria muitas informações para os estudantes, dificultando assim o processo de ensino. Pode-se notar que os lados dos triângulos apresentam uma estrutura em destaque, para que o estudante possa sentir os segmentos, também seguindo o padrão em alto relevo. Já os números apresentam a estrutura em alto relevo, conforme o padrão do sistema braile (ver Figura 17).

O produto desenvolvido surgiu da iniciativa da componente curricular de Produção e Uso de Materiais Didáticos, do curso de Pós-graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN). Destaca-se que segundo BrandÃo (2010) uma pessoa cega possui perda total ou quantidade mínima de visão, havendo a necessidade do método braile para sua leitura e escrita. Além disso, pode-se utilizar outros métodos e equipamentos, como forma de facilitar o processo de ensino desses indivíduos. Ochaíta e Espinosa (2004) retratam que

> O planejamento das intervenções educativas que devem ser feitas com as crianças cegas e deficientes visuais baseia-se em suas necessidades específicas que decorrem fundamentalmente, da falta ou deterioração do canal visual de coleta de informações (Ochaíta; Espinosa, 2004, p. 162).

Haja vista, tem-se a proposição de transformar conteúdos matemáticos para sujeitos cegos, permitindo assim uma melhoria no processo de ensino. Por sua vez, observa-se ainda a

Figura 17 – Espiral de Padovan como material manipulável para deficientes visuais



Fonte: Confecção da autora.

escassez de trabalhos contemplando os portadores de deficiência visual no âmbito da Matemática e História da Matemática.

Uma outra representação geométrica da sequência é dada em formato 3D (ver Figura 18), onde são adicionados paralelepípedos observando as dimensões do novo polígono formado. Assim, o novo paralelepípedo inserido será dado conforme a soma das duas dimensões das duas figuras anteriores, observando o salto existente na recorrência de Padovan para o termo antecessor mais imediato.

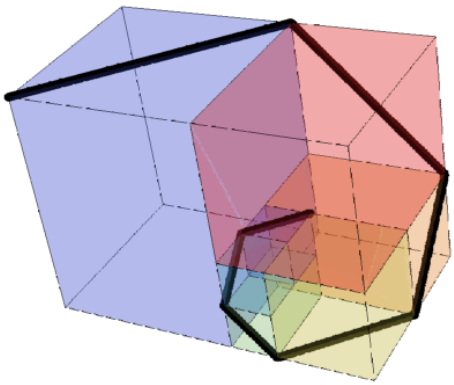
A exemplo disso, tem-se os primeiros paralelepípedos para a confecção da espiral de Padovan em 3D na Figura 19 (Corcuff, 2012). Para $n = 0$, tem-se o cubo com dimensões 1 x 1 x 1. Para $n = 1$, tem-se o paralelepípedos com dimensões 1 x 1 x 2. Para $n = 2$, tem-se o paralelepípedos com dimensões 1 x 2 x 2. Para $n = 3$, tem-se o paralelepípedos com dimensões 2 x 2 x 3. Logo, para o $n = 4$ o paralelepípedo terá dimensões somadas das figuras:

- posição $n = 2$, com dimensões 1 x 2 x 2;
- posição $n = 1$ com dimensões 1 x 1 x 2;

Resultando em uma nova figura com dimensões 2 x 3 x 4.

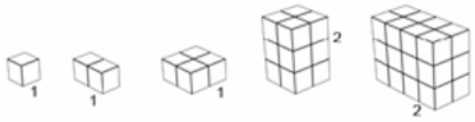
A sequência de Perrin, foi estudada pela primeira vez por Edouard Lucas (1842-1891).

Figura 18 – Espiral de Padovan como material manipulável



Fonte: Vieira (2020).

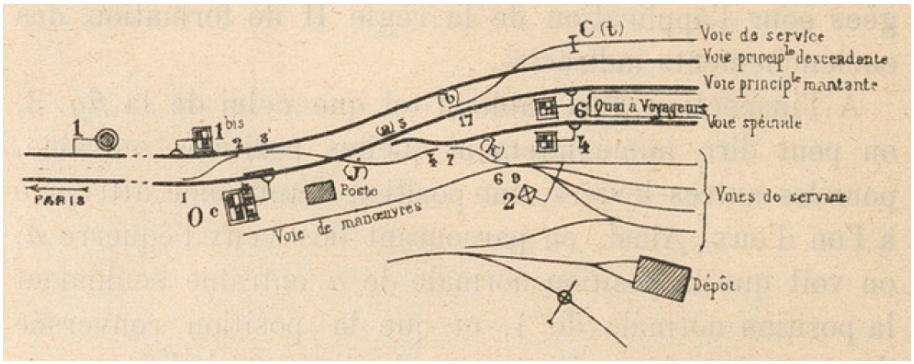
Figura 19 – Primeiros paralelepípedos para composição da Espiral de Padovan em 3D



Fonte: Corcuff (2012).

No entanto, a sequência foi mais tarde, em 1899, nomeada em homenagem ao engenheiro francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), realizando contribuições para essa sequência (Shannon, 2006). Perrin (1905) escreveu um livro sobre um novo método de notação para sinalização ferroviária, discutindo sobre diversos tipos de sinalizações, tais como as sinalizações binárias, entroncamentos e outros. De fato, o autor destaca que as sinalizações da estação de Laigle em Paris, atenta para que todos os dispositivos utilizados sejam representados pelo diagrama na Figura 20. Assim, essa figura retrata a entrada para a estação de Laigle (lado de Paris), por meio do diagrama de dispositivos elaborado por Perrin, mostrando a aplicação e eficácia de seu modelo.

Figura 20 – Entrada para a estação de Laigle em Paris



Fonte: Perrin (1905).

A sequência de Perrin, é uma sequência recorrente de terceira ordem, possuindo relação de recorrência aos números de Padovan.

Definição 4.6. *A relação de recorrência da sequência de Perrin* $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *para* $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$*, é dada por:*

$$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}, n \geqslant 3.$$

A Figura 21 refere-se a Raoul Perrin que está à direita e Edmond Nivoit seu colega de engenharia no ano de 1861 (Knuth, 1986).

Figura 21 – Raoul Perrin

Fonte: Lallemand, Bonnefoy, Chapuy, Villain e LÉon (2019).

Uma investigação mais aprofundada acerca da matemática desses números, foi realizada por Adams e Shanks (1982). Destaca-se que esses números possuem muitas propriedades interessantes e, devido à sua recorrência ser semelhante à sequência de Padovan, isso torna essa sequência com grande similaridade aos números de Padovan. Uma característica é dado pelo polinômio característico, onde os números de Perrin também possuem a equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ como seu polinômio característico. Pode-se citar ainda a relação desses números com o número de plástico, apresentando como solução real do polinômio o valor dado pelo número racional $1,32$, além da relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência.

A partir da Definição 4.6, é possível calcular os termos dessa sequência, mostrados no Quadro 5.

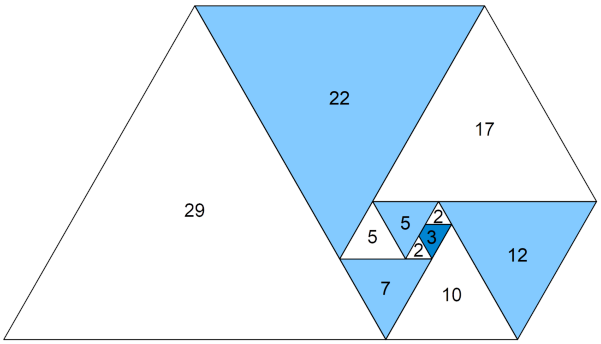
Quadro 5 – Primeiros termos da sequência de Perrin

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17

Fonte: Elaborado pela autora.

Uma representação geométrica dos números de Perrin, é obtida de forma semelhante à espiral de Padovan. Desse modo, tem-se na Figura 22 a espiral de Perrin, inserindo o triângulo equilátero de acordo com o maior lado do novo polígono gerado.

Figura 22 – Espiral de Perrin em 2D



Fonte: Knuth, Bibby e Makai (1986).

A forma matricial e fórmula de Binet serão estudadas mais adiante, durante o desenvolvimento do campo epistêmico-matemático da sequência de Perrin.

4.8 Dimensão filosófica do estudo das definições

As definições matemáticas indicam o avanço do conhecimento, apesar de que nem sempre está claramente localizado na geração de novos conhecimentos visto que a sua ligação com a prova é por muitas vezes ausente ou resumida. O estudo epistemológico das definições possibilita a identificação dos conceitos históricos, impactando no nível didático. Frege (1979) identificou a construção de definições e formação de conceitos, denominando-as de definições frutíferas, considerando três tipos de definições: lógica, da linguagem (abreviação) e heurística (formação de conceitos).

Lakatos (1976), por sua vez, observou a importância da definição entre os investigadores, sendo desenvolvidas em comunidades com características provisórias e evolutivas. Diversos são os elementos levados em consideração por Lakatos (1980), tais como: a conjectura, a prova da conjectura, mas também as definições em construção, os lemas ocultos que permitem o surgimento de novos conceitos e outras provas.

De fato, observa-se que as pesquisas envolvendo o conceito de definições matemáticas (Gravemeijer, 1999; Vinner, 1991) tratam de replicação epistemológica do trabalho

de Lakatos (1976), não havendo críticas em relação à didática abordada pelo filósofo.

Assim, é necessário fornecer os meios para analisar com precisão o processo de construção das definições para os estudantes, bem como as ações que permitem que esses atuem e controlem os seus processos, e as alavancas à disposição do professor que está no domínio da situação. Com isso, os trabalhos de investigação são sempre em grupos, realizando supostas institucionalizações (não sendo essas descritas e nem questionadas).

Ouvrier-Buffet (2003) destaca ainda que uma definição é considerada uma ferramenta, mais do que um objeto, permitindo que os estudantes operem eficientemente na resolução de problemas sem dependerem de uma definição explícita. Ainda segundo Ouvrier-Buffet (2003)

> Nous recherchons davantage à concevoir un milieu adidactique associé, et à un savoir mathématique, et à la construction de définition ; Brousseau parle de situation fondamentale. L'existence d'une situation fondamentale pour la construction de définitions est un postulat. La démarche de recherche d'une telle situation fondamentale renvoie à une étude mathématique, épistémologique de la construction de définitions, mais aussi à une analyse des pratiques de référence en terme de construction de définitions (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 13). [18]

Levando em consideração as especificidades das situações e conceitos utilizados nos experimentos, nota-se que as situações que envolvem uma atividade de definição apresentam dois tipos distintos, a saber: trata-se de redefinir conceitos familiares ou alterar o quadro de conceitos já conhecidos pelos estudantes. No entanto, esses conceitos matemáticos utilizados nas experiências estão fora do currículo ou já são parcialmente conhecidos pelos sujeitos. Além disso, o material disponibilizado aos estudantes pode incluir um manual contendo elementos que serão úteis para o processo do estudante, ou mesmo na busca das definições iniciais.

De fato, a presente pesquisa trata de conceitos e definições matemáticas que estão em construção na pesquisa matemática, envolvendo o conteúdo de sequências numéricas e combinatória, permitindo que essas condições tenham, a *priori*, uma bagagem conceitual semelhante perante uma situação que envolva um "novo" conceito. Os tipos de situações utilizadas na presente investigação, foram de classificação, sendo demonstradas por meio das definições construídas. Foram também realizadas explorações aos níveis primário e secundário, trabalhando numa situação classificatória sobre os conceitos de interpretação combinatória da

[18] Traduzido pela autora como: Buscamos mais desenhar um ambiente didático associado, e ao conhecimento matemático, e à construção de definição; Brousseau fala de uma situação fundamental. A existência de uma situação fundamental para a construção de definições é um postulado. A abordagem para pesquisar uma situação tão fundamental refere-se a um estudo matemático e epistemológico da construção de definições, mas também a uma análise do práticas de referência em termos de construção de definições (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 13).

sequência de Fibonacci, por meio do material concreto desenvolvido para fim deste meio. A elaboração da situação, a análise e validação dessas situações são possíveis diante da teoria de ensino da TSD. As definições investigadas foram do tipo novas, uma vez que discutem o teorema com referência na abordagem combinatória das sequências de Padovan e suas extensões e, para a sequência de Perrin. Esses conceitos, levam em consideração algumas definições primordiais: com ênfase na interpretação combinatória de Fibonacci e Lucas e, no conceito de tabuleiro e bracelete; acessibilidade por meio do material manipulável desenvolvido de forma inédita.

Os conceitos de matemática discreta envolvidos em problemas de combinatória, aritmética, verificam essas diferentes condições e se prestam particularmente a uma atividade de definição, conforme realizado no trabalho de Ouvrier-Buffet (2003).

A caracterização da atividade de definição é realizada pela representação por meio do material manipulável desenvolvido, descrevendo o funcionamento da matemática, utilizando o modelo de Balacheff (1995) que se baseia na teoria das situações didáticas de Brousseau (1986).

O estudo das definições aborda as concepções: de Aristóteles, a qual desenvolve componentes lógicos e linguísticos, estudando o discurso; de Popper, propondo um estudo teórico das definições e; de Lakatos, atentando para a construção dos conceitos abordados nas definições, realizando assim um estudo heurístico. Ouvrier-Buffet (2003) realiza um estudo das tipologias desses três filósofos.

A concepção de Lakatos (1976), aborda também as ideias de Aristoteles (1965) e Popper (1985), centrando-se no processo de geração de conceitos, reservando um lugar privilegiado para as definições. A definição do problema fundamentada por Lakatos (1980), apresenta primordialmente a situação de classificação, delimitando o conceito da sequência de Padovan. Assim, é apresentada uma abordagem combinatória da sequência de Fibonacci, para que os estudantes possam realizar uma interpretação para a sequência de Padovan, sem conhecer a sua recorrência e os seus termos. Destaca-se que a sequência não é nomeada, para que os sujeitos possam investigar e conseguir definir o conceito em relação à abordagem combinatória dos números de Padovan por meio de ladrilhamentos. De fato, pode-se destacar a mudança de representação e linguagem relacionadas a uma passagem da geometria e combinatória para a topologia algébrica desses números, não sendo suficientes para Lakatos (1980).

O sistema de representação na concepção de Lakatos (1976), estão ligados aos conceitos matemáticos estabalecidos por Lakatos (1980). Essas representações podem ser realizadas por meio de jogos. Logo, tem-se o desenvolvimento do material manipulável,

envolvendo a interpretação combinatória de Fibonacci, para assim conseguir manusear as peças e obter a interpretação combinatória de Padovan.

Os operadores estabelecidos por Lakatos (1976) são de três tipos: definições ingênuas, definições zero, definições geradas por provas. Assim, o presente estudo trata das definições zero, uma vez que ocorre uma evolução da definição, partindo de Fibonacci para os números de Padovan e suas extensões. Com isso, a definição zero trata do início da atividade de definição e do próprio processo de pesquisa, nomeando, oferecendo caminhos diferentes, acesso a um conceito, trabalhar na prova, delimitação da área de aplicabilidade de uma ideia, conjectura ou evidências. Ouvrier-Buffet (2003) retrata ainda que em tratar definições ingênuas não ocorrem evoluções, já as definições geradas por provas, trata-se de algo mais complexo, uma vez que exige explicar uma prova e a dialética entre essa prova e a a(s) definição(ões) em construção.

O controle e validação são realizadas com referência em Lakatos (1976), verificando a validade da afirmação dos exemplos apresentados, como também o controle interno oriundos do material (jogo) desenvolvido. A prova é verificada mediante a dialética entre definição e prova.

A concepção de Aristoteles (1965) é realizada por meio do processo de definição por gênero e diferenças específicas. A classificação do problema é dada de uma forma mais generalista, apresentando o problema e a sua delimitação. No caso da pesquisa, apresenta-se a ausência na literatura de interpretação combinatória para os números de Padovan, bem como o estudo dessa sequência em História da Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática (formação inicial de professores). O sistema de representação são ofertados com referência nas regras e peças estabelecidas pelo objeto matemático manipulável, para que os sujeitos possam manuseá-las e obter os termos dessa sequência em estudo. Os operadores são estudados demonstrando a equivalência entre as definições de Fibonacci e Padovan (bem como as suas extensões), com uma linguagem simples. Os controles são bem definidos, verificando a unidade do conceito, conforme estabelecido por Aristoteles (1965). Assim, devem ser proibidas redundâncias, questionando a existência dos conceitos.

A concepção de Popper (1985) distingui-se por sua rejeição ao essencialismo de Aristóteles. A principal contribuição de Popper para a construção de definições reside em operadoras centradas na construção de uma teoria científica e em estruturas de controle. A seleção do problema é feita com referência nas teorias concorrentes. O sistema de representação

relaciona as teorias e conceitos, como é o caso das duas sequências estudadas (Fibonacci e Padovan). Os operadores é feito perante a construção e teste de axiomas locais, realizado com o manuseio do material manipulável. Os controles são realizados com referência na formulação de afirmações e a realização de testes experimentais, manuseando as peças disponíveis para obter os termos da sequência de Padovan por meio de ladrilhamentos.

Diante disso, tem-se o desenvolvimento da atividade voltada para a construção de definições, mobilizando analogias e campos matemáticos. Atividade de definição orienta-se principalmente pela classificação, categorização de objetos e sua nomenclatura. As concepções de Aristóteles e Lakatos podem, portanto, ser operacional. Está em sintonia com o momento "axiomático"e as pontes feitas com teorias pré-existentes que são encontradas na concepção de Popper.

A construção da definição em questão será guiada por buscar o menor número de condições iniciais, para obter o maior número de resultados. Uma das principais dificuldades de trabalhar com definições matemáticas, é obtida durante a escolha de um conceito matemático e na exploração a *priori* deste conceito, a fim de determinar os problemas apropriados e considerar várias possíveis definições de zero, ou mesmo conjecturas e provas envolvendo este conceito. Desse modo, tem-se o surgimento de familiarizar-se com o conceito em estudo, desenvolvendo o material manipulável tendo o conceito de imagem para uma melhor compreensão da atividade.

Esta pesquisa trata da construção de definições a partir da resolução das situações-problema propostas até a construção formal da teoria em estudo. Com isso, abrange-se as expressões: definir processos e procedimentos de definição. Para tanto, as atividades dar-se-ão ao mode de pensar dos estudantes envolvidos.

No capítulo seguinte é realizado o desenvolvimento do campo epistêmico-matemático, desenvolvendo definições, teoremas e propriedades matemáticas acerca das sequências de Padovan e Perrin, visando o processo de generalização, complexificação e combinatório desses números.

5 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO-MATEMÁTICO DA GENERALIZAÇÃO, COMPLEXIFICAÇÃO E MODELOS COMBINATÓRIOS DOS NÚMEROS DE PADOVAN E PERRIN

Esta seção constitui o desenvolvimento do campo espitêmico-matemático acerca das sequências de Padovan e Perrin, apresentando definições, propriedades e teoremas, com rigor matemático e certo grau de ineditismo. Com isso, tendo como referência os trabalhos de Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021a), Vieira, Alves e Catarino (2021a), Vieira (2020), Vieira, Alves e Catarino (2022c), Vieira, Alves e Catarino (2022a), Vieira, Alves e Catarino (2022b), Vieira, Alves e Catarino (2024a), é realizado um estudo do processo de generalização, complexificação e do modelo combinatório dos números dessa sequência, ocorrendo assim a fase das análises prévias da ED.

Além disso, vale destacar os trabalhos de Sousa, Vieira, , Alves, Aires e Catarino (2024) e Vieira, Sousa e Alves (2024), os quais retratam abordam as sequências de Padovan e Perrin como sequências finitas, permitindo uma integração com as sequências modulares e a sua transformação da sequência infinita em finita. Porém, não serão abordadas nesta pesquisa, tendo em vista a diversidade e complexidade do tema já selecionado neste trabalho.

5.1 A generalização da forma matricial de perrin e da ordem da sequência

Baseado nos trabalhos de Vieira (2020), Vieira e Alves (2019b), Vieira e Alves (2019d), Cereceda (2015), Alves (2015), Alves (2013), Bacani e Rabago (2015) em que tratam da extensão da sequência de Fibonacci e Padovan para uma ordem maior, considerando uma quantidade maior no somatório dos termos da sua fórmula de recorrência, tem-se o mesmo processo para a sequência de Perrin. Shtayat e Al-Kaleeb (2022), Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2020), Sokhuma (2013) abordam ainda a forma matricial para as sequências de Padovan e Perrin. Com isso, a partir dos números de Perrin, de terceira ordem, realiza-se uma extensão para a quarta ordem, denominando-a de sequência de Tetrarrin até a sua generalização para a ordem n, denominada n-ésimorrin.

5.1.1 Sequência de Perrin

A sequência de Perrin é uma sequência recorrente de terceira ordem, possuindo a mesma fórmula de recorrência da sequência de Padovan (ver Definição 4.6). Desse modo, tem-se os seus primeiros termos como sendo: $3,0,2,3,2,5,5,7,\ldots$

A forma matricial de sequências lineares recorrentes, como a sequência de Perrin, oferece uma abordagem eficiente para calcular seus termos. Seguindo a ideia apresentada por Vieira, Alves, Catarino e Rodrigues (2020), é possível utilizar uma matriz geradora para representar a recorrência. Essa matriz encapsula as relações entre os termos da sequência, permitindo que os cálculos sejam realizados por meio de multiplicações matriciais.

Uma matriz utilizada para obter a forma matricial, é a matriz de Casoratian, utilizada para analisar a independência linear de sequências ou funções em contextos discretos, como no estudo de sequências recorrentes. Trata-se de uma ferramenta central na teoria de recorrências lineares e tem aplicações em álgebra e análise discreta (Silva; Spreafico, 2024).

Teorema 5.1. *A forma matricial da sequência de Perrin, para $n \in \mathbb{N}$, é dada por (Mangueira, 2020):*

$$\boldsymbol{v_p} Q^n = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R_n & R_{n+1} & R_{n+2} \end{bmatrix},$$

em que $\boldsymbol{v_p}$ representa o vetor de estado inicial, contendo os valores iniciais da sequência de Perrin.

Demonstração. Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_p} Q^1 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido para este valor inicial.

Supondo que para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$ valha, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_p} Q^k &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} R_k & R_{k+1} & R_{k+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, para $n = k+1$, verificaremos para: Como $\boldsymbol{v_p}Q^{k+1} = \boldsymbol{v_p}Q^kQ$ segue que:

$$
\begin{aligned}
pmbv_pQ^{k+1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_k & R_{k+1} & R_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{k+1} & R_{k+2} & R_{k+1} + R_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{k+1} & R_{k+2} & R_{k+3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Concluindo assim a demonstração pelo princípio da indução finita. □

A função geradora é um método para a sequência que permite a resolução de recorrências com referência nos seus coeficientes constantes, possibilitando obter termos desta sequência sem a necessidade de realizar o cálculo de todos os números que o precedem (Soykan, 2020). Essas funções desempenham um papel fundamental na resolução de problemas dentro do campo da matemática discreta. Uma de suas principais vantagens é a capacidade de transformar problemas envolvendo sequências de números reais em funções de uma única variável. Isso amplia consideravelmente na variedade de recursos matemáticos disponíveis para abordar uma ampla gama de problemas.

SÁ e Spreafico (2019), por sua vez, retrata que as funções geradoras são empregadas para resolver problemas que lidam com sequências de números reais, as quais dependem dos seus termos anteriores imediatos, frequentemente denominadas como relações de recorrência. Desse modo, destaca-se que as funções geradoras não se restringem apenas à resolução de recorrências, pois também são uma ferramenta valiosa em atividades de análise combinatória.

A função geradora de uma sequência $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em série formal em q onde o coeficiente de q^n fornece uma fórmula explícita para c_n.

Definição 5.1. *Uma função $f(x)$ é uma função geradora para uma sequência de números reais $(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots)$, $c_n \in \mathbb{N}$, relativa à sequência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots)$ se (Sampaio, 1998):*

$$f(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots$$

Entre as inúmeras funções geradoras disponíveis, destaca-se especialmente nas que são categorizadas como funções geradoras ordinárias.

Definição 5.2. *Define-se $f(x)$ a função geradora ordinária para a sequência $(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots)$, como sendo a função geradora para a sequência $(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots)$, relativa à sequência $\left(1, x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots\right)$, ou seja,*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

Teorema 5.2. *A função geradora da sequência de Perrin, em que $n \in \mathbb{N}$, é dada por:*

$$g(R_n, x) = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Dada a série formal em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão $\{a_n\}$ com n pertencendo aos números naturais, considere $g(a_n, x)$ a função definida pela série:

$$g(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

Realizando a multiplicação da função por x^2, x^3 nas equações abaixo devido à sua relação de recorrência, tendo em atenção a Definição 4.6, tem-se que:

$$g(R_n, x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + R_3 x^3 + R_4 x^4 + \ldots \tag{5.1}$$

$$x^2 g(R_n, x) = R_0 x^2 + R_1 x^3 + R_2 x^4 + R_3 x^5 + R_4 x^6 + \ldots \tag{5.2}$$

$$x^3 g(R_n, x) = R_0 x^3 + R_1 x^4 + R_2 x^5 + R_3 x^6 + R_4 x^7 + \ldots \tag{5.3}$$

Baseado nas Equações (5.1-5.2-5.3) e tendo conta as condições iniciais da sequência de Perrin, tem-se que:

$$g(R_n, x)(1 - x^2 - x^3) = R_0 + R_1 x + (R_2 - R_0) x^2$$
$$g(R_n, x)(1 - x^2 - x^3) = 3 - x^2.$$

Então R_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$g(R_n, x) \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3},$$

desde que $(1 - x^2 - x^3) \neq 0$. □

Além da função geradora, existe ainda a fórmula de Binet, a qual possui o nome do matemático Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), tendo sido investigada, primeiramente, por Abraham de Moivre (1667-1764). Essa fórmula determina qualquer termo de uma sequência sem utilizar a sua recursividade. Para isso, é necessário realizar um estudo do polinômio característico da sequência, uma vez que cada sequência possui um polinômio associado a ela.

Definição 5.3. *Dada uma relação de recorrência homogênea de ordem r,* $V_{n+1} = aV_n + \ldots + a_{r-1}V_{n-r+1}$ *o polinômio (Sa; Spreafico, 2020),*

$$p(z) = z^r - a_0 z^{z-1} - \ldots - a_{r-2}z - a_{r-1},$$

é chamado de polinômio característico da relação de recorrência V_n *com raízes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *e respectivas multiplicidades* $m_1, m_2, \ldots, m_s$.

Teorema 5.3. *O polinômio característico da sequência de Perrin é dado por:*

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Demonstração. Utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Perrin é dado por (Gomes; Oliveira, 2019):

$$p(\lambda) = det(\lambda I - F),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo:

$$p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Assim: $x^3 - x - 1 = 0$ □

As suas raízes são uma real e duas complexas, sendo elas:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 \pm 0,56228i.$$

A solução real é conhecida como número de plástico, em que representa a razão de convergência entre os números vizinhos desta sequência (Aarts, 2001).

Teorema 5.4. *A fórmula de Binet da sequência de Perrin, é dada por:*

$$R_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, x_1, x_2 *e* x_3 *são as raízes distintas da equação característica e os coeficientes são:*

$$A = \frac{2+3x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{2+3x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{2+3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Demonstração. Dada a relação de recorrência da sequência de Perrin: $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$, os valores iniciais: $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$ e a sua equação característica: $x^3 - x - 1 = 0$ com raízes distintas x_1, x_2, x_3, tem-se a resolução do sistema:

$$\begin{cases} A + B + C & = 3 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 & = 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 & = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{2+3x_2x_3}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{2+3x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$
$$B = \frac{2+3x_1x_3}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{2+3x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)},$$
$$C = \frac{2+3x_1x_2}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{2+3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

□

A seguir, tem-se o estudo da generalização da sequência de Perrin, realizando uma extensão para os índices inteiros não positivos. Assim, a partir da recorrência de Perrin, tem-se uma manipulação algébrica, apresentando a fórmula de recorrência para índice inteiro não positivo da sequência de Perrin, é dada por: $R_{-n} = R_{-n+3} - R_{-n+1}$, com $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ e os seus primeiros termos apresentados no Quadro 6.

Quadro 6 – Termos da sequência de Perrin - índice inteiro não positivo

R_{-10}	R_{-9}	R_{-8}	R_{-7}	R_{-6}	R_{-5}	R_{-4}	R_{-3}	R_{-2}	R_{-1}	R_0
6	-7	5	-1	-2	4	-3	2	1	-1	3

Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 5.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência de Perrin para os termos não positivos, é dada por:*

$$\boldsymbol{v_p}\rho^n = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R_{-n} & R_{-n+1} & R_{-n+2} \end{bmatrix}, n \geqslant 1,$$

em que $\boldsymbol{v_p}$ representa o vetor de estado inicial, contendo os valores iniciais da sequência de Perrin e $\rho = Q^{-1}$.

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, verifica-se que o teorema é válido para $n = 1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_p}\rho^n &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{-1} & R_0 & R_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{v_p}\rho^k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} R_{-k} & R_{-k+1} & R_{-k+2} \end{bmatrix}.$$

Assim, demonstra-se que vale para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_p}\rho^{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} R_{-k} & R_{-k+1} & R_{-k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -R_{-k} + R_{-k+2} & R_{-k} & R_{-k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{-k-1} & R_{-k} & R_{-k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.6. *A função geradora da sequência de Perrin, para os termos com índice inteiro não positivo é descrita por:*

$$g(R_{-n}, x) = \frac{-2x-3}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. A função $g(R_{-n},x)$ é multiplicada por x^3 e x, de acordo com a fórmula de recorrência ($R_{-n} = R_{-n+3} - R_{-n+1}$). Considerando $R_0 = 3, R_{-1} = -1, R_{-2} = 1$, tem-se que:

$$g(R_{(-n)},x) = R_0 + R_{-1}x + R_{-2}x^2 + R_{-3}x^3 + R_{-4}x^4 + \ldots \tag{5.4}$$

$$xg(R_{(-n)},x) = R_0x + R_{-1}x^2 + R_{-2}x^3 + R_{-3}x^4 + R_{-4}x^5 + \ldots \tag{5.5}$$

$$x^3g(R_{(-n)},x) = R_0x^3 + R_{-1}x^4 + R_{-2}x^5 + R_{-3}x^6 + R_{-4}x^7 + \ldots \tag{5.6}$$

De acordo com as Equações (5.6 - 5.5 + 5.4), resulta-se em:

$$g(R_{-n},x)(x^3 - x - 1) = -R_0x - R_{-1}x^2 - R_0 - R_{-1}x - R_{-2}x^2$$

$$g(R_{-n},x)(x^3 - x - 1) = -2x - 3$$

$$g(R_{-n},x) = \frac{-2x-3}{x^3 - x - 1}.$$

□

5.1.2 Sequência de Tetrarrin

A sequência de Tetrarrin é uma sequência recorrente de quarta ordem, sendo uma extensão da ordem em relação à sequência de Perrin, definida por Vieira, Alves e Catarino (2024).

Definição 5.4. *A sequência Tetrarrin, representada por* $\left\{R_n^4\right\}_n \in \mathbb{N}$*, tem a seguinte fórmula de recorrência (Vieira, 2024):*

$$R_n^4 = R_{n-2}^4 + R_{n-3}^4 + R_{n-4}^4, n \geqslant 4,$$

com os seguintes valores iniciais: $R_0^4 = 3$*,* $R_1^4 = 0$*,* $R_2^4 = 2$ *e* $R_3^4 = 3$*.*

Desse modo, tem-se os primeiros termos dessa sequência como sendo: $3,0,2,3,5,5,10,13,\ldots$

Teorema 5.7. *A forma matricial da sequência Tetrarrin, representada por* $\Gamma^{(n)}$ *para* $n \in \mathbb{N}$*, é expressa por Vieira, Alves e Catarino (2024):*

$$\boldsymbol{v_t}\Gamma^{(n)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R_n^4 & R_{n+1}^4 & R_{n+2}^4 & R_{n+3}^4 \end{bmatrix},$$

em que $\boldsymbol{v_t}$ *é o vetor de estado inicial contendo os valores iniciais da sequência de Tetrarrin.*

Demonstração. Provando que para $n = 1$, a igualdade é verdadeira, tem-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\Gamma^{(1)} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_1^4 & R_2^4 & R_3^4 & R_4^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\Gamma^{(k)} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \\
&= \begin{bmatrix} R_k^4 & R_{k+1}^4 & R_{k+2}^4 & R_{k+3}^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, verificando que vale também para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\Gamma^{(k+1)} &= \boldsymbol{v_t}\Gamma^{(k)}\Gamma \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_k^4 & R_{k+1}^4 & R_{k+2}^4 & R_{k+3}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{k+1}^4 & R_{k+2}^4 & R_{k+3}^4 & R_{k+2}^4 + R_{k+1}^4 + R_k^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{k+1}^4 & R_{k+2}^4 & R_{k+3}^4 & R_{k+4}^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Validando assim o teorema pelo princípio da indução finita. □

Teorema 5.8. *A função geradora da sequência Tetrarrin para $n \in \mathbb{N}$ é dada por Vieira, Alves e Catarino (2024):*

$$g(R_n^4, x) = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3 - x^4}.$$

Demonstração. Multiplicando a função $g(R_n^4,x)$ por x^2,x^3 e x^4, de acordo com a fórmula de recorrência ($R_n^4 = R_{n-2}^4 + R_{n-3}^4 + R_{n-4}^4$), em que $R_0^4 = 3, R_1^4 = 0, R_2^4 = 2, R_3^4 = 3$, tem-se:

$$g(R_n^4,x) = R_0^4 + R_1^4 x + R_2^4 x^2 + R_3^4 x^3 + R_4^4 x^4 + \ldots \tag{5.7}$$

$$x^2 g(R_n^4,x) = R_0^4 x^2 + R_1^4 x^3 + R_2^4 x^4 + R_3^4 x^5 + R_4^4 x^6 + \ldots \tag{5.8}$$

$$x^3 g(R_n^4,x) = R_0^4 x^3 + R_1^4 x^4 + R_2^4 x^5 + R_3^4 x^6 + R_4^4 x^7 + \ldots \tag{5.9}$$

$$x^4 g(R_n^4,x) = R_0^4 x^4 + R_1^4 x^5 + R_2^4 x^6 + R_3^4 x^7 + R_4^4 x^8 + \ldots \tag{5.10}$$

De acordo com as Equações (5.7-5.8-5.9-5.10), percebe-se que:

$$g(R_n^4,x)(1-x^2-x^3-x^4) = R_0^4 + R_1^4 x + (R_2^4 - R_0^4)x^2 + (R_3^4 - R_1^4 - R_0^4)x^3$$

$$g(R_n^4,x)(1-x^2-x^3-x^4) = 3 - x^2.$$

Então R_{-n}^4 é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$g(R_n^4,x) = \frac{3-x^2}{1-x^2-x^3-x^4},$$

desde que $(1-x^2-x^3-x^4) \neq 0$. □

Teorema 5.9. *O polinômio característico da sequência de Tetrarrin é Vieira, Alves e Catarino (2024):*

$$x^4 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Demonstração. Utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Tetrarrin dado por (Gomes; Oliveira, 2019):

$$p(\lambda) = det(\lambda I - \Gamma'),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $\Gamma' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim:

$$p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Logo: $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ □

Em que realizando o cálculo para encontrar as raízes de tal polinômio, tem-se:

$$S = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}},$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}.$$

Desta forma, as raízes calculadas são:

$$x_1 = \frac{1}{3} + S + P,$$

$$x_2 = -1,$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)i,$$

$$x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)i.$$

Teorema 5.10. *Fórmula de Binet da sequência de Tetrarrin, com $n \in \mathbb{Z}$ é descrita por Vieira, Alves e Catarino (2024):*

$$R_n^4 = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes distintas da equação característica de Tetrarrin e os coeficientes são:

$$A = \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{2x_1^4 + x_1 + 2}, B = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2x_2^4 + x_2 + 2},$$

$$C = \frac{x_3^2 + x_3 + 1}{2x_3^4 + x_3 + 2}, D = \frac{x_4^2 + x_4 + 1}{2x_4^4 + x_4 + 2}.$$

Demonstração. De posse da recorrência da sequência de Tetrarrin, conhecida por $R_n^4 = R_{n-2}^4 + R_{n-3}^4 + R_{n-4}^4$, dos seus valores iniciais dados por: $R_0^4 = 3, R_1^4 = 0, R_2^4 = 2, R_3^4 = 3$ e do seu polinômio característico: $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3, x_4, tem-se a resolução do sistema:

$$\begin{cases} A + B + C + D & = 3 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 & = 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 & = 2 \\ Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_4^3 & = 3 \end{cases}$$

Tabela 2 – Termos da sequência de Tetrarrin - índice inteiro não positivo

R^4_{-10}	R^4_{-9}	R^4_{-8}	R^4_{-7}	R^4_{-6}	R^4_{-5}	R^4_{-4}	R^4_{-3}	R^4_{-2}	R^4_{-1}	R^4_0
9	-7	-2	5	0	-4	3	1	-1	0	3

Fonte: Elaborado pela autora.

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{-2x_4 - 2x_2 - 3x_2x_3x_4 - 2x_3 + 3}{x_1^3 - x_1^2x_4 - x_1^2x_2 + x_1x_2x_4 - x_1^2x_3 + x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3},$$
$$B = \frac{-2x_4 - 2x_1 - 3x_1x_3x_4 - 2x_3 + 3}{x_2^3 - x_2^2x_4 - x_1x_2^2 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2^2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3},$$
$$C = \frac{2x_4 + 2x_1 + 3x_1x_2x_4 + 2x_2 - 3}{-x_3^3 + x_3^2x_4 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3 + x_2x_3^2},$$
$$D = \frac{-2x_1 - 2x_2 - 3x_1x_2x_3 - 2x_3 + 3}{x_4^3 - x_1x_4^2 - x_2x_4^2 + x_1x_2x_4 - x_3x_4^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3}.$$

Utilizando as relações $x_1x_2x_3x_4 = -1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1$, é fácil ver que:

$$A = \frac{2x_1 + \frac{3}{x_1} + 3}{2x_1^3 + 1 + \frac{2}{x_1}} = \frac{2x_1^2 + 3x_1 + 3}{2x_1^4 + x_1 + 2},$$
$$B = \frac{2x_2 + \frac{3}{x_2} + 3}{2x_2^3 + 1 + \frac{2}{x_2}} = \frac{2x_2^2 + 3x_2 + 3}{2x_2^4 + x_2 + 2},$$
$$C = \frac{-2x_3 - \frac{3}{x_3} - 3}{-2x_3^3 - 1 - \frac{2}{x_3}} = \frac{-(2x_3^2 + 3x_3 + 3)}{-(2x_3^4 + x_3 + 2)} = \frac{2x_3^2 + 3x_3 + 3}{2x_3^4 + x_3 + 2},$$
$$D = \frac{2x_4 + \frac{3}{x_4} + 3}{2x_4^3 + 1 + \frac{2}{x_4}} = \frac{2x_4^2 + 3x_4 + 3}{2x_4^4 + x_4 + 2}.$$

□

Desse modo, é realizado o estudo da generalização da sequência de Tetrarrin, extendendo os números dessa sequência para os índices inteiros não positivos. Assim, a partir da recorrência de Tetrarrin, tem-se uma manipulação algébrica da fórmula de recorrência, resultando na recorrência: $R^4_{-n} = R^4_{-n+4} - R^4_{-n+2} - R^4_{-n+1}$, com $n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$ e os seus primeiros termos apresentados na Tabela 2.

Teorema 5.11. *Seja $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência Tetrarrin para os termos não positivos é dada por:*

$$\boldsymbol{v_t}\,\delta^n = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} R^4_{-n} & R^4_{-n+1} & R^4_{-n+2} & R^4_{-n+3} \end{bmatrix}.$$

em que $\boldsymbol{v_t}$ é o vetor de estado inicial contendo os valores iniciais da sequência Tetrarrin e $\delta = \Gamma^{-1}$.

Demonstração. Provando que para $n = 1$, a igualdade é verdadeira, tem-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\delta &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R^4_{-1} & R^4_0 & R^4_1 & R^4_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\delta^k &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\
&= \begin{bmatrix} R^4_{-k} & R^4_{-k+1} & R^4_{-k+2} & R^4_{-k+3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, verificando que vale também para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_t}\delta^{k+1} &= \boldsymbol{v_t}\delta^k \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R^4_{-k} & R^4_{-k+1} & R^4_{-k+2} & R^4_{-k+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -R^4_{-k} - R^4_{-k+1} + R^4_{-k+3} & R^4_{-k} & R^4_{-k+1} & R^4_{-k+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R^4_{-k-1} & R^4_{-k} & R^4_{-k+1} & R^4_{-k+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Validando assim o teorema pelo princípio da indução finita. □

Teorema 5.12. *A função geradora da sequência Tetrarrin para os termos não positivos, é dada por:*

$$g(R^4_{-n},x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x}{1 - x^2 - x^3 - x^4}.$$

Demonstração. Baseado na função $g(R^4_{-n},x) = R^4_0 + R^4_{-1}x + R^4_{-2}x^2 + R^4_{-3}x^3 + R^4_{-4}x^4 + \ldots$, pode-se multiplicar por x, x^2, x^4 obtendo:

$$g(R^4_{-n},x) = R^4_0 + R^4_{-1}x + R^4_{-2}x^2 + R^4_{-3}x^3 + R^4_{-4}x^4 + \ldots \tag{5.11}$$

$$xg(R^4_{-n},x) = R^4_0 x + R^4_{-1}x^2 + R^4_{-2}x^3 + R^4_{-3}x^4 + R^4_{-4}x^5 + \ldots \tag{5.12}$$

$$x^2 g(R^4_{-n},x) = R^4_0 x^2 + R^4_{-1}x^3 + R^4_{-2}x^4 + R^4_{-3}x^5 + R^4_{-4}x^6 + \ldots \tag{5.13}$$

$$x^4 g(R^4_{-n},x) = R^4_0 x^4 + R^4_{-1}x^5 + R^4_{-2}x^6 + R^4_{-3}x^7 + R^4_{-4}x^8 + \ldots \tag{5.14}$$

Assim, realizando 5.14 − [5.13 + 5.12 + 5.11], tem-se que $x^4 g(R^4_{-n},x) - [x^2 g(R^4_{-n},x) + xg(R^4_{-n},x) + g(R^4_{-n},x)]$ e com $R^4_0 = 3, R^4_{-1} = 0, R^4_{-2} = -1$, obtêm-se:

$$g(R^4_{-n},x)(x^4 - x^2 - x - 1) = -R^4_0(x^2 + x) - R^4_{-1}(x^3 + x^2) - (R^4_{-2}x^3)$$
$$g(R^4_{-n},x)(x^4 - x^2 - x - 1) = x^3 - 3x^2 - 3x.$$

Então R^4_{-n} é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$g(R^4_{-n},x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x}{(x^4 - x^2 - x - 1)},$$

desde que $(x^4 - x^2 - x - 1) \neq 0$. □

5.1.3 Sequência de z-ésimorrin

Com referência nas sequências de Perrin e Tetrarrin, tem-se o processo de generalização da ordem da sequência, denominando-a de sequência z-ésimorrin.

Definição 5.5. *A sequência z-ésimorrin, $\{R^z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por:*

$$R^{(z)}_{n+z} = \sum_{i=0}^{z-2} R^{(z)}_{n+i}, n \geqslant z,$$

em que z representa a ordem da sequência.

Conjectura 5.1. *Com $n \geqslant z-3$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência z-ésimorrin, é dada por:*

$$\boldsymbol{v_Z}\zeta^n = \begin{bmatrix} R_n^z & R_{n+1}^z & \dots & R_{n+z-1}^z \end{bmatrix},$$

em que z representa a ordem da sequência, $\boldsymbol{v_Z}$ *dado pelo vetor de estado inicial carregando os valores iniciais da sequência em ordem crescente de posição.* ***[I]*** *a matriz de bloco dada pela matriz identidade,* ***0*** *o vetor de estado inicial, ambos de tamanho* $z-1$ *e* $\zeta^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ \boldsymbol{[I]} & 0 \end{bmatrix}$

A primeira coluna inicia com um vetor de estado inicial **0**, preenchendo a matriz com colunas de zeros, variando de acordo com a ordem da sequência. Em seguida, tem-se uma matriz de bloco dada pela matriz identidade ***[I]***, sendo expressa de acordo com o número de termos somados da sequência.

A segunda coluna representa o operador, sendo descrito de acordo com a fórmula de recorrência. Inicia-se com o coeficiente 0, sendo então escrita no formato do último elemento para o primeiro.

O vetor de estado inicial $\boldsymbol{v_Z}$, o qual carrega os valores iniciais da sequência de Z-ésimorrin, é obtido por meio do cálculo matemático realizado da seguinte forma: a partir do vetor inicial definido para Z-ésimorrin de ordem $z-1$, adiciona-se um novo elemento. Esse novo elemento é dado como o somatório de todos os elementos anteriores, exceto pelo elemento de maior ordem. Para exemplificar, tem-se a obtenção dos valores iniciais de Pentarrin, em que traz os valores iniciais da sequência anterior (Tetrarrin), dada por $3,0,2,3,5$. Assim, o próximo elemento que será adicionado para compor os valores iniciais de Pentarrin, será dado pelo somatório dos valores iniciais de Tetrarrin, 8, observando o a ausência do termo antecessor mais imediato, característica da sequência, presente em sua recorrência.

A partir da Definição 5.5, pode-se concluir que a generalização desta sequência é facilmente calculada de acordo com a ordem da sequência. Assim, para o modelo de generalização apresentado, partindo da sequência de Perrin (ordem 3), pode-se chegar a uma perspectiva mais geral (z-ésima ordem ou ordem z).

De posse dos resultados referentes às funções geradoras das sequências anteriores, pode-se obter a função geradora da sequência generalizada z-ésimorrin.

Conjectura 5.2. *A função geradora da sequência z-ésimorrin para* $n \in \mathbb{N}$ *é dada por:*

$$g(R_n^z, x) = \frac{3-x^2}{1-(\sum_{i=1}^{z-1} x^{i+1})},$$

em que z representa a ordem da sequência.

O polinômio característico da sequência z-ésimorrin pode ser calculado de forma semelhante como foi realizado nos Teoremas (5.3 e 5.9). É importante notar a existência de um salto nestas equações, validando a fórmula de recorrência destas sequências.

Conjectura 5.3. *O polinômio característico da sequência z-ésimorrin (Generalização), em que z é a ordem da sequência estendida, é dado por:*

$$R_x^z = x^{(z)} = x^{(z-2)} + x^{(z-3)} + x^{(z-4)} + \ldots + x^{(z-z)}.$$

Diante dos resultados apresentados para a fórmula de Binet das sequências vistas nas subseções anteriores, pode-se obter a seguinte conclusão referente à sequência z-ésimorrin, conforme apresentada no Teorema 5.4.

Conjectura 5.4. *A fórmula de Binet da sequência z-ésimorrin é dada por:*

$$R_n^z = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + ...Z(x_z)^n,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, $A,B,C,\ldots,Z$ *são os coeficientes da função, e* $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_z$ *são as raízes distintas do polinômio característico da sequência.*

Os coeficientes deverão ser calculados de acordo com a ordem da extensão da sequência. Assim, para pentarrin existirão 5 coeficientes, hexarrin 6 e assim por diante. A quantidade de raízes se dará de forma semelhante.

Com referência na análise realizada referente ao comportamento das extensões das sequências de Perri com índice inteiro não positivo e na recorrência abordada na Definição 5.5, pode-se estabelecer uma recorrência para a sequência z-ésimorrin com $n > 0$ em que:

$$R_{-n}^z = R_{Z(-n+z+1)} + \sum_{i=0}^{z-1} R_{-n+1}^z.$$

A partir teoremas em que tratam das formas matriciais e das funções geradoras das sequências de Perrin e Tetrarrin, tem-se os corolários da sequência de z-ésimorrin para os termos não positivos.

Corolário 5.1. *Com* $n \geqslant z-3$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *a forma matricial da sequência z-ésimorrin para os termos não positivos é dada por:*

$$\boldsymbol{v_Z\varsigma}^n = \begin{bmatrix} R_{-n}^z & R_{-n+1}^z & \ldots & R_{-n+z-1}^z \end{bmatrix},$$

em que z representa a ordem da sequência, $\boldsymbol{v_Z}$ *dado pelo vetor de estado inicial carregando os valores iniciais da sequência em ordem crescente de posição.* ***[I]*** *a matriz de bloco dada pela matriz identidade,* $\boldsymbol{0}$ *o vetor de estaod inicial, ambos de tamanho* $z-1$ *e* $\varsigma = \zeta^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & 1 \\ \boldsymbol{[I]} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

Corolário 5.2. *A função geradora da sequência de z-ésimorrin para os termos não positivos, é dada por:*

$$g(R^z_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{i=0}^{z-2} x^i\right)}{x^{(z)} - \sum_{i=0}^{z-2} x^i},$$

sendo z representado pela ordem da sequência que irá variar de 3 *até z.*

5.2 O estudo da sequência (s,t)-perrin

Esta seção realiza de modo primordial a generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência da sequência de Perrin, denominando-a de sequência (s,t)-Perrin generalizada. Além disso, realiza-se a extensão dessa sequência por meio da sua ordem, obtendo a generalização dos coeficientes e da ordem dos números dessa sequência.

Diante disso, tem-se como base os trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2019b), Vieira (2020), em que são realizados estudos para a sequência de Padovan, investigando a generalização dos números dessa sequência tanto em ordem quanto em relação aos seus coeficientes. Além disso, destaca-se os trabalhos de Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2021), Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021b) em que realizam o estudo da sequência polinomial de Perrin e a definição das relações n-dimensionais de Perrin.

5.2.1 A sequência (s,t)-Perrin

A sequência (s,t)-Perrin é definida, primordialmente nesta pesquisa, representando a generalização dos coeficientes existentes na fórmula de recorrência da sequência de Perrin. Para o caso particular em que $s = t = 1$, tem-se a sequência primitiva de Perrin. Vale destacar que Vieira (2020) definiu esta generalização para a sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_{(z-1)})$-Z-dovan.

Definição 5.6. *Para $s,t \in \mathbb{Z}$, a sequência (s,t)-Perrin $\{R_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, é definida pela fórmula de recorrência:*

$$R_{(n)}^{(s,t)} = sR_{(n-2)}^{(s,t)} + tR_{(n-3)}^{(s,t)}, n \geqslant 3$$

com os valores iniciais: $R_{(0)}^{(s,t)} = 3$, $R_{(1)}^{(s,t)} = 0$ e $R_{(2)}^{(s,t)} = 2$.

Teorema 5.13. *A matriz geradora da sequência (s,t)-Perrin, para $n \in \mathbb{N}$, é dada por:*

$$\boldsymbol{v_3}Q_{(s,t)}^{n} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} R_{(n)}^{(s,t)} & R_{(n+1)}^{(s,t)} & R_{(n+2)}^{(s,t)} \end{bmatrix},$$

em que $\boldsymbol{v_3}$ representa o vetor linha, contendo os valores iniciais da sequência (s,t)-Perrin.

Demonstração. Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_3}Q_{(s,t)}^{1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{(1)}^{(s,t)} & R_{(2)}^{(s,t)} & R_{(3)}^{(s,t)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido para este valor inicial.

Supondo que para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$ valha, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_3}Q_{(s,t)}^{k} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k} \\ &= \begin{bmatrix} R_{(k)}^{(s,t)} & R_{(k+1)}^{(s,t)} & R_{(k+2)}^{(s,t)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_3}Q_{(s,t)}^{k+1} &= \boldsymbol{v_3}Q_{(s,t)}^{k}Q_{(s,t)} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k)}^{(s,t)} & R_{(k+1)}^{(s,t)} & R_{(k+2)}^{(s,t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k+1)}^{(s,t)} & R_{(k+2)}^{(s,t)} & sR_{(k+1)}(s,t) + tR_{(k)}^{(s,t)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k+1)}^{(s,t)} & R_{(k+2)}^{(s,t)} & R_{(k+3)}^{(s,t)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração pelo princípio da indução finita. □

A função geradora corresponde a resolução de sequências recorrentes cujos seus coeficientes sejam constantes (Koshy, 2001). Com isso, é possível obter os termos de uma sequência, sem necessitar conhecer os seus termos anteriores por meio da série de Taylor que realiza a divisão direta da função geradora. Assim, a posição do termo da sequência é representado pelo expoente da variável x, e o termo da sequência pelo seu coeficiente (Meyer; Rubinfeld, 2005).

Teorema 5.14. *A função geradora da sequência (s, t)-Perrin, em que $n \in \mathbb{N}$, é dada por:*

$$g(R_{(n)}^{(s,t)}, x) = \frac{3 - x^2}{1 - sx^2 - tx^3}.$$

Demonstração. Para números de Perrin, esta função é multiplicada por sx^2, tx^3 nas equações abaixo devido à sua relação de recorrência.

Assim, para a sequência (s, t)-Perrin, onde $R_{(0)}^{(s,t)} = 3, R_{(1)}^{(s,t)} = 0, R_{(2)}^{(s,t)} = 2$, e $R_{(n)}^{(s,t)}$ é o n-ésimo termo da sequência (s, t)-Perrin, tem-se que:

$$g(R_{(n)}^{(s,t)}, x) = R_{(0)}^{(s,t)} + R_{(1)}^{(s,t)}x + R_{(2)}^{(s,t)}x^2 + R_{(3)}^{(s,t)}x^3 + R_{(4)}^{(s,t)}x^4 + \ldots \tag{5.15}$$

$$sx^2 g(R_{(n)}^{(s,t)}, x) = sR_{(0)}^{(s,t)}x^2 + sR_{(1)}^{(s,t)}x^3 + sR_{(2)}^{(s,t)}x^4 + sR_{(3)}^{(s,t)}x^5 + sR_{(4)}^{(s,t)}x^6 + \ldots \tag{5.16}$$

$$tx^3 g(R_{(n)}^{(s,t)}, x) = tR_{(0)}^{(s,t)}x^3 + tR_{(1)}^{(s,t)}x^4 + tR_{(2)}^{(s,t)}x^5 + tR_{(3)}^{(s,t)}x^6 + tR_{(4)}^{(s,t)}x^7 + \ldots \tag{5.17}$$

Baseado nas Equações (5.15-5.16-5.17), tem-se que:

$$\begin{aligned}
g(R_{(n)}^{(s,t)}, x)(1 - sx^2 - tx^3) &= R_{(0)}^{(s,t)} + R_{(1)}^{(s,t)}x + (R_{(2)}^{(s,t)} - R_{(0)}^{(s,t)})x^2 \\
g(R_{(n)}^{(s,t)}, x)(1 - sx^2 - tx^3) &= 3 - x^2.
\end{aligned}$$

A função geradora associada à sequência $R_{(n)}^{(s,t)}$ é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de $\frac{3-x^2}{1-sx^2-tx^3}$.

□

Com o viés de obter a fórmula de Binet, o método que consiste em obter os termos de uma sequência sem necessitar da recorrência definida, tem-se a definição do polinômio característico da sequência em estudo.

Com referência na recorrência $R_{(n)}^{(s,t)} = sR_{(n-2)}^{(s,t)} + tR_{(n-3)}^{(s,t)}$, é realizado o estudo do polinômio característico da sequência.

Definição 5.7. *O polinômio característico da sequência (s, t)-Perrin é definido como:*

$$x^3 = sx + t \Longleftrightarrow x^3 - sx - t = 0,$$

onde $s,t \in \mathbb{Z}$ *e sendo as suas raízes uma real e as outras duas números complexos e conjugados. Sendo,* r_1, r_2, r_3 *as raízes distintas desse polinômio, em que:*

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, \\
B &= \left(\frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, \\
\Delta &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{3}\right)^3, \\
r_1 &= A + B, \\
r_2 &= -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B), \\
r_3 &= -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B).
\end{aligned}$$

Supondo que $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1} \in \mathbb{K}$ com $c_0 \neq 0$ é tal que (Kauers; Paule, 2011):

$$x^r c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = (x-u_1)^{e_1}(x-u_2)^{e_2} \ldots (x-u_m)^{e_m}$$

para $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{N}$ e os pares distintos $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{K}$. Então as sequências $(n^i u_j^n)_{n=0}^{\infty} (j = 1, \ldots, m), (i = 0, \ldots, e_j - 1)$ formam a base do espaço vetorial $\mathbb{K}$ de todas as soluções da equação de recorrência:

$$a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0.$$

Existem dois pontos para serem mostrados: (i) todas as sequências $(n^i u_j^n)_{n=0}^{\infty}$ são soluções da recorrência, e (ii) todas as outras soluções são combinações lineares delas.

(i) Dado um $j \in \{1,\ldots,m\}$ e $i \in \{0,\ldots,e_j-1\}$, demonstra-se que $(n^i u_j^n)_{n=0}^{\infty}$ é uma solução da recorrência. Como $(x-u_j)^{i+1}$ é um fator do polinômio característico, basta mostrar que $(x-u_j)^{i+1} \bullet (n^i u_j^n)_{n=0}^{\infty} = 0$ o que é facilmente feito por indução em i.

(ii) Como o polinômio característico tem grau r, tem-se $e_1 + \ldots + e_m = r$ portanto, o número de soluções que são consideradas concorda com a dimensão do espaço de soluções. O que resta ser mostrado é que as soluções enunciadas no teorema são linearmente independentes. Suponha que este não seja o caso. Então há uma combinação linear $\mathbb{K}$ não trivial deles que é identicamente zero. Ao agrupar sequências de partes exponenciais semelhantes, pode-se escrever esta combinação linear na forma $p_1(n)u_1^n + p_2(n)u_2^n + \ldots + p_m(n)u_m^n = 0$ com $n \geqslant 0$, e certo $p_1(x),\ldots,p_m(x) \in \mathbb{K}[k]$ são zero, alguns deles podem ser. Para cada relação, haverá um índice i tal que $p_1(x) = \ldots = p_{i-1}(x) = 0 \neq p_i(x)$. De todas as relações assumidas, selecione aquelas onde este índice i é o maior possível. Dentre eles, pode-se considerar aquele em que o grau de $p_i(x)$ é o menor possível. Então, tem-se:

$$p_i(n)u_i^n + p_{i+1}(n)u_{i+1}^n + \ldots + p_m(n)u_m^n = 0, n \geqslant 0.$$

Esta equação implica ambos:

$$p_i(n+1)u_i^{n+1} + p_{i+1}(n+1)u_{i+1}^{n+1} + \ldots + p_m(n+1)u_m^{n+1} = 0,$$

e

$$p_i(n)u_i^{n+1} + p_{i+1}(n)u_i u_{i+1}^n + \ldots + p_m(n)u_i u_m^n = 0$$

Realizando a subtração na duas equações, tem-se:

$$(\Delta p_i)(n)u_i u_i^n + \tilde{p}_i + 1(n)u_{i+1}^n + \ldots + \tilde{p}_m(n)u_m^n = 0, n \geqslant 0,$$

uma equação que viola as suposições de minimalidade, tanto para $\Delta p_i(x) = 0$ então i não era máximo, ou $\Delta p_i(x) \neq 0$, então grau $\Delta p_i(x) =$ grau $p_i(x) - 1$ e então o grau de $p_i(x)$ não foi mínimo.

Este teorema permite expressar qualquer sequência finita como uma combinação linear de termos da forma $n^d u^n$. Tudo o que precisa fazer é determinar as raízes dos polinômios característicos juntamente com suas multiplicidades e então encontrar uma combinação linear dos termos previstos no teorema acima que corresponda aos valores iniciais da sequência em

questão. Por exemplo, para a sequência $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definida como:

$$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 2a_{n+2} + 4a_{n+1} - 3a_n = 0, n \geqslant 0, a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = -4, a_3 = 0,$$

encontra-se primeiro que:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = (x-1)^2(x+1)(x-3).$$

Assim, deve existir constantes c_1, c_2, c_3, c_4 de tal modo que:

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3(-1)^n + c_4 3^n, n \geqslant 0.$$

Essas constantes são rapidamente determinadas definindo $n = 0, 1, 2, 3, 4$, o que fornece um sistema linear para c_i. Como o sistema linear é possível e determinado, em acordo ao Teorema 5.2.1 então a solução é única. Assim: $c_1 = \frac{13}{4}, c_2 = -3, c_3 = \frac{-19}{8}, c_4 = \frac{1}{8}$, resultando em:

$$a_n = \frac{13}{8} - 3n - \frac{19}{8}(-1)^n + \frac{1}{8}3^n, n \geqslant 0.$$

Teorema 5.15. *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (s, t)-Perrin é expressa por:*

$$R_{(n)}^{(s,t)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

onde C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência, r_1, r_2, r_3 as raízes do polinômio característico $x^3 - sx - t = 0$, e $27t^2 - 4s^3 \neq 0$ a condição para os coeficientes s, t da fórmula de recorrência existirem.

Demonstração. Com referência na fórmula de recorrência da sequência (s, t)-Perrin ($R_{(n)}^{(s,t)} = sR_{(n-2)}^{(s,t)} + tR_{(n-3)}^{(s,t)}$), com os seus respectivos valores iniciais definidos e o seu polinômio característico ($x^3 - sx - t = 0$), cujas raízes são dadas por: r_1, r_2, r_3, obtêm-se a resolução do sistema linear de equações.

O discriminante $\Delta = \frac{(-t)^2}{4} + \frac{(-s)^3}{27}$, referente ao polinômio de 3º grau, determina a maneira como serão as raízes do polinômio. Portanto, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, alcançando facilmente a conclusão de que $27t^2 - 4s^3 \neq 0$. Com efeito, caso a condição não exista, não haverá coeficientes indicados acima, uma vez que as raízes são iguais, não existindo nenhuma fórmula Binet. Ressalta-se também que $r_1 r_2 r_3 = t$ e que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

No caso para $\Delta = 0$ é utilizar o Teorema 5.2.1 para obter $R_{(n)}^{(s,t)}$ em função da combinação linear do espaço vetorial $\mathbb{K}$ definido anteriormente. Assim, tem-se que $27t^2 - 4s^3 = 0$, resultando em $t = \sqrt{\frac{4s^3}{27}}$. Logo:

$$x^3 - sx - t = \left(x - 2\sqrt[3]{\frac{t}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Com isso:

$$R_{(n)}^{(s,t)} = c_1 + c_2\left(2\sqrt[3]{\frac{t}{2}}\right)^n + c_3 n\left(\sqrt[3]{\frac{t}{2}}\right)^n.$$

Os coeficientes podem ser determinados definindo $n = 0,1,2,3$ para determinar as soluções do sistema linear para c_1, c_2, c_3.

□

5.2.2 A sequência (s,t,u)-Tetrarrin

A sequência (s,t,u)-Tetrarrin é definida nesta pesquisa representando uma generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência e uma extensão da ordem dessa sequência de quarta ordem. Para o caso particular em que $s = 1, t = 1$ e $u = 1$, tem-se a sequência de Tetrarrin.

Definição 5.8. *Para $s,t,u \in \mathbb{Z}$, a sequência (s,t,u)-Tetrarrin, $\left\{R(n)^{(s,t,u)^4}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, tem a seguinte fórmula de recorrência:*

$$R_{(n)}^{(s,t,u)^4} = s(R_{(n-2)}^{(s,t,u)^4}) + t(R_{(n-3)}^{(s,t,u)_4}) + u(R_{(n-4)}^{(s,t,u)^4}), n \geqslant 4,$$

com os seguintes valores iniciais: $R_{(0)}^{(s,t,u)^4} = 3$, $R_{(1)}^{(s,t,u)^4} = 0$, $R_{(2)}^{(s,t,u)^4} = 2$ e $R_{(3)}^{(s,t,u)^4} = 3$.

Teorema 5.16. *A matriz geradora da sequência (s,t,u)-Tetrarrin, representada por $\Gamma_{(s,t,u)}^{(n)}$ para $n \in \mathbb{N}$, é expressa por:*

$$\boldsymbol{v_4}\Gamma_{(s,t,u)}^{(n)} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & u\\ 1 & 0 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0 & s\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}R_{(n)}^{(s,t,u)^4} & R_{(n+1)}^{(s,t,u)^4} & R_{(n+2)}^{(s,t,u)^4} & R_{(n+3)}^{(s,t,u)^4}\end{bmatrix},$$

em que $\boldsymbol{v_4}$ é o vetor linha contendo os valores iniciais da sequência (s,t,u)-Tetrarrin.

Demonstração. Provando que para $n = 1$, a igualdade é verdadeira, tem-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_4}\Gamma^{(1)}_{(s,t,u)} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2s+3u \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_1^{(s,t,u)^4} & R_2^{(s,t,u)^4} & R_3^{(s,t,u)^4} & R_4^{(s,t,u)^4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_4}\Gamma^{(k)}_{(s,t,u)} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+1)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+2)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+3)}^{(s,t,u)^4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, verificando que vale também para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_4}\Gamma^{(k+1)}_{(s,t,u)} &= \boldsymbol{v_4}\Gamma^{(k)}_{(s,t,u)}\Gamma_{(s,t,u)} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+1)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+2)}^{(s,t,u)4} & R_{(k+3)}^{(s,t,u)^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k+1)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+2)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+3)}^{(s,t,u)^4} & sR_{(k+2)}^{(s,t,u)^4} + tR_{(k+1)}^{(s,t,u)^4} + uR_{(k)}^{(s,t,u)^4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(k+1)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+2)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+3)}^{(s,t,u)^4} & R_{(k+4)}^{(s,t,u)^4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Validando assim o teorema pelo princípio da indução finita. □

Teorema 5.17. *A função geradora da sequência (s, t, u)-Tetrarrin para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4}, x) = \frac{3 - x^2 + (3-3t)x^3}{1 - sx^2 - tx^3 - ux^4}.$$

Demonstração. Multiplicando a função $g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x)$ por sx^2,tx^3 e ux^4, de acordo com a fórmula de recorrência ($R_{(n)}^{(s,t,u)^4} = sR_{(n-2)}^{(s,t,u)^4} + tR_{(n-3)}^{(s,t,u)^4} + uR_{(n-4)}^{(s,t,u)^4}$), em que $R_{(0)}^{(s,t,u)^4} = 3, R_{(1)}^{(s,t,u)^4} = 0, R_{(2)}^{(s,t,u)^4} = 2, R_{(3)}^{(s,t,u)^4} = 3$, tem-se:

$$g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x) = R_{(0)}^{(s,t,u)^4} + R_{(1)}^{(s,t,u)^4}x + R_{(2)}^{(s,t,u)^4}x^2 + R_{(3)}^{(s,t,u)^4}x^3 + R_{(4)}^{(s,t,u)^4}x^4 + \dots \tag{5.18}$$

$$sx^2 g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x) = sR_{(0)}^{(s,t,u)^4}x^2 + sR_{(1)}^{(s,t,u)^4}x^3 + sR_{(2)}^{(s,t,u)^4}x^4 + sR_{(3)}^{(s,t,u)^4}x^5 + sR_{(4)}^{(s,t,u)^4}x^6 + \dots \tag{5.19}$$

$$tx^3 g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x) = tR_{(0)}^{(s,t,u)^4}x^3 + tR_{(1)}^{(s,t,u)^4}x^4 + tR_{(2)}^{(s,t,u)^4}x^5 + tR_{(3)}^{(s,t,u)^4}x^6 + tR_{(4)}^{(s,t,u)^4}x^7 + \dots \tag{5.20}$$

$$ux^4 g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x) = uR_{(0)}^{(s,t,u)^4}x^4 + uR_{(1)}^{(s,t,u)^4}x^5 + uR_{(2)}^{(s,t,u)^4}x^6 + uR_{(3)}^{(s,t,u)^4}x^7 + uR_{(4)}^{(s,t,u)^4}x^8 + \dots \tag{5.21}$$

De acordo com as Equações (5.18-5.19-5.20-5.21), percebe-se que:

$$\begin{aligned} g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x)(1-sx^2-tx^3-ux^4) &= R_{(0)}^{(s,t,u)^4} + R_{(1)}^{(s,t,u)^4}x + (R_{(2)}^{(s,t,u)^4} - R_{(0)}^{(s,t,u)^4})x^2 \\ &\quad + (R_{(n)}^{(s,t,u)^4} - sR_{(1)^{(s,t,u)^4}} - tR_{(3)^{(s,t,u)^4}})x^3 \\ g(R_{(n)}^{(s,t,u)^4},x)(1-sx^2-tx^3-ux^4) &= 3 - x^2 + (3-3t)x^3. \end{aligned}$$

Então $R_{(n)}^{(s,t,u)^4}$ é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de $\frac{3-x^2+(3-3t)x^3}{1-sx^2-tx^3-ux^4}$. □

Definição 5.9. *O polinômio característico da sequência (s,t,u)-Tetrarrin é definido baseado na recorrência ($R_{(n)}^{(s,t,u)^4} = s(R_{(n-2)}^{(s,t,u)^4}) + t(R_{(n-3)}^{(s,t,u)^4}) + u(R_{(n-4)}^{(s,t,u)^4})$), resultando em:*

$$x^4 = sx^2 + tx + u \Longleftrightarrow x^4 - sx^2 - tx - u = 0,$$

em que $s,t,u \in \mathbb{Z}$, r_1, r_2, r_3, r_4 são as raízes, e:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)}, \\ Q &= \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + (\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3})}{2}}, \\ \Delta_0 &= s^2 - 12u, \\ \Delta_1 &= -2s^3 + 27t^2 - 72su, \\ r_1 &= -S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ r_2 &= -S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ r_3 &= S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \\ r_4 &= S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \\ p &= -8s_1, q = -s_2. \end{aligned}$$

5.2.3 *A sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin*

Com o víes de realizar a generalização da ordem e dos coeficientes desta sequência, são consideradas as relações utilizadas para as sequências estudadas anteriormente, alcançando assim a sua forma generalizada, denominada $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin.

Definição 5.10. *Para $s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)} \in \mathbb{Z}$, a sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin $\left\{R_{(n)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, é definida por:*

$$\begin{aligned} R_{(n+1)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} &= s_1 R_{(n-1)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} + s_2 R_{(n-2)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} \\ &\quad + s_3 R_{(n-3)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} + \ldots + s_{(z-1)} R_{(n-z+1)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} \\ R_{(n+1)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} &= \sum_{i=1}^{z-1} s_i R_{(n-i)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z}, n \geqslant z-1 \end{aligned}$$

em que z representa a ordem da sequência.

Com isso, utiliza-se a notação $R_{(n)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} = R_{(n)}^z$ e $s,t,\ldots,z = s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)}$ representando a ordem da sequência.

Conjectura 5.5. *Com $n \geqslant z-3$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora da sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin, representada por $\zeta_{(s,t,\ldots,z)}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{[I]} & 0 \end{bmatrix}$, tem-se:*

$$\boldsymbol{v_Z}\zeta_{(n)(s,t,\ldots,z)}^n = \begin{bmatrix} R_{(n)}^z & R_{(n+1)}^z & \ldots & R_{(n+z-1)}^z \end{bmatrix},$$

*em que z representa a ordem da sequência, $\boldsymbol{v_Z}$ dado pelo vetor linha carregando os valores iniciais da sequência em ordem crescente de posição, $\boldsymbol{s}$ sendo o vetor coluna, **[I]** a matriz de bloco dada pela matriz identidade e $\boldsymbol{0}$ o vetor linha, ambos de tamanho $z-1$.*

A primeira coluna inicia com um vetor linha $\mathbf{0}$, preenchendo a matriz com colunas de zeros, variando de acordo com a ordem da sequência. Logo abaixo, tem-se uma matriz de bloco dada pela matriz identidade ***[I]***, sendo expressa de acordo com o número de termos somados da sequência.

A segunda coluna representa o operador, sendo descrito de acordo com a fórmula de recorrência. Inicia-se com o coeficiente 0, sendo então escrita no formato do último elemento para o primeiro.

A partir da Definição 5.5, pode-se concluir que a generalização desta sequência é facilmente calculada de acordo com a ordem da sequência. Assim, para o modelo de

generalização apresentado, partindo da sequência de Perrin (ordem 3), pode-se chegar a uma perspectiva mais geral (n-ésima ordem ou ordem z).

De posse dos resultados referentes às funções geradoras das sequências anteriores, pode-se obter a função geradora da sequência generalizada $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin.

Conjectura 5.6. *A função geradora da sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin para $n \in \mathbb{N}$ onde $R_{(n)}^{(s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)})^z} = R_{(n)}^z$, e $s,t,\ldots,z = s_1,s_2,\ldots s_{z-1}$ é dada por:*

$$g(R_{(n)}^z,x) = \frac{x}{1-(\sum_{i=1}^{z-1} s_i x^{i+1})},$$

em que z representa a ordem da sequência.

Definição 5.11. *O polinômio característico da sequência $(s,t,\ldots,z)$-n-ésimorrin, em que $s,t,\ldots,z = s_1,s_2,\ldots s_{z-1}$, é definido como:*

$$x^z = s_1x^{(z-2)} + s_2x^{(z-3)} + \ldots + s_{(z)}x^{(z-z)} \Longrightarrow x^z - s_1x^{(z-2)} - s_2x^{(z-3)} - \ldots - s_{(z)}x^{(z-z)} = 0$$

$$x^z - (\sum_{j=1}^{z-1} s_j x^{z-j-1}) = 0,$$

em que $s_1,s_2,\ldots,s_{(z-1)} \in \mathbb{Z}$, $r_1,r_2,r_3,\ldots,r_z$ são as raízes do polinômio característico da sequência.

5.3 As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-padovan

Com referência na generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência da sequência de Padovan, denominada sequência (s,t)-Padovan $P_n^{(s,t)}$, em que $P_n^{(s,t)} = sP_{n-2}^{(s,t)} + tP_{n-3}^{(s,t)}, n > 0$, assumindo os valores iniciais: $P_0^{(s,t)} = 1, P_1^{(s,t)} = 1, P_2^{(s,t)} = s$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$, tem-se o estudo das relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan (Diskaya; Menken, 2019; Vieira, 2020c; Vieira, 2021b).

Diante disso, e com referência no trabalho de Diskaya e Menken (2022), no qual tratam das relações n-dimensionais da sequência (p,q)-Fibonacci, realizando um estudo de a generalização dos coeficientes da recorrência de Fibonacci e o processo de complexificação com a inserção de unidades imaginárias. Assim, tem-se a introdução e estudo das relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan, obtendo a generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência da sequência primitiva de Padovan, combinada com a complexificação dos números dessa sequência.

5.3.1 As relações bidimensionais da sequência (s,t)-Padovan

As relações de recorrências bidimensionais da sequência (s,t)-Padovan são estudadas com referência no modelo unidimensional e aboradadas no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2022c).

Definição 5.12. *Para $n,m \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$, as relações bidimensionais da sequência (s,t)-Padovan, $P_{n,m}^{(s,t)}$, é definida pela recorrência (Vieira, 2022c):*

$$P_{n+3,m}^{(s,t)} = sP_{n+1,m}^{(s,t)} + tP_{n,m}^{(s,t)},$$

$$P_{n,m+3}^{(s,t)} = sP_{n,m+1}^{(s,t)} + tP_{n,m}^{(s,t)},$$

com $i^2 = -1$ e os valores iniciais:

$$\begin{array}{lll} P_{0,0}^{(s,t)} = 1, & P_{1,0}^{(s,t)} = 1, & P_{0,1}^{(s,t)} = 1+i, \\ P_{1,1}^{(s,t)} = 1+i, & P_{2,0}^{(s,t)} = s, & P_{0,2}^{(s,t)} = s+i, \\ P_{1,2}^{(s,t)} = s+i, & P_{2,1}^{(s,t)} = s+si, & P_{2,2}^{(s,t)} = s+si. \end{array}$$

Propriedade 5.1. *As seguintes propriedades são válidas (Vieira, 2022c):*
(a) $P_{n,0}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)}$;
(b) $P_{0,m}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)}$;
(c) $P_{n,1}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}$;
(d) $P_{1,m}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)}$;
(e) $P_{n,m}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)}P_m^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}P_{m-1}^{(s,t)}$.

Demonstração. (a) Pelo princípio da indução finita e pela recorrência: $P_{n+3,m}^{(s,t)} = P_{n+1,m}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}, m = 0$, pode-se provar a primeira proposição.

Para $n = 0$:

$$P_{0,0}^{(s,t)} = P_0^{(s,t)} = 1$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$P_{k,0}^{(s,t)} = P_k^{(s,t)}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} P_{k+4,0}^{(s,t)} &= sP_{k+2,0}^{(s,t)} + tP_{k+1,0}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_{k+2}^{(s,t)}\right) + t\left(P_{k+1}^{(s,t)}\right) \\ &= P_{k+4}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Validando a proposição (a).

(b) Pelo princípio matemática da indução e pela recorrência: $P_{n,m+3}^{(s,t)} = P_{n,m+1}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}, n = 0$, pode-se provar a proposição. Para $m = 0$:

$$P_{0,0}^{(s,t)} = P_0^{(s,t)} + iP_{-1}^{(s,t)} = 1$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$P_{0,k}^{(s,t)} = P_k^{(s,t)} + iP_{k-1}^{(s,t)}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} P_{0,k+4}^{(s,t)} &= sP_{0,k+2}^{(s,t)} + tP_{0,k+1}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_{k+2}^{(s,t)} + iP_{k+1}^{(s,t)}\right) + t\left(P_{k+1}^{(s,t)} + iP_k^{(s,t)}\right) \\ &= P_{k+4}^{(s,t)} + iP_{k+3}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Validando a proposição (b).

(c) Pelo princípio matemática da indução e pela recorrência: $P_{n+3,m}^{(s,t)} = P_{n+1,m}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}, m = 1$, pode-se provar a proposição.

Para $n = 0$:

$$P_{0,1}^{(s,t)} = P_0^{(s,t)} + iP_0^{(s,t)} = 1 + i$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$P_{k,1}^{(s,t)} = P_k^{(s,t)} + iP_k^{(s,t)}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} P_{k+4,1}^{(s,t)} &= sP_{k+2,1}^{(s,t)} + tP_{k+1,1}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_{k+2}^{(s,t)} + iP_{k+2}^{(s,t)}\right) + t\left(P_{k+1}^{(s,t)} + iP_{k+1}^{(s,t)}\right) \\ &= P_{k+4}^{(s,t)} + iP_{k+4}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Validando a proposição (c).

(d) Pelo princípio matemática da indução e pela recorrência: $P_{n,m+3}^{(s,t)} = P_{n,m+1}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}, n = 1$, pode-se provar a proposição.

Para $m = 0$:

$$P_{1,0}^{(s,t)} = P_0^{(s,t)} + iP_{-1}^{(s,t)} = 1$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$P_{1,k}^{(s,t)} = P_k^{(s,t)} + iP_{k-1}^{(s,t)}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} P_{1,k+4}^{(s,t)} &= sP_{1,k+2}^{(s,t)} + tP_{1,k+1}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_{k+2}^{(s,t)} + iP_{k+1}^{(s,t)}\right) + t\left(P_{k+1}^{(s,t)} + iP_k^{(s,t)}\right) \\ &= P_{k+4}^{(s,t)} + iP_{k+3}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Validação da proposição (d).

(e) Pelo princípio matemática da indução e pela recorrências: $P_{n+3,m}^{(s,t)} = P_{n+1,m}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}$ e $P_{n,m+3}^{(s,t)} = P_{n,m+1}^{(s,t)} + P_{n,m}^{(s,t)}$, pode-se provar a proposição.

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} P_{0,m}^{(s,t)} &= P_0^{(s,t)} P_m^{(s,t)} + iP_0^{(s,t)} P_{m-1}^{(s,t)} \\ &= P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P_{n,0}^{(s,t)} &= P_n^{(s,t)} P_0^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)} P_{-1}^{(s,t)} \\ &= P_n^{(s,t)} \end{aligned}$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_{k,m}^{(s,t)} &= P_k^{(s,t)} P_m^{(s,t)} + iP_k^{(s,t)} P_{m-1}^{(s,t)}, \\ P_{n,k}^{(s,t)} &= P_n^{(s,t)} P_k^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)} P_{k-1}^{(s,t)}. \end{aligned}$$

Demonstrando que é verdade para $n = k+1$.

$$\begin{aligned} P_{k+4,m}^{(s,t)} &= sP_{k+2,m}^{(s,t)} + tP_{k+1,m}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_{k+2}^{(s,t)} + P_m^{(s,t)} + iP_{k+1}^{(s,t)}P_{m-1}^{(s,t)}\right) \\ &+ t\left(P_{k+1}^{(s,t)} + P_m^{(s,t)} + iP_{k+1}^{(s,t)}P_{m-1}^{(s,t)}\right) \\ &= P_{k+4}^{(s,t)}P_m^{(s,t)} + iP_{k+4}^{(s,t)}P_{m-1}^{(s,t)} \end{aligned}$$

e para $m = k+1$.

$$\begin{aligned} P_{n,k+4}^{(s,t)} &= sP_{n,k+2}^{(s,t)} + tP_{n,k+1}^{(s,t)} \\ &= s\left(P_n^{(s,t)}P_{k+2}^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}P_{k+1}^{(s,t)}\right) \\ &+ t\left(P_n^{(s,t)}P_{k+1}^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}P_k^{(s,t)}\right) \\ &= P_n^{(s,t)}P_{k+4}^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}P_{k+3}^{(s,t)} \end{aligned}$$

Validando da proposição (e). □

5.3.2 As relações recorrentes tridimensionais da sequência (s,t)-Padovan

Para as relações de recorrência tridimensionais da sequência (s,t)-Padovan tem-se a inserção das unidades imaginárias i e j, realizada com aprofundamento no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2022c).

Definição 5.13. *Para $n,m,p \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$, as relações tridimensionais da sequência (s,t)-Padovan $P_{n,m,p}^{(s,t)}$ é definida pelas recorrências (Vieira, 2022c):*

$$P_{n+3,m,p}^{(s,t)} = sP_{n+1,m,p}^{(s,t)} + tP_{n,m,p}^{(s,t)},$$

$$P_{n,m+3,p}^{(s,t)} = sP_{n,m+1,p}^{(s,t)} + tP_{n,m,p}^{(s,t)},$$

$$P_{n,m,p+3}^{(s,t)} = sP_{n,m,p+1}^{(s,t)} + tP_{n,m,p}^{(s,t)},$$

com os valores iniciais e $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$:

Proposição 5.18. *As seguintes propriedades são válidas (Vieira, 2022c):*
(a) $P_{n,0,0}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)}$;
(b) $P_{n,0,1}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)} + jP_n^{(s,t)}$;

$$
\begin{array}{lll}
P_{0,0,0}^{(s,t)} = 1, & P_{1,0,0}^{(s,t)} = 1, & P_{2,0,0}^{(s,t)} = s, \\
P_{0,1,0}^{(s,t)} = 1+i, & P_{0,0,1}^{(s,t)} = 1+j, & P_{1,1,1}^{(s,t)} = 1+i+j, \\
P_{0,1,1}^{(s,t)} = 1+i+j, & P_{1,0,1}^{(s,t)} = 1+j, & P_{1,1,0}^{(s,t)} = 1+i, \\
P_{2,1,1}^{(s,t)} = s+si+sj, & P_{2,1,0}^{(s,t)} = s+si, & P_{0,2,0}^{(s,t)} = s+i, \\
P_{0,2,1}^{(s,t)} = s+i+sj, & P_{1,2,0}^{(s,t)} = s+i, & P_{0,0,2}^{(s,t)} = s+j, \\
P_{0,1,2}^{(s,t)} = s+si+j, & P_{1,0,2}^{(s,t)} = s+j, & P_{1,1,2}^{(s,t)} = s+si+j, \\
P_{1,2,1}^{(s,t)} = s+i+sj, & P_{0,2,2}^{(s,t)} = s+i+sj, & P_{2,0,1}^{(s,t)} = s+sj, \\
P_{2,2,1}^{(s,t)} = s^2+si+s^2j, & P_{2,1,2}^{(s,t)} = s^2+s^2i+sj, & P_{1,2,2}^{(s,t)} = s^2+si+sj, \\
P_{2,2,2}^{(s,t)} = s^3+s^2i+s^2j, & P_{2,0,2}^{(s,t)} = s^2+sj, & P_{2,2,0}^{(s,t)} = s^2+si.
\end{array}
$$

(c) $P_{n,1,0}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}$;
(d) $P_{n,1,1}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)} + jP_n^{(s,t)}$;
(e) $P_{0,m,0}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)}$;
(f) $P_{0,m,1}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)} + jP_m^{(s,t)}$;
(g) $P_{1,m,0}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)}$;
(h) $P_{1,m,1}^{(s,t)} = P_m^{(s,t)} + iP_{m-1}^{(s,t)} + jP_m^{(s,t)}$;
(i) $P_{0,0,p}^{(s,t)} = P_p^{(s,t)} + jP_{p-1}^{(s,t)}$;
(j) $P_{0,1,p}^{(s,t)} = P_p^{(s,t)} + iP_p^{(s,t)} + jP_{p-1}^{(s,t)}$;
(k) $P_{1,0,p}^{(s,t)} = P_p^{(s,t)} + jP_{p-1}^{(s,t)}$;
(l) $P_{1,1,p}^{(s,t)} = P_p^{(s,t)} + iP_p^{(s,t)} + jP_{p-1}^{(s,t)}$;
(m) $P_{n,m,p}^{(s,t)} = P_n^{(s,t)}P_m^{(s,t)}P_p^{(s,t)} + iP_n^{(s,t)}P_{m-1}^{(s,t)}P_p^{(s,t)} + jP_n^{(s,t)}P_m^{(s,t)}P_{p-1}^{(s,t)}$.

As demonstrações são realizadas de acordo com a Propriedade 5.2.

5.3.3 Relações recorrentes n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan

Desse modo, apresenta-se as recorrências n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan com referência nas recorrências unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais (Vieira, 2022c).

Definição 5.14. *Para $n_0, n_1, \ldots, n_{n-1} \in \mathbb{N}$ e $s^2+4t > 0$, a relação n-dimensional da sequência*

(s,t)-Padovan $P^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}}$ é definida pelas recorrências (Vieira, 2022c):

$$\begin{aligned}
P^{(s,t)}_{n_0+3,n_1,\ldots,n_{n-1}} &= sP^{(s,t)}_{n_0+1,n_1,\ldots,n_{n-1}} + tP^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}} \\
P^{(s,t)}_{n_0,n_1+3,\ldots,n_{n-1}} &= sP^{(s,t)}_{n_0,n_1+1,\ldots,n_{n-1}} + tP^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}} \\
&\vdots = \vdots \\
P^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}+3} &= sP^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}+1} + tP^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}},
\end{aligned}$$

com os valores iniciais:

$$\begin{aligned}
P^{(s,t)}_{(0,0,0,\ldots,0)} &= 0 \\
P^{(s,t)}_{(1,0,0,\ldots,0)} &= 1 \\
P^{(s,t)}_{(0,1,0,\ldots,0)} &= \mu_1 \\
P^{(s,t)}_{(0,0,1,\ldots,0)} &= \mu_2 \\
P^{(s,t)}_{(0,0,0,1,\ldots,0)} &= \mu_3 \\
P^{(s,t)}_{(0,0,0,0,1,0,\ldots,0)} &= \mu_4 \\
&\vdots \\
P^{(s,t)}_{(0,0,0,\ldots,1)} &= \mu_{n-1} \\
P^{(s,t)}_{(1,1,1,\ldots,1)} &= 1+\mu_1+\ldots+\mu_n \\
P^{(s,t)}_{(0,1,1,\ldots,1)} &= \mu_1+\ldots+\mu_n \\
P^{(s,t)}_{(1,0,1,\ldots,1)} &= 1+\mu_2+\ldots+\mu_n \\
P^{(s,t)}_{(1,1,0,\ldots,1)} &= 1+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n \\
&\vdots \\
P^{(s,t)}_{(1,1,1,\ldots,1,0)} &= 1+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}.
\end{aligned}$$

e com $\mu_0 = 1, \mu_1 = i, \mu_2 = j, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_j^2 = 1, \mu_j u_k = u_k \mu_j$.

Teorema 5.19. *Os números na forma $P^{(s,t)}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}}$, de tal modo que: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$, são*

determinados por (Vieira, 2022c):

$$\begin{aligned}
P^{(s,t)}_{(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n)} &= (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n}) \\
&+ (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2-1}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n})\mu_1 \\
&+ (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3-1}\ldots P^{(s,t)}_{n_n})\mu_2 \\
&+ \ldots + \\
&+ (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n-1})\mu_n.
\end{aligned}$$

Demonstração. A partir das demonstrações realizadas nas subseções anteriores, nas quais os teoremas são válidos, tem-se:

$$\begin{aligned}
P^{(s,t)}_{n,m} &= P^{(s,t)}_{n}P^{(s,t)}_{m} + iP^{(s,t)}_{n}P^{(s,t)}_{m-1}, \\
P^{(s,t)}_{n,m,p} &= P^{(s,t)}_{n}P^{(s,t)}_{m}P^{(s,t)}_{p} + iP^{(s,t)}_{n}P^{(s,t)}_{m-1}P^{(s,t)}_{p} \\
&\quad + jP^{(s,t)}_{n}P^{(s,t)}_{m}P^{(s,t)}_{p-1}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo passo indutivo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
P^{n_1,n_2}_{s,t} &= P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2} + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2-1}\mu_1 \\
P^{(s,t)}_{n_1,n_2,n_3} &= P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3} + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2-1}P^{(s,t)}_{n_3}\mu_1 \\
&\quad + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3-1}\mu_2 \\
P^{(s,t)}_{n_1,n_2,n_3,n_4} &= P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}P^{(s,t)}_{n_4} \\
&\quad + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2-1}P^{(s,t)}_{n_3}P^{(s,t)}_{n_4}\mu_1 \\
&\quad + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3-1}P^{(s,t)}_{n_4}\mu_2 \\
&\quad + P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}P^{(s,t)}_{n_4-1}\mu_3 \\
&\quad \vdots \\
P^{(s,t)}_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n} &= (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n}) \\
&\quad + (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2-1}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n})\mu_1 \\
&\quad + (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3-1}\ldots P^{(s,t)}_{n_n})\mu_2 \\
&\quad + \ldots + (P^{(s,t)}_{n_1}P^{(s,t)}_{n_2}P^{(s,t)}_{n_3}\ldots P^{(s,t)}_{n_n-1})\mu_n.
\end{aligned}$$

□

A partir do modelo unidimensional, foi possível inserir unidades imaginárias, resultando em recorrências bidimensionais, tridimensionais até sua generalização com a

n-dimensional. Assim, é possível perceber o processo de complexificação da sequência primitiva Padovan, generalizando-a por meio dos termos da fórmula de recorrência (s,t), bem como sua generalização no formato n-dimensional.

5.4 As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-perrin

De modo similar as relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Padovan, tem-se as relações para a sequência (s,t)-Perrin, com referência no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2023a).

Para a sequência (s,t)-Perrin, tem-se a sua recorrência definida da mesma forma.

$$R_n^{(s,t)} = sR_{n-2}^{(s,t)} + tR_{n-3}^{(s,t)}, n > 0,$$

assumindo os valores iniciais: $R_0^{(s,t)} = 3, R_1^{(s,t)} = 0, R_2^{(s,t)} = 2$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$.

Partindo da sequência primitiva de Perrin e da sua generalização (s,t)-Perrin, tem-se o processo de complexificação, inserindo as unidades imaginárias estudadas por Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021b).

Doravante, serão estudadas as relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Perrin, com referência no trabalho Diskaya e Menken (2022), no qual retrata as relações n-dimensionais da sequência de (p,q)-Fibonacci. Com isso, observa-ser a evolução dos estudos acerca dessas sequências numéricas, abordando o processo de generalização e complexificação dos números dessa sequência.

5.4.1 As relações bidimensionais da sequência (s,t)-Perrin

Nesta subseção, apresentam-se as recorrências bidimensionais da sequência (s,t)-Perrin com referência no modelo unidimensional.

Definição 5.15. *Para $n,m \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$, as relações bidimensionais da sequência (s,t)-Perrin $R_{s,t}^{n,m}$ é definida pela recorrência (Vieira, 2023a):*

$$R_{n+3,m}^{s,t} = sR_{n+1,m}^{s,t} + tR_{n,m}^{s,t},$$

$$R_{n,m+3}^{s,t} = sR_{n,m+1}^{s,t} + tR_{n,m}^{s,t},$$

com $i^2 = 1$ e os valores iniciais:

Propriedade 5.2. *As seguintes propriedades são válidas (Vieira, 2023a):*
(a) $R_{n,0}^{s,t} = R_n^{s,t}$;

$$\begin{array}{lll} R^{s,t}_{0,0} = 3, & R^{s,t}_{1,0} = 0, & R^{s,t}_{2,0} = 2, \\ R^{s,t}_{0,1} = 3+2i, & R^{s,t}_{1,1} = 2i, & R^{s,t}_{2,1} = 2s+2si, \\ R^{s,t}_{0,2} = 3s+3ti, & R^{s,t}_{1,2} = 3ti, & R^{s,t}_{2,2} = 2s+3sti, \end{array}$$

(b) $R^{s,t}_{0,m} = 3P^{s,t}_m + iR^{s,t}_{m+1}$;

(c) $R^{s,t}_{n,1} = R^{s,t}_n + i2P^{s,t}_n$;

(d) $R^{s,t}_{1,m} = iR^{s,t}_{m+1}$;

(e) $R^{s,t}_{n,m} = R^{s,t}_n P^{s,t}_m + iP^{s,t}_n R^{s,t}_{m+1}$.

Demonstração. (a) Vamos aplicar o princípio da indução matemática em n. Vejamos:

$R^{s,t}_{n+3,m} = R^{s,t}_{n+1,m} + R^{s,t}_{n,m}, m = 0.$

Para $n = 0$:

$$R^{s,t}_{0,0} = R^{s,t}_0 = 3$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$R^{s,t}_{k,0} = R^{s,t}_k$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{k+4,0} &= sR^{s,t}_{k+2,0} + tR^{s,t}_{k+1,0} \\ &= s\left(R^{s,t}_{k+2}\right) + t\left(R^{s,t}_{k+1}\right) \\ &= R_{k+4}(s,t) \end{aligned}$$

Validando a Proposição (a).

(b) Pelo princípio da indução matemática e pela recorrência:

$R^{s,t}_{n,m+3} = R^{s,t}_{n,m+1} + R^{s,t}_{n,m}, n = 0$, pode-se provar a proposição.

Para $m = 0$:

$$R^{s,t}_{0,0} = 3P^{s,t}_0 + iR^{s,t}_1 = 3$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$R^{s,t}_{0,k} = 3P^{s,t}_k + iR^{s,t}_{k+1}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{0,k+4} &= sR^{s,t}_{0,k+2} + tR^{s,t}_{0,k+1} \\ &= s\left(3P^{s,t}_{k+2} + iR^{s,t}_{k+3}\right) + t\left(3P^{s,t}_{k+1} + iR^{s,t}_{k+2}\right) \\ &= 3P^{s,t}_{k+4} + iR^{s,t}_{k+5} \end{aligned}$$

Validando a Proposição (b).

(c) Pelo princípio da indução matemática e pela recorrência:

$R^{s,t}_{n+3,m} = R^{s,t}_{n+1,m} + R^{s,t}_{n,m}, m = 1$, pode-se provar a proposição.

Para $n = 0$:

$$R^{s,t}_{0,1} = R^{s,t}_{0} + i2P^{s,t}_{0} = 3 + 2i.$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$R^{s,t}_{k,1} = R^{s,t}_{k} + i2P^{s,t}_{k}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{k+4,1} &= sR^{s,t}_{k+2,1} + tR^{s,t}_{k+1,1} \\ &= s\left(R^{s,t}_{k+2} + i2P^{s,t}_{k+2}\right) + t\left(R^{s,t}_{k+1} + i2P^{s,t}_{k+1}\right) \\ &= R^{s,t}_{k+4} + i2P^{s,t}_{k+4} \end{aligned}$$

Validando a Proposição (c).

(d) Pelo princípio da indução matemática e pela recorrência:

$R^{s,t}_{n,m+3} = R^{s,t}_{n,m+1} + R^{s,t}_{n,m}, n = 1$, pode-se provar a proposição.

Para $m = 0$:

$$R^{s,t}_{1,0} = iR^{s,t}_{1} = 0$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$R^{s,t}_{1,k} = iR^{s,t}_{k+1}$$

Demonstrando que é verdade para $k+1$.

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{1,k+4} &= sR^{s,t}_{1,k+2} + tR^{s,t}_{1,k+1} \\ &= s\left(iR^{s,t}_{k+3}\right) + t\left(iR^{s,t}_{k+2}\right) \\ &= iR^{s,t}_{k+5} \end{aligned}$$

Validando a Proposição (d).

(e) Pelo princípio da indução matemática e pela recorrência: $R^{s,t}_{n+3,m} = R^{s,t}_{n+1,m} + R^{s,t}_{n,m}$ e $R^{s,t}_{n,m+3} = R^{s,t}_{n,m+1} + R^{s,t}_{n,m}$, pode-se provar a proposição.

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{0,m} &= R^{s,t}_{0} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{0} R^{s,t}_{m+1} \\ &= 3P^{s,t}_{m} + iR^{s,t}_{m+1} \end{aligned}$$

Para $m = 0$:

$$\begin{aligned} P^{s,t}_{n,0} &= R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{0} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{1} \\ &= R^{s,t}_{n} \end{aligned}$$

Suponha que a igualdade desejada seja verdadeira para qualquer $n \geqslant k, m \geqslant k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{k,m} &= R^{s,t}_{k} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{k} R^{s,t}_{m+1}, \\ R^{s,t}_{n,k} &= R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{k} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{k+1} \end{aligned}$$

Demonstrando que é verdade para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} R^{s,t}_{k+4,m} &= sR^{s,t}_{k+2,m} + tR^{s,t}_{k+1,m} \\ &= s\left(R^{s,t}_{k+2} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{k+1} R^{s,t}_{m+1}\right) \\ &+ t\left(R^{s,t}_{k+1} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{k+2} R^{s,t}_{m+1}\right) \\ &= R^{s,t}_{k+4} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{k+4} R^{s,t}_{m+1} \end{aligned}$$

e para $m = k + 1$.

$$\begin{aligned} R^{n,k+4}_{s,t} &= sR^{s,t}_{n,k+2} + tR^{s,t}_{n,k+1} \\ &= s\left(R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{k+2} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{k+3}\right) \\ &+ t\left(R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{k+1} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{k+2}\right) \\ &= R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{k+4} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{k+5} \end{aligned}$$

Validando a Proposição (e). □

5.4.2 As relações tridimensionais da sequência (s,t)-Perrin

A seguir, tem-se a introdução das relações recorrentes tridimensionais da sequência (s,t)-Perrin, abordado por Vieira, Alves e Catarino (2023a).

Definição 5.16. *Para $n,m,p \in \mathbb{N}$ e $s \geqslant 0, t \neq 0, 27t^2 - 4s^3 \neq 0$, as relações tridimensionais da sequência (s,t)-Perrin $R^{s,t}_{n,m,p}$ é definida pela recorrência (Vieira, 2023a):*

$$R^{s,t}_{n+3,m,p} = sR^{s,t}_{n+1,m,p} + tR^{s,t}_{n,m,p},$$

$$R^{s,t}_{n,m+3,p} = sR^{s,t}_{n,m+1,p} + tR^{s,t}_{n,m,p},$$

$$R^{s,t}_{n,m,p+3} = sR^{s,t}_{n,m,p+1} + tR^{s,t}_{n,m,p},$$

com $i^2 = j^2 = 1, ij = ji$ e os valores iniciais:

$$\begin{array}{lll}
R^{s,t}_{0,0,0} = 3, & R^{s,t}_{1,0,0} = 0, & R^{s,t}_{2,0,0} = 2, \\
R^{s,t}_{0,0,1} = 3+2j, & R^{s,t}_{1,0,1} = 2j, & R^{s,t}_{2,0,1} = 2+2sj, \\
R^{s,t}_{0,0,2} = 3s+3tj, & R^{s,t}_{1,0,2} = 3tj, & R^{s,t}_{2,0,2} = 2s+3stj \\
R^{s,t}_{0,1,0} = 3+2i, & R^{s,t}_{1,1,0} = 2i, & R^{s,t}_{2,1,0} = 2+2si, \\
R^{s,t}_{0,1,1} = 3+2i+2j, & R^{s,t}_{1,1,1} = 2i+2j, & R^{s,t}_{2,1,1} = 2+2si+2sj, \\
R^{s,t}_{0,1,2} = 3s+2si+3tj, & R^{s,t}_{1,1,2} = 2si+3tj, & R^{s,t}_{2,1,2} = 2s+2s^2i+3stj \\
R^{s,t}_{0,2,0} = 3s+3ti, & R^{s,t}_{1,2,0} = 3ti, & R^{s,t}_{2,2,0} = 2s+3sti \\
R^{s,t}_{0,2,1} = 3s+3ti+2sj, & R^{s,t}_{1,2,1} = 3ti+2sj, & R^{s,t}_{2,2,1} = 2s+3sti+2s^2j \\
R^{s,t}_{0,2,2} = 3s^2+3sti+3stj, & R^{s,t}_{1,2,2} = 3sti+3stj & R^{s,t}_{2,2,2} = 2s^2+3s^2ti+3s^2tj
\end{array}$$

Propriedade 5.3. *As seguintes propriedades são válidas (Vieira, 2023a):*

(a) $R^{s,t}_{n,0,0} = R^{s,t}_n$;

(b) $R^{s,t}_{n,0,1} = R^{s,t}_n + j2P^{s,t}_n$;

(c) $R^{s,t}_{n,1,0} = R^{s,t}_n + i2P^{s,t}_n$;

(d) $R^{s,t}_{n,1,1} = R^{s,t}_n + i2P^{s,t}_n + j2P^{s,t}_n$;

(e) $R^{s,t}_{0,m,0} = 3P^{s,t}_m + iR^{s,t}_{m+1}$;

(f) $R^{s,t}_{0,m,1} = 3P^{s,t}_m + iR^{s,t}_{m+1} + j2P^{s,t}_m$;

(g) $R^{s,t}_{1,m,0} = iR^{s,t}_{m+1}$;

(h) $R^{s,t}_{1,m,1} = iR^{s,t}_{m+1} + j2P^{s,t}_m$;

(i) $R^{s,t}_{0,0,p} = 3P^{s,t}_p + jR^{s,t}_{p+1}$;

(j) $R^{s,t}_{0,1,p} = 3P^{s,t}_p + i2P^{s,t}_p + jR^{s,t}_{p+1}$;
(k) $R^{s,t}_{1,0,p} = jR^{s,t}_{p+1}$;
(l) $R^{s,t}_{1,1,p} = i2P^{s,t}_p + jR^{s,t}_{p+1}$;
(m) $R^{s,t}_{n,m,p} = R^{s,t}_n P^{s,t}_m P^{s,t}_p + iP^{s,t}_n R^{s,t}_{m+1} P^{s,t}_p$
$+ jP^{s,t}_n P^{s,t}_m R^{s,t}_{p+1}$.

As demonstrações são realizadas de acordo com a Propriedade-se 5.2.

5.4.3 As relações n-dimensionais da sequência (s,t)-Perrin

Fundamentado nos estudos referentes as recorrências bidimensionais e tridimensionais, são introduzidas as recorrências n-dimensionais da sequência (s,t)-Perrin, estudadas por Vieira, Alves e Catarino (2023a).

Definição 5.17. *Para* $n_0, n_1, \ldots, n_{n-1} \in \mathbb{N}$ *e* $s^2 + 4t > 0$*, a recorrência*

n-dimensional da sequência (s,t)*-Perrin* $R^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}}$ *é definida pelas recorrências (Vieira, 2023a):*

$$\begin{aligned}
R^{s,t}_{n_0+3,n_1,\ldots,n_{n-1}} &= sR^{s,t}_{n_0+1,n_1,\ldots,n_{n-1}} + tR^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}} \\
R^{s,t}_{n_0,n_1+3,\ldots,n_{n-1}} &= sR^{s,t}_{n_0,n_1+1,\ldots,n_{n-1}} + tR^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}} \\
&\vdots \\
R^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}+3} &= sR^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}+1} + tR^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}},
\end{aligned}$$

Teorema 5.20. *Números da forma* $R^{s,t}_{n_0,n_1,\ldots,n_{n-1}}$*, tais que*

$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$*, são determinados por (Vieira, 2023a):*

$$\begin{aligned}
R^{s,t}_{(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n)} &= (R^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} \ldots P^{s,t}_{n_n}) \\
&+ (P^{s,t}_{n_1} R^{s,t}_{n_2+1} P^{s,t}_{n_3} \ldots P^{s,t}_{n_n})\mu_1 \\
&+ \ldots + \\
&+ (P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} \ldots R^{s,t}_{n_n+1})\mu_n.
\end{aligned}$$

Demonstração. A partir das demonstrações realizadas nas subseções anteriores, nas quais os

teoremas são válidos, tem-se:

$$\begin{aligned}
R^{s,t}_{n,m} &= R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{m} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{m+1},\\
R^{s,t}_{n,m,p} &= R^{s,t}_{n} P^{s,t}_{m} P^{s,t}_{p} + iP^{s,t}_{n} R^{s,t}_{m+1} P^{s,t}_{p}\\
&\quad + jP_n(s,t)P_m(s,t)R_{p+1}(s,t).
\end{aligned}$$

Assim, pelo processo indutivo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
R^{s,t}_{n_1,n_2} &= R^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} + P^{s,t}_{n_1} R^{s,t}_{n_2+1}\mu_1\\
R^{s,t}_{n_1,n_2,n_3} &= R^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3}\\
&\quad + P^{s,t}_{n_1} R^{s,t}_{n_2+1} P^{s,t}_{n_3}\mu_1\\
&\quad + P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} R^{s,t}_{n_3+1}\mu_2\\
R^{s,t}_{n_1,n_2,n_3,n_4} &= R^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} P^{s,t}_{n_4}\\
&\quad + P^{s,t}_{n_1} R^{s,t}_{n_2+1} P^{s,t}_{n_3} P^{s,t}_{n_4}\mu_1\\
&\quad + P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} R^{s,t}_{n_3+1} P^{s,t}_{n_4}\mu_2\\
&\quad + P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} R^{s,t}_{n_4+1}\mu_3\\
&\quad \vdots\\
R^{s,t}_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n} &= (R^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} \ldots P^{s,t}_{n_n})\\
&\quad + (P^{s,t}_{n_1} R^{s,t}_{n_2+1} P^{s,t}_{n_3} \ldots P^{s,t}_{n_n})\mu_1\\
&\quad + (P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} R^{s,t}_{n_3+1} \ldots P^{s,t}_{n_n})\mu_2\\
&\quad + \ldots\\
&\quad + (P^{s,t}_{n_1} P^{s,t}_{n_2} P^{s,t}_{n_3} \ldots R^{s,t}_{n_n+1})\mu_n.
\end{aligned}$$

□

De fato, observa-se a existência de duas formas de generalização, uma em relação aos coeficientes da fórmula de recorrência de sequência, chamada s,t. E a segunda em relação às inserções de unidades imaginárias, denominadas relações n-dimensionais.sionais.

5.5 A generalização da sequência de padovan-perrin

A sequência de Padovan-Perrin, é uma sequência mista, do tipo recorrente, e de terceira ordem. De fato, tem-se que essa sequência apresenta características matemáticas

provenientes dos números de Padovan e Perrin. Desse modo, tem-se algumas propriedades e definições matemáticas, estudadas por Vieira, Alves e Catarino (2021a), realizando um estudo da generalização da sequência de Padovan-Perrin.

Definição 5.18. *A sequência de Padovan-Perrin, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, com a e b sendo números inteiros, é dada pela fórmula de recorrência (Vieira, 2021a):*

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3}, n \geqslant 3$$

com $S_0 = 3a, S_1 = 1, S_2 = 2b$.

Desse modo, têm-se os primeiros termos dessa sequência, como sendo:
$3a, 1, 2b, 3a+1, 2b+1, 3a+2b+1, 3a+2b+2, 3a+4b+2, 6a+4b+3, 6a+6b+4, 9a+8b+5$.

O polinômio característico da sequência Padovan-Perrin é dado por (Vieira, 2021a):

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$$

As suas raízes são dadas por um número real e as outras duas por números complexos não reais. Como ressalta Aarts, Fokkink e Kruijtzer (2001) que a raiz real é conhecida como número de plástico :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}, \\
\lambda_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 + 0,56228i, \\
\lambda_3 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 - 0,56228i,
\end{aligned}$$

Teorema 5.21. *A fórmula de Binet de Padovan-Perrin é dada por (Vieira, 2021a):*

$$S_n = At_1^n + Bt_2^n + Ct_3^n,$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, t_1, t_2 e t_3 são as raízes do polinômio característico e os coeficientes são dados por:

$$A = \frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}, B = \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}, C = \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Demonstração. Utilizando do método de BenTaher-Rachidi (Taher; Rachidi, 2016), tem-se que a sua respectiva forma polinomial é: $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1$. A sua derivada é então calculada, obtendo:

$p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 1$. Desse modo, de acordo com o método e os coeficientes da respectiva sequência, tem-se: $A_0 = a_2S_0 + a_1S_1 + a_0S_2 = 3a+1$, $A_1 = a_2S_1 + a_1S_2 = 2b+1$ e $A_2 = a_2S_2 = 2b$.

Assim aplicando a fórmula, oriunda do trabalho de BenTaher-Rachidi (Taher; Rachidi, 2016), tem-se:

$$V_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p'(\lambda_i)} \left(\sum_{p=0}^{r-1} \frac{A_p}{\lambda_i^{p+1}} \right) \lambda_i^n,$$

para $n \geq r$, onde $A_p = a_{r-1}V_p + \cdots + a_pV_{r-1}$.

É possível obter:

$$S_n = \frac{1}{p'(\lambda_1)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_1^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_1^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_1^{2+1}} \right) \lambda_1^n + \frac{1}{p'(\lambda_2)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_2^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_2^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_2^{2+1}} \right) \lambda_2^n + \frac{1}{p'(\lambda_3)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_3^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_3^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_3^{2+1}} \right) \lambda_3^n$$

Realizando a substituição dos valores calculados anteriormente e utilizando relações de Girard $t_1t_2t_3 = 1$,$t_1 + t_2 + t_3 = 0$ e $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3t_1^2-1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_1} + \frac{2b+1}{t_1^2} + \frac{2b}{t_1^3} \right) (t_1)^n + \frac{1}{3t_2^2-1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_2} + \frac{2b+1}{t_2^2} + \frac{2b}{t_2^3} \right) (t_2)^n \\
&+ \frac{1}{3t_3^2-1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_3} + \frac{2b+1}{t_3^2} + \frac{2b}{t_3^3} \right) (t_3)^n \\
&= \left(\frac{3at_1^2 + t_1 + 2bt_1 + t_1 + 2b}{3t_1^5 - t_1^3} \right) (t_1)^n + \left(\frac{3at_2^2 + t_2 + 2bt_2 + t_2 + 2b}{3t_2^5 - t_2^3} \right) (t_2)^n + \left(\frac{3at_3^2 + t_3 + 2bt_3 + t_3 + 2b}{3t_3^5 - t_3^3} \right) (t_3)^n \\
&= \left[\frac{3at_1^2 + t_1 + 2bt_1 + t_1 + 2bt_1t_2t_3}{t_1(3t_1^4 - t_1^2)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_2^2 + t_2 + 2bt_2 + t_2 + 2bt_1t_2t_3}{t_2(3t_2^4 - t_2^2)} \right] (t_2)^n \\
&+ \left[\frac{3at_3^2 + t_3 + 2bt_3 + t_3 + 2bt_1t_2t_3}{t_3(3t_3^4 - t_3^2)} \right] (t_3)^n \\
&= \left[\frac{3at_1 + t_1 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_2 - 2bt_1t_3}{t_1(3t_1^3 - t_1)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_2 + t_2 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_2 - 2bt_2t_3}{t_2(3t_2^3 - t_2)} \right] (t_2)^n \\
&+ \left[\frac{3at_3 + t_3 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_3 - 2bt_2t_3}{t_3(3t_3^3 - t_3)} \right] (t_3)^n \\
&= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{t_1(3t_1^2 - 1)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{t_2(3t_2^2 - 1)} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{t_3(3t_3^2 - 1)} \right] (t_3)^n \\
&= \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{3t_1^2 - 1} \right) (t_1)^n + \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{3t_2^2 - 1} \right) (t_2)^n + \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{3t_3^2 - 1} \right) (t_3)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{2t_1^2 + t_1^2 - 1} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{2t_2^2 + t_2^2 - 1} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{2t_3^2 + t_3^2 - 1} \right] (t_3)^n \\
&= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{t_1^2 - t_1t_2 - t_1t_3 + t_2t_3} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{t_2^2 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1t_3} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{t_3^2 - t_1t_3 - t_3t_3 + t_1t_2} \right] (t_3)^n \\
&= \frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} (t_1)^n + \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} (t_2)^n + \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} (t_3)^n
\end{aligned}$$

□

Definição 5.19. *Seja a função $f(x)$ uma função geradora para uma sequência de números reais $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, referente à sequência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots)$ se (Sa; Spreafico, 2019;*

Koshy, 2001):

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x).$$

Teorema 5.22. *A função geradora de Padovan-Perrin, é dada por (Vieira, 2021a):*

$$G(S_n, x) = \frac{3a + x + (2b - 3a)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função $G(S_n,x) = S_0 + S_1x + S_2x^2 + S_3x^3 + S_4x^4 + \ldots$ por x^2 e x^3, tem-se:

$$\begin{aligned}
G(S_n,x) &= S_0 + S_1x + S_2x^2 + S_3x^3 + S_4x^4 + \ldots \\
x^2G(S_n,x) &= S_0x^2 + S_1x^3 + S_2x^4 + S_3x^5 + S_4x^6 + \ldots \\
x^3G(S_n,x) &= S_0x^3 + S_1x^4 + S_2x^5 + S_3x^6 + S_4x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

Dessa forma $G(S_n,x) - [x^2G(S_n,x) + x^3G(S_n,x)]$, com os valores iniciais $S_0 = 3a, S_1 = 1, S_2 = 2b$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
G(S_n,x)(1 - x^2 - x^3) &= S_0 + S_1x + (S_2 - S_0)x^2 \\
G(S_n,x)(1 - x^2 - x^3) &= S_0 + S_1x + (S_2 - S_0)x^2.
\end{aligned}$$

Então S_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$G(S_n, x) = \frac{3a + x + (2b - 3a)x^2}{(1 - x^2 - x^3)},$$

desde que $(1 - x^2 - x^3) \neq 0$. □

A seguir, é apresentada a forma matricial da sequência de Padovan-Perrin.

Teorema 5.23. *A forma matricial da sequência Padovan-Perrin, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+2} & S_{n+1} & S_n \end{bmatrix}, n > 0.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 & S_2 & S_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_k \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+1} + S_k & S_{k+2} & S_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+3} & S_{k+2} & S_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ressalta-se que existem mais outras cinco formas matriciais de Padovan-Perrin, oriundas da permutação das linhas e colunas, respectivamente, da matriz estudada no Teorema 5.23.

Teorema 5.24. *Outras formas matriciais da sequência Padovan-Perrin, são dadas por (Vieira, 2021a):*

$$(a) \begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_n & S_{n+2} & S_{n+1} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+2} & S_n & S_{n+1} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_n & S_{n+1} & S_{n+2} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$(d)\begin{bmatrix}1 & 2b & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}S_{n+1} & S_{n+2} & S_n\end{bmatrix}, n>0.$$

$$(e)\begin{bmatrix}1 & 3a & 2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}S_{n+1} & S_n & S_{n+2}\end{bmatrix}, n>0.$$

Demonstração. (a) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n=1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}3a & 2b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3a+1 & 2b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_1 & S_3 & S_2\end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n=k, k\in\mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix}3a & 2b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}S_k & S_{k+2} & S_{k+1}\end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n=k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}3a & 2b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_k & S_{k+2} & S_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}S_{k+1} & S_k+S_{k+1} & S_{k+2}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}S_{k+1} & S_{k+3} & S_{k+2}\end{bmatrix}.$$

(b) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n=1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}2b & 3a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3a+1 & 1 & 2b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_3 & S_1 & S_2\end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_k & S_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_k & S_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_k + S_{k+1} & S_{k+1} & S_{k+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+3} & S_{k+1} & S_{k+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_k & S_{k+1} & S_{k+2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_k & S_{k+1} & S_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_{k+2} & S_k + S_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_{k+2} & S_{k+3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & 1+3a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & S_3 & S_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_{k+2} & S_k \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_{k+2} & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1}+S_k & S_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+3} & S_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & 1 & 1+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & S_1 & S_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_k & S_{k+2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k+1} & S_k & S_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_{k+1}+S_k \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_{k+3} \end{bmatrix}.$$

□

Baseada na definição da sequência, tem-se algumas identidades matemáticas referentes aos números dessa sequência.

Identidade 5.1. *A soma dos n primeiros termos de índice ímpar de Padovan-Perrin é dado por (Vieira, 2021a):*

$$\sum_{i=1}^{n} S_{2i-1} = S_{2n+2} - 2b.$$

Demonstração. Partindo da definição dos números de Padovan-Perrin descritos na definição notacional e, considerando apenas os termos de índice ímpar, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} S_{2i-1} = S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1}$$
$$= (S_4 - S_2) + (S_6 - S_4) + (S_8 - S_6) + \ldots + (S_{2n+2} - S_{2n}).$$

Assim, ao considerar:

$$S_{2i-1} = S_{2i+2} - S_{2i}.$$

Tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} S_{2i-1} = S_{2n+2} - S_2 = S_{2n+2} - 2b,$$

onde, na segunda igualdade, utiliza-se o fato de que $S_{2i-1} = S_{2i+2} - S_{2i}$. □

Identidade 5.2. *A soma dos n primeiros termos de índice par de Padovan-Perrin é dada por (Vieira, 2021a):*

$$\sum_{i=1}^{n} S_{2i} = S_{2n+3} - 3a - 1.$$

Demonstração. De forma similar, em que parte da apresentação dos números de Padovan-Perrin por meio da definição notacional, porém, considerando apenas os termos de índice par, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} S_{2i} &= S_2 + S_4 + S_6 + \ldots + S_{2n} \\ &= (S_5 - S_3) + (S_7 - S_5) + (S_9 - S_7) + \ldots + (S_{2n+3} - S_{2n+1}) \\ &= S_{2n+3} - S_3 \\ &= S_{2n+3} - 3a - 1.\end{aligned}$$

□

Identidade 5.3. *A soma dos n primeiros termos de Padovan-Perrin é dada por (Vieira, 2021a):*

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_{n+5} - 2b - 3a - 1.$$

Demonstração. Para realizar a presente demonstração, pode-se separar a soma de todos os primeiros termos como sendo a soma daqueles que tem índices ímpares, mais a soma daqueles que tem índices pares.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} S_i &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots + S_n \\ &= (S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1}) + (S_2 + S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n}).\end{aligned}$$

Assim, utilizando as Identidades 5.1 e 5.2, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} S_i &= (S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1}) + (S_2 + S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n}) \\ &= S_{2n+2} - 2b + S_{2n+3} - 3a - 1 \\ &= S_{2n+3} + S_{2n+2} - 2b - 3a - 1 \\ &= S_{n+5} - 2b - 3a - 1.\end{aligned}$$

□

Identidade 5.4. *A soma de quaisquer três termos consecutivos de Padovan-Perrin é dada por (Vieira, 2021a):*

$$S_n + S_{n+1} + S_{n+2} = S_{n+5}.$$

Demonstração. Aplicando a definição da sequência, tem-se:

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} + S_{n+2} &= S_{n+3} + S_{n+2} \\ &= S_{n+5}. \end{aligned}$$

□

Identidade 5.5. *A soma de quaisquer sete termos consecutivos de Padovan-Perrin é dada por (Vieira, 2021a):*

$$\sum_{i=0}^{6} S_{n+i} = 2S_{n+8}.$$

Demonstração. De posse da definição da sequência, é possível obter:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{6} S_{n+i} &= S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + S_{n+3} + S_{n+4} + S_{n+5} + S_{n+6} \\ &= S_{n+3} + S_{n+2} + S_{n+3} + S_{n+4} + S_{n+5} + S_{n+6} \\ &= S_{n+5} + S_{n+6} + S_{n+5} + S_{n+6} \\ &= S_{n+8} + S_{n+8} \\ &= 2S_{n+8}. \end{aligned}$$

□

Assim sendo, tem-se a generalização dessa sequência, realizando a extensão para os números inteiros. Assim, com referência na Definição 5.18 e na relação $S_n = S_{n+3} - S_{n+1}$, onde $n \in \mathbb{N}$, com $n < 0$, tem-se que os primeiros termos são dados por:

$$\begin{aligned} &S_{-1} = -3a + 2b, S_{-2} = 3a - 2b + 1, S_{-3} = 2b - 1, S_{-4} = -3a + 1, S_{-5} = 6a - 2b, \\ &S_{-6} = -6a + 4b - 1, S_{-7} = 3a - 4b + 2, S_{-8} = 3a + 2b - 2, S_{-9} = -9a + 2b + 1, \\ &S_{-10} = 12a - 6b + 1. \end{aligned}$$

Assim, tem-se os teoremas matemáticos para os números dessa sequência generalizados.

Teorema 5.25. *A função geradora da sequência de Padovan-Perrin para os números inteiros não positivos, é dada por (Vieira, 2021a):*

$$G(S_{-n}, x) = \frac{-3a - 2bx - x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. A função $G(S_{-n},x)$ é multiplicada por x^3 e x, resultando em:

$$G(S_{-n},x) = S_0 + S_{-1}x + S_{-2}x^2 + S_{-3}x^3 + S_{-4}x^4 + \dots$$
$$xG(S_{-n},x) = S_0x + S_{-1}x^2 + S_{-2}x^3 + S_{-3}x^4 + S_{-4}x^5 + \dots$$
$$x^3G(S_{-n},x) = S_0x^3 + S_{-1}x^4 + S_{-2}x^5 + S_{-3}x^6 + S_{-4}x^7 + \dots$$

Assim, realizando a operação $G(S_{-n},x) - [xG(S_{-n},x) + x^3G(S_{-n},x)]$, com os valores iniciais $S_0 = 3a, S_{-1} = -3a+2b, S_{-2} = 3a-2b+1$, obtêm-se:

$$G(S_{-n},x)(x^3 - x - 1) = -S_0x - S_{-1}x^2 - S_0 - S{-}1x - S_{-2}x^2$$
$$G(S_{-n},x)(x^3 - x - 1) = -3ax - (-3a+2b)x^2 - 3a - (-3a+2b)x - (3a-2b+1)x^2$$
$$G(S_{-n},x)(x^3 - x - 1) = -3a - 2bx - x^2$$
$$G(S_{-n},x) = \frac{-3a-2bx-x^2}{x^3-x-1}.$$

□

Seja A é uma matriz da sequência de Padovan (Vieira, 2020), em que carrega consigo as informações da fórmula de recorrência da sequência. Dessa forma, ao ser elevada a n-ésima potência, pode-se obter os termos da sequência de Padovan.

Assim, tem-se $A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, em que A^{-n} é a inversa da matriz A^n, com $n > 0$ e P_n é o n-ésimo termo da sequência de Padovan.

Teorema 5.26. *As formas matriciais da sequência Padovan-Perrin para os números inteiros não positivos, com $n > 0, n \in \mathbb{N}$, são dadas por (Vieira, 2021a):*

$$(a)\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n+2} & S_{-n+1} & S_{-n} \end{bmatrix}.$$

$$(b)\begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n} & S_{-n+2} & S_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

$$(c)\begin{bmatrix}2b & 3a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix}S_{-n+2} & S_{-n} & S_{-n+1}\end{bmatrix}.$$

$$(d)\begin{bmatrix}3a & 1 & 2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix}S_{-n} & S_{-n+1} & S_{-n+2}\end{bmatrix}.$$

$$(e)\begin{bmatrix}1 & 2b & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix}S_{-n+1} & S_{-n+2} & S_{-n}\end{bmatrix}.$$

$$(f)\begin{bmatrix}1 & 3a & 2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix}S_{-n+1} & S_{-n} & S_{-n+2}\end{bmatrix}.$$

Demonstração. (a) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}2b & 1 & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3a & 2b-3a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_1 & S_0 & S_{-1}\end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix}2b & 1 & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix}S_{-k+2} & S_{-k+1} & S_{-k}\end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}2b & 1 & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{k}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{-k+2} & S_{-k+1} & S_{-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}S_{-k+1} & S_{-k} & S_{-k+2}-S_{-k}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}S_{-k+1} & S_{-k} & S_{-k-1}\end{bmatrix}.$$

(b) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a+2b & 1 & 3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_1 & S_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+2} & S_{-k+1} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+2} & S_{-k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -S_{-k} + S_{-k+2} & S_{-k+1} & S_{-k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{-k-1} & S_{-k+1} & S_{-k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2b-3a & 3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_{-1} & S_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{-k+2} & S_{-k} & S_{-k+1} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-k+2} & S_{-k} & S_{-k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k+2} - S_k & S_{-k} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k-1} & S_{-k} \end{bmatrix}.$$

(d) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a+2b & 3a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_0 & S_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+1} & S_{-k+2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+1} & S_{-k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -S_{-k} + S_{-k+2} & S_{-k} & S_{-k+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_{-k-1} & S_{-k} & S_{-k+1} \end{bmatrix}.$$

(e) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b-3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_{-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k+2} & S_{-k} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k+2} & S_{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+1} & S_{-k+2} - S_{-k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k+1} & S_{-k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & -3a+2b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & S_{-1} & S_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k} & S_{-k+2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k} & S_{-k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{-k} & -S_{-k} + S_{-k+2} & S_{-k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{-k} & S_{-k-1} & S_{-k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

5.6 Identidades dos números híbridos de padovan e perrin

Com o viés de realizar um estudo investigativo acerca dos números híbridos de Padovan e Perrin, doravante são discutidos os teoremas matemáticos com referência nas operações algébricas fundamentais, em suas respectivas formas matriciais, segundo Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2021a).

Primeiramente, recorda-se a definição de um número híbrido dado por Ozdemir (2018), sendo formado pelo conjunto dos números reais, complexos, duais e hiperbólicos.

Definição 5.20. *O conjunto dos números híbridos, denotado por* $\mathbb{K}$*, com* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$*, é definido como (Ozdemir, 2018):*

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\},$$

em que i representa um número complexo, ε *representa um número dual e h representa número hiperbólico.*

A partir dessa definição, é possível efetuar algumas operações com esses números, sendo elas: soma, subtração, multiplicação por escalar. Quanto à multiplicação, o produto é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e utilizando as igualdades: $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$.

A multiplicação dos números híbridos é dada pela multiplicação das unidades imaginárias, conforme apresentado no Quadro 7.

Quadro 7 – Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$1+h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Fonte: Ozdemir (2018).

Tem-se ainda o conjugado de um número híbrido, denotado por $\overline{z}$ e definida por:

$$\overline{z} = a - bi - c\varepsilon - dh.$$

O número real $C(z) = z\overline{z} = \overline{z}z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$ é chamado de caráter do número híbrido, sendo a raiz desse número real a norma do número híbrido z, apresentando: $\|z\| = \sqrt{|C(z)|}$.

Com referência nisso, tem-se o processo de hibridização das sequências, como visto em Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Mangueira, Alves e Catarino (2020a), Szynal-Liana (2018), Szynal-Liana e Wloch (2019).

Definição 5.21. *Os números híbridos de Padovan* $\{PH_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e Perrin* $\{RH_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, com* $n \geqslant 0$*, denominados pelos são definidos como (Vieira, 2021a):*

$$PH_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h,$$

$$RH_n = R_n + R_{n+1}i + R_{n+2}\varepsilon + R_{n+3}h,$$

sendo $PH_0 = 1+i+\varepsilon+2h$ *e* $PH_1 = 1+i+2\varepsilon+2h$ *e* $PH_2 = 1+2i+e\varepsilon+3h$ *as condições iniciais para os números híbridos de Padovan e* $RH_0 = 3+2\varepsilon+3h$ *e* $RH_1 = 2i+3\varepsilon+2h$ *e* $RH_2 = 2+3i+2\varepsilon+5h$ *as condições iniciais para os números híbridos de Perrin.*

Baseado no trabalho de Senturk, Bilgici, Dasdemir e Unal (2020), pode-se apresentar a forma matricial híbrida de Padovan Q_n dada por:

$$Q_n = \begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \\ PH_{n+3} & PH_{n+2} & PH_{n+1} \\ PH_{n+1} & PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ para } n \geqslant 1, \text{ satisfazendo a igualdade: } Q_n = U^n Q,$$

onde:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

Então, para $n = 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} Q_1 = U^1 Q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 2+3i+4\varepsilon+5h & 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h \\ 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PH_3 & PH_2 & PH_1 \\ PH_4 & PH_3 & PH_2 \\ PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assumindo que a igualdade é válida para $n = k, (k \in \mathbb{Z})$:

$$Q_k = U^k Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \\ PH_{k+3} & PH_{k+2} & PH_{k+1} \\ PH_{k+1} & PH_k & PH_{k-1} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, mostra-se que é válido para $n = k+1, (k \in \mathbb{Z})$:

$$Q_{k+1} = U^{k+1} Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{k+3} & PH_{k+2} & PH_{k+1} \\ PH_{k+4} & PH_{k+3} & PH_{k+2} \\ PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \end{bmatrix}.$$

Além disso, a matriz híbrida de Perrin W_n, para $n \geqslant 1$, é dada por:

$$W_n = \begin{bmatrix} RH_{n+2} & RH_{n+1} & RH_n \\ RH_{n+3} & RH_{n+2} & RH_{n+1} \\ RH_{n+1} & RH_n & RH_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Isso satisfaz a igualdade $W_n = A^n W$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h \\ 3+2i+5\varepsilon+5h & 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h \\ 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h & -1+3i+2h \end{bmatrix}.$$

Com referência nessas definições apresentadas, referentes aos números híbridos de Padovan e Perrin, alguns teoremas são desenvolvidos com o objetivo de realizar um novo estudo investigativo sobre os números dessa sequência, bem como a sua extensão para os índices negativos.

Definição 5.22. *Os números híbridos de Padovan e Perrin, para $n \in \mathbb{N}$, com índices negativos são definidos por (Vieira, 2021a):*

$$PH_{-n} = P_{-n} + P_{-n+1}i + P_{-n+2}\varepsilon + P{-}n + 3h,$$
$$RH_{-n} = R_{-n} + R_{-n+1}i + R_{-n+2}\varepsilon + R_{-n+3}h.$$

A seguir, são estudadas as somas binomiais dos números híbridos de Padovan.

Teorema 5.27. *As seguintes identidades são válidas, onde $n \in \mathbb{N}$ (Vieira, 2021a):*
$(i) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} PH_k = PH_{3n}$,
$(ii) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} PH_{k+1} = PH_{3n+1}$.

Demonstração. (i) De acordo com a fórmula de Binet dos números híbridos de Padovan $PH_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} PH_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (Ax_1^k + Bx_2^k + Cx_3^k) \\ &= A\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k + B\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_2^k + C\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_3^k \\ &= A(1+x_1)^n + B(1+x_2)^n + C(1+x_3)^n. \end{aligned}$$

Considerando as infinitas interações das raízes cúbicas dadas pela expressão $\psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+}\sqrt[3]{1+}...}$, pode-se estabelecer a relação $\psi^3 = 1+\psi$, em que ψ representa a raiz real de Padovan (Ferreira, 2015). Então, $1+x_1 = x_1^3$,$1+x_2 = x_2^3$ e $1+x_3 = x_3^3$. Com isso, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} PH_k = PH_{3n}$.

(ii) Da mesma forma que foi feita para a demonstração de (i), esta identidade pode ser validada.

□

Teorema 5.28. *Para $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$, tem-se que (Vieira, 2021a):*

$$PH_{n+2}PH_m + PH_{n+1}PH_{m+1} + PH_nPH_{m-1} = PH_{n+m} + PH_{n+m+1}i + PH_{n+m+2}\varepsilon + PH_{n+m+3}h.$$

Demonstração. De acordo com a forma matricial dos números híbridos de Padovan:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix},$$

$$U^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}.$$

Resultando em $Q_n = U^nQ$:

$$\begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \\ PH_{n+3} & PH_{n+2} & PH_{n+1} \\ PH_{n+1} & PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim, realizando $(Q_n)(Q_m)$, pode-se igualar o termo a_{13}, obtendo:

$$\begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \\ PH_{n+3} & PH_{n+2} & PH_{n+1} \\ PH_{n+1} & PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_{m+2} & PH_{m+1} & PH_m \\ PH_{m+3} & PH_{m+2} & PH_{m+1} \\ PH_{m+1} & PH_m & PH_{m-1} \end{bmatrix} =$$

$$= PH_{n+2}PH_m + PH_{n+1}PH_{m+1} + PH_nPH_{m-1}.$$

Pela definição, tem-se que:

$$PH_n = PH_{n+m} + PH_{n+m+1}i + PH_{n+m+2}\varepsilon + PH_{n+m+3}h.$$

Logo:

$$PH_{n+2}PH_m + PH_{n+1}PH_{m+1} + PH_nPH_{m-1} = PH_{n+m} + PH_{n+m+1}i + PH_{n+m+2}\varepsilon + PH_{n+m+3}h.$$

□

Teorema 5.29. *Para $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$, tem-se que (Vieira, 2021a):*

(i) $PH_{m+n} - PH_{m+n+1}i - PH_{m+n+2}\varepsilon - PH_{m+n+3}h = \overline{PH}_{m+2}PH_n + \overline{PH}_{m+1}PH_{n+1} + \overline{PH}_mPH_{n-1}$,

(ii) $\overline{PH}_{n+m} + \overline{PH}_{n+m+1}i + \overline{PH}_{n+m+2}\varepsilon + \overline{PH}_{n+m+3}h = PH_{m+2}\overline{PH}_n + PH_{m+1}\overline{PH}_{n+1} + PH_m\overline{PH}_{n-1}$.

Demonstração. Usando o conjugado da matriz Q, denominada $\overline{Q}$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}.$$

Assim, realizando:

$$U^n\overline{Q} = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h \\ 2-2i-3\varepsilon-4h & 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h \\ 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h & i-\varepsilon-h \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \overline{PH}_{n+2} & \overline{PH}_{n+1} & \overline{PH}_n \\ \overline{PH}_{n+3} & \overline{PH}_{n+2} & \overline{PH}_{n+1} \\ \overline{PH}_{n+1} & \overline{PH}_n & \overline{PH}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, considerando o elemento a_{13}, pode-se dizer que:
(i)$\overline{Q}(U^{m+n}Q) = (\overline{Q}U^m)(U^nQ)$,

$$\overline{Q}(U^{m+n}Q) = \overline{Q}\begin{bmatrix} P_{n+m-2} & P_{n+m-3} & P_{n+m-4} \\ P_{n+m-1} & P_{n+m-2} & P_{n+m-3} \\ P_{n+m-3} & P_{n+m-4} & P_{n+m-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h \\ 2-2i-3\varepsilon-4h & 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h \\ 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h & i-\varepsilon-h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_{n+m+2} & PH_{n+m+1} & PH_{n+m} \\ PH_{n+m+3} & PH_{n+m+2} & PH_{n+m+1} \\ PH_{n+m+1} & PH_{n+m} & PH_{n+m-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \overline{PH}_{n+m+2} & \overline{PH}_{n+m+1} & \overline{PH}_{n+m} \\ \overline{PH}_{n+m+3} & \overline{PH}_{n+m+2} & \overline{PH}_{n+m+1} \\ \overline{PH}_{n+m+1} & \overline{PH}_{n+m} & \overline{PH}_{n+m-1} \end{bmatrix}.$$

$$(\overline{Q}U^m)(U^nQ) = \begin{bmatrix} 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h \\ 2-2i-3\varepsilon-4h & 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h \\ 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h & i-\varepsilon-h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-2} & P_{m-3} & P_{m-4} \\ P_{m-1} & P_{m-2} & P_{m-3} \\ P_{m-3} & P_{m-4} & P_{m-5} \end{bmatrix} (U^nQ)$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{PH}_{m+2} & \overline{PH}_{m+1} & \overline{PH}_m \\ \overline{PH}_{m+3} & \overline{PH}_{m+2} & \overline{PH}_{m+1} \\ \overline{PH}_{m+1} & \overline{PH}_m & \overline{PH}_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \overline{PH}_{m+2} & \overline{PH}_{m+1} & \overline{PH}_m \\ \overline{PH}_{m+3} & \overline{PH}_{m+2} & \overline{PH}_{m+1} \\ \overline{PH}_{m+1} & \overline{PH}_m & \overline{PH}_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \\ PH_{n+3} & PH_{n+2} & PH_{n+1} \\ PH_{n+1} & PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix}$$

(ii)$(QU^{m+n})\overline{Q} = (QU^m)(U^n\overline{Q})$,

$$(QU^{m+n})\overline{Q} = \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m+n-2} & P_{m+n-3} & P_{m+n-4} \\ P_{m+n-1} & P_{m+n-2} & P_{m+n-3} \\ P_{m+n-3} & P_{m+n-4} & P_{m+n-5} \end{bmatrix} \overline{Q}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{m+n+2} & PH_{m+n+1} & PH_{m+n} \\ PH_{m+n+3} & PH_{m+n+2} & PH_{m+n+1} \\ PH_{m+n+1} & PH_{m+n} & PH_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h \\ 2-2i-3\varepsilon-4h & 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h \\ 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h & i-\varepsilon-h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{PH}_{m+n+2} & \overline{PH}_{m+n+1} & \overline{PH}_{m+n} \\ \overline{PH}_{m+n+3} & \overline{PH}_{m+n+2} & \overline{PH}_{m+n+1} \\ \overline{PH}_{m+n+1} & \overline{PH}_{m+n} & \overline{PH}_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

$$(QU^m)(U^n\overline{Q}) = \begin{bmatrix} 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h \\ 2+2i+3\varepsilon+4h & 1+2i+2\varepsilon+3h & 1+i+2\varepsilon+2h \\ 1+i+2\varepsilon+2h & 1+i+\varepsilon+2h & i+\varepsilon+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-2} & P_{m-3} & P_{m-4} \\ P_{m-1} & P_{m-2} & P_{m-3} \\ P_{m-3} & P_{m-4} & P_{m-5} \end{bmatrix} (U^n\overline{Q})$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{m+2} & PH_{m+1} & PH_m \\ PH_{m+3} & PH_{m+2} & PH_{m+1} \\ PH_{m+1} & PH_m & PH_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h \\ 2-2i-3\varepsilon-4h & 1-2i-2\varepsilon-3h & 1-i-2\varepsilon-2h \\ 1-i-2\varepsilon-2h & 1-i-\varepsilon-2h & i-\varepsilon-h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{m+2} & PH_{m+1} & PH_m \\ PH_{m+3} & PH_{m+2} & PH_{m+1} \\ PH_{m+1} & PH_m & PH_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{PH}_{n+2} & \overline{PH}_{n+1} & \overline{PH}_n \\ \overline{PH}_{n+3} & \overline{PH}_{n+2} & \overline{PH}_{n+1} \\ \overline{PH}_{n+1} & \overline{PH}_n & \overline{PH}_{n-1} \end{bmatrix}$$

□

Teorema 5.30. *Para $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, tem-se que (Vieira, 2021a):*

$RH_{n+2}RH_m + RH_{n+1}RH_{m+1} + RH_nRH_{m-1} = RH_{n+m} + RH_{n+m+1}i + RH_{n+m+2}\varepsilon + RH_{n+m+3}h.$

Demonstração. De acordo com a forma matricial dos números híbridos de Perrin:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h \\ 3+2i+5\varepsilon+5h & 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h \\ 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h & -1+3i+2h \end{bmatrix},$$

$$A^nW = \begin{bmatrix} RH_{n+2} & RH_{n+1} & RH_n \\ RH_{n+3} & RH_{n+2} & RH_{n+1} \\ RH_{n+1} & RH_n & RH_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, realizando $(W_n)(W_m)$, pode-se igualar o termo a_{13}, obtendo:

$$\begin{bmatrix} RH_{n+2} & RH_{n+1} & RH_n \\ RH_{n+3} & RH_{n+2} & RH_{n+1} \\ RH_{n+1} & RH_n & RH_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} RH_{m+2} & RH_{m+1} & RH_m \\ RH_{m+3} & RH_{m+2} & RH_{m+1} \\ RH_{m+1} & RH_m & RH_{m-1} \end{bmatrix} = RH_{n+2}RH_m + RH_{n+1}RH_{m+1} + RH_nRH_{m-1}$$

Pela definição, tem-se:

$$RH_n = RH_{n+m} + RH_{n+m+1}i + RH_{n+m+2}\varepsilon + RH_{n+m+3}h.$$

Logo:

$$RH_{n+2}RH_m + RH_{n+1}RH_{m+1} + RH_nRH_{m-1} = RH_{n+m} + RH_{n+m+1}i + RH_{n+m+2}\varepsilon + RH_{n+m+3}h.$$

□

Teorema 5.31. *Para $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, tem-se que (Vieira, 2021a):*

(i) $RH_{m+n} - RH_{m+n+1}i - RH_{m+n+2}\varepsilon - RH_{m+n+3}h = \overline{RH}_{m+2}RH_n + \overline{RH}_{m+1}RH_{n+1} + \overline{RH}_mRH_{n-1}$,

(ii) $\overline{RH}_{n+m} + \overline{RH}_{n+m+1}i + \overline{RH}_{n+m+2}\varepsilon + \overline{RH}_{n+m+3}h = RH_{m+2}\overline{RH}_n + RH_{m+1}\overline{RH}_{n+1} + RH_m\overline{RH}_{n-1}$.

Demonstração. Utilizando o conjugado da matriz W, denominada de $\overline{W}$, em que:

$$W = \begin{bmatrix} 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h \\ 3+2i+5\varepsilon+5h & 2+3i+2\varepsilon+5h & 2i+3\varepsilon+2h \\ 2i+3\varepsilon+2h & 3+2\varepsilon+3h & -1+3i+2h \end{bmatrix}.$$

Assim, realizando:

$$A^n\overline{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2-3i-2\varepsilon-5h & 2i-3\varepsilon-2h & 3-2\varepsilon-3h \\ 3-2i-5\varepsilon-5h & 2-3i-2\varepsilon-5h & 2i-3\varepsilon-2h \\ 2i-3\varepsilon-2h & 3-2\varepsilon-3h & -1-3i-2h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{RH}_{n+2} & \overline{RH}_{n+1} & \overline{RH}_n \\ \overline{RH}_{n+3} & \overline{RH}_{n+2} & \overline{RH}_{n+1} \\ \overline{RH}_{n+1} & \overline{RH}_n & \overline{RH}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, considerando o elemento a_{13}, pode-se dizer que:

(i) $\overline{W}(A^{m+n}W) = (\overline{W}A^m)(A^nW)$,

(ii) $W(A^{m+n}\overline{W}) = (WA^m)(A^n\overline{W})$. □

5.7 Os números híbridos de k-padovan e k-perrin

A presente seção realiza um estudo investigativo acerca das sequências híbridas de k-Padovan e k-Perrin, com referência nos trabalhos de Catarino e Bilgici (2020), Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2020b).

Com referência nas definições vistas na introdução referente aos números híbridos de k-Padovan e k-Perrin, são então desenvolvidos alguns teoremas com o viés de realizar um novo estudo investigativo sobre os números dessa sequência.

Definição 5.23. *A fórmula de recorrência dos números híbridos de k-Padovan e k-Perrin, para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$\begin{cases} PH_{k,n} &= P_{k,n-2} + kP_{k,n-3} \\ RH_{k,n} &= R_{k,n-2} + kR_{k,n-3}, \end{cases}$$

com os valores iniciais iguais a: $PH_{k,0} = 1+i+\varepsilon+2h$, $PH_{k,1} = 1+i+2\varepsilon+2h$, $PH_{k,2} = 1+2i+e\varepsilon+3h$ para os híbridos de k-Padovan e $RH_{k,0} = 3+2\varepsilon+3h$, $RH_{k,1} = 2i+3\varepsilon+2h$, $RH_{k,2} = 2+3i+2\varepsilon+5h$ as condições iniciais para os híbridos de k-Perrin.

Com referência nisso, tem-se que o caráter do número híbrido de k-Padovan e k-Perrin são dados por $C(PH_{k,n}) = P_{k,n}^2 + (P_{k,n+1} - P_{k,n+2})^2 - P_{k,n+2}^2 - P_{k,n+3}^2$ e $C(RH_{k,n}) = R_{k,n}^2 + (R_{k,n+1} - R_{k,n+2})^2 - R_{k,n+2}^2 - R_{k,n+3}^2$. Assim, tem-se que a norma híbrida de k-Padovan e k-Perrin, são:

Teorema 5.32. *A norma de um número híbrido de k-Padovan e k-Perrin são:*

$$||PH_{k,n}||^2 = |-P_{k,n}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} - 2kP_{k,n+1}P_{k,n} - k^2P_{k,n}^2|,$$
$$||RH_{k,n}||^2 = |R_{k,n}^2 - 2R_{k,n+1}R_{k,n+2} - 2kR_{k,n+1}R_{k,n} - k^2R_{k,n}^2|.$$

Demonstração. Iremos realizar a demonstração para os números de k-Padovan:

$$\begin{aligned} ||PH_{k,n}|| &= \sqrt{|C(PH_{k,n})|}, \\ ||PH_{k,n}||^2 &= |P_{k,n}^2 + (P_{k,n+1} - P_{k,n+2})^2 - P_{k,n+2}^2 - P_{k,n+3}^2| \\ &= |P_{k,n}^2 + P_{k,n+1}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} + P_{k,n+2}^2 - P_{k,n+2}^2 - (P_{k,n+1} + kP_{k,n})^2| \\ &= |P_{k,n}^2 + P_{k,n+1}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} - P_{k,n+1}^2 - 2kP_{k,n+1}P_{k,n} - k^2P_{k,n}^2| \\ &= |P_{k,n}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} - 2kP_{k,n+1}P_{k,n} - k^2P_{k,n}^2| \end{aligned}$$

Para os números híbridos de k-Perrin, a demonstração é realizada de modo semelhante. □

Teorema 5.33. *A matriz híbrida de k-Padovan e k-Perrin, são dadas por:*

$$\varphi PH_{k,n} = \begin{bmatrix} P_{k,n}+P_{k,n+2} & 2P_{k,n+1}+kP_{k,n}-P_{k,n+2} \\ P_{k,n+2}+kP_{k,n} & P_{k,n}-P_{k,n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Com referência em Ozdemir (2018), pode-se estudar a forma matricial de um número híbrido. Assim, tem-se que se Z é um número híbrido $\varphi(Z)$ é dado por:

$$\varphi(Z) = \varphi_a + bi + c\varepsilon + dh = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, para os números híbridos de k-Padovan, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varphi(PH_{k,n}) &= kP_{k,n}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P_{k,n+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + P_{k,n+2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + P_{k,n+3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k,n}+P_{k,n+2} & P_{k,n+1}-P_{k,n+2}+P_{k,n+3} \\ P_{k,n+2}-P_{k,n+1}+P_{k,n+3} & P_{k,n}-P_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k,n}+P_{k,n+2} & P_{k,n+1}-P_{k,n+2}+P_{k,n+1}+kP_{k,n} \\ P_{k,n+2}-P_{k,n+1}+P_{k,n+1}+kP_{k,n} & P_{k,n}-P_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k,n}+P_{k,n+2} & 2P_{k,n+1}+kP_{k,n}-P_{k,n+2} \\ P_{k,n+2}+kP_{k,n} & P_{k,n}-P_{k,n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A demonstração dos números híbridos de k-Perrin é realizada de modo semelhante.

□

Observação 5.1. *Se $\varphi(PH_{k,n})$ corresponde à matriz híbrida do k-Padovan, $PH_{k,n}$ então $||PH_{k,n}||^2 = |det(\varphi PH_{k,n})|$, onde $||$ denota o valor absoluto, uma vez que tem-se:*

$$\begin{aligned} |det(\varphi PH_{k,n})| &= det\begin{bmatrix} P_{k,n}+P_{k,n+2} & 2P_{k,n+1}+kP_{k,n}-P_{k,n+2} \\ P_{k,n+2}+kP_{k,n} & P_{k,n}-P_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= |P_{k,n}^2 - P_{k,n+2}^2 - (2P_{k,n+2}P_{k,n+1} + 2kP_{k,n+1}P_{k,n} + kP_{k,n}P_{k,n+2} + k^2P_{k,n}^2 \\ &\quad - P_{k,n+2}^2 - kP_{k,n}P_{k,n+2})| \\ &= |P_{k,n}^2 - P_{k,n+2}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} - 2kP_{k,n+1}P_{k,n} - k^2P_{k,n}^2 + P_{k,n+2}^2| \\ &= |P_{k,n}^2 - 2P_{k,n+1}P_{k,n+2} - 2kP_{k,n+1}P_{k,n} - k^2P_{k,n}^2| = ||PH_{k,n}||^2. \end{aligned}$$

Observação 5.2. *Se $\varphi RH_{k,n}$ corresponde à matriz híbrida do k-Perrin, $RH_{k,n}$ então $||RH_{k,n}||^2 = |det(\varphi RH_{k,n})|$, uma vez que tem-se:*

$$\begin{aligned} det(\varphi RH_{k,n}) &= det \begin{bmatrix} R_{k,n}+R_{k,n+2} & 2R_{k,n+1}+R_{k,n}-R_{k,n+2} \\ R_{k,n+2}+R_{k,n} & R_{k,n}-R_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= |R_{k,n}^2 - R_{k,n+2}^2 - (2R_{k,n+2}R_{k,n+1} + 2R_{k,n+1}R_{k,n} + R_{k,n}R_{k,n+2} + R_{k,n}^2 \\ &- R_{k,n+2}^2 - R_{k,n}R_{k,n+2})| \\ &= |R_{k,n}^2 - R_{k,n+2}^2 - 2R_{k,n+1}R_{k,n+2} - 2R_{k,n+1}R_{k,n} - R_{k,n}^2 + R_{k,n+2}^2| \\ &= |-2R_{k,n+1}R_{k,n+2} - 2R_{k,n+1}R_{k,n}| = ||RH_{k,n}||^2. \end{aligned}$$

Tomando como base o trabalho de Senturk, Bilgici, Dasdemir e Unal (2020), podemos apresentar a forma matricial híbrida de k-Padovan $(Q_{k,n})$.

Teorema 5.34. *A forma matricial híbrida de k-Padovan $(Q_{k,n})$, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$Q_{k,n}^n = \begin{bmatrix} PH_{k,2} & PH_{k,1} & PH_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PH_{k,n+2} & PH_{k,n+1} & PH_{k,n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que para $n = 1$:

$$\begin{aligned} Q_{k,n}^1 &= \begin{bmatrix} PH_{k,2} & PH_{k,1} & PH_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PH_{k,1}+kPH_{k,0} & PH_{k,2} & PH_{k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_{k,3} & PH_{k,2} & PH_{k,1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido para este valor inicial.

Supondo que para qualquer $n = y, y \in \mathbb{N}$ valha, então:

$$\begin{aligned} Q_{k,n}^y &= \begin{bmatrix} PH_{k,2} & PH_{k,1} & PH_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}^y \\ &= \begin{bmatrix} PH_{k,y+2} & PH_{k,y+1} & PH_{k,y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, para $n = y+1$:

$$\begin{aligned}
Q_{k,n}^{y+1} &= Q_{(k,n)}^{k} Q_{(k,n)} \\
&= \begin{bmatrix} PH_{k,2} & PH_{k,1} & PH_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}^{y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} PH_{k,y+2} & PH_{k,y+1} & PH_{k,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} PH_{k,y+1} + kPH_{k,y} & PH_{k,y+2} & PH_{k,y+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} PH_{k,y+3} & PH_{k,y+2} & PH_{k,y+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração pelo princípio da indução finita. □

Teorema 5.35. *A forma matricial híbrida de k-Perrin $(W_{k,n})$, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$W_{k,n}^{n} = \begin{bmatrix} RH_{k,2} & RH_{k,1} & RH_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} RH_{k,n+2} & RH_{k,n+1} & RH_{k,n} \end{bmatrix}.$$

De modo análogo à demonstração anterior, pode-se provar este teorema.

Teorema 5.36. *A função geradora dos números híbridos de k-Padovan, denotado por $GPH_{k,n}(x)$, é dada por:*

$$GPH_{k,n}(x) = \frac{PH_{k,0} + PH_{k,1}x + (PH_{k,2} + PH_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}$$

Demonstração. Escrevendo uma série em que cada termo na sequência corresponde ao coeficiente $GPH_{k,n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} PH_{k,n}x^n$.

Assim, realizando manipulações algébricas com referência na relação de recorrência, tem-se:

$$\begin{aligned}
GPH_{k,n}(x) &= PH_{k,0} + PH_{k,1}x + PH_{k,2}x^2 + PH_{k,3}x^3 + \ldots \\
x^2 GPH_{k,n}(x) &= PH_{k,0}x^2 + PH_{k,1}x^3 + PH_{k,2}x^4 + PH_{k,3}x^5 + \ldots \\
kx^3 GPH_{k,n}(x) &= PH_{k,0}kx^3 + PH_{k,1}kx^4 + PH_{k,2}kx^5 + PH_{k,3}kx^6 + \ldots \\
(1 - x^2 - kx^3)GPH_{k,n}(x) &= PH_{k,0} + PH_{k,1}x + (PH_{k,2} - PH_{k,0})x^2 + (PH_{k,3} - PH_{k,1} - kPH_{k,0})x^3 + \ldots \\
&= \frac{PH_{k,0} + PH_{k,1}x + (PH_{k,2} - PH_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.37. *A função geradora dos números híbridos de k-Perrin, denotado por $GRH_{k,n}(x)$, é dada por:*

$$GRH_{k,n}(x) = \frac{RH_{k,0} + RH_{k,1}x + (RH_{k,2} + RH_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}$$

De modo análogo à demonstração anterior, pode-se validar o presente Teorema.

Definição 5.24. *Os números híbridos de k-Padovan e k-Perrin com índices negativos são definidos por:*

$$PH_{k,-n} = P_{k,-n} + P_{k,-n+1}i + P_{k,-n+2}\varepsilon + P_{k,-n+3}h$$
$$RH_{k,-n} = R_{k,-n} + R_{k,-n+1}i + R_{k,-n+2}\varepsilon + R_{k,-n+3}h$$

Teorema 5.38. *Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet da sequência k-Padovan e k-Perrin é expressa por:*

$$Q_{k,n}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

em que C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e r_1, r_2, r_3 as raízes do polinômio característico ($x^3 - x - k = 0$).

Demonstração. Com referência na fórmula de recorrência da sequência k-Padovan, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são r_1, r_2, r_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3.

O discriminante $\Delta = \frac{(-k)^2}{4} - \frac{1}{27}$, referente ao polinômio de 3º grau, determina a maneira de como serão as raízes do polinômio. Desse modo, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, concluindo que $k^2 \neq \frac{64}{27}$. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = k$, $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ e que quando $k \neq 0$, haverá pelo menos uma raiz igual a zero, não havendo fórmula Binet para este caso. □

O estudo realizado permitiu investigar matematicamente as sequências de Padovan e Perrin, generalizando-as. Dessa forma foram definidas as sequências híbridas de k-Padovan e k-Perrin, desenvolvendo teoremas inéditos e demonstrados com referência nas operações algébricas fundamentais. Tão logo, os resultados aqui apresentados possuem o viés de despertar novos estudos sobre os números de híbridos de k-Padovan e k-Perrin, aprimorando a investigação para outras sequências numéricas generalizadas.

5.8 Os quatérnios, octônios e sedenios de perrin

O estudo de complexficiação da sequência de Perrin, segue com os quatérnios, octônios e sedenios, de modo semelhante ao estudo para a sequência de Padovan em Vieira (2020).

5.8.1 Os quatérnios de Perrin

Para os números complexos, tem-se a definição dada por $a+bi$, onde a e b são números reais e i é o número imaginário, não fazendo parte dos números reais, e possuindo a propriedade $i^2 = -1$. Desse modo, os quatérnios apresentam quatro vetores com bases $(1,i,j,k)$, possuindo três componentes imaginárias chamadas i,j,k, em que essas são três raízes quadradas e diferentes. Horadam (1993) apresentou tal produto quaterniônico como sendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ij, jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. O conjugado e a sua norma são descritas, respectivamente, como:

$$q^* = a - bi - cj - dk,$$
$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Assim, resgata-se a ideia principal do quatérnio como sendo uma extensão dos números complexos, conforme William Rowan Hamilton (1805-1865). Sua estrutura é dada por dois modos: quatérnio em $\mathbb{R}$, possuindo componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{C}$, possuindo variáveis complexas. Oliveira (2018) afirma que esses números possuem quatro dimensões tomando o corpo dos Reais como corpo suporte e são compreendidos como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional. Sua fórmula matemática é dada por:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde a,b,c são números reais e i,j,k a parte ortogonal na base $\mathbb{R}^3$.Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ são dois quatérnios distintos. Assim, as operações escalares de adição, igualdade e multiplicação entre eles são:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

$q_1 = q_2$ apenas se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$. E para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha q_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1 i + \alpha c_1 j + \alpha d_1 k$.

Após revisitar essas definições em relação aos quatérnios, tem-se a discussão acerca dos quatérnios de Perrin e a sua generalização, com referência em Isbilir e Gurses (2021) e Alves (2018).

Definição 5.25. *O quatérnio de Perrin* $\{QR_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, com* $i^2 = j^2 = k^2 = -1$*, é definido por (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$QR_n = R_n + iR_{n+1} + jR_{n+2} + kR_{n+3}, n \geqslant 0.$$

Teorema 5.39. *A fórmula de recorrência do quatérnio de Perrin é definida como (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$QR_n = QR_{n-2} + QR_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais dados por: $QR_0 = 3+2j+3k, QR_1 = 2i+3j+2k, QR_2 = 2+3i+2j+5k$.

Com referência na recorrência de Perrin ($R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$) e na Definição 5.25, pode-se validar o teorema.

Teorema 5.40. *Para* $n \in \mathbb{Z}$*, a Fórmula de Binet para o quatérnio de Perrin é dada por (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$QR_n = Aax_1^n + Bbx_2^n + Ccx_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 *são as raízes da equação* $x^3 - x - 1 = 0$*, e:* $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$, $a = 1 + ix_1 + jx_1^2 + kx_1^3, b = 1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k, c = 1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k$.

Demonstração. De posse da fórmula de Binet da sequência de Perrin, $R_{(n)} = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ (Teorema 5.4) e da Definição 5.25, tem-se que:

$$\begin{aligned}
QR_n &= R_n + iR_{n+1} + jR_{n+2} + kR_{n+3} \\
&= Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n + i(Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} + Cx_3^{n+1}) + j(Ax_1^{n+2} \\
&+ Bx_2^{n+2} + Cx_3^{n+2}) + k(Ax_1^{n+3} + Bx_2^{n+3} + Cx_3^{n+3}) \\
&= (1 + ix_1 + jx_1^2 + kx_1^3)Ax_1^n + (1 + ix_2 + jx_2^2 + kx_2^3)Bx_2^n + (1 + ix_3 + jx_3^2 + kx_3^3)Cx_3^n \\
&= Aax_1^n + Bbx_2^n + Ccx_3^n
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.41. *A função geradora do quatérnio de Perrin é dada por (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$g(QR_n,x)=\frac{(3+2j+3k)+(2i+3j+2k)x+(-1+3i+2k)x^2}{1-x^2-x^3}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x^2 e x^3, tem-se:

$$g(QR_n,x)=\sum_{n=0}^{\infty}QR_nx^n=QR_0+QR_1x+QR_2x^2+\ldots+QR_nx^n+\ldots \tag{5.22}$$

$$x^2g(QR_n,x)=QR_0x^2+QR_1x^3+QR_2x^4+\ldots+QR_{n-2}x^n+\ldots \tag{5.23}$$

$$x^3g(QR_n,x)=QR_0x^3+QR_1x^4+QR_2x^5+\ldots+QR_{n-3}x^n+\ldots \tag{5.24}$$

Baseada nas Equações (5.22-5.23+5.24), tem-se que:

$$(1-x^2-x^3)g(QR_n,x)=QR_0+QR_1x+(QR_2-QR_0)x^2+(QR_3-QR_1-QR_0)x^3+\ldots$$
$$+(QR_n-QR_{n-2}-QRn-3)x^n+\ldots$$

Considerando os valores iniciais: $QR_0=3+2j+3k, QR_1=2i+3j+2k, QR_2=2+3i+2j+5k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$(1-x^2-x^3)g(QR_n,x)=QR_0+QR_1x+(QR_2-QR_0)x^2.$$

Então QR_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{(3+2j+3k)+(2i+3j+2k)x+(-1+3i+2k)x^2}{1-x^2-x^3}.$$

□

Teorema 5.42. *Para $n\geqslant 2$ e $n\in\mathbb{N}$, a matriz geradora do quatérnio de Perrin é dada por:*

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}QR_2&QR_1&QR_0\\QR_1&QR_0&QR_{-1}\\QR_0&QR_{-1}&QR_{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}QR_{n+2}&QR_{n+1}&QR_n\\QR_{n+1}&QR_n&QR_{n-1}\\QR_n&QR_{n-1}&QR_{n-2}\end{bmatrix}.$$

Demonstração. Realizando a demonstração por meio do princípio da indução finita, para $n=2$,

tem-se:

$$
\begin{aligned}
Q^5 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} QR_2+QR_1 & QR_1+QR_0 & QR_0+QR_{-1} \\ QR_1+QR_0 & QR_0+QR_{-1} & QR_{-1}+QR_{-2} \\ QR_2 & QR_1 & QR_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} QR_4 & QR_3 & QR_2 \\ QR_3 & QR_2 & QR_1 \\ QR_2 & QR_1 & QR_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Admitindo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QR_{k+2} & QR_{k+1} & QR_k \\ QR_{k+1} & QR_k & QR_{k-1} \\ QR_k & QR_{k-1} & QR_{k-2} \end{bmatrix}.
$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k+1$:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QR_{k+2} & QR_{k+1} & QR_k \\ QR_{k+1} & QR_k & QR_{k-1} \\ QR_k & QR_{k-1} & QR_{k-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} QR_{k+1}+QR_k & QR_k+QR_{k-1} & QR_{k-1}+QR_{k-2} \\ QR_{k+2} & QR_{k+1} & QR_k \\ QR_{k+1} & QR_k & QR_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} QR_{k+3} & QR_{k+2} & QR_{k+1} \\ QR_{k+2} & QR_{k+1} & QR_k \\ QR_{k+1} & QR_k & QR_{k-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 5.43. *A soma dos n primeiros termos quatérnios de Perrin é dada por:*

$$\sum_{m=0}^{n} QR_m = QR_n + QR_{n+1} + QR_{n+2} - (2+5i+5j+7k).$$

Demonstração. Com referência na relação de recorrência dos quatérnios de Perrin, $QR_n = QR_{n-2} + QR_{n-3}$, pode-se reescrevê-la na forma:

$$QR_{n-2} = QR_n - QR_{n-3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
QR_0 &= QR_2 - QR_{-1} \\
QR_1 &= QR_3 - QR_0 \\
QR_2 &= QR_4 - QR_1 \\
QR_3 &= QR_5 - QR_2 \\
&\vdots \\
QR_{n-3} &= QR_{n-1} - QR_{n-4} \\
QR_{n-2} &= QR_n - QR_{n-3} \\
QR_{n-1} &= QR_{n+1} - QR_{n-2} \\
QR_n &= QR_{n+2} - QR_{n-1}.
\end{aligned}$$

Por meio das operações algébricas, pode-se realizar alguns cancelamentos, obtendo:

$$\sum_{m=0}^{n} QR_m = QR_n + QR_{n+1} + QR_{n+2} - QR_{-1} - QR_0 - QR_1.$$

Assim, considerando os valores iniciais $QR_{-1} = -1+3i+2k, QR_0 = 3+2j+3k, QR_1 = 2i+3j+2k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^{n} QR_m = QR_n + QR_{n+1} + QR_{n+2} - (2+5i+5j+7k).$$

□

Teorema 5.44. *A soma dos n primeiros termos pares dos quatérnios de Perrin é:*

$$\sum_{m=1}^{n} QR_{2m} = QR_{2n+3} - (3+2i+5j+5k).$$

Demonstração. Por meio da recorrência $QR_n = QR_{n-2} + QR_{n-3} \Leftrightarrow QR_{n-3} = QR_n - QR_{n-2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} QR_2 &= QR_5 - QR_3 \\ QR_4 &= QR_7 - QR_5 \\ &\vdots \\ QR_{2n-2} &= QR_{2n+1} - QR_{2n-1} \\ QR_{2n} &= QR_{2n+3} - QR_{2n+1}. \end{aligned}$$

Obtendo:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} QR_{2m} &= QR_{2n+3} - QR_3 \\ &= QR_{2m} = QR_{2n+3} - (3 + 2i + 5j + 5k). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.45. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos quatérnios de Perrin, são dados por:*

$$\sum_{m=0}^{n} QR_{2m+1} = QR_{2n+4} - (2 + 5i + 5j + 7k).$$

Demonstração. Levando em consideração apenas os números ímpares e a relação $QR_{n-3} = QR_n - QR_{n-2}$, pode-se somar todos esses números e cancelar os termos de índice $2n$, validando o presente teorema. □

A seguir, é realizada uma discussão referente ao comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos quatérnios de Perrin.

Definição 5.26. *O quatérnio de Perrin, para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definido pela equação (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$QR_{-n} = R_{-n} + iR_{-n+1} + jR_{-n+2} + kR_{-n+3}.$$

Teorema 5.46. *A fórmula de recorrência dos quatérnios de Perrin para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por (Isbilir; Gurses, 2021):*

$$QR_{-n} = QR_{-n+3} - QR_{-n+1}.$$

A demonstração é realizada de modo similar ao Teorema 5.39, pode-se validar este teorema.

Teorema 5.47. *A função geradora dos quatérnios de Perrin para índice inteiro não positivo, é descrita por:*

$$g(QR_{-n},x)=\frac{-(3+2j+3k)-(2+3i+2j+5k)x-(2i+3j+2k)x^2}{x^3-x-1}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x e x^3, tem-se:

$$g(QR_{-n},x)=\sum_{n=0}^{\infty}QR_{-n}x^n=QR_0+QR_{-1}x+QR_{-2}x^2+\ldots+QR_{-n}x^n+\ldots \tag{5.25}$$

$$xg(QR_{-n},x)=QR_0x+QR_{-1}x^2+QR_{-2}x^3+\ldots+QR_{-n-1}x^n+\ldots \tag{5.26}$$

$$x^3g(QR_{-n},x)=QR_0x^3+QR_{-1}x^4+QR_{-2}x^5+\ldots+QR_{-n-3}x^n+\ldots \tag{5.27}$$

Com referência nas Equações (5.27-5.26+5.25), tem-se que:

$$\begin{aligned}(x^3-x-1)g(QR_{-n},x)&=-QR_0-(QR_0+QR_{-1})x-(QR_{-2}+QR_{-1})x^2\\&\quad+(QR_0-QR_{-2}-QR_{-3})x^3+\ldots+(QR_{-n-3}-QR_{-n}-QR_{-n-1})x^n+\ldots\end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais: $QR_0=3+2j+3k, QR_{-1}=-1+3i+2k, QR_{-2}=1-i+3j$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(x^3-x-1)g(QR_{-n},x)&=-QR_0-(QR_0+QR_{-1})x-(QR_{-2}+QR_{-1})x^2\\g(QR_{-n},x)&=\frac{-(3+2j+3k)-(2+3i+2j+5k)x-(2i+3j+2k)x^2}{x^3-x-1}.\end{aligned}$$

□

Teorema 5.48. *Para $n>0$ e $n\in\mathbb{N}$, a matriz geradora dos quatérnios de Perrin, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}QR_2&QR_1&QR_0\\QR_1&QR_0&QR_{-1}\\QR_0&QR_{-1}&QR_{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}QR_{-n+2}&QR_{-n+1}&QR_{-n}\\QR_{-n+1}&QR_{-n}&QR_{-n-1}\\QR_{-n}&QR_{-n-1}&QR_{-n-2}\end{bmatrix}.$$

Demonstração. Analisando a igualdade para $n=1$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}QR_2&QR_1&QR_0\\QR_1&QR_0&QR_{-1}\\QR_0&QR_{-1}&QR_{-2}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}QR_1&QR_0&QR_{-1}\\QR_0&QR_{-1}&QR_{-2}\\QR_2-QR_0&QR_1-QR_{-1}&QR_0-QR_{-2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}QR_1&QR_0&QR_{-1}\\QR_0&QR_{-1}&QR_{-2}\\QR_{-1}&QR_{-2}&QR_{-3}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Constatando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & Q_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QR_{-k+2} & QR_{-k+1} & QR_{-k} \\ QR_{-k+1} & QR_{-k} & QR_{-k-1} \\ QR_{-k} & QR_{-k-1} & QR_{-k-2} \end{bmatrix}.$$

Concluindo a demonstração, verifica-se a validade para $n = k+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QR_2 & QR_1 & QR_0 \\ QR_1 & QR_0 & QR_{-1} \\ QR_0 & QR_{-1} & QR_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QR_{-k+2} & QR_{-k+1} & QR_{-k} \\ QR_{-k+1} & QR_{-k} & QR_{-k-1} \\ QR_{-k} & QR_{-k-1} & QR_{-k-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QR_{-k+1} & QR_{-k} & QR_{-k-1} \\ QR_{-k} & QR_{-k-1} & QR_{-k-2} \\ QR_{-k+2} - QR_{-k} & QR_{-k+1} - QR_{-k-1} & QR_{-k} - QR_{-k-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QR_{-k+1} & QR_{-k} & QR_{-k-1} \\ QR_{-k} & QR_{-k-1} & QR_{-k-2} \\ QR_{-k-1} & QR_{-k-2} & QR_{-k-3} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.49. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos quatérnios de Perrin, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} QR_{-m} = QR_{-n+3} + QR_{-n+2} + (2 + 5i + 5j + 7k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quatérnios de Perrin, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$QR{-}n = QR_{-n+3} - QR_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} QR_{-1} &= QR_2 - QR_0 \\ QR_{-2} &= QR_1 - QR_{-1} \\ QR_{-3} &= QR_0 - QR_{-2} \\ QR_{-4} &= QR_{-1} - QR_{-3} \\ &\vdots \\ QR_{-n-3} &= QR_{-n} - QR_{-n-2} \end{aligned}$$

$$QR_{-n-2} = QR_{-n+1} - QR_{-n-1}$$
$$QR_{-n-1} = QR_{-n+2} - QR_{-n}$$
$$QR_{-n} = QR_{-n+3} - QR_{-n+1}.$$

Por meio de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=0}^{n} QR_m = QR_{-n+3} + QR_{-n+2} + QR_2 + QR_1.$$

Considerando os valores iniciais $QR_1 = 2i + 3j + 2k$, $QR_2 = 2 + 3i + 2j + 5k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^{n} QR_m = QR_{-n+3} + QR_{-n+2} + (2 + 5i + 5j + 7k).$$

□

Teorema 5.50. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos quatérnios de Perrin é:*

$$\sum_{m=1}^{n} QR_{-2m} = QR_{2n+3} - (2 + 3i + 2j + 5k),$$

em que QR_n é o n-ésimo termo dos quatérnios de Perrin.

Demonstração. Utilizando a recorrência $QR_{-n} = QR_{-n+3} - QR_{-n+1}$, observa-se que

$$QR_{-2} = QR_1 - QR_{-1}$$
$$QR_{-4} = QR_{-1} - QR_{-3}$$
$$QR_{-6} = QR_{-3} - QR_{-5}$$
$$\vdots$$
$$QR_{-2n-2} = QR_{-2n+1} - QR_{-2n-1}$$
$$QR_{-2n} = QR_{-2n+3} - QR_{-2n+1}.$$

Com isso, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} QR_{-2m} = QR_{-2n+3} + QR_1$$
$$= QR_{-2m} = QR_{-2n+3} + (2i + 3j + 2k).$$

□

Teorema 5.51. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos quatérnios de Perrin, são dados por:*

$$\sum_{m=1}^{n} QR_{-2m-1} = QR_{-2n+2} + (2+3i+2j+5k),$$

em que QR_n é o n-ésimo termo dos quatérnios de Perrin.

De modo análogo aos teoremas anteriores, pode-se validar este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

5.8.2 Os octônios de Perrin

O estudo dos octônios teve início com a investigação em relação aos quatérnios, numa tentativa de expandir esses números em oito e dezesseis dimensões. Karatas e Halici (2017) relata que Graves encontrou divisões por zero na álgebra de dezesseis dimensões, definindo então os octônios em 1845, como sendo então não comutativa, não-associativa e normatizada.

Kecilioglu e Akkus (2015) definiram os octônios como sendo no campo dos números $\mathbb{R}$, dado por:

$$p = p' + p''\mathrm{e},$$

onde $p', p'' \in H = \{a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{k^2} = -1, \boldsymbol{ijk} = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, é a álgebra de divisão dos quatérnios. A adição e multiplicação entre dois octônios, $p = p' + p''\mathrm{e}$ e, $q = q' + q''\mathrm{e}$ é dada por meio de:

$$\begin{aligned} p + q &= (p' + q') + (p'' + q'')\mathrm{e}, \\ pq &= (p'q' - \overline{q''}p'') + (q''p' + p''\overline{q'})\mathrm{e}, \end{aligned}$$

em que $\overline{q'}$ e $\overline{q''}$ são os conjugados dos quatérnios q' e q'', respectivamente. Portanto, $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios, numa base natural no espaço sobre $\mathbb{R}$ formado pelos elementos: $\mathrm{e}_0 = 1, \mathrm{e}_1 = \boldsymbol{i}, \mathrm{e}_2 = \boldsymbol{j}, \mathrm{e}_3 = \boldsymbol{k}, \mathrm{e}_4 = \mathrm{e}, \mathrm{e}_5 = \boldsymbol{i}\mathrm{e}, \mathrm{e}_6 = \boldsymbol{j}\mathrm{e}, \mathrm{e}_7 = \boldsymbol{k}\mathrm{e}$ e a multiplicação desses números é mostrada no Quadro 8.

Desse modo, tem-se a notação dos octônios, dada por:

$$p = \sum_{p=0}^{7} p_s \mathrm{e}_\mathrm{s},$$

Quadro 8 – Tabela de multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Fonte: Kecilioglu e Akkus (2015).

em que p_s é o coeficiente real, e_s o coeficiente imaginário, com $p \in \mathscr{O}$, escrito na forma $p = Re(p) + Im(p)$, onde $Re(p) = p_0$ representando a parte real e, $Im(p) = \sum_{s=1}^{7} p_s \mathrm{e_s}$ representando a parte imaginária. O conjugado de p é definido para todo $p, q \in \mathbb{O}$, como:

$$\overline{\overline{p'}} = p, \overline{(p+q)} = \overline{p'} + \overline{q'}, \overline{pq} = \overline{qp}.$$

A norma de p é definida por:

$$N_p = p\overline{p} = \overline{p}p = \sum_{s=0}^{7} p_s^2.$$

O inverso do octônio diferente de zero, com $p \in \mathbb{O}$, é dado por:

$$p^{-1} = \frac{\overline{p}}{N_p}.$$

Para todo $p, q \in \mathbb{O}$:

$$N_{pq} = N_p N_q,$$
$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}.$$

No anel dos octônios $\mathbb{O}$ não vale a propriedade comutativa da multiplicação, não associativa, mas é alternativa: $p(pq) = p^2q, (qp)p = qp^2, (pq)p = p(qp) := pqp$.

Definição 5.27. *Para $n \geqslant 0$, os octônios de Perrin são definidos por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$OR_n = \sum_{s=0}^{7} R_{n+s} \mathrm{e_s},$$

Teorema 5.52. *A fórmula de recorrência dos octônios de Perrin $\{OR_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$OR_n = OR_{n-2} + OR_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $OR_0 = \sum_{s=0}^{7} R_i \mathrm{e_i}, OR_1 = \sum_{s=0}^{7} R_{1+i} \mathrm{e_i}, OR_2 = \sum_{s=0}^{7} R_{2+i} \mathrm{e_i}$.

Demonstração. Com referência na recorrência de Perrin, $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$ e na Definição 5.27, tem-se:

$$\begin{aligned} OR_{n-2} + OR_{n-3} &= \sum_{s=0}^{7} R_{n-2+i}\mathrm{e_i} + \sum_{s=0}^{7} R_{n-3+i}\mathrm{e_i} \\ &= \sum_{s=0}^{7} (R_{n-2+i} + R_{n-3+i})\mathrm{e_i} \\ &= \sum_{s=0}^{7} R_{n+i}\mathrm{e_i} \\ &= OR_n. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.53. *A função geradora dos octônios de Perrin, é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$g(OR_n, x) = \frac{OR_0 + OR_1 x + (OR_2 - OR_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

Demonstração. De posse da função:

$$g(OR_n, x) = OR_0 + OR_1 x + OR_2 x^2 + \ldots + OR_n x^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por x^2 e x^3, resultando:

$$x^2 g(OR_n, x) = OR_0 x^2 + OR_1 x^3 + OR_2 x^4 + \ldots + OR_{n-2} x^n + \ldots$$
$$x^3 g(OR_n, x) = OR_0 x^3 + OR_1 x^4 + OR_2 x^5 + \ldots + OR_{n-3} x^n + \ldots$$

Assim, realizando $g(OR_n, x) - x^2 g(OR_n, x) - x^3 g(OR_n, x)$, tem-se que:

$$(1 - x^2 - x^3)g(OR_n, x) = OR_0 + OR_1 x + (OR_2 - OR_0)x^2 + (OR_3 - OR_1 - OR_0)x^3 + \ldots$$
$$(1 - x^2 - x^3)g(OR_n, x) = OR_0 + OR_1 x + (OR_2 - OR_0)x^2.$$

Então OR_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{OR_0 + OR_1 x + (OR_2 - OR_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

□

Teorema 5.54. *A fórmula de Binet dos octônios de Perrin, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$OR_n = A\alpha x_1^n + B\beta x_2^n + C\gamma x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x - 1 = 0$,

$$A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$
$$\alpha = 1 + x_1 i + x_1^2 j + x_1^3 k + x_1^4 \mathrm{e} + x_1^5 i\mathrm{e} + x_1^6 j\mathrm{e} + x_1^7 k\mathrm{e},$$
$$\beta = 1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k + x_2^4 \mathrm{e} + x_2^5 i\mathrm{e} + x_2^6 j\mathrm{e} + x_2^7 k\mathrm{e},$$
$$\gamma = 1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k + x_3^4 \mathrm{e} + x_3^5 i\mathrm{e} + x_3^6 j\mathrm{e} + x_3^7 k\mathrm{e}.$$

Demonstração. De posse da fórmula de Binet da sequência de Perrin, $R_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ (Teorema 5.4) e da Definição 5.27, tem-se que:

$$\begin{aligned}
OR_n &= R_n + iR_{n+1} + jR_{n+2} + kR_{n+3} + \mathrm{e}R_{n+4} + i\mathrm{e}R_{n+5} + j\mathrm{e}R_{n+6} + k\mathrm{e}R_{n+7} \\
&= \mathrm{e}_0 R_n + \mathrm{e}_1 R_{n+1} + \mathrm{e}_2 R_{n+2} + \mathrm{e}_3 R_{n+3} + \mathrm{e}_4 R_{n+4} + \mathrm{e}_5 R_{n+5} + \mathrm{e}_6 R_{n+6} + \mathrm{e}_7 R_{n+7} \\
&= (Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n)\mathrm{e}_0 + (Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} + Cx_3^{n+1})\mathrm{e}_1 + \ldots + (Ax_1^{n+7} + Bx_2^{n+7} + Cx_3^{n+7})\mathrm{e}_7 \\
&= (Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n) + (Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} + Cx_3^{n+1})i + \ldots + (Ax_1^{n+7} + Bx_2^{n+7} + Cx_3^{n+7})k\mathrm{e} \\
&= (1 + x_1 i + x_1^2 j + x_1^3 k + x_1^4 \mathrm{e} + x_1^5 i\mathrm{e} + x_1^6 j\mathrm{e} + x_1^7 k\mathrm{e})Ax_1^n \\
&+ (1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k + x_2^4 \mathrm{e} + x_2^5 i\mathrm{e} + x_2^6 j\mathrm{e} + x_2^7 k\mathrm{e})Bx_2^n \\
&+ (1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k + x_3^4 \mathrm{e} + x_3^5 i\mathrm{e} + x_3^6 j\mathrm{e} + x_3^7 k\mathrm{e})Cx_3^n \\
&= A\alpha x_1^n + B\beta x_2^n + C\gamma x_3^n
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.55. *Para $n \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Perrin é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OR_{n-2} & OR_{n-3} & OR_{n-4} \\ OR_{n-1} & OR_{n-2} & OR_{n-3} \\ OR_{n-3} & OR_{n-4} & OR_{n-5} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Constatando a veracidade para $n = 5$, pelo princípio da indução finita:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2OR_{-2}+OR_{-1}+OR_{-3} & 2OR_{-3}+OR_{-2}+OR_{-4} & 2OR_{-4}+OR_{-3}+OR_{-5} \\ 2OR_{-2}+2OR_{-1}+OR_{-3} & 2OR_{-3}+2OR_{-2}+OR_{-4} & 2OR_{-4}+2OR_{-3}+OR_{-5} \\ OR_{-2}+OR_{-1}+OR_{-3} & OR_{-3}+OR_{-2}+OR_{-4} & OR_{-4}+OR_{-3}+OR_{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} OR_3 & OR_2 & OR_1 \\ OR_4 & OR_3 & OR_2 \\ OR_2 & OR_1 & OR_0 \end{bmatrix}.$$

Supondo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OR_{k-2} & OR_{k-3} & OR_{k-4} \\ OR_{k-1} & OR_{k-2} & OR_{k-3} \\ OR_{k-3} & OR_{k-4} & OR_{k-5} \end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OR_{k-2} & OR_{k-3} & OR_{k-4} \\ OR_{k-1} & OR_{k-2} & OR_{k-3} \\ OR_{k-3} & OR_{k-4} & OR_{k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} OR_{k-1} & OR_{k-2} & OR_{k-3} \\ OR_{k-2}+OR_{k-3} & OR_{k-3}+OR_{k-4} & OR_{k-4}+OR_{k-5} \\ OR_{k-2} & OR_{k-3} & OR_{k-4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} OR_{k-1} & OR_{k-2} & OR_{k-3} \\ OR_k & OR_{k-1} & OR_{k-2} \\ OR_{k-2} & OR_{k-3} & OR_{k-4} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.56. *A soma dos n primeiros termos octônios de Perrin é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=1}^{n} OR_m = OR_{n+3} + OR_{n+2} - OR_4.$$

Demonstração. Utilizando o Teorema 5.52, pode-se obter a relação:

$$OR_{n-3} = OR_n - OR_{n-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
OR_0 &= OR_3 - OR_1 \\
OR_1 &= OR_4 - OR_2 \\
OR_2 &= OR_5 - OR_3 \\
OR_3 &= OR_6 - OR_4 \\
OR_4 &= OR_7 - OR_5 \\
&\vdots \\
OR_{n-3} &= OR_n - OR_{n-2} \\
OR_{n-2} &= OR_{n+1} - OR_{n-1} \\
OR_{n-1} &= OR_{n+2} - OR_n \\
OR_n &= OR_{n+3} - OR_{n+1}.
\end{aligned}$$

Realizando cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} OR_m &= OR_{n+3} + OR_{n+2} - OR_2 - OR_1 \\
&= OR_{n+3} + OR_{n+2} - OR_4.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.57. *A soma dos n primeiros termos pares dos octônios de Perrin é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{2m} = OR_{2n+3} - OR_1.$$

Demonstração. Utilizando o Teorema 5.52, tem-se $OR_n = OR_{n-2} + OR_{n-3} \Leftrightarrow OR_{n-3} = OR_n -$

OR_{n-2}, e de modo análogo à demonstração anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned}
OR_0 &= OR_3 - OR_1 \\
OR_2 &= OR_5 - OR_3 \\
OR_4 &= OR_7 - OR_5 \\
&\vdots \\
OR_{2n-2} &= OR_{2n+1} - OR_{2n-1} \\
OR_{2n} &= OR_{2n+3} - OR_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Resultando:

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{2m} = OR_{2n+3} - OR_1.$$

□

Teorema 5.58. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos octônios de Perrin, são descritos por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=0}^{n} OR_{2m+1} = OR_{2n+4} - OR_2.$$

Considerando apenas a relação $OR_{n-3} = OR_n - OR_{n-2}$ e os termos ímpares, realiza-se o somatório e os cancelamentos desses termos com índice $2n$, validando assim o teorema.

Desse modo, tem-se a análise do comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos octônios de Perrin.

Definição 5.28. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o octonion de Perrin, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$OR_{-n} = \sum_{s=0}^{7} R_{-n+s}\mathrm{e_s}.$$

Teorema 5.59. *A função geradora dos octônios de Perrin para índice inteiro não positivo, é expressa por:*

$$g(OR_{-n}, x) = \frac{-(OR_0 + OR_2 x + OR_1 x^2)}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x e x^3, tem-se que:

$$\begin{aligned}
g(OR_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} OR_{-n}x^n = OR_0 + OR_{-1}x + OR_{-2}x^2 + \ldots + OR_{-n}x^n + \ldots \\
xg(OR_{-n}, x) &= OR_0 x + OR_{-1}x^2 + OR_{-2}x^3 + \ldots + OR_{-n-1}x^n + \ldots \\
x^3 g(OR_{-n}, x) &= OR_0 x^3 + OR_{-1}x^4 + OR_{-2}x^5 + \ldots + OR_{-n-3}x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Baseado nas Equações $x^3 g(OR_{-n},x) - (xg(OR_{-n},x) + g(OR_{-n},x))$, tem-se que:

$$(x^3-x-1)g(OR_{-n},x) = -OR_0 - (OR_0+OR_{-1})x - (OR_{-2}+OR_{-1})x^2 + (OR_0 - OR_{-2} - OR_{-3})x^3 + \ldots + (OR_{-n-3} - OR_{-n} - OR_{-n-1})x^n + \ldots$$

Considerando a fórmula de recorrência (Teorema 5.52), pode-se obter:

$$(x^3-x-1)g(OR_{-n},x) = -OR_0 - (OR_0+OR_{-1})x - (OR_{-2}+OR_{-1})x^2$$
$$(x^3-x-1)g(OR_{-n},x) = -OR_0 - OR_2 x - OR_1 x^2.$$

Então OR_{-n} é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{-(OR_0 + OR_2 x + OR_1 x^2)}{x^3 - x - 1}.$$

□

Teorema 5.60. *Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Perrin, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OR_{-n-2} & OR_{-n-3} & OR_{-n-4} \\ OR_{-n-1} & OR_{-n-2} & OR_{-n-3} \\ OR_{-n-3} & OR_{-n-4} & OR_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Averiguando a igualdade para $n = 1$, por meio do princípio da indução finita:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \\ OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} - OR_{-3} & OR_{-2} - OR_{-4} & OR_{-3} - OR_{-5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \\ OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-4} & OR_{-5} & OR_{-6} \end{bmatrix}.$$

Supondo a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OR_{-k-2} & OR_{-k-3} & OR_{-k-4} \\ OR_{-k-1} & OR_{-k-2} & OR_{-k-3} \\ OR_{-k-3} & OR_{-k-4} & OR_{-k-5} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OR_{-2} & OR_{-3} & OR_{-4} \\ OR_{-1} & OR_{-2} & OR_{-3} \\ OR_{-3} & OR_{-4} & OR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OR_{-k-2} & OR_{-k-3} & OR_{-k-4} \\ OR_{-k-1} & OR_{-k-2} & OR_{-k-3} \\ OR_{-k-3} & OR_{-k-4} & OR_{-k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} OR_{-k-3} & OR_{-k-4} & OR_{-k-5} \\ OR_{-k-2} & OR_{-k-3} & OR_{-k-4} \\ OR_{-k-1} - OR_{-k-3} & OR_{-k-2} - OR_{-k-4} & OR_{-k-3} - OR_{-k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} OR_{-k-3} & OR_{-k-4} & OR_{-k-5} \\ OR_{-k-2} & OR_{-k-3} & OR_{-k-4} \\ OR_{-k-4} & OR_{-k-5} & OR_{-k-6} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.61. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos octônios de Perrin, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{-m} = OR_{-n+3} + OR_{-n+2} + OR_4.$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos octônios de Perrin, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$OR_{-n} = OR_{-n+3} - OR_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} OR_{-1} &= OR_2 - OR_0 \\ OR_{-2} &= OR_1 - OR_{-1} \\ OR_{-3} &= OR_0 - OR_{-2} \\ OR_{-4} &= OR_{-1} - OR_{-3} \\ &\vdots \\ OR_{-n-3} &= OR_{-n} - OR_{-n-2} \\ OR_{-n-2} &= OR_{-n+1} - OR_{-n-1} \\ OR_{-n-1} &= OR_{-n+2} - OR_{-n} \\ OR_{-n} &= OR_{-n+3} - OR_{-n+1}. \end{aligned}$$

Por meio de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} OR_{-m} &= OR_{-n+3} + OR_{-n+2} + OR_2 + OR_1 \\ &= OR_{-n+3} + OR_{-n+2} + OR_4 \end{aligned}$$

□

Teorema 5.62. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos octônios de Perrin é dada por:*

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{-2m} = OR_{-2n+3} + OR_1.$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $OR_{-n} = OR_{-n+3} - OR_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned}
OR_{-2} &= OR_1 - OR_{-1} \\
OR_{-4} &= OR_{-1} - OR_{-3} \\
OR_{-6} &= OR_{-3} - OR_{-5} \\
&\vdots \\
OR_{-2n-2} &= OR_{-2n+1} - OR_{-2n-1} \\
OR_{-2n} &= OR_{-2n+3} - OR_{-2n+1}.
\end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{-2m} = OR_{-2n+3} + OR_1.$$

□

Teorema 5.63. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos octônios de Perrin, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} OR_{-2m-1} = OR_{-2n+2} + OR_2.$$

De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

5.8.3 Os sedenios de Perrin

Os sedenios foram desenvolvidos por Cayley–Dickson (Bilgici, 2017), possuindo 16 dimensões e denotados por $\mathbb{S}$. A sua aplicação é presente em diversas áreas da ciência, destacando a gravidade linear e a teoria eletromagnética. Esse números são hipercomplexos e semelhantes aos quatérnios e octônios. Seus elementos são dispostos na forma de $e_0, e_1, e_2, ..., e_{15}$, em que e_0 é o elemento unitário e $e_1, e_2, ..., e_{15}$ são as unidades imaginárias. Sendo então o sedenio, S, descrito por:

$$S = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i,$$

Quadro 9 – Tabela de multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$

e_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Fonte: Bilgici (2017).

em que $a_0, a_1, ..., a_{15}$ são reais.

Por sua vez, Imaeda e Imaeda (2000) definiram os sedenios como:

$$S = (O_1; O_2) \in \mathbb{S}, O_1, O_2 \in \mathbb{O},$$

onde $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios sobre os reais. Assim, percebe-se que um sedenio é um par ordenado de dois octônios, tendo o seu conjugado definido como $\overline{S} = (O_1; -O_2)$. O produto de dois sedenios $S_1 = (O_1; O_2)$ e $S_2 = (O_3; O_4)$ é dado por:

$$S_1 S_2 = (O_1 O_3 - 1\overline{O_4} O_2; O_2 \overline{O_3} + O_4 O_1),$$

em que e_8 é o parâmetro gerador.

Para $i \equiv e_1$, onde $i = 0, 1, 2, ..., 15$, Cawagas (2004) construiu um quadro de multiplicação para a base de $\mathbb{S}$, como mostra no Quadro 9.

Definição 5.29. *Para $n \geqslant 0$, os sedenios de Perrin são definidos por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$SR_n = \sum_{s=0}^{15} R_{n+s} e_s.$$

Teorema 5.64. *A fórmula de recorrência dos sedenios de Perrin $\{SR_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, é dada por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$SR_n = SR_{n-2} + SR_{n-3}, n \geqslant 3.$$

Demonstração. Com referência na recorrência de Perrin, $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$ e na Definição 5.29, tem-se:

$$\begin{aligned} SR_{n-2} + SR_{n-3} &= \sum_{s=0}^{15} R_{n-2+s}\mathrm{e_s} + \sum_{s=0}^{15} R_{n-3+i}\mathrm{e_i} \\ &= \sum_{s=0}^{15} (R_{n-2+s} + R_{n-3+s})\mathrm{e_s} \\ &= \sum_{s=0}^{15} R_{n+s}\mathrm{e_s} \\ &= SR_n. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.65. *A função geradora dos sedenios de Perrin, SR_n, é descrita por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$g(SR_n, x) = \frac{SR_0 + SR_1 x + (SR_2 - SR_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

Demonstração. Dada a função:

$$g(SR_n, x) = SR_0 + SR_1 x + SR_2 x^2 + \ldots + SR_n x^n + \ldots$$

Realiza-se a multiplicação dessa função por x^2 e x^3, obtendo:

$$x^2 g(SR_n, x) = SR_0 x^2 + SR_1 x^3 + SR_2 x^4 + \ldots + SR_{n-2} x^n + \ldots$$
$$x^3 g(SR_n, x) = SR_0 x^3 + SR_1 x^4 + SR_2 x^5 + \ldots + SR_{n-3} x^n + \ldots$$

Com isso, pode-se realizar a operação $g(SR_n, x) - x^2 g(SR_n, x) - x^3 g(SR_n, x)$, resultando:

$$(1 - x^2 - x^3) g(SR_n, x) = SR_0 + SR_1 x + (SR_2 - SR_0)x^2 + (SR_3 - SR_1 - SR_0)x^3 + \ldots$$
$$(1 - x^2 - x^3) g(SR_n, x) = SR_0 + SR_1 x + (SR_2 - SR_0)x^2.$$

Então SR_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{SR_0 + SR_1 x + (SR_2 - SR_0)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

□

Teorema 5.66. *A fórmula de Binet dos sedenios de Perrin, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:*

$$SR_n = A\alpha_s x_1^n + B\beta_s x_2^n + C\gamma_s x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x - 1 = 0$,

$$A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$
$$\alpha_s = \sum_{s=0}^{15} x_1^s \mathrm{e}_s, \beta_s = \sum_{s=0}^{15} x_2^s \mathrm{e}_s, \gamma_s = \sum_{s=0}^{15} x_3^s \mathrm{e}_s.$$

Demonstração. De posse da fórmula de Binet da sequência de Perrin, $R_{(n)} = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ (Teorema 5.4) e da Definição 5.29, tem-se que:

$$\begin{aligned}
SR_n &= \mathrm{e}_0 R_n + \mathrm{e}_1 R_{n+1} + \mathrm{e}_2 R_{n+2} + \mathrm{e}_3 R_{n+3} + \mathrm{e}_4 R_{n+4} + \mathrm{e}_5 R_{n+5} + \mathrm{e}_6 R_{n+6} + \ldots + \mathrm{e}_1 5 R_{n+15} \\
&= (Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n)\mathrm{e}_0 + (Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} + Cx_3^{n+1})\mathrm{e}_1 + \ldots + (Ax_1^{n+15} + Bx_2^{n+15} + Cx_3^{n+15})\mathrm{e}_1 5 \\
&= (\sum_{s=0}^{15} x_1^s \mathrm{e}_s) Ax_1^n + (\sum_{s=0}^{15} x_2^s \mathrm{e}_s) Bx_2^n + (\sum_{s=0}^{15} x_3^s \mathrm{e}_s) Cx_3^n \\
&= A\alpha_s x_1^n + B\beta_s x_2^n + C\gamma_s x_3^n
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.67. *Para $n \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos sedenios de Perrin é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SR_{n-2} & SR_{n-3} & SR_{n-4} \\ SR_{n-1} & SR_{n-2} & SR_{n-3} \\ SR_{n-3} & SR_{n-4} & SR_{n-5} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, para verificar a igualdade para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2SR_{-2} + SR_{-1} + SR_{-3} & 2SR_{-3} + SR_{-2} + SR_{-4} & 2SR_{-4} + SR_{-3} + SR_{-5} \\ 2SR_{-2} + 2SR_{-1} + SR_{-3} & 2SR_{-3} + 2SR_{-2} + SR_{-4} & 2SR_{-4} + 2SR_{-3} + SR_{-5} \\ SR_{-2} + SR_{-1} + SR_{-3} & SR_{-3} + SR_{-2} + SR_{-4} & SR_{-4} + SR_{-3} + SR_{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SR_3 & SR_2 & SR_1 \\ SR_4 & SR_3 & SR_2 \\ SR_2 & SR_1 & SR_0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, supondo a veracidade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SR_{k-2} & SR_{k-3} & SR_{k-4} \\ SR_{k-1} & SR_{k-2} & SR_{k-3} \\ SR_{k-3} & SR_{k-4} & SR_{k-5} \end{bmatrix}.$$

Assim, verifica-se que seja válido para $n = k+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR_{k-2} & SR_{k-3} & SR_{k-4} \\ SR_{k-1} & SR_{k-2} & SR_{k-3} \\ SR_{k-3} & SR_{k-4} & SR_{k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SR_{k-1} & SR_{k-2} & SR_{k-3} \\ SR_{k-2} + SR_{k-3} & SR_{k-3} + SR_{k-4} & SR_{k-4} + SR_{k-5} \\ SR_{k-2} & SR_{k-3} & SR_{k-4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SP_{k-1} & SP_{k-2} & SP_k \\ SP_k & SP_{k-1} & SP_{k-2} \\ SP_{k-2} & SP_{k-3} & SP_{k-4} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.68. *A soma dos n primeiros termos sedenios de Perrin é expressa por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=1}^{n} SR_m = SR_{n+3} + SR_{n+2} - SR_4$$

Demonstração. Por meio do Teorema 5.64, obtêm-se a relação:

$$SR_{n-3} = SR_n - SR_{n-2}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
SR_0 &= SR_3 - SR_1 \\
SR_1 &= SR_4 - SR_2 \\
SR_2 &= SR_5 - SR_3 \\
SR_3 &= SR_6 - SR_4 \\
SR_4 &= SR_7 - SR_5 \\
&\vdots \\
SR_{n-3} &= SR_n - SR_{n-2} \\
SR_{n-2} &= SR_{n+1} - SR_{n-1} \\
SR_{n-1} &= SR_{n+2} - SR_n \\
SR_n &= SR_{n+3} - SR_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Por meio de cancelamentos sucessivos, é fácil ver que: Realizando cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} SR_m = SR_{n+3} + SR_{n+2} - SR_4.$$

□

Teorema 5.69. *A soma dos n primeiros termos pares dos sedenios de Perrin é dado por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{2m} = SR_{2n+3} - SR_1.$$

Demonstração. De posse do Teorema 5.64, tem-se $SR_n = SR_{n-2} + SR_{n-3} \Leftrightarrow SR_{n-3} = SR_n - SR_{n-2}$. Assim, de modo análogo à demonstração anterior, é fácil ver que:

$$
\begin{aligned}
SR_0 &= SR_3 - SR_1 \\
SR_2 &= SR_5 - SR_3 \\
SR_4 &= SR_7 - SR_5 \\
&\vdots \\
SR_{2n-2} &= SR_{2n+1} - SR_{2n-1} \\
SR_{2n} &= SR_{2n+3} - SR_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Resultando:

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{2m} = SR_{2n+3} - SR_1.$$

□

Teorema 5.70. *A soma dos n primeiros termos ímpares dos sedenios de Perrin, são expressos por (Tasyurdu; Akpinar, 2020):*

$$\sum_{m=0}^{n} SR_{2m+1} = SR_{2n+4} - SR_2.$$

Demonstração. Para demonstrar tal teorema, considera-se a relação $SR_{n-3} = SR_n - SR_{n-2}$ e os seus respectivos termos ímpares. Assim, realiza-se a soma desses termos e posteriormente os cancelamentos com índice $2n$. □

A seguir são analisados os termos com índices inteiros não positivos dos sedenios de Perrin.

Definição 5.30. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o sedenios de Perrin, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$SR_{-n} = \sum_{s=0}^{15} R_{-n+s}\mathrm{e_s}.$$

Teorema 5.71. *Os sedenios de Perrin, possuem a sua função geradora para índice inteiro não positivo expressa por:*

$$g(SR_{-n},x) = \frac{-(SR_0 + SR_2x + SR_1x^2)}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a operação multiplicativa da função por x e x^3, tem-se que:

$$\begin{aligned}
g(SR_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} SR_{-n}x^n = SR_0 + SR_{-1}x + SR_{-2}x^2 + \ldots + SR_{-n}x^n + \ldots \\
xg(SR_{-n},x) &= SR_0x + SR_{-1}x^2 + SR_{-2}x^3 + \ldots + SR_{-n-1}x^n + \ldots \\
x^3g(SR_{-n},x) &= SR_0x^3 + SR_{-1}x^4 + SR_{-2}x^5 + \ldots + SR_{-n-3}x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Baseado nas Equações $x^3g(SR_{-n},x) - (xg(SR_{-n},x) + g(SR_{-n},x))$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
(x^3 - x - 1)g(SR_{-n},x) = {} & -SR_0 - (SR_0 + SR_{-1})x - (SR_{-2} + SR_{-1})x^2 \\
& + (SR_0 - SR_{-2} - SR_{-3})x^3 + \ldots + (SR_{-n-3} - SR_{-n} - SR_{-n-1})x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Considerando a fórmula de recorrência (Teorema 5.64), pode-se obter:

$$(x^3-x-1)g(SR_{-n},x) = -SR_0-(SR_0+SR_{-1})x-(SR_{-2}+SR_{-1})x^2$$
$$(x^3-x-1)g(SR_{-n},x) = -SR_0-SR_2x-SR_1x^2$$
$$(x^3-x-1)g(SR_{-n},x) = -(SR_0+SR_2x+SR_1x^2).$$

Então SR_{-n} é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{-(SR_0+SR_2x+SR_1x^2)}{x^3-x-1}.$$

□

Teorema 5.72. *Para $n>0$ e $n\in\mathbb{N}$, a matriz geradora dos sedenios de Perrin, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}SR_{-2}&SR_{-3}&SR_{-4}\\SR_{-1}&SR_{-2}&SR_{-3}\\SR_{-3}&SR_{-4}&SR_{-5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}SR_{-n-2}&SR_{-n-3}&SR_{-n-4}\\SR_{-n-1}&SR_{-n-2}&SR_{-n-3}\\SR_{-n-3}&SR_{-n-4}&SR_{-n-5}\end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n=1$, verifica-se a igualdade:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}SR_{-2}&SR_{-3}&SR_{-4}\\SR_{-1}&SR_{-2}&SR_{-3}\\SR_{-3}&SR_{-4}&SR_{-5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}SR_{-3}&SR_{-4}&SR_{-5}\\SR_{-2}&SR_{-3}&SR_{-4}\\SR_{-1}-SR_{-3}&SR_{-2}-SR_{-4}&SR_{-3}-SR_{-5}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}SR_{-3}&SR_{-4}&SR_{-5}\\SR_{-2}&SR_{-3}&SR_{-4}\\SR_{-4}&SR_{-5}&SR_{-6}\end{bmatrix}.$$

Assim, supondo que seja válido para qualquer $n=k,k\in\mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}SR_{-2}&SR_{-3}&SR_{-4}\\SR_{-1}&SR_{-2}&SR_{-3}\\SR_{-3}&SR_{-4}&SR_{-5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}SR_{-k-2}&SR_{-k-3}&SR_{-k-4}\\SR_{-k-1}&SR_{-k-2}&SR_{-k-3}\\SR_{-k-3}&SR_{-k-4}&SR_{-k-5}\end{bmatrix}.$$

Logo, é analisado que seja válido para $n=k+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SR_{-2} & SR_{-3} & SR_{-4} \\ SR_{-1} & SR_{-2} & SR_{-3} \\ SR_{-3} & SR_{-4} & SR_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR_{-k-2} & SR_{-k-3} & SR_{-k-4} \\ SR_{-k-1} & SR_{-k-2} & SR_{-k-3} \\ SR_{-k-3} & SR_{-k-4} & SR_{-k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SR_{-k-3} & SR_{-k-4} & SR_{-k-5} \\ SR_{-k-2} & SR_{-k-3} & SR_{-k-4} \\ SR_{-k-1} - SR_{-k-3} & SR_{-k-2} - SR_{-k-4} & SR_{-k-3} - SR_{-k-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SR_{-k-3} & SR_{-k-4} & SR_{-k-5} \\ SR_{-k-2} & SR_{-k-3} & SR_{-k-4} \\ SR_{-k-4} & SR_{-k-5} & SR_{-k-6} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.73. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos sedenios de Perrin, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{-m} = SR_{-n+3} + SR - -n + 2 + SR_4.$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos sedenios de Perrin, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$SR_{-n} = SR_{-n+3} - SR_{-n+1}.$$

Logo,

$$SR_{-1} = SR_2 - SR_0$$

$$SR_{-2} = SR_1 - SR_{-1}$$

$$SR_{-3} = SR_0 - SR_{-2}$$

$$SR_{-4} = SR_{-1} - SR_{-3}$$

$$\vdots$$

$$SR_{-n-3} = SR_{-n} - SR_{-n-2}$$

$$SR_{-n-2} = SR_{-n+1} - SR_{-n-1}$$

$$SR_{-n-1} = SR_{-n+2} - SR_{-n}$$

$$SR_{-n} = SR_{-n+3} - SR_{-n+1}.$$

Por meio de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{-m} = SR_{-n+3} + SR_{-n+2} + SR_2 + SR_1$$
$$= SR_{-n+3} + SR - -n + 2 + SR_4.$$

□

Teorema 5.74. *A soma dos n primeiros termos pares, com índice inteiro não positivo, dos sedenios de Perrin é:*

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{-2m} = SR_{-2n+3} + SR_1.$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $SR_{-n} = SR_{-n+3} - SR_{-n+1}$, observa-se que

$$SR_{-2} = SR_1 - SR_{-1}$$
$$SR_{-4} = SR_{-1} - SR_{-3}$$
$$SR_{-6} = SR_{-3} - SR_{-5}$$
$$\vdots$$
$$SR_{-2n-2} = SR_{-2n+1} - SR_{-2n-1}$$
$$SR_{-2n} = SR_{-2n+3} - SR_{-2n+1}.$$

Com isso, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{-2m} = SR_{-2n+3} + SR_1.$$

□

Teorema 5.75. *A soma dos n primeiros termos ímpares, com índice inteiro não positivo, dos sedenios de Perrin, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SR_{-2m-1} = SR_{-2n+2} + SR_2.$$

De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

5.9 Os quatérnios bicomplexos de k-padovan e k-perrin

Desenvolvido inicialmente por William Rowan Hamilton (1805-1865), um quatérnio é uma extensão dos números complexos, possuindo duas estruturas quaterniônicas: quatérnio em $\mathbb{R}$, com componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{C}$, com variáveis complexas. Assim, esse conjunto está compreendido como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões sobre o corpo $\mathbb{R}$ como suporte (Oliveira, 2018). Com isso, um quatérnio é descrito por:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde a,b,c são números reais e i,j,k a parte ortogonal na base $\mathbb{R}^3$.Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ são dois quatérnios distintos. As operações escalares de adição, igualdade e multiplicação entre eles são:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

$q_1 = q_2$ apenas se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$. E para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha q_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1 i + \alpha c_1 j + \alpha d_1 k$.

Já os números bicomplexos representam uma álgebra em duas dimensões sobre $\mathbb{C}$. Dessa forma, os números bicomplexos representam uma álgebra sobre o conjunto $\mathbb{R}$ em quatro dimensões, formando ainda um espaço vetorial real com operações de adição e multiplicação escalar. Ressalta-se ainda que Além disso, o espaço vetorial dos bicomplexos são uma álgebra comutativa com as propriedades de multiplicação e o produto de os números bicomplexos, além de possuir uma álgebra associativa real com produto bicomplexo. Os números bicomplexos formam um anel comutativo com unidade que contém os números complexos (Catarino, 2018; Gul, 2020; Luna-ElizarrarÁs, 2015). O conjunto de números bicomplexos é definido da seguinte forma:

$$B = \{z_1 + z_2 j | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\},$$

onde j representa a unidade imaginária, $i^2 = j^2 = -1, ij = j1 = -1$, $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos com $i = \sqrt{-1}$.

O conjunto de números bicomplexos pode ser expresso por:

$$B = \{q | q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 ij, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Quadro 10 – Tabela de multiplicação das unidades imaginárias dos bicomplexos

.	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	ij	-1	$-i$
ij	ij	$-j$	$-i$	-1

Fonte: Gul (2020).

O Quadro de multiplicação dos bicomplexos, é dada por:

Diante disso, é apresentada a generalização da sequência de k-Padovan, sendo uma sequência numérica de terceira ordem, cuja relação de recorrência é dada por $P_{k,n} = P_{k,n-2} + kP_{k,n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_{k,0} = P_{k,1} = P_{k,2} = 1$. Tão logo, tem-se o seu respectivo polinômio característico dado por $x^3 - x - k = 0$. A sequência de k-Perrin, por sua vez também é uma sequência numérica de terceira ordem, cuja relação de recorrência é dada por $R_{k,n} = R_{k,n-2} + kR_{k,n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $R_{k,0} = 3, R_{k,1} = 0, R_{k,2} = 2$. Possuindo o mesmo polinômio característico.

Ressalta-se que para o valor de $k = 1$, tem-se a sequência de Padovan e Perrin, respecitvamente. Em relação a essas sequências, tem-se alguns estudos oriundos dos trabalhos (Padovan, 1994; Vieira, 2020b; Vieira; Alves, 2019c; Vieira; Alves, 2019e).

Com o viés de realizar uma extensão matemática desses números, tem-se o processo de complexificação com o estudo dos quatérnios bicomplexos.

Diante disso, tem-se a evolução dessa sequência, com o processo de complexificação, realizando o estudo dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan e k-Perrin, obtendo algumas propriedades e teoremas matemáticos com referência no trabalho de Catarino (2018).

Definição 5.31. *Os quatérnios bicomplexos de k-Padovan* $\left\{QP_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como:*

$$QP_{k,n} = P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + ijP_{k,n+3},$$

onde $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji$ *e* $P_{k,n}$ *é o n-ésimo número de k-Padovan.*

Definição 5.32. *Os quatérnios bicomplexos de k-Perrin* $\left\{QR_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como:*

$$QR_{k,n} = R_{k,n} + iR_{k,n+1} + jR_{k,n+2} + ijR_{k,n+3},$$

onde $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji$ *e* $R_{k,n}$ *é o n-ésimo número de k-Perrin.*

Teorema 5.76. *A fórmula de recorrência dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan é dada por:*

$$QP_{k,n} = QP_{k,n-2} + kQP_{k,n-3}, n \geqslant 3,$$

com valores iniciais $QP_{k,0} = 1+i+j+2ij$, $QP_{k,1} = 1+i+2j+2ij$ *e* $QP_{k,2} = 1+2i+2j+3ij$.

Demonstração. Com referência na Definição 5.31, tem-se a soma de dois termos quaterniônicos bicomplexos de k-Padovan consecutivos com $n \geqslant 3$, dados por $QP_{k,n-2}$ e $kQP_{k,n-3}$. Logo:

$QP_{k,n-2} = P_{k,n-2} + iP_{k,n-1} + jP_{k,n} + ijP_{k,n+1}$ e $QP_{k,n-3} = P_{k,n-3} + iP_{k,n-2} + jP_{k,n-1} + ijP_{k,n}$. Assim:

$$\begin{aligned}
QP_{k,n-2} + QP_{k,n-3} &= (P_{k,n-2} + iP_{k,n-1} + jP_{k,n} + ijP_{k,n+1}) \\
&\quad + (P_{k,n-3} + iP_{k,n-2} + jP_{k,n-1} + ijP_{k,n}) \\
&= (P_{k,n-2} + P_{k,n-3}) + i(P_{k,n-1} + P_{k,n-2}) + j(P_{k,n} + P_{k,n-1}) \\
&\quad + ij(P_{k,n+1} + P_{k,n}) \\
&= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3} \\
&= QP_{k,n}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.77. *A fórmula de recorrência dos quatérnios bicomplexos de k-Perrin é dada por:*

$$QR_{k,n} = QR_{k,n-2} + kQR_{k,n-3}, n \geqslant 3,$$

com valores iniciais $QR_{k,0} = 3+2j+3ij$, $QR_{k,1} = 2i+3j+2ij$ *e* $QR_{k,2} = 2+3i+2j+5ij$.

De forma semelhante à demonstração do Teorema 5.76.

Com referência nessas definições, são estudadas as operações de adição, subtração e multiplicação dos números quatérnios bicomplexos de k-Padovan..

$$QP_{k,n} \pm QP_{k,m} = (P_{k,n} \pm P_{k,m}) + i(P_{k,n+1} \pm P_{k,m+1}) + j(P_{k,n+2} \pm P_{k,m+2}) + ij(P_{k,n+3} \pm P_{k,m+3}),$$

$$\begin{aligned}
QP_{k,n}QP_{k,m} &= (P_{k,n}P_{k,m} - P_{k,n+1}P_{k,m+1} - P_{k,n+2}P_{k,m+2} - P_{k,n+3}P_{k,m+3}) \\
&\quad + i(P_{k,n}P_{k,m+1} + P_{k,n+1}P_{k,m} - P_{k,n+2}P_{k,m+3} - P_{k,n+3}P_{k,m+2}) \\
&\quad + j(P_{k,n}P_{k,m+2} + P_{k,n+2}P_{k,m} - P_{k,n+1}P_{k,m+3} - P_{k,n+3}P_{k,m+1}) \\
&\quad + ij(P_{k,n}P_{k,m+3} + P_{k,n+3}P_{k,m} + P_{k,n+1}P_{k,m+2} + P_{k,n+2}P_{k,m+1}).
\end{aligned}$$

A multiplicação dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan por um escalar λ, é representada por:

$$\lambda QP_{k,n} = \lambda P_{k,n} + \lambda iP_{k,n+1} + \lambda jP_{k,n+2} + \lambda ijP_{k,n+3}.$$

Os conjugados dos números quatérnios bicomplexos de k-Padovan são representados por:

$$\begin{aligned}
\left(QP_{k,n}\right)_i^* &= P_{k,n} - iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} - ijP_{k,n+3},\\
\left(QP_{k,n}\right)_j^* &= P_{k,n} + iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} - ijP_{k,n+3},\\
\left(QP_{k,n}\right)_{ij}^* &= P_{k,n} - iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} + ijP_{k,n+3}.
\end{aligned}$$

As operações acima descritas, ocorrem de modo semelhante para os quatérnios bicomplexos de k-Perrin.

Teorema 5.78. *Para qualquer k inteiro positivo, pode-se julgar as relações dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan e k-Perrin:*

$$\begin{aligned}
\left(QP_{k,n}QP_{k,m}\right)_i^* &= \left(QP_{k,m}\right)_i^* \left(QP_{k,n}\right)_i^* = \left(QP_{k,n}\right)_i^* \left(QP_{k,m}\right)_i^*,\\
\left(QP_{k,n}QP_{k,m}\right)_j^* &= \left(QP_{k,m}\right)_j^* \left(QP_{k,n}\right)_j^* = \left(QP_{k,n}\right)_j^* \left(QP_{k,m}\right)_j^*,\\
\left(QP_{k,n}QP_{k,m}\right)_{ij}^* &= \left(QP_{k,m}\right)_{ij}^* \left(QP_{k,n}\right)_{ij}^* = \left(QP_{k,n}\right)_{ij}^* \left(QP_{k,m}\right)_{ij}^*,\\
\left(QR_{k,n}QR_{k,m}\right)_i^* &= \left(QR_{k,m}\right)_i^* \left(QR_{k,n}\right)_i^* = \left(QR_{k,n}\right)_i^* \left(QR_{k,m}\right)_i^*,\\
\left(QR_{k,n}QR_{k,m}\right)_j^* &= \left(QR_{k,m}\right)_j^* \left(QR_{k,n}\right)_j^* = \left(QR_{k,n}\right)_j^* \left(QR_{k,m}\right)_j^*,\\
\left(QR_{k,n}QR_{k,m}\right)_{ij}^* &= \left(QR_{k,m}\right)_{ij}^* \left(QR_{k,n}\right)_{ij}^* = \left(QR_{k,n}\right)_{ij}^* \left(QR_{k,m}\right)_{ij}^*,
\end{aligned}$$

A demonstração pode ser realizada utilizando as operações de multiplicação e as relações dos conjugados.

Diante das definições apresentadas, tem-se o estudo da função geradora, fórmula de Binet e forma matricial dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan e k-Perrin.

Proposição 5.79. *A função geradora dos números quatérnios bicomplexos de k-Padovan é dada por:*

$$g(QP_{k,n},x) = \frac{QP_{k,0} + QP_{k,1}x + (QP_{k,2} - QP_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, kx^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(QP_{k,n},x)=\sum_{n=0}^{\infty}QP_{k,n}x^n=QP_{k,0}+QP_{k,1}x+QP_{k,2}x^2+\ldots+QP_{k,n}x^n+\ldots \tag{5.28}$$

$$x^2g(QP_{k,n},x)=QP_{k,0}x^2+QP_{k,1}x^3+QP_{k,2}x^4+\ldots+QP_{k,n-2}x^n+\ldots \tag{5.29}$$

$$kx^3g(QP_{k,n},x)=QP_{k,0}kx^3+QP_{k,1}kx^4+QP_{k,2}kx^5+\ldots+QP_{k,n-3}kx^n+\ldots \tag{5.30}$$

Baseada na Equação (5.28-5.29+5.30), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1-x^2-kx^3)g(QP_{k,n},x)=QP_{k,0}+QP_{k,1}x+(QP_{k,2}-QP_{k,0})x^2+(QP_{k,3}-QP_{k,1}-QP_{k,0})x^3\\+\ldots+(QP_{k,n}-QP_{k,n-2}-QP_{k,n-3})x^n+\ldots\end{aligned}$$

Assim:

$$(1-x^2-kx^3)g(QP_{k,n},x)=QP_{k,0}+QP_{k,1}x+(QP_{k,2}-QP_{k,0})x^2.$$

Então $QP_{k,n}$ é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{QP_{k,0}+QP_{k,1}x+(QP_{k,2}-QP_{k,0})x^2}{1-x^2-kx^3}.$$

□

Proposição 5.80. *A função geradora dos números quatérnios bicomplexos de k-Perrin é dada por:*

$$g(QR_{k,n},x)=\frac{QR_{k,0}+QR_{k,1}x+(QR_{k,2}-QR_{k,0})x^2}{1-x^2-kx^3}.$$

De modo semelhante à demonstração da Propriedade 5.79, pode-se validar a presente propriedade.

Teorema 5.81. *Para $n\in\mathbb{N}$, a fórmula de Binet dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan e k-Perrin é expressa por:*

$$Q_{k,n}^{(n)}=C_1r_1^n+C_2r_2^n+C_3r_3^n,$$

em que C_1,C_2,C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e r_1,r_2,r_3 as raízes do polinômio característico ($x^3-x-k=0$).

Demonstração. Com referência na fórmula de recorrência da sequência k-Padovan e k-Perrin, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são r_1,r_2,r_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1,C_2,C_3.

O discriminante $\Delta = \frac{(-k)^2}{4} - \frac{1}{27}$, referente ao polinômio de 3º grau, determina a maneira de como serão as raízes do polinômio. Desse modo, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, concluindo que $k^2 \neq \frac{64}{27}$. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = k$, $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ e que quando $k \neq 0$, haverá pelo menos uma raiz igual a zero, não havendo fórmula Binet para este caso. □

Com referência em uma das matrizes de Padovan estudada por Vieira (2020), tem-se o estudo da forma matricial.

Teorema 5.82. *Para $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{k,n+2} & QP_{k,n+1} & QP_{k,n} \\ QP_{k,n+1} & QP_{k,n} & QP_{k,n-1} \\ QP_{k,n} & QP_{k,n-1} & QP_{k,n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{k,2}+kQP_{k,1} & QP_{k,1}+kQP_{k,0} & QP_{k,0}+kQP_{k,-1} \\ QP_{k,1}+kQP_{k,0} & QP_{k,0}+kQP_{k,-1} & QP_{k,-1}+kQP_{k,-2} \\ QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{k,4} & QP_{k,3} & QP_{k,2} \\ QP_{k,3} & QP_{k,2} & QP_{k,1} \\ QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = z, z \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^z \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{k,z+2} & QP_{k,z+1} & QP_{k,z} \\ QP_{k,z+1} & QP_{k,z} & QP_{k,z-1} \\ QP_{k,z} & QP_{k,z-1} & QP_{k,z-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = z+1 = 1+z$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{1+z} \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{z} \begin{bmatrix} QP_{k,2} & QP_{k,1} & QP_{k,0} \\ QP_{k,1} & QP_{k,0} & QP_{k,-1} \\ QP_{k,0} & QP_{k,-1} & QP_{k,-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_{k,z+2} & QP_{k,z+1} & QP_{k,z} \\ QP_{k,z+1} & QP_{k,z} & QP_{k,z-1} \\ QP_{k,z} & QP_{k,z-1} & QP_{k,z-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QP_{k,z+1}+kQP_{k,z} & QP_{k,z}+kQP_{k,z-1} & QP_{k,z-1}+kQP_{k,z-2} \\ QP_{k,z+2} & QP_{k,z+1} & QP_{k,z} \\ QP_{k,z+1} & QP_{k,z} & QP_{k,z-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QP_{k,z+3} & QP_{k,z+2} & QP_{k,z+1} \\ QP_{k,z+2} & QP_{k,z} & QP_{k,z} \\ QP_{k,z+1} & QP_{k,z} & QP_{k,z-1} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 5.83. *A forma matricial dos dos quatérnios bicomplexos de k-Perrin, para $n \leqslant 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} QR_{k,2} & QR_{k,1} & QR_{k,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} QR_{k,n+2} & QR_{k,n+1} & QR_{k,n} \end{bmatrix}.$$

De modo análogo à demonstração do Teorema 5.82, pode-se provar este teorema.

Dessa forma, constata-se a definição das sequências dos quatérnios bicomplexos de k-Padovan e k-Perrin, definidos por suas respectivas relações de recorrência de terceira ordem. Assim, foram estudadas algumas propriedades matemáticas envolvendo estes números, incluindo a fórmula de Binet, a função geradora e forma matricial. De fato, pode-se observar que para o caso particular de $k = 1$ permite os resultados para as sequências dos quatérnios bicomplexos de Padovan e Perrin.

5.10 Os quatérnios de padovan e perrin circulares-hiperbólicos

De posse do estudo dos quatérnios circulares hiperbólicos de Fibonacci, foi possível definir os quatérnios circulares hiperbólicos de Padovan e Perrin. Assim, são estudados alguns teoremas dos números dessa sequência, resultando na obtenção das suas respectivas funções geradoras, fórmulas de Binet e formas matriciais.

Com referência no estudo em relação aos quatérnios, abordado nas seções anteriores, é possível continuar o trabalho acerca do processo de complexificação dos números de Padovan e Perrin. Assim, tem-se que Jancewicz (1996), definiu um número em duas dimensões, denominado de número dual, dado por: $d = a + \varepsilon a$, em que ε representa a unidade dual e $a \in \mathbb{N}$. Assim, a unidade dual possui um conjunto de regras $\varepsilon^2 = 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \varepsilon^n = 0, n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$ (Shoham, 2000).

Um anel hiperbólico, $\mathbb{H}$, é pertencente à algébra bidimensional de Jancewicz (1996), também chamados de números de Lorentz. Esses números possuem aplicação na medição de distâncias no plano do espaço-tempo de Sobczyk (1995). Assim, os números hiperbólicos são descritos por $\mathbb{H} = \left\{z = x + hy | h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\right\}$. A adição e multiplicação de dois desses números hiperbólicos n_1 e n_2, são dadas por (Cihan, 2019; Soykan; Gocen, 2020):

$$n_1 \pm n_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2)$$
$$n_1 n_2 = (x_1 + hy_1)(x_2 + hy_2) = (x_1 x_2) + h(y_1 y_2) + h(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Um número circular hiperbólico são expressos por:

$$\mathbb{CH}\left\{w = z_1 + z_2 h | z_1, z_2 \in \mathbb{C}, i^2 = -1, h^2 = 1, h \neq \pm 1, (ih)^2 = 1\right\},$$

em que se $z_1 = x_1 + x_2 i$ e $z_2 = y_1 + y_2 i$ então qualquer número circular-hiperbólico pode ser escrito: $w = (x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i)h$, com $h^2 = 1, h \neq \pm = 1, ih = -hi, (ih)^2 = 1$ (Cihan, 2019; Dattoli, 2018). A operação de adição de dois números hiperbólicos circulares w_1 e w_2 é dada por:

$$w_1 \pm w_2 = (z_1 + z_2 h) \pm (z_3 + z_4 h) = (z_1 \pm z_3) + (z_2 \pm z_4)h,$$
$$w_1 x w_2 = (z_1 \pm z_2 h)x(z_3 + z_4 h) = (z_1 z_3 + z_2 z_4) + (z_1 z_4 + z_2 z_3)h$$

Os números hiperbólicos circulares são uma generalização dos números hiperbólicos complexos, em que esses números não são comutativos, possuindo um quadro de multiplicação (ver Quadro 11).

Diante disso, Aydin (2019) realizou um estudo da junção desses números para a sequência de Fibonacci, definindo os números hiperbólicos de Fibonacci e os quatérnios hiperbólicos de Fibonacci. Assim, será realizado um estudo dos números dessas sequências de Padovan e Perrin, obtendo alguns teoremas matemáticos.

Quadro 11 – Tabela de multiplicação dos números hiperbólicos circulares

x	1	i	h	ih
1	1	i	h	ih
i	i	-1	ih	$-h$
h	h	$-ih$	1	$-i$
ih	ih	h	i	1

Fonte: Aydin (2019).

Definição 5.33. *Os quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos são definidos como:*

$$\begin{aligned}\mathbb{CH}P_n &= (P_n + iP_{n+1}) + (P_{n+2} + iP_{n+3})h \\ &= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3}.\end{aligned}$$

Teorema 5.84. *A fórmula de recorrência dos quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos* $\{\mathbb{CH}P_n =\}_{n\in\mathbb{N}}$*, são definidos como:*

$$\mathbb{CH}P_n = \mathbb{CH}P_{n-2} + \mathbb{CH}P_{n-3}, n \geqslant 3.$$

Demonstração. Com referência na Definição 5.33, tem-se a soma de dois termos quaterniônicos circulares hiperbólicos consecutivos de Padovan, com $n \geqslant 3$, dados por $\mathbb{CH}P_{n-2}$ e $\mathbb{CH}P_{n-3}$. Assim: $\mathbb{CH}P_{n-2} = P_{n-2} + iP_{n-1} + hP_n + ihP_{n+1}$ e $\mathbb{CH}P_{n-3} = P_{n-3} + iP_{n-2} + hP_{n-1} + ihP_n$. Logo:

$$\begin{aligned}\mathbb{CH}P_{n-2} + \mathbb{CH}P_{n-3} &= (P_{n-2} + iP_{n-1} + hP_n + ihP_{n+1}) \\ &\quad + (P_{n-3} + iP_{n-2} + hP_{n-1} + ihP_n) \\ &= (P_{n-2} + P_{n-3}) + i(P_{n-1} + P_{n-2}) + h(P_n + P_{n-1}) \\ &\quad + ih(P_{n+1} + P_n) \\ &= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3} \\ &= \mathbb{CH}P_n.\end{aligned}$$

□

Assim, pode-se estudar as operações de adição, subtração e multiplicação dos quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos.

$$\mathbb{CH}P_n \pm \mathbb{CH}P_m = (P_n \pm P_m) + i(P_{n+1} \pm P_{m+1}) + h(P_{n+2} \pm P_{m+2}) + ih(P_{n+3} \pm P_{m+3}).$$

A multiplicação de dois quatérnios circulares-hierbólicos com referência na tabela de multiplicação 11, é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{CH}P_n x \mathbb{CH}P_m &= (P_nP_m - P_{n+1}P_{m+1} + P_{n+2}P_{m+2} + P_{n+3}P_{m+3}) \\ &+ i(P_{n+1}P_m + P_nP_{m+1} - P_{n+2}P_{m+3} + P_{n+3}P_{m+2}) \\ &+ h(P_nP_{m+2} - P_{n+1}P_{m+3} - P_{n+2}P_m + P_{n+3}P_{m+1}) \\ &+ ih(P_{n+1}P_{m+2} + P_nP_{m+3} + P_{n+3}P_m - P_{n+2}P_{m+1}) \\ &\neq \mathbb{CH}P_m x \mathbb{CH}P_n.\end{aligned}$$

Teorema 5.85. *A função geradora dos quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos é dada por:*

$$g(\mathbb{CH}P_n, x) = \frac{1+i+h+2ih+(1+i+2h+2ih)x+(i+h+ih)x^2}{1-x^2-x^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, x^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(\mathbb{CH}P_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{CH}P_n x^n = \mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_1 x + \mathbb{CH}P_2 x^2 + \ldots + \mathbb{CH}P_n x^n + \ldots \quad (5.31)$$

$$x^2 g(\mathbb{CH}P_n, x) = \mathbb{CH}P_0 x^2 + \mathbb{CH}P_1 x^3 + \mathbb{CH}P_2 x^4 + \ldots + \mathbb{CH}P_{n-2} x^n + \ldots \quad (5.32)$$

$$x^3 g(\mathbb{CH}P_n, x) = \mathbb{CH}P_0 x^3 + \mathbb{CH}P_1 x^4 + \mathbb{CH}P_2 x^5 + \ldots + C\mathbb{CH}P_{n-3} x^n + \ldots \quad (5.33)$$

Baseada nas Equações (5.31 - 5.32 + 5.33), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1-x^2-x^3)g(\mathbb{CH}P_n, x) &= \mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_1 x + (\mathbb{CH}P_2 - \mathbb{CH}P_0)x^2 + (\mathbb{CH}P_3 - \mathbb{CH}P_1 - \mathbb{CH}P_0)x^3 \\ &+ \ldots + (\mathbb{CH}P_n - \mathbb{CH}P_{n-2} - \mathbb{CH}P_{n-3})x^n + \ldots\end{aligned}$$

Com referência nos valores iniciais $\mathbb{CH}P_0 = 1+i+h+2ih, \mathbb{CH}P_1 = 1+i+2h+2ih, CHP_2 = 1+2i+2h+3ih$ e na respectiva fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(1-x^2-x^3)g(\mathbb{CH}P_n, x) &= \mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_1 x + (\mathbb{CH}P_2 - \mathbb{CH}P_0)x^2 \\ g(\mathbb{CH}P_n, x) &= \frac{\mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_1 x + (\mathbb{CH}P_2 - \mathbb{CH}P_0)x^2}{1-x^2-x^3}.\end{aligned}$$

Então $\mathbb{CH}P_n$ é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{1+i+h+2ih+(1+i+2h+2ih)x+(i+h+ih)x^2}{1-x^2-x^3}.$$

□

Teorema 5.86. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a fórmula de Binet dos quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos é:*

$$\mathbb{CH}P_n = Aa_c x_1^n + Bb_c x_2^n + Cc_c x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, e: $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}, a_c = (1 + x_1 i + x_1^2 h + x_1^3 ih), b_c = (1 + x_2 i + x_2^2 h + x_2^3 ih), c_c = (1 + x_3 i + x_3^2 h + x_3^3 ih)$.

Demonstração. De posse da fórmula de Binet da sequência de Padovan ($P_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$) e da Definição 5.33, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbb{CH}P_n &= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3} \\
&= (Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n) + (Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1} + Cx_3^{n+1})i + (Ax_1^{n+2} + Bx_2^{n+2} + Cx_3^{n+2})h \\
&+ (Ax_1^{n+3} + Bx_2^{n+3} + Cx_3^{n+3})ih \\
&= (1 + x_1 i + x_1^2 h + x_1^3 ih)Ax_1^n + (1 + x_2 i + x_2^2 h + x_2^3 ih)Bx_2^n + (1 + x_3 i + x_3^2 h + x_3^3 ih)Cx_3^n \\
&= Aa_c x_1^n + Bb_c x_2^n + Cc_c x_3^n.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.87. *Para $n > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios de Padovan circulares-hiperbólicos é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \\ \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} \\ \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} & \mathbb{CH}P_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_{n+2} & \mathbb{CH}P_{n+1} & \mathbb{CH}P_n \\ \mathbb{CH}P_{n+1} & \mathbb{CH}P_n & \mathbb{CH}P_{n-1} \\ \mathbb{CH}P_n & \mathbb{CH}P_{n-1} & \mathbb{CH}P_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \\ \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} \\ \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} & \mathbb{CH}P_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \\ \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} \\ \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} & \mathbb{CH}P_{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_2 + \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_1 + \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_{-1} \\ \mathbb{CH}P_1 + \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_0 + \mathbb{CH}P_{-1} & \mathbb{CH}P_{-1} + \mathbb{CH}P_{-2} \\ \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_4 & \mathbb{CH}P_3 & \mathbb{CH}P_2 \\ \mathbb{CH}P_3 & \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 \\ \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_2 & \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 \\ \mathbb{CH}P_1 & \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} \\ \mathbb{CH}P_0 & \mathbb{CH}P_{-1} & \mathbb{CH}P_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{CH}P_{k+2} & \mathbb{CH}P_{k+1} & \mathbb{CH}P_k \\ \mathbb{CH}P_{k+1} & \mathbb{CH}P_k & \mathbb{CH}P_{k-1} \\ \mathbb{CH}P_k & \mathbb{CH}P_{k-1} & \mathbb{CH}P_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \\ CHP_1 & CHP_0 & CHP_{-1} \\ CHP_0 & CHP_{-1} & CHP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \\ CHP_1 & CHP_0 & CHP_{-1} \\ CHP_0 & CHP_{-1} & CHP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \\ CHP_1 & CHP_0 & CHP_{-1} \\ CHP_0 & CHP_{-1} & CHP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_k & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \\ CHP_1 & CHP_0 & CHP_{-1} \\ CHP_0 & CHP_{-1} & CHP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CHP_{k+3} & CHP_{k+2} & CHP_{k+1} \\ CHP_{k+2} & CHP_{k+1} & CHP_k \\ CHP_{k+1} & CHP_k & CHP_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Doravante, são introduzidos os quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos, tendo como base o trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2022d).

Definição 5.34. *Os quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos são definidos como (Vieira, 2022d):*

$$\begin{aligned} \mathbb{CH}R_n &= (R_n + iR_{n+1}) + (R_{n+2} + iR_{n+3})h \\ &= R_n + iR_{n+1} + hR_{n+2} + ihR_{n+3} \end{aligned}$$

Teorema 5.88. *A fórmula de recorrência dos quatérnios hipebólicos circulares de Perrin* $\{\mathbb{CH}R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, são definidos como (Vieira, 2022d):*

$$\mathbb{CH}R_n = CHR_{n-2} + CHR_{n-3}, n \geqslant 3.$$

Demonstração. Com referência na Definição 5.34, tem-se a soma de dois termos quaterniônicos circulares hiperbólicos consecutivos de Perrin, com $n \geqslant 3$, dados por $\mathbb{CH}R_{n-2}$ e $\mathbb{CH}R_{n-3}$. Assim:

$\mathbb{CH}R_{n-2} = R_{n-2} + iR_{n-1} + hR_n + ihR_{n+1}$ e $\mathbb{CH}R_{n-3} = R_{n-3} + iR_{n-2} + hR_{n-1} + ihR_n$. Logo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{CH}R_{n-2} + \mathbb{CH}R_{n-3} &= (R_{n-2} + iR_{n-1} + hR_n + ihR_{n+1}) \\
&\quad + (R_{n-3} + iR_{n-2} + hR_{n-1} + ihR_n) \\
&= (R_{n-2} + R_{n-3}) + i(R_{n-1} + R_{n-2}) + h(R_n + R_{n-1}) \\
&\quad + ih(R_{n+1} + R_n) \\
&= R_n + iR_{n+1} + hR_{n+2} + ihR_{n+3} \\
&= \mathbb{CH}R_n.
\end{aligned}$$

□

Assim, estuda-se as operações de adição, subtração e multiplicação dos quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos.

$$\mathbb{CH}R_n \pm \mathbb{CH}R_m = (R_n \pm R_m) + i(R_{n+1} \pm R_{m+1}) + h(R_{n+2} \pm R_{m+2}) + ih(R_{n+3} \pm R_{m+3}).$$

A multiplicação de dois quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos, com referência na tabela de multiplicação (ver Tabela 11), é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{CH}R_n \times \mathbb{CH}R_m &= (R_nR_m - R_{n+1}R_{m+1} + R_{n+2}R_{m+2} + R_{n+3}P_{m+3}) \\
&\quad + i(R_{n+1}R_m + R_nR_{m+1} - R_{n+2}R_{m+3} + R_{n+3}R_{m+2}) \\
&\quad + h(R_nR_{m+2} - R_{n+1}R_{m+3} - R_{n+2}R_m + R_{n+3}R_{m+1}) \\
&\quad + ih(R_{n+1}R_{m+2} + R_nR_{m+3} + R_{n+3}R_m - R_{n+2}R_{m+1}) \\
&\quad \neq \mathbb{CH}R_m.\mathbb{CH}R_n.
\end{aligned}$$

Teorema 5.89. *A função geradora dos quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos é dada por (Vieira, 2022d):*

$$g(\mathbb{CH}R_n, x) = \frac{3 + 2h + 3ih + (2i + 3h + 2ih)x + (-1 + 3i + 2ih)x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.85, tem-se a validação deste teorema.

Teorema 5.90. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a fórmula de Binet dos quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos é (Vieira, 2022d):*

$$\mathbb{CH}R_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, e:
$\alpha = \frac{(2+3x_2x_3)+i(3-2x_2-2x_3)+h(2-3x_2-3x_3+2x_2x_3)+ih(5-2x_2-2x_3+3x_2x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$,

$$\beta = \frac{(2+3x_1x_3)+i(3-2x_1-2x_3)+h(2-3x_1-3x_3+2x_1x_3)+ih(5-2x_1-2x_3+3x_1x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)},$$
$$\gamma = \frac{(2+3x_1x_2)+i(3-2x_1-2x_2)+h(2-3x_1-3x_2+2x_1x_2)+ih(5-2x_1-2x_2+3x_1x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.86, tem-se a validação deste teorema.

Teorema 5.91. *Para $n \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios de Perrin circulares-hiperbólicos é dada por(Vieira, 2022d):*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{CH}R_2 & \mathbb{CH}R_1 & \mathbb{CH}R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbb{CH}R_{n+2} & \mathbb{CH}R_{n+1} & \mathbb{CH}R_n \end{bmatrix}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.87, tem-se a validação deste teorema.

5.11 As sequências dos quatérnios k-padovan e k-perrin hiperbólicas

Esta seção realiza a introdução da sequência dos quatérnios k-Padovan hiperbólica e dos quatérnios k-Perrin hiperbólica, realizando o processo de complexificação dessas sequências recorrentes. Nesse sentido, tem-se o estudo de alguns teoremas acerca dessas sequências, aprofundando o estudo investigativo matemático desses números. Assim, tem-se os trabalhos que tratam dos números hiperbólicos e da sequência quaterniônica, utilizados como base para esse processo investigativo (Aydin, 2019; Catarino, 2018; Dattoli, 2018; Motter; Rosa, 1998; Vieira, 2022b; Mangueira, 2023).

A sequência de k-Padovan é definida por $P_{k,n} = P_{k,n-2} + kP_{k,n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_{k,0} = P_{k,1} = P_{k,2} = 1$. Por sua vez, tem-se o polinômio característico dessa sequência como sendo $x^3 - x - k = 0$.

Definição 5.35. *Os quatérnios de k-Padovan hiperbólicos $\left\{\mathbb{H}P_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ são dados por:*

$$\mathbb{H}P_{k,n} = P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3},$$

em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$.

Segundo as definições apresentadas, realiza-se um estudo acerca das operações de adição, subtração e multiplicação dos quatérnios de k-Padovan hiperbólicos.

$$\mathbb{H}P_{k,n} \pm \mathbb{H}P_{k,m} = (P_{k,n} \pm P_{k,m}) + i(P_{k,n+1} \pm P_{k,m+1}) + j(P_{k,n+2} \pm P_{k,m+2}) + k(P_{k,n+3} \pm P_{k,m+3}),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n}\mathbb{H}P_{k,m} &= (P_{k,n}P_{k,m} + P_{k,n+1}P_{k,m+1} + P_{k,n+2}P_{k,m+2} + P_{k,n+3}P_{k,m+3}) \\ &+ i(P_{k,n}P_{k,m+1} + P_{k,n+1}P_{k,m} + P_{k,n+2}P_{k,m+3} - P_{k,n+3}P_{k,m+2}) \\ &+ j(P_{k,n}P_{k,m+2} + P_{k,n+2}P_{k,m} - P_{k,n+1}P_{k,m+3} + P_{k,n+3}P_{k,m+1}) \\ &+ k(P_{k,n}P_{k,m+3} + P_{k,n+3}P_{k,m} + P_{k,n+1}P_{k,m+2} - P_{k,n+2}P_{k,m+1}) \\ &\neq \mathbb{H}P_{k,m}\mathbb{H}P_{k,n}\end{aligned}$$

O conjugado dos números quatérnios de k-Padovan hiperbólicos é representado por:

$\overline{\mathbb{H}P}_{k,n} = P_{k,n} - iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} - kP_{k,n+3}$.

Teorema 5.92. *Seja $P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência de k-Padovan e $\mathbb{H}P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência quaterniônica de k-Padovan hiperbólica, tem-se que para $n \geqslant 1$ são dadas as seguintes relações:*

$(i)\mathbb{H}P_{k,n+3} = \mathbb{H}P_{k,n+1} + k\mathbb{H}P_{k,n}$;

$(ii)\mathbb{H}P_{k,n} - i\mathbb{H}P_{k,n+1} - j\mathbb{H}P_{k,n+2} - k\mathbb{H}P_{k,n+3} = P_{k,n} + P_{k,n+2} + P_{k,n+4} + P_{k,n+6}$.

Demonstração. (i) Com referência na Definição 5.35, tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n+1} + k\mathbb{H}P_{k,n} &= P_{k,n+1} + iP_{k,n+2} + jP_{k,n+3} + kP_{k,n+4} \\ &+ k(P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3}) \\ &= (P_{k,n+1} + kP_{k,n}) + i(P_{k,n+2} + kP_{k,n+1}) + j(P_{k,n+3} + kP_{k,n+2}) \\ &+ k(P_{k,n+4} + kP_{k,n+3}) \\ &= P_{k,n+3} + iP_{k,n+4} + jP_{k,n+5} + kP_{k,n+6} \\ &= \mathbb{H}P_{k,n+3}\end{aligned}$$

Para (ii), tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n} - i\mathbb{H}P_{k,n+1} - j\mathbb{H}P_{k,n+2} - k\mathbb{H}P_{k,n+3} &= P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3} \\ &- i(P_{k,n+1} + iP_{k,n+2} + jP_{k,n+3} + kP_{k,n+4}) \\ &- j(P_{k,n+2} + iP_{k,n+3} + jP_{k,n+4} + kP_{k,n+5}) \\ &- k(P_{k,n+3} + iP_{k,n+4} + jP_{k,n+5} + kP_{k,n+6}) \\ &= P_{k,n} + P_{k,n+2} - kP_{k,n+3} + jP_{k,n+4} + kP_{k,n+3} \\ &+ P_{k,n+4} - iP_{k,n+5} - jP_{k,n+4} + iP_{k,n+5} + P_{k,n+6} \\ &= P_{k,n} + P_{k,n+2} + P_{k,n+4} + P_{k,n+6}\end{aligned}$$

□

Teorema 5.93. *Seja $\overline{\mathbb{H}P}_{k,n}$ o conjugado quaterniônico de k-Padovan hiperbólico, tem-se então:*

$$\mathbb{H}P_{k,n} + \overline{\mathbb{H}P}_{k,n} = 2P_{k,n}$$

Demonstração. Segundo a Definição 5.35, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n} + \overline{\mathbb{H}P}_{k,n} &= P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3} \\ &\quad + P_{k,n} - iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} - kP_{k,n+3} \\ &= 2P_{k,n}\end{aligned}$$

□

Teorema 5.94. *A função geradora dos quatérnios de k-Padovan hiperbólico é dada por:*

$$g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \frac{\mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, kx^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}P_{k,n}x^n = \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + \mathbb{H}P_{k,2}x^2 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n}x^n + \ldots \tag{5.34}$$

$$x^2 g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0}x^2 + \mathbb{H}P_{k,1}x^3 + \mathbb{H}P_{k,2}x^4 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n-2}x^n + \ldots \tag{5.35}$$

$$kx^3 g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0}kx^3 + \mathbb{H}P_{k,1}kx^4 + \mathbb{H}P_{k,2}kx^5 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n-3}kx^n + \ldots \tag{5.36}$$

Baseada na Equação (5.34-5.35+5.36), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - kx^3)g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) &= \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2 + (\mathbb{H}P_{k,3} - \mathbb{H}P_{k,1} - \mathbb{H}P_{k,0})x^3 \\ &\quad + \ldots + (\mathbb{H}P_{k,n} - \mathbb{H}P_{k,n-2} - \mathbb{H}P_{k,n-3})x^n + \ldots\end{aligned}$$

Assim:

$$(1 - x^2 - kx^3)g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2.$$

Então $\mathbb{H}P_{k,n}$ é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{\mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.$$

□

Teorema 5.95. *Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet dos quatérnios de k-Padovan hiperbólicos é expressa por:*

$$\mathbb{H}P_{k,n}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

em que C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e r_1, r_2, r_3 as raízes do polinômio característico ($x^3 - x - k = 0$).

Demonstração. Com referência na fórmula de recorrência da sequência k-Padovan, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são r_1, r_2, r_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3. Além disso, tem-se o estudo do discriminante Δ, com referência na fórmula de Cardano, em que apresenta $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{4p^3}{27}$ para a equação $z^3 + px + q = 0$. Assim, o estudo do discriminante para a sequência k-Padovan é dado por: $\Delta = \frac{(-k)^2}{4} - \frac{(-1)^3}{27} = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{27}$, referente ao polinômio de 3º grau, Com isso, o discriminante determina a maneira de como serão as raízes do polinômio. Desse modo, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, concluindo que $\frac{k^2}{4} - \frac{1}{27} \neq 0$. Logo, $k^2 \neq \frac{4}{27}$. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = k$ e $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. □

Teorema 5.96. *Para $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios de k-Padovan hiperbólico é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,n+2} & \mathbb{H}P_{k,n+1} & \mathbb{H}P_{k,n} \\ \mathbb{H}P_{k,n+1} & \mathbb{H}P_{k,n} & \mathbb{H}P_{k,n-1} \\ \mathbb{H}P_{k,n} & \mathbb{H}P_{k,n-1} & \mathbb{H}P_{k,n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} + k\mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,1} + k\mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,0} + k\mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,1} + k\mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,0} + k\mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-1} + k\mathbb{H}P_{k,-2} \\ \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,4} & \mathbb{H}P_{k,3} & \mathbb{H}P_{k,2} \\ \mathbb{H}P_{k,3} & \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} \\ \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \end{bmatrix}.$$

Verificando a validade para qualquer $n = z, z \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{z} \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,z+2} & \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} \\ \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} \\ \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} & \mathbb{H}P_{k,z-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = z+1 = 1+z$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{1+z} \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{z} \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,2} & \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} \\ \mathbb{H}P_{k,1} & \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} \\ \mathbb{H}P_{k,0} & \mathbb{H}P_{k,-1} & \mathbb{H}P_{k,-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,z+2} & \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} \\ \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} \\ \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} & \mathbb{H}P_{k,z-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,z+1} + k\mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z} + k\mathbb{H}P_{k,z-1} & \mathbb{H}P_{k,z-1} + k\mathbb{H}P_{k,z-2} \\ \mathbb{H}P_{k,z+2} & \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} \\ \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}P_{k,z+3} & \mathbb{H}P_{k,z+2} & \mathbb{H}P_{k,z+1} \\ \mathbb{H}P_{k,z+2} & \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z} \\ \mathbb{H}P_{k,z+1} & \mathbb{H}P_{k,z} & \mathbb{H}P_{k,z-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

A sequência de k-Perrin é definida por $R_{k,n} = R_{k,n-2} + kR_{k,n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $R_{k,0} = 3, R_{k,1} = 0, R_{k,2} = 2$. Por sua vez, tem-se o polinômio característico dessa sequência como sendo $x^3 - x - k = 0$ (Vieira, 2022b).

Definição 5.36. *Os quatérnios de k-Perrin hiperbólicos* $\left\{\mathbb{H}R_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são dados por (Vieira, 2022b):*

$$\mathbb{H}R_{k,n} = R_{k,n} + iR_{k,n+1} + jR_{k,n+2} + kR_{k,n+3},$$

em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$

Assim, tem-se o estudo das operações de adição, subtração e multiplicação dos

quatérnios de k-Perrin hiperbólicos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}R_{k,n} \pm \mathbb{H}R_{k,m} &= (R_{k,n} \pm R_{k,m}) + i(R_{k,n+1} \pm R_{k,m+1}) + j(R_{k,n+2} \pm R_{k,m+2}) \\
&\quad + k(R_{k,n+3} \pm R_{k,m+3}), \\
\mathbb{H}R_{k,n}\mathbb{H}R_{k,m} &= (R_{k,n}R_{k,m} + R_{k,n+1}R_{k,m+1} + R_{k,n+2}R_{k,m+2} + R_{k,n+3}R_{k,m+3}) \\
&\quad + i(R_{k,n}R_{k,m+1} + R_{k,n+1}R_{k,m} + R_{k,n+2}R_{k,m+3} - R_{k,n+3}R_{k,m+2}) \\
&\quad + j(R_{k,n}R_{k,m+2} + R_{k,n+2}R_{k,m} - R_{k,n+1}R_{k,m+3} + R_{k,n+3}R_{k,m+1}) \\
&\quad + k(R_{k,n}R_{k,m+3} + R_{k,n+3}R_{k,m} + R_{k,n+1}R_{k,m+2} - R_{k,n+2}R_{k,m+1}) \\
&\quad \neq \mathbb{H}R_{k,m}\mathbb{H}R_{k,n}
\end{aligned}$$

O conjugado dos números quatérnios de k-Perrin hiperbólicos é representado por:

$$\overline{\mathbb{H}R}_{k,n} = R_{k,n} - iR_{k,n+1} - jR_{k,n+2} - kR_{k,n+3}.$$

Teorema 5.97. *Seja $P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência de k-Perrin e $\mathbb{H}P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência quaterniônica de k-Perrin hiperbólica, então para $n \geqslant 1$ tem-se que (Vieira, 2022b):*

$$\mathbb{H}R_{k,n} - i\mathbb{H}R_{k,n+1} - j\mathbb{H}R_{k,n+2} - k\mathbb{H}R_{k,n+3} = R_{k,n} + R_{k,n+2} + R_{k,n+4} + R_{k,n+6}.$$

Demonstração. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}R_{k,n} - i\mathbb{H}R_{k,n+1} - j\mathbb{H}R_{k,n+2} - k\mathbb{H}R_{k,n+3} &= R_{k,n} + iR_{k,n+1} + jR_{k,n+2} + kR_{k,n+3} \\
&\quad - i(R_{k,n+1} + iR_{k,n+2} + jR_{k,n+3} + kR_{k,n+4}) \\
&\quad - j(R_{k,n+2} + iR_{k,n+3} + jR_{k,n+4} + kR_{k,n+5}) \\
&\quad - k(R_{k,n+3} + iR_{k,n+4} + jR_{k,n+5} + kR_{k,n+6}) \\
&\quad = R_{k,n} + R_{k,n+2} - kR_{k,n+3} + jR_{k,n+4} + kR_{k,n+3} \\
&\quad + R_{k,n+4} - iR_{k,n+5} - jR_{k,n+4} + iR_{k,n+5} + P_{k,n+6} \\
&\quad = R_{k,n} + R_{k,n+2} + R_{k,n+4} + R_{k,n+6}
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.98. *Seja $\overline{\mathbb{H}P}_{k,n}$ o conjugado quaterniônico de k-Perrin hiperbólico, tem-se então:*

$$\mathbb{H}R_{k,n} + \overline{\mathbb{H}R}_{k,n} = 2R_{k,n}$$

Demonstração. Segundo a Definição 5.36, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}R_{k,n}+\overline{\mathbb{H}R}_{k,n} &= R_{k,n}+iR_{k,n+1}+jR_{k,n+2}+kR_{k,n+3}\\ &\quad +R_{k,n}-iR_{k,n+1}-jR_{k,n+2}-kR_{k,n+3}\\ &= 2R_{k,n}\end{aligned}$$

□

Teorema 5.99. *A função geradora dos quatérnios de k-Perrin hiperbólico é dada por (Vieira, 2022b):*

$$g(\mathbb{H}R_{k,n},x)=\frac{\mathbb{H}R_{k,0}+\mathbb{H}R_{k,1}x+(\mathbb{H}R_{k,2}-\mathbb{H}R_{k,0})x^2}{1-x^2-kx^3}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.94, tem-se a validação deste teorema.

Teorema 5.100. *Para $n\in\mathbb{N}$, a fórmula de Binet dos quatérnios de k-Perrin hiperbólicos é expressa por (Vieira, 2022b):*

$$\mathbb{H}R_{k,n}^{(n)}=C_1r_1^n+C_2r_2^n+C_3r_3^n,$$

em que C_1,C_2,C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e r_1,r_2,r_3 as raízes do polinômio característico ($x^3-x-k=0$).

De modo similar à demonstração do Teorema 5.95, tem-se a validação deste teorema.

Teorema 5.101. *Para $n\geqslant 2$ e $n\in\mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios de k-Perrin hiperbólico é dada por (Vieira, 2022b):*

$$\begin{bmatrix}0&1&k\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}\mathbb{H}R_{k,2}&\mathbb{H}R_{k,1}&\mathbb{H}R_{k,0}\\\mathbb{H}R_{k,1}&\mathbb{H}R_{k,0}&\mathbb{H}R_{k,-1}\\\mathbb{H}R_{k,0}&\mathbb{H}R_{k,-1}&\mathbb{H}R_{k,-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{H}R_{k,n+2}&\mathbb{H}R_{k,n+1}&\mathbb{H}R_{k,n}\\\mathbb{H}R_{k,n+1}&\mathbb{H}R_{k,n}&\mathbb{H}R_{k,n-1}\\\mathbb{H}R_{k,n}&\mathbb{H}R_{k,n-1}&\mathbb{H}R_{k,n-2}\end{bmatrix}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.96, tem-se a validação deste teorema.

O estudo permitiu realizar um aprofundamento matemático acerca da sequência de k-Padovan e de sua forma complexa. Dessa forma, introduziu-se a sequência dos quatérnios k-Padovan hiperbólica e a sequência dos quatérnios k-Perrin hiperbólica, abordando algumas propriedades e teoremas matemáticos. Ressalta-se que para o caso particular de $k=1$, é possível perceber que tem-se a sequência quaterniônica de Padovan hiperbólica e Perrin, respectivamente.

5.12 Os números de padovan e perrin hibrinominais

Nesta seção, é realizado o processo de complexificação com a introdução dos números hibrinomiais de Padovan e Perrin, sendo esses uma junção dos números híbridos com os números polinomiais. Assim, tem-se que os números híbridos foram introduzidos por Ozdemir (Ozdemir, 2018) formado por um sistemas numéricos representado por três conjuntos: os números complexos, hiperbólicos e duais combinados entre si, conforme estudado nas seções anteriores.

Os números polinomiais de Horadam, denotados por $h_n(x) = h_n(x;a;b;p;q)$ possuem relação de recorrência dada por: $h_n(x) = pxh_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x), n \geqslant 3$ e valores iniciais $h_0(x) = a$ e $h_1(x) = bx$ (Horzum; Kocer, 2009). De fato, pode-se perceber a inserção do polinômio x nessa sequência, definindo os seus respectivos valores iniciais atrelados à determinada sequência estudada.

Com referência nisso, tem-se uma junção dos números híbridos com os números polinomiais, resultando nos números hibrinomiais, aplicando-os às sequências de Padovan e Perrin estudado por Vieira, Alves e Catarino (2022d).

Os números híbridos de Padovan, foram estudados primordialmente por Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2020b), onde realizaram a introdução dessa sequência no conjunto dos números híbridos, obtendo assim algumas propriedades matemáticas.

Definição 5.37. *Os números híbridos de Padovan* $\{HP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos por (Mangueira, 2020b):*

$$HP_n = P_n + iP_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} + hP_{n+3},$$

onde P_n *representa o número de Padovan e os valores iniciais* $P_0 = P_1 = P_2 = 1$*, i representa um número complexo,* ε *representa um número dual e h representa número hiperbólico,* $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i.$

Teorema 5.102. *A relação de recorrência dos híbridos de Padovan é definida:*

$$HP_n = HP_{n-2} + HP_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $HP_0 = 1 + i + \varepsilon + 2h, HP_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 2h, HP_2 = 1 + 2i + 2\varepsilon + 3h.$

Com referência na recorrência de Padovan, $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, e na Definição 5.37, pode-se validar o teorema.

Definição 5.38. *Os números polinomiais de Padovan* $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como:*

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $P_0(x) = P_1(x) = P_2(x) = 1$.

Definição 5.39. *Os números hibrinomiais de Padovan* $\{PH_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como:*

$$PH_n(x) = P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x),$$

onde P_n *representa o número de Padovan e os valores iniciais* $P_0 = P_1 = P_2 = 1$*, i representa um número complexo,* ε *representa um número dual e h representa número hiperbólico,* $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$.

Teorema 5.103. *A relação de recorrência dos números hibrinomiais de Padovan são definidos como:*

$$PH_n(x) = xPH_{n-2}(x) + PH_{n-3}(x), n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $PH_0(x) = 1 + i + \varepsilon + h(1+x), PH_1(x) = 1 + i + \varepsilon(1+x) + h(1+x), PH_2(x) = 1 + i(1+x) + \varepsilon(1+x) + h(x^2+x+1)$.

Com referência na recorrência de Padovan, $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, e na Definição 5.39, pode-se validar o teorema.

Teorema 5.104. *A função geradora dos números hibrinomiais de Padovan é dada por:*

$$g(PH_n, x) = \frac{1 + i + \varepsilon + h + 2hx + x + ix + \varepsilon x + ix^3 - \varepsilon x^3}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, x^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(PH_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} PH_n x^n = PH_0 + PH_1 x + PH_2 x^2 + \ldots + PH_n x^n + \ldots \tag{5.37}$$

$$x^2 g(PH_n, x) = PH_0 x^2 + PH_1 x^3 + PH_2 x^4 + \ldots + PH_{n-2} x^n + \ldots \tag{5.38}$$

$$x^3 g(PH_n, x) = PH_0 x^3 + PH_1 x^4 + PH_2 x^5 + \ldots + PH_{n-3} x^n + \ldots \tag{5.39}$$

Baseada na Equação (5.37-5.38+5.39), tem-se que:

$$(1 - x^2 - x^3) g(PH_n, x) = PH_0 + PH_1 x + (PH_2 - PH_0)x^2 + (PH_3 - PH_1 - PH_0)x^3 + \ldots$$
$$+ (PH_n - PH_{n-2} - PH_{n-3})x^n + \ldots$$

Com referência nos valores iniciais: $PH_0(x) = 1+i+\varepsilon+h(1+x), PH_1(x) = 1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x), PH_2(x) = 1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1)$, e em sua respectiva fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$(1-x^2-x^3)g(PH_n,x) = PH_0 + PH_1x + (PH_2 - PH_0)x^2$$
$$g(PH_n,x) = \frac{1+i+\varepsilon+h+hx+(1+i+\varepsilon+\varepsilon x+h+hx)x+(ix-\varepsilon-\varepsilon x-h-hx)x^2}{1-x^2-x^3}.$$

Então PH_n é dado pelo coeficiente de x^n na expressão de:

$$\frac{1+i+\varepsilon+h+2hx+x+ix+\varepsilon x+ix^3-\varepsilon x^3}{1-x^2-x^3}.$$

□

Teorema 5.105. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a fórmula de Binet dos números hibrinomiais de Padovan é:*

$$PH_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 são as raízes da equação $r^3 - r - 1 = 0$, e:

$\alpha = \frac{r_1(1+r_1)+hr_1(1+x+r_1+r_1x)+i(x+r_1+r_1^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_1(x+r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$,

$\beta = \frac{r_2(1+r_2)+hr_2(1+x+r_2+r_2x)+i(x+r_2+r_2^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_2(x+r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}$,

$\gamma = \frac{r_3(1+r_3)+hr_3(1+x+r_3+r_3x)+i(x+r_3+r_3^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_3(x+r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$.

Demonstração. De posse da fórmula: $PH_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$, pode-se utilizar a relação de recorrência dos números hibrinomiais de Padovan e os valores iniciais $PH_0(x) = 1+i+\varepsilon+h(1+x), PH_1(x) = 1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x), PH_2(x) = 1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1)$, desenvolve-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = 1+i+\varepsilon+h(1+x) \\ \alpha r_1+\beta r_2+\gamma r_3 & = 1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x) \\ \alpha r_1^2+\beta r_2^2+\gamma r_3^2 & = 1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1) \end{cases}$$

Assim, resolvendo o sistema, obtêm-se:

$$\alpha = \frac{(1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1))-r_2(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))}{r_1^2-r_1r_2-r_1r_3+r_2r_3}$$
$$\frac{-r_3(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))+r_2r_3(1+i+\varepsilon+h(1+x))}{r_1^2-r_1r_2-r_1r_3+r_2r_3}$$
$$\beta = \frac{(1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1))-r_1(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))}{r_2^2-r_2r_3-r_1r_2+r_1r_3}$$
$$\frac{-r_3(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))+r_1r_3(1+i+\varepsilon+h(1+x))}{r_2^2-r_2r_3-r_1r_2+r_1r_3},$$
$$\gamma = \frac{(1+i(1+x)+\varepsilon(1+x)+h(x^2+x+1))-r_1(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))}{r_3^2+r_1r_2-r_1r_3-r_2r_3}$$
$$\frac{-r_2(1+i+\varepsilon(1+x)+h(1+x))+r_1r_2(1+i+\varepsilon+h(1+x))}{r_3^2+r_1r_2-r_1r_3-r_2r_3}.$$

Utilizando as relações de Girard: $r_1r_2r_3 = 1, r_1+r_2+r_3 = 0$ e $r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = -1$, tem-se que:

$$\alpha = \frac{r_1(1+r_1)+hr_1(1+x+r_1+r_1x)+i(x+r_1+r_1^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_1(x+r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},$$
$$\beta = \frac{r_2(1+r_2)+hr_2(1+x+r_2+r_2x)+i(x+r_2+r_2^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_2(x+r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},$$
$$\gamma = \frac{r_3(1+r_3)+hr_3(1+x+r_3+r_3x)+i(x+r_3+r_3^2)+\varepsilon x+\varepsilon r_3(x+r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}.$$

□

Com referência em uma das matrizes de Padovan estudada por Vieira (2020), tem-se o estudo da forma matricial.

Teorema 5.106. *Para $n > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos números hibrinomiais de Padovan é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \\ PH_{n+1} & PH_n & PH_{n-1} \\ PH_n & PH_{n-1} & PH_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} PH_2+PH_1 & PH_1+PH_0 & PH_0+PH_{-1} \\ PH_1+PH_0 & PH_0+PH_{-1} & PH_{-1}+PH_{-2} \\ PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} PH_4 & PH_3 & PH_2 \\ PH_3 & PH_2 & PH_1 \\ PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix}.$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \\ PH_{k+1} & PH_k & PH_{k-1} \\ PH_k & PH_{k-1} & PH_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_k & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \\ PH_1 & PH_0 & PH_{-1} \\ PH_0 & PH_{-1} & PH_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{k+3} & PH_{k+2} & PH_{k+1} \\ PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \\ PH_{k+1} & PH_k & PH_{k-1} \end{bmatrix}.$$

□

Levando em consideração os números híbridos da sequência de Padovan, estudado por (Mangueira, 2020b), pode-se estabelecer uma conexão com os números de Padovan, uma vez que essas sequências difere-se apenas em relação aos seus valores iniciais.

Definição 5.40. *Os números híbridos de Perrin* $\{HR_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, são definidos por:*

$$HR_n = R_n + iR_{n+1} + \varepsilon R_{n+2} + hR_{n+3},$$

onde R_n *representa o número de Perrin e os valores iniciais* $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$.

Teorema 5.107. *A relação de recorrência dos híbridos de Perrin é definida:*

$$HR_n = HR_{n-2} + HR_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $HR_0 = 3 + 2\varepsilon + 3h, HR_1 = 2i + 3\varepsilon + 2h, HR_2 = 2 + 3i + 2\varepsilon + 5h$.

Com referência na recorrência de Perrin, $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$, e na Definição 5.40, pode-se validar o teorema.

Definição 5.41. *Os números polinomiais de Perrin* $\{R_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como:*

$$R_n(x) = xR_{n-2}(x) + R_{n-3}, n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $R_0(x) = 3, R_1(x) = 0, R_2(x) = 2$.

Vieira, Alves e Catarino (2022d) realizaram um estudo acerca dos números hibrinomiais de Perrin, permitindo investigar definições matemáticas e teoremas.

Definição 5.42. *Os números hibrinomiais de Perrin* $\{RH_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são definidos como (Vieira, 2022d):*

$$RH_n(x) = R_n(x) + iR_{n+1}(x) + \varepsilon R_{n+2}(x) + hR_{n+3}(x),$$

onde R_n *representa o número de Perrin e os valores iniciais* $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$.

Teorema 5.108. *A relação de recorrência dos números hibrinomiais de Perrin são definidos como (Vieira, 2022d):*

$$RH_n(x) = xRH_{n-2}(x) + RH_{n-3}(x), n \geqslant 3,$$

com os valores iniciais $RH_0(x) = 3 + 2\varepsilon + 3h, RH_1(x) = 2i + 3\varepsilon + 2x, RH_2(x) = 2 + 3i + 2x\varepsilon + h(3x+2)$.

Com referência na recorrência de Perrin, $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$, e na Definição 5.42, pode-se validar o teorema.

Teorema 5.109. *A função geradora dos números hibrinomiais de Perrin é dada por (Vieira, 2022d):*

$$g(RH_n, x) = \frac{3 + 2x - x^2 + i(2x + 3x^2) + (2 + 3x - 2x^2 + 2x^3)\varepsilon + (3 + 3x^3 - x^2)h}{1 - x^2 - x^3}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.104, pode-se validar este teorema.

Teorema 5.110. *Para* $n \in \mathbb{Z}$*, a fórmula de Binet dos números hibrinomiais de Perrin é (Vieira, 2022d):*

$$RH_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 *são as raízes da equação* $r^3 - r - 1 = 0$*, e:*

$\alpha = \frac{r_1(r_2r_3 + r_1 + 2x) + i(1 + 2r_1) + \varepsilon(2x + 3r_1 + 2r_2r_3) + h(3x + 2 + 3r_2r_3)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}$,

$\beta = \frac{r_2(r_1r_3 + r_2 + 2x) + i(1 + 2r_2) + \varepsilon(2x + 3r_2 + 2r_1r_3) + h(3x + 2 + 3r_1r_3)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}$,

$\gamma = \frac{r_3(r_1r_2 + r_3 + 2x) + i(1 + 2r_3) + \varepsilon(2x + 3r_3 + 2r_1r_2) + h(3x + 2 + 3r_1r_2)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$.

De modo similar à demonstração do Teorema 5.105, pode-se validar este teorema.

Teorema 5.111. *Para $n \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos números hibrinomiais de Perrin é dada por (Vieira, 2022d):*

$$\begin{bmatrix} RH_2 & RH_1 & RH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} RH_{n+2} & RH_{n+1} & RH_n \end{bmatrix}.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.106, pode-se validar este teorema.

A partir de estudos referente aos números híbridos de Padovan, Perrin e polinomiais, foi possível realizar um estudo introduzindo assim os números hibrinomiais de Padovan e Perrin Vieira, Alves e Catarino (2022d). Assim, foi definida a sua respectiva fórmula de recorrência com referência no trabalho de Horzum e Kocer (2009), Kizilates (2020) e Vieira, Alves e Catarino (2022d). Com isso, realizou-se o processo de evolução matemática referente aos números dessa sequência, enfatizando a sua complexificação. Diante disso, estudos acerca de alumas propriedades matemáticas foram realizados, destacando a fórmula de Binet, função geradora e forma matricial.

5.13 O modelo combinatório de padovan

Esta subseção dedica-se à investigação acerca do modelo combinatório da sequência de Padovan, fornecendo uma interpretação combinatória dos números dessa sequência, utilizando uma abordagem que fornece uma alternativa para a visualização da sequência. Os resultados apresentados nesta pesquisa são relevantes para a área de sequências recorrentes, introduzindo um contexto de interpretação de sequências combinatórias.

Desse modo, são dadas algumas interpretações via ladrilhos, com referência nos ladrilhamentos de Fibonacci (Benjamin; Quinn, 2003b; Benjamin; Quinn, 2003a; Craveiro, 2004; Detemple; Webb, 2014) e no ladrilhamento de Padovan proposto por Tedford (2019), introduzindo assim uma nova abordagem combinatória para a sequência. Vieira, Alves e Catarino (2023e) realizaram uma abordagem combinatória para a sequência de Leonardo, utilizando das mesmas estratégias apresentadas nesta pesquisa.

Destaca-se que um ladrilho, segundo Sanchez (2020), "é uma subdivisão do plano em faces fechadas delimitadas topologicamente equivalentes a um disco. Nós nos concentramos em ladrilhos periódicos cujas faces são polígonos regulares e que são periódicas". A seguir, são realizadas definições acerca do tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamentos para facilitar o entendimneto.

Definição 5.43. *Um tabuleiro é formado por quadrados denominados casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essas enumerações descrevem a posição. Um determinado tabuleiro será chamado apenas de n-tabuleiro (Spreafico, 2014).*

Desse modo, tem-se o tabuleiro finito, em que possui uma quantidade finita de casas; e o tabuleiro infinito, que possui uma quantidade infinita de casas. Assim, o presente trabalho considera os tabuleiro finitos na forma 1 x n, contendo posições numeradas de 1 a n.

Definição 5.44. *Os ladrilhos são os objetos utilizados para preencher ou cobrir um tabuleiro (Spreafico, 2014).*

Definição 5.45. *Dado um tabuleiro e certas peças, tem-se o ladrilhamento como sendo a maneira T de ladrilhar completamente o tabuleiro com peças t sem que reste qualquer casa não preenchida e sem que peças se sobreponham (Spreafico, 2014).*

Benjamin e Quinn (2003b) definem os ladrilhos de Fibonacci como sendo: um quadrado de tamanho 1 x 1 e um dominó formado por dois quadrados com tamanho 1 x 2.

Desse modo, é possível constatar pesquisas contemporâneas relacionadas com o estudo de sequências numéricas recorrentes e suas inúmeras generalizações, que costumam ser negligenciadas em livros de História da Matemática (Grimaldi, 2012; Lagrange, 2013; Stillwell, 2010). Uma abordagem interessante, é a interpretação combinatória da sequência de Fibonacci via ladrilhos. Tão logo, tomando como base a recorrência da sequência de Fibonacci, dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 2$, cujos valores iniciais são dados por $F_0 = 0, F_1 = 1$. Assim, tem-se o tabuleiro do tipo 1 x n, que pode ser preenchido com dois tipos de ladrilhos: um quadrado 1 x 1 na cor branca e um ladrilho (dominó) 1 x 2 de mesma cor (cor branca). Esse n-tabuleiro unidimensional é indicado na Figura 23.

Figura 23 – Interpretação sobre a noção de n–tabuleiro

Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

Sabendo que f_n é o número de configurações para ladrilhar (de preencher) um tabuleiro de comprimento n com quadrados e dominós, tem-se a apresentação do teorema abaixo, estudado no trabalho de Benjamin e Quinn (2003b). Este teorema fornece uma interpretação combinatória para os números de Fibonacci em um tabuleiro.

Teorema 5.112. *O número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro com quadrados 1 x 1 e dominós 1 x 2 é igual a $f_n = F_{n+1}$, em que f_n é o número de ladrilhamentos possíveis feitos de tamanho n e F_n o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci (Benjamin; Quinn, 2003b).*

Demonstração. Seja f_n o número de ladrilhamentos possíveis feitos de tamanho n, com os ladrilhos: quadrados e dominós 1 x 2, em que $f_1 = F_2 = 1$, $f_2 = F_3 = 2$, tem-se:

Caso 1: Supondo que o ladrilhamento comece com o quadrado. Essas peças são compostas por um quadrado seguido por um ladrilho de tamanho (ordem) $n-1$. A soma é dada por f_{n-1}.

Caso 2: Supondo que o ladrilhamento comece por um dominó de tamanho 1 x 2. As peças consistem em um tabuleiro de tamanho (ordem) $n-2$ e um dominó. A soma é dada por f_{n-2}.

Logo, pelo princípio da adição dos casos analisados, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Satisfazendo a recorrência de Fibonacci ($F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$), com as condições iniciais $f_1 = F_2$ e $f_2 = F_3$. Então, $f_n = F_{n+1}$.

□

Portanto, a pesquisa apoia-se nos trabalhos de Benjamin e Quinn (2003b), Benjamin e Quinn (2003a), Spreafico (2014) e Koshy (2001), dos quais descrevem a noção de um n-tabuleiro, bem como definições de termos e expedientes a serem empregados nesta pesquisa, seguindo com as propriedades combinatórias da sequência de Fibonacci.

Seguindo as discussões apontadas por Koshy (2001) e Benjamin e Quinn (2003b), que analisam o comportamento combinatório da sequência de Fibonacci via ladrilhamentos, define-se uma regra particular para o teorema referente aos ladrilhamentos de Padovan, conforme abordado em Vieira, Alves e Catarino (2022a). Aplicando a mesma ideia, considerando um triminó, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3, um quadrado preto 1 x 1 e o dominó 1 x 2, qualquer ladrilhamento de Padovan é formado pela disposição dos ladrilhos definidos.

Considerando um triminó cinza, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó azul 1 x 2, qualquer ladrilhamento de Padovan é formado pela disposição dos ladrilhos definidos. De forma que se o quadrado preto aparece, este deve aparecer na primeira posição e, apenas uma vez em cada ladrilho (Vieira, 2022a).

Assim, considera-se um n-tabuleiro, com as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1, dominós azuis 1 x 2, triminós cinza 1 x 3, todos com peso 1. Na Figura 68, são fornecidos alguns exemplos visando preencher o n-tabuleiro correspondente à sequência de

Padovan. Ao lado direito, encontram-se os termos correspondentes aos números de Padovan. Com isso, é possível perceber o termo p_n como sendo a quantidade de formas de combinar o n-tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, determinando a relação: $p_n = P_n, n \geqslant 0$. A seguir, é fixado $p_0 = 1 = P_0$, quando não existe nenhum tabuleiro de tamanho 1 x n, e $p_1 = 1 = P_1$, quando existe apenas um quadrado preto. Assim tem-se a exceção da regra, uma vez que nesse caso, o quadrado preto será a única figura, estando no início e consequentemente no final (simultaneamente).

De fato, tem-se as seguintes proposições relacionadas com os ladrilhamentos de Padovan, sendo portanto: o número de ladrilhamentos que começam com quadrados pretos corresponde a um número da sequência Padovan, sendo, dado pela fórmula p_{n-3}. Porém, o número de ladrilhamentos que não começam com um quadrado preto é dado por p_{n-2} (ver a Figura 24).

Para $n \geqslant 1$, os possíveis ladrilhos de um tabuleiro 1 x n, que começam com os ladrilhos de quadrado preto é dado por: p_{n-3}.

Para $n \geqslant 1$, os possíveis ladrilhos de um tabuleiro 1 x n, que não começam com os ladrilhos de quadrado preto é dado por: p_{n-2}.

Amparado nos argumentos combinatórios particulares superacitados, pode-se enunciar o teorema de modo a iniciar as discussões referentes aos números de Padovan diante do modelo combinatório a ser definido nesta pesquisa.

Teorema 5.113. *Para $n \geqslant 1$, tem-se que o número de p_n de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul e triminó cinza, tal que o quadrado preto se aparecer ele figura a primeira casa, é dado por:*

$$p_n = P_n,$$

sendo P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan (Vieira, 2022a).

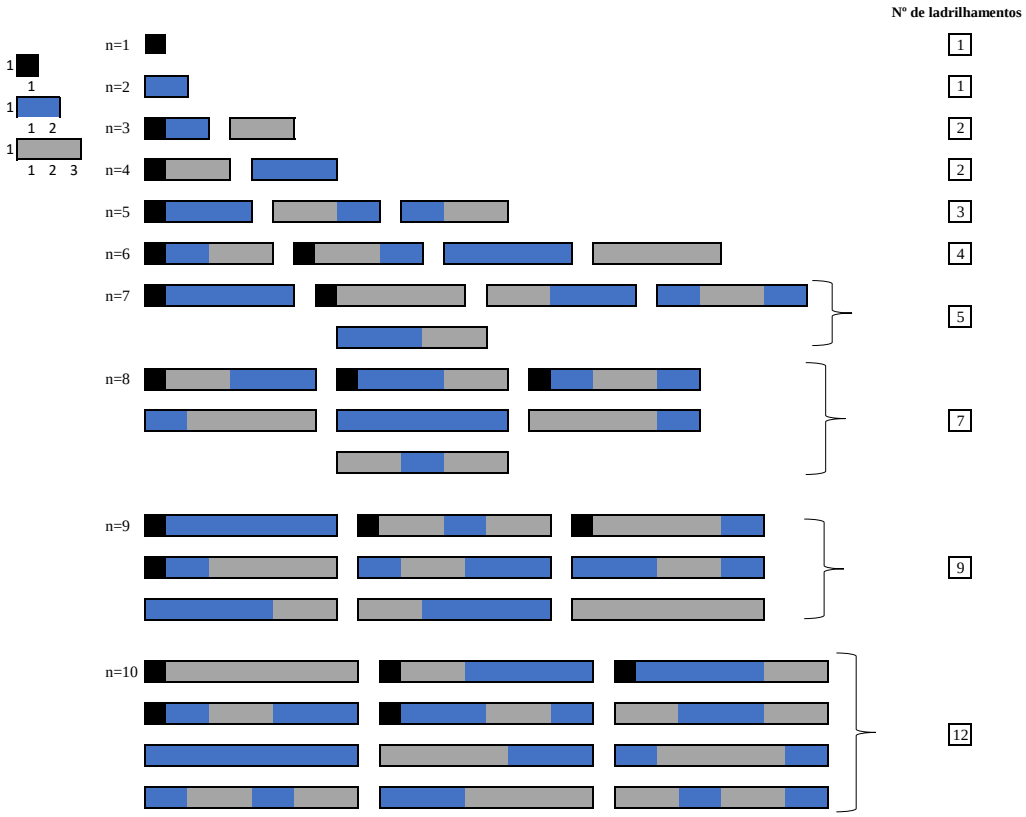
Demonstração. Com referência nos argumentos e demonstrações contidos em Koshy (2001), Spivey (2019), tem-se que:

Seja p_n o número de ladrilhamentos, em que $p_1 = 1 = P_1$.

Considerando os ladrilhamentos de tamanho $n-2$, em que $n \geqslant 3$, tem-se:

Caso 1: Sejam os subconjuntos dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto e outro subconjunto dos demais ladrilhamentos. Considere um novo conjunto de ladrilhamentos, começando com o dominó azul, de tamanho 1 x 2, justaposto com os ladrilhamentos de tamanho

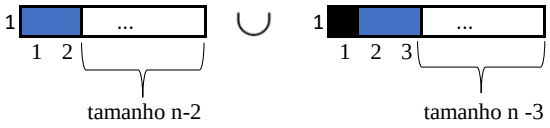
Figura 24 – Ladrilhamento de Padovan



Fonte: Elaborado pela autora.

$n-2$ que não iniciam com o quadrado preto em união com o conjunto dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto, de tamanho 1 x 1, inserindo um dominó azul de tamanho 1 x 2, logo após esse quadrado. Essa união resulta em um conjunto de ladrilhamento de tamanho n (Figura 25).

Figura 25 – Caso 1 - União dos tabuleiros de tamanho n



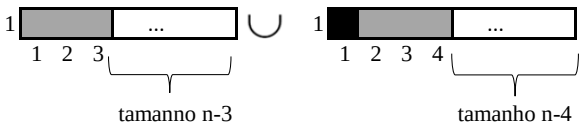
Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, o número de ladrilhamentos começando com o dominó azul é dado por p_{n-4}, enquanto o número de peças começando com o quadrado preto, seguido do dominó azul, é dado por p_{n-5}. A junção é dada por p_{n-2}.

Caso 2: Sejam os subconjuntos dos ladrilhamentos que iniciam com o triminó (ladrilhos que não iniciam com os quadrados pretos) e outro subconjunto dos ladrilhamentos

que iniciam com o quadrado preto, seguido do triminó. Considere um novo conjunto de ladrilhamentos, começando com o triminó cinza, de tamanho 1 x 3, justaposto com os ladrilhamentos de tamanho $n-3$ que não iniciam com o quadrado preto em união com o conjunto dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto, de tamanho 1 x 1, inserindo um triminó cinza de tamanho 1 x 3, logo após esse quadrado. Essa união resulta em um conjunto de ladrilhamento de tamanho n (Figura 26).

Figura 26 – Caso 2 - União dos tabuleiros de tamanho n



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, o número de ladrilhamentos começando com o triminó cinza é dado por p_{n-5}, enquanto o número de peças começando com o quadrado preto, seguido do triminó cinza, é dado por p_{n-6}. A junção é dada por p_{n-3}.

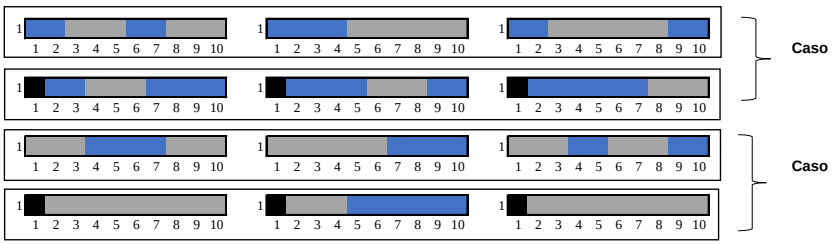
Logo, pelo princípio da adição dos casos independentes analisados (sem a utilização da interseção), $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$. Satisfazendo a recorrência de Padovan ($P_n = P_{n-2} - P_{n-3}$), com as condições iniciais $p_0 = P_0$ e $p_1 = P_1$. Logo $p_n = P_n$. □

Para ilustrar o Teorema 5.113, tem-se os ladrilhamentos p_{10}, permitindo uma melhor visualização e compreensão das proposições matemáticas ao leitor. Na Figura 27, percebe-se que existem 3 ladrilhamentos que iniciam com o dominó e 3 ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto justaposto com o dominó, totalizando 6 ladrilhos referente ao Caso 1 da demonstração. Seguindo, tem-se 3 ladrilhos que iniciam com o triminó e 3 ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto justaposto com o triminó, totalizando assim 6 ladrilhamentos referente ao Caso 2 da demonstração. Unindo os dois casos, tem-se um total de 12 possíveis ladrilhamentos para um tabuleiro de tamanho 10.

Para uma melhor compreensão das identidades vistas, pode-se observar o Quadro 12, onde 1 representa o quadrado preto de tamanho 1 x 1, 2 representa o dominó azul de tamanho 1 x 2 e 3 o triminó cinza de tamanho 1 x 3. Com referência no Teorema 5.113, foi possível realizar a interpretação combinatória de Padovan para os primeiros termos.

Com referência no Teorema 5.113, tem-se algumas identidades do modelo combinatório de Padovan.

Figura 27 – Tabuleiro de tamanho 10 e os casos da demonstração



Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 12 – Interpretação Combinatória de Padovan

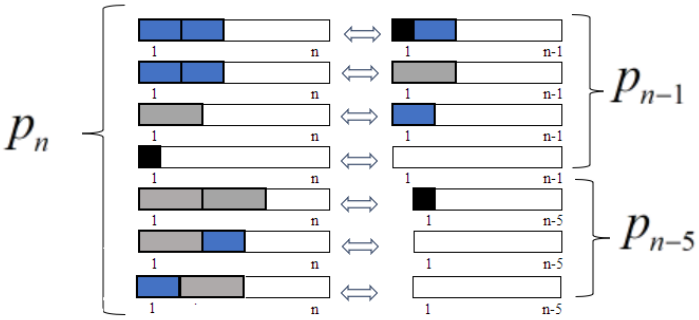
$p_2 = 1$	$p_3 = 2$	$p_4 = 2$	$p_5 = 3$	$p_6 = 4$	$p_7 = 5$	$p_8 = 7$	$p_9 = 9$	$p_{10} = 12$
2	12	22	23	222	223	2222	12222	22222
	3	13	32	33	232	1223	3222	13222
			122	132	322	1232	2322	12322
				123	1222	1322	2232	12232
					133	233	2223	12223
						323	1332	3322
						332	1323	3232
							1233	3223
							333	2332
								2323
								2233
								1333

Fonte: Elaborado pela autora.

Identidade 5.13.1. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$.*

Demonstração. Construindo uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-5} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 28:

Figura 28 – Mapeamento de $\mid p_n \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-5} \mid$ da identidade



Fonte: Elaborado pela autora.

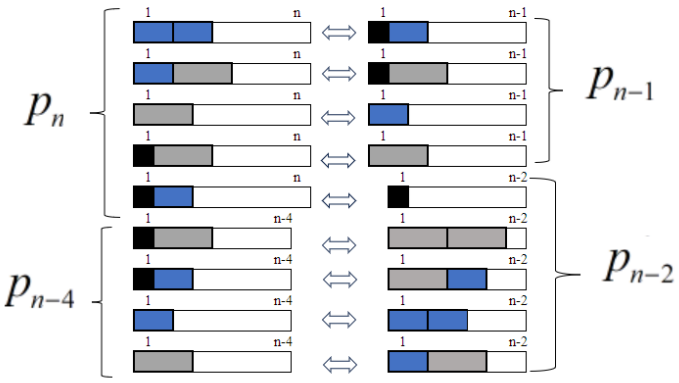
Qualquer $n-$tabuleiro que começa com dois dominós é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ onde os dois dominós foram substituídos por um quadrado preto e um dominó. Caso o $n-$tabuleiro começe com um dominó seguido de um triminó, então esse é mapeado para

um tamanho $n-$ onde será subsituído por um quadrado preto seguido de um triminó. Se um $n-$ tabuleiro começa com um triminó, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ onde o triminó foi substituído por um dominó. Caso o $n-$tabuleiro comece com um quadrado preto seguido de um dominó ou triminó, esse é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$, retirando o quadrado preto. Se o $n-$tabuleiro começa com dois triminós, esse é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-5$ substituindo os dois ladrilhos por um quadrado preto. Finalmente, qualquer $n-$tabuleiro que começa com um triminó e depois um dominó, ou dominó e depois um triminó, é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-5$, excluindo o dominó e o triminó. Seja $\mid p_n \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_n, $\mid p_{n-1} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-1} e $\mid p_{n-5} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-5}. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-5} \mid$. Assim, $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$. □

Identidade 5.13.2. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-4}$.*

Demonstração. Provando a identidade, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-2} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 29:

Figura 29 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-2} \mid$ da identidade



Fonte: Elaborado pela autora.

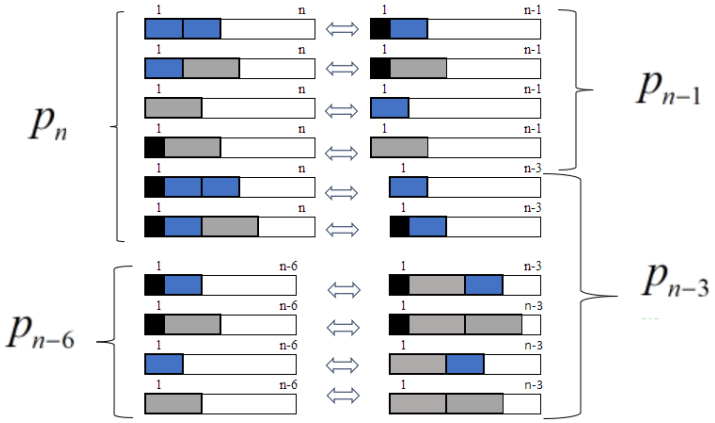
Assim, se um $n-$ tabuleiro começa com um par de dominós, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo-o um dominó por um quadrado preto. Quando um $n-$tabuleiro começa com um dominó seguido de um triminó, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo o dominó por um quadrado preto. Quando um $n-$tabuleiro começa com um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo

o triminó por um dominó. Quando um $n-$tabuleiro começa com um quadrado preto seguido de um triminó, então é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ removendo o quadrado preto. Qualquer $n-$tabuleiro que começa com um quadrado preto seguido de um dominó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-2$, retirando o dominó. Quando um $n-4$tabuleiro que começa com um quadrado preto seguido de um triminó ou quando começa com um quadrado preto seguido de um dominó, esse é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-2$, substituindo o quadrado preto por um triminó. Finalmente, cada tabuleiro de tamanho $n-4$ iniciando com um dominó ou triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-2$, adicionando um dominó ao início do ladrilho. Seja $\mid p_n \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_n, $\mid p_{n-1} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-1}, $\mid p_{n-2} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-2} e $\mid p_{n-4} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-4}. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-2} \mid$. Assim, $p_n + p_{n-4} = p_{n-1} + p_{n-2}$. □

Identidade 5.13.3. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-3} - p_{n-6}$.*

Demonstração. Provando a identidade, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-3} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 30:

Figura 30 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-3} \mid$ da identidade



Fonte: Elaborado pela autora.

Se um $n-$ tabuleiro começa com um par de dominós, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo um dominó por um quadrado preto. Se um $n-$tabuleiro começa com um dominó seguido de um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$

substituindo o dominó por um quadrado preto. Se um $n-$tabuleiro começa com um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo o ladrilho por um dominó. Se um $n-$tabuleiro começa com um quadrado seguido de um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ removendo o quadrado preto. Se um $n-$tabuleiro começa com um quadrado preto seguido de dois dominós é mapeado para um tabuleiro de tamamho $n-3$, são retirados o quadrado preto e um dominó. Se um $n-$tabuleiro começa com quadrado seguido de um dominó e um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-3$, então remove o triminó. Se um $n-6$tabuleiro começa com quadrado preto seguido de um dominó ou inicia com quadrado preto seguido de um triminó, este é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-3$, acrescenta-se um triminó entre os ladrilhos (seja quadrado preto e dominó ou quadrado preto e triminó). Se um $n-$tabuleiro começa com dominó ou triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-3$, acrescenta-se um triminó no início. Seja $\mid p_n \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_n, $\mid p_{n-1} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-1}, $\mid p_{n-3} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-3} e $\mid p_{n-6} \mid$ o conjunto dos ladrilhamentos contados por p_{n-6}. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-3} \mid$. Assim, $p_n + p_{n-6} = p_{n-1} + p_{n-3}$. □

Tedford (2019) realizou uma abordagem combinatória para a sequência de Padovan, por meio de ladrilhamentos e utilizando dominós e triminós para compôr esse modelo. A partir dessas peças disponíveis, é possível estabelecer mais uma interpretação combinatória para os números de Padovan.

Seja p_n a quantidade de formas de ladrilhar um tabuleiro de tamanho n com as seguintes peças disponíveis: dominós cinzas de tamanho 1 x 2 e triminós pretos de tamanho 1 x 3.

Teorema 5.114. *Para $n \geqslant 2$, tem-se que o número p_n de ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos dominó cinza e triminó preto é dado por:*

$$p_n = P_{n-2},$$

onde P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan (Tedford, 2019).

Demonstração. Para isso, é necessário mostrar que p_n satisfaz a mesma definição recursiva e condições iniciais que p_{n-2}. Considere p_1, p_2, p_3 e p_4 (ver Figura 31).

Dados esses conjuntos, é claro que $p_1 = 0 = P_{-1}, p_2 = 1 = P_0, p_3 = 1 = P_1, p_4 = 1 = P_2$. Para isso, $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ tem as mesmas condições iniciais que $\{p_{n-2}\}_{n\geqslant 1}$. Suponha $n \geqslant 3$.

Figura 31 – Ladrilhamentos de Padovan para p_1, p_2, p_3 e p_4

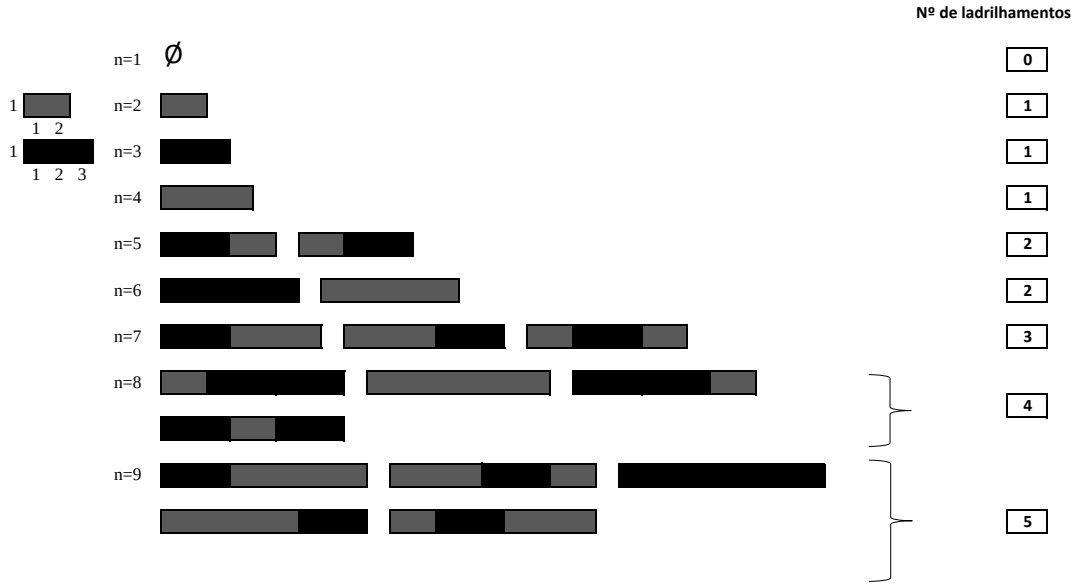
Fonte: Elaborado pela autora baseado em Tedford (2019).

Divida p_n em dois subconjuntos: Seja D o subconjunto de n peças que terminam em dominó e T o subconjunto de n peças que terminam em triminó.

Para isso, $p_n = | D \cup T |$ e $|p_n| = |D| + |T|$. Visto que $|D| = p_{n-2}$ e $|T| = p_{n-3}$ isso implica que $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$. Assim, p_n satisfaz a mesma fórmula recursiva com condições iniciais como P_{n-2}. Portanto, $p_n = P_{n-2}$ para todo $n \geqslant 1$. □

Para exemplificar o Teorema 5.114, tem-se a Figura 32 com os casos de p_1 até p_9.

Figura 32 – Ladrilhamentos de Padovan de p_1 até p_9



Fonte: Elaborado pela autora baseado em Tedford (2019).

Observa-se que para o caso inicial p_1, é obtido o valor 0, sendo esse o termo P_{-1} da sequência de Padovan. Para p_2, tem-se a quantidade de 1 ladrilhamento, representando o P_0 da sequência. Para p_3, tem-se a quantidade de 1 ladrilhamento, representando o P_1 da sequência. Para p_4, tem-se a quantidade de 1 ladrilhamento, representando o P_2 da sequência. Para p_5, tem-se a quantidade de 2 ladrilhamentos, representando o P_3 da sequência. Para p_6, tem-se a quantidade de 2 ladrilhamentos, representando o P_4 da sequência. Para p_7, tem-se a quantidade de 3 ladrilhamentos, representando o P_5 da sequência. Para p_8, tem-se a quantidade

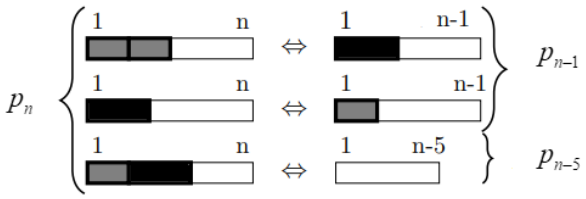
de 4 ladrilhamentos, representando o P_6 da sequência. Para p_9, tem-se a quantidade de 5 ladrilhamentos, representando o P_7 da sequência. Os demais casos podem ser feitos para o leitor seguir a linha de raciocínio da pesquisa.

A seguir, tem-se algumas identidades do modelo combinatório de Padovan, demonstradas por meio dos ladrilhamentos referente ao Teorema 5.114.

Identidade 5.13.4. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$ (Tedford, 2019).*

Demonstração. Construindo uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-5} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 33:

Figura 33 – Mapeamento de $\mid p_n \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-5} \mid$



Fonte: Adaptado de Tedford (2019).

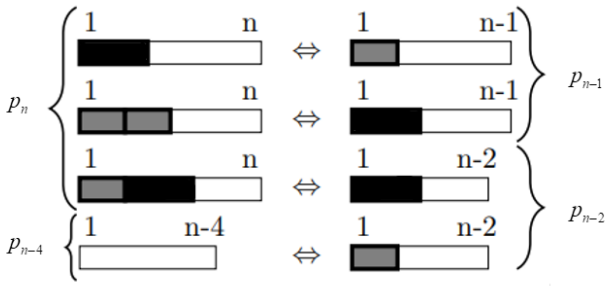
Logo, pode-se concluir que qualquer $n-$tabuleiro que começa com dois dominós é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ onde os dois dominós foram substituídos por um triminó. Se um $n-$ tabuleiro começa com um triminó, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ onde o triminó foi substituído por um dominó. Finalmente, qualquer $n-$tabuleiro que começa com um dominó e depois um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-5$, excluindo o dominó e o triminó. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-5} \mid$. Assim, $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$. □

Identidade 5.13.5. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-4}$ (Tedford, 2019).*

Demonstração. Provando a identidade, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-2} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 34:

Logo, pode-se concluir que se um $n-$tabuleiro começa com um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo o triminó por um dominó. Se um $n-$ tabuleiro começa com um par de dominós, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$

Figura 34 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ para $\mid p_{n-1} \mid$ e $\mid p_{n-2} \mid$



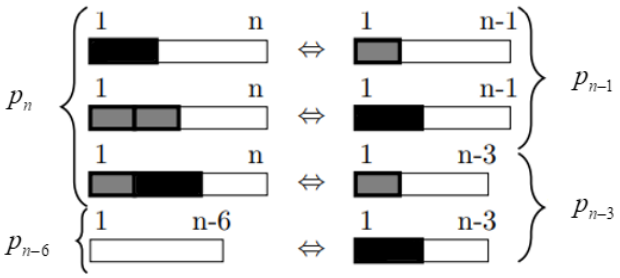
Fonte: Adaptado de Tedford (2019).

substituindo-os por um triminó. Qualquer $n-$tabuleiro que começa com um dominó e um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-2$, descartando o dominó. Finalmente, cada tabuleiro de tamanho $n-4$ é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-2$, adicionando um dominó ao início do ladrilho. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \cup p_{n-4} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-2} \mid$. Assim, $p_n + p_{n-4} = p_{n-1} + p_{n-2}$. □

Identidade 5.13.6. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que $p_n = p_{n-1} + p_{n-3} - p_{n-6}$ (Tedford, 2019).*

Demonstração. Provando a identidade, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-3} \mid$. É possível escrever essa bijeção graficamente na Figura 35:

Figura 35 – Mapeamento de $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ para $\mid p_{n-1}$ e $p_{n-3} \mid$



Fonte: Adaptado de Tedford (2019).

Se um $n-$tabuleiro começa com um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo o triminó por um dominó. Se um $n-$ tabuleiro começa com um par de dominós, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo-os por um triminó. Se um $n-$tabuleiro que começa com um dominó e depois com um triminó, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-3$, removendo o triminó. Finalmente, cada tabuleiro de tamanho

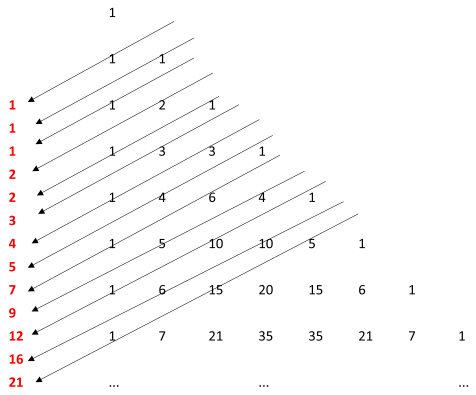
$n-6$ é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-3$, adicionando um triminó ao início do ladrilho. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos $\mid p_n \cup p_{n-6} \mid$ e $\mid p_{n-1} \cup p_{n-3} \mid$. Assim, $p_n + p_{n-6} = p_{n-1} + p_{n-3}$. □

Percebe-se que a abordagem de Tedford (2019) exclui os quadrados pretos propostos na abordagem de Vieira, Alves e Catarino (2022a). No entanto, os ladrilhamentos resultantes em tal abordagem não geram os números de Padovan de forma imediata, existindo um atraso $(n-2)$ para a obtenção desses termos.

Em geral, uma abordagem combinatória determina o tamanho de uma coleção de objetos de duas maneiras diferentes. Isso é realizado durante as demonstrações dos teoremas estudados acima, referente às interpretações combinatórias de Padovan, condicionando o último elemento de cada lado, com o viés de demonstrar a relação recursiva.

No trabalho de Wilson (1993), foi possível realizar uma integração do triângulo de Pascal com os números de Padovan, mesmo antes desses serem descobertos. Tão logo, ao somar a diagonal do triângulo de Pascal obtêm-se um número de Padovan (ver Figura 36).

Figura 36 – Triângulo de Pascal de Padovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Vieira (2020), verificou que o n-ésimo número de Padovan com referência no Triângulo de Pascal é obtido pela fórmula $P_{k-2} = \sum_{k=2m+n} \binom{m}{n}$, com $m,n \in \mathbb{N}$, em que $2m+n=k$.

Com isso, tem-se que:

$$P_0 = \binom{1}{0};$$
$$P_1 = \binom{1}{1};$$
$$P_2 = \binom{2}{0};$$
$$P_3 = \binom{2}{1};$$
$$\vdots$$
$$P_n = P_{k-2} = \sum_{k=2m+n} \binom{m}{n}.$$

Com referência nisso, é então definida nesta pesquisa, a forma binomial da sequência de Padovan. Tão logo, qualquer P_n pode ser obtido por meio da fórmula combinatória de Padovan.

Definição 5.46. *A combinação de dois números naturais a e b é dada por (Neto, 2016; Rocha; Spreafico, 2019):*

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!},$$

em que $a > b$.

Conjectura 5.7. *O modelo combinatório de Padovan, para $n \geqslant 0$, é dado por:*

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{O(n,k)}{k},$$

onde $O(n,k) = \lfloor \frac{n+(k-1)}{3} \rfloor$ e $\lfloor a \rfloor$ representa o menor inteiro que não excede a.

Identidade 5.6. *A soma de dois termos binomiais é dada por:*

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{c} = \frac{a![(a-c)!c! + (a-b)!b!]}{b!c!(a-b)!(a-c)!}$$

Demonstração. Desenvolvendo a soma binomial de dois termos, tem-se que:

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{c} = \frac{a!}{(a-b)!b!} + \frac{a!}{(a-c)!c!} = \frac{a![(a-c)!c! + (a-b)!b!]}{b!c!(a-b)!(a-c)!}.$$

□

Definição 5.47. *Seja $P_n + P_m$ a soma de dois termos quaisquer de Padovan, dada pela fórmula combinatória, para $O(n, \frac{n}{2}) > O(m,0)$:*

Caso 1:

Para $O(n, \frac{n}{2}) \leqslant O(m,0)$ e $n > m$, com $n = m + a$, em que $a \in \mathbb{N}$.

$$Pa_n + Pa_m = \sum_{k=0}^{a} \binom{O(n-a,k)}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-a}{2}} \left[\binom{O(n,k)}{k} + \binom{O(n,k)}{a+k} \right] + \sum_{k=\frac{n-a}{2}}^{\frac{n}{2}} \binom{O(n,k)}{k}.$$

Caso geral:

Para $O(n, \frac{n}{2}) > O(m,0)$.

$$P_n + P_m = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{O(n,k)}{k} + \sum_{k=0}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \binom{O(m,k)}{k}.$$

Assim, para a Definição 5.47, pode-se calcular como exemplo a soma dos termos $P_5 + P_8$.

$$\begin{aligned} P_5 + P_8 &= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{5}{2} \rceil} \binom{O(5,k)}{k} + \sum_{k=0}^{\lceil \frac{8}{2} \rceil} \binom{O(8,k)}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{3} \binom{O(5,k)}{k} + \sum_{k=0}^{4} \binom{O(8,k)}{k} \\ &= \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{2} \right] + \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right] \\ &= 3 + 7 = 10. \end{aligned}$$

Com referência na Definição 5.47, tem-se o estudo das identidades abaixo.

Identidade 5.7. *A soma dos n primeiros termos de Padovan é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+5}{2} \rceil} \binom{O(n+5,k)}{k} - 3.$$

Demonstração. Segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P_i &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_n \\
&= (P_4 - P_2) + (P_5 - P_3) + (P_6 - P_4) + (P_7 - P_5) + \ldots + (P_{n+3} - P_{n+1}) \\
&= (-P_2 - P_3) + (P_4 - P_4) + (P_5 - P_5) + \ldots + (P_{n+1} - P_{n+1}) + (P_{n+2} + P_{n+3}) \\
&= P_{n+2} + P_{n+3} - P_2 - P_3 \\
&= P_{n+5} - 1 - 2 \\
&= P_{n+5} - 3 \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+5}{2} \rceil} \binom{O(n+5,k)}{k} - 3.
\end{aligned}$$

□

Identidade 5.8. *A soma dos n primeiros termos de índice ímpar de Padovan é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{2n+2}{2} \rceil} \binom{O(2n+2,k)}{k} - 1.$$

Demonstração. Com referência nos números de Padovan descritos por meio da definição notacional e considerando apenas os termos de índice ímpar, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} &= P_1 + P_3 + P_5 + \ldots + P_{2n-1} \\
&= (P_4 - P_2) + (P_6 - P_4) + (P_8 - P_6) + \ldots + (P_{2n+2} - P_{2n}) \\
&= P_{2n+2} - P_2 \\
&= P_{2n+2} - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{2n+2}{2} \rceil} \binom{O(2n+2,k)}{k} - 1.
\end{aligned}$$

□

Identidade 5.9. *A soma dos n primeiros termos de índice par de Padovan é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{2n+3}{2} \rceil} \binom{O(2n+3,k)}{k} - 2.$$

Demonstração. Partindo da apresentação dos números de Padovan por meio da definição notacional e considerando apenas os termos de índice par, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P_{2i} &= P_2 + P_4 + P_6 + \ldots + P_{2n} \\ &= (P_5 - P_3) + (P_7 - P_5) + (P_9 - P_7) + \ldots + (P_{2n+3} - P_{2n+1}) \\ &= P_{2n+3} - P_3 \\ &= P_{2n+3} - 2 \\ &= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{2n+3}{2} \rceil} \binom{O(2n+3,k)}{k} - 2.\end{aligned}$$

□

Identidade 5.10. *A soma de quaisquer três termos consecutivos de Padovan é dada por:*

$$P_n + P_{n+1} + P_{n+2} = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+5}{2} \rceil} \binom{O(n+5,k)}{k}.$$

Demonstração. Aplicando a recorrência de Padovan ($P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$), tem-se:

$$\begin{aligned}P_n + P_{n+1} + P_{n+2} &= P_{n+3} + P_{n+2} \\ &= P_{n+5} \\ &= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+5}{2} \rceil} \binom{O(n+5,k)}{k}.\end{aligned}$$

□

Identidade 5.11. *A soma de quaisquer sete termos consecutivos de Padovan é dada por:*

$$\sum_{i=0}^{6} P_{n+i} = 2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+8}{2} \rceil} \binom{O(n+8,k)}{k}.$$

Demonstração. Aplicando a recorrência de Padovan ($P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$), tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{6} P_{n+i} &= P_n + P_{n+1} + P_{n+2} + P_{n+3} + P_{n+4} + P_{n+5} + P_{n+6} \\ &= P_{n+3} + P_{n+2} + P_{n+3} + P_{n+4} + P_{n+5} + P_{n+6} \\ &= P_{n+5} + P_{n+6} + P_{n+5} + P_{n+6} \\ &= P_{n+8} + P_{n+8} \\ &= 2P_{n+8} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+8}{2} \rceil} \binom{O(n+8,k)}{k}.\end{aligned}$$

□

Identidade 5.12. *Seja P_n o n-ésimo termo de Padovan, então:*

$$\binom{P_n}{P_{n-2}} = \binom{P_n}{P_{n-3}}.$$

Demonstração. Com referência na propriedade de simetria dos números binomiais (Santos; Silva, 2012):

$$\binom{N+m}{m} = \binom{N+m}{N}$$

Assim, pela recorrência tem-se que:

$$\begin{aligned}
\binom{P_{n-2}+P_{n-3}}{P_{n-2}} &= \frac{(P_{n-2}+P_{n-3})!}{P_{n-2}!(P_{n-2}+P_{n-3}-P_{n-2})!} \\
&= \frac{(P_{n-2}+P_{n-3})!}{P_{n-2}!P_{n-3}!} \\
&= \frac{(P_{n-2}+P_{n-3})!}{P_{n-3}!(P_{n-2}+P_{n-3}-P_{n-3}!)} \\
&= \binom{P_{n-2}+P_{n-3}}{P_{n-3}} \\
&= \binom{P_n}{P_{n-3}}
\end{aligned}$$

□

A seguir, tem-se o teorema envolvendo a decomposição da forma matricial em coeficientes binomiais da sequência de Padovan. Tão logo, com o viés de realizar essa decomposição, e ainda assim manter apenas uma variável, define-se o valor de uma das variáveis do binômio de Newton como sendo a identidade. A variável seguinte é definida como sendo a diferença da matriz geradora Q de Padovan, e da matriz identidade $(Q-I)$. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q^n &= [I+(Q-I)]^n \\
&= \left(I+\hat{\mathrm{Q}}\right)^n
\end{aligned}$$

Pode-se perceber que a diferença da matriz geradora com a matriz identidade $(Q-I)$, foi definida pela matriz $\hat{\mathrm{Q}}$.

Assim, seja Q a forma matricial de Padovan, tem-se o seguinte teorema:

Teorema 5.115. *A decomposição da forma matricial Q de Padovan em coeficientes binomiais é dada por:*

$$(I+\hat{Q}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{k-n} \hat{Q}^k$$
$$Q^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \hat{Q}^k$$

Demonstração. Para a validação do presente teorema, substitui-se a matriz geradora Q pela forma matricial da sequência de Padovan:

$$Q_P^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}, n \geqslant 5.$$

No entanto, pelo princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$:

$$Q_P^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \hat{\mathrm{Q}}^k$$
$$= \binom{5}{0}\hat{\mathrm{Q}}^0 + \binom{5}{1}\hat{\mathrm{Q}}^1 + \binom{5}{2}\hat{\mathrm{Q}}^2 + \binom{5}{3}\hat{\mathrm{Q}}^3 + \binom{5}{4}\hat{\mathrm{Q}}^4 + \binom{5}{5}\hat{\mathrm{Q}}^5$$
$$= 1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$+ 10\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ -7 & 4 & 7 \\ 7 & -7 & 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 11 & -4 & -14 \\ -14 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$
$$Q_P^5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q_P^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_4 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_2 & P_0 \end{bmatrix}.$$

Supondo que seja válido para $n = y$, com $y \in \mathbb{N}$:

$$Q_P^y = \sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} \hat{\mathrm{Q}}^k = \begin{bmatrix} P_{y-2} & P_{y-1} & P_{y-3} \\ P_{y-3} & P_{y-2} & P_{y-4} \\ P_{y-4} & P_{y-3} & P_{y-5} \end{bmatrix}$$

Assim, será válido para $n = y+1$, com $y \in \mathbb{N}$:

$$Q_P^{y+1} = \sum_{k=0}^{y+1} \binom{y+1}{k} \hat{\mathrm{Q}}^k = \begin{bmatrix} P_{y-1} & P_y & P_{y-2} \\ P_{y-2} & P_{y-1} & P_{y-3} \\ P_{y-3} & P_{y-2} & P_{y-4} \end{bmatrix}$$

□

5.14 O modelo combinatório de Z-dovan

Baseado no estudo realizado na seção anterior, relacionado ao modelo combinatório de Padovan, tem-se a generalização do modelo combinatório da sequência de Z-dovan. Norteada pela pesquisa desenvolvida por Vieira (2020), a qual define a generalização da sequência de Padovan referente a ordem dos números dessa sequência, tem-se a continuidade da investigação acerca do modelo de Padovan, com referência na pesquisa realizada por Vieira, Alves e Catarino (2022a).

5.14.1 O modelo combinatório de Tridovan

Definida por Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b), tem-se a sequência de Tridovan $\left\{P_n^3\right\}_{n\geqslant 0}$ como sendo uma sequência numérica de quarta ordem, definida a partir da extensão da sequência de Padovan.

Definição 5.48. *A sequência de Tridovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ (Vieira; Alves, 2019a; Vieira; Alves, 2019b):*

$$P_n^3 = P_{n-2}^3 + P_{n-3}^3 + P_{n-4}^3, n \geqslant 4,$$

em que P_n^3 representa o n-ésimo termo da sequência e com os termos iniciais: $P_0^3 = 1, P_1^3 = 0, P_2^3 = P_3^3 = 1$.

Desse modo, tem-se o Quadro 13 com os primeiros termos da sequência de Tridovan.

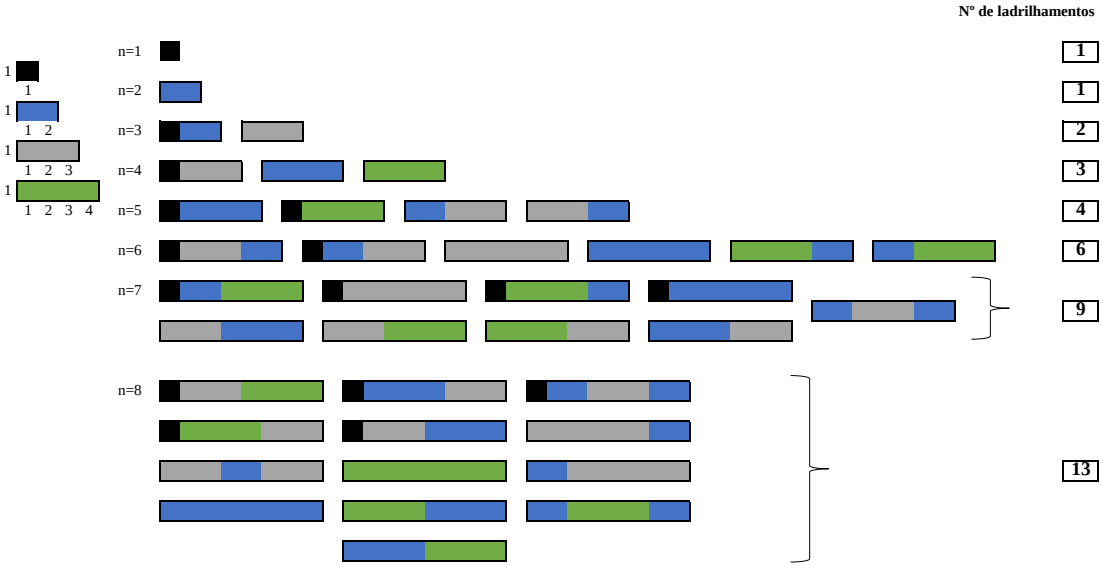
Quadro 13 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tridovan

P_0^3	P_1^3	P_2^3	P_3^3	P_4^3	P_5^3	P_6^3	P_7^3	P_8^3	P_9^3
1	0	1	1	2	2	4	5	8	11

Fonte: Elaborado pela autora.

Diante disso, segue-se com as indicações fornecidas por Mehdaoui (2021), considera-se um n-tabuleiro unidimensional e são estabelecidas as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1, dominós azuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3 e tetraminós verdes 1 x 4, todos com peso 1. Na Figura 37, é possível perceber o termo p_n^3 como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n- tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, pode-se determinar que $p_n^3 = P_n^3 + P_{n-1}^3, n \geqslant 1$.

Figura 37 – Ladrilhamentos de Tridovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 5.116. *Para $n \geqslant 1$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul, triminó cinza e tetraminó verde, tal que o quadrado preto se aparecer ele figura a primeira casa, é dado por:*

$$p_n^3 = P_n^3 + P_{n-1}^3,$$

sendo p_n^3 o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n^3 o n-ésimo termo da sequência de Tridovan.

De modo semelhante a demonstração do Teorema 5.113, pode-se validar este teorema.

A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória da sequência de Tridovan, com referência no trabalho de Tedford (2019).

Defina p_n^3 o número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro de Tridovan com as seguintes peças disponíveis: dominó azul de tamanho 1 x 2, triminó cinza de tamanho 1 x 3 e tetraminó verde de tamanho 1 x 4.

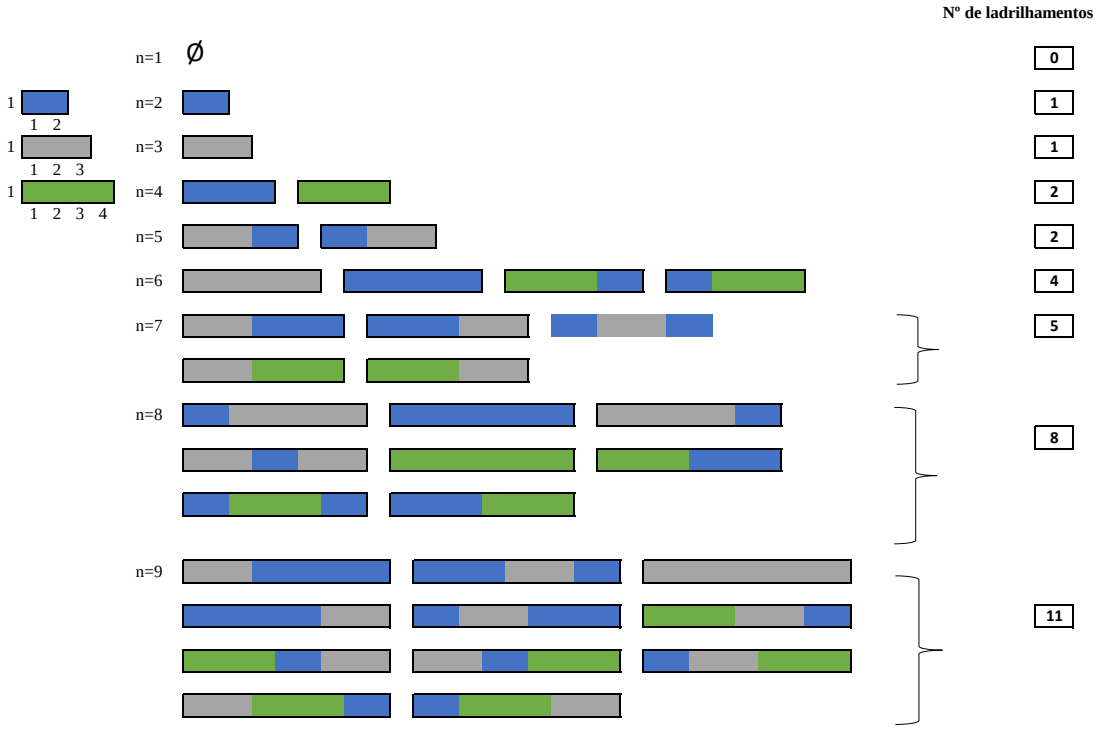
Teorema 5.117. *A quantidade de maneiras de se cobrir um n-tabuleiro com dominós azul 1 x 2, triminós cinza 1 x 3 e tetraminós verde 1 x 4 é dada por:*

$$p_n^3 = P_n^3, n \geqslant 1.$$

A demonstração segue análoga à validação do Teorema 5.114.

Para exemplificar, tem-se a Figura 38 com os casos de p_1^3 até p_9^3.

Figura 38 – Ladrilhamentos de Tridovan de p_1^3 até p_9^3



Fonte: Elaborado pela autora.

Para o caso p_1^3, não existem ladrilhamentos, representando o termo P_1^3. Para o caso p_2^3, é contabilizado 1 ladrilhamento, representando o termo P_2^3. Para o caso p_3^3, é contabilizado 1 ladrilhamento, representando o termo P_3^3. Para o caso p_4^3, são contabilizados 2 ladrilhamentos, representando o termo P_4^3. Para o caso p_5^3, são contabilizados 2 ladrilhamentos, representando o termo P_5^3. Para o caso p_6^3, são contabilizados 4 ladrilhamentos, representando o termo P_6^3. Para

o caso p_7^3, são contabilizados 5 ladrilhamentos, representando o termo P_7^3. Para o caso p_8^3, são contabilizados 8 ladrilhamentos, representando o termo P_8^3. Para o caso p_9^3, são contabilizados 11 ladrilhamentos, representando o termo P_9^3. Desse modo, pode-se calcular que para o caso p_{10}^3, terão 17 ladrilhamentos, representando o termo P_{10}^3.

5.14.2 O modelo combinatório de Tetradovan

No Quadro 14, considera-se a sequência de Tetradovan, definida nos trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b) com a recorrência dada por: $P_n^4 = P_{n-2}^4 + P_{n-3}^4 + P_{n-4}^4 + P_{n-5}^4, n \geqslant 5$, cujos valores iniciais são $P_0^4 = 1, P_1^4 = 0, P_2^4 = 1, P_3^4 = 1, P_4^4 = 2$.

Quadro 14 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tetradovan

P_n^4	P_1^4	P_2^4	P_3^4	P_4^4	P_5^4	P_6^4	P_7^4	P_8^4	P_9^4
1	0	1	1	2	3	4	7	10	16

Fonte: Elaborado pela autora.

Considerando um n-tabuleiro unidimensional e as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1, dominós azuís 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4 e pentaminós amarelos 1 x 5, todos com peso 1. De modo que o quadrado preto, semelhante como acontece para as configurações anteriores, só pode ser inserido no início do ladrilho e uma única vez. Na Figura 39, é possível perceber o termo p_n^4 como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n- tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, pode-se determinar que $p_n^4 = P_n^4 + P_{n-1}^4, n \geqslant 1$.

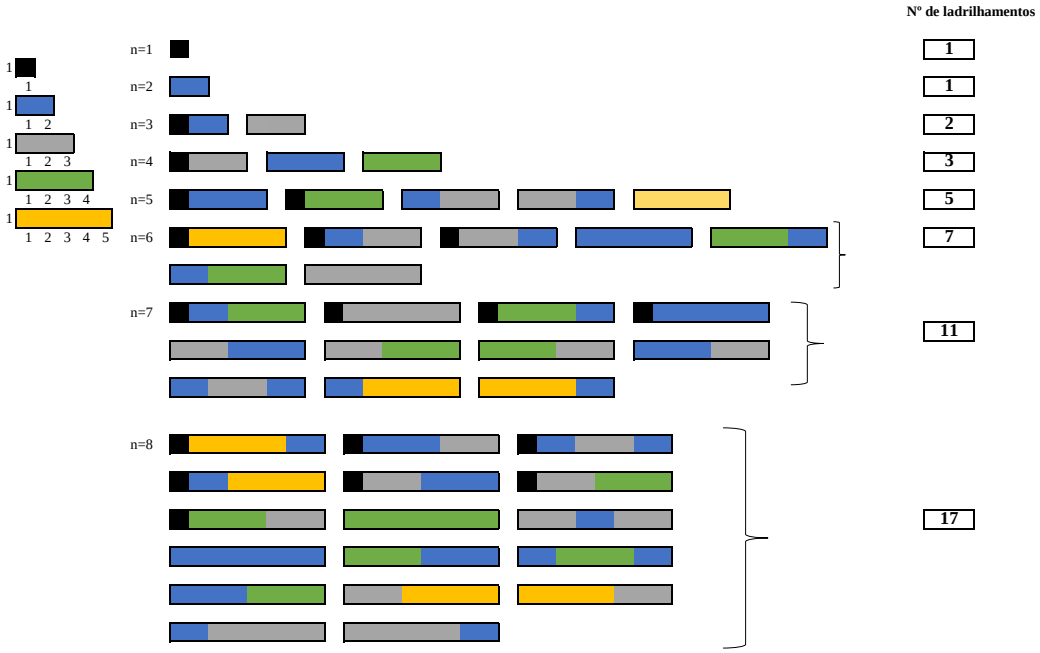
Teorema 5.118. *Para $n \geqslant 1$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul, triminó cinza, tetraminó verde e pentaminó amarelo, tal que o quadrado preto se aparecer ele figura a primeira casa, é dado por:*

$$p_n^4 = P_n^4 + P_{n-1}^4,$$

sendo p_n^4 o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n^4 o n-ésimo termo da sequência de Tetradovan.

De modo semelhante a demonstração do Teorema 5.114, pode-se validar este teorema.

Figura 39 – Ladrilhamentos de Tetradovan



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória da sequência de Tetradovan, com referência no trabalho de Tedford (2019).

Defina p_n^4 o número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro de Tetradovan com as seguintes peças disponíveis: dominó azul de tamanho 1 x 2, triminó cinza de tamanho 1 x 3, tetraminó verde de tamanho 1 x 4 e pentaminó amarelo de tamanho 1 x 5.

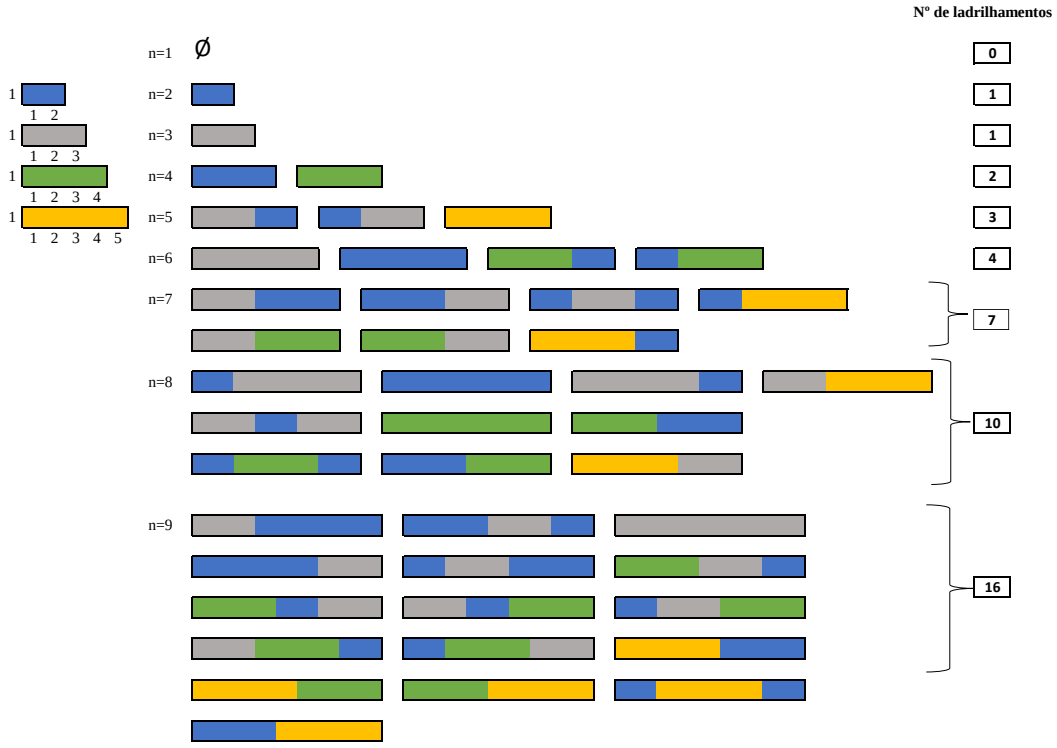
Teorema 5.119. *A quantidade de maneiras de se cobrir um n-tabuleiro com dominós azuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4 e pentaminós amarelos 1 x 5, é dada por:*

$$p_n^4 = P_n^4, n \geqslant 1.$$

Para exemplificar, tem-se a Figura 40 com os casos de p_1^4 até p_9^4.

Para o caso p_1^4, não existem ladrilhamentos, representando o termo P_1^4. Para o caso p_2^4, é contabilizado 1 ladrilhamento, representando o termo P_2^4. Para o caso p_3^4, é contabilizado 1 ladrilhamento, representando o termo P_3^4. Para o caso p_4^4, são contabilizados 2 ladrilhamentos, representando o termo P_4^4. Para o caso p_5^4, são contabilizados 3 ladrilhamentos, representando o termo P_5^4. Para o caso p_6^4, são contabilizados 4 ladrilhamentos, representando o termo P_6^4. Para o caso p_7^4, são contabilizados 7 ladrilhamentos, representando o termo P_7^4. Para o caso p_8^4, são contabilizados 10 ladrilhamentos, representando o termo P_8^4. Para o caso p_9^4, são contabilizados

Figura 40 – Ladrilhamentos de Tetradovan de p_1^4 até p_9^4



Fonte: Elaborado pela autora.

16 ladrilhamentos, representando o termo P_9^4. Desse modo, pode-se calcular que para o caso p_{10}^4, terão 24 ladrilhamentos, representando o termo P_{10}^4.

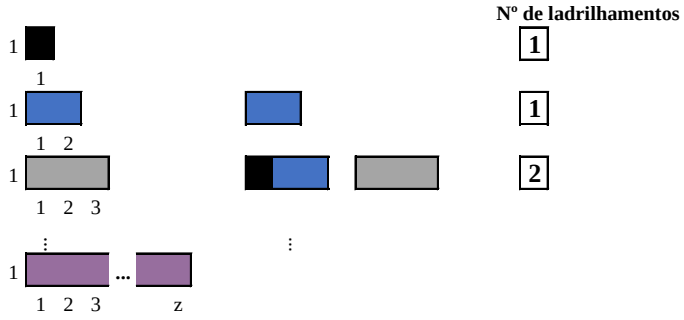
5.14.3 O modelo combinatório de Z-dovan

A generalização da sequência de Padovan, denominada de Z-dovan, foi estudada por Vieira (2020), em que define a recorrência generalizada dada por: $P_{n+z}^z = \sum_{i=0}^{z-2} Z_{n+i}$, em que $n \geqslant z$, $n \in \mathbb{N}$, $Z = z-1$ e Z representa o n-ésimo termo da sequência de Z-dovan.

Desse modo, considera-se um n-tabuleiro unidimensional e as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1, dominós azuís 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4, pentaminós amarelos 1 x 5, ... e um retângulo de cor lilás 1 x z, todos com peso 1. De modo que o quadrado preto, semelhante como acontece para as configurações anteriores, só pode ser inserido no início do ladrilho e uma única vez. Na Figura 41, é possível perceber o termo z_n como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n- tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, pode-se determinar que $p_n^z = P_n^z + P_{n-1}^z, n \geqslant 0$. Ressalta-se que a generalização dos ladrilhamentos de Z-dovan é dada a partir da sequência de Tridovan.

Conjectura 5.8. *Para $n \geqslant 2$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com*

Figura 41 – Configuração dos ladrilhamentos de Z-dovan



Fonte: Elaborado pela autora.

os ladrilhos de quadrado preto 1 x 1, dominó azul 1 x 2, triminó cinza 1 x 3, tetraminó verde 1 x 4, pentaminó amarelo 1 x 5 . . . e um quadrado de cor laranja 1 x z, tal que o quadrado preto se aparecer ele figura a primeira casa, é dado por:

$$p_n^z = P_n^z + P_{n-1}^z,$$

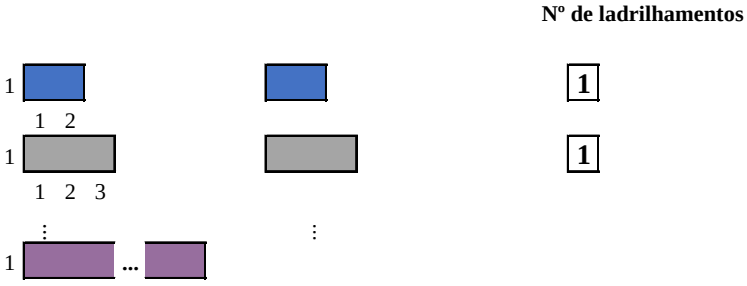
sendo z_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n^z o n-ésimo termo da sequência de Z-dovan.

A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória da sequência de Z-dovan.

Defina $p^z n$ o númeor de maneiras de cobrir um n-tabuleiro de Z-dovan, com as seguintes peças: dominós cazuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4, pentaminós amarelos 1 x 5, . . . e retângulos lilás 1 x z, todos com peso 1.

Na Figura 42, é possível perceber o termo p_n^z como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n-tabuleiro, seguindo as regras supracitadas.

Figura 42 – Configuração dos ladrilhamentos de Z-dovan (outra abordagem)



Fonte: Elaborado pela autora.

Conjectura 5.9. *Para $n \geqslant 2$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um n-tabuleiro, com dominós azuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4, pentaminós amarelos 1 x 5*

... e z-minós laranjas 1 x z é dado por:

$$p_n^z = P_n^z,$$

sendo p_n^z o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n de Z-dovan e P_n^z o n-ésimo termo da sequência de Z-dovan.

Observa-se a inserção de peças de acordo com a ordem da sequência. Tão logo, para a sequência de Padodvan (ordem 3) foram estabelecidas duas peças (dominós e triminós); para a sequência de Tridovan (ordem 4), foram disponibilizadas 3 peças (dominós, triminós e tetraminós); para a sequência de Tetradovan (ordem 5), foram disponibilizadas 4 peças (dominós, triminós, tetraminós e pentaminós). Com isso, percebe-se que para uma sequência de sexta ordem, terão 5 peças disponíveis, calculada a partir de sua ordem menos o valor 1. Para a sequência de ordem z, terão $z-1$ peças disponíveis.

Devido a um amplo cenário e ao interesse em pesquisas envolvendo formas de generalização de sequências recorrentes, tem-se a extensão da sequência de Padovan como aporte basilar para esta pesquisa. Por outro lado, a abordagem combinatória é apresentada como uma vertente importante em avanços de pesquisas envolvendo sequências. Desse modo, por intermédio da noção de tabuleiro já definida, tem-se a introdução do estudo combinatório da sequência de Padovan.

Correlacionada com a sequência de Fibonacci, tem-se o avanço dos números de Padovan, resultando no estudo combinatório de Tridovan, Tetradovan e Z-dovan, generalizando o modelo combinatório de Padovan por meio de ladrilhamentos.

5.15 O modelo combinatório polinomial de Z-dovan

Seguindo os apontamentos de Koshy (2019), o qual analisa o comportamento combinatório da definição do polinomial de Fibonacci, tem-se o estudo do modelo combinatório polinomial de Padovan, as suas extensões e generalização.

5.15.1 O modelo combinatório polinomial de Padovan

A seguir, são estudados os polinômios de Padovan, com referência no trabalho de Diskaya e Menken (2023) e Vieira, Alves e Catarino (2024b).

Definição 5.49. *Para $x \in \mathbb{Z}$, o polinomial de Padovan é definido, para $n \in \mathbb{N}$, pela recorrência (Diskaya, 2023):*

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), n \geqslant 3,$$

com $P_0(x) = 1, P_1(x) = 0, P_2(x) = x$.

Assim, tem-se os primeiros termos apresentados no Quadro 15.

Quadro 15 – Primeiros dez termos polinomiais de Padovan

n	$P_n(x)$
0	1
1	0
2	x
3	1
4	x^2
5	$2x$
6	x^3+1
7	$3x^2$
8	x^4+3x
9	x^4+3x

Fonte: Elaborado pela autora.

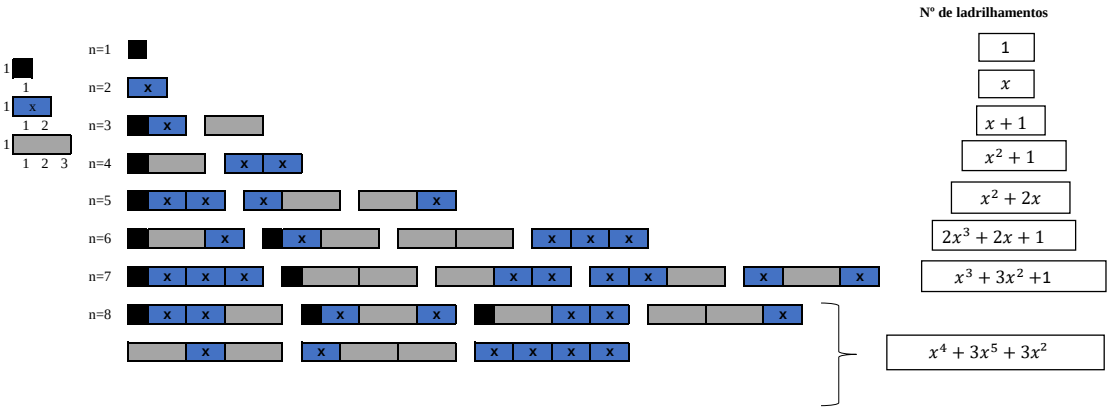
A seguir é estabelecida uma interpretação combinatória, considerando os ladrilhamentos de Padovan e atribuindo pesos para os ladrilhos. Na Figura 43, ao lado esquerdo, são apresentados exemplos com o viés de preencher um n-tabuleiro correspondente com a sequência polinomial de Padovan. Entrevemos, ao lado direito, que as expressões correspondentes podem ser comparadas com os elementos indicados no Quadro 15 e, em seguida, o Teorema 5.120 proporciona um fundamento combinatório para contarmos a quantidade de formas de preencher, via ladrilhos, correspondendo ao número de formas de ladrilhamentos para cada tabuleiro uma expressão algébrica correspondente ao peso.

O produto dos pesos de todas as peças num ladrilho é o peso do ladrilhamento. Por exemplo, o peso do ladrilho com dois dominós seguidos e um triminó, é dado por x^2. Já do ladrilhamento de tamanho 3 ($n = 3$), tem-se um quadrado concatenado com um dominó (peso x) e um triminó, resultando em $x+1$.

Teorema 5.120. *A soma de todos os polinômios de Padovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do quadrado preto 1 x 1 com peso 1, dominó azul 1 x 2 com peso x e triminó cinza 1 x 3 com peso 1. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso e ordem, será determinado por* $p_n(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x)$, *para* $n \geqslant 1$.

A demonstração segue análoga a validação do Teorema 5.113.

Figura 43 – Ladrilhamento polinomial de Padovan



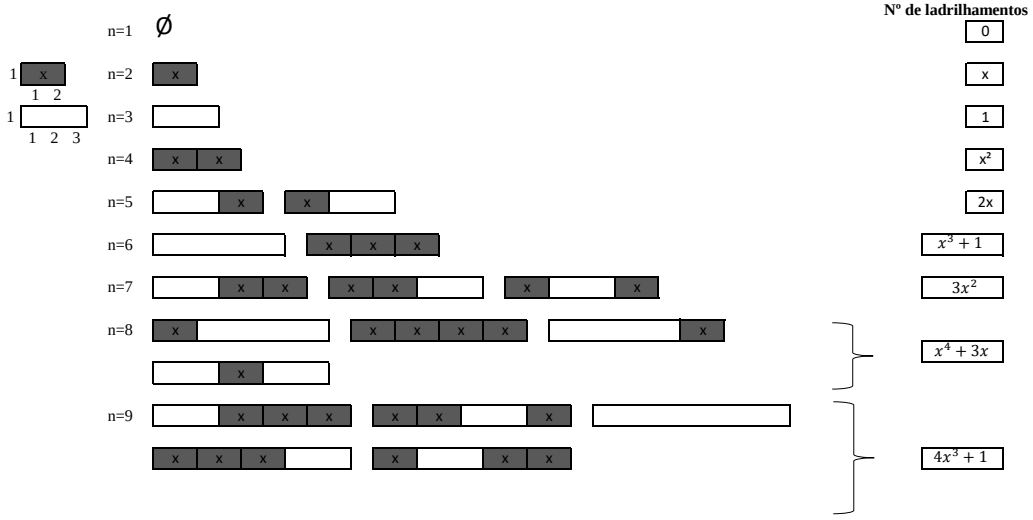
Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 5.121. *A soma de todos os polinômios de Padovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do dominó cinza 1 x 2 com peso x e triminó branco 1 x 3 com peso 1. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso e ordem, será determinado por* $p_n(x) = P_n(x)$, *para* $n \geqslant 1$ *(Vieira, 2023f).*

A demonstração segue análoga a validação do Teorema 5.113.

A Figura 44 apresenta a visualização dos casos iniciais dos ladrilhamentos polinomiais de Padovan, perante a abordagem com dois ladrilhos, tendo como base a interpretação combinatória de Padovan.

Figura 44 – Ladrilhamento polinomial de Padovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Desse modo, foi possível definir e discutir os primeiros termos dos polinômios de Padovan, tendo como base a generalização da fórmula matemática combinatória apresentada, permitindo um estudo investigativo do modelo combinatório de Padovan, conforme estudado por Vieira, Alves e Catarino (2023f).

5.15.2 O modelo combinatório polinomial de Tridovan

A seguir, é examinada a extensão da sequência polinomial de Padovan, a qual é denominada de sequência polinomial de Tridovan, com referência nas definições estabelecidas por Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b).

Definição 5.50. *A sequência polinomial de Tridovan* $\left\{P_n^3(x)\right\}$ *satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$P_n^3(x) = x^2 P_{n-2}^3(x) + x P_{n-3}^3(x) + P_{n-4}^3(x), n \geqslant 4,$$

com os termos iniciais: $P_0^3(x) = 1, P_1^3(x) = 0, P_2^3(x) = x^2, P_3^3(x) = x.$

Desse modo, tem-se o Quadro 16 com os primeiros termos da sequência polinomial de Tridovan.

Quadro 16 – Primeiros dez termos polinomiais de Tridovan

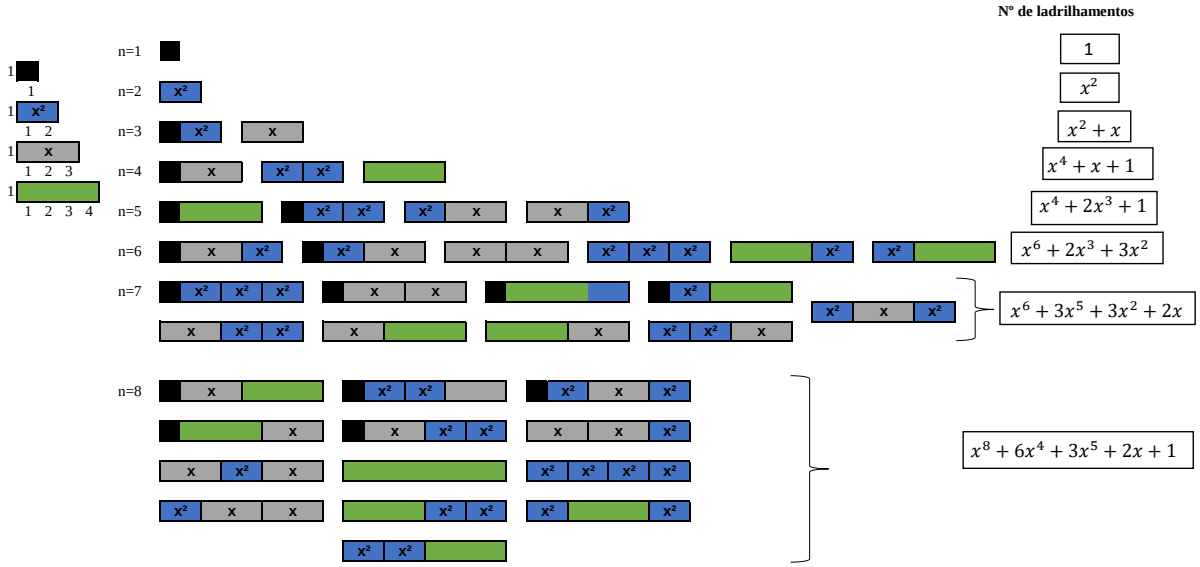
n	$P_n^3(x)$
0	1
1	0
2	x^2
3	x
4	x^4+1
5	$2x^3$
6	x^6+3x^2
7	$3x^5+2x$
8	x^8+6x^4+1
9	$4x^7+7x^3$

Fonte: Elaborado pela autora.

Para estabelecer a sua interpretação combinatória, considera-se o quadrado preto 1 x 1 com peso 1, o dominó azul 1 x 2 com peso x^2, o triminó cinza 1 x 3 com peso x e o

tetraminó verde 1 x 4 com peso 1. Fixando as referidas peças de forma preliminar, na Figura 45 o leitor poderá visualizar algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, tem-se a correspondência do seu peso final aos polinômios de Tridovan.

Figura 45 – Ladrilhamento polinomial de Tridovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 5.122. *A soma de todos os polinômios de Tridovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do quadrado preto 1 x 1 com peso 1, dominó azul 1 x 2 com peso x^2, triminó cinza 1 x 3 com peso x e tetraminó verde 1 x 4 com peso 1. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso, será determinado por $p_n^3(x) = P_n^3(x) + P_{n-1}^3(x)$, para $n \geqslant 1$.*

De modo similar ao Teorema 5.113, tem-se a validação deste teorema.

Uma outra interpretação combinatória da sequência polinomial de Tridovan é dada a seguir.

Defina $p_n^3(x)$ o número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro polinomial de Tridovan com as seguintes peças disponíveis: dominó azul de tamanho 1 x 2 e peso x^2, triminó cinza de tamanho 1 x 3 e peso x e tetraminó verde de tamanho 1 x 4 e peso 1.

Teorema 5.123. *A soma de todos os polinômios de Tridovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do dominó azul 1 x 2 com peso x^2, triminó cinza 1 x 3 com peso x e tetraminó verde 1 x 4 com peso 1, é dada por (Vieira, 2023f):*

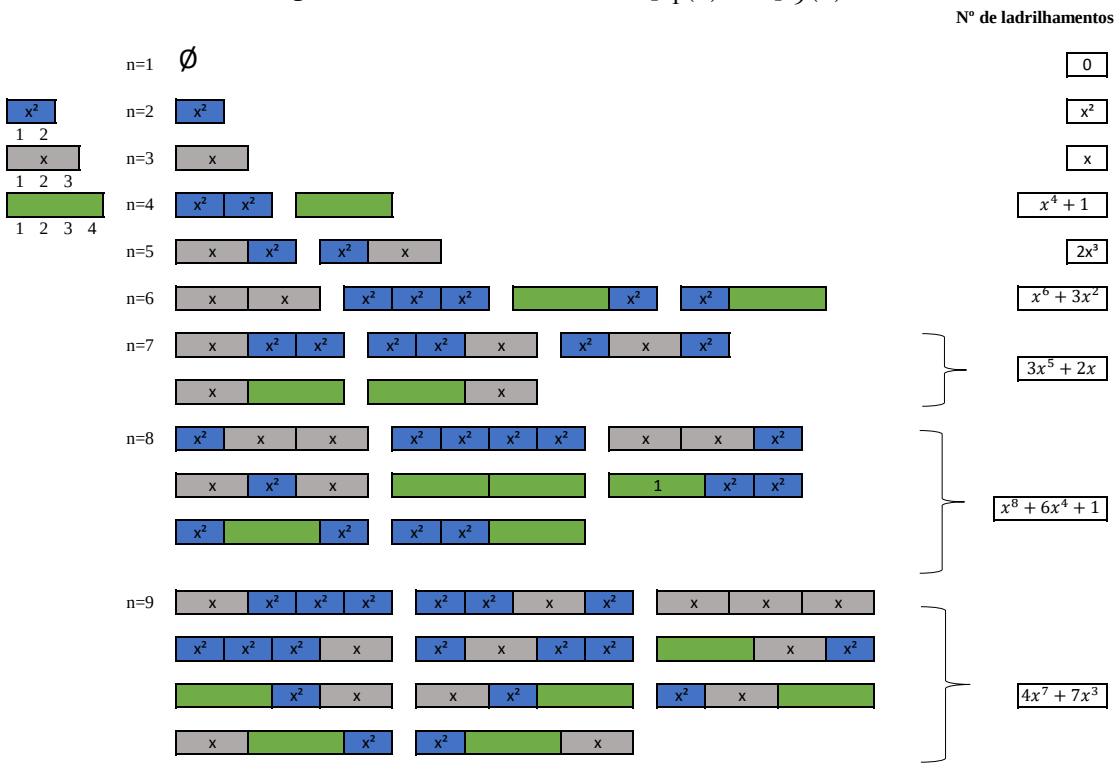
$$p_n^3(x) = P_n^3(x),$$

com $n \geq 1$.

A demonstração segue análoga ao Teorema 5.113.

Para exemplificar, tem-se a Figura 46 com os casos de $p_1^3(x)$ até $p_9^3(x)$.

Figura 46 – Ladrilhamentos polinomiais de Tridovan de $p_1^3(x)$ até $p_9^3(x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para o caso $p_1^3(x)$, não existem ladrilhamentos, representando o termo $P_1^3(x)$. Para o caso $p_2^3(x)$, é contabilizado 1 ladrilhamento com peso x^2, representando o termo $P_2^3(x)$. Para o caso $p_3^3(x)$, é contabilizado 1 ladrilhamento com peso x, representando o termo $P_3^3(x)$. Para o caso $p_4^3(x)$, são contabilizados x^4+1 ladrilhamentos, representando o termo $P_4^3(x)$. Para o caso $p_5^3(x)$, são contabilizados $2x^3$ ladrilhamentos, representando o termo $P_5^3(x)$. Para o caso $p_6^3(x)$, são contabilizados x^6+3x^2 ladrilhamentos, representando o termo $P_6^3(x)$. Para o caso $p_7^3(x)$, são contabilizados $3x^5+2x$ ladrilhamentos, representando o termo $P_7^3(x)$. Para o caso $p_8^3(x)$, são contabilizados x^8+6x^4+1 ladrilhamentos, representando o termo $P_8^3(x)$. Para o caso $p_9^3(x)$, são contabilizados $4x^7+7x^3$ ladrilhamentos, representando o termo $P_9^3(x)$.

5.15.3 O modelo combinatório polinomial de Tetradovan

No Quadro 17 considera-se a sequência polinomial de Tetradovan, sendo portanto mais uma extensão da sequência de Padovan.

Definição 5.51. *A sequência polinomial de Tetradovan,* $\left\{P_n^4(x)\right\}$*, satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$P_n^4(x) = x^3 P_{n-2}^4(x) + x^2 P_{n-3}^4(x) + x P_{n-4}^4(x) + P_{n-5}^4(x), n \geqslant 5,$$

com os termos iniciais: $P_0^4(x) = 1, P_1^4(x) = 0, P_2^4(x) = x^3, P_3^4(x) = x^2, P_4^4(x) = x^6 + x$.

Desse modo, tem-se o Quadro 17 com os primeiros termos da sequência polinomial de Tetradovan.

Quadro 17 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetradovan

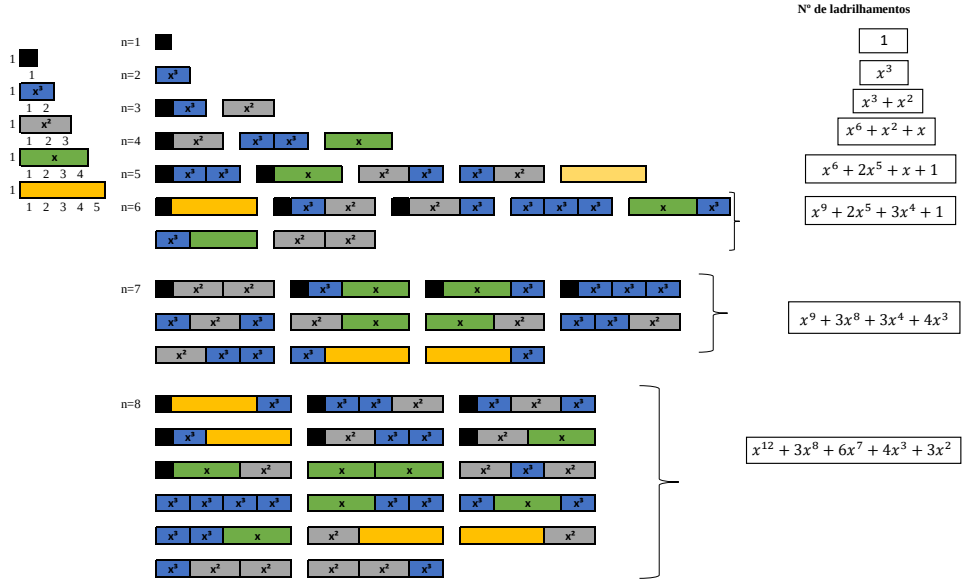
n	$P_n^4(x)$
0	1
1	0
2	x^3
3	x^2
4	$x^6 + x$
5	$2x^5 + 1$
6	$x^9 + 3x^4$
7	$3x^8 + 4x^3$
8	$x^{12} + 6x^7 + 3x^2$
9	$4x^{11} + 10x^6 + 2x$

Fonte: Elaborado pela autora.

Para estabelecer a sua interpretação combinatória, considera-se o quadrado preto 1 x 1 com peso 1, o dominó azul 1 x 2 com peso x^3, o triminó cinza 1 x 3 com peso x^2, o tetraminó verde 1 x 4 com peso x e o pentaminó amarelo 1 x 5 com peso 1. Fixando as referidas peças de forma preliminar, na Figura 47 o leitor poderá visualizar algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, tem-se a correspondência do seu peso final aos polinômios de Tetradovan.

Teorema 5.124. *A soma de todos os polinômios de Tetradovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do quadrado preto 1 x 1 com peso 1, dominó azul 1 x 2 com peso* x^3*, triminó cinza 1 x 3 com peso* x^2*, tetraminó verde 1 x 4 com peso x e pentaminó amarelo 1 x 5 com peso 1. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso, será determinado por* $p_n^4(x) = P_n^4(x) + P_{n-1}^4(x)$*, para* $n \geqslant 1$.

Figura 47 – Ladrilhamento polinomial de Tetradovan



Fonte: Elaborado pela autora.

De modo similar ao Teorema 5.113, tem-se a validação deste teorema.

A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória polinomial de Tetradovan.

Defina $p_n^4(x)$ o número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro de Tetradovan com as seguintes peças disponíveis: dominó azul de tamanho 1 x 2 e peso x^3, triminó cinza de tamanho 1 x 3 e peso x^2, tetraminó verde de tamanho 1 x 4 e peso x e pentaminó amarelo de tamanho 1 x 5 e peso 1.

Teorema 5.125. *A soma de todos os polinômios de Tetradovan associados a todos os ladrilhamentos de tamanho n com cobertura do dominó azul 1 x 2 com peso x^3, triminó cinza 1 x 3 com peso x^2, tetraminó verde 1 x 4 com peso x e pentaminó amarelo 1 x 5 com peso 1, é dada por (Vieira, 2023f):*

$$p_n^4(x) = P_n^4(x),$$

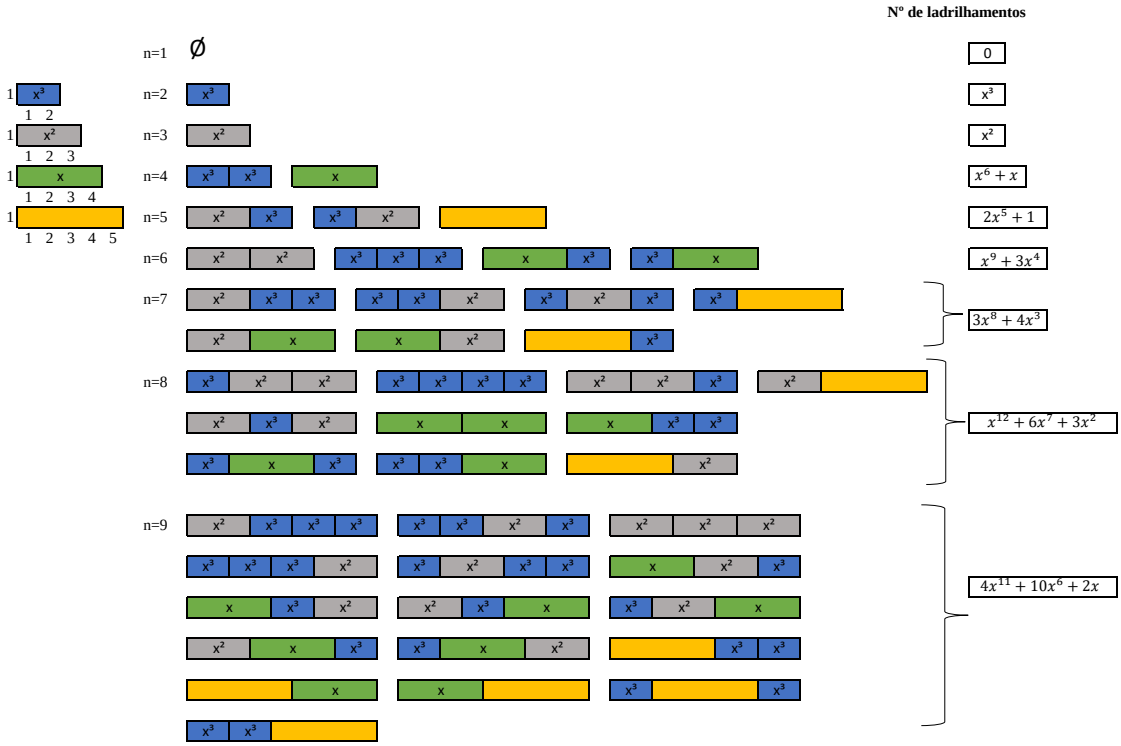
com $n \geq 1$.

A demonstração segue análoga ao Teorema 5.113.

Para exemplificar, tem-se a Figura 48 com os casos de $p_1^4(x)$ até $p_9^4(x)$.

Para o caso $p_1^4(x)$, não existem ladrilhamentos, representando o termo $P_1^4(x)$. Para o caso $p_2^4(x)$, são contabilizados x^3 ladrilhamentos, representando o termo $P_2^4(x)$. Para o caso $p_3^4(x)$, são contabilizados x^2 ladrilhamentos, representando o termo $P_3^4(x)$. Para o caso $p_4^4(x)$, são contabilizados $x^6 + x$ ladrilhamentos, representando o termo $P_4^4(x)$. Para o caso $p_5^4(x)$, são

Figura 48 – Ladrilhamentos de Tetradovan de $p_1^4(x)$ até $p_9^4(x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

contabilizados $2x^5 + 1$ ladrilhamentos, representando o termo $P_5^4(x)$. Para o caso $p_6^4(x)$, são contabilizados $x^9 + 3x^4$ ladrilhamentos, representando o termo $P_6^4(x)$. Para o caso $p_7^4(x)$, são contabilizados $3x^8 + 4x^3$ ladrilhamentos, representando o termo $P_7^4(x)$. Para o caso $p_8^4(x)$, são contabilizados $x^{12} + 6x^7 + 3x^2$ ladrilhamentos, representando o termo $P_8^4(x)$. Para o caso $p_9^4(x)$, são contabilizados $4x^{11} + 10x^6 + 2x$ ladrilhamentos, representando o termo $P_9^4(x)$.

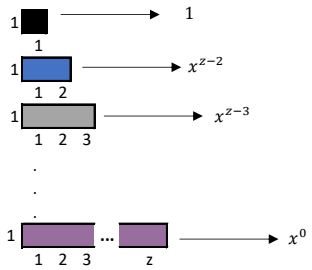
5.15.4 O modelo combinatório polinomial de Z-dovan

A generalização da sequência polinomial de Padovan, denominada de polinomial Z-dovan, tem como base o trabalho de Vieira (2020), em que define a recorrência generalizada para a sequência de Z-dovan. Diante disso, tem-se a recorrência para a sequência polinomial de Z-dovan, dada por: $P_{n+z}^z(x) = \sum_{i=0}^{z-2} Z_{n+i} x^{z-i-2}$, em que $n \geqslant z$, $n \in \mathbb{N}$, $Z = z - 1$ e Z representa o n-ésimo termo da sequência polinomial de Z-dovan.

A partir disso, considera-se um n-tabuleiro unidimensional e as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1 com peso 1, dominó azul 1 x 2 com peso x^{z-2}, triminó cinza 1 x 3 com peso x^{z-3}, tetraminó verde 1 x 4 com peso x^{z-4}, pentaminó amarelo 1 x 5 ... e um quadrado de cor laranja 1 x z. Na Figura 49, é possível perceber o termo z_n como sendo a quantidade de

formas de ladrilhos do n- tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, pode-se determinar que $p_n^z(x) = P_n^z(x) + P_{n-1}^z(x), n \geqslant 0$.

Figura 49 – Configuração dos ladrilhamentos polinomiais de Z-dovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Conjectura 5.10. *Para $n \geqslant 0$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto 1 x 1 com peso 1, dominó azul 1 x 2 com peso x^{z-2}, triminó cinza 1 x 3 com peso x^{z-3}, tetraminó verde 1 x 4 com peso x^{z-4}, pentaminó amarelo 1 x 5 ... e um quadrado de cor laranja 1 x z é dado por:*

$$p_n^z(x) = P_n^z(x) + P_{n-1}^z(x),$$

sendo z_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e Z_n o n-ésimo termo da sequência polinomial de Z-dovan.

De fato, pode-se perceber que ao atribuir o valor de $x = 1$ das sequências polinomiais estudadas, tem-se as respectivas sequências primitivas de Padovan, Tridovan, Tetradovan e a generalização das suas extensões denominada de Z-dovan.

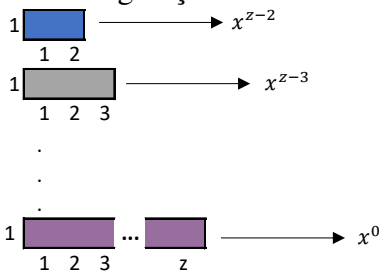
A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória polinomial de Z-dovan.

Defina $p_n^z(x)$ o número de maneiras de cobrir um n-tabuleiro polinomial de Z-dovan, com as seguintes peças: dominós azuis 1 x 2 de peso referente ao coeficiente do primeiro termo da recorrência, triminós cinzas 1 x 3 de peso referente ao coeficiente do segundo termo da recorrência, tetraminós verdes 1 x 4 de peso referente ao coeficiente do terceiro termo da recorrência, pentaminós amarelos 1 x 5 de peso referente ao coeficiente do quarto termo da recorrência, ... e retângulos lilás 1 x z, de peso 1.

Na Figura 50, é possível perceber o termo $p_n^z(x)$ como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n-tabuleiro, seguindo as regras supracitadas.

Conjectura 5.11. *Para $n \geq 2$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos polinomiais de um n-tabuleiro, dominós azuis 1 x 2 de peso referente ao coeficiente do primeiro termo da recorrência,*

Figura 50 – Configuração dos ladrilhamentos polinomiais de Z-dovan



Fonte: Elaborado pela autora.

triminós cinzas 1 x 3 de peso referente ao coeficiente do segundo termo da recorrência, tetraminós verdes 1 x 4 de peso referente ao coeficiente do terceiro termo da recorrência, pentaminós amarelos 1 x 5 de peso referente ao coeficiente do quarto termo da recorrência, ... e retângulos lilás 1 x z denominados de z-minós, de peso 1 *é dado por (Vieira, 2023f):*

$$p_n^z(x) = P_n^z(x),$$

sendo z_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n de Z-dovan e $P_n^z(x)$ o n-ésimo termo da sequência polinomial de Z-dovan.

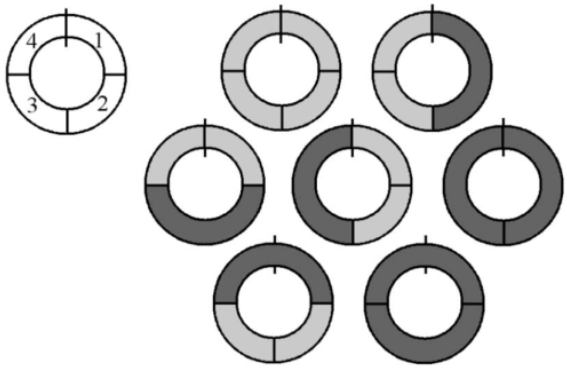
Observa-se que a inserção das peças são dadas de acordo com a ordem da sequência. Tão logo, para a sequência polinomial de Padodvan (ordem 3) foram estabelecidas duas peças (dominós e triminós); para a sequência polinomial de Tridovan (ordem 4), foram disponibilizadas 3 peças (dominós, triminós e tetraminós); para a sequência polinomial de Tetradovan (ordem 5), foram disponibilizadas 4 peças (dominós, triminós, tetraminós e pentaminós). Com isso, percebe-se que para uma sequência de sexta ordem, terão 5 peças disponíveis, calculada a partir de sua ordem menos o valor 1. Para a sequência de ordem z, terão $z-1$ peças disponíveis.

5.16 O modelo combinatório de perrin

Inicialmente, pode-se observar a relação entre a sequência de Fibonacci e Lucas, possuindo a mesma relação de recorrência e apresentando os valores iniciais diferentes entre essas duas sequências. Brevemente, apresenta-se nessa pesquisa a sequência de Lucas (L_n), sendo uma sequência numérica de segunda ordem com recorrência dada por: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$ e valores iniciais dados por $L_0 = 2, L_1 = 1$ (Lucas, 1964). Seu nome é atribuído ao matemático francês Édouard Lucas (1842-1891) sendo um dos precursores da Matemática Recreativa com a publicação da obra Récréations mathématiques, Gauthier-Villars, (1882–1894) e criador do Jogo Torre de Hanoi. Desse modo, Benjamin e Quinn (2003b) estudam o modelo combinatório de Fibonacci, e, de modo complementar o modelo combinatório de Lucas (Alves, 2020b).

Diante disso, Benjamin e Quinn (2003b) definem um n-bracelete como sendo uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Assim, os números de Lucas operam em círculos, chamados de braceletes, sendo l_n o número de maneiras de ladrilhar num tabuleiro circular composto de n células marcadas com quadrados e dominós 1 x 2. Na Figura 51 é apresentada a quantidade de ladrilhamentos no bracelete de Lucas de tamanho 4, ou seja, l_4, obtendo um total de 7 maneiras de ladrilhar no bracelete.

Figura 51 – Braceletes de Lucas de tamanho 4



Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

Teorema 5.126. *Para $n \geqslant 0$, tem-se l_n como sendo a quantidade de maneiras de ladrilhar num tabuleiro circular de tamanho n, com quadrados e dominós. Então L_n, como sendo o n-ésimo número de Lucas, tem-se que (Benjamin; Quinn, 2003b):*

$$l_n = L_n.$$

De modo similar à demonstração do Teorema 5.113, tem-se a validação deste teorema matemático.

Com referência nos estudos realizados acerca do modelo combinatório de Padovan e o bracelete da sequência de Lucas, tem-se a investigação do modelo combinatório de Perrin. À vista disso, é apresentada a relação algébrica entre essas duas sequências, como forma de obter o estudo combinatório dos números de Perrin.

Yilmaz e Taskara (2013), realizaram uma investigação, obtendo a seguinte relação entre Padovan, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e Perrin, $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4}$. A partir dessa relação $R_n = 2P_{n-2} + P_{n-5}$, é definido o bracelete de Perrin, r_n e o bracelete polinomial de Perrin, $r_n(x)$, levando em consideração o modelo combinatório de Padovan estudado por Vieira, Alves e Catarino (2022a).

Defina r_n o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com $(n-2)$ posições rotuladas no sentido horário, usando monominós curvos pretos, dominós curvos azuis e triminós curvos cinzas, de modo que o monominó curvo preto, se aparecer, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições $1,2,3$ quando seguido do triminó curvo e dentre as primeiras posições $1,2$ quando seguido do dominó curvo. É importante destacar que a rotação das peças iguais é válida para a contagem.

Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Ressalta-se que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$, ou seja, se o dominó cobre as células n e 1. Caso contrário ele é dito *em fase*. Observe que essa definição pode ser estendida no caso de um triminó nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$.

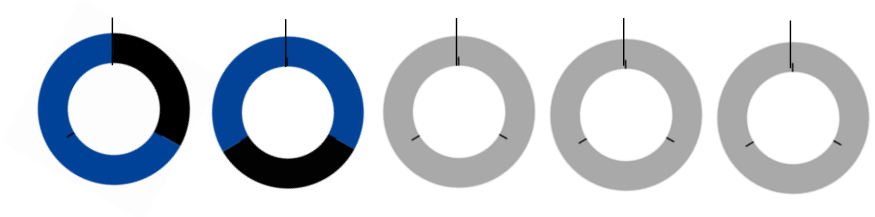
Teorema 5.127. *Para $n \geqslant 5$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x $(n-2)$ com monominós curvos pretos, dominós curvos azuis e triminós curvos cinzas, todos com de peso* 1*, ainda apresentando o monominó curvo preto aparecendo apenas uma vez, e nas três primeiras posições é dado por: $r_n = R_n$, onde r_n é o número de $(n-2)-$ braceletes de Perrin e R_n é o n-ésimo termo da sequência de Perrin.*

Demonstração. Como mostrado anteriormente, para $n = 3$, tem-se $r_3 = 5$, resultando em 3-braceletes, 2 em fase e 3 fora de fase. Da mesma forma, para $r_4 = 5$ e $r_5 = 7$. Considere o último ladrilho de um n-bracelete contado por r_n. Observe que este último ladrilho não é quadrado preto curvo, pois $n \geqslant 3$. Então, o n-bracelete termina com um dominó azul curvo ou com um triminó cinza curvo. No caso da última peça ser um dominó azul curvo, tem-se o bracelete em fase com os dominós em posição $(n-1,n)$, ou o bracelete fora de fase, com os dominós na posição $(n,1)$. Assim, existem $n-2$ posições restantes que devem ser percorridas de r_{n-2} maneiras. Quando o n-bracelete termina com um triminó cinza curvo, tem-se os braceletes em fase com este ladrilho na posição $(n-2,n-1,n)$, em fase ou fora de fase, com este ladrilho em uma dessas posições $(n,1,2)$, $(n-1,n,1)$. Isso implica que restam $n-3$ posições que devem ser percorridas de r_{n-3} maneiras. Assim, $r_n = r_{n-2} + r_{n-3}$, para $n \geqslant 3$, e $r_3 = 5$, $r_4 = 5$ e $r_5 = 7$. Portanto, $r_n = R_{n+2}$.

□

Para melhor exemplificar, tem-se a Figura 52 para o caso do $n = 5$. Onde tem-se 5 casos para um 3-bracelete de Perrin.

Figura 52 – Braceletes de Perrin para o caso $n = 5$

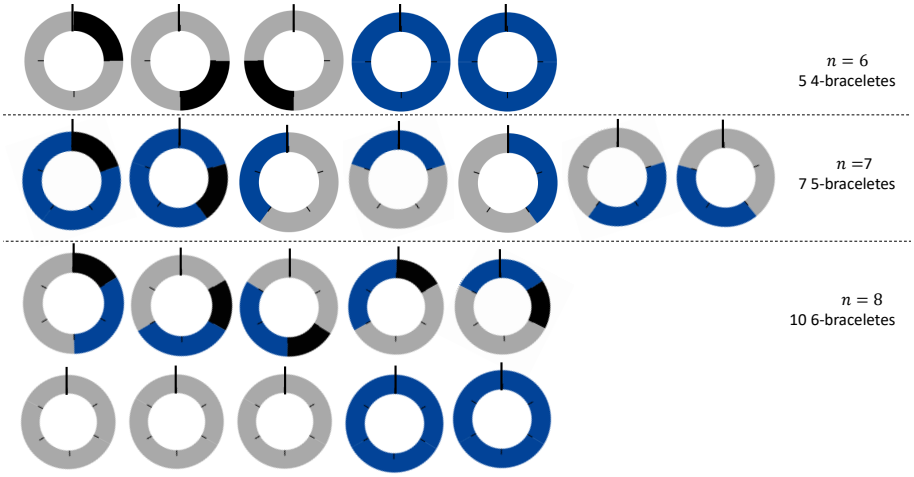


Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se que o bracelete que apresenta um triminó curvo cinza como peça final, é rotacionado apenas duas vezes, gerando assim três braceletes. Já o bracelete que finaliza com um dominó curvo azul, é rotacionado apenas uma vez, gerando dois braceletes.

A Figura 53, apresenta os casos para os valores de $n = 6, 7, 8$.

Figura 53 – Braceletes de Perrin para os casos $n = 6, 7, 8$



Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se que para o caso inicial r_2, tem-se 2 braceletes, representando o termo R_2 da sequência de Perrin. Para r_3, tem-se a quantidade de 3 braceletes rotacionados, representando o R_3 da sequência. Para r_4, tem-se a quantidade de 2 braceletes, representando o R_4 da sequência. Para r_5, tem-se a quantidade de 5 braceletes, representando o R_5 da sequência. Os demais casos podem ser feitos para o leitor seguir a linha de raciocínio da pesquisa.

Em seguida, apresenta-se uma outra abordagem combinatória para a sequência de Perrin. Seja r_n o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, usando dominós curvos azuis e triminós curvos cinzas. Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Ressalta-se que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n, 1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. Observe que

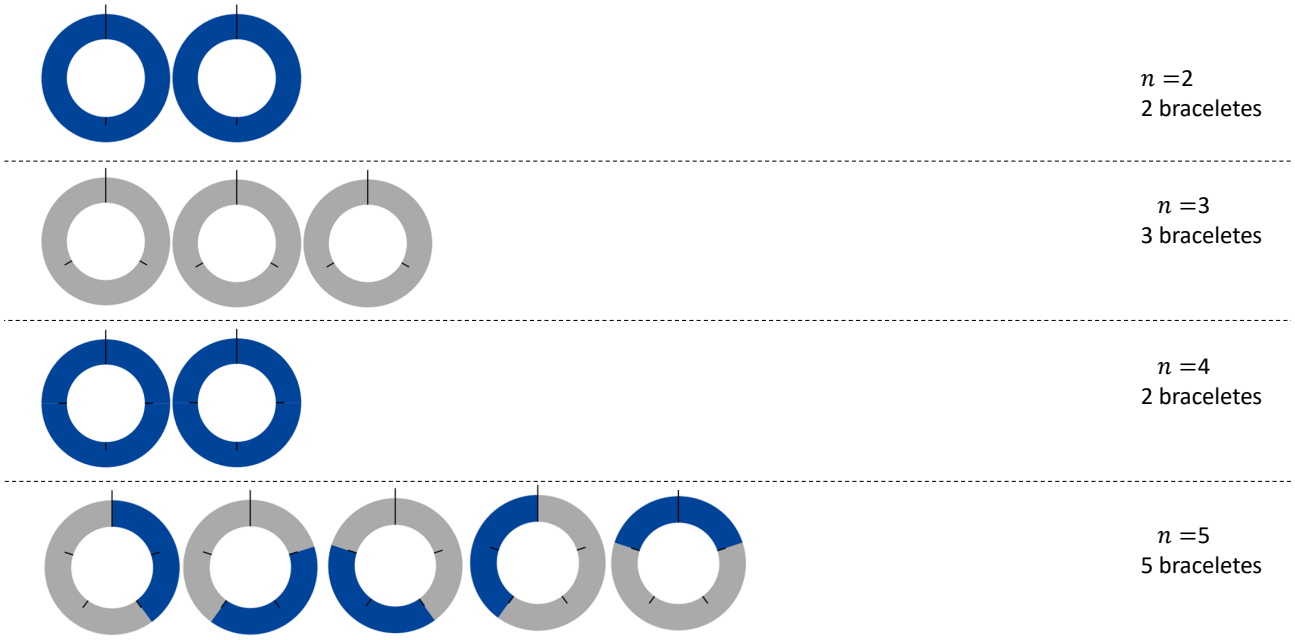
essa definição pode ser estendida no caso de um triminó nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$ (Vieira, 2024).

Teorema 5.128. *Para $n \geqslant 2$, os possíveis braceletes de Perrin de tamanho 1 x n com dominós curvos azuis e triminós curvos cinzas, todos com de peso 1 é dado por (Vieira, 2024): $r_n = R_n$, onde r_n é o número de n−braceletes de Perrin e R_n é o n-ésimo termo da sequência de Perrin.*

A validação é similar à demonstração do Teorema 5.128.

Para exemplificar o Teorema 5.128, tem-se a Figura 54 com os casos de r_2 até r_5.

Figura 54 – Braceletes de Perrin de r_2 até r_5



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, é realizada uma nova abordagem combinatória para a sequência de Perrin, sendo essa por meio da inserção de moedas e da relação com os números de Padovan.

Com referência no estudo de Yilmaz e Taskara (2013), em que estabeleceram a seguinte relação entre Padovan, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e Perrin, $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4}$. Da qual, realizando operações algébricas, pode-se obter: $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4} = 2(P_{n-2} + P_{n-4}) + P_{n-5} = 2P_{n-2} + P_{n-5}$.

A partir da relação $R_n = 2P_{n-2} + P_{n-5}$, é definido uma outra abordagem combinatória para o bracelete de Perrin, r_n, de tamanhos 1 x $n-2$ e 1 x $n-5$. Considere os braceletes com as seguintes peças: quadrado preto, dominó azul, triminó cinza e quadrado vermelho. Com as condições estabelecidas na Definição 5.13, em que considera um triminó, definido como

um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó 1 x 2, qualquer ladrilho de Padovan é formado pela disposição das formas definidas. O quadrado preto destina-se a complementar os ladrilhos vazios, sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. As regras particulares mencionadas são definidas para o teorema referente ao ladrilhamento de Padovan (Vieira, 2022a).

Ainda assim, o bracelete de Perrin é formado por cinco tipos de componentes, a saber: moedas (branca, preta e cinza), ladrilhamentos de p_{n-2}, ladrilhamentos de p_{n-5}, ladrilhos de tamanho $n-2$ e ladrilhos de tamanho $n-5$. Existem ainda três casos de braceletes, sendo esses:

Caso 1: Iniciado com uma moeda branca, tomado com ladrilhamentos de p_{n-2} e concatenado com quadrados vermelhos de tamanho $n-5$.

Caso 2: Iniciado com uma moeda preta, tomado com ladrilhamentos de p_{n-2} e concatenado com quadrados vermelhos de tamanho $n-5$.

Caso 3: Iniciado com uma moeda cinza, tomado com ladrilhamentos de p_{n-5} e concatenado com quadrados vermelhos de tamanho $n-2$.

O resultado é exemplificado no Quadro 18.

Quadro 18 – Casos do modelo combinatório de Perrin

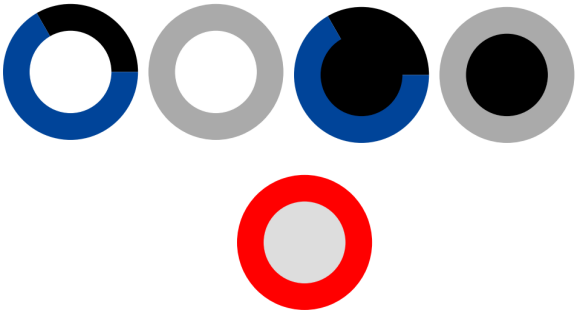
Moedas	$n-2$	$n-5$
	p_{n-2}	
	p_{n-2}	
		p_{n-5}

Fonte: Elaborado pela autora.

Para melhor compreensão do leitor, tem-se na Figura 55 o modelo combinatório de Perrin para o caso $n=5$, tamanho 5. Observa-se a existência das moedas branca, preta e cinza. A cor vermelha (quadrados vermelhos) representa o ladrilho de tamanho 3. Com isso, tem-se o dois primeiros braceletes, de moeda branca, com os ladrilhamentos de Padovan p_3, concatenado com os ladrilhos de tamanho 0. Os dois braceletes seguintes, com moedas pretas, são dados pelos ladrilhamentos de Padovan p_3, concatenado com os ladrilhos de tamanho 0. Em seguida tem-se o ladrilho com a presença da moeda cinza, gerado pelos ladrilhamentos

de Padovan p_0, concatenado com os ladrilhos de tamanho 3 (quadrados vermelhos). Como o modelo combinatório de Padovan para $n = 0$ não possuem ladrilhamentos (representado apenas por um ponto), observa-se a ausência desses, permanecendo somente a cor vermelha (quadrados vermelhos) e sua respectiva moeda.

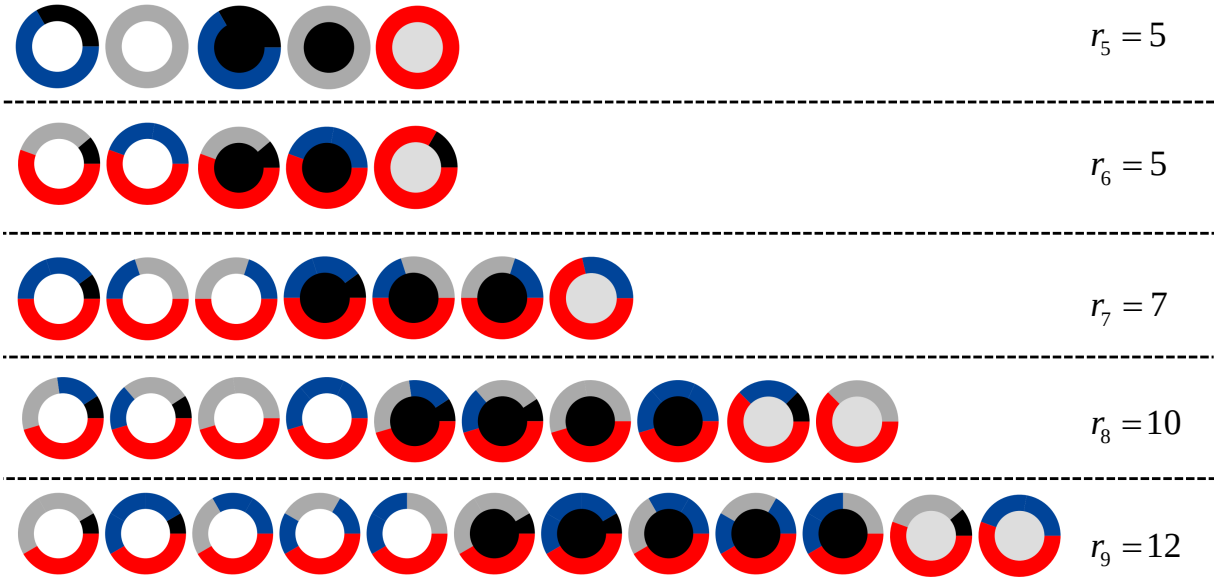
Figura 55 – Bracelete de Perrin de tamanho 5



Fonte: Elaborado pela autora.

De modo a revisitar as configurações dos ladrilhamentos de Padovan (Vieira, 2022a), tem-se a utilização do quadrado preto 1 x 1, dominó azul 1 x 2 e triminó cinza 1 x 3. Para exemplificar o bracelete de Perrin, pode-se observar a Figura 56, destacando a presença dos quadrados vermelhos de tamanhos $n-2$ e $n-5$.

Figura 56 – Braceletes de Perrin



Fonte: Elaborado pela autora.

Teorema 5.129. *Para $n \geqslant 5$, tem-se que r_n o número de formas de preenchimento do bracelete 1 x n de Perrin de um tabuleiro circular de tamanho 1 x n, com as moedas branca, preta e cinza e os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul, triminó cinza e quadrado vermelho é dado por:*

$$r_n = R_n,$$

sendo R_n o n-ésimo termo da sequência de Perrin.

De modo similar à demonstração do Teorema 5.127, tem-se a validação deste teorema matemático.

Fundamentada na Definição 5.7 e na relação $R_n = 2P_{n-2} + P_{n-5}$, tem-se a investigação do binômio de Perrin, permitindo obter uma definição para o aprofundamento do estudo referente aos números dessa sequência.

Definição 5.52. *O modelo combinatório de Perrin, para $n \geqslant 5$, é dado por:*

$$R_n = 2P_{n-2} = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} \binom{O(n-2,k)}{k} + \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-5}{2} \rceil} \binom{O(n-5,k)}{k},$$

onde $O(n,k) = \lfloor \frac{n+(k-1)}{3} \rfloor$ e $\lfloor a \rfloor$ representa o menor inteiro que não excede a.

Desse modo, tem-se a obtenção dos primeiros termos de Perrin, por meio do binômio definido:

$$\begin{aligned}
R_5 &= 2\left[\binom{0}{0} + \binom{1}{1}\right] + \binom{0}{0} = 5 \\
R_6 &= 2\left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right] + \binom{0}{0} = 5 \\
R_7 &= 2\left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{2}\right] + \binom{0}{0} = 7 \\
R_8 &= 2\left[\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right] + \left[\binom{0}{0} + \binom{1}{1}\right] = 10 \\
R_9 &= 2\left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} + \binom{3}{3}\right] + \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right] = 12 \\
R_{10} &= 2\left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] + \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{2}\right] = 17.
\end{aligned}$$

5.16.1 O modelo combinatório de Tetrarrin

Baseado em Yilmaz e Taskara (2013), nos quais apresentaram uma relação entre a sequência de Padovan e Perrin, buscou-se então obter uma combinação linear dos termos da

sequência de Tetrarrin (R_n^4) e Tridovan (P_n^3). Tomando como premissa que essa combinação linear é possível, foi modelado o seguinte sistema de equações: $Ax = y$, apresentando as seguintes definições: $A = \begin{bmatrix} P_0^3 & P_1^3 & P_2^3 & P_3^3 \\ P_1^3 & P_2^3 & P_3^3 & P_4^3 \\ P_2^3 & P_3^3 & P_4^3 & P_5^3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} R_4^4 \\ R_5^4 \\ R_6^4 \\ R_7^4 \end{bmatrix}$ e x é um vetor de coeficientes que satisfaz o sistema. Assim, foi possível obter a relação:

$$R_n^4 = 3P_{n-4}^3 + 3P_{n-3}^3 + 4P_{n-2}^3. \tag{5.40}$$

Realizando ainda algumas manipulações algébricas, tem-se a obtenção da seguinte relação:

$$R_n^4 = 2P_{n-2}^3 + 3P_{n-3}^3 + 3P_{n-4}^3.$$

A partir dos estudos realizados acerca do modelo combinatório de Tridovan (Vieira, 2022a), bracelete da sequência de Lucas (Benjamin; Quinn, 2003b), sequência de Tridovan (Vieira, 2020), sequência de Tetrarrin e das relações algébricas entre as sequências de Tridovan e Tetrarrin, tem-se a investigação do modelo combinatório de Tetrarrin.

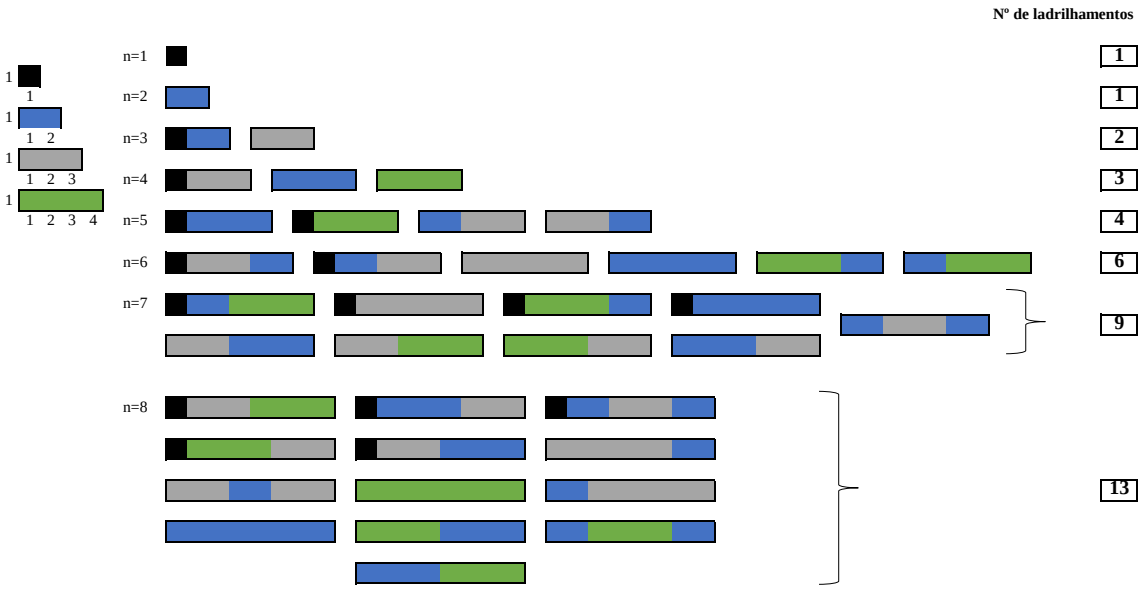
Para o modelo combinatório de Tetrarrin, é importante observar os ladrilhamentos de Tridovan, discutido na subseção 5.14.1. Assim, faz-se necessário resgatar a Figura 57, em que são visualizados os ladrilhamentos de Tridovan para alguns valores iniciais.

Defina r_n^4 o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, utilizando as peças: monominós curvos pretos, dominós curvos azuis, triminós curvos cinzas e tetraminós curvos verdes. Define-se ainda que o monominó curvo preto, caso apareça, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições $1, 2, 3$.

Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Vale ressaltar que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n, 1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. A presente definição também é válida para os casos dos triminós curvos cinzas nas posições $(n-1, n, 1)$ ou $(n, 1, 2)$ e tetraminós curvos verdes nas posições $(n-2, n-1, n, 1)$, $(n-1, n, 1, 2)$ ou $(n, 1, 2, 3)$ (Vieira, 2024).

Teorema 5.130. *Para $n \geqslant 2$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x n com monominós curvos pretos, dominós curvos azuis, triminós curvos cinzas e tetraminós curvos verdes, todos com peso* 1*, e ainda apresentando o monominó curvo preto aparecendo apenas uma vez, e nas*

Figura 57 – Ladrilhamento de Tridovan



Fonte: (Vieira, 2022a)

três primeiras posições é dado por (Vieira, 2024): $r_n^4 = R_n^4 + R_{n-1}^4$, *onde* r_n^4 *é o número de* $n-$*braceletes de Tetrarrin e* R_n^4 *é o n-ésimo termo da sequência de Tetrarrin.*

De modo similar à demonstração do Teorema 5.127, tem-se a validação deste teorema.

De forma a exemplificar o modelo, tem-se a Figura 58 para o caso do $n = 2$. Onde tem-se 2 casos para um 2-bracelete de Tetrarrin com a rotação do dominó curvo azul.

Figura 58 – Braceletes de Tetrarrin para o caso $n = 2$

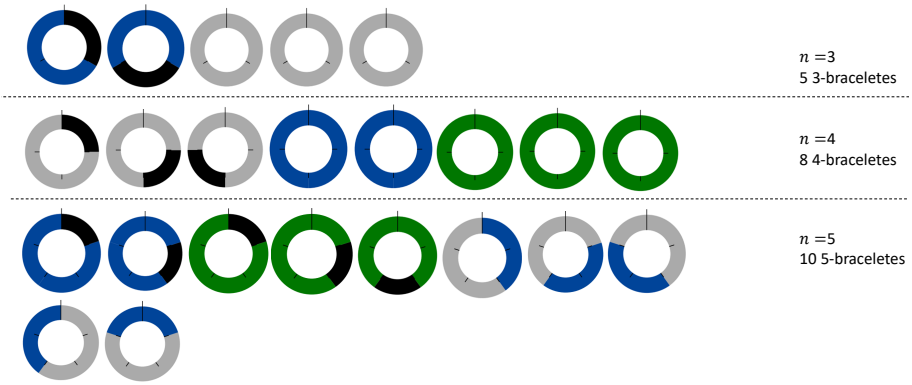
Fonte: Elaborado pela autora.

É importante notar que o bracelete finalizado com um dominó curvo azul, é

rotacionado apenas uma única vez, gerando dois braceletes. Para o caso do bracelete finalizar com um triminó curvo cinza, esse é rotacionado duas vezes, gerando assim três braceletes. Para os braceletes que finalizam com um tetraminó curvo verde, a peça é rotacionada duas vezes, gerando três braceletes. Esse fato é estabelecido com referência na relação entre as sequências de Tridovan e Tetrarrin, em que $R_n^4 = 2P^3n - 2 + 3P_{n-3}^3 + 3P_{n-4}^3$.

A Figura 59, apresenta os casos para os valores de $n = 3,4,5$.

Figura 59 – Braceletes de Tetrarrin para os casos $n = 3,4,5$



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, tem-se a interpretação combinatória de Tetrarrin.

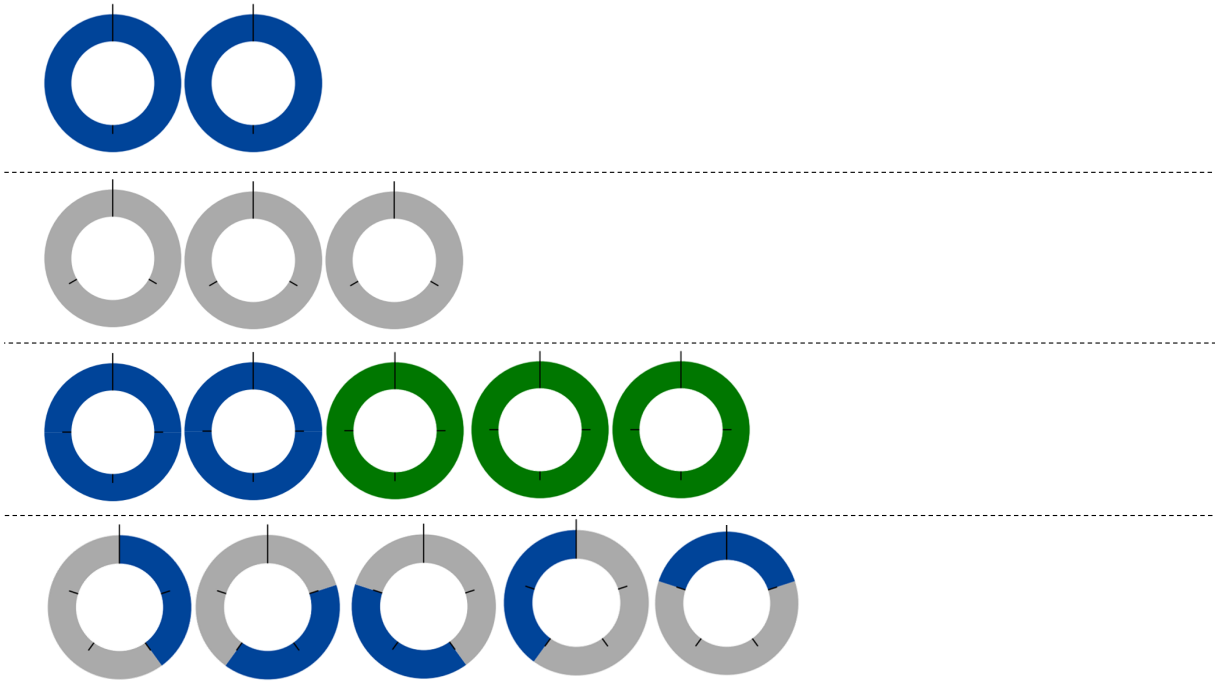
Defina r_n^4 o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, utilizando as peças: monominós curvos pretos, dominós curvos azuis, triminós curvos cinzas e tetraminós curvos verdes. Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Vale ressaltar que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. A presente definição também é válida para os casos dos triminós curvos cinzas nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$ e tetraminós curvos verdes nas posições $(n-2,n-1,n,1)$, $(n-1,n,1,2)$ ou $(n,1,2,3)$. O dominó curvo azul, rotaciona apenas duas vezes. Já o triminó curvo cinza rotaciona apenas três vezes e o tetraminó curvo verde rotaciona três vezes, por meio da relação $R_n^4 = 2P^3n - 2 + 3P_{n-3}^3 + 3P_{n-4}^3$.

Teorema 5.131. *Para $n \geqslant 2$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x n com dominós curvos azuis, triminós curvos cinzas e tetraminós curvos verdes, todos com peso 1 é dado por: $r_n^4 = R_n^4$, onde r_n^4 é o número de n− braceletes de Tetrarrin e R_n^4 é o n-ésimo termo da sequência de Tetrarrin.*

A demonstração segue análoga ao Teorema 5.128.

Para exemplificar, tem-se a Figura 60 com os casos de r_2^4 até r_5^4.

Figura 60 – Braceletes de Tetrarrin de r_2^4 até r_5^4



Fonte: Elaborado pela autora.

Para o caso r_2^4, existem 2 braceletes, representando o termo R_2^4. Para o caso r_3^4, são contabilizados 3 braceletes, representando o termo R_3^4. Para o caso r_4^4, são contabilizados 5 braceletes, representando o termo R_4^4. Para o caso r_5^4, são contabilizados 5 braceletes, representando o termo R_5^4.

5.17 O modelo combinatório polinomial de perrin

De modo peculiar ao modelo combinatório polinomial de Padovan e suas extensões, o qual foi estudado nas seções anteriores, tem-se a pesquisa acerca da sequência polinomial de Perrin. Desse modo, tem-se as contribuições do presente estudo investigativo, com possível ineditismo, referente ao modelo combinatório polinomial de Perrin e a sua extensão.

Os polinômios de Perrin representam um caso particular da sequência (s,t)-Perrin, a qual foi definida em seções precedentes, apresentando os valores de $s = x$ e $t = 1$.

Definição 5.53. *Para $x \in \mathbb{Z}$, o polinomial de Perrin é definido, para $n \in \mathbb{N}$, pela recorrência:*

$$R_n(x) = xR_{n-2}(x) + R_{n-3}(x), n \geqslant 3,$$

com $R_0(x) = 3, R_1(x) = 0, R_2(x) = 2$.

Quadro 19 – Primeiros dez termos polinomiais de Perrin

n	$R_n(x)$
0	3
1	0
2	2
3	3
4	$2x$
5	$3x+2$
6	$2x^2+3$
7	$3x^2+4x$
8	$2x^3+6x+2$
9	$3x^3+6x^2+3$

Fonte: Elaborado pela autora.

Dessa forma, tem-se os primeiros termos apresentados no Quadro 19.

Para tanto, defina $r_n(x)$ o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com $(n-2)$ posições rotuladas no sentido horário, usando monominós curvos pretos de peso 1, dominós curvos azuis de peso x e triminós curvos cinzas de peso 1, de modo que o monominó curvo preto, se aparecer, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições $1,2,3$.

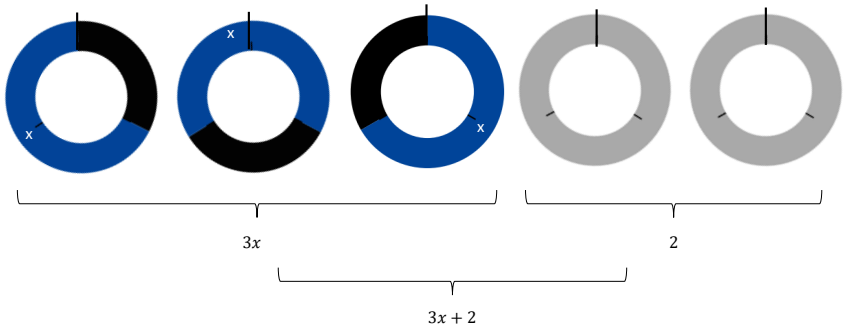
Assim, seguindo a denominação realizada na seção anterior para um n-bracelete, tem-se que esse possui uma cobertura de um n-tabuleiro circular. De forma semelhante, pode-se dizer que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. Destaca-se que essa definição pode ser estendida no caso de um triminó nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$. Os monominós curvos pretos quando aparecem, devem ser rotacionados, ocupando as três primeiras posições. Já as demais peças, dominó curvo azul e triminó curvo cinza, rotacionam-se apenas duas vezes, quando dispostas sem a presença da peça do monominó curvo preto.

Teorema 5.132. *Para $n \geqslant 5$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x $(n-2)$ com monominós curvos pretos de peso 1, dominós curvos azuis de peso x e triminós curvos cinzas de peso 1, com o monominó curvo preto aparecendo apenas uma vez, e nas três primeiras posições é dado por (Vieira, 2024): $r_n(x) = R_n(x)$, onde $r_n(x)$ é o número de $(n-2)-$ braceletes de Perrin e $R_n(x)$ é o n-ésimo termo da sequência polinomial de Perrin.*

A demonstração segue análoga à validação do Teorema 5.127.

Para melhor exemplificar, tem-se a Figura 61 para o caso do $n = 5$. Onde tem-se 5 casos para um 3-bracelete polinomial de Perrin.

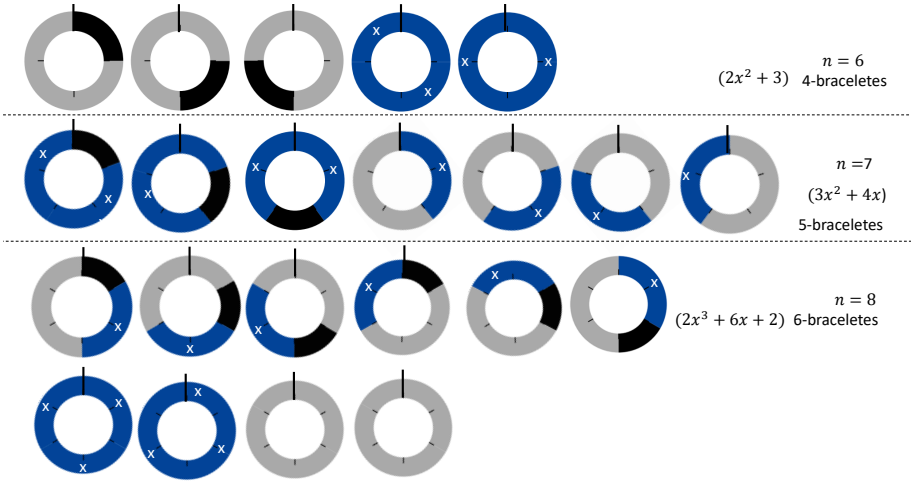
Figura 61 – Braceletes polinomiais de Perrin para o caso $n = 5$



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 62, apresenta os casos para os valores de $n = 6, 7, 8$.

Figura 62 – Braceletes polinomiais de Perrin para os casos $n = 6, 7, 8$



Fonte: Elaborado pela autora.

5.17.1 O modelo combinatório polinomial de Tetrarrin

A seguir, é examinada a extensão da sequência polinomial de Padovan, a qual é denominada polinomial de Tridovan, com referência nas definições estabelecidas por Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b), definindo assim a sequência polinomial de Tetrarrin (Vieira, 2024).

Definição 5.54. *A sequência polinomial de Tetrarrin, $R_n^3(x)$, satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$:*

$$R_n^4(x) = x^2 R_{n-2}^4(x) + xR_{n-3}^4(x) + R_{n-4}^4(x), n \geqslant 4,$$

com os termos iniciais: $R_0^4(x) = 3, R_1^4(x) = 0, R_2^4(x) = 2x^2, R_3^4(x) = 3x$.

Desse modo, tem-se o Quadro 20 com os primeiros termos da sequência de Tetrarrin polinomial.

Quadro 20 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetrarrin

n	$R_n^4(x)$
0	3
1	0
2	$2x^2$
3	$3x$
4	$2x^4+3$
5	$5x^3$
6	$2x^6+8x^2$
7	$7x^5+6x$
8	$2x^8+15x^4+3$
9	$9x^7+19x^3$

Fonte: Elaborado pela autora.

Com isso, investiga-se a relação existente entre as sequências polinomiais de Tridovan e Tetrarrin, por meio da resolução de sistemas lineares, obtendo:

$$R_{4(n+2)}(x) = -x^2 P_{3(n)}(x) + 3P_{3(n+2)}(x) \tag{5.41}$$

Outras relações podem ser estabelecidas ainda, tais como: $R_n^4(x) = 2P_{n-2}^3(x) + 3P_{n-3}^3(x) + 3P_{n-4}^3(x)$. A Equação 5.41 será utilizada para uma outra abordagem combinatória, a qual será discutida mais adiante.

A relação $R_n^4(x) = 2P_{n-2}^3(x) + 3P_{n-3}^3(x) + 3P_{n-4}^3(x)$ é utilizada para a obtenção do modelo combinatório polinomial de Tetrarrin. Doravante, tem-se a definição do modelo combinatória polinomial de Tetrarrin, realizado com referência no modelo combinatório polinomial de Tridovan (Seção 5.15.2) e na sequência polinomial de Tetrarrin.

Para tanto, defina $r_n^4(x)$ o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com $(n-2)$ posições rotuladas no sentido horário, usando monominós curvos pretos de peso 1,

dominós curvos azuis de peso x^2, triminós curvos cinzas de peso x e tetraminós curvos verdes de peso 1, de modo que o monominó curvo preto, se aparecer, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições $1,2,3$.

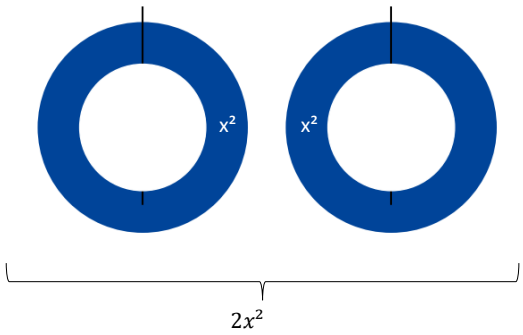
Desse modo, segue-se a denominação realizada anteriormente referente ao n-bracelete, tem-se que esse possui uma cobertura de um n-tabuleiro circular. De forma semelhante, pode-se dizer que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. Destaca-se que essa definição pode ser estendida para os casos das peças triminós curvos cinzas nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$ e tetraminós curvos verdes nas posições $(n-2,n-1,n,1)$, $(n-1,n,1,2)$ ou $(n,1,2,3)$. Os monominós curvos pretos quando aparecem, devem ser rotacionados, ocupando as três primeiras posições. Já as demais peças, dominó curvo azul, triminó curvo cinza e tetraminó curvo verde, rotacionam-se apenas duas vezes, quando dispostas sem a presença da peça do monominó curvo preto.

Teorema 5.133. *Para $n \geqslant 5$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x $(n-2)$ com monominós curvos pretos de peso 1, dominós curvos azuis de peso x^2, triminós curvos cinzas de peso x e tetraminós curvos verdes de peso 1, com o monominó curvo preto aparecendo apenas uma vez, e nas três primeiras posições é dado por: $r_n^4(x) = R_n^4(x) + R_{n-1}^4(x)$, onde $r_n^4(x)$ é o número de $n-$braceletes de Tetrarrin e $R_n^4(x)$ é o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tetrarrin.*

A demonstração segue análoga à validação do Teorema 5.134.

Exemplificando o modelo, tem-se a Figura 63 para o caso do $n = 5$. Onde tem-se 5 casos para um 3-bracelete polinomial de Tetrarrin.

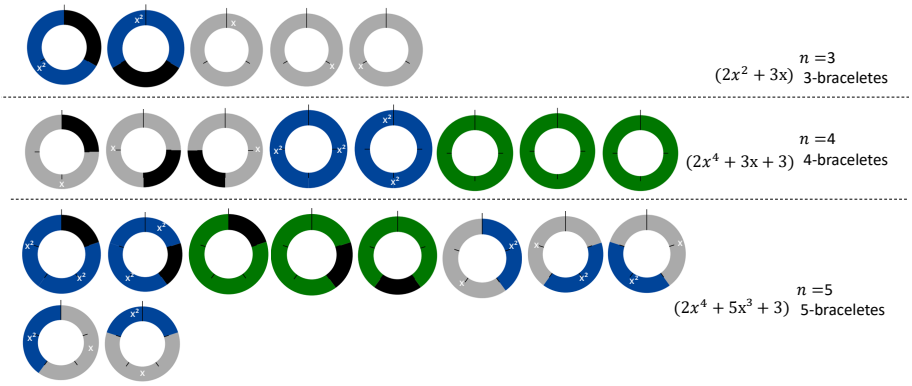
Figura 63 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin para o caso $n = 5$



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 64, apresenta os casos para os valores de $n = 6,7,8$.

Figura 64 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin para os casos $n = 6, 7, 8$



Fonte: Elaborado pela autora.

Diante disso, pode-se estabelecer o estudo do modelo combinatório polinomial de Tetrarrin, tendo como base o Teorema 5.122, o qual retrata do modelo combinatório polinomial de Tridovan.

A seguir, tem-se uma outra interpretação combinatória polinomial de Tetrarrin.

Para tanto, defina $r_n^4(x)$ o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, usando dominós curvos azuis de peso x^2, triminós curvos cinzas de peso x e tetraminós curvos verdes de peso 1.

Desse modo, segue-se a denominação realizada anteriormente referente ao n-bracelete, tem que esse possui uma cobertura de um n-tabuleiro circular. De forma semelhante, pode-se dizer que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. Destaca-se que essa definição pode ser estendida para os casos das peças triminós curvos cinzas nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$ e tetraminós curvos verdes nas posições $(n-2,n-1,n,1)$, $(n-1,n,1,2)$ ou $(n,1,2,3)$. O dominó curvo azul, rotaciona apenas duas vezes. Já o triminó curvo cinza e tetraminó curvo verde, rotacionam-se apenas três vezes.

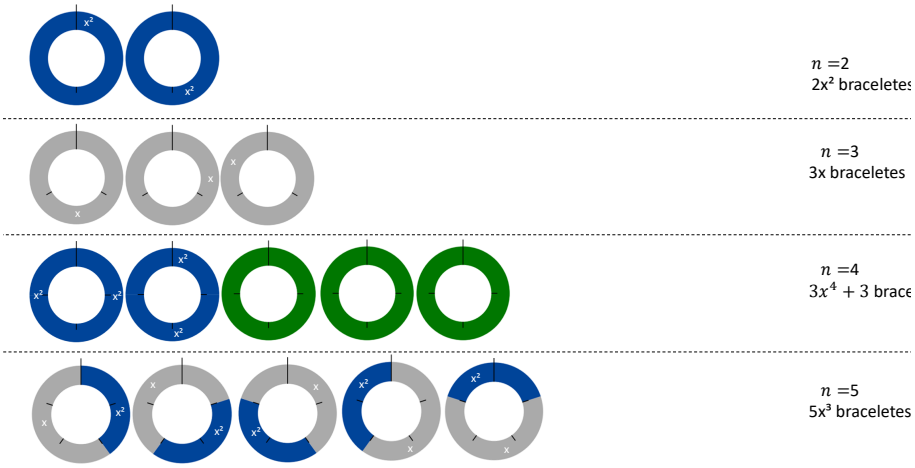
Teorema 5.134. *Para $n \geqslant 2$, os possíveis braceletes de tamanho 1 x n com dominós curvos azuis de peso x^2, triminós curvos cinzas de peso x e tetraminós curvos verdes de peso 1, é dado por (Vieira, 2024): $r_n^4(x) = R_n^4(x)$, onde $r_n^4(x)$ é o número de n− braceletes polinomiais de Tetrarrin e $R_n^4(x)$ é o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tetrarrin.*

A demonstração segue análoga à validação do Teorema 5.134.

Exemplificando o modelo, tem-se a Figura 65 para os casos de $n = 2$ até $n = 5$.

Para o caso $r_2^4(x)$, existem 2 braceletes de pesos x^2, resultando em $2x^2$ e representando o termo $R_2^4(x)$. Para o caso $r_3^4(x)$, são contabilizados 3 braceletes de pesos x, resultando em $3x$

Figura 65 – Braceletes polinomiais de Tetrarrin de $r_2^4(x)$ até $r_5^4(x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

e representando o termo $R_3^4(x)$. Para o caso $r_4^4(x)$, são contabilizados 5 braceletes, resultando em $3x^4+3$ e representando o termo $R_4^4(x)$. Para o caso $r_5^4(x)$, são contabilizados 5 braceletes, resultando em $5x^3$ e representando o termo $R_5^4(x)$.

A seguir, é realizada a aplicação do projeto de ED na formação inicial de professores, selecionando algumas tópicos matemáticos e elaboradas situações didáticas de ensino. Além disso, são analisados os possíveis comportamentos dos estudantes e comparados com os resultados aplicados durante a experimentação, de forma a validar a metodologia utilizada.

6 O CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO, A FORMAÇÃO INICIAL, A ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta seção ocorre descrição da aplicação do projeto ao longo deste trabalho, sendo discutidos os momentos de acordo com cada fase da ED em conjunto com a TSD no curso de formação inicial de professores de Matemática. De fato, é constatado o crescimento de investigações acerca da formação inicial de professores de Matemática, possuindo como foco o futuro professor (Ponte; Chapman, 2008; Oliveira; Hannula, 2008). Ainda assim, são desconsideradas perspectivas desse público em relação aos que estão aprendendo e como o estão. Por esse motivo, acredita-se ser essencial examinar a formação inicial de professores com foco na criação da identidade profissional. Nesse sentido, busca-se compreender especificamente o impacto da formação em Didática da Matemática e da experiência de ensino supervisionado.

Contudo, focar no processo de aprendizagem do professor em formação individualmente tem se mostrado uma tarefa bastante desafiadora, uma vez que muitos estudos frequentemente não abordam profundamente as necessidades individuais desse grupo (Oliveira; Hannula, 2008). A experiência prática é geralmente considerada parte integrante da preparação do professor. No entanto, tem sido discutido que os futuros professores precisam desenvolver uma postura crítica em relação às suas experiências para refletir sobre os acontecimentos de sala de aula. Caso contrário as experiências perpetuam a aprendizagem e as visões de tentativa e erro do ensino.

De fato, o interesse por essa temática tem sido fortalecido enquanto busca-se a compreensão das razões pelas quais professores com formações matemáticas e didáticas muito semelhantes e contemporâneas desenvolvem identidades e envolvimentos profissionais tão distintos dentro do mesmo programa de formação (Vieira, 2023c). A exemplo disso, tem-se os casos evidenciados por Oliveira (2004), em que não apresentavam muita relação entre a matemática que aprenderam nos cursos de matemática que frequentaram durante três anos e a forma como ensinam. Por outro lado, em programas com estruturas diferentes, observa-se o desenvolvimento de identidades e níveis de envolvimento profissional semelhantes. A partir dessa constatação, surge a busca por maneiras de aprimorar a formação profissional de futuros professores de Matemática, visando atender às suas necessidades de forma mais eficaz.

Isso posto, tem-se a aplicação da pesquisa no curso de Licenciatura em Matemática na Instituição de Ensino Superior do IFCE, *campus* Fortaleza, da URCA e UECE *Quixadá*, na componente curricular de História da Matemática e na UECE, *campus* Fortaleza na componente

curricular de Práticas de Ensino de Matemática. Assim, foi possível realizar uma investigação e estudo do processo evolutivo matemático do modelo combinatório de Padovan, por meio da transposição didática.

No entanto, desenvolveu-se um estudo do campo epistêmico-matemático abordado anteriormente, permitindo uma exploração da interpretação combinatória de Padovan perante uma análise epistemológica, cognitiva e didática no curso de formação inicial de professores de Matemática. A seguir, tem-se a discussão da concepção das situações didáticas compostas por situações-problema, fundamentadas na TSD, permitindo uma análise da metodologia e das concepções abordadas.

6.1 Concepção e análise a *priori* das situações didáticas

Durante as análises preliminares, o processo de generalização, complexificação e combinatório das sequências de Padovan e Perrin foram desenvolvidos perante a construção do campo epistêmico-matemático. Assim, a formulação das situações-problema foram realizadas, destacando-se a concepção das situações didáticas fundamentais definidas por meio da variável microdidática ocorrendo um elo entre os processos matemáticos acerca das sequências abordadas com as situações-problema propostas.

Haja vista que uma situação-problema, segundo Almouloud (2016):

> Uma situação-problema (parte de uma situação adidática) é constituída por um conjunto de questões abertas e/ou fechadas formuladas em um contexto mais ou menos matematizado, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema (Almouloud, 2016, p. 116).

Assim, uma situação-problema é dada por uma questão discursiva, contendo o seu enunciado claro e objetivo, com o viés de aplicar os propósitos matemáticos primeiramente de forma implícita e posteriormente explícita, para que esses possam ser alcançados perante a resolução de problemas.

Após o desenvolvimento do campo epistêmico-matemático desta pesquisa acerca do processo de generalização, complexificação e do modelo combinatório das sequências de Padovan e Perrin (Vieira, 2024c), ocorreu a transformação do conteúdo a ser ensinado, uma vez que tais assuntos estão presentes na área de Matemática, ausentando a área de Ensino para esses conteúdos. Desse modo, a concepção da situação didática desta pesquisa está presente na discussão dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, permitindo uma abordagem em

sala de aula por meio da teoria de ensino da TSD. Assim, são formuladas hipóteses didáticas referindo-se ao desenvolvimento indutivo dos estudantes para a interpretação combinatória das sequências de Padovan e Perrin. Com isso, é realizada uma investigação e exploração de definições e teoremas matemáticos, neste projeto, na presença do contexto de ensino de História da Matemática e baseada na ED como metodologia de pesquisa e na TSD como teoria de ensino.

A associação da epistemologia dos conceitos matemáticos desenvolvidos foram relevantes para a escolha da componente curricular de História da Matemática, permitindo uma análise da evolução algébrica das sequências de Padovan e Perrin. Dessa forma, foram selecionadas as interpretações combinatórias das sequências de Padovan e Perrin, elaborando seis situações-problema envolvendo a construção de definições matemáticas a partir dos modelos combinatórios de Padovan, Tridovan, Tetradovan, polinomial de Tridovan, polinomial de Tetradovan e Perrin. Os conteúdos selecionados deram-se pela forma de validação dada por passos indutivos, não exigindo conhecimentos matemáticos complexos.

Uma situação-problema extra foi elaborada, voltada para o público portador de deficiência visual, trabalhando assim a construção da definição da sequência de Padovan por intermétido da espiral adaptada desenvolvida em MDF.

Fundamentada na ED, tem-se a descrição das situações didáticas e seleção das variáveis didáticas, visando realizar um direcionamento para a execução desta fase, com referência nos objetivos dessa pesquisa. Desse modo, a caracterização da análise preliminar das situações didáticas deu-se pela análise dos possíveis comportamentos dos estudantes em cada fase da TSD desenvolvidas, realizando um levantamentos das hipóteses didáticas referente às situações-problema.

Assim, foram elaboradas seis situações-problema, promovendo uma investigação da interpretação combinatória das sequências de Padovan e Perrin, tendo como base as discussões e apontamentos realizados anteriormente acerca dos números dessa sequência. A seleção dos conteúdos referentes aos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, foi baseada nos conhecimentos prévios dos estudantes participantes da pesquisa, tendo como análise as componentes curriculares cursadas como pré-requisito para História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Assim, a elaboração e quantidade das situações-problema propostas foram definidas diante de planejamentos de aula, com o viés de promover discussões acerca de alguns semestres consecutivos com diversos participantes. É relevante ressaltar que as situações-problema propostas estão relacionadas à construção de definições, enfatizando as

desafios envolvidos na criação de atividades definidoras que abordam conceitos desconhecidos. Essas situações requerem uma abordagem cuidadosa, uma vez que envolvem a introdução de novos conceitos e a necessidade de garantir que sejam claros e acessíveis aos alunos. A construção de definições pode ser uma tarefa complexa, e as dificuldades associadas a ela são exploradas por meio das situações-problema apresentadas.

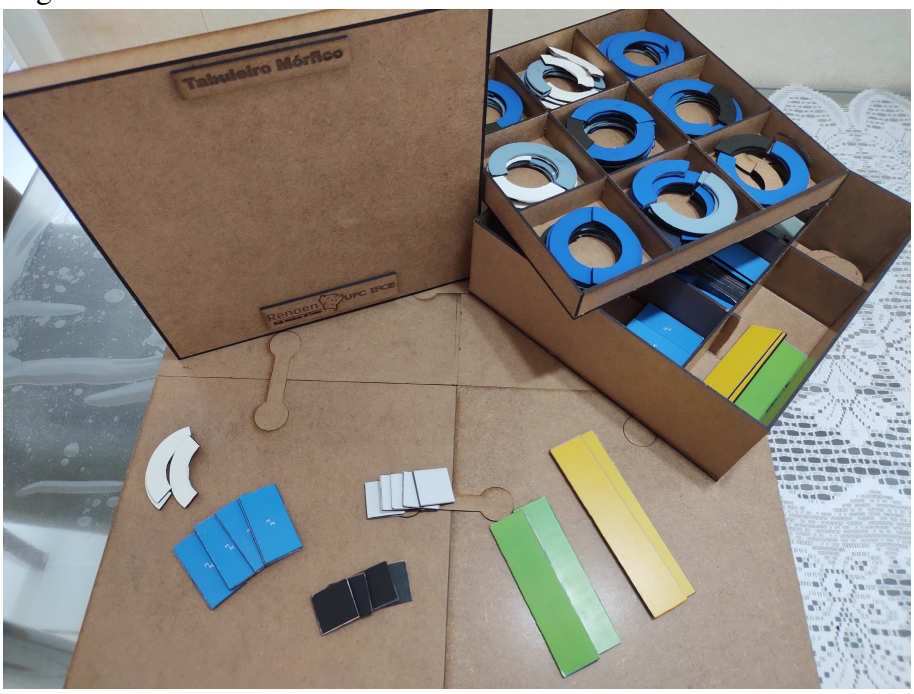
De forma a facilitar a análise das situações propostas, por apresentarem um determinado nível de complexidade devido a gama de conhecimentos necessários, foi desenvolvido o material manipulável envolvendo as sequências de Padovan e Perrin, nomeado de Tabuleiro Mórfico.

O material foi desenvolvido com o viés de facilitar o estudo dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin. Assim, a confecção desse foi dada por meio do material de MDF, com as seguintes peças ampliadas: quadrados brancos e pretos de tamanho 3 x 3 cm, representando o quadrado branco e o quadrado preto de tamanho 1 x 1; retângulos brancos e azuis de tamanho 3 x 6 cm, representando o dominó branco e o dominó azul de tamanho 1 x 2; retângulos cinzas de tamanho 3 x 9 cm, representando o triminó cinza de tamanho 1 x 3; retângulos verdes de tamanho 3 x 12 cm, representando o tetraminó verde de tamanho 1 x 4; retângulos amarelos de tamanho 3 x 15 cm, representando o pentaminó amarelo de tamanho 1 x 5; quadrado branco curvo; quadrado preto curvo; dominó cinza curvo; dominó azul curvo; e triminó cinza curvo. Existe ainda um tabuleiro onde esse apresenta a função de organizar as interpretações combinatórias, possibilitando ao usuário um ambiente de trabalho limpo e sem muitas informações para que haja uma maior concentração durante a sua utilização. A Figura 66, apresenta o material manipulável, possuindo uma caixa para guardar as peças disponibilizadas e um tabuleiro com encaixe. O produto acompanha um manual de instruções, fornecendo algumas aplicações possíveis perante a utilização do jogo em sala de aula (ver Apêndice A).

O Tabuleiro Mórfico tem esse nome atribuído aos números mórficos, uma vez que esses números possuem como soluções o número de ouro e o número de plástico. O número de plástico e o número de ouro estão presentes nas sequências de Fibonacci, Lucas, Padovan e Perrin. Logo, como o Tabuleiro Mórfico permite uma abordagem combinatória das sequências de Fibonacci, Lucas, Padovan e Perrin, é possível estabelecer essa denominação em homenagem aos números dessas sequências correspondentes.

A produção do material teve a colaboração do Fab Lab, localizado no Centro de Formação Amado Maker na Universidade Federal do Ceará (UFC), em Fortaleza. O espaço faz

Figura 66 – Tabuleiro Mórfico



Fonte: Acervo da pesquisa.

parte do Centro de Excelência em Políticas Educacionais da UFC e possui o viés de implementar a tecnologia educacional e promover formações continuadas de docentes. Além disso, o centro visa formar técnicos de laboratórios *makers* para atuarem dentro das instituições de ensino com a cultura Maker. Além disso, ressalta o apoio dos técnicos para operar nas máquinas disponibilizadas no ambiente, orferendo o suporte necessário para a execução do projeto.

Inicialmente foi realizado o *design* do projeto do material manipulável no *software* *DueStudio*, para posteriormente ocorrer a pintura e colagem dos adesivos nas peças. O tabuleiro foi pensado numa estrutura desmontável, a fim de facilitar o transporte do material.

De fato, o Tabuleiro Mórfico permite que o usuário realize um estudo das sequências de Fibonacci, Lucas, Perrin, Padovan, Tridovan e Tetradovan. Além disso, é possível investigar as sequências polinomiais de Tridovan e Tetradovan, permitindo uma evolução no processo de estudo dessas sequências. Tão logo, o material alcança a realização de um estudo combinatório dessas sequências, integrando o conteúdo de sequências numéricas perante uma visualização e abordagem combinatória dos números dessas sequências, tornando-se assim um facilitador no processo de ensino.

Salienta-se que foi desenvolvida uma adaptação do Tabuleiro no *software* GeoGebra (ver Apêndice B), abrangendo a sequência de Padovan e suas extensões. De fato, optou-se pelo Tabuleiro Mórfico por incluir também as sequências em suas formas polinomiais e as sequências

de Perrin e de Lucas, sendo então escolhido o material concreto devido à sua abrangência de sequências para aplicação em sala de aula.

Uma adaptação do Tabuleiro foi desenvolvido no *software* GeoGebra, contemplando a sequência de Padovan e suas extensões. Para tanto, como o Tabuleiro Mórfico engloba também as sequências polinomiais e as sequências de Perrin e Lucas, foi selecionado o material concreto por trabalhar com mais sequências, para efeitos de aplicação em sala de aula.

Além disso, a visualização com o material matipulável possui um viés de fortalecer a ligação entre a imagem do conceito e a definição. Conforme o estudo de Larsen e Zandieh (2008) é importante obter uma noção da imagem conceitual e da definição, uma vez que essa transição proporciona uma progressão do pragmático para o teórico (do heurístico para o axiomático), apoiando os estudantes na atividade de construção de definição.

Dando início à construção da sequência didática para o ensino das sequências de Padovan e Perrin, tem-se a investigação do modelo combinatório dos números dessas sequências, perante o estudo de definições e teoremas matemáticos realizados na construção do campo epistêmico-matemático, conforme realizado por (Vieira, 2023c).

Durante a proposta das situações-problema 1, 2, 3, 4, 5 e 6 serão analisadas as variáveis microdidáticas referentes os conteúdos desenvolvidos no campo epistêmico-matemático, permitindo uma análise dos possíveis comportamentos dos estudantes.

6.2 A experimentação

Nesta subseção é realizada uma análise do experimento. Inicialmente é abordada a apresentação dos participantes da pesquisa, a estruturação do ambiente desenvolvido para as atividades e uma explicação da aplicação. Em seguida, ocorre à apresentação das atividades diante da análise a *posteriori*.

A fase da experimentação foi realizada nas instituições de ensino superior: IFCE *campus* Fortaleza, URCA e UECE *campi* Fortaleza e Quixadá, a fim de diversificar e aumentar a gama de respostas para obter uma validação estatisticamente mais significativa, ou seja, uma invariância dos dados mais fiel à variância populacional. No IFCE, *campus* Fortaleza, a aplicação aconteceu no curso de Licenciatura em Matemática. A componente curricular observada foi de História da Matemática, sendo essa obrigatória no 6º semestre e contendo 11 alunos participantes conforme o semestre (ver Quadro 21). Na URCA, *campus* CRAJUBAR – Juazeiro do Norte, a aplicação também aconteceu na componente curricular de História da Matemática, sendo essa ofertada no 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, contando com a participação de

10 alunos. Na UECE, *campus* Fortaleza, seu desenvolvimento ocorreu na componente curricular de Práticas de Ensino de Matemática, obrigatória no 5º semestre. Na UECE, *campus* Quixadá, a experimentação aconteceu na componente curricular de História da Matemática, obrigatória no 6º semestre contendo 19 alunos participantes.

Todavia, a aplicação aconteceu durante quatro semanas, com 8 aulas de duração de 2h/a cada aula e em cada semestre. Durante todas as experimentações, não foram identificados participantes portadores de deficiência visual, bem como nenhuma apresentação de laudo de outra deficiência.

Quadro 21 – Demonstrativo de alunos por semestre

Semestre	**Quantidade de alunos participantes**
2023.1	5 alunos
2023.2	6 alunos

Fonte: Elaborado pela autora.

O Quadro 22 ilustra o planejamento das aulas e como as atividades foram desenvolvidas ao longo do experimento de um modo geral, ou seja, em todas as instituições de ensino aplicadas, sendo essas realizadas durante as aulas da componente curricular.

No primeiro encontro houve uma revisão da sequência de Fibonacci, já estudada com o professor da componente curricular anteriormente, resgatando os aspectos históricos e evolutivos desses números. Com isso, foram discutidos os avanços matemáticos da sequência de Fibonacci, apresentando um estudo da noção de tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamentos, bem como do modelo combinatório de Fibonacci.

No segundo encontro foi apresentado o tabuleiro mórfico, apresentando novos ladrilhos para que os estudantes construíssem a definição da nova sequência formada, com referência na sequência de Fibonacci e seu modelo combinatório. Tão logo, foi proposta a situação-problema 1 com a construção da definição da sequência de Padovan. O terceiro encontro iniciou com a institucionalização da atividade anterior, e apresentando a nova situação-problema proposta (situação-problema 2). O objetivo da atividade é a construção da definição da sequência de Tridovan, sendo essa uma extensão da sequência de Padovan. O quarto encontro teve início com a institucionalização da situação-problema 2, e seguindo com a proposta da situação-problema 3, envolvendo a construção da definição da sequência polinomial de Tridovan. O quinto encontro iniciou com a institucionalização do encontro anterior e

Quadro 22 – Planejamento das atividades

Encontro	Assunto	Atividade
1	Sequência de Fibonacci: aspectos históricos e evolutivos	* Estudo da sequência de Fibonacci; * Noção de tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamentos; * Modelo combinatório de Fibonacci.
2	Sequência de Padovan	* Apresentação do tabuleiro mórfico; * Atividade sobre a construção de definição da sequência de Padovan (situação-problema 1).
3	Sequência de Tridovan	* Institucionalização; * Atividade sobre a construção de definição da sequência de Tridovan (situação-problema 2).
4	Sequência polinomial de Tridovan	* Institucionalização; * Atividade sobre a construção de definição da sequência polinomial de Tridovan (situação-problema 3).
5	Sequência de Tetradovan	* Institucionalização; * Atividade sobre a construção de definição da sequência de Tetradovan (situação-problema 4).
6	Sequência polinomial de Tetradovan	* Institucionalização; * Atividade sobre a construção de definição da sequência polinomial de Tetradovan (situação-problema 5).
7	Sequência de Perrin	* Institucionalização; * Estudo da sequência de Perrin; * Atividade sobre o modelo combinatório de Perrin (situação-problema 6).
8	Entrevista	* Institucionalização; * Questionário.

Fonte: Elaborado pela autora.

apresentada a situação-problema 4, tendo como objetivo a construção da definição da sequência de Tetradovan. O sexto encontro foi introduzido com a institucionalização da atividade anterior e seguindo com a proposta da situação-problema 5, permitindo um estudo da construção da definição da sequência polinomial de Tetradovan. Resumidamente, do segundo encontro até o sexto, foi possível estudar os modelos combinatórios de Padovan, Tridovan e Tetradovan e suas formas polinomiais, construindo as respectivas definições dessas sequências.

O sétimo encontro teve início com a institucionalização da atividade anterior e apresentada sequência de Perrin. Com referência nisso, foram discutidos os aspectos matemáticos semelhantes entre as sequências de Padovan e Perrin, para apresentar a interpretação combinatória de Perrin perante a situação-problema 6. O oitavo e último encontro permitiu uma institucionalização da atividade anterior e a realização de uma entrevista, no formato de questionário, para finalizar a aplicação das situações didáticas.

A etapa de institucionalização foi conduzida no início da aula subsequente, com o

propósito de revisar o conteúdo abordado na aula anterior e proporcionar aos estudantes uma oportunidade de reflexão sobre a atividade realizada. Isso permitiu que a aula começasse com uma breve discussão do que ocorreu na sessão anterior, com a pesquisadora/docente destacando e ampliando tanto os acertos quanto os equívocos dos estudantes.

Ressalta-se que as aulas foram aplicadas com referência na TSD, sendo elaborada uma situação didática de ensino e por meio de lista de exercício e material manipulável. Para tanto, ocorreram discussões entre os participantes, visando elaborar estratégias de resolução descritas no quadro e material (jogo).

Nesse momento ocorre o estabelecimento do contrato didático, onde são geradas as expectativas do docente em relação aos sujeitos, e deles em relação ao docente. Assim, são incluídas as relações do saber e a maneira por meio da qual o saber é efetivado e tratado por ambos.

Esta etapa é caracterizada ainda por aplicar toda a estrutura já organizada até então, observando as situações de aprendizagem e envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática, não seguindo a dinâmica de uma aula tradicional ou comum (Brousseau, 2002). Assim, a organização da aula, neste período, deve ser fundamentada na TSD e voltada para a coleta de dados dos alunos, para que possa assim analisar o ensino-aprendizagem.

Durante a experimentação, o docente deverá colocar em prática a sequência didática elaborada na concepção e análise a priori, observando o momento da resolução das atividades propostas pelos estudantes, para serem então analisadas posteriormente na próxima fase.

Inicialmente ocorreu um estudo de sequências numéricas recorrentes, apresentando a sequência de Fibonacci e sua abordagem combinatória via ladrilhamentos. Desse modo, uma discussão acerca da noção de tabuleiro foi realizada, permitindo que os sujeitos obtivessem um embasamento para a investigação seguinte.

A experimentação foi dividida em grupos (ver Quadro 23), sendo o Grupo 1 referente à aplicação no IFCE, Grupo 2 referente à aplicação na URCA, Grupo 3 referente à aplicação na UECE *campus* Fortaleza e Grupo 4 para a aplicação na UECE *campus* Quixadá. O nome de cada um dos participantes foi alterado pelos nomenclaturas: A1, A2, A3, A4, …, A11 para os participantes do Grupo 1; B1, B2, B3, B4, …, B11 para os participantes do Grupo 2; C1, C2, C3, C4, …, C8 para os participantes do Grupo 3 e D1, D2, D3, D4, …, D11 para os participantes do Grupo 4.

Para a coleta dos dados foram realizados procedimentos de gravação de áudio,

Quadro 23 – Grupos

Grupos	Instituições de Ensino Superior	Quantidade de Alunos	Nomenclatura dos estudantes
Grupo 1	IFCE	11	A1, A2, A3, A4, ..., A11
Grupo 2	URCA	10	B1, B2, B3, B4, ..., B10
Grupo 3	UECE *Campus* Fortaleza	8	C1, C2, C3, C4, ..., C8
Grupo 4	UECE *Campus* Quixadá	19	D1, D2, D3, D4, ..., D19

Fonte: Elaborado pela autora.

registros fotográficos durante as discussões das aulas em análise. Destaca-se que todos os registros foram permitidos pelos estudantes, assinando um termo de consentimento livre e esclarecido.

6.3 Análise a *posteriori* e validação interna e externa

Durante a vivência é importante destacar possíveis correções e ajustes locais, sendo indicados então apenas alguns elementos que se consideram mais relevantes nesta pesquisa durante o processo de experimentação. Sobretudo, ressalta-se que após a experimentação, existem um retorno para a análise a *posteriori*, avaliando e analisando os resultados obtidos e explorando os dados para que houvesse uma contribuição dos conhecimentos didáticos durante a transmissão do conteúdo (Vieira, 2024c).

Após a análise a *posteriori*, é importante que haja uma validação dos elementos utilizados na fase de experimentação da ED, comparando os resultados discutidos pelos discentes, levantando possíveis questionamentos e analisando a evolução ou não da engenharia sugerida. A situação-problema discutida deve ser considerada, como variável micro didática, que segundo Almouloud (2010) essas são "relativas à organização local da sequência, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase da experimentação".

As situações-problema propostas envolvem a construção de definições que estão intrinsecamente ligadas à formação de conceitos. Isso possibilita a ativação do processo dialético, que engloba tanto a elaboração das definições quanto a construção dos conceitos. Dessa forma, os alunos são incentivados a explorar a relação de recorrência das sequências estudadas e, com o auxílio de material manipulável, a construir definições para essas sequências, incluindo suas características específicas. Isso impulsiona a formação de conceitos por meio de uma abordagem prática e participativa, em que segundo Lakatos (1961) "um procedimento de definição é um procedimento de formação de conceito".

A aplicação do Grupo 1 ocorreu no IFCE, *campus* Fortaleza, do Grupo 2 na URCA, *campus* CRAJUBAR - Juazeiro do Norte e do Grupo 3 na UECE, *campus* Fortaleza e do Grupo 4 na UECE, *campus* Quixadá, todos para o curso de Licenciatura em Matemática, sendo os

Grupos 1, 2 e 4 na componente curricular de História da Matemática e o Grupo 3 na componente curricular de Práticas de Ensino de Matemática.

A aplicação iniciou com a distribuição da lista de exercícios e regras para o manuseio do material manipulável. A validação aconteceu com a elaboração de uma situação didática, por meio de atividade proposta aos estudantes, com o objetivo de instigar o lado investigativo do participante, propondo os conhecimentos necessários para a resolução e construção de definição. Diante disso, a situação-problema permitiu a compreensão da definição da recorrência da sequência de Padovan via a sua abordagem combinatória, sendo discutida de acordo com a variável didática. Destaca-se que a validação ocorreu de forma interna e externa, ocorrendo a contribuição de professores para a aplicação em determinados grupos da experimentação.

Na fase de validação interna, a experimentação foi conduzida pela pesquisadora no IFCE *campus* Fortaleza. Para a validação externa, a coleta de dados foi realizada por meio da aplicação das questões propostas nas instituições de ensino superior URCA e UECE. Este processo de validação é fundamental para assegurar a consistência e a confiabilidade dos resultados obtidos, uma vez que envolve diferentes avaliadores independentes. Isso contribui para garantir que os dados coletados sejam representativos e válidos, fortalecendo assim a qualidade da pesquisa.

6.4 Análise das atividades

A seguir será realizada uma análise detalhada das atividades, sendo essas denominadas de situações-problema, divididas em seis e voltadas para a construção de definições das sequências de Padovan, suas extensões e sequência de Perrin. Assim, as atividades propostas tem os seguintes objetivos:

- Situação-problema 1 - construção da definição da sequência de Padovan por meio do tabuleiro mórfico;
- Situação-problema 2 - construção da definição da sequência de Tridovan por meio do tabuleiro mórfico;
- Situação-problema 3 - construção da definição da sequência polinomial de Tridovan por meio do tabuleiro mórfico;
- Situação-problema 4 - construção da definição da sequência de Tetradovan por meio do tabuleiro mórfico;
- Situação-problema 5 - construção da definição da sequência polinomial de Tetradovan por meio do tabuleiro mórfico;

– Situação-problema 6 - estudo da sequência de Perrin por meio do tabuleiro mórfico.

As atividades em que tratam da construção de definições, apresentam-se com os operadores de Lakatos (1976): definição ingênua, definição zero e definições geradas por provas. Assim, as definições ingênuas são presentes no início das atividades, quando os estudantes estão aprofundando a investigação. Em seguida, a definição ingênua é pausada, por conta da ausência de provas e iniciada a definição zero, onde são iniciadas as construções de conceitos que fazem parte para agregar ao processo de construção dessa definição em estudo. Por fim, ocorre a definição gerada por provas, em que são demonstradas as ideias e validadas matematicamente.

Esses operadores podem ser verificados juntamente com as fases da TSD, onde a definição ingênua é presente na fase da ação; definição zero na fase da formalização e definição gerada por prova na fase da validação.

Já a concepção de Popper (1985), foi dada por meio da evolução das razões ligadas ao desenvolvimento da teoria abordada. E por fim, a concepção de Aristoteles (1965) deu-se pelo desenvolvimento dos critérios lógicos, com o aspecto recorrente da não redundância de uma definição, proporcionando assim uma base lógica para o entendimento dos conceitos.

Diante disso, são realizadas as análises a *priori* e a *posteriori* de cada uma das situações didáticas, permitindo uma discussão acerca da aplicação das atividades propostas aos estudantes participantes. Assim, permite-se compreender a abordagem combinatória para a sequência de Padovan, suas extensões e formas polinomiais e sequência de Perrin, fundamentada na TSD, na construção de definições envolvendo o conhecimento epistemológico-matemático dos modelos generalizados e combinatórios dessas sequências, mediante a elaboração das situações-problema em sala de aula, finalizando o primeiro objetivo específico.

6.4.1 Situação-problema 1

Para a situação-problema 1, são analisadas as seguintes variáveis didáticas:

– noção de tabuleiro (ver Definição 5.43);
– modelo combinatório de Fibonacci (ver Teorema 5.112);
– regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Padovan (ver Definição 5.13);
– modelo combinatório de Padovan (ver Teorema 5.113);
– construção de definições;

Vale destacar que Vieira, Alves e Catarino (2023c) realizaram uma aplicação pré-teste

da presente atividade, contribuindo para as dicussões e análises dos resultados com a presença do tabuleiro mórfico.

Situação-problema 1: Com referência na noção de tabuleiro, ladrilhos, ladrilhamentos, sequência de Fibonacci (sua recorrência e história) e sua interpretação combinatória (Benjamin; Quinn, 2003b), tem-se à disposição novas peças, sendo essas: um triminó cinza, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó azul 1 x 2, qualquer ladrilho é formado pela disposição das formas definidas, tal que o quadrado preto se aparecer ele figura a primeira casa. Desse modo, quantas formas de ladrilhar pode-se obter para um tabuleiro de tamanho 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Esses números formam alguma sequência numérica? Se sim, qual a sua fórmula de recorrência?

6.4.1.1 Análise a priori

Para a atividade proposta, os estudantes deverão discutir as definições seguintes:

- Definição 1. Sequência Numérica (ver Definição 4.2);
- Definição 2. Sequência de Fibonacci (ver Exemplo 2);
- Definição 3. Noção de tabuleiro (ver Definição 5.43);
- Definição 4. Modelo combinatório de Fibonacci (ver Teorema 5.112);
- Definição 5. Regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Padovan (ver Definição 5.13);
- Definição 6. Sequência de Padovan (ver Definição 4.5);
- Definição 7. Modelo combinatório de Padovan (ver Teorema 5.113).

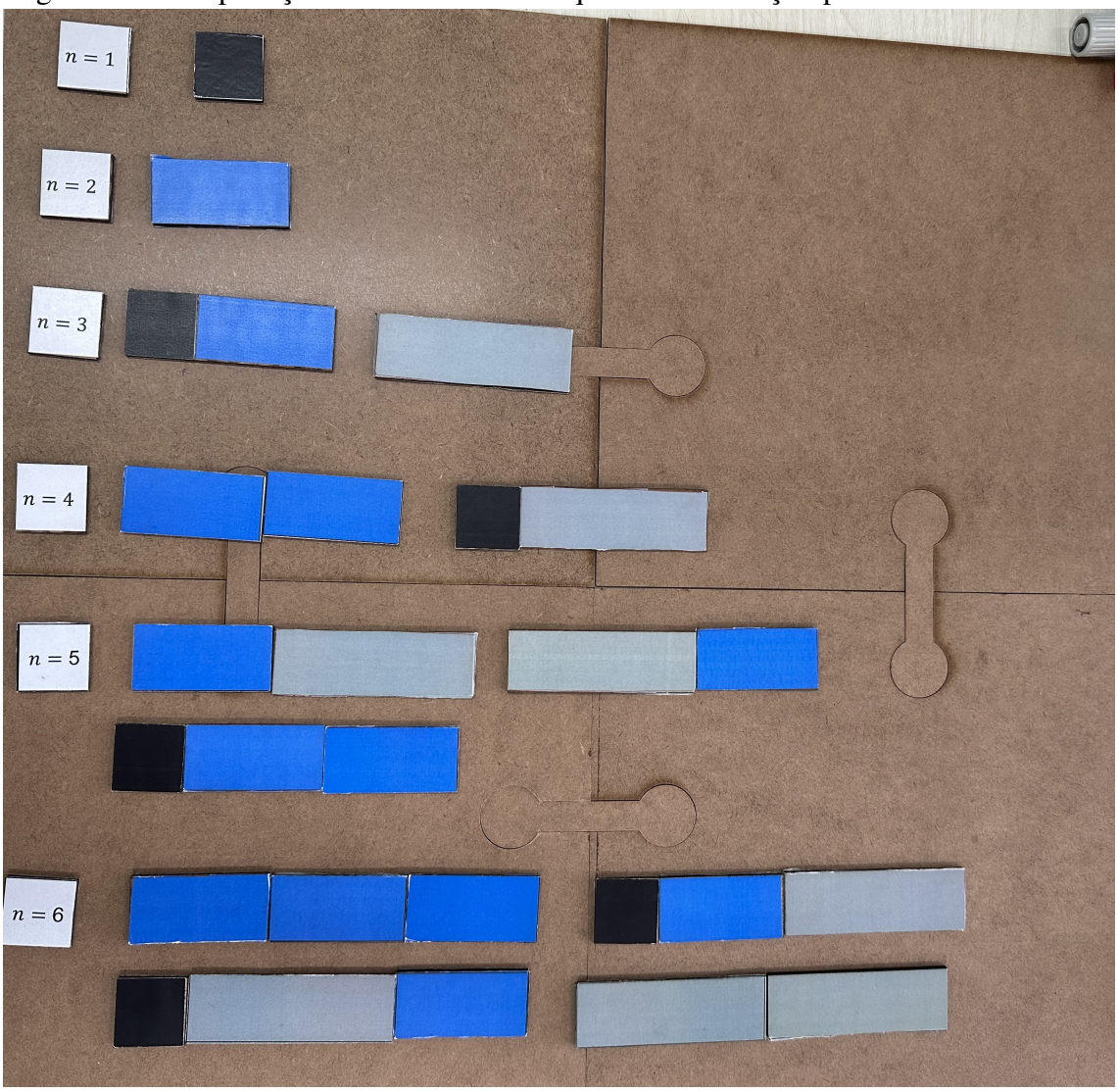
Fase da ação: os estudantes deverão observar os ladrilhamentos de Fibonacci, permitindo compreender a sua construção. Assim, busca-se a apropriação do material manipulável, de forma a compreender a interpretação combinatória para a sequência de Fibonacci com as regras e peças estabelecidas. Nesse momento os estudantes deverão investigar a construção das Definições 1, 2, 3 e 4. Diante dessa situação-problema, os possíveis erros e dificuldades estimados dos estudantes, serão em relação às regras e configurações das peças, destacando a inserção do quadrado preto e o tamanho do tabuleiro, denominado esse erro e/ou dificuldade de E_1. Para que essa dificuldade seja sanada, os estudantes deverão compreender que o quadrado preto pode ser inserido somente uma única vez e no início do ladrilho, ressaltando que o mesmo pode não aparecer nos demais ladrilhos disponíveis.

Fase da formulação: busca-se que os sujeitos possam manipular as peças disponíveis,

seguindo as regras definidas, para assim alcançarem montar os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6 ($n = 1,2,3,4,5$ e 6). Para o tabuleiro de tamanho 1 x 1, é possível obter apenas uma forma de ladrilhar, sendo esta com a presença do quadrado preto. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 2, é possível obter apenas uma forma de ladrilhar, sendo esta com a presença do dominó azul. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 3, é possível obter duas formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com o dominó azul e, um triminó cinza. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 4, é possível obter duas formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com o triminó cinza e, dois dominós azuis concatenados. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 5, é possível obter três formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com dois dominós azuis; um triminó cinza concatenado com dois dominós azuis e, dois dominós azuis concatenado com um triminó cinza. A Figura 67 representa a construção desses casos citados, obtendo os termos oriundos de uma possível sequência. Assim, observa-se a presença dos seguintes números pertencentes à sequência numérica: 1, 1, 2, 2, 3 e 4. Nessa fase os estudantes abordam a Definição 5 e, investigam a Definição 4 para que possam construir as Definições 6 e 7. Os possíveis erros e dificuldades previstos, são em relação à construção dos ladrilhamentos, atentando-se para as regras e os números que foram aparecendo de acordo com cada valor de n, denominado esse erro e/ou dificuldade de E_2. Desse modo, os estudantes deverão observar a quantidade máxima de ladrilhamentos possíveis, não podendo ignorar e/ou esquecer nenhum caso, diante dessa interpretação combinatória. É importante ter cuidado ainda em relação a outro possível erro e/ou difilculdade, uma vez que os estudantes poderão equivocar-se e pensar que os ladrilhos ocorrem obtendo o termo adiantado da sequência, assim como para Fibonacci (E_3).

Fase da validação: nesta fase os estudantes deverão observar os termos obtidos e assim identificarem a regra de recorrência dessa sequência numérica. Tão logo, é possível determinarem que o próximo termo (sétimo termo) terá valor 5. Esse valor é oriundo da soma do quinto termo com o quarto termo, ignorando o sexto termo. Assim, pode-se estabelecer a recorrência para a sequência estudada (S_n) como sendo: $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$, para $n \geqslant 3$, necessitando dos valores iniciais $S_0 = S_1 = S_2 = 1$. É importante notar que até o presente momento o professor não deve interferir na atividade, não apresentando a sequência e nem nomeando-a. Com isso, os estudantes poderão atribuir qualquer nome para a sequência investigada. É o momento em que os sujeitos conseguem validar a Definição 7. Para essa fase, tem-se a previsão de possíveis erros e/ou difilculdades, sendo esses referentes à recorrência

Figura 67 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

da sequência estudada, não visualizando o salto existente entre o termo anterior imediato, denominado de E_4. Para isso, os estudantes deverão observar os termos presentes na sequência, com o viés de obter o termo seguinte, de acordo com os números que obtiveram na construção dos ladrilhamentos.

Fase da institucionalização: após as discussões realizadas, o professor deve retomar a posição da atividade, verificando as inquietações apresentadas pelos estudantes. É importante que nesse momento ocorra uma discussão acerca dos argumentos dos sujeitos, identificando também os raciocínios que aconteceram de modo errôneo. Deve ocorrer a institucionalização da sequência de Padovan e sua interpretação combinatória para os casos citados ($n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6). Com isso, o professor deve apresentar a sequência de Padovan, nomeando a sequência numérica estudada e investigada pelos estudantes por meio do material manipulável e sua forma combinatória. De fato,

tem-se a construção da definição da sequência de Padovan, possibilitando aos estudantes obterem os seus respectivos termos, por meio da abordagem combinatória. Além disso, o professor deverá demonstrar o teorema referente à interpretação combinatória de Padovan, permitindo uma visualização dessa abordagem combinatória.

De fato, pode-se observar que segundo Lakatos (1980), ocorreu então o processo de formação de conceitos, apresentando padrões de raciocínio matemático, fundamentado em distintas concepções epistemológicas e filosóficas.

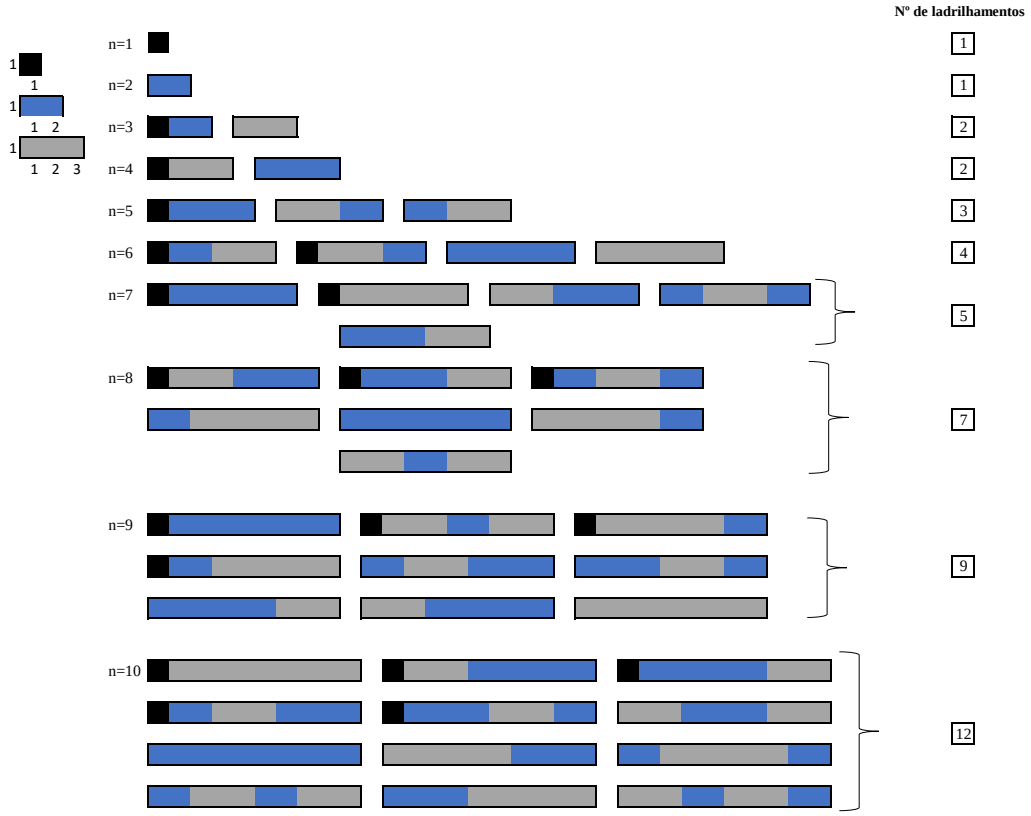
Com isso, tem-se que a sequência de Padovan é uma sequência numérica de terceira ordem, descobertos pela primeira vez em 1924 pelo estudante de arquitetura francês Gérard Cordonnier. Remodelado de forma independente pelo monge-arquiteto francês Dom Hans Van der Laan (1904-1991), tem-se que os números Padovan possuem associação histórica com Cordonnier, Padovan, Van Der Laan e Stewart, sendo conhecidos também por sequência de Cordonnier. Richard Padovan atribuiu em seu livro a sequência como sendo de Van der Laan (Padovan, 2002). A sua recorrência é dada pela relação de recorrência: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, onde $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Em relação aos ladrilhamentos de Padovan, tem-se que para $n \geqslant 0$, os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul e triminó cinza é dado por: $p_n = P_n$, sendo p_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan (Vieira, 2022a) (ver Figura 68).

O estudo de definições zero pode não ser percebido pelos estudantes como definidor de noções provisórias, mas sim como ideias surgidas durante a resolução da atividade proposta. Observa-se que realizar tal síntese também permite estabelecer as concepções de estudantes sobre a definição matemática, além de avaliar evoluções durante experimentos subsequentes, envolvendo outros conceitos matemáticos e tipos de problemas. Tal abordagem consiste na construção de uma situação fundamental em matemática. É possível ainda identificar as concepções dos estudantes sobre o conceito matemático em questão e torná-los aptos a compreender sobre os problemas matemáticos propostos.

Ressalta-se que a situação-problema 1 retrata a construção da definição da sequência de Padovan, identificando os seus termos mediante a manipulação do material, com as respectivas peças e regras estabelecidas. Assim, tem-se que a partir da interpretração combinatória para os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6, os estudantes podem compreender a construção das formas de ladrilhar, identificando o caso do tabuleiro de tamanho n.

Figura 68 – Ladrilhamento de Padovan



Fonte: Elaborado pela autora.

6.4.1.2 Análise a posteriori

A situação-problema 1 tem o objetivo de construir a definição da sequência de Padovan, resgatando a abordagem combinatória de Fibonacci e a noção de tabuleiro. Assim, foi realizada uma discussão acerca do assunto de sequências numéricas e recorrentes, observando a dificuldade dos estudantes em estabelecer a recorrência de determinadas sequências.

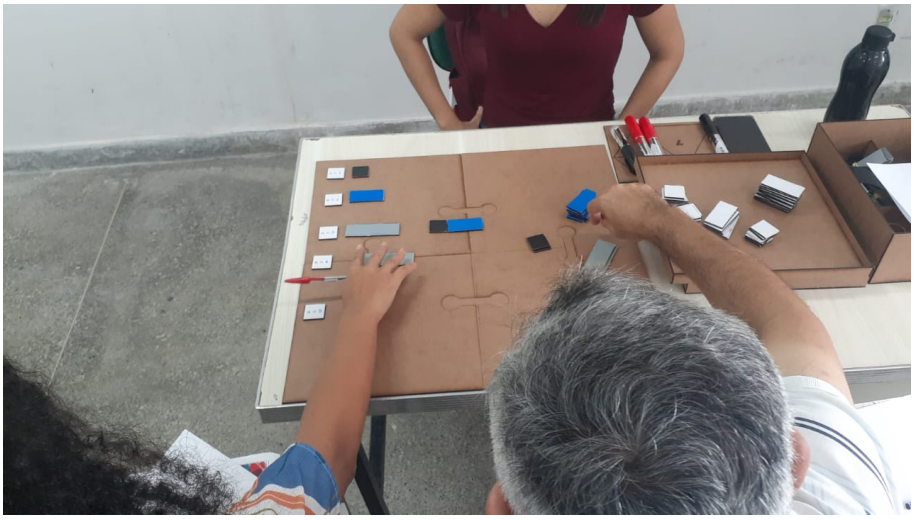
A seguir, realizaram-se observações e discussões embasadas nos registros acumulados durante as aplicações, concentrando-se na ED e na TSD, consolidando, dessa forma, a validação desta pesquisa.

Com isso, foram discutidos os aspectos históricos e evolutivos da sequência de Fibonacci, apresentado o material manipulável, as regras para a construção do modelo combinatório de Fibonacci e o modelo combinatório desses números. Em seguida, foram apresentadas as regras de construção e as peças disponíveis para uma nova sequência.

Iniciando a análise para o Grupo 1, tem-se a Figura 69 retratando a fase da ação

dos estudantes A1, A2 e A3, tentando construir o modelo combinatório da nova sequência em estudo, caracterizando como fase da ação por Brousseau (1986) como sendo qualquer processo de cálculo que resulte em uma estratégia específica. Dentro de uma situação didática, esse processo é capaz de gerar estados de conhecimento que, por sua vez, permitem prever caminhos para uma argumentação lógica dentro do contexto proposto. Assim, os estudantes vão criando estratégias e ensinando para si mesmo a maneira de resolver a atividade proposta.

Figura 69 – Fase da ação situação-problema 1 pelo Grupo 1



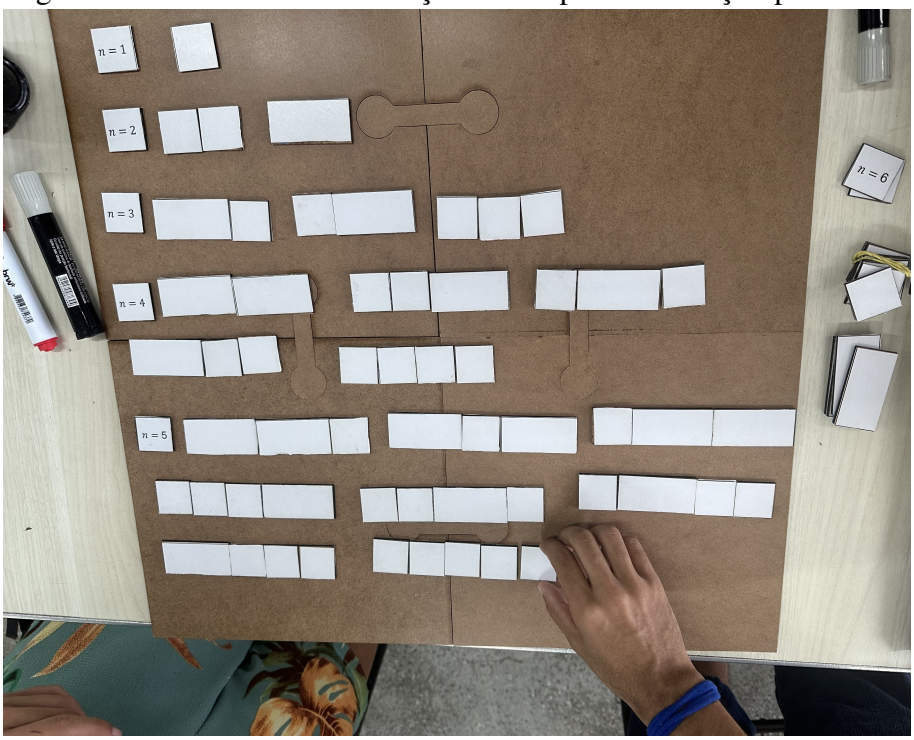
Fonte: Acervo da pesquisa.

É importante destacar que nessa fase, os alunos compreenderam a regra do quadrado preto, porém o Aluno A2 não havia compreendido bem a noção de tabuleiro, acarretando na construção de ladrilhamentos desordenados, ou seja, com valores de n distintos do tamanho da peça final. Com isso, é possível evidenciar a ocorrência do erro E_1 que havia sido previsto na análise a *priori*. Para a resolução desse erro, o Aluno A3 explicou a construção dos tabuleiros de tamanhos 1 x n, permitindo uma compreensão do estudante. Com isso, percebe-se que as discussões entre os estudantes são de grande valia, possibilitando uma melhor compreensão do conteúdo abordado. Interessante ainda mencionar que os estudantes não conheciam as interpretações combinatórias das sequências, bem como a sequência de Fibonacci.

Ainda na fase da ação do Grupo 1, os alunos A6 e A7 optaram por reconstruir o modelo combinatório de Fibonacci, com o objetivo de verificar se haviam compreendido as regras e definições apresentadas. A Figura 70 retrata o início da fase da ação pelos estudantes.

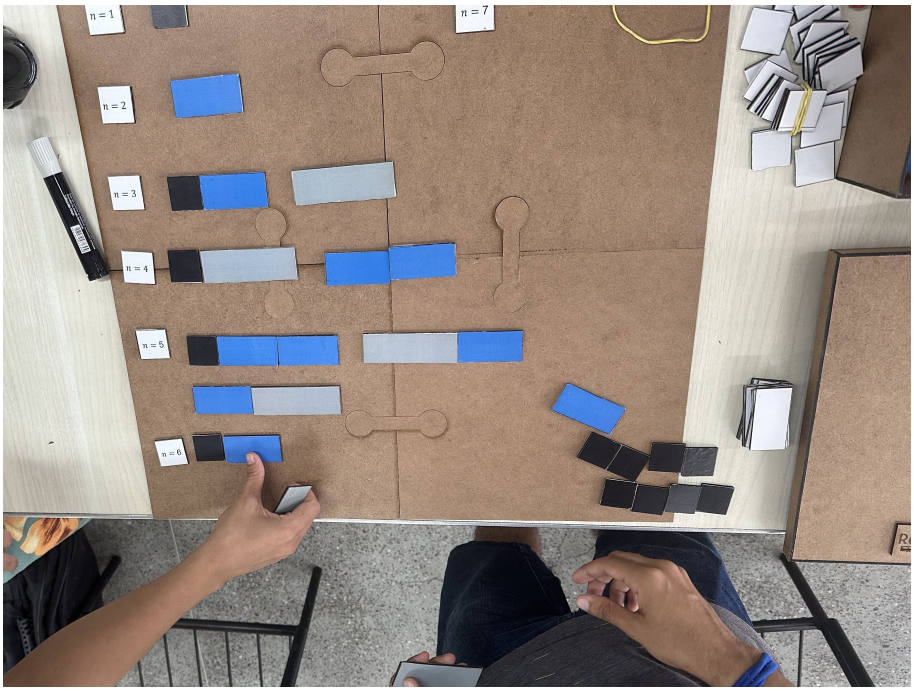
Em seguida, os estudantes compreenderam as regras e iniciaram o manuseio da interpretação combinatória com as novas peças disponibilizadas. A Figura 71 permite a visualização da fase da ação pelos estudantes A8 e A9.

Figura 70 – Iniciando a fase da ação no Grupo 1 da situação-problema 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 71 – Fase da ação no Grupo 1 da situação-problema 1 pelos estudantes A8 e A9

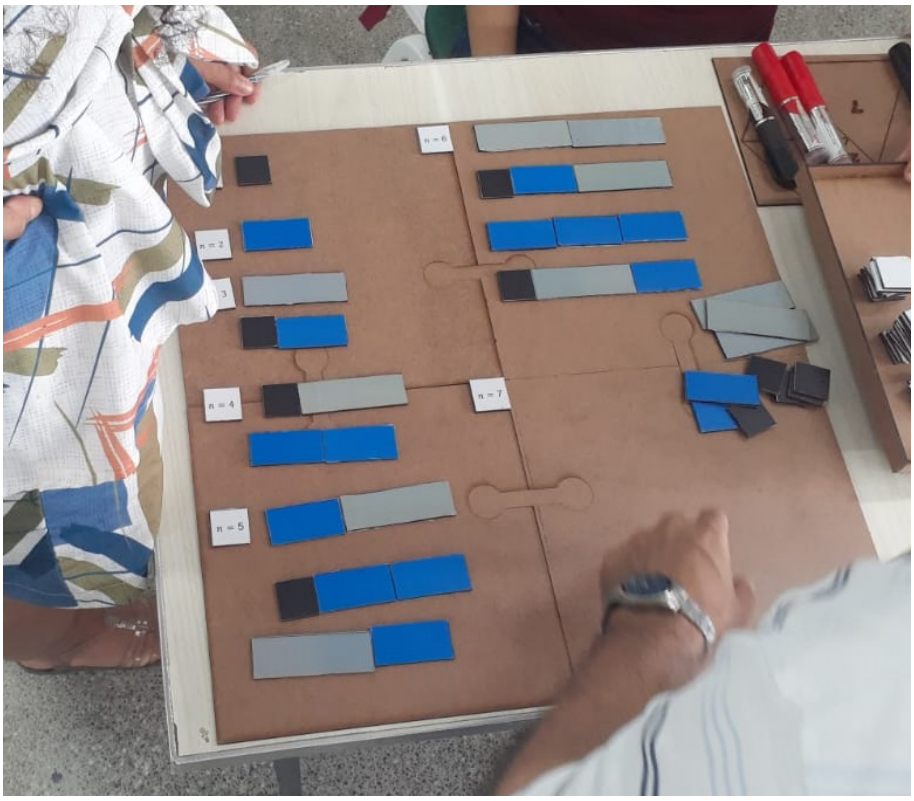


Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a formulação, os estudantes conseguiram desenvolver para além da proposta solicitada, nesse momento Brousseau (1986) indica que o aluno formula e expressa suas ideias sem se preocupar com o rigor matemático, mas sim considerando elementos da linguagem

que tornem suas ideias, conjecturas ou teorias para a resolução do problema compreensíveis para o interlocutor. Assim, construíram os ladrilhamentos para os valores de $n = 6$, e $n = 7$. Inicialmente, ao determinarem os valores até $n = 5$, alguns estudantes equivocaram-se ao montar os ladrilhamentos, ou seja, esqueceram alguns ladrilhamentos para determinados casos de n, evidenciando E_2, conforme previsto na fase da análise a *priori*. Com o viés de descobirem a definição, os estudantes optaram por desenvolver mais ladrilhamentos, uma vez que não estavam visualizando a recorrência de modo imediato. A Figura 72 apresenta a fase da formulação envolvendo o Aluno A2 e o Aluno A4, dando continuidade ao modelo combinatório para valores de n posteriores.

Figura 72 – Fase da formulação da situação-problema 1 por A2 e A4 do Grupo 1

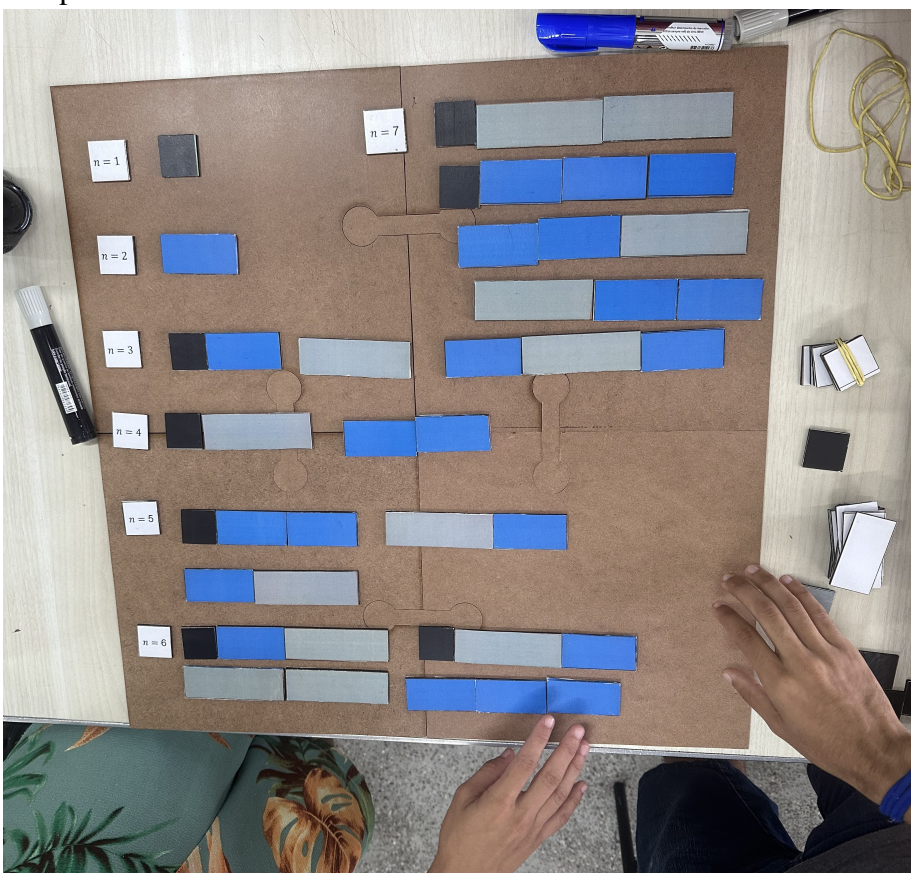


Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 73 mostra a resolução do modelo combinatório da sequência pelo aluno A11. Com isso, o estudante compartilhou a ideia do preenchimento do tabuleiro, utilizando as peças disponíveis. Da mesma forma que A2 e A4, o participante A11 resolver prolongar a resolução para até o caso $n = 7$.

Na validação, Brousseau (1986), a situação de validação é vista como uma situação de comunicação, na qual surgem discursos que se aproximam de uma linguagem matemática

Figura 73 – Fase da formulação da situação-problema 1 pelo A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

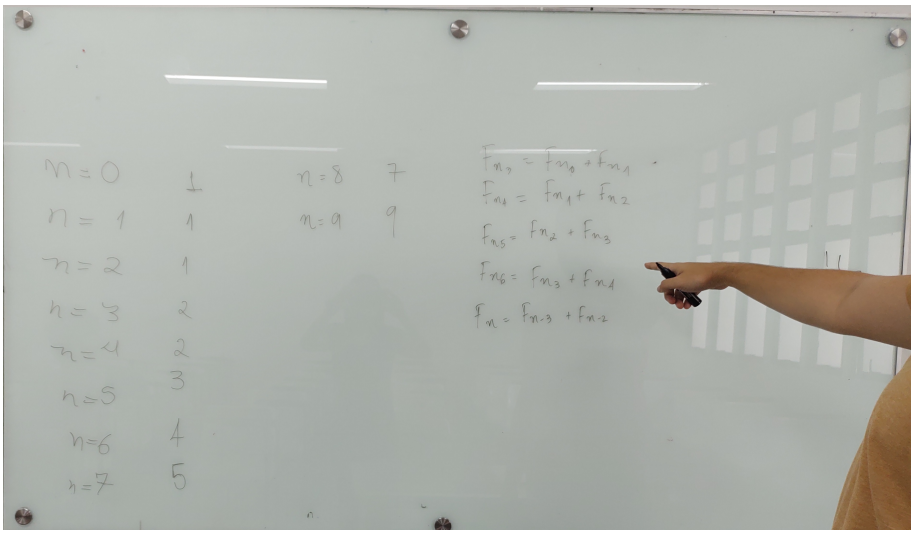
formal. Nesta fase, ocorre uma sequência de inferências e ideias organizadas, compostas com referência na situação proposta e influenciadas pelo meio didático.

Com isso, percebe-se na Figura 74, a construção da definição da recorrência da sequência pelo Aluno A5. Constata-se que o aluno conseguiu determinar mais termos da sequência após a construção do modelo combinatório, efetivando a sua recorrência com referência nos cálculos para os termos predecessores. De fato, ocorreu o E_4, onde os estudantes insistiram em obter a recorrência por meio da fórmula de Fibonacci, sempre tentando a soma dos dois termos anteriores e, esquecendo que existem mais definições matemáticas distintas dos números de Fibonacci. Essa questão apresenta a dependência dos alunos em optar pelo mesmo método, não sentindo segurança nos números que foram obtidos diante do Tabuleiro Mórfico.

No decurso da resolução as variávies didáticas foram identificadas, sendo superadas com a discussão, troca de informações e contribuição do grupo participante. Esse fato é evidenciado quando o Aluno A5 relata que

> *Se Fibonacci é a soma de dois termos, essa também tem que ser, resta saber quais são esses dois termos.*

Figura 74 – Fase da validação da situação-problema 1 pelo A5 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Isso mostra a dificuldade em desenvolver a fórmula de recorrência da sequência de Padovan, sendo disponibilizados alguns termos pertencentes a essa sequência.

Ainda em relação à validação, observa-se que o aluno A10 acredita ter obtido a recorrência quando afirma que

> *Eu reparei que para dada uma posição n, a quantidade de configurações que a gente consegue é exatamente o número do antecessor do antecessor, os dois anteriores. Para* $n = 7$ *a gente tem* $1,2,3,4,5$ *configurações que coincide com* $n = 5$*. Vamos pro* $n = 6$*, pra* $n = 6$ *eu tenho* $1,2,3,4$ *e os dois anteriores tem a mesma posição. Pra* $n = 5$*, tem* $1,2,3$ *configurações. E* $5-2$ *cai no* 3*. Pra* $n = 4$ *eu tenho* 2*, e* $4-2$ *é* 2*.*

O aluno A7 indaga que

> *Pra* $n = 3$ *eu tenho* 2*, né? Só que* $3-2$ *é* 1*. E aqui tem* 2 *configurações. Só que aí vem um problema, fura!*

Percebe-se que A10 não compreende bem a noção de ladrilho e ladrilhamento, chamando as formas de ladrilhar de configurações, evidenciando E_1.

O Aluno 11 explica aos demais colegas que está errado e compartilha a sua definição com referência no relato

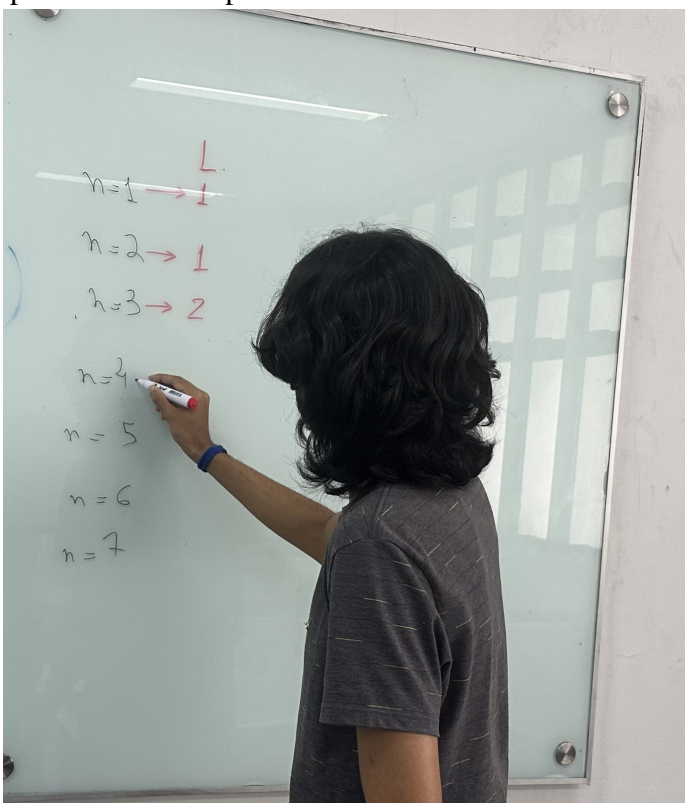
> *Tá errado, é assim olha: Para* $n = 6$ *eu pulo* $n = 5$ *e somo* $n = 4$ *e* $n = 3$*, para dar a quantidade de possibilidades que eu tenho no* $n = 6$*. Para* $n = 7$ *eu pulo* $n = 6$*,* $n = 7$ *eu tenho* 5 *possibilidades e somo* $n = 5$ *com* $n = 4$ *que dá* 5 *possibilidades também. Para* $n = 4$ *eu pulo* $n = 3$ *e somo* $n = 2$ *com* $n = 1$ *dando* 2 *possibilidades do mesmo jeito.*

O aluno A7 compartilha a sua ideia com os colegas relatando que

> *Eu fui observando a sequência de Fibonacci, só que quando chegava no $n = 3$ furava, só que eu tentei fazer o inverso e voltando somando ... pulando uma casa e somando as duas anteriores e assim eu fui fazendo pros demais até conseguir fechar e achar a recorrência.*

Com isso, o aluno A11 valida a construção da definição da sequência, apresentando aos demais colegas a sua resolução como apresenta a Figura 75.

Figura 75 – Fase da validação da situação-problema 1 pelo A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

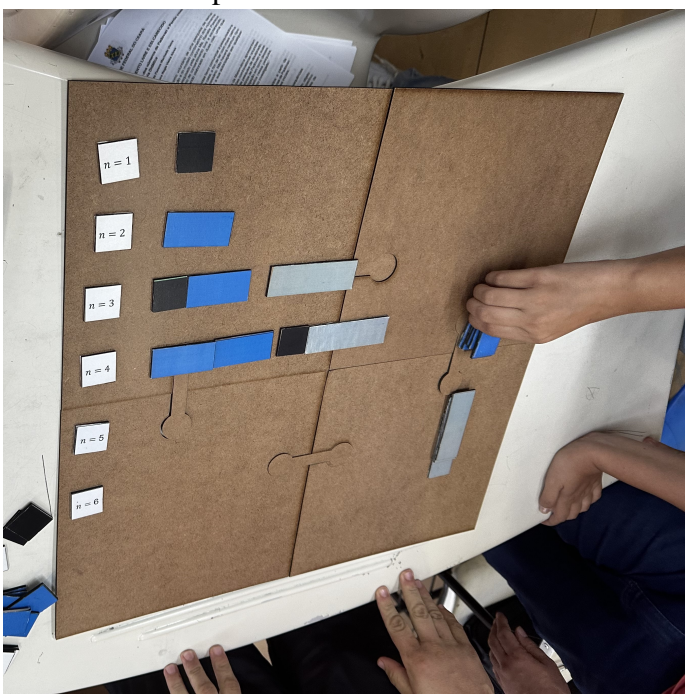
A análise do Grupo 1 é finalizada e então iniciada a análise do Grupo 2.

Inicialmente, tem-se os alunos na fase da ação com a montagem da abordagem combinatória pelo Tabuleiro Mórfico, buscando em seus conhecimentos prévios as regras para a construção da abordagem combinatória com as novas peças disponibilizadas. A Figura 76 representa a interação entre os B3 e B4, permitindo agregar os conhecimentos na fase da ação.

Ainda na fase da ação, observa-se um diálogo entre os alunos, ocorrendo o mesmo erro e dificuldade E_1 em relação ao valor de n ser atribuído ao tamanho do tabuleiro e não a quantidade de ladrilhamentos resultantes, sendo esse compreendido com a ajuda dos demais colegas ao compartilharem os conhecimentos.

B2: *O preto pode ficar sozinho aqui no $n = 1$?*

Figura 76 – Fase da ação da situação-problema 1 por B3 e B4 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

B4: *Pode, sim!*
B9: *Oxe, mas por quê?*
B7: *Porque a regra dele é só aparecer no comecinho e uma vez só.*
B1: *Vixe, e esse n = 3, tá errado. Porque é pra ter 3 peças.*
B4: *Tá não! O tamanho do n é o tamanho da peça e não a quantidade de peças que tem que ter.*
B5: *Esse azul pode mudar a ordem?*
B1: *Pode! É só o preto que tem a regrinha lá.*
B5: *Ah! Então a gente vai só fica preocupado quando aparecer o preto. O restante a gente vai permutando as peças de boas!*
B2: *É, porque aí a gente mexe mais rápido e consegue os ladrilhos dos valores de n logo.*

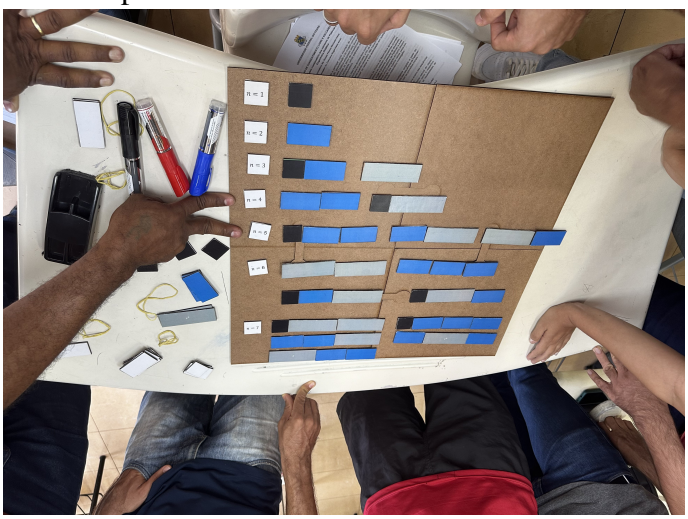
Para a fase da formulação, tem-se a Figura 77 com a participação dos estudantes do Grupo 2, permitindo construir os ladrilhamentos até $n = 7$, ou seja, indo mais adiante do que foi solicitado na atividade proposta. Esse fato, deu-se por meio da sugestão de um colega, pois não estavam conseguindo visualizar a recorrência atribuída à sequência investigada. É possível constatar essa relação no relato de B10:

A gente montou as peças, mas como não tamo saindo do canto, bô montar mais um n? Porque aí a gente vê o valor e consegue visualizar mais um termo da sequência.

O diálo abaixo fornece a discussão pra a finalização da fase da formulação, conferindo se estão todos os ladrilhamentos corretos, não ocorrendo E_2.

B6: *Agora a gente tem que analisar pra saber se foi tudo mesmo.*
B2: *Aqui pra n = 1 só tem 1 e tá certo.*

Figura 77 – Fase da formulação da situação-problema 1 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

> B3: *Pra $n = 2$ também só vai ter uma possibilidade, porque não posso trocar essas peças.*
> B6: *Pra $n = 3$ e para $n = 4$ só vão ter essas duas aqui.*
> B7: *Aqui também (pra $n = 5$) tá certo, só são 3 mesmo. Pra $n = 6$ são 4 e $n = 7$ são 5. Fechado!*
> B8: *Agora vamos olhar pra vê o que isso vai rolar. Que fórmula vamos chegar.*

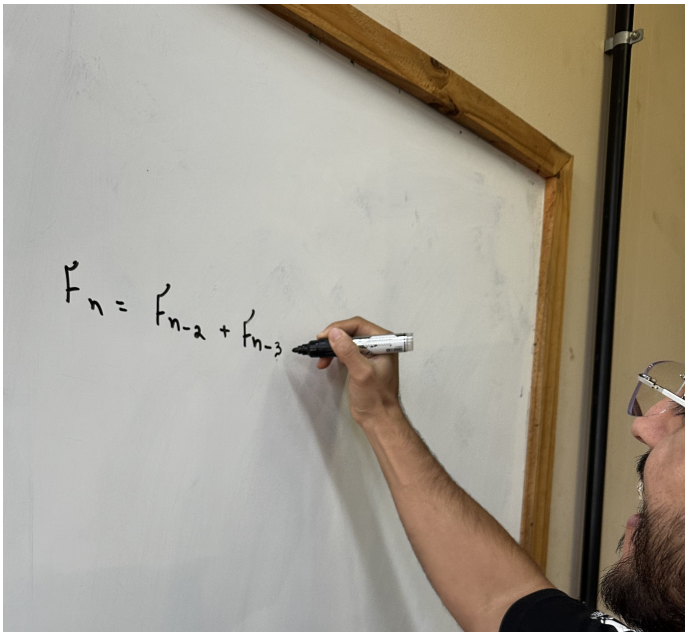
Com isso, tem-se o início da fase da validação, permitindo que os estudantes analisem os números pertencentes à sequência e descubram a fórmula de recorrência, permitindo a descoberta da definição da sequência em estudo.

> B2: *Hum! Eita! Achei a regra! Tem que somar os dois antes do anterior!*
> B5: *Como assim?*
> B2: *Esse daqui é a soma desses dois.*
> B7: *Então quebrou o princípio de Fibonacci.*
> B1: *Então no caso eu vou ter um Fibonacci diferenciado, com esse pulo aí, né?*
> B8: *Vai ser então $n-2$ e $n-3$ a fórmula da definição.*
> B2: *Eu já vi isso em algum lugar! Só não lembro onde.*

Percebe-se, com o diálogo, que os estudantes ainda estão habituados a buscarem a recorrência com referência na sequência de Fibonacci, não visualizando o salto existente na sequência, como previsto em E_4. Além disso, observa-se que mesmo com a descoberta da definição, a nomenclatura estabelecida com eles ainda permanece como se a sequência fosse "Fibonacci diferenciada", como fora atribuído pelos participantes do Grupo 2. Tanto os estudantes do Grupo 1, como os do Grupo 2, denominaram a sequência de Padovan, até então não conhecida por eles, como a mesma nomenclatura e denominação da sequência de Fibonacci,

sendo uns por "Fibonacci adaptada"e outros por "Fibonacci diferenciada". A Figura 78 permite a fase da validação com a fórmula de recorrência da sequência.

Figura 78 – Fase da validação da situação-problema 1 por B8 do Grupo 2



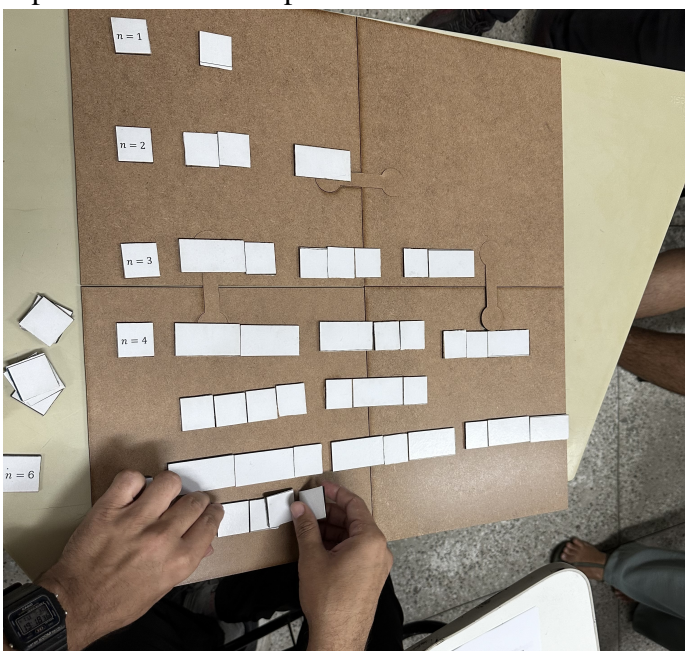
Fonte: Acervo da pesquisa.

A seguir, inicia-se a análise do Grupo 3, com o manuseio do Tabuleiro Mórfico, seguindo os conhecimentos prévios para o desenvolvimento da atividade proposta. De imediato, tem-se a Figura 79 iniciando a fase da ação pelo alunos C3 e C5, verificando a abordagem combinatória de Fibonacci para compreender os conceitos e regras estabelecidos na situação didática.

Ainda dando continuidade à fase da ação, tem-se a Figura 80 com os estudantes C1 e C8 realizando a montagem da nova sequência em estudo, diante das peças disponibilizadas e regras estabelecidas. Para tanto, tem-se a dificuldade E_1, onde os participantes não utilizam o triminó para o desenvolvimento da atividade. Assim, pode-se observar o diálogo entre eles, onde apresentam dificuldade para compreender os ladrilhos e regras.

> C2: *o primeiro é o preto, então o segundo só pode ser vazio pro caso* $n = 1$*,né?*
> C1: *Como assim?*
> C4: *Então todos só vão ter uma possibilidade?*
> C6: *Não, tem o ladrilho cinza que a gente pode colocar também e misturar com as outras.*
> C7: *Ah, verdade! Agora faz sentido ter mais uma peça pra gente manipular com as outras, senão ia ficar tudo sempre só um caso. Pros ns.*
> C1: *Cada casinha dessas a gente tem que ir preenchendo com uma peça dessas, né? Pode ter nenhuma vazia?*
> C2: *A gente vai preenchendo de acordo com o tamanho. Se a gente não*

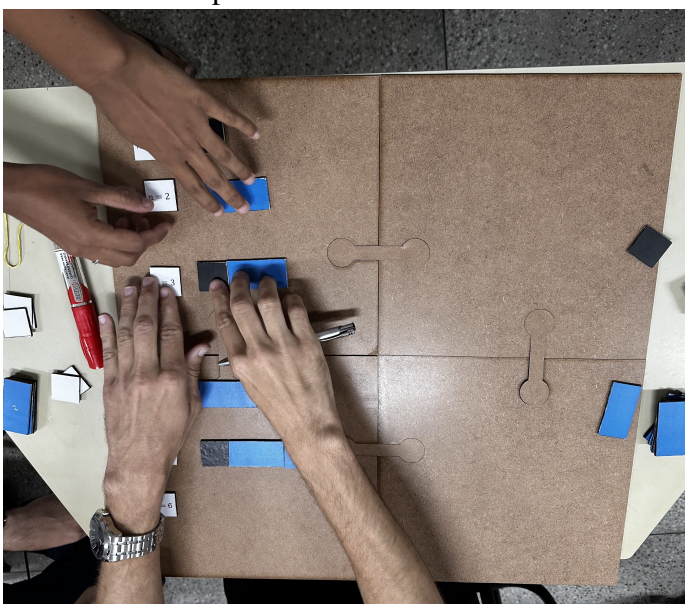
Figura 79 – Início da fase da ação da situação-problema 1 por C3 e C5 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

> *encontrar nenhuma peça que caiba no tamanho do n, aí a gente tem que deixar vazia.*

Figura 80 – Fase da ação da situação-problema 1 por C1 e C8 do Grupo 3



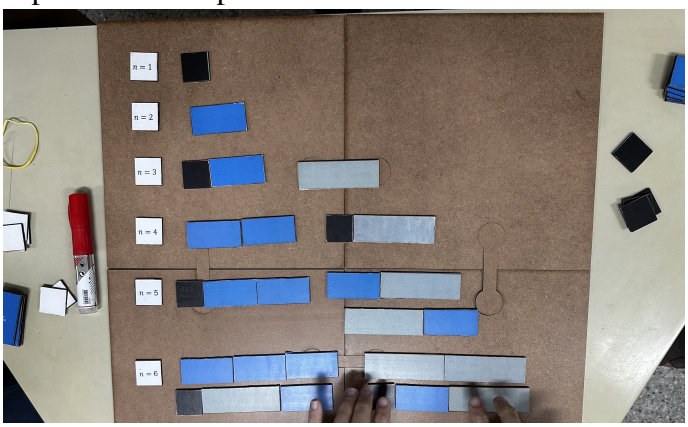
Fonte: Acervo da pesquisa.

Após a discussão, os estudantes compreendem que estavam ausentando um ladrilho, e realizam a inserção desses durante a construção dos ladrilhamentos. Com isso, tem-se a fase

da formulação por C1, com a Figura 81, permitindo obter a abordagem combinatória e as formas de ladrilhar com a dificuldade E_2 prevista. Essa dificuldade é identificada quando C8 discute com C5:

> C8: *Pro caso $n = 2$ eu não posso colocar dois quadrados pretos?*
> C5: *Não! O preto só pode aparecer uma vez. E se colocar ele junto com outro preto vai ficar no final também. Fere duas regras logo. Ficam só esses casos aí mesmo. Confere!*

Figura 81 – Fase da formulação da situação-problema 1 por C1 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

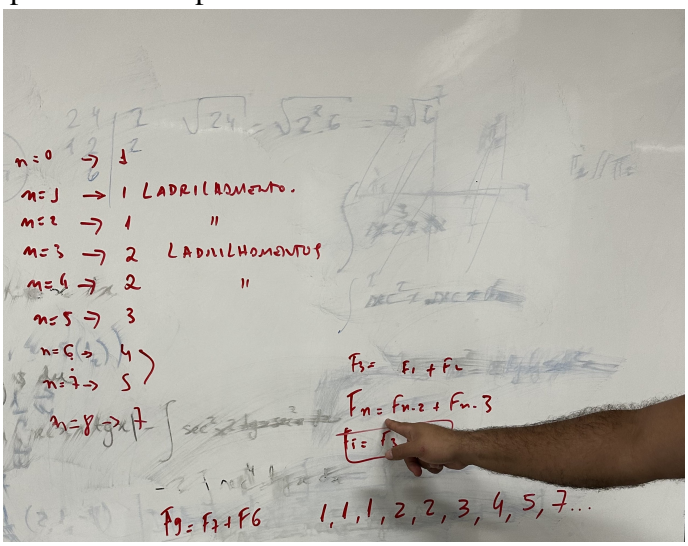
Diante da discussão realizada, os estudantes observam os números de ladrilhamentos, buscando descobrir a recorrência da nova sequência em estudo. Com isso, inicia-se uma nova discussão, permitindo observar o erro E_4 para a obtenção da fórmula de recorrência.

> C6: *A fórmula vai ser $F_n = n-2$. A partir de $n = 4$ vai ser $n-2$. Sempre -2. Aí a gente fixa os valores iniciais até $n = 3$, pra poder ser a partir de 4.*
> C2: *Bora fazer mais n pra verificar.*
> C1: *Não é, não é! Fura aqui embaixo. Pro $n = 8$.*
> C5: *Não seria o n mais a quantidade dos anteriores, não?*
> C7: *Vixe, mas já fura logo no início também.*
> C3: *A partir do terceiro, $n = 3$ a gente fixa então o $n = 0, n = 1, n = 2$ como sendo os valores iniciais. Vamos buscar daqui a fórmula, fixando esses 3.*
> C4: *Isso vai ser uma soma ou uma subtração, que nem Fibonacci. Não tem isso de fixar o -2. Vamos buscar pela soma.*
> C8: *Eu diria que do $n = 0$ até o $n = 2$ seria como se fosse uma regrinha pra gente seguir, O $n = 4$ a gente somaria o $n = 1$ com $n = 2$.*
> C5: *Para eu formar o número 5, vai dar $3+2$, certo? Então eu tenho o $n = 5$ mais o $n = 4$. Pra eu formar o 7, eu tenho $4+3$, que é o $n = 6$ mais $n = 5$. A gente não vai pegar o termo anterior e pega os dois anteriores depois desse pulo, né?*
> C6: *Esses três valores de $n = 0$ até $n = 2$ estavam atrapalhando de descobrir a definição. Então fixa eles como sendo os iniciais. Como Fibonacci só fixa 2, eu tava tentando fixar só 2 também. Mas com essa fixando 3 dá certo. Pegando o n-ésimo termo, fica $F_n = F_{n-2} + F_{n-3}$. A partir disso a gente acha os termos da*

nossa sequência.
C3: *Eu tava indo tentando $F_3 = F_1 + F_2$. Ia sair nunca, porque achava que ia ser soma. Tava somando dois termos, três termos, todos os anteriores. Mas esse pulo aí eu não tinha enxergado e tava na cara.*

A Figura 82 apresenta a validação pelo estudante C6, permitindo visualizar a notação da sequência estabelecida como F_n, ocorrendo E_5. Ainda pode-se identificar, que os estudantes buscavam a recorrência, seguindo os padrões da sequência de Fibonacci, quando tenta calcular $F_3 = F_1 + F_2$.

Figura 82 – Fase da validação da situação-problema 1 por C6 do Grupo 3



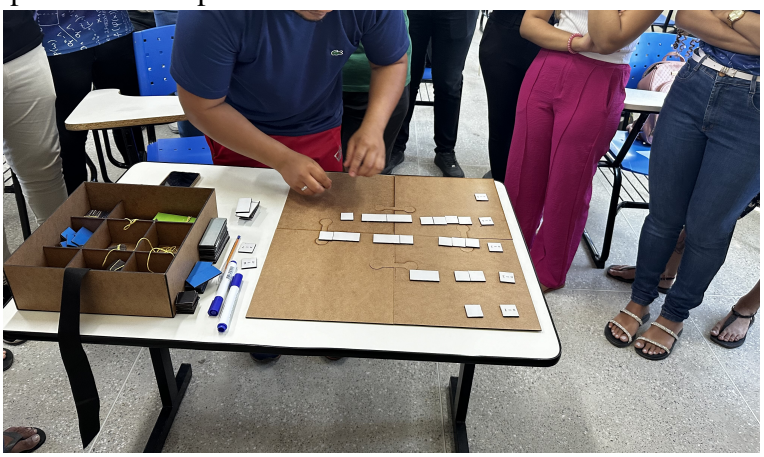
Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, finaliza a análise do Grupo 3 e tem-se o início da análise do Grupo 4, com o início da fase da ação na Figura 83, com o estudante D2 realizando os ladrilhamentos de Fibonacci para os demais colegas, conforme acordado no diálogo abaixo.

D16: *Essa história aí do tamanho do n e das peças não entendi direito. Como é que a gente vai fazer?*
D9: *A gente tem que olhar que o n representa o tamanho da peça, e não é a quantidade de combinações.*
D10: *Bora fazer o Fibonacci de novo com os quadrados e dominós. Porque a gente já sabe a recorrência aí fica mais fácil pra tu entender essa questão aí do n.*
D2: *Deixa que eu faço e mostra a vocês aqui. Porque é interessante a gente pegar e olhar assim: pra $n = 1$ a gente só vai poder colocar aqui peças de tamanho 1, que é o quadrado. Já pro $n = 2$, a gente só pode ter aqui dentro peças de tamanhos 2.*
D13: *Agora me liguei, porque tu vai vendo o tamanho e as possibilidades que cabem dentro de cada n.*
D16: *Então pra $n = 3$, tu coloca aí só 3 quadrados, 1 dominó e 1 quadrado. Agora troca a ordem do dominó com o quadrado. Agora entendi!*

Observa-se ainda a presença da dificuldade E_1, quando D16 não compreende o valor de n e os ladrilhos que deverá manusear para a realização das combinações na atividade.

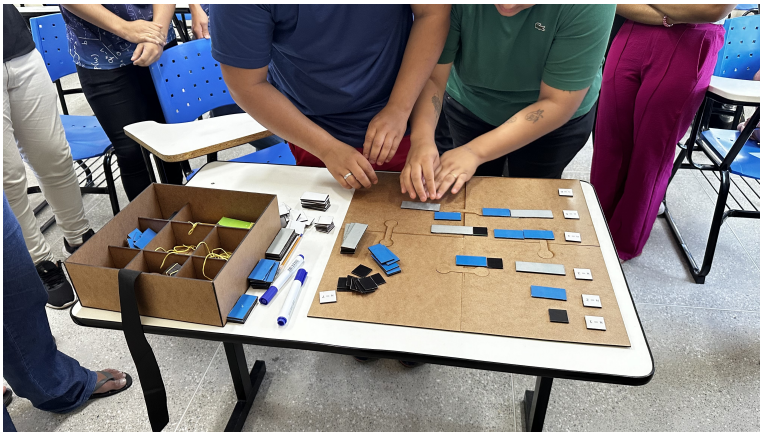
Figura 83 – Início da fase da ação da situação-problema 1 por D2 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Seguindo, os estudantes resolvem iniciar a construção dos ladrilhamentos com as novas peças disponíveis, dando continuidade à fase da ação, como pode ser visualizado na Figura 84, em que os estudantes D1 e D2 compartilham as suas ideias com os demais colegas. Pelo fato de possuir somente um tabuleiro, ocorreu que alguns estudantes optaram por repassar as suas ideias de uma forma mais distante do material. Com isso, realizou-se um rodízio entre os colegas, para que todos pudessem manusear o material em algum momento, após divisão em equipes.

Figura 84 – Fase da ação da situação-problema 1 por D1 e D2 do Grupo 4



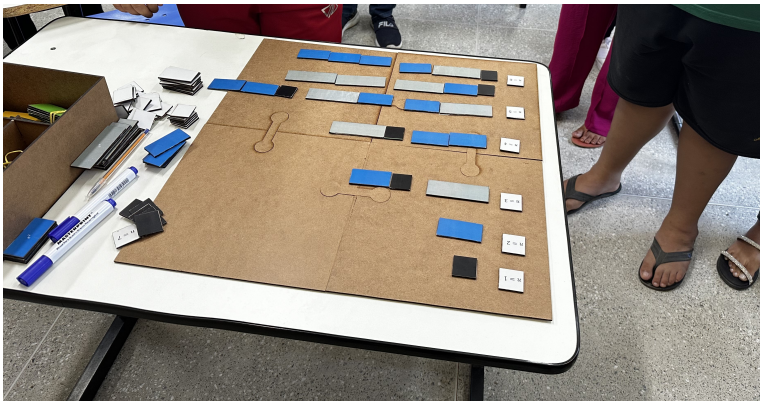
Fonte: Acervo da pesquisa.

Um novo diálogo acontece entre os na fase da formulação, ocorrendo a dificuldade E_2 quando os participantes não visualizam uma possibilidade para o caso de $n = 5$. A Figura 85

apresenta a resolução pelos estudantes D1, D2 e D5.

D10: *Pra* 1 *vai ter só o preto. Pode ficar só?*
D11: *Pode, ele só não pode é aparecer mais de uma vez e aparecer no início.*
D3: *Coloca aí o azul pro* $n = 2$ *e um cinza e outro preto com azul pro* $n = 3$.
D8: *Pro* 4 *vai ter só dois azuis e um preto com cinza.*
D7: *O cinza tem tamanho 2?*
D8: *Não, ele tem tamanho 3.*
D4: *Pro* 5 *só vão ter duas possibilidades. Cinza e Azul e depois troca.*
D17: *Pro* 6 *tem preto com azul e cinza. Depois troca. Dois cinzas e Três azuis.*
D18: *Bora conferir pra saber se a gente não esqueceu.*
D6: *Tá faltando ali no* 5*, a gente pode ter preto com dois azuis.*

Figura 85 – Fase da formulação da situação-problema 1 por D1, D2 e D5 do Grupo 4



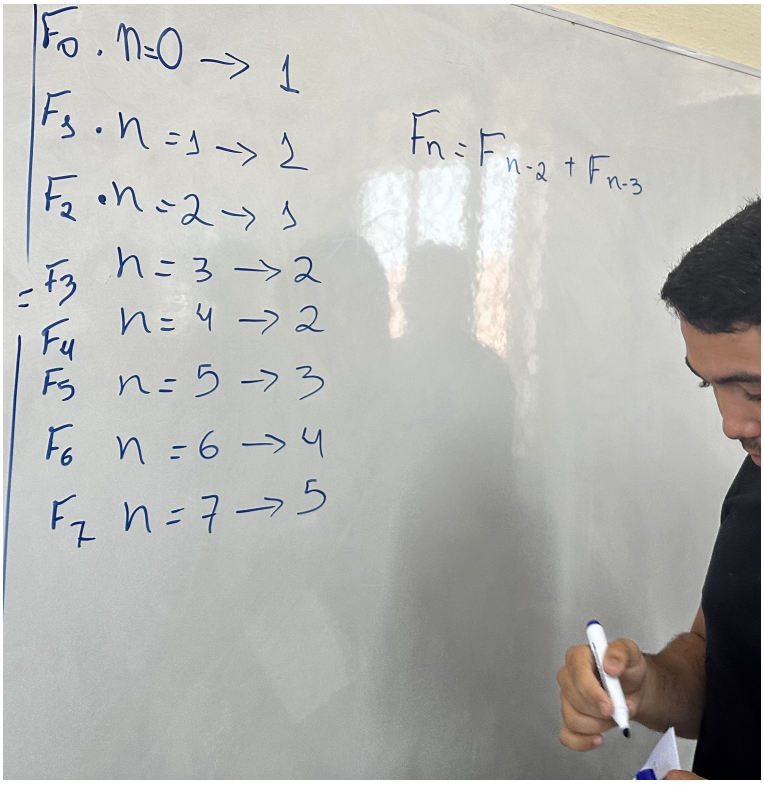
Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a fase da validação, os estudantes buscam a definição, realizando o diálogo conforme o questionamento de D12 e identificando a dificuldade E_4.

D12: *Esses números devem ser uma sequência sim. Eles tem uma regra. Como vai ser essa definição?*
D14: *Eu achei aqui.* 2 *e* 3 *a gente tira* 1.
D2: *Como?*
D15: *Assim, quando for menor que* 3 *a gente tira* 1. *E a partir de* 4 *a gente tira* 2.
D2: *Tira do valor de n?*
D15: *Isso. A gente diminui* 1 *quando o n for menor que* 3 *e diminui* 2 *quando o n for maior que* 3. *Pro* 7 *é pra dá* 6 *se a minha teoria tiver certa.*
D19: *Faz aí o* $n = 7$ *no tabuleiro pra vê se dá* 6.
D15: *Não deu! Deu* 7.
D8: *Não. Vai ser assim.* $1+2=3$, $2+2=4$ *e* $3+4=7$.
D1: *Entendi foi nada. De onde vem isso?*
D15: *Pela lógica. A gente vai ter que pegar três antecessores. Só que a gente não vai poder contar com o primeiro antecessor.*
D2: *E a gente vai fixar qual? Bora fixar até o* $n = 2$.
D15: *Pra achar o* F_4 *a gente soma o* $F_2 + F_1$*, que é* $1+1=2$. *Pera achar o* F_5 *é só somar o* $F_3 + F_2$*, que é* $1+2=3$ *e assim sucessivamente.*

A Figura 86 apresenta a obtenção da recorrência pelo estudante D15, nomeando a sequência de F_n, ocorrendo E_5.

Figura 86 – Fase da validação da situação-problema 1 por D15 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Com isso, é finalizada a análise dos Grupos. De fato, observa-se que os erros previstos na análise a *priori* da referida situação-didática foi evidenciado em cada uma das fases da ação, formulação e validação, sendo esses superados com a discussão entre os demais sujeitos participantes. A noção de tabuleiro, manuseio, regras de configurações das peças e obtenção da fórmula de recorrência foram os erros identificados durante as fases da TSD nesta situação-problema 1.

6.4.2 Situação-problema 2

Tendo em vista o conhecimento solicitado e adquirido para a situação-problema 1, tem-se a proposta da situação-problema 2, com a análise das variáveis didáticas:

- sequência de Tridovan (Definição 5.48);
- modelo combinatório de Tridovan (ver Teorema 5.117).

Situação-problema 2: De modo a realizar uma extensão da ordem da sequência de

Padovan, tem-se uma nova sequência de quarta ordem estudada a seguir. Com isso, diante do material manipulável e de suas peças disponíveis, considere as seguintes novas peças para a sequência proposta, por meio do material manipulável. Assim, são estabelecidas os seguintes ladrilhos: dominós azuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3 e tetraminós verdes 1 x 4, todos com peso 1. Desse modo, quantos ladrilhamentos são possíveis obter, utilizando as regras e peças definidas, com um tabuleiro de tamanhos: 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6? Esses números formam alguma sequência? Se sim, qual a fórmula de recorrência?

6.4.2.1 Análise a priori

Essa atividade investiga a construção das definições, sendo essas:

- Definição 1. Sequência de Tridovan (ver Definição 5.48);
- Definição 2. Regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Tridovan (ver Teorema 5.116);
- Definição 3. Modelo combinatório de Tridovan (ver Teorema 5.116).

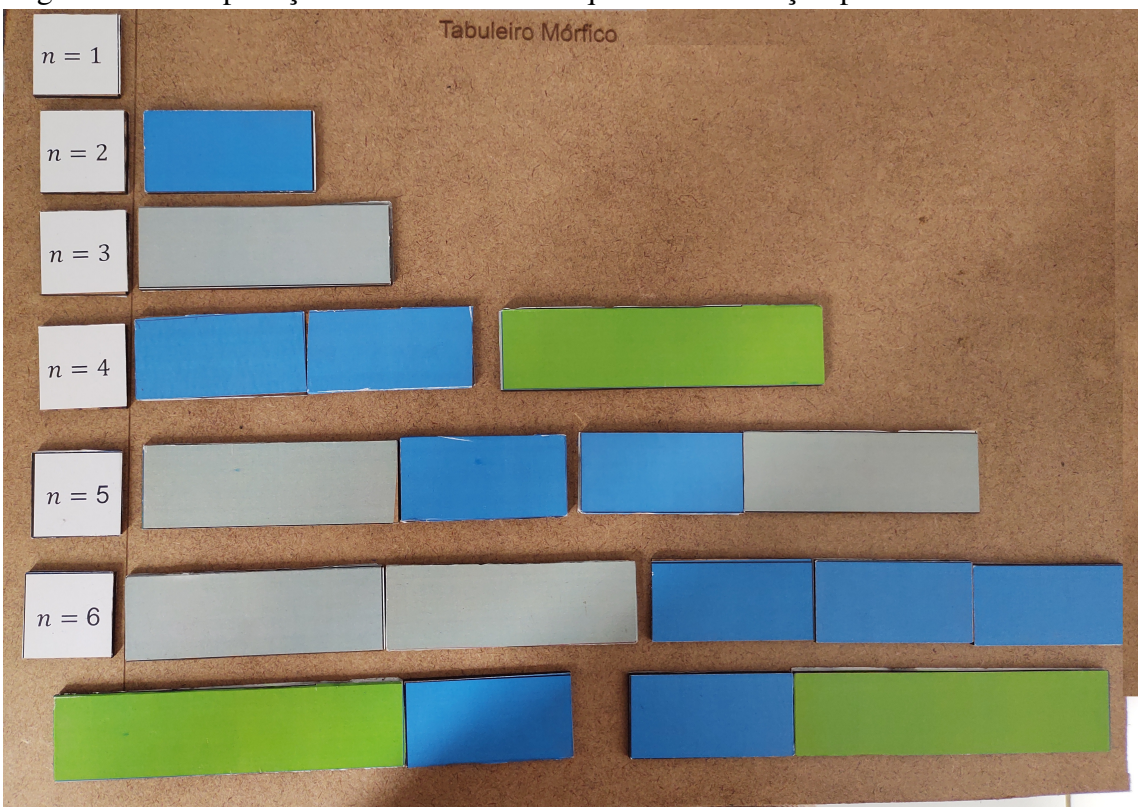
Fase da ação: com o amparo das regras e definições estabelecidas, o professor estimula os estudantes para que estabeleçam construções para os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6, com as peças fornecidas. Os estudantes podem aprimorar a estratégia elaborada, ou ainda criar outra, para que assim possa provocar uma aprendizagem por adaptação. Nessa fase, observa-se o estudo da Definição 1 e a construção da Definição 2. O possível erro previsto nessa fase é em relação às novas peças disponíveis, tendo bastante atenção para não confundir com as peças da atividade anterior.

Fase da formulação: após a apropriação das regras e peças, os estudantes deverão construir as possibilidades de ladrilhar nos tabuleiros propostos, conforme apresenta a Figura 87.

Nessa fase, dar-se continuidade à construção da Definição 2. Os possíveis erros previstos durante essa fase, são em relação às formas de ladrilhar, podendo os estudantes esquecer de alguma forma, diante da nova peça inserida. Para isso, é importante que os estudantes realizem as interpretações combinatórias no material manipulável, primeiramente, para, posteriormente, verificarem os números existentes e a relação com a sequência nova estendida.

Fase da validação: tendo em vista estabelecer um conjunto de argumentos que se tornam invariantes, para cada caso particular, os estudantes deverão conjecturar os casos para os tabuleiros propostos, obtendo as maneiras de ladrilhar com as peças estabelecidas. Assim,

Figura 87 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

deve-se observar que os valores obtidos, representam os termos da sequência estendida $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$, em que apresenta a relação de recorrência dada por: $E_n = E_{n-2} + E_{n-3} + E_{n-4}$, $n \geqslant 4$ e com valores iniciais $E_0 = 1, E_1 = 0, E_2 = 1, E_3 = 1$. Por fim, é possível construir a Definição 3.

Os erros estimados para esse momento, são referentes aos números que aparecerão com as formas de ladrilhar para os determinados tabuleiros de tamanhos distintos. Assim, os estudantes poderão confundir-se, e não realizar a soma dos três termos anteriores contados a partir do salto.

Fase da institucionalização: na última fase, faz-se necessário a verificação das resoluções pelo professor e estabelecimento da sequência de Tridovan e do seu modelo combinatório. Ainda assim, o professor revela a sequência de Tridovan, definida por Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b), tem-se a sequência de Tridovan $\left\{P_n^3\right\}_{n\geqslant 0}$ como sendo uma sequência numérica de quarta ordem, definida a partir da extensão da sequência de Padovan. A sequência de Tridovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ (Vieira; Alves, 2019a; Vieira; Alves, 2019b): $P_n^3 = P_{n-2}^3 + P_{n-3}^3 + P_{n-4}^3, n \geqslant 4$, em que P_n^3 representa o n-ésimo termo da sequência e com os termos iniciais: $P_0^3 = 1, P_1^3 = 0, P_2^3 = P_3^3 = 1$.

Desse modo, tem-se o Quadro 24 com os primeiros termos da sequência de Tridovan.

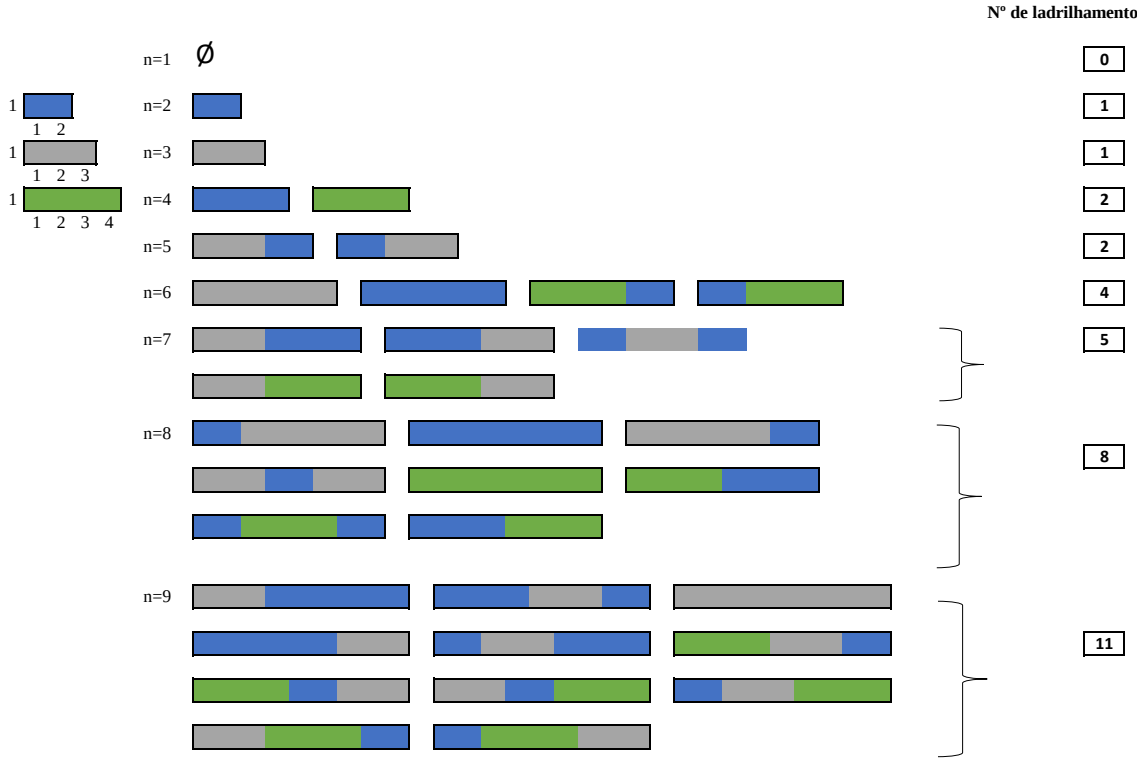
Quadro 24 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tridovan

P_0^3	P_1^3	P_2^3	P_3^3	P_4^3	P_5^3	P_6^3	P_7^3	P_8^3	P_9^3
1	0	1	1	2	2	4	5	8	11

Fonte: Elaborado pela autora.

O modelo combinatório de Tridovan estudado, é referente ao tabuleiro de tamanho 1 x n. Logo, para $n \geqslant 0$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de dominó azul, triminó cinza e tetraminó verde é dado por: $p_n^3 = P_n^3 + P_{n-1}^3$, sendo p_n^3 o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n^3 o n-ésimo termo da sequência de Tridovan (ver Figura 88).

Figura 88 – Ladrilhamentos de Tridovan de p_1^3 até p_9^3

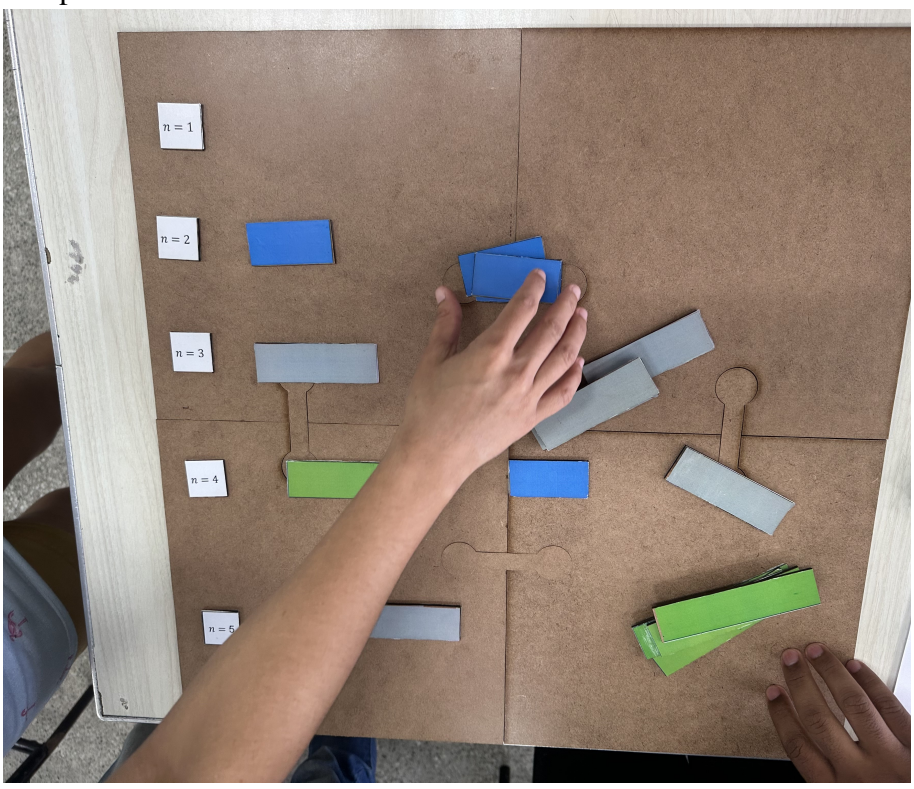


Fonte: Elaborado pela autora.

6.4.2.2 Análise a posteriori

Apresentada no terceiro encontro, a situação-problema 2 possui o objetivo de construir a definição da sequência de Tridovan, sendo esta uma extensão da sequência de

Figura 89 – Fase da ação da situação-problema 2 pelo A6, A7 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

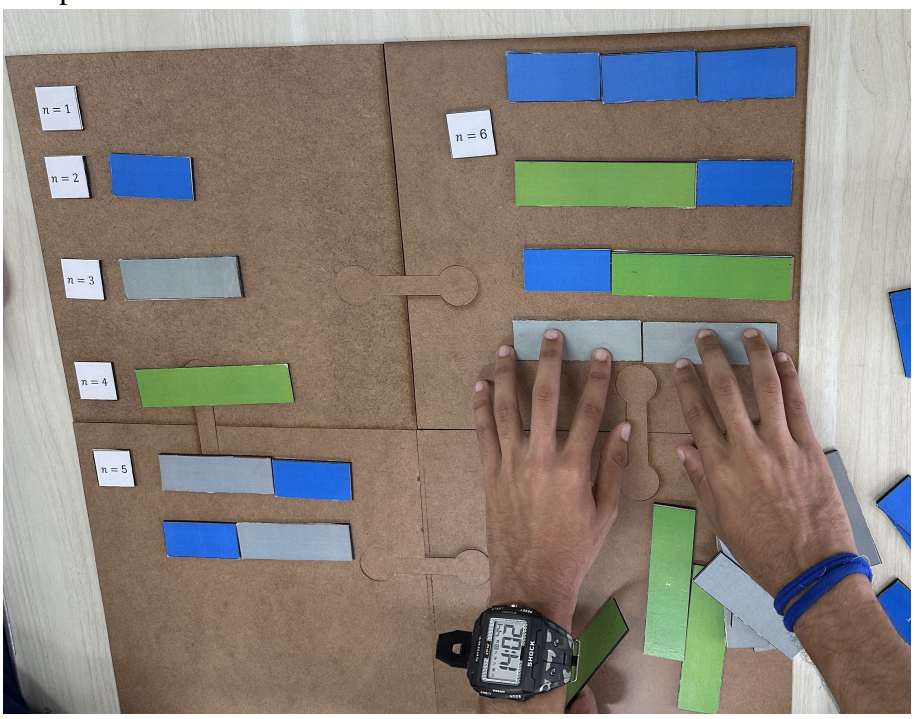
Padovan. Desse modo, a aula teve início com a institucionalização da situação-problema 1, apresentando assim a sequência de Padovan, seus pontos históricos e evolutivos matemáticos.

Diante disso, tem-se a apresentação da atividade proposta e a análise do comportamento do Grupo 1. Desse modo, a Figura 89 representa a fase da ação pelos alunos A6, A7 e A11 em que iniciam a construção do modelo combinatório com as novas peças estabelecidas. A rapidez e facilidade em montar os ladrilhamentos, mostra a compreensão em relação a noção de tabuleiro e regras de configuração das peças, que anteriormente haviam tido dificuldade em assimilar que o tamanho do tabuleiro era correspondente ao valor de n. Porém, ainda assim existe um estudante que não compreende a inserção da nova peça disponibilizada, sendo então discutida entre os alunos A1 e A4 evidenciando o erro E_1 em relação as novas peças disponíveis

> A1: *E essa nova peça a gente vai colocar aonde?*
> A4: *A gente vai vendo aonde podemos colocar de acordo com o valor do n.*
> A1: *Ah! Beleza! Pensei que ela era pra ser colocada só quando os valores de n fossem maiores do que os valores que a gente fez na questão anterior.*

Na fase da formulação, os estudantes conseguem finalizar os ladrilhamentos para os determinados valores de n solicitados na atividade, observando atentamente se não esqueceram de nenhuma combinação não ocorrendo E_2. Assim, a Figura 90 retrata essa fase finalizada pelo A11.

Figura 90 – Fase da formulação da situação-problema 2 pelo A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 91 permite uma outra visualização da fase da formulação pelos estudantes A1, A2, A3, A4 e A5, porém sendo finalizada pelo A2.

Durante a validação, os estudantes iniciaram a busca da recorrência, permitindo a construção da definição da nova sequência visualizada. Assim, ocorreu uma discussão entre os estudantes conforme apresentado abaixo

> A10: *O sexto termo tem* 4 *ladrilhamentos possíveis, que coincide justamente com a soma dos ladrilhamentos dos dois imediatamente anteriores. Vamos verificar se isso vale pro quinto, né? Aqui eu tenho duas. Não vale pros dois anteriores. Então já quebra e não podemos usar essa recursividade.*
>
> A8: *Mas se a gente envolver a soma de três por exemplo. Se esse aqui for a soma desses três anteriores. Será que daria? Ah não, fura aqui também!*
>
> A9: *É melhor a gente ir descartando. Não seria a soma dos dois imediatamente anteriores, senão seria Fibonacci e nem dos três anteriores.*
>
> A7: *Mas vamos olhar que aumentou mais uma peça, então tem que ser a soma de três pra recorrência. Então vamos com o salto que nem de Padovan. Vamos ver se bate . . . É bateu! Deu certo!*
>
> A11: *Ah! Então, como a gente tem salto, então o termo imediatamente anterior não vai entrar para essa nossa forma de recursividade. Então eu vou pegar o antecessor do antecessor que é* $\tilde{P}_{n-2} + \tilde{P}_{n-3} + \tilde{P}_{n-4}$ *para* $n \geqslant 4$*. Tem que colocar para* $n \geqslant 4$ *senão não faz sentido trabalhar com os negativos agora.*

De fato, os estudantes sempre iniciam a busca da definição pela recorrência de Fibonacci, porém percebem posteriormente a falha e seguem pelo método da tentativa. Essa discussão identifica a dificuldade em obter a recorrência da sequência, porém com o avanço

Figura 91 – Fase da formulação da situação-problema 2 pelo A2 do Grupo 1

Fonte: Acervo da pesquisa.

da sequência e compartilhamento das ideias, foi possível obter a construção da definição, identificando o erro E_4. É importante ainda notar que o A7 identifica que ao aumentar a peça, consequentemente aumenta o termo na recorrência, seguindo o padrão da extensão da sequência de Padovan.

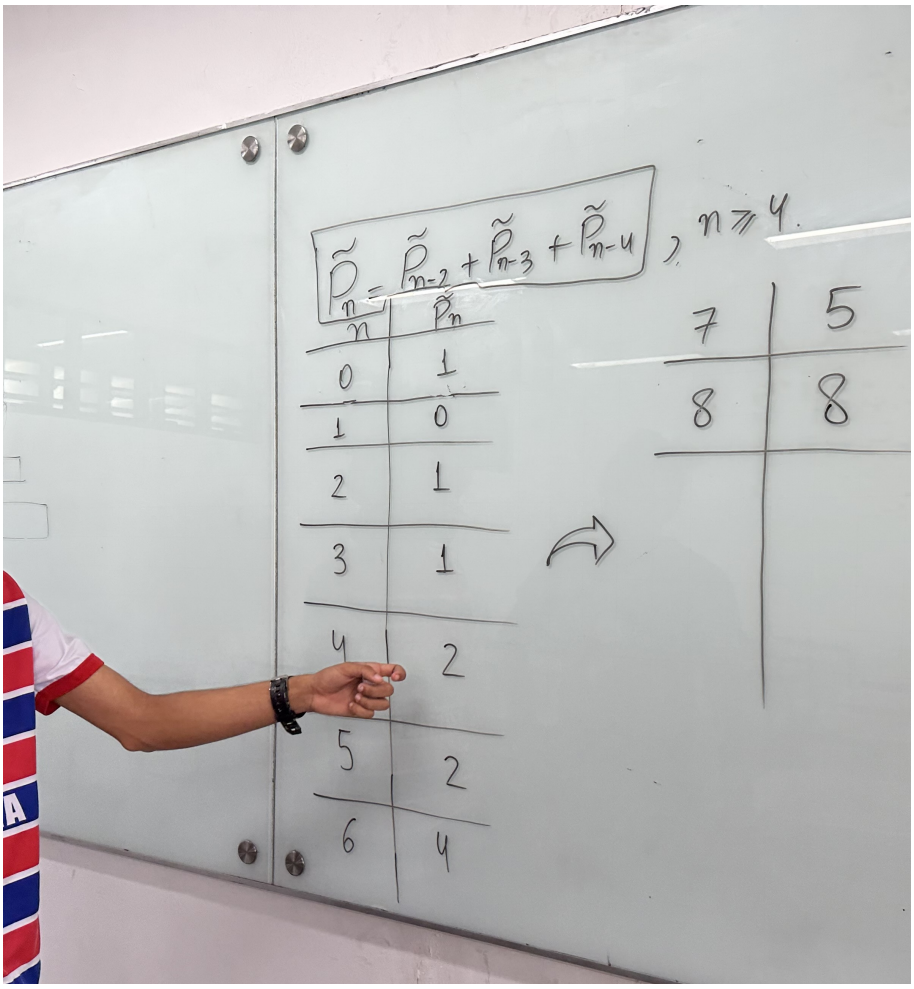
A Figura 92 mostra o A11 validando a construção da definição no quadro para os demais colegas. Perceba que A11 resolve calcular o caso para $n = 8$, visando comprovar a recorrência definida.

Ainda na fase da validação, tem-se a Figura 93 representando outra forma de validar a recorrência pelo estudante A1, em que denominam a sequência de "Fibonacci adaptada"e não $\tilde{P}_n$ como os estudantes anteriores.

No final da aula, o estudante A2 resume para os demais colegas que

> *A aula de hoje foi legal, porque a gente explorou os conceitos fundamentais e aprofundamos nosso entendimento nas recorrências das sequências e discutimos aplicação no tabuleiro.*

Figura 92 – Fase da validação da situação-problema 2 pelo A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

A4 relata ainda que

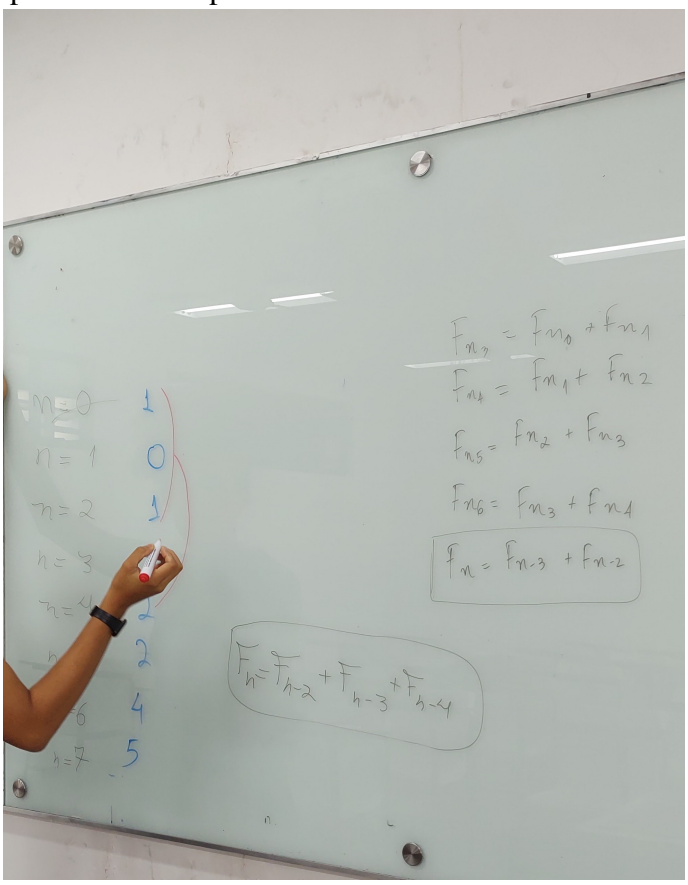
> *Apesar da dificuldade pouco que encontrei para conseguir chegar na recorrência, eu achei a aula desafiadora porque a gente teve que observar e encontrar a recorrência com as pecinhas que a gente construiu. Foi massa!*

A análise realizada durante a experimentação da situação-problema 2 confirmou que os erros previstos durante a análise a *priori* das situações didáticas de fato ocorreram. Foi possível identificar que durante a execução desta situação-problema, os erros estavam relacionados à compreensão das novas peças disponíveis, à construção dos ladrilhamentos sem esquecer de nenhuma combinação e à obtenção da definição da nova sequência em estudo.

A seguir, são analisados os dados do Grupo 2.

Novamente, os estudantes deparam-se com as novas peças disponibilizadas, buscando em seus conhecimentos prévios as regras estudadas. Com isso, a Figura 94 retrata a fase da ação pelos estudantes do Grupo 2 com a busca da abordagem combinatória da sequência, visando

Figura 93 – Fase da validação da situação-problema 2 pelo A1 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

a descoberta da definição. A interação apresentada abaixo entre os participantes demonstra a dificuldade em compreender a introdução do novo ladrilho, identificando E_1.

> B1: *O* $n = 3$ *só pode ter um.*
> B3: *Se esse cara aqui é* 1*, então esse cara aqui é* 1 *e meio, né?*
> B9: *Ham? Como assim?*
> B5: *Não, é porque ele tem tamanho* 2*. Ô o azul tem tamanho* 2*. O cinza tem tamanho* 3 *e o verde tem tamanho* 4*.*
> B3: *Calma! Eu tava falando das possibilidades. Que agora para* $n = 3$ *vão ter* 1 *e meia possibilidades.*
> B5: *Não! Nem pode cara. Vai ter só uma possibilidade. Porque a gente só tem uma peça com tamanho* 3*. As outras são de tamanho* 2*, e não vai dar pra colocar outra porque passa.*
> B3: *Ah! Tô ligado! E a de tamanho* 4 *já passa também. Então fica só uma possibilidade mesmo.*

Esse fato aborda a dificuldade do participante em compreender o ladrilhamento com a nova peça, equivocando-se acerca do desenvolvimento da atividade, localizando o erro E_1. Porém, com a explicação dos demais colegas, essa dificuldade foi sanada e compreendida pelo estudante.

A fase da formulação pode ser verificada na Figura 95, com a finalização dos

Figura 94 – Fase da ação da situação-problema 2 por B4, B6, B7 e B8 do Grupo 2

Fonte: Acervo da pesquisa.

ladrilhamentos pelos estudantes. Vale ressaltar que os ladrilhos cinza e azul que constam ao lado direito do tabuleiro, não são contabilizados para a formulação da abordagem combinatória, são peças que não foram utilizadas.

Um fato interessante é observado na fala do aluno B2, quando ao analisar os ladrilhamentos, para não ocorrer o erro E_2, consegue visualizar um padrão de construção dos números, identificando a definição. Esse relato retrata a transição, visto que aborda o final da fase da ação e início da fase de validação.

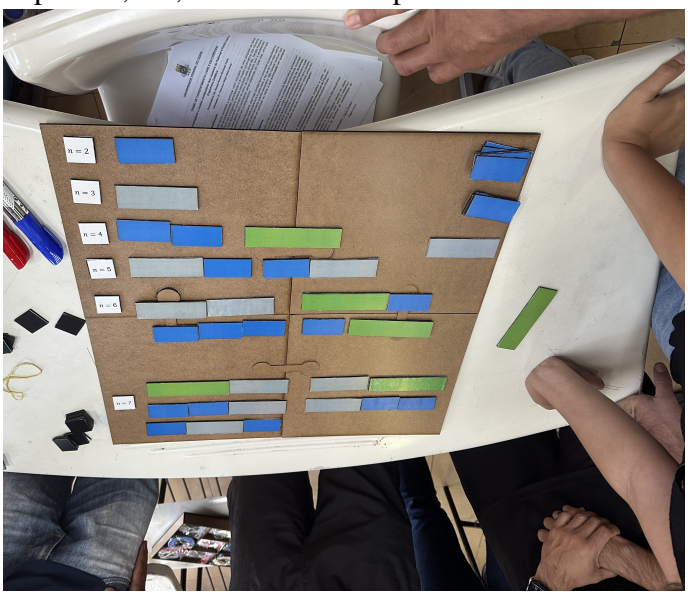
> Antes vamos conferindo pra vê se a gente não esqueceu nada. Opa! Acho que já vai dá pra ver uma parada aqui nesses termos que tão aparecendo! Acho que já tô vendo um padrão.

A Figura 96 apresenta a validação pelo B9 oficializando a construção da definição da sequência, permitindo compreender o salto existente, como acontece para a sequência de Padovan, bem como a inserção de um novo termo com o mesmo peso no coeficiente na fórmula de recorrência. No relato do estudante B3 pode-se perceber a dificuldade E_4, quando diz que

> *Eu tava tentando somar os dois anteriores com um salto, que nem a gente tinha feito antes. Aí eu tava era depois dando dois saltos pra vê se dava certo, mas deu foi um pane. Eu não tinha me atentado pra essa ideia de pular um e somar três.*

De fato, os estudantes permaneceram com a mesma nomenclatura utilizada anteriormente, mesmo após a sequência ser apresentada como Padovan. Esse fato evidencia um

Figura 95 – Fase da formulação da situação-problema 2 por B4, B6, B7 e B8 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

erro, que não havia sido previsto, mas que aconteceu nos dois Grupos analisados. Assim, mesmo após a institucionalização e apresentação da sequência de Padovan, os estudantes continuam utilizando e nomeando a sequência estudada de Fibonacci e alguma característica atribuída por eles. Com isso, pode-se estabelecer como erro E_5.

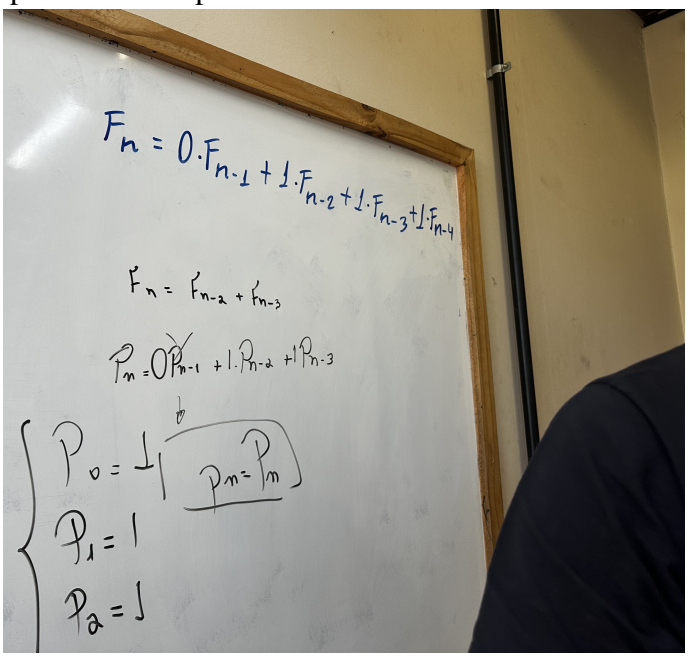
É importante destacar que antes de ocorrer a validação, os estudantes construíram um diálogo, permitindo identificar os coeficientes de Padovan e a ideia da inserção de um novo termo, conforme a adição do novo ladrilho.

> B2: *Olha, se a gente pegar Padovan que a gente viu antes, a gente pode colocar que tem três termos.*
> B10: *Eita! Então é como se fosse Fibonacci só que de terceira ordem o Padovan.*
> B5: *Cara, como tá surgindo mais peça, então a gente vai ter que adicionar mais um termo na definição também.*
> B2: *É isso, pai! É isso! Então vamos fazer o mesmo pra essa nova sequência que vai sair.*
> B9: *Pegando a ideia, vai ficar assim com quatro termos só que um termo zerado.*

Diante disso, observa-se a compreensão dos estudantes acerca da adição de uma peça repercutir na inserção do termo, conforme aumenta a ordem da sequência e sua respectiva extensão, não ocorrendo o erro E_4 no Grupo 2.

A seguir, inicia-se a análise dos dados do Grupo 3, com a fase da ação acontecendo com os estudantes C1, C2, C3, C4 e C8 na Figura 97, em que os participantes apropriam-se dos novos ladrilhos disponibilizados, elaborando estratégias de resolução da abordagem combinatória

Figura 96 – Fase da validação da situação-problema 2 por B9 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

da nova sequência. Nesse momento, ocorre ainda a dificuldade E_1, sendo verificada no diálogo entre os colegas, em que alguns participantes não compreenderam as novas regras com os novos ladrilhos disponibilizados e o preenchimento vazio quando não há peças fornecidas.

C2: *O preto não pode não, né?*
C5: *O preto não tá sendo mais usado.*
C1: *E como vai ficar então pro* $n = 1$*?*
C5: *Vai ficar sem nada.*
C3: *E pode ficar sem nada? Tem que preencher com algum ladrilho.*
C8: *Não! Se não tem peça do tamanho, tem que ficar zerado.*

Tão logo, tem-se a fase da formulação, com o erro E_2, em que os estudantes não percebem que está faltando um ladrilhamento para o caso $n = 6$, como pode ser observado na Figura 98.

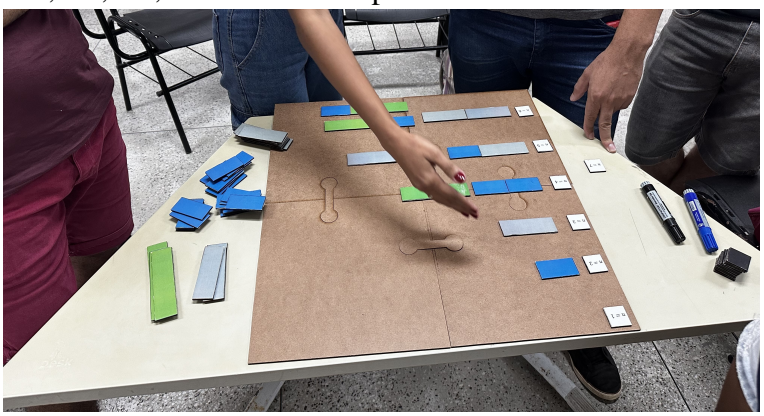
A partir disso, tem-se o diálogo entre os participantes, buscando verificar os ladrilhamentos solucionados, ainda na fase da formulação, como pode ser verificado na Figura 99.

C8: *Fica pra* $n = 2$ *com uma possibilidade.*
C7: *Pro* $n = 3$ *também com uma possibilidade. Pro* $n = 4$ *com duas possibilidades. Pro* $n = 5$ *também e pro* $n = 6$ *com três.*
C6: *Vamos fazer pra* $n = 7$*.*
C5: *Eita! A gente esqueceu aqui. Quando for pra* $n = 6$ *ainda tem esse caso de ter três dominós.*
C1: *Verdade! Ainda bem que tu percebeu. A gente ia montar a tabela e ia dar*

Figura 97 – Fase da ação da situação-problema 2 por C1, C2, C3, C4 e C8 do Grupo 3

Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 98 – Fase da formulação da situação-problema 2 por C1, C2, C3, C4 e C8 do Grupo 3



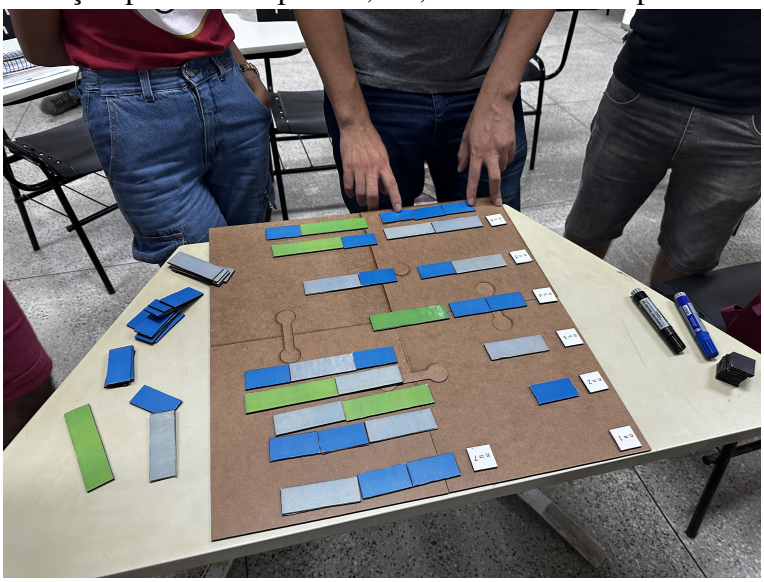
Fonte: Acervo da pesquisa.

errado lá na frente.

Durante a fase da validação os estudantes buscam a definição da nova sequência, ocorrendo a dificuldade E_4 para a obtenção da fórmula. A Figura 100 apresenta o estudante C6 obtendo a recorrência, denotando-a por F_n. Assim, é possível identificar E_5, conforme o diálogo realizado.

C7: *Vamos montar a tabela, porque aí vai dar uma sequência de novo.*
C5: *Primeiro é* 0. *Ficou só* 1. *Repetiu de novo só* 1. *Aí aumentou pra* 2, *repetiu de novo o* 2. *Veio pra* 4 *e virou* 5.
C1: *Não dá mais nenhum pro* $n = 7$*?* C6: *Não. Se a gente não olhar pro* $n = 0$, $n = 1$ *e* $n = 2$, *a gente percebe que permaneceu, depois aumentou* 1, *depois permaneceu, depois aumenta* 2 *e depois aumenta* 1.
C8: *Esses aumentos acho que não tem relação. É melhor a gente ir pela soma*

Figura 99 – Continuação da fase da formulação da situação-problema 2 por C1, C2, C4 e C8 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

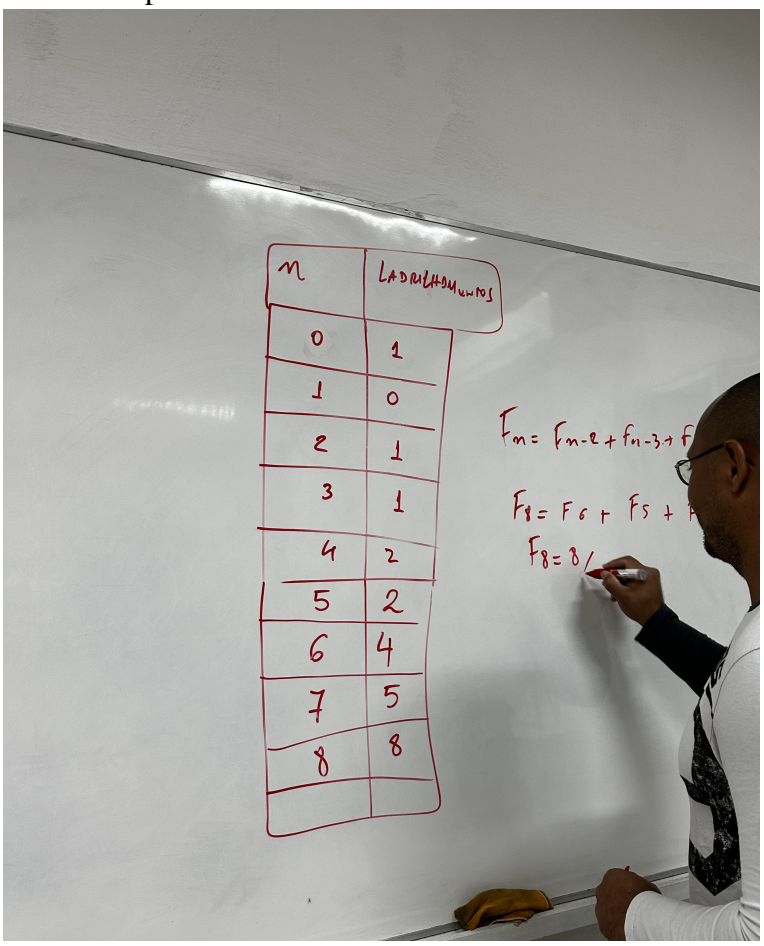
> *dos termos que nem na questão anterior.*
> C3: *Olha! Se a gente somar os dois não tá dando certo. Nem com o salto lá.*
> C6: *Se agora chegou uma outra peça, bora então somar mais um, ao invés de* 3.
> C5: *Era o que eu tava tentando aqui e tava batendo. Só que tenho que ver se pro* $n = 8$ *vai dar certo.*
> C7: *Eita! Vai rolar, porque a gente vai pular o anterior e vamos somar os três anteriores.*
> C6: *Ficaria* $F_n = F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-4}$. *E pro* $F_8 = F_6 + F_5 + F_4$ *e dá* 8.
> C2: *A gente conferiu aqui com o tabuleiro e deu certo.*

A Figura 101 retrata a verificação da fórmula obtida para o caso de $n = 8$ pelos estudantes C2 e C4 com o tabuleiro, após a discussão realizada.

Com a finalização da análise do Grupo 3, tem-se em seguida, a análise do Grupo 4. Na fase da ação, tem-se a busca dos conhecimentos prévios e realização de estratégias dos participantes destacando a discussão.

> D10: *A gente vai fazer do mesmo jeito do modelo passado, só que a gente pega e tira aonde tinha quadrado e vamos olhando aonde acrescenta essa nova peça.*
> D18: *E pro* $n = 1$*? Vai ficar só com um azul? Uma possibilidade?*
> D7: *Não! Vai ficar nenhuma possibilidade. Não tem nenhuma peça de tamanho* 1.
> D3: *É só a gente seguir a ideia do D10, porque vamos eliminando a peça toda quando ela tiver o quadrado preto.*
> D18: *A minha dúvida era mais pela questão se ia poder ficar sem nada. O vazio.*
> D4: *Agora eu fiquei na dúvida também.*
> D11: *Claro que vai poder. Não tem nenhuma regra disso. A gente tem que*

Figura 100 – Fase da validação da situação-problema 2 por C6 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

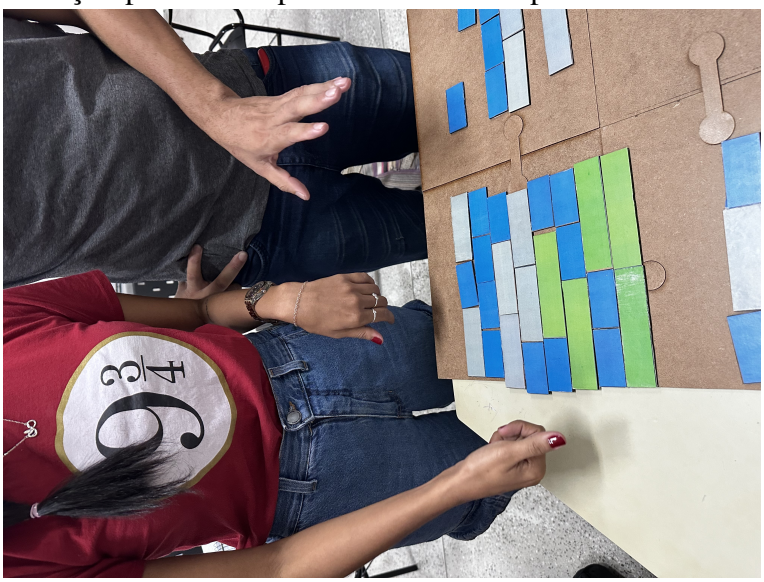
olhar que não existe nenhuma peça com tamanho 1*, então é zero possibilidades.*

Nesse momento, percebe-se a presença da dificuldade E_1, quando os estudantes ficam na dúvida em relação aos ladrilhamentos para o caso $n = 1$. A Figura 102 representa a fase da ação por D14.

Em seguida, os estudantes conseguem organizar as estratégias e finalizar a montagem da interpretação combinatória, com a presença da dificuldade E_2 para a regra de configuração da nova peça e seus possíveis ladrilhamentos, conforme o diálogo abaixo.

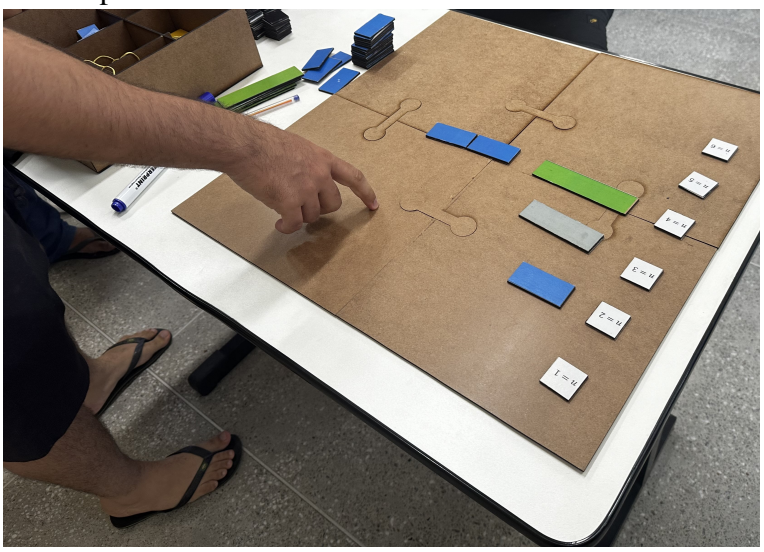
> D16: *Pro caso* $n = 6$ *não vai poder o azul e verde, porque o verde não pode ficar no final.*
> D17: *Pode sim! Isso aí era pra questão anterior. Agora o quadrado preto saiu e não tem mais isso. Pode colocar em qualquer canto.*
> D8: *E o azul duas vezes a permutação dele só conta uma?*
> D1: *É, porque vai ser a mesma coisa. Só ia contar duas se tivessem cores diferentes.*

Figura 101 – Continuação da fase da validação da situação-problema 2 por C2 e C4 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 102 – Fase da ação da situação-problema 2 por D14 do Grupo 4



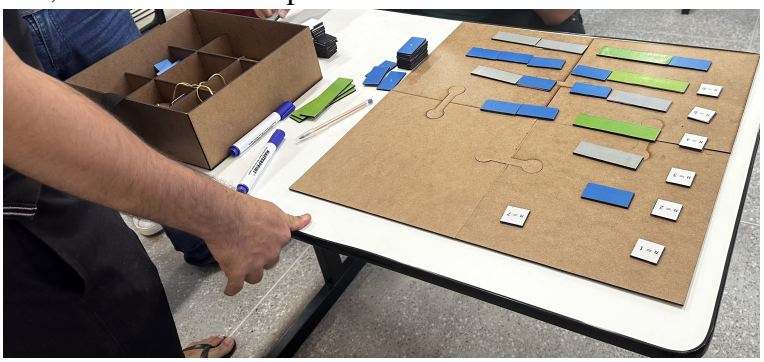
Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 103 é possível visualizar a dialética acontecendo pelos participantes D1, D6 e D14.

Para a fase da validação, os estudantes já iniciam sugerindo que façam mais um caso de n, relatando que não irão conseguir a definição tão facilmente, identificando E_4. Assim, D1 apresenta aos colegas a sua resolução e confere se não obteve nenhum erro (ver Figura 104).

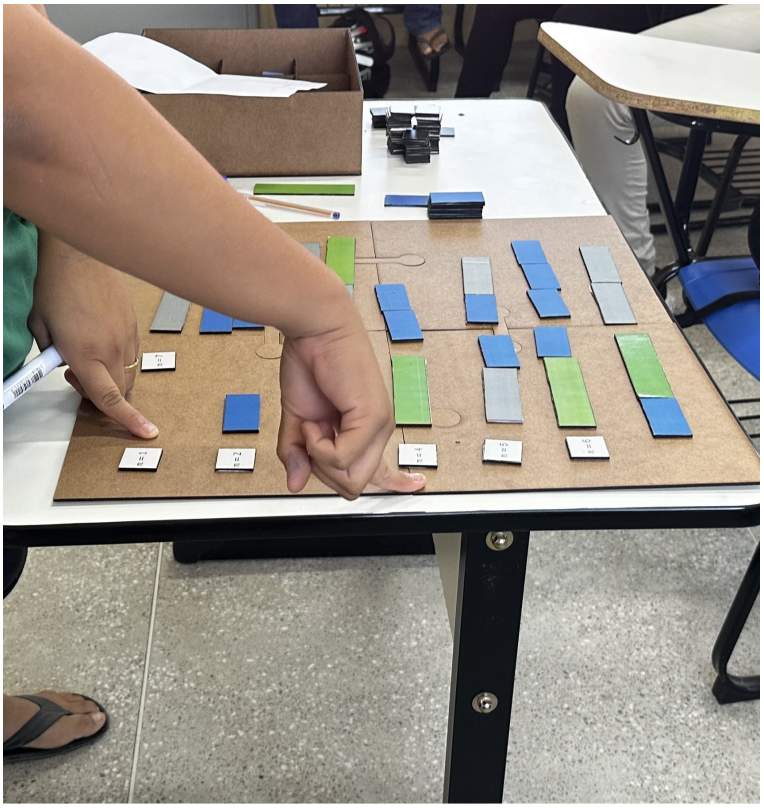
Finalizando a fase da validação, tem-se a discussão e a Figura 105, resultando na fórmula obtida pelos participantes. Novamente, eles denominam a sequência de F_n, como acontece no erro E_5.

Figura 103 – Fase da formulação da situação-problema 2 por D1, D6 e D14 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

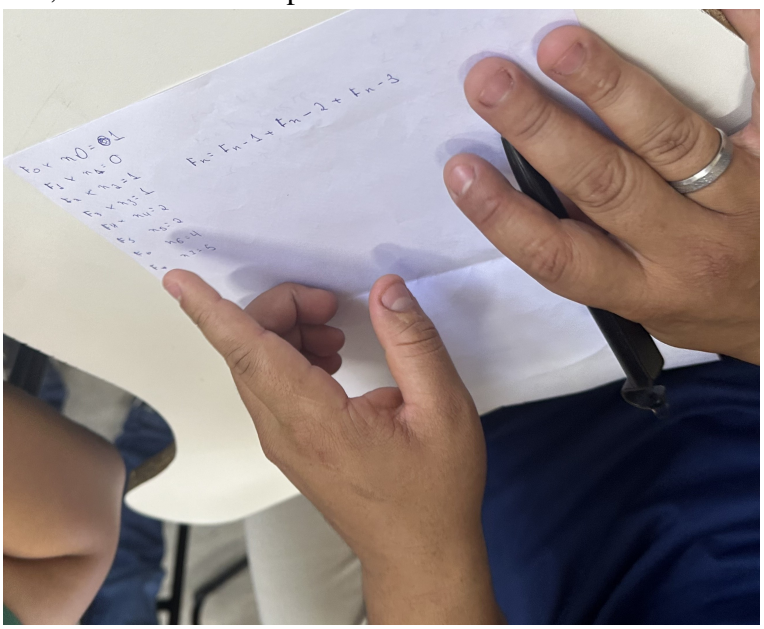
Figura 104 – Início da fase da validação da situação-problema 2 por D1 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

D12: *Como a gente já tem até pra* $n = 7$*, bora ver os números que apareceram.*
D13: *A soma dos dois com o pulo não tá dando certo. Temos que verificar outra maneira.*
D19: *Se aumentou uma peça então vai ter outro termo?*
D9: *Mas também saiu uma peça. Então ficaria na mesma? Acho que isso não tem nada haver.*
D5: *Eu encontrei aqui, olha. A soma dos três e pula* 1*. Aí soma os três anteriores.*
D15: *Porque aí se a gente tampar esse aí soma os três antes dele. Aí o* 4*, pula o* 2 *e soma o outro* 2 *com* 1 *e o outro* 1*.*
D2: *É isso! Fica* $F_7 = F_5 + F_4 + F_3$ *que é* $2+2+1$*, bate com o* 5*.*
D5: *Então é* $F_n = F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-4}$*.*

Figura 105 – Fase da validação da situação-problema 2 por D2, D5 e D15 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Assim, é finalizada a análise dos dados referente à situação-problema 2. Com isso, percebe-se que de fato os estudantes conseguiram superar as dificuldades e erros encontrados durante o percurso da atividade proposta.

6.4.3 Situação-problema 3

Com referência nas situações-problema anteriores, é elaborada a situação-problema 3, com a análise das variáveis didáticas:

- sequência polinomial de Padovan (Definição 5.49);
- sequência polinomial de Tridovan (Definição 5.50);
- modelo combinatório de Tridovan (ver Teorema 5.117);
- modelo combinatório polinomial de Tridovan (ver Teorema 5.123).

Situação-problema 3: Os números polinomiais de Padovan formam a sequência polinomial de Padovan, atribuindo peso em sua recorrência (Orhan; Hamza, 2019; Vieira, 2020). Com isso, tem-se que para $x \in \mathbb{Z}$, o polinomial de Padovan é definido, com $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$, pela recorrência: $P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x)$, com $P_0(x) = 1, P_1(x) = 0, P_2(x) = x$. Com referência nisso, pode-se realizar uma extensão dessa sequência polinomial para uma de quarta ordem com valor para $n = 0$ igual a 1. Diante disso, é possível considerar algumas peças e regras disponibilizadas a seguir: considere as seguintes peças disponíveis, com os respectivos pesos: o

dominó azul 1 x 2 com peso x^2, o triminó cinza 1 x 3 com peso x e o tetraminó verde 1 x 4 com peso 1. Assim, utilizando o material manipulável, quantas formas de ladrilhar existem para um tabuleiro de tamanho 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6, seguindo as regras de configurações e peças definidas? Os números representam alguma sequência numérica? Se sim, qual a sua fórmula de recorrência?

6.4.3.1 Análise a priori

A atividade busca a construção das definições seguintes:

- Definição 1. Regras de configuração das peças da interpretação combinatório polinomial de Tridovan (ver Teorema 5.117);
- Definição 2. Modelo combinatório polinomial de Tridovan (ver Teorema 5.117);
- Definição 3. Sequência polonimial de Tridovan (Definição 5.50).

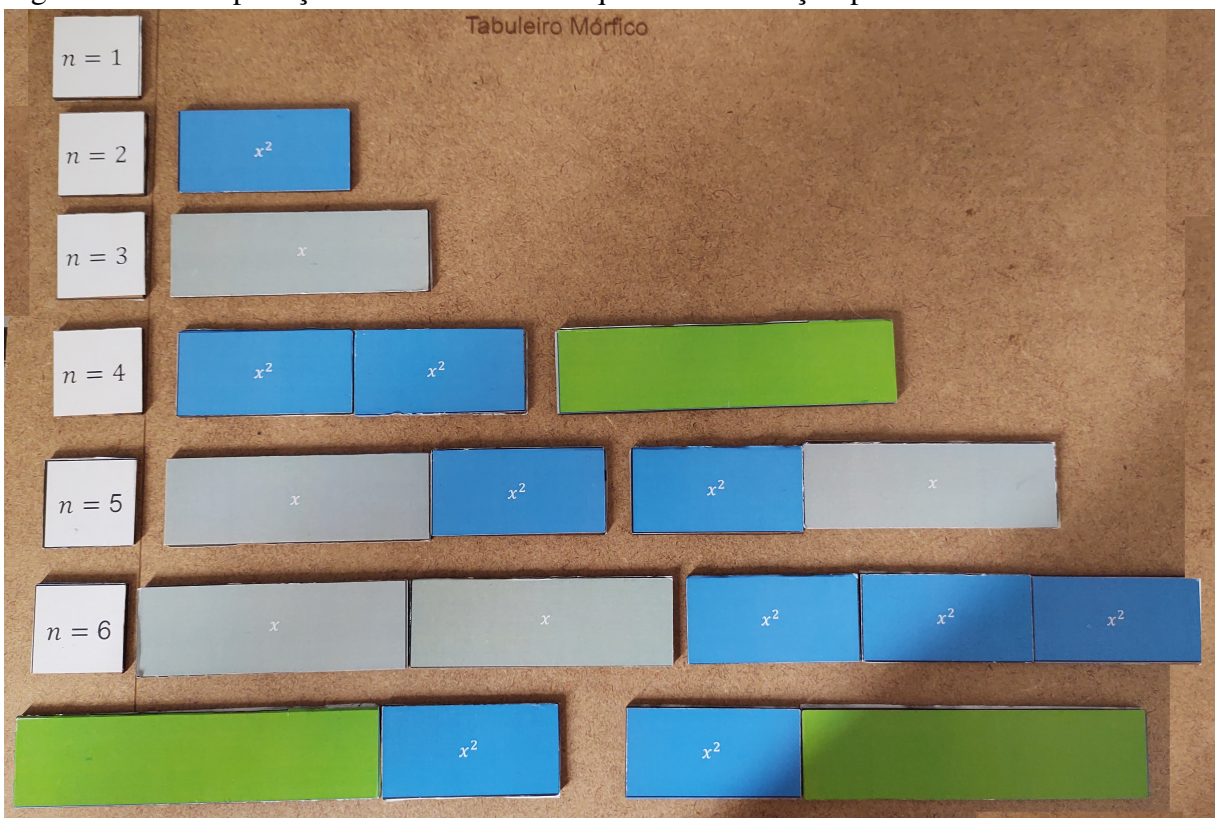
Fase da ação: diante das situações-problema anteriores, regras e definições estabelecidas, o professor estimula os estudantes para manipularem as peças disponíveis, visando construir tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6. Com o material manipulável, regras e peças estabelecidas busca-se que os estudantes combinem as peças e obtenham os tabuleiros propostos com referência nos respectivos pesos estabelecidos. Esse é o momento em que o estudante pronuncia suas escolhas com referência nas ações sobre o meio. Os possíveis erros previstos nessa fase, são em relação aos pesos (E_1), uma vez que o estudante deverá ter em mente o modelo combinatório de Tridovan, estudado na atividade anterior, para que não ocorra equívocos com os pesos estabelecidos. Nessa fase, os estudantes iniciam a construção das Definições 1 e 2.

Fase da formulação: os estudantes deverão observar os ladrilhos formados e os seus respectivos pesos. Assim, deverão multiplicar cada peso correspondente no respectivo ladrilho e, somar os valores resultantes encontrados em cada ladrilho. Espera-se que os estudantes observem que as peças e regras são semelhantes ao modelo combinatório de Tridovan, diferenciando-se com os pesos estabelecidos. A exemplo tem-se que para o tabuleiro 1 x 1, não existe nenhuma forma, logo tem-se o valor 0. Para o tabuleiro 1 x 2, existe somente um dominó azul de peso x^2, logo tem-se o valor x^2. Para o tabuleiro 1 x 3, existe somente um triminó cinza de peso x, logo tem-se o valor x. Para os demais casos, segue a mesma regra. Com isso, tem-se um possível erro previsto, denominado de E_2, em que o estudante poderá equivocar-se ao realizar o agrupamentos dos ladrilhamentos com os respectivos pesos, tendo que multiplicar quando estiverem no mesmo

ladrilhamento e, somar quando estiverem em ladrilhamentos diferentes.

É necessário que os estudantes observem o modelo combinatório de Tridovan, desenvolvido na atividade anterior, e percebam a fórmula de recorrência dada pela soma de três termos. De fato, o mesmo acontece para essa "nova"sequência construída. Assim, é possível identificar os elementos presentes no material manipulável, existindo distintas formas de ladrilhar os tabuleiros propostos, conforme apresenta a Figura 106 com a utilização do material manipulável. A partir disso, são construídas as Definições 1, 2 e 3.

Figura 106 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Fase da validação: a partir dos ladrilhos formados na fase anterior, os sujeitos deverão observar a sequência polinomial de Padovan, para assim atribuírem as variáveis x^2 e x na recorrência da nova sequência polinomial $\{E_n(x)\}_{n\geqslant 0}$. Desse modo, os estudantes podem equivocar-se, inserindo somente a variável x e não obtendo a recorrência correta (E_4), porém como estão investigando a extensão da sequência de Padovan de ordem 4, e os pesos presentes nas peças estão também com as variáveis x^2 e x, tem-se que a recorrência é dada por: $E_n(x) = x^2E_{n-2}(x) + xE_{n-3}(x) + E_{n-4}(x)$, em que E_n representa o n-ésimo termo da sequência e com os termos iniciais: $E_0(x) = 1, E_1(x) = 0, E_2(x) = x^2, E_3(x) = x$. Desse modo, tem-se o Quadro 25 com os primeiros termos da sequência polinomial em estudo.

Quadro 25 – Primeiros dez termos da sequência polinomial investigada

n	$E_n(x)$
0	1
1	0
2	x^2
3	x
4	x^4+1
5	$2x^3$
6	x^6+3x^2
7	$3x^5+2x$
8	x^8+6x^4+1
9	$4x^7+7x^3$

Fonte: Elaborado pela autora.

Fase da institucionalização: nesta fase o professor verifica as resoluções dos estudantes e revela o teorema que trata o modelo combinatório polinomial de Tridovan para um tabuleiro de tamanho 1 x n e a definição da sequência polinomial de Tridovan.

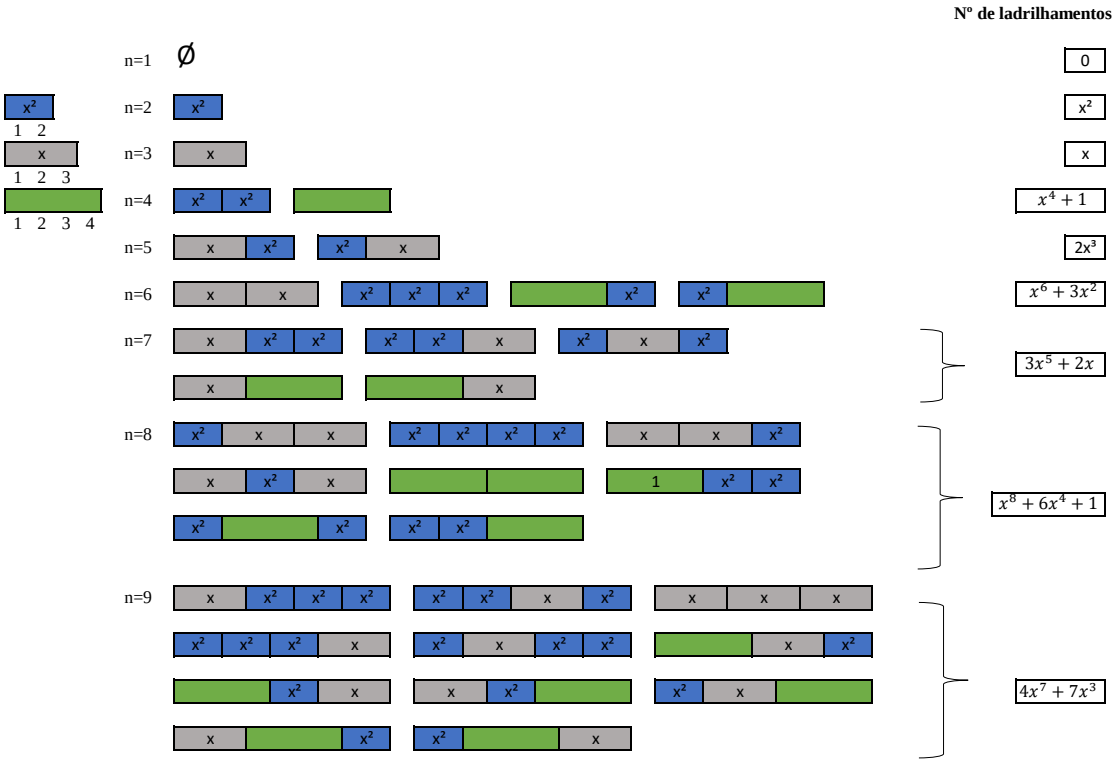
Definida por Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b), tem-se a sequência de Tridovan (P_n^3) como sendo uma sequência numérica de quarta ordem, definida a partir da extensão da sequência de Padovan. A sequência de Tridovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$ (Vieira; Alves, 2019a; Vieira; Alves, 2019b): $P_n^3 = P_{n-2}^3 + P_{n-3}^3 + P_{n-4}^3$, em que $P_{3(n)}$ representa o n-ésimo termo da sequência e com os termos iniciais: $P_0^3 = 1, P_1^3 = 0, P_2^3 = P_3^3 = 1$.

O modelo combinatório, considera um tabuleiro do tipo 1 x n, o dominó azul 1 x 2, com peso x^2, o triminó cinza 1 x 3 com peso x e o tetraminó verde 1 x 4 com peso 1, como sendo formas de ladrilhos para a sequência polinomial de Tridovan. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso, será determinado por $p_n^3(x) = P_n^3(x)$, para $n \geqslant 0$ (ver Figura 107).

6.4.3.2 Análise a posteriori

A situação-problema 3, tem como objetivo construir a definição da sequência polinomial de Tridovan. Desse modo, a aula teve início com a institucionalização da situação-problema 2, permitindo um estudo da sequência de Tridovan e seus aspectos históricos e evolutivos acerca desses números estendidos de Padovan.

Figura 107 – Ladrilhamentos polinomiais de Tridovan de $p_1^3(x)$ até $p_9^3(x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, foram apresentada a sequência polinomial de Padovan e sua abordagem combinatória polinomial, para posteriormente disponibilizar novas peças com respectivos pesos para os estudantes desenvolverem a nova recorrência dessa sequência.

Assim, a Figura 108 representa a fase da ação acontecendo pelo A7, permitindo uma manipulação das peças disponíveis.

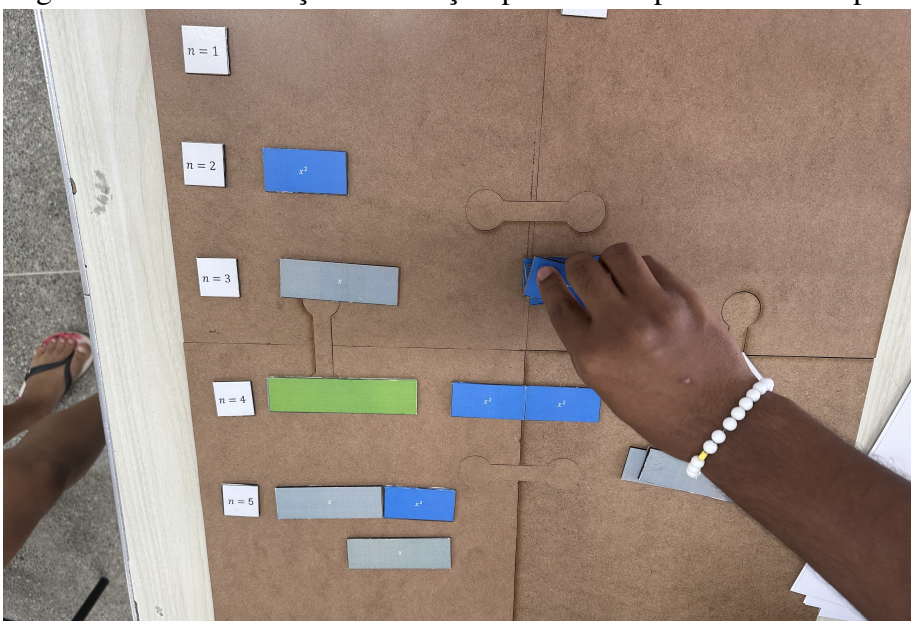
Os estudantes inicialmente preocuparem-se em apenas montar o modelo combinatório, esse fato é comprovado na fala do estudante A10 com o estudante A7 quando relatam

> A7: *Como vamos fazer com esses pesos?*
> A10: *Vamos primeiro olhar só pras pecinhas e esquecer os pesos, ignorem isso de peso por enquanto senão vai dar zig.*

Nesse momento, evidencia o erro previsto com a dificuldade dos estudantes em trabalhar com as peças e seus respectivos pesos, identificando E_1, porém com a ideia do estudante A10, de ignorar os pesos por enquanto, fica claro que a dificuldade foi sanada nesta fase.

A Figura 109 mostra a fase da formulação pelos estudantes A5 e A11, em que finaliza o modelo combinatório polinomial da sequência, permitindo uma compreensão das peças e regras de configurações. Além disso, é possível notar a dificuldade de alguns estudantes ao trabalhar com a forma polinomial das sequências, como previsto em E_2, durante a frase de A2 em que diz que

Figura 108 – Fase da ação da situação-problema 3 pelo A7 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

> *A escolha das cores e dos pesos é uma boa ideia, mas eu continuei sem entender essa história dos pesos ... tem hora que soma e tem hora que multiplica. Eu buguei.*

O estudante A3 então complementa

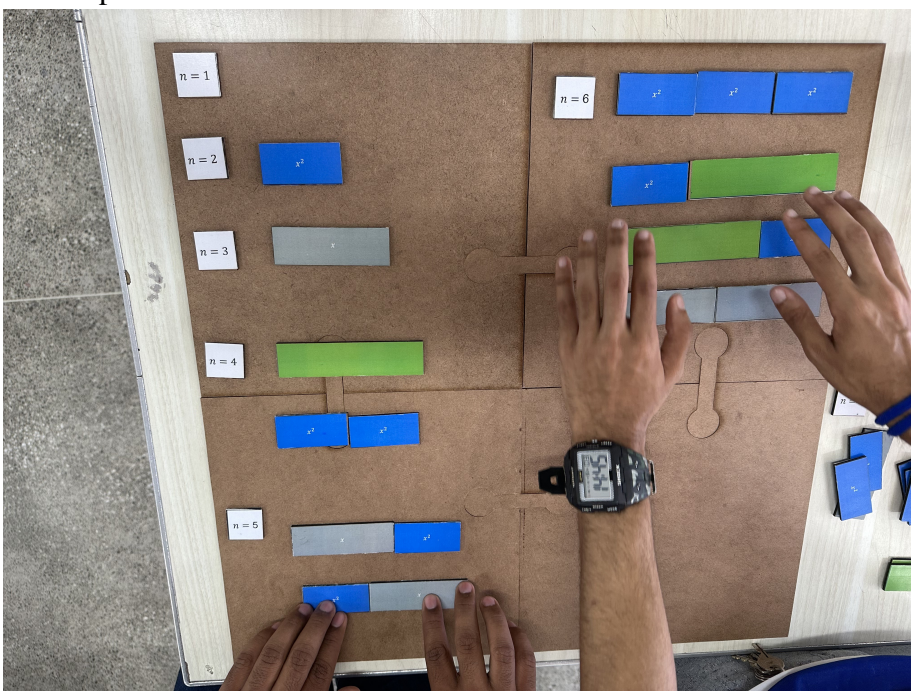
> *É só tu olhar como acontece pra Padovan poli, quando eles tão fazendo parte da mesma peça, aí a gente multiplica. E pra completar o caso de n, a gente soma. Soma os ladrilhamentos.*

A fase da validação, permitiu obter a recorrência da sequência, representando a sua forma polinomial. A Figura 110 retrata essa fase pelo estudante A3, construindo a definição da sequência polinomial. Observa-se que A3 denominou a sequência como sendo T_n, devido a institucionalização da situação-problema 2 e nomenclatura estabelecida durante a respectiva fase, não ocorrendo o erro E_5.

Uma outra discussão ocorre entre os estudantes, na busca da definição e a dificuldade prevista em E_4

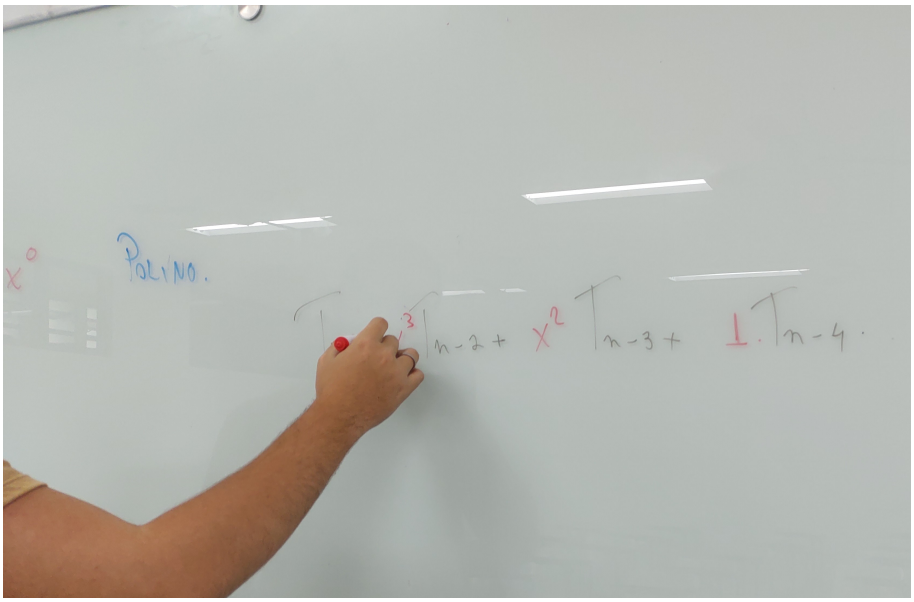
> A7: *Vamos fazer assim, vamos utilizar as sequências anteriores para tentar definir uma regra de recorrência para essa sequência polinomial.*
> A11: *A princípio já tentei fazer aqui uma simples soma dos termos anteriores depois da quebra do salto, que acabou não se verificando.*
> A7: *Então é melhor a gente ir partindo da sequência polinomial de Padovan, atribuindo pesos aos coeficientes da recorrência que são os termos anteriores.*
> A8: *É melhor a gente montar uma tabela para saber quais valores estão aparecendo para cada caso de n.*
> A6: *A gente pode ver que as peças são as mesmas de Tridovan, mas só que agora tem peso. Minha opinião é que a recorrência vai ser a mesma, vamos ter que somar três anteriores só que com peso na recorrência.*

Figura 109 – Fase da formulação da situação-problema 3 pelo A5 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 110 – Fase da validação da situação-problema 3 pelo A3 do Grupo 1



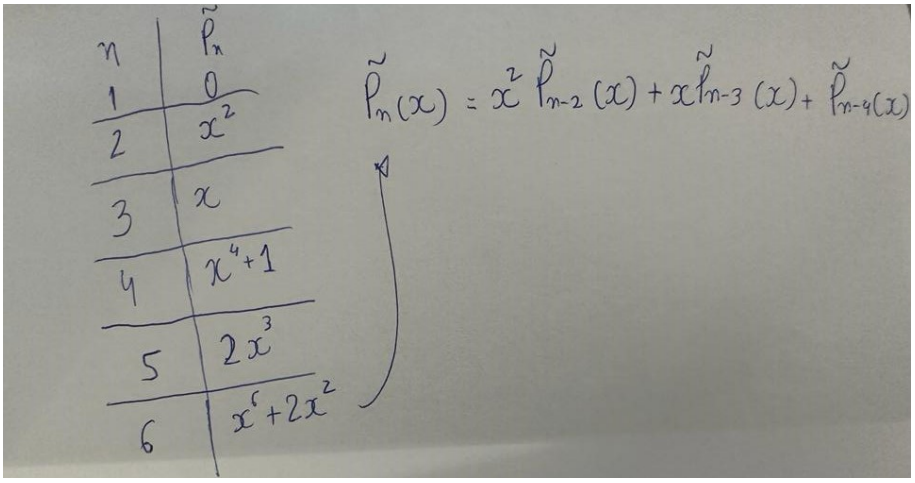
Fonte: Acervo da pesquisa.

A7: *Cuidado com o salto da sequência.*
A11: *Verdade! Mas olhem só que eu notei, se pra Padovan polinomial o dominó tinha peso x e era justamente o primeiro coeficiente da recorrência. Então agora a gente tem o dominó com peso x^2, que teoricamente era pra ser o peso do primeiro coeficiente dessa nova sequência.*
A6: *Acho que tu matou a charada, porque então o triminó que tem peso x vai ser o nosso segundo coeficiente e o tetraminó peso 1 com o mesmo peso lá na recorrência.*
A11: *Isso, então fica assim na tabela, com a recorrência desse jeito.*

A6: *Vamos testar aqui na mão pra ver se bate. É bate sim!*

Então, eles optam pela tabela, conforme apresentada na Figura 111 e conseguem obter a definição da sequência polinomial, denominada por eles de $\tilde{P}_n(x)$.

Figura 111 – Fase da validação da situação-problema 3 pelo A6 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante ainda essa atividade, o estudante A9 encontrou dificuldades nas operações com os polinômios, sendo necessário que os demais participantes explicassem de forma breve, a multiplicação e adição de polinômios. Ainda assim, ao final da situação-problema 3, A5 afirma que

> *É interessante como a professora aborda essas sequências, fica mais claro as diferentes formas e com as peças que a gente monta. Minha dificuldade hoje foi em relação para fazer as operações com os pesos, mas consegui lembrar que uma maçã mais uma maçã é igual a duas maçãs.*

Ainda o estudante A3 relata que

> *No começo eu não tinha entendido a forma polinomial de Padovan, mas depois que a professora foi pro tabuleiro, eu entendi direitinho. Fica mais simples, porque a minimalismo das peças torna mais fácil a condução da atividade e das variações.*

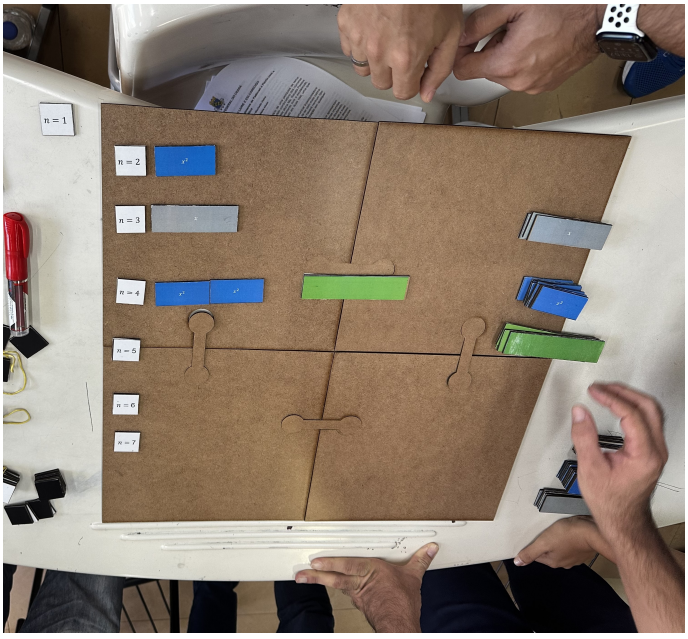
Com isso, as dificuldades são sanadas e ocorre a compreensão da recorrência da sequência polinomial em estudo.

A seguir, são analisados os comportamentos dos estudantes do Grupo 2.

Iniciando a atividade, os participantes deparam-se com as novas peças e os pesos estabelecidos, tendo um pouco de dificuldade em relação aos pesos, como previsto em E_1 A

Figura 112 apresenta o início do manuseio dos ladrilhos para a composição da abordagem combinatória, durante a fase da ação.

Figura 112 – Fase da ação da situação-problema 3 por B1, B6 e B8 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

O diálogo remete uma breve discussão entre os estudantes, permitindo que haja o entendimento em relação aos pesos das peças e como esses são calculados para compôr os ladrilhamentos polinomiais da sequência. Nota-se que alguns participantes estavam em dúvida sobre o tamanho e o peso dos ladrilhos e, como esses pesos iriam ser calculados e integrados ao valor do termo da sequência, como previsto em E_2. Porém, com a contribuição e partilha dos demais colegas, foi possível que essa dúvida fosse resolvida, possibilitando dar contiuidade para à atividade de forma correta.

> B10: *Pera! Eita! Agora ele vale* 4*, mas tem peso* 1*? Ou vale* 1 *e tem peso* 4*?*
> B2: *Não, ele vale* 4 *que é o tamanho dele. Mas ele tem peso* 1*. Esse aqui tem peso x e vale* 3*. E esse outro peso* x^2 *e vale 2.*
> B5: *Então a gente vai ter assim. Para* $n = 2$*, vai ser só o dominó que é* x^2*.*
> B7: $n = 3$ *só o triminó que é x.* $n = 4$ *vai ser então* 2 *dominós que vale quanto mesmo?*
> B5: *Fica* x^4 *e fica também mais* 1*, porque tem o tetraminó.*
> B1: *Não, aqui é* x^2 *vezes* 1*.*
> B5: *Não, fica somando. Fica* $x^2 + 1$*. A gente só vai multiplicar quando for na mesma peça.*

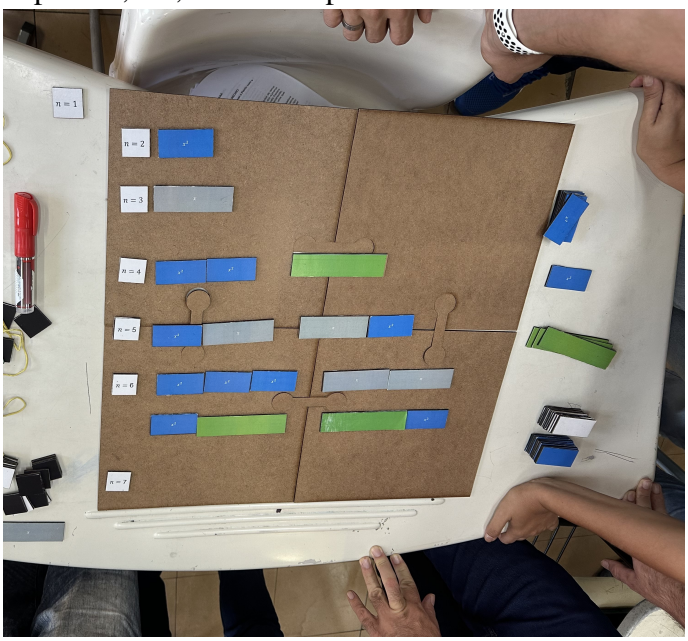
A fase da formulação pode ser verificada na Figura 113, em que os estudantes conseguem preencher o tabuleiro mórfico com os possíveis casos para a abordagem combinatória

polinomial da sequência investigada. Assim, são estabelecidas estratégias, como pode-se perceber no relato do estudante B7.

> *Eu acho melhor a gente fazer assim, vamos montar com as peças, olhando só pro tamanho delas e esquecendo esses pesos. Porque vai dar a mesma coisa do Tridovan, porque são as mesmas peças. Penso eu que seja assim.*

Esse relato é relevante, visto que o participante conseguiu identificar que a sequência em estudo refere-se os números de Tridovan, necessitando agora estabelecer os pesos que estarão em seus respectivos coeficientes da recorrência.

Figura 113 – Fase da formulação da situação-problema 3 por B1, B6, B8 do Grupo 2

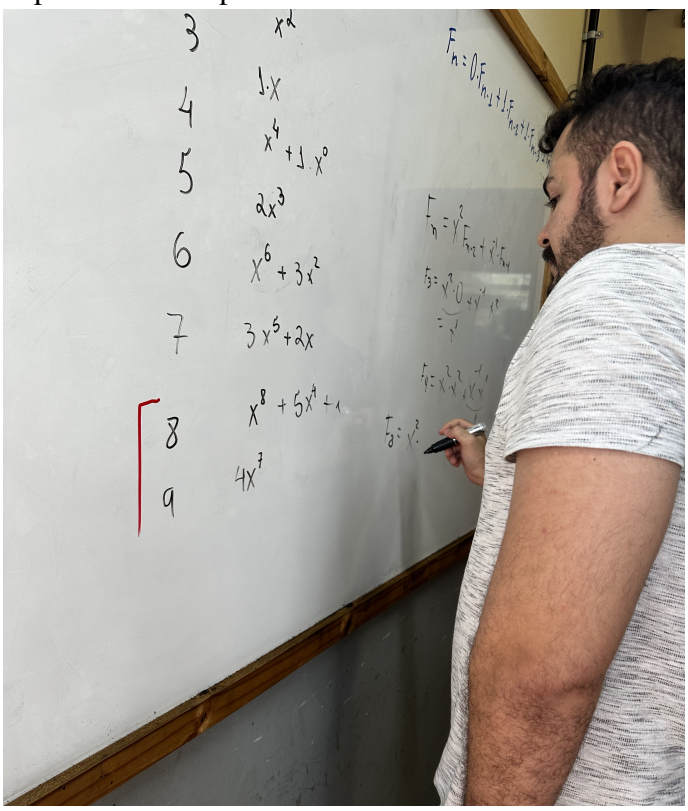


Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 114 retrata o estudante B3 na resolução da atividade para $n = 8$ e $n = 9$ por meio de cálculos matemáticos, iniciando a fase da validação. Com isso, ele parte dos valores já obtidos pelo tabuleiro, e busca os valores para os determinados n estabelecidos. Porém, o seu raciocínio não chega a uma solução correta e esse fato é identificado pelos colegas ao verificarem com as peças do tabuleiro para os valores de $n = 8$ e $n = 9$, ocorrendo portanto o erro E_4.

> B9: *Oh! Nos ímpares tá aumentando assim* $5 - 2 = 3$.
> B3: *É! Tô vendo também. Tá aumentando de* 2 *em* 2 *nos ímpares.*
> B5: *Vamos ver se a gente consegue descobrir dos dois.*
> B4: *Se fosse no* 9 *teria um* x^7.
> B10: *Poderia ser um* $4x^7$.
> B1: *Eu não tô enxergando isso não. Me mostra aqui.*
> B3: *Porque aqui amigo, olha nos ímpares tá crescendo o coeficiente. Se no* $n = 7$ *era* 3*, então aqui no* $n = 9$ *vai ser* 4.

Figura 114 – Fase da validação da situação-problema 3 por B3 do Grupo 2



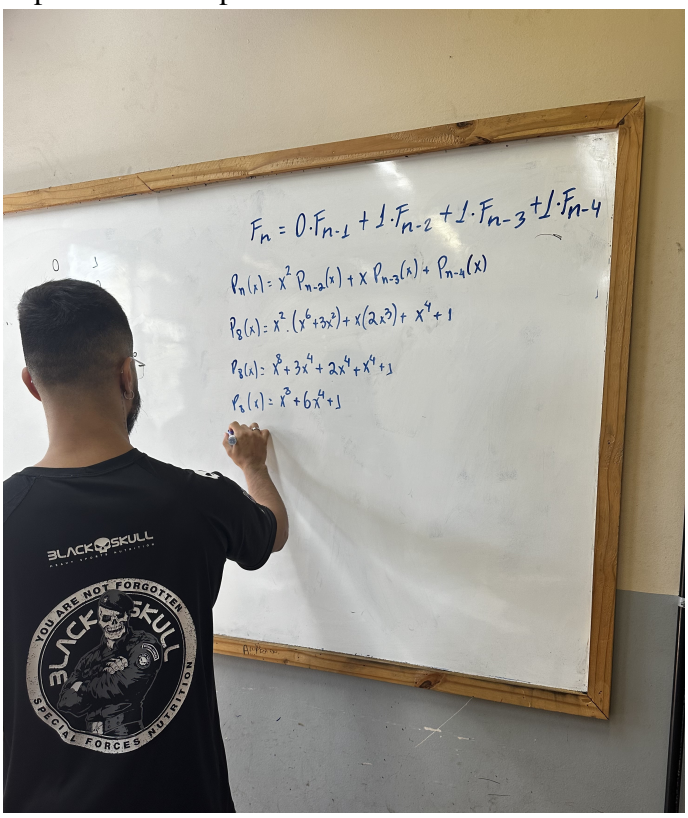
Fonte: Acervo da pesquisa.

B1: *Ah!*
B5: *Então a gente já dá pra saber que no* $n = 9$.
B10: *É! Porque tá crescendo de* 2 *em* 2. *Então vai ficar* $4x^7$.
B2: *E nos pares?*
B1: *Eu acho que fica assim.* $5x^2$.
B3: *Não fica* $5x^3$, *porque tá no n par.*
B5: *Porque ali começa com* x^0, x^2, x^4.
B10: *Eita e o resto? Sei mais não. Porque não vão ficar só esses termos. Tem mais.*
B5: *Deixa eu fazer aqui no tabuleiro e a gente vai vendo se bate com esse aí.*
B2: *Fica diferente! O* $n = 8$ *fica* $x^8 + 6x^4 + 1$ *e a gente tava achando que era* $5x^4$*!*
B8: *Então é melhor a gente pegar a recorrência e pensar nos coeficientes.*
B3: *Beleza! E vamos pegar a recorrência do Tridovan e só mudando os pesos, pra vê se sai. Já que as peças são as mesmas, né?*

A partir disso, os participantes concordam em descobrir a definição por meio do tabuleiro mórfico e partindo da definição de Tridovan. A Figura 115 retrata a fase da validação por meio do estudante B2, verificando se os pesos estabelecidos como coeficientes na definição (fórmula de recorrência) compreende os termos da sequência, nesse caso para o valor de $n = 8$. Destaca-se que os estudantes verificaram para os valores de n até 10 e utilizaram a nomenclatura de Padovan, ocorrendo E_5.

A conclusão da atividade foi possível após a discussão dos participantes

Figura 115 – Fase da validação da situação-problema 3 por B2 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

> B9: *A gente vai ter que pegar esses pesos nas peças e colocar nos coeficientes.*
> B2: *Eita! Verdade! Bora fazer assim mesmo.*
> B9: *Bora olhar pro polinomial de Padovan. Lá tem peso x e* 1.
> B10: *Então a gente tem agora o* x^2.
> B2: *Eu acho que o peso maior vai tá no* $n-2$ *e o menor no n menor.*
> B3: *Não, é o contrário.*
> B2: *Mas pela lógica de Padovan, vai diminuindo o coeficiente, então vai diminuindo no Tridovan também.*
> B5: *Exatamente! Então fica do maior pro menor. Testa aí pra confirmar.*

Com isso, encerra-se a análise do Grupo 2 e inicia a análise do Grupo 3.

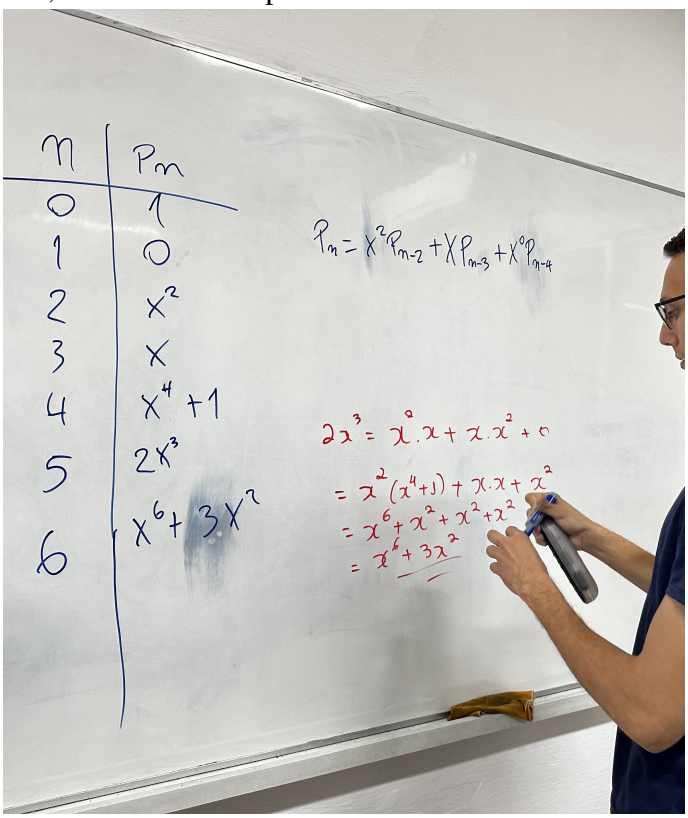
Iniciando a fase da ação, tem-se o relato do estudante C3 explicando aos colegas a sua estratégia utilizada para que possam manusear o tabuleiro com os novos ladrilhos, diante das dificuldade E_1 encontrada pelos colegas.

> *Agora com esses polinômios complicou. Então é melhor a gente ir fazendo e olhando só pro tamanho das peças pra poder depois que a gente faz esse babado aí de multiplicar. Porque como tem que multiplicar quando tá na mesma casa e somar no final os casos de n, então a gente pode se embaralhar.*

A Figura 116 apresenta a fase da ação pelos estudantes C1, C4 e C5.

Na fase da formulação, os estudantes optam por realizar o caso para $n = 7$, como apresentado na Figura 117 pelo estudante C4, para que assim possam obter a recorrência da nova

Figura 116 – Fase da ação da situação-problema 3 por C1, C4 e C5 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

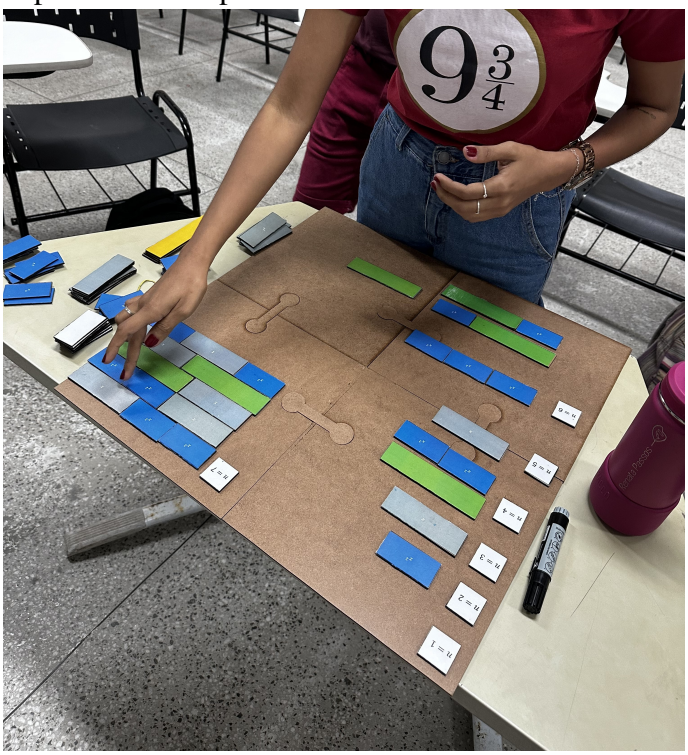
sequência em estudo, com isso pode identificar E_2, visto que os estudantes sentem uma certa dificuldade para o preenchimento dos ladrilhamentos e obtenção dos termos da sequência.

Durante a fase da validação, tem-se a Figura 118 em que os estudantes vão ao quadro para desenvolverem a ideia da obtenção dos termos da sequência. Com isso, ocorre a discussão abaixo, ocorrendo E_4.

> C3: *Se a gente for olhar pra Padovan polinomial, a gente vai ver que tem x aí no coeficiente. Então vai rolar algo da mesma forma pra essa sequência.*
> C5: *E a gente já sabe que é tridovan, porque são as mesmas peças, só que com pesos agora.*
> C1: *Verdade. Então vai ser a soma dos três termos depois do salto. Vamos em busca do coeficiente.*
> C6: *Eu tentei aqui, mas não deu certo.*
> C8: *O meu deu certo. Olha a minha ideia... A gente vai multiplicar por x^2 e depois por x.*
> C2: *Faz sentido! Porque a gente olha pros pesos das peças e vai ser o coeficiente.*
> C3: *Vamos fazer aqui o $n = 6$ pra saber se bate.*

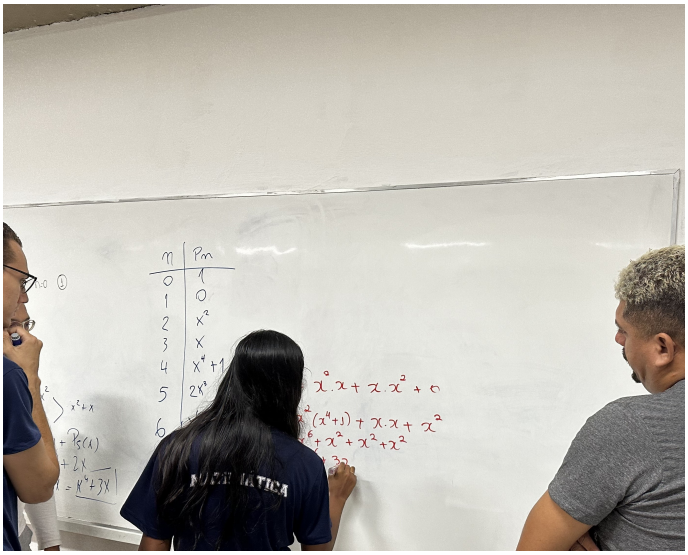
Finalizando a fase da validação, tem-se a Figura 119 por C8, permitindo definir a recorrência da sequência polinomial, denominando-a de P_n, ocorrendo E_5. De fato, os estudantes

Figura 117 – Fase da formulação da situação-problema 3 por C4 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 118 – Fase da validação da situação-problema 3 por C1, C2, C4 e C6 do Grupo 3

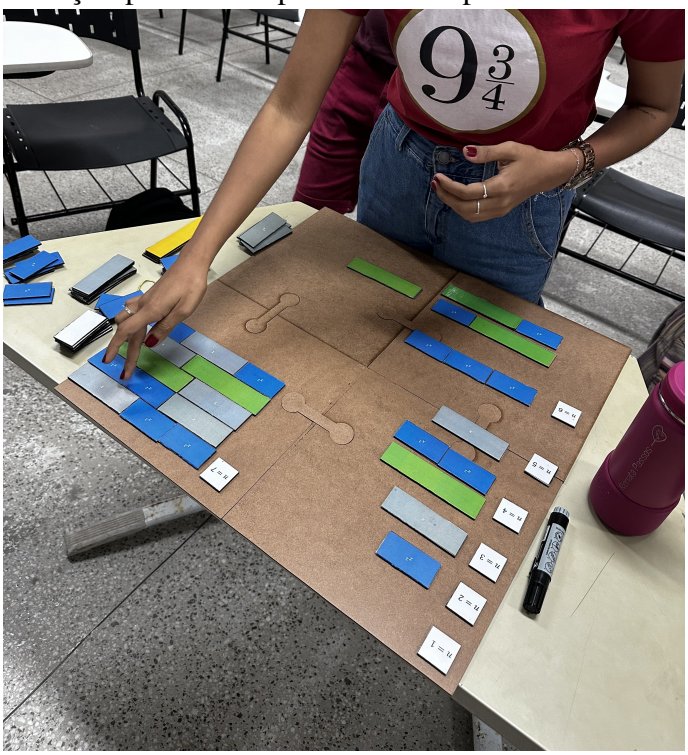


Fonte: Acervo da pesquisa.

modificaram a nomenclatura da recorrência de F_n, atribuída das situações-problema 1 e 2, para P_n, não atentando-se para o (x) existente na sequência de Padovan polinomial.

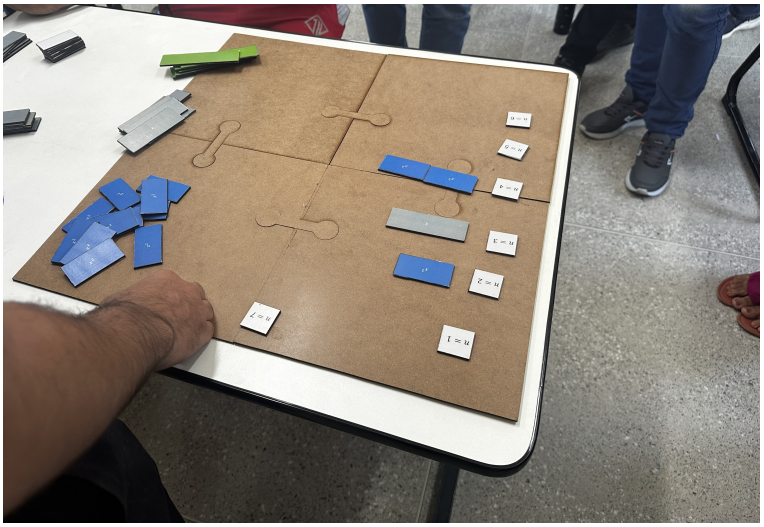
A seguir, inicia-se a análise do Grupo 4. Iniciando a fase da ação, tem-se a Figura 120 com os participantes D2, D4, D5, D10, D11 e D12 manuseando o tabuleiro e estabelecendo estratégias para a resolução da atividade proposta.

Figura 119 – Continuação da fase da validação da situação-problema 3 por C8 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 120 – Fase da ação da situação-problema 3 por D2, D4, D5, D10, D11 e D12 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

O diálogo abaixo permite identificar E_1, em que ocorre a dúvida em relação aos pesos nos ladrilhos.

D5: *O primeiro vai ficar x^2, o segundo é x. Aqui já vai multiplicar vai ficar x^4.*
D1: *Como é que tu chegou nesse x^4?*
D8: *É só tu ir multiplicando os $x^2 \cdot x^2$ que fica o x^4*
D13: *Eu até entendi essa multiplicação aí, mas a soma lá no Padovan vai ficar difícil.*

D5: *É só tu fazer como a professora disse no início da explicação pro Padovan polinimial. Tu vai multiplicar os que tiverem na mesma peça e ao invés de multiplicar as possibildidades, agora a gente soma.*
D3: *Antes a gente também num somava as possibilidades? Então agora a gente continua somando. Só que agora a gente soma polinômios.*
D13: *Então se tivesse um cinza lá no* $n = 2$*, iria ficar* $x^2 + x$*, né isso*
D8: *Era, mas só não ia dar certo por causa do tamanho da peça.*
D13: *Eu sei, tô só dando uma suposição pra vê se tá certo a história dos pesos.*

A fase da formulação inicia com um diálogo entre os colegas, identificando E_2, quando D15 observa a ausência de um ladrilhamento para o caso $n = 4$, bem como o equívoco durante a multiplicação dos ladrilhamentos para o caso $n = 7$. Além disso, é impossível identificar que o Grupo 4 utilizou as peças sem observar os pesos para a montagem do tabuleiro, visto que segundo eles já haviam memorizado os respectivos pesos dos ladrilhos.

D15: *Ali no* $n = 4$ *tá faltando a peça verde.*
D8: *Então vai ficar* $x^4 + 1$*. A gente já ia errar lá na frente na hora de fazer a definição.*
D17: *Confere logo os outros casos e vamos fazer logo até o* $n = 7$*, porque esse aí com pesos é difícil.*
D7: *O* $n = 5$ *fica* $x^3 + x^3$ *então é* $2x^3$*. Vai anotando aí. Aqui fica* $x^2 + x^6$*.*
D9: *Não, o* x^2 *tá aparecendo* 3 *vezes.* $x^5 + x^5 + x^5 = 3x^5$*.*
D15: *Tem esse aqui, que é x. Então vai ficar* $2x$*.*
D16: *Anota aí que o* $n = 7$ *é* $3x^5 + 2x$*.*
D1: *Tu colocou as peças sem os pesos, aí a gente esqueceu de multiplicar os pesos.*

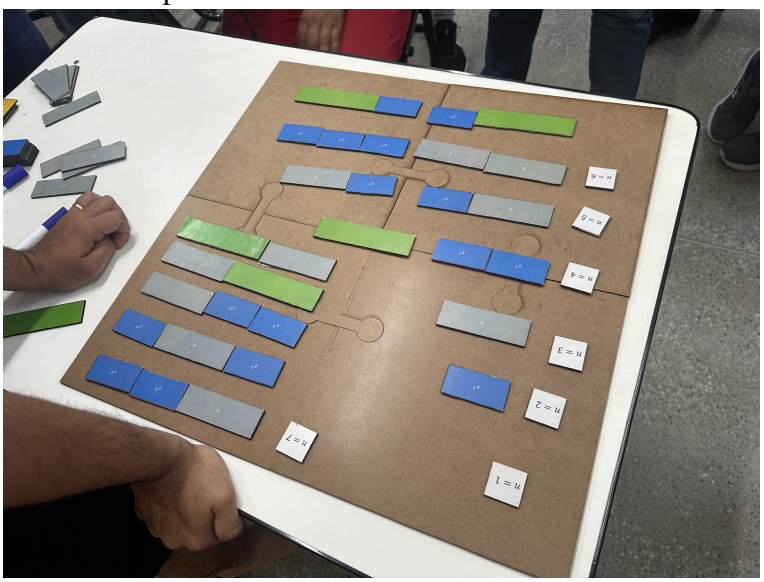
Com isso, tem-se a Figura 121 com a fase da formulação por D14, apresentando aos colegas a sua resolução para a interpretação combinatória.

A Figura 122 apresenta a resolução de D19 na fase da formulação, em que cria uma tabela, para o cálculos dos termos da sequência, como forma de facilitar a obtenção da definição, continuando assim a fase da formulação.

Finalizando a fase da formulação, observa-se a discussão entre D3, D7 e D18 referente ao erro E_2, esquecendo a regra de multiplicação dos ladrilhamentos com os pesos.

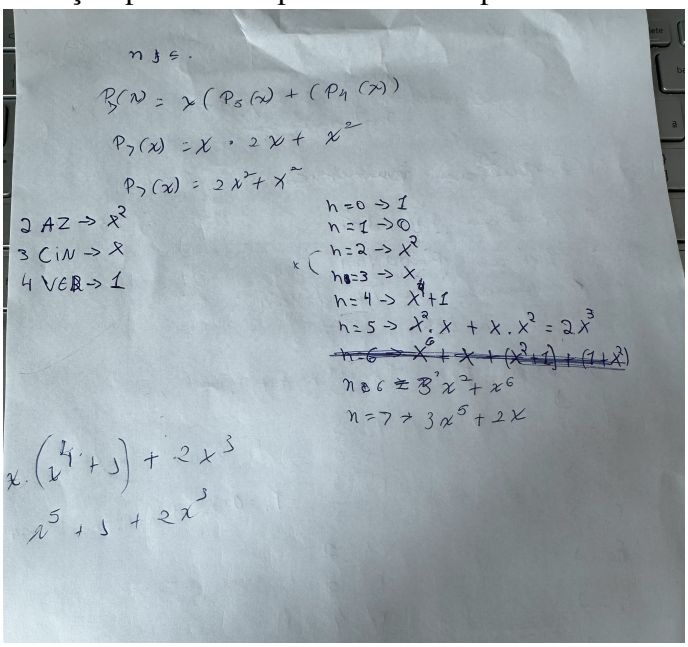
D18: *Tá faltando alguma coisa no número* 6*, nas duas peças debaixo, né não?Falta o* $+2$*, nas duas peças debaixo.*
D3: *Cadê?*
D18: *Ali no* $n = 6$*. Seria* $x^2 + 1$*, né? Então ficaria* $2x^2 + 1$
D7: *Não, aí é* $x^2 \cdot 1$*.*
D18: *Ah, é verdade. Multiplica aí dentro da peça. Só soma as combinações no final.*

Figura 121 – Fase da formulação da situação-problema 3 por D14 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 122 – Continuação da fase da formulação da situação-problema 3 por D19 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

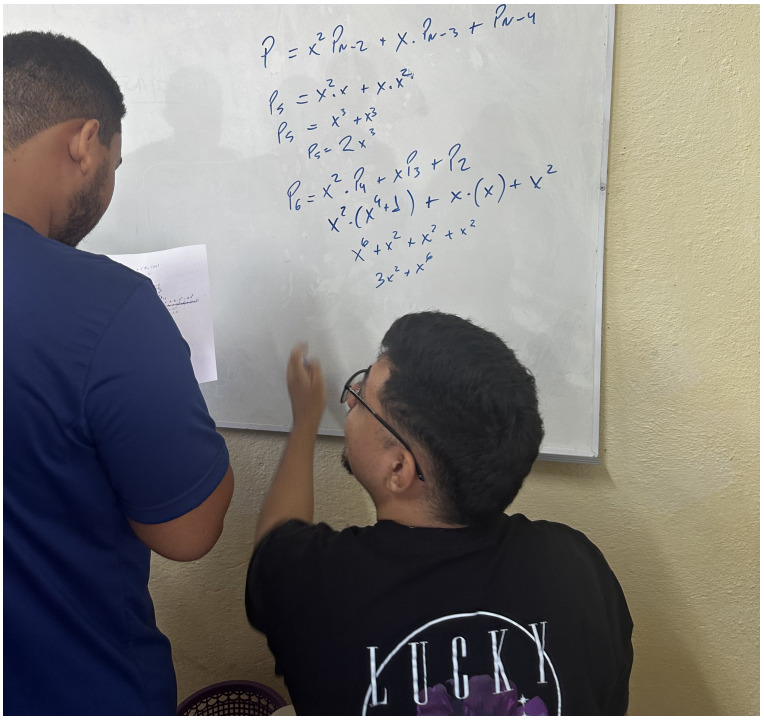
Após isso, tem-se a fase da validação, com a discussão abaixo identificando a dificuldade E_4 para a obtenção da definição, bem como E_5 com a nomenclatura P utilizada pelos colegas. Ainda é possível destacar que os sujeitos obtêm duas definições, sendo essas verificadas com a utilização do tabuleiro para conferência.

D8: *Esse x aqui a gente pode multiplicar por x.*
D3: *Bora pegar a soma dos quatro anteriores. Isso a gente já sabe porque são as mesmas peças do Tridovan.*

D11: *Então vamos multiplicar o primeiro por x.*
D19: *De forma isolada, vai ser os quatro anteriores, com o pulo. Mas se pegar então os dois primeiros e multiplicar por x.*
D5: *Fura!*
D16: *Olha o que achei aqui. Se pegar tipo* x^2 *vezes sem ser o imediato que é o* $n-2$*. Depois x vezes o* $n-3$*.*
D19: *Fura também. Mas com a tua ideia fica faltando só multiplicar ainda o* 1 *vezes o* $n-4$*.*
D11: *Pois é, eu fazendo pro* P_5*, não consegui verificar que tava faltando, porque bateu.*
D19: *Então olha.* $P = x^2 \cdot P_{n-2} + x \cdot P_{n-3} + P_{n-4}$*.*
D2: *Vamos fazer pro* P_6 *pra conferir.*
D12: *Tá errado, porque o* $n = 6$ *fica* $x2 \cdot x^4$ *que dá* x^6*.*
Mas tem x^6*. Ahhhh! Deu certo!!!*
D13: *Viu, pro* P_6 *já vai precisar do outro termo, que é justamente o* P_{n-4}*.*
D7: *Fiz o* P_7 *e deu certo também com essa definição nova.* D19: *Eu tava na dúvida se a gente poderia ter a fórmula com ou sem o coeficiente* 1*. Por isso que foi massa ter que tentar o* 6 *e o* 7 *aí no tabuleiro pra conferir.*

A Figura 123 apresenta a fase da validação por D2 e D19, em que após a discussão, verificam os casos para $n = 5$ e $n = 6$, permitindo esclarecer a dúvida em relação as duas definições obtidas.

Figura 123 – Fase da validação da situação-problema 3 por D2 e D19 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Com isso, finaliza a análise dos dados referente à situação-problema 3. Essa observação é fundamental para a compreensão dos estudantes sobre como o peso das peças

está diretamente relacionado ao coeficiente da recorrência. Ao explorar essa conexão entre os elementos físicos e os conceitos matemáticos, os estudantes podem desenvolver uma compreensão mais profunda e intuitiva das propriedades das sequências recorrentes. Isso não apenas fortalece seu entendimento dos conceitos matemáticos subjacentes, mas também promove uma abordagem mais prática e contextualizada para o aprendizado.

A análise conduzida durante a experimentação da situação-problema 3 confirmou a ocorrência dos erros previstos durante a análise a *priori* das situações didáticas. Foi possível identificar que, durante a execução desta situação-problema, os erros estavam diretamente relacionados à compreensão das novas peças disponíveis, incluindo a consideração de seus respectivos pesos, e à obtenção da definição da nova sequência em estudo.

6.4.4 Situação-problema 4

A situação-problema 4, investiga as seguintes variáveis didáticas:

- sequência de Tetradovan (Seção 5.14.2 e Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b));
- modelo combinatório de Tetradovan (ver Teorema 5.119);

Situação-problema 4: De modo a realizar mais uma extensão da sequência de Padovan, tem-se uma nova sequência de quinta ordem. Diante disso, considere as seguintes peças: dominós azuis 1 x 2, triminós cinzas 1 x 3, tetraminós verdes 1 x 4 e pentaminós amarelos 1 x 5, todos com peso 1. Assim, utilizando o material manipulável, quantos ladrilhamentos pode-se obter para os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6? Esses números formam uma nova sequência? Se sim, qual a sua fórmula de recorrência?

6.4.4.1 Análise a priori

Esta atividade objetiva a elaboração da definição:

- Definição 1. Modelo combinatório de Tetradovan (ver Teorema 5.119);
- Definição 2. Sequência de Tetradovan (ver Seção 5.14.2 e Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b)).

Fase da ação: os estudantes devem ser estimulados a construírem os ladrilhamentos para os respectivos tamanhos de tabuleiros propostos. Para isso, é necessário que haja uma compreensão das regras e definições de peças. Pode-se observar que alguns erros previstos nesse momento podem ocorrer, sendo esses em relação às formas de ladrilhar. Diante disso, os

estudantes deverão ter compreendido bem as regras e peças, para que o manuseio seja realizado de forma correta no material manipulável. É o momento em que inicia a construção da Definição 1.

Fase da formulação: com referência nas regras, os estudantes deverão construir as formas de ladrilhar nos tabuleiros propostos, preocupando-se em não esquecer nenhuma forma possível. Assim, devem conseguir obter a Figura 124, onde: para o tabuleiro 1 x 1, não existe nenhuma forma de ladrilhar; para o tabuleiro 1 x 2, tem-se uma forma; para o tabuleiro 1 x 3, tem-se uma forma; para o tabuleiro 1 x 4, têm-se 2 formas; para o tabuleiro 1 x 5, têm-se 3 formas; para o tabuleiro 1 x 6, têm-se 4 formas. Um possível erro que pode ocorrer nesse momento, é em relação à visualização das formas de ladrilhar, uma vez que o assunto de combinatória é considerado de difícil compreensão pelo fato de sua complexidade e ausência de aprofundamento durante o estudo na educação básica. Nesse momento tem-se a continuação da construção da Definição 1.

Figura 124 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 4

Fonte: Acervo da pesquisa.

Fase da validação: nesse momento, os sujeitos deverão investigar os números contidos no material manipulável, para assim obterem relação com a sequência nova estendida. Desse modo, é possível revisitarem o modelo combinatório de Tridovan, e perceberem as semelhanças. Com isso, tem-se que a relação de recorrência da nova sequência estendida é

dada por: $N_n = N_{n-2} + N_{n-3} + N_{n-4} + N_{n-5}$, para $n \geq 5$, com os valores iniciais $N_0 = 1, N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 1, N_4 = 2$. Ainda assim, os estudantes deverão observar que a partir das formas de ladrilhar, tem-se os termos da sequência nova estendida, contendo a quantidade de formas de ladrilhar no tabuleiro de tamanho n. Um possível erro nessa fase é em relação à obtenção dessa fórmula matemática, visto que os estudantes podem não observar que a recorrência é de quinta ordem, tão logo tem-se a soma dos quatro termos contados a partir do salto. Para isso, é interessante ter compreendido os modelos combinatórios anteriores, principalmente o modelo combinatório de Tridovan. Aqui, tem-se a construção das Definições 1 e 2.

Fase da institucionalização: o professor deve verificar as resoluções dos estudantes, atentando-se para os erros existentes. Com isso, faz-se necessário que o professor apresente a sequência de Tetradovan e o teorema construído pelos estudantes na atividade. Com isso, é nomeada a sequência $\{N_n\}_{n\geqslant 0}$, como sequência de Tetradovan, definida nos trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2019a), Vieira e Alves (2019a), Vieira, Alves e Catarino (2019b) com a recorrência dada por: $P_n^4 = P_{n-2}^4 + P_{n-3}^4 + P_{n-4}^4 + P_{n-5}^4, n \geqslant 5$, cujos valores iniciais são $P_0^4 = 1, P_1^4 = 0, P_2^4 = 1, P_3^4 = 1, P_4^4 = 2$.

Assim, tem-se os seus primeiros termos apresentados no Quadro 26.

Quadro 26 – Descrição de alguns termos iniciais da sequência de Tetradovan

P_n^4	P_1^4	P_2^4	P_3^4	P_4^4	P_5^4	P_6^4	P_7^4	P_8^4	P_9^4
1	0	1	1	2	3	4	7	10	16

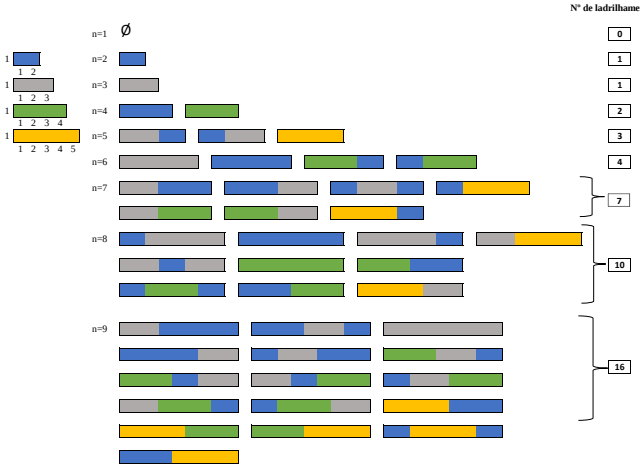
Fonte: Elaborado pela autora.

O teorema referente ao modelo combinatório de Tetradovan, é dado que para $n \geqslant 0$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos dominó azul, triminó cinza, tetraminó verde e pentaminó amarelo é dado por: $p_n^4 = P_n^4$, sendo p_n^4 o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n^4 o n-ésimo termo da sequência de Tetradovan (ver Figura 125). Por fim, tem-se o estudo da construção das Definições 1 e 2.

6.4.4.2 Análise a posteriori

A situação-problema 4 tem como objetivo a construção da definição da sequência de Tetradovan. Tão logo, a aula teve início com a institucionalização da situação-problema 3, apresentando os aspectos históricos e evolutivos matemáticos da sequência polinomial de Tridovan. Em seguida, a situação-problema 4 foi proposta aos estudantes.

Figura 125 – Ladrilhamentos de Tetradovan de p_1^4 até p_9^4.

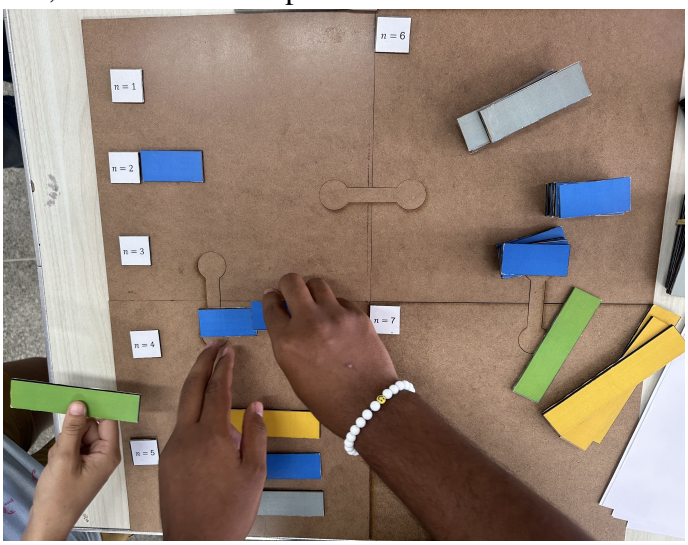


Fonte: Elaborado pela autora.

Para a fase da ação, a Figura 126 apresenta o desenvolvimento do modelo combinatório da sequência. Percebe-se que os estudantes não atribuíram nenhum ladrilhamento para o caso $n = 3$, porém o estudante A11 observou o erro e comunicou aos colegas da ausência da peça para o determinado caso, identificando assim o E_1.

Desse modo, a Figura 127 possibilita a inserção do triminó que havia sido esquecido no caso $n = 3$, garantindo que todos os ladrilhamentos sejam considerados corretamente e permitindo obter a sequência completa de forma precisa.

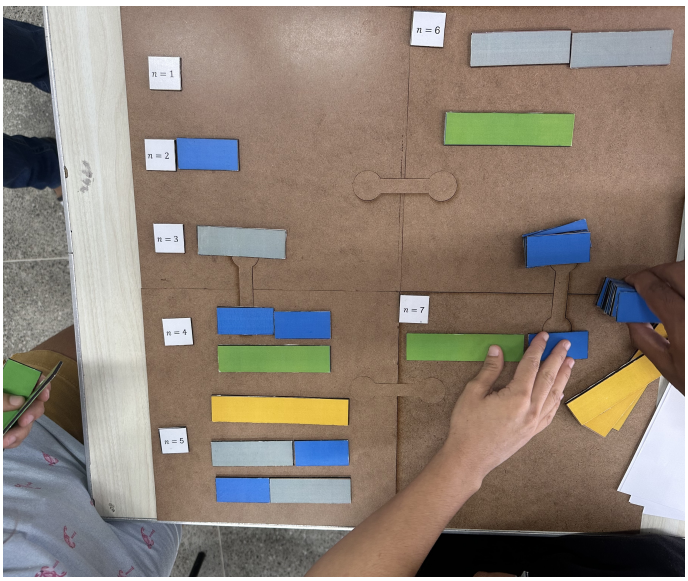
Figura 126 – Fase da ação da situação-problema 4 pelo A6, A7 e A10 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na fase da formulação, os estudantes conseguiram desenvolver o modelo combinatório da sequência por meio do tabuleiro mórfico, conforme apresentado na Figura 128.

Figura 127 – Fase da ação corrigida da situação-problema 4 por A9 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

É importante pontuar a concentração dos estudantes para a realização da atividade, observando o atentamento para que não esqueçam nenhuma peça como aconteceu na fase da ação desta situação-problema, evitando assim o E_2.

Figura 128 – Fase da formulação da situação-problema 4 pelo A7, A8 e A11 do Grupo 1

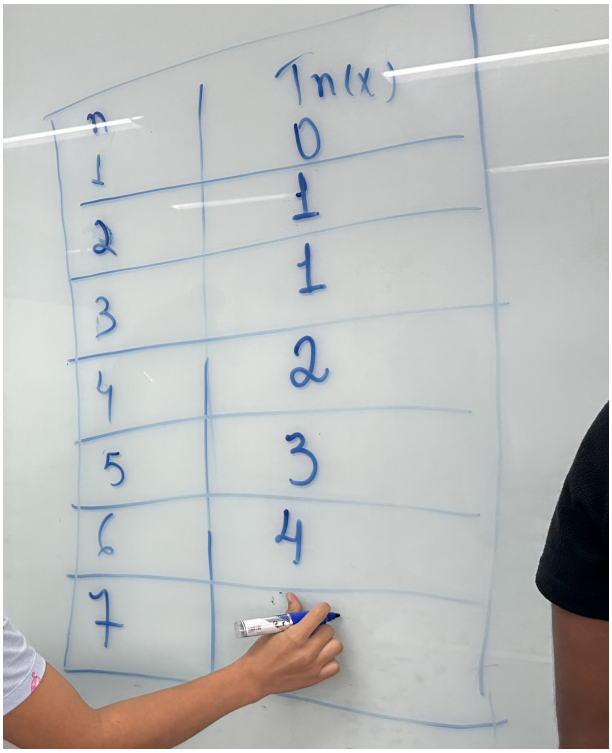
Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a fase da validação, os estudantes discutem sobre como seria a recorrência da sequência, conforme apresentado no diálogo abaixo.

A3: *Olha, se somar* $4+3$*, dá* 7*. Então seria a soma dos dois anteriores. Opa,* 3 *com* 2*. Vixe, aí já quebra. Então vamos ver com salto.*
A1: *São os quatro últimos?*
A5: *É deve ser os quatro.*
A2: *Vamos tentar com salto e pegando os últimos, os quatro anteriores.*
A4: *Vai ser a soma dos quatro últimos com salto. Os quatro com pulo. Pula, porque não tem nada no* $n = 1$*.*
A5: *É sim, bate a regra.*

Então os estudantes conseguem construir a definição da sequência, em que a Figura 129 apresenta tabela desenvolvida pelo estudante A3 durante a discussão para obtenção da recorrência, evitando o erro E_4.

Figura 129 – Fase da validação da situação-problema 4 pelo A3 do Grupo 1



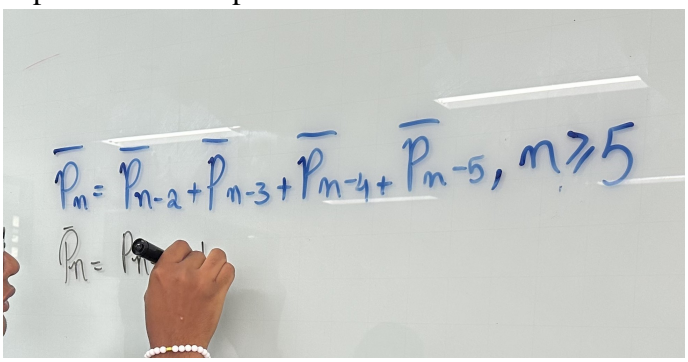
Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 130 apresenta a validação pelo estudante A8, permitindo a construção da fórmula de recorrência da sequência (construção da definição), nomeada de $\tilde{P}_n$ e evidenciando E_5.

A seguir, são analisados os comportamentos dos estudantes do Grupo 2.

A fase da ação tem início com a manipulação dos ladrilhos e a inserção do pentaminó. Com isso, a Figura 131 permite a visualização da resolução da atividade pelos estudantes de forma rápida, uma vez que já estão habituados com as regras das peças e tamanho, não acontecendo E_1.

Figura 130 – Fase da validação da situação-problema 4 pelo A8 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 131 – Fase da ação da situação-problema 4 por B3, B6 e B7 do Grupo 2

Fonte: Acervo da pesquisa.

É possível compartilhar um relato interessante nesse momento, em que o aluno B4 percebe que pode ser resgatada a abordagem combinatória de Tridovan, e acrescentada mais a possibilidade com o ladrilho pentaminó.

> *Agora fica fácil, porque a gente só vai acrescentar mais essa peça. Então vamos montando no mesmo esquema que a gente tava fazendo antes no Tridovan. Vamos só adicionando, porque vai ser as mesmas possibilidades de antes, só que agora vamos só vendo aonde cabe o penta.*

Em continuidade, tem-se a fase da formulação, com o relato do estudante B1 tendo o cuidado em não esquecer ou equivocar-se em nenhum dos ladrilhamentos, para não ocorrer E_2. Assim, observa-se a preocupação com a dificuldade identificada na análise a *priori*.

> *A gente só tem que ter cuidado com as possibilidades pra ninguém errar nos termos e acabar errando na definição.*

Em seguida, tem-se a Figura 132 com a finalização da fase da formulação pelos estudantes do Grupo 2.

Figura 132 – Fase da formulação da situação-problema 4 por B8 e B9 do Grupo 2

Fonte: Acervo da pesquisa.

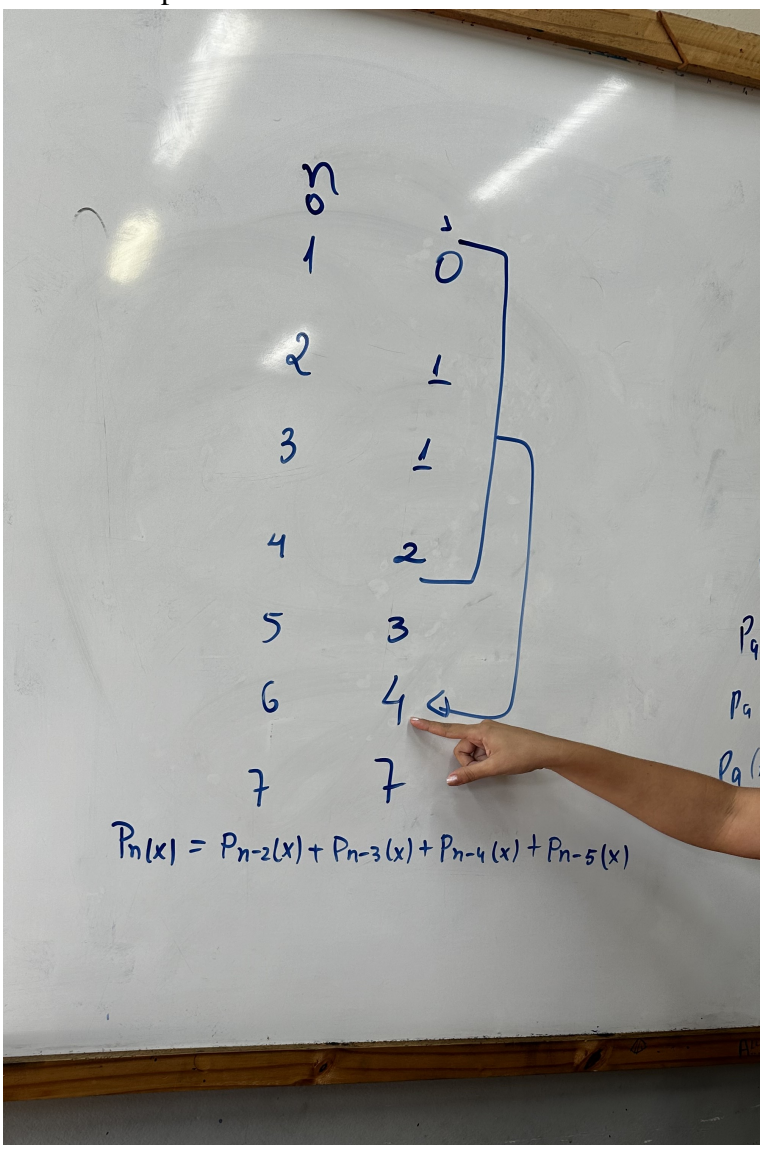
Uma nova discussão é realizada acerca da resolução da atividade durante a fase da validação, permitindo alcançar a construção da definição.

> B2: *Essa daí é a soma de todos os anteriores, né?*
> B10: *É mesmo!*
> B5: *É não, porque quando a gente for pro* $n = 7$ *não vai rolar.*
> B9: *Vixe!*
> B10: *Não é a soma dos quatro anteriores não?*
> B1: *Como assim? Não dá, porque quando a gente somar* $2+1+1+0$ *não vai dar 3.*
> B10: *Pula um e soma os quatro anteriores.*
> B2: *Eita que desse jeito dá certo mesmo!*

Dessa forma, na Figura 133, é possível observar a fase de validação conduzida pelo estudante B10, que se concentra na definição da sequência para valores de $n \geq 5$, obtendo a definição cuidadosamente para não ocorer E_4.

Um aspecto interessante a se notar é que os participantes, familiarizados com a nomenclatura estabelecida nas situações-problema anteriores, tendem a aplicar essa mesma nomenclatura (E_5) como se estivessem lidando com uma sequência polinomial. Esse comportamento revela a influência e a adaptação dos estudantes em relação ao contexto da

Figura 133 – Fase da validação da situação-problema 4 por B10 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

aprendizagem, além de destacar a importância da orientação e da intervenção do professor para garantir uma compreensão precisa e aprofundada dos conceitos em discussão, realizado na fase da institucionalização.

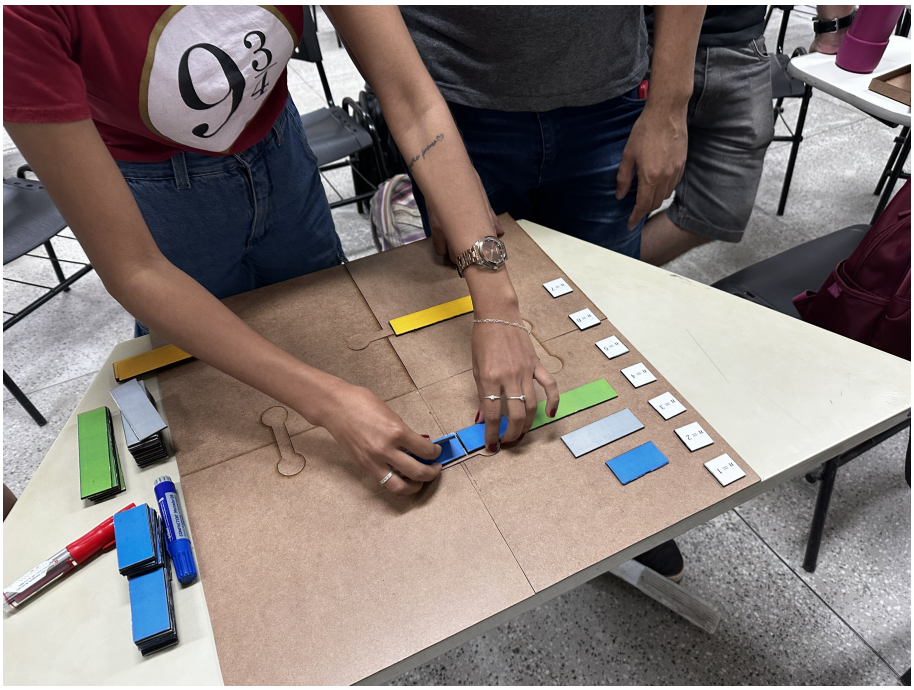
Desse modo, encerra-se a análise do Grupo 2 e inicia a verificação do Grupo 3 com a fase da ação. Assim, observa-se a Figura 134 com o manuseio dos ladrilhos por C4 e C5, permitindo elaborar estratégias para a resolução da atividade proposta. Com isso, os estudantes resgatam os conhecimentos prévios e os métodos utilizados nas questões anteriores, com o viés de definir a recorrência da sequência. Durante esse processo, C1 relata

> Agora ficou mais fácil, porque a gente vai seguir o mesmo padrão dos ladrilhamentos passados. Só que agora tem o pentaminó. Então a gente vai só

> vendo aonde cabe esse amarelo que é de tamanho 5. O resto segue o mesmo esquema, do mesmo jeitinho.

Essa afirmação, retrata a compreensão do estudante diante das configurações dos ladrilhamentos, ausentando E_1 e permitindo que a resolução ocorre de modo mais rápido e prático.

Figura 134 – Fase da ação da situação-problema 4 por C4 e C5 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

Em seguida, tem-se a fase da formulação na Figura 135 em que optam por desenvolver para o caso até $n = 7$, segundo a discussão realizada entre os estudantes no decorrer da atividade

> C4: *Vamos logo fazer para até n = 7, pra poder a gente já conhecer mais termos e definir logo a recorrência.*
> C1: *Mas até 6 já dá pra saber.*
> C3: *Bora fazer mais casos, porque aí depois que a gente achar a recorrência, a gente só confere se tá certo. Fica mais fácil pra validar a definição.*
> C7: *E ainda vamos ter que definir quantos valores iniciais.*
> C8: *Vamos logo vendo se a gente não esqueceu de nenhuma possibilidade.*

E assim, conseguem realizar os ladrilhamentos até o caso $n = 7$, em busca da definição. A Figura 136 apresenta a fase da validação em que o estudante C3 obtêm a definição da sequência, com a sua respectiva recorrência.

Figura 135 – Fase da formulação da situação-problema 4 por C1, C2, C4 e C5 do Grupo 3

Fonte: Acervo da pesquisa.

É importante notar que os estudantes retomam a nomenclatura F_n, ocorrendo E_5. A definição é obtida de forma prática, como identificada no diálogo entre os participantes.

> C6: *A gente agora tem uma nova peça. Então a gente vai ter mais um termo pra somar.*
> C3: *Como assim?*
> C2: *Pela peça não. Pelo tamanho da peça maior. Porque pra Padoan a gente tinha até o triminó e a sequência era de ordem 3. Pra Tridovan a gente tinha até o tetraminó e a sequência era de ordem 4.*
> C5: *Então agora a sequência vai ser de ordem 5. E vai ter 5 termos somados?*
> C8: *Contando que o primeiro é zerado, são 5 termos.*

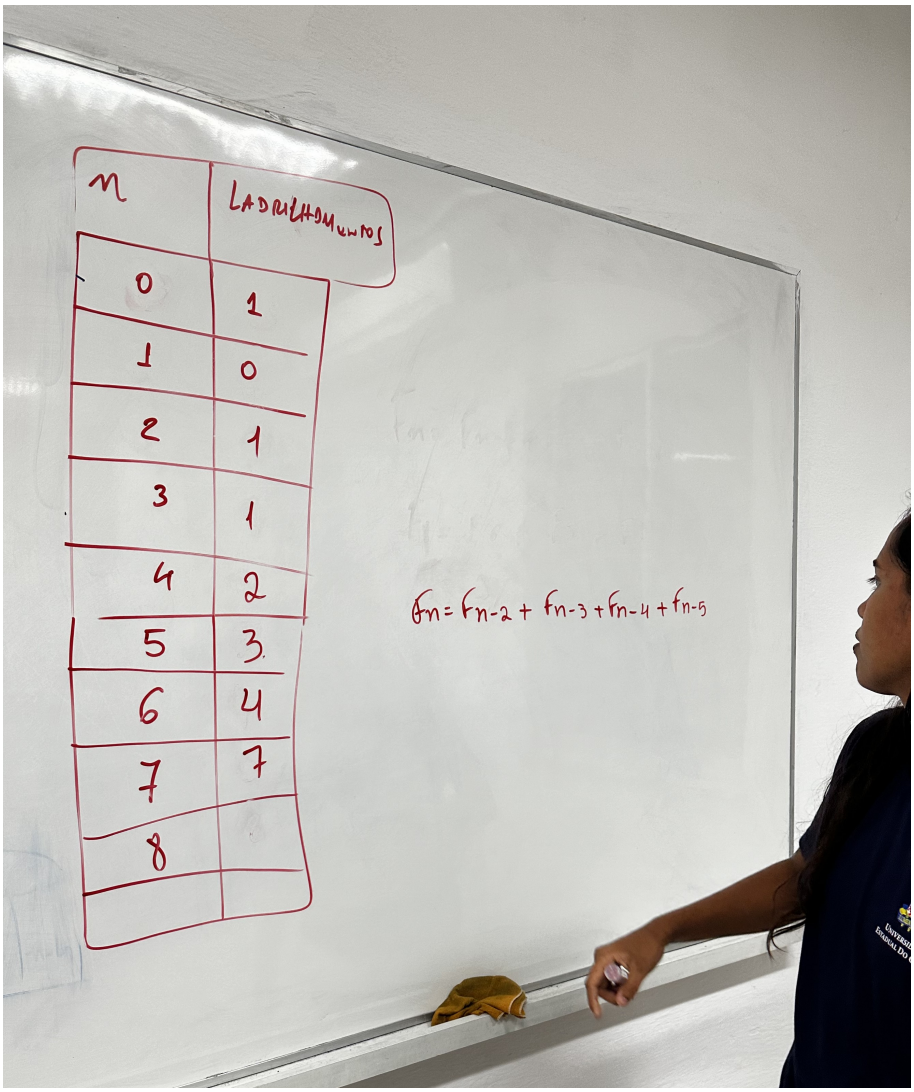
A partir do fechamento da análise do Grupo 3, inicia-se em seguida a análise do Grupo 4.

Na fase da ação os estudantes compreendem as regras estabelecidas, e iniciam rapidamente o manuseio do tabuleiro com os novos ladrilhos, como pode-se observar na Figura 137 por D2.

O relato de D15 permite identificar a facilidade dos estudantes, após as resoluções das atividades anteriores, permitindo uma ideia para a resolução final da questão.

> Agora fica facinho. A gente vai pegar e só aumentar essa peça amarela nas combinações e pronto. Acho até que a definição vai ser fácil também. Porque seguindo a lógica das aulas passadas, a gente consegue chegar logo no objetivo que é aumentando peça e aumentando termo.

Figura 136 – Fase da validação da situação-problema 4 por C3 do Grupo 3



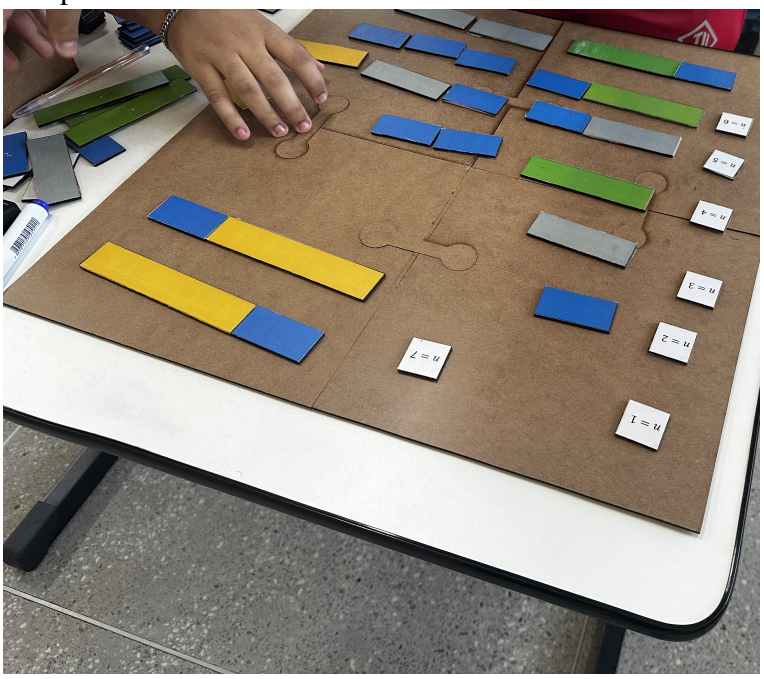
Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a fase da formulação, os estudantes conseguem montar os ladrilhamentos para a sequência, como mostra a Figura 138, em que os participantes discutem suas estratégias perante o diálogo abaixo, apresentando boa compreensão diante das regras e ladrilhamentos.

> D1: *Se a gente não tivesse tirado as peças do Tridovan, dava pra ir só acrescentando esse amarelo, né?*
> D11: *Eu pensei nisso também. Vamos então montar o Tridovan.*
> D7: *Beleza! Aí agora a gente só adiciona o pentaminó aonde cabe.*

Na fase da validação, tem-se a Figura 139 por D7, em que ocorre E_5, nomeando a sequência de Q_n, pois trata-se de uma sequência de quinta ordem. A discussão entre os colegas permite observar a percepção dos estudantes acerca dos ladrilhos estabelecidos e o termo adicionado para a obtenção da definição.

Figura 137 – Fase da ação da situação-problema 4 por D2 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

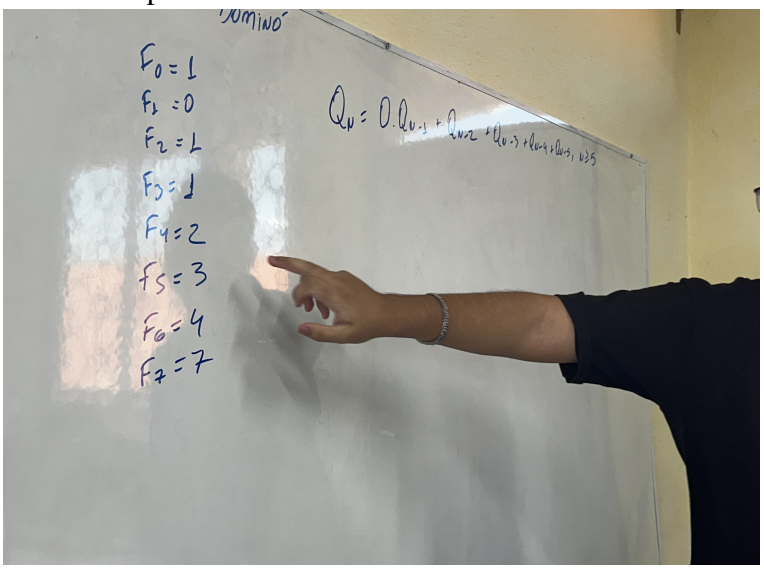
Figura 138 – Fase da formulação da situação-problema 4 por D1, D2, D5, D11, D12, D13, D16 e D19 do Grupo 4

Fonte: Acervo da pesquisa.

D8: *A tua teoria tava certa.*
D15: *É porque pensei que como aumenta a peça, então agora vai aumentar o termo.*
D9: *E a gente olhando, o tamanho da peça é 5, que é justamente o* $n-5$ *que tá sendo inserido.*
D18: *Então vai ser de* 5ł *ordem.*
D7: *Então vai ser* $Q_n = 0 \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-4} + Q_{n-5}$.

Assim, finaliza a análise dos dados da situação-problema 4. A análise realizada durante a experimentação dessa situação-problema confirmou a ocorrência dos erros previstos durante a análise prévia das situações didáticas. Foi possível identificar que, durante a execução desta situação-problema, os erros estavam diretamente relacionados às formas de ladrilhar e à obtenção da definição da nova sequência em estudo.

Figura 139 – Fase da validação da situação-problema 4 por D7 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

Essa constatação destaca a importância de antecipar e considerar possíveis equívocos que os alunos podem cometer ao se envolver em atividades matemáticas desafiadoras. Esses erros oferecem valiosos *insights* sobre os pontos de dificuldade e os conceitos que os alunos ainda não dominam completamente.

6.4.5 Situação-problema 5

Na situação-problema 5, serão analisadas as seguintes variáveis didáticas:

- sequência polinomial de Tetradovan (Definição 5.51);
- modelo combinatório polinomial de Tetradovan (ver Teorema 5.125).

Situação-problema 5: Tendo em vista a sequência polinomial de Padovan estudada na situação-problema 3, e a sequência polinomial de Tridovan (extensão da sequência polinomial de Padovan), tem-se a investigação de uma nova sequência. Considere as seguintes peças: dominó azul 1 x 2 com peso x^3, triminó cinza 1 x 3 com peso x^2, tetraminó verde 1 x 4 com peso x e pentaminó amarelo 1 x 5 com peso 1, sendo, portanto, essas as peças disponíveis por meio do material manipulável. Assim, quantas formas de ladrilhar existem para os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5 e 1 x 6 utilizando as regras e peças definidas? Esses números formam uma nova sequência? Se sim, qual a sua fórmula de recorrência?

6.4.5.1 Análise a priori

A atividade investiga as definições seguintes:

– Definição 1. Modelo combinatório polinomial de Tetradovan (ver Teorema 5.125);
– Definição 2. Sequência polinomial de Tetradovan (ver Definição 5.51).

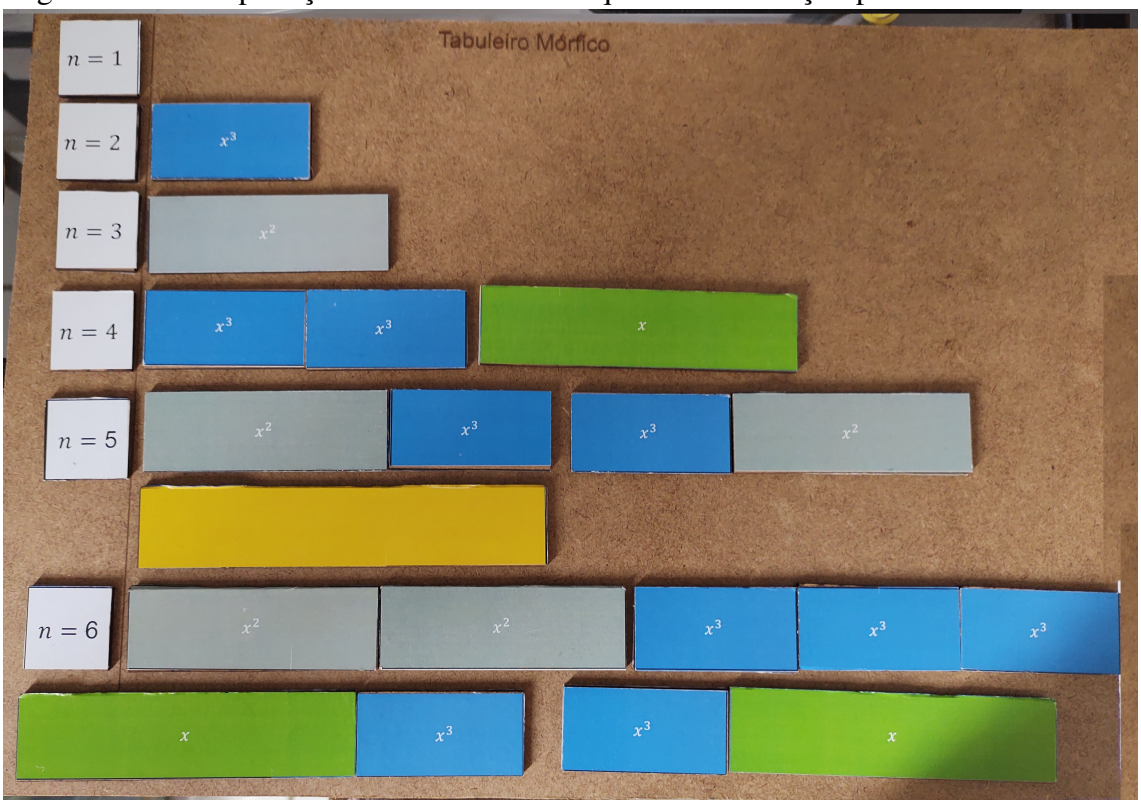
Fase da ação: os estudantes deverão apropriar-se das peças disponíveis e argumentos estudados anteriormente nas situações-problema anteriores, bem como buscar em seus conhecimentos prévios a noção de tabuleiro e modelos combinatórios já estudados. Assim, deverão manipular as peças fornecidas, de modo a obter as combinações possíveis para os tabuleiros propostos. Vale ressaltar que os estudantes possuem as mesmas informações nessa fase e, as suas decisões são orientadas pelo meio. De fato, os erros estimados referem-se aos pesos estabelecidos nessa nova atividade, permitindo aos sujeitos observarem as semelhanças entre a atividade anterior. Doravante, é esperado que os estudantes já tenham domínio das regras e configurações estabelecidas. Aqui, tem-se início da construção da Definição 1, observando que se trata da sequência de Tetradovan, devido às peças serem semelhantes e diferenciando-se em relação aos pesos que foram inseridos.

Fase da formulação: tendo as peças disponíveis, os estudantes deverão obter as combinações para os determinados tamanhos dos tabuleiros. Realizando as operações matemáticas com os pesos das respectivas peças, evitando que ocorre um erro (E_2) ao realizar o cálculo, é possível obter os resultados como: para o tabuleiro 1 x 1, não existe nenhum caso; para o tabuleiro 1 x 2, tem-se um dominó com peso x^3, resultando em x^3; para o tabuleiro 1 x 3, tem-se 1 triminó de peso x^2, resultando em x^2; para o tabuleiro 1 x 4, têm-se 2 dominós justapostos de pesos x^3 cada e 1 tetraminó de peso x, resultando em $x^6 + x$; para o tabuleiro 1 x 5, tem-se 1 triminó de peso x^2 justaposto com o dominó de peso x^3, 1 dominó de peso x^3 justaposto com o triminó de peso x^2 e o pentaminó de peso 1, resultando em $2x^5 + 1$; para o tabuleiro 1 x 6, têm-se 2 triminós de pesos x^2, 3 dominós de pesos x^3, 1 tetraminó de peso x justaposto com 1 dominó de peso x^3 e 1 dominó de peso x^3 justaposto com um tetraminó de peso x, resultando em $x^9 + 3x^4$. As combinações poderão ser visualizadas na Figura 140 com a utilização do material manipulável.

Nesse momento, continua a construção da Definição 1 e inicia-se a construção da Definição 2.

Fase da validação: os estudantes deverão observar os valores encontrados e, de forma semelhante como ocorrido na situação-problema 3, observar a inserção de variáveis na sequência de Tetradovan, tornando-a polinomial. As variáveis inseridas na recorrência devem seguir as configurações das peças, x^3, x^2 e x. Além disso, observa-se como um possível

Figura 140 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 5



Fonte: Acervo da pesquisa.

erro dos estudantes, a inserção dos valores iniciais da sequência nova, devendo esses serem calculados com referência na recorrência. Com isso, tem-se que a sequência nova, denominada de $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$: $A_n = x^3A_{n-2} + x^2A_{n-3} + xA_{n-4} + A_{n-5}$, com os termos iniciais: $A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = x^3, A_3 = x^2, A_4 = x^6 + x$. A quantidade de valores iniciais também pode ser um possível entrave para os estudantes, inserindo de início apenas 3 valores como na sequência polinomial de Padovan, porém ao calcularem os valores da sequência, os estudantes irão observar a necessidade de mais valores iniciais. De fato, tem-se a construção da Definição 2, a partir da Definição 1. Um possível erro previsto é em relação à obtenção da recorrência, não identificando os coeficientes que deverão ser inseridos (E_4).

Fase da institucionalização: diante das resoluções dos estudantes e inquietações, o professor realiza um apanhado das discussões realizadas, apresentando as soluções corretas. Feito isso, é necessário que o professor divulgue a definição da nova sequência polinomial e do teorema referente ao modelo combinatório polinomial de Tetradovan $\left\{P_n^4(x)\right\}_{n\geqslant 0}$. A sequência polinomial de Tetradovan, $P_n^4(x)$, sendo esta uma sequência de quinta ordem que satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$: $P_n^4(x) = x^3P_{n-2}^4(x) + x^2P_{n-3}^4(x) + xP_{n-4}^4(x) + P_{n-5}^4(x)$, com os termos iniciais: $P_0^4(x) = 1, P_1^4(x) = 0, P_2^4(x) = x^3, P_3^4(x) = x^2, P_4^4(x) = x^6 + x$.

Desse modo, tem-se o Quadro 27 com os primeiros termos da sequência polinomial

de Tetradovan.

Quadro 27 – Primeiros dez termos polinomiais de Tetradovan

n	$P_n^4(x)$
0	1
1	0
2	x^3
3	x^2
4	x^6+x
5	$2x^5+1$
6	x^9+3x^4
7	$3x^8+4x^3$
8	$x^{12}+6x^7+3x^2$
9	$4x^{11}+10x^6+2x$

Fonte: Elaborado pela autora.

Além disso o professor apresenta o modelo combinatório polinomial de Tetradovan, sendo este: Considerando um tabuleiro do tipo 1 x n e o dominó azul 1 x 2, com peso x^3, o triminó cinza 1 x 3 com peso x^2, o tetraminó verde 1 x 4 com peso x e o pentaminó amarelo 1 x 5 com peso 1, como sendo formas de ladrilhos para a sequência polinomial de Tetradovan. Então, o número de maneiras de preencher esse tabuleiro, fazendo corresponder ao seu respectivo peso, será determinado por $p_n^4(x) = P_n^4(x)$, para $n \geqslant 0$. Fixando as referidas peças tem-se na Figura 141 a visualização de algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, tem-se a correspondência do seu peso final aos polinômios de Tetradovan.

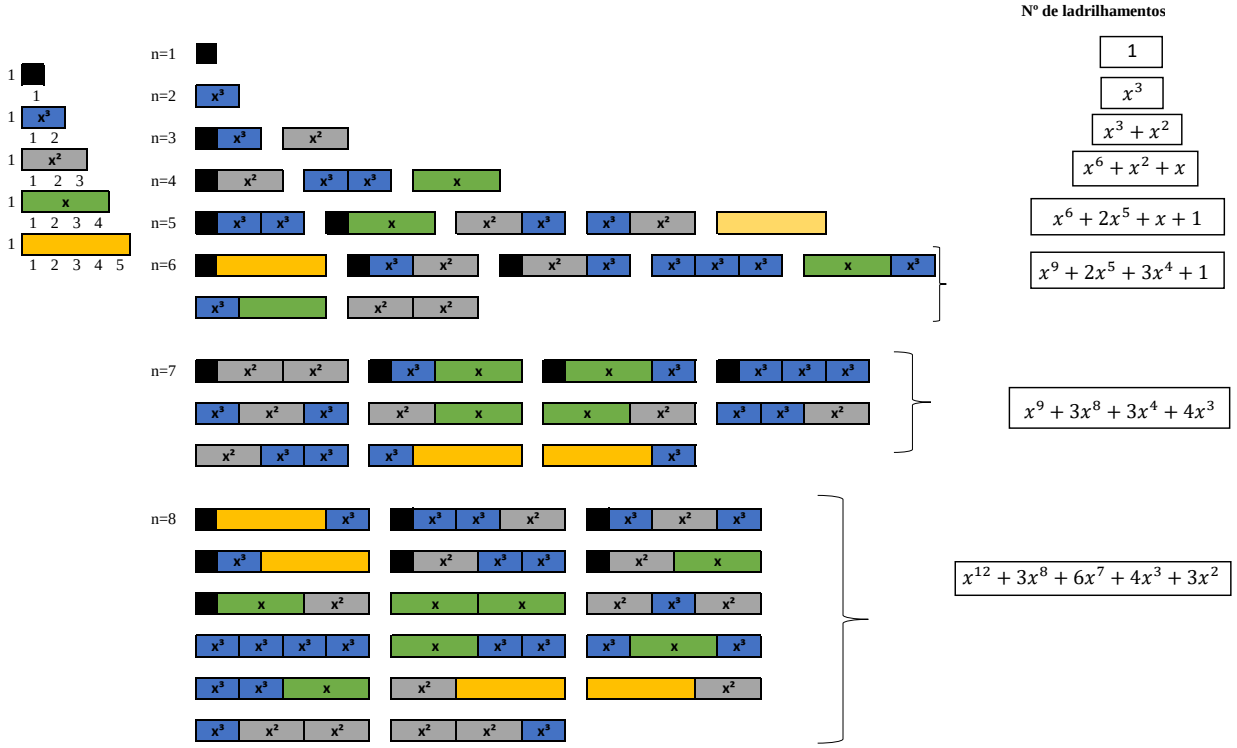
Concluindo assim a construção das Definições 1 e 2.

6.4.5.2 Análise a posteriori

A situação-problema 5 tem como objetivo a construção da definição da sequência polinomial de Tetradovan. Assim, a aula teve início com a institucionalização da situação-problema 4, apresentando os aspectos históricos e evolutivos matemáticos da sequência de Tetradovan. Em seguida, a situação-problema 5 foi proposta aos estudantes.

Na fase da ação, ocorreu o início da construção do modelo combinatório polinomial pelos estudantes. Logo, a Figura 142 permite observar que os estudantes A8, A10 e A11 optam por construir os ladrilhamentos sem seguir uma ordem para os valores de n, ou seja, é possível verificar que para o caso $n = 6$ está vazio. Já o caso $n = 5$ encontra-se em construção.

Figura 141 – Ladrilhamento polinomial de Tetradovan



Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se que os estudantes realizam a estratégia de montar o modelo combinatório sem preocupar-se com os pesos das peças, incentivando a resolução da atividade de uma forma correta, para que assim não ocorra o erro previsto E_1.

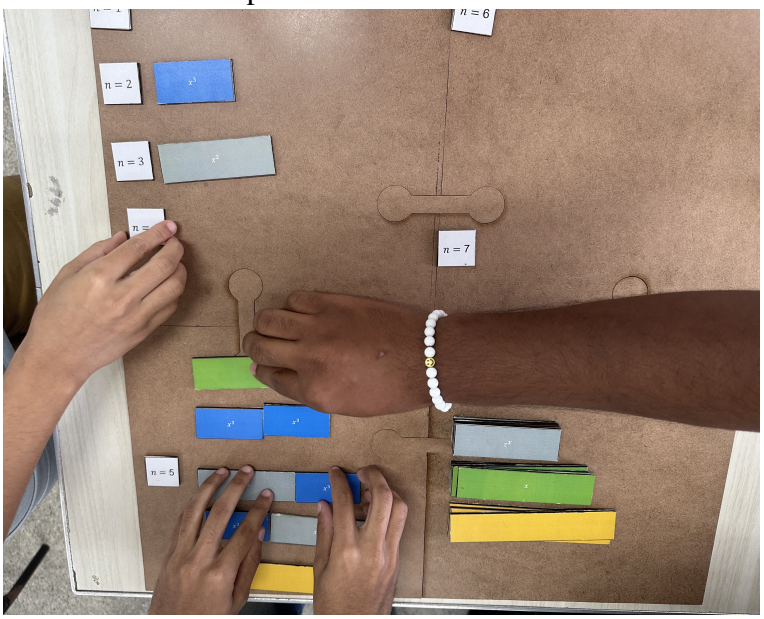
A fase da formulação é vista na Figura 143 pelo aluno A3, onde os estudantes conseguiram finalizar o modelo combinatório polinomial.

Para a construção dessa interpretação combinatória, observa-se a discussão com os estudantes diante da dificuldade em compreender a construção dos ladrilhamentos, identificando E_2

> A7: *Quando a gente for montar os ladrilhamentos a gente monta pensando só no tamanho das peças, não vamos pensar nos pesos.*
> A11: *A priori pensa só no tamanho da peça. Fica melhor de fazer.*
> A5: *Verdade, fica melhor. Porque olha só, para $n = 1$ eu não vou ter nenhuma configuração e para $n = 2$ eu vou ter uma configuração. Pra $n = 3$ eu também vou ter só uma. Pra $n = 4$ eu vou ter duas configurações. Pra $n = 5$ três e pra $n = 6$ tem quatro.*
> A11: *Mas é só tu ver que as peças são as mesmas de Tetradovan, só que agora tem os pesos nas pecinhas. Então ficam as mesmas configurações.*

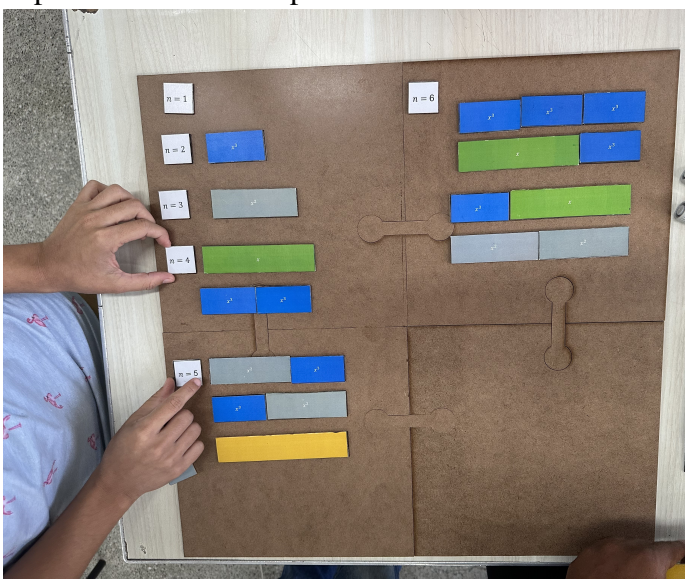
Uma outra pequena discussão entre os alunos A1, A2 e A5 ocorre na fase da

Figura 142 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo A8, A10 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 143 – Fase da formulação da situação-problema 5 por A3 e A6 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

formulação, onde os estudantes compartilham o conhecimento para que não ocorra nenhum erro

A5: *Essa nova maneira vai ser o produto de novo das pecinhas que tem aqui.*
A1: *Então é o produto das peças mais a soma das configurações.*
A2: *Exato! Agora entendi!*

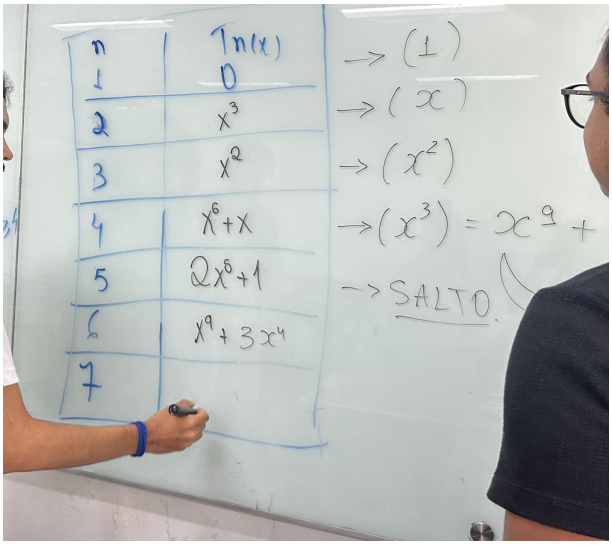
A fase da validação segue com uma conjectura dos estudantes, onde A11 afirma

Agora meio que fazendo uma observação por meio dos padrões anteriores, eu imagino que os pesos tenham que ser x^3, x^2, x *e* 1 *só ficou um detalhe com*

aquele salto que a gente vem herdando das sequências anteriores.

Assim, a Figura 144 retrata a fase da validação pelos estudantes A8 e A11 após a discussão e confecção da tabela dos termos para um melhor entendimento, tendo uma dificuldade como previsto em E_4.

Figura 144 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo A8 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 145 apresenta a finalização da fase da validação pelo A11, permitindo obter a fórmula de recorrência da sequência polinomial, denominada de $\tilde{P}_n(x)$. Perceba que os estudantes utilizam a mesma nomenclatura utilizada para a sequência polinomial de Tridovan vista na situação-problema 3, podendo observar a ocorrência de E_5.

O participante A5 afirma na fase da validação que

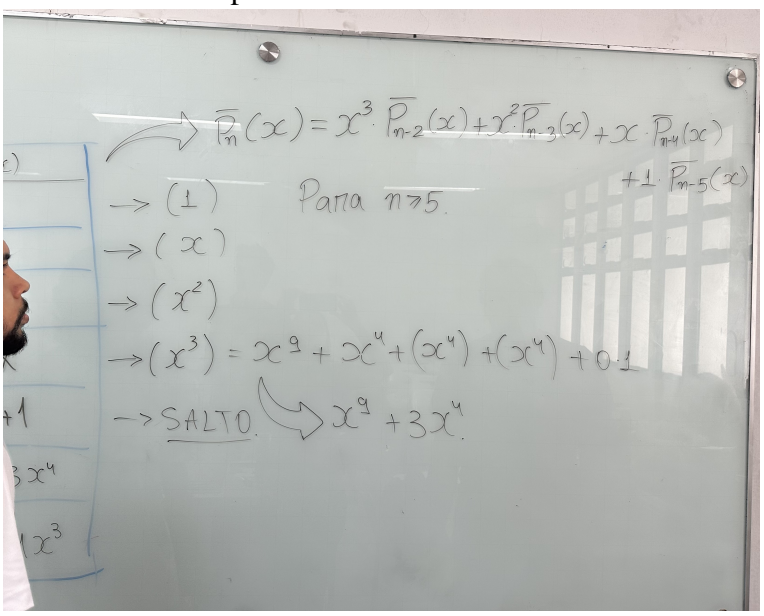
> *A partir da sequência de Tetradovan, a gente percebeu que o que ia diferir ela da polinomial seria a questão de atribuir pesos para as peças. Quando eram atribuídos pesos para essas peças o que a gente tinha que fazer era basicamente tentar encontrar qual era esse peso de forma que um termo sucessor fosse igual aos seus quatro sucessores do anterior de forma que a gente tivesse que colocar peso nelas pra obter a configuração da sequência polinomial.*

O estudante A2, relata ao final da aula que

> *Na aula de hoje a proposta foi um pouco mais desafiadora pelo incremento de alguns obstáculos algébricos, o que foi um aspecto que alavancou a aula.*

A seguir, são analisados os comportamentos dos estudantes do Grupo 2.

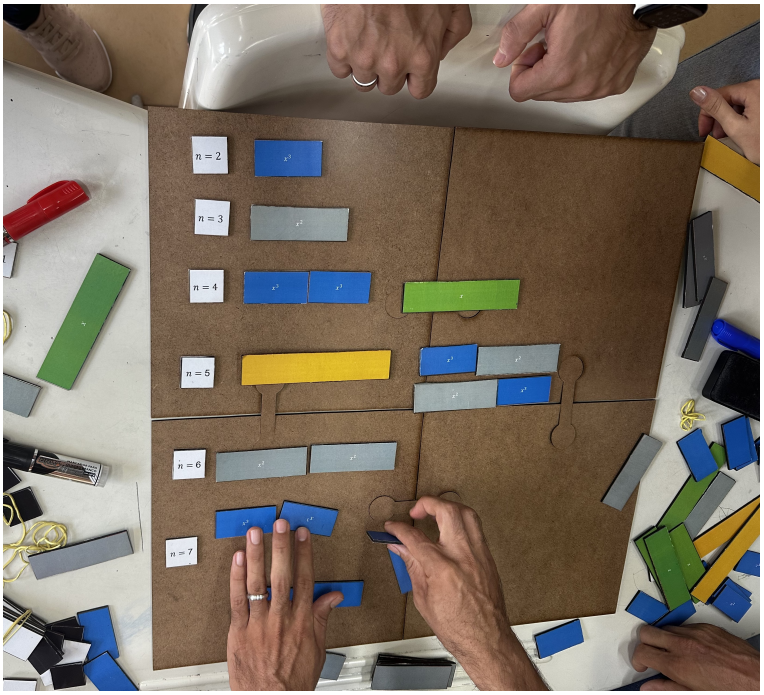
Figura 145 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo A8 e A11 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 146, observa-se a fase da ação em andamento pelos estudantes, evidenciando um aumento significativo no domínio e na facilidade de manipulação dos ladrilhos e seus respectivos pesos.

Figura 146 – Fase da ação da situação-problema 5 por B4, B5 e B9 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

Esse progresso é claramente demonstrado pela forma como os estudantes

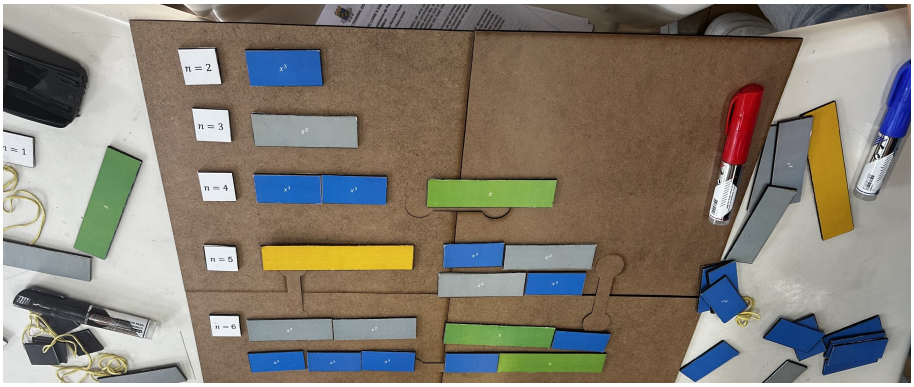
lidam com os desafios apresentados, refletindo o ensino repassado durante a execução das situações-problema anteriores. Esse avanço é ainda mais destacado pela maneira como os estudantes formulam questões e tomam decisões durante a resolução dos problemas, ausentando E_1, conforme relata o estudante B9.

> *Esse aí vai seguir o mesmo esquema daquele lá, do Tridovan poli. Só que a gente pegando o Padovan poli e Tridovan poli, fica fácil a gente inserir os coeficientes e pesos das peças. Porque a gente agora tem o x^3 que não tinha antes. E esse aí vai ser a peça menor, que a questão tá dizendo que é justamente o azul.*

A fase de formulação é conduzida de forma ágil, com os estudantes concluindo rapidamente a montagem dos ladrilhamentos da sequência, como ilustrado na Figura 147. Esse aspecto destaca a habilidade dos estudantes em aplicar os conceitos aprendidos de forma eficiente e demonstra sua capacidade de resolver problemas de forma prática e criativa. A discussão abaixo demonstra o entendimento dos estudantes em relação ao processo de extensão da sequência de Padovan e a integração com as abordagens combinatórias estudadas, facilitando assim a execução da atividade e ausentando E_2.

> B10: *Agora fica fácil mesmo. Porque a gente pode pegar a sequência que tem a peça amarela e montar as mesmas possibilidades.*
> B2: *O pentaminó, né?*
> B10: *Isso! E como era a sequência mesmo?*
> B1: *É a Tetradovan.*
> B5: *Então fechou! A gente dá um "ctrl z"no tabuleiro, e volta pro Tetra. (Risos)*
> B1: *Bom que força a gente a fazer tudo de novo pra saber se a gente entendeu mesmo o esquema das peças.*

Figura 147 – Fase da formulação da situação-problema 5 por B4 e B8 do Grupo 2



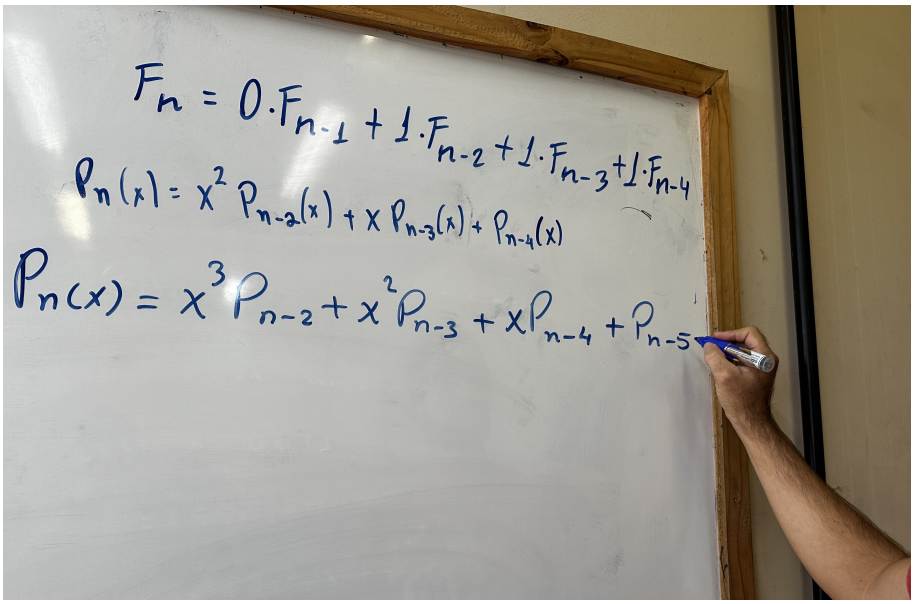
Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a fase da validação, os estudantes partem do tabuleiro para o quadro, iniciando a obtenção da definição. A Figura 148 permite que visualizar a técnica utilizada

pelo estudante B3, em que parte da recorrência de Padovan com os seus respectivos coeficientes numéricos; seguindo com a sequência polinomial de Tridovan e os seus coeficientes denominados pelos estudantes de pesos das peças (já estudada na situação-problema 3); até a sequência de ordem superior e os seus coeficientes investigados. Assim, ocorre a discussão abaixo

> B3: x^3, x^2, x^1 *e* x^0. *Esses seriam os coeficientes.*
> B9: *E ordem vai ser a mesma que a gente tava usando nas sequências passadas.*
> B3: *Se a gente pegar a sequência de Padovan e olhar pros coeficientes dela, a gente consegue também os outros. Pega agora a Tridovan poli.*
> B2: *Era* x^2, x^1 *e* x^0 *que é* 1. *Nessa ordem.*
> B3: *Beleza! Agora a gente tem o* x^3 *e empurra todo mundo pra lá. Dá um "shift".*
> B10: *Tô ligado! Mas tira esse* x^0 *aí que fica confuso.*
> B3: *Sim, a gente substitui logo por* 1.

Figura 148 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo B3 do Grupo 2

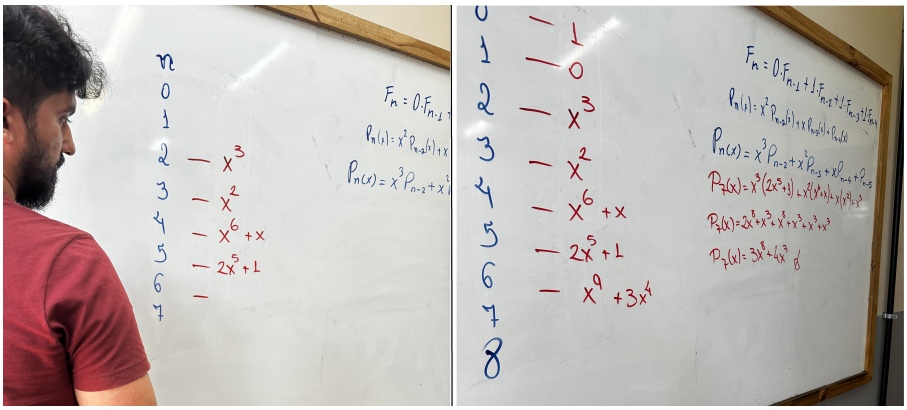


Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, tem-se a finalização da fase da validação pelo estudante B7, permitindo verificar os termos com a definição obtida pelos colegas. Assim, são calculados os valores da sequência para $n = 7$, como mostra a Figura 149. Percebe-se que na euforia, os estudantes esqueceram de colocar a condição de $n \geq 5$, para finalizar a atividade ocorrendo um pequeno erro como previsto em E_4.

A nomenclatura utilizada, permaneceu a mesma de Padovan, não atentando-se para a extensão da sequência realizada e já estudada nas situações-problema anteriores. Com isso, tem-se a identificação de E_5, encerrando assim a análise do Grupo 2 e iniciando a análise do Grupo 3.

Figura 149 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo B7 do Grupo 2

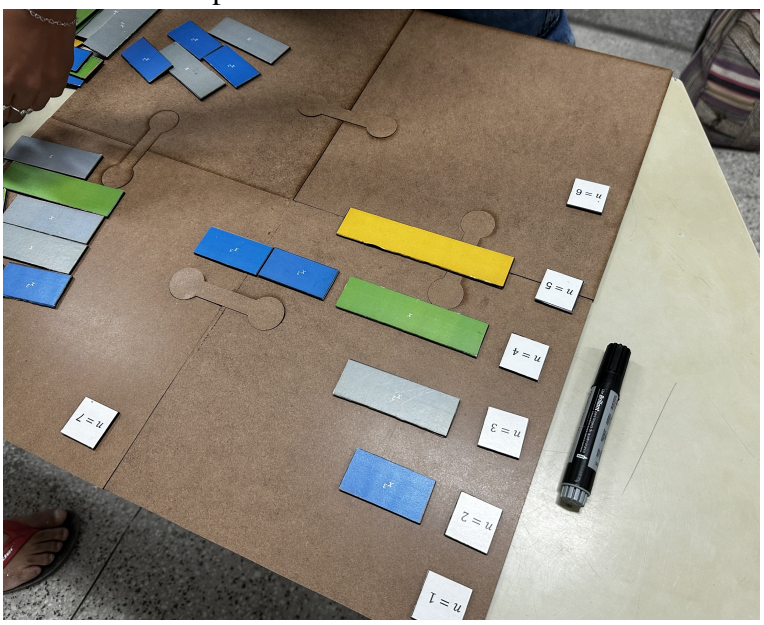


Fonte: Acervo da pesquisa.

Com isso, tem-se a fase da ação por C5 e C7 na Figura 150, em que organizam o tabuleiro com os novos ladrilhos disponíveis e optam por utilizar a mesma estratégia, como afirma C1.

> *A gente vai usar a mesma técnica. Vamos pegar as peças que a gente tem e ir montando pra cada n, e vamos esquecendo desse peso, pra poder não atrapalhar e a gente não acabar errando. Porque pra encontrar o erro vai ser difícil demais e vamos quebrar a cabeça pra achar aonde erramos.*

Figura 150 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo C1, C5 e C7 do Grupo 3



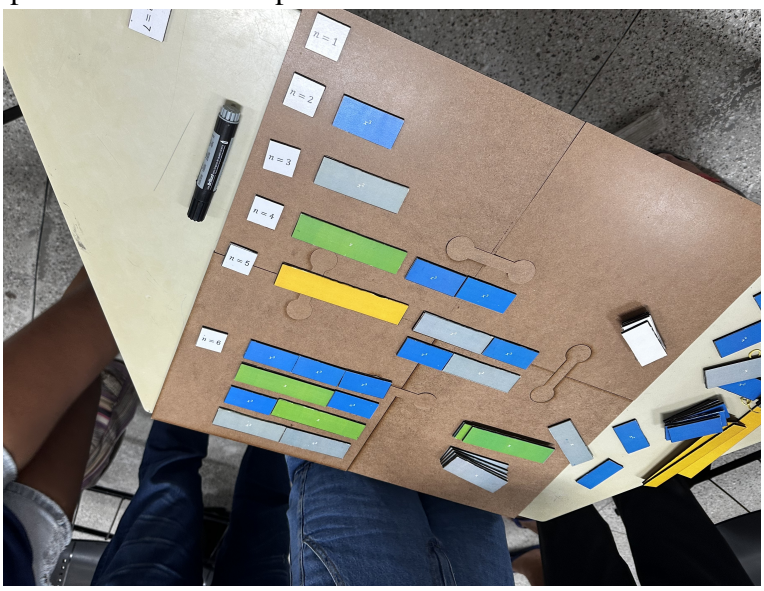
Fonte: Acervo da pesquisa.

Na fase da formulação, os estudantes constroem os ladrilhamentos de forma prática e rápida, resultando na Figura 151 pelos participantes C5 e C7. O estudante C2 relata ainda

nessa fase que

> *Agora fica simples, porque a gente monta os mesmos ladrilhamentos de Tetradovan, só que com os pesos. Por isso a gente esquece os pesos pra poder fluir melhor. Os termos a gente vai montando a tabelinha lá, pra achar a definição.*

Figura 151 – Fase da formulação da situação-problema 5 pelo C5 e C7 do Grupo 3



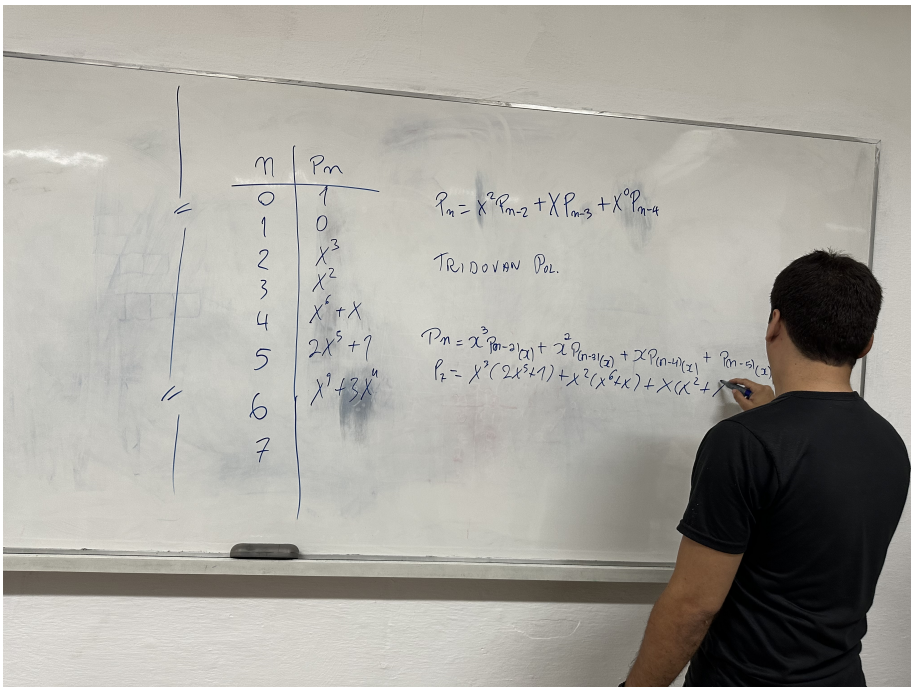
Fonte: Acervo da pesquisa.

Um diálogo surge na fase da validação com os colegas, identificando a ocorrência da dificuldade E_4 para a construção da definição da atividade proposta.

> C8: *Como a gente vai achar agora a fórmula? Agora o bicho pega de novo.*
> C3: *Não, agora tá fácil. A fórmula a gente já vai tendo uma ideia mais ou menos. Porque a gente sabe que vão ser somados 4 termos depois do salto, porque é a continuação do Tridovan.*
> C1: *E se a gente olhar pro Tridovan, a gente pode ver os coeficientes deles que vão diminuindo.*
> C6: *Como assim?*
> C5: *Tô vendo mesmo. Foi* x^2, x^1 *e* x^0. *E Padovan eram quais?*
> C1: *Era x e* 1, *que é* x^1 *e* x^0.
> C2: *Ah! Então essa sequência é pra ser* x^3, x^2, x^1 *até o* x^0. *Vamos olhar e fazer as contas pro* 7.
> C7: *A gente vai fazendo e conferindo se tá certo. Porque o tabuleiro é o nosso gabarito. Se lá tá certo, então a fórmula tá certa.*

Percebe-se que com o compartilhamento entre os colegas e a interpretação combinatória, a construção da definição é obtida de uma forma mais rápida. Durante a fase da validação tem-se a Figura 152 por C1, em que a partir da sequência de Tridovan polinomial e ladrilhamentos, obtêm a definição com a nomenclatura $P_n(x)$, ocorrendo E_5.

Figura 152 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo C1 do Grupo 3



Fonte: Acervo da pesquisa.

O relato do estudante C1 retrata a dificuldade encontrada durante os percursos das situações-problema anteriores

> *Pra mim, a fixação dos termos iniciais na sequência de Padovan e suas derivações, inicialmente, foram um obstáculo, sendo contornado em seguida e obtendo êxito na construção da recorrência. Alguns tipos de sequências eram desconhecidas, elas não eram como Fibonacci que a gente já conhece, então isso se tornou interessante irmos encontrar a definição delas. Envolveram uma certa forma de cosntrução, o que foi muito enriquecedor.*

Com isso, tem-se a conclusão da análise do Grupo 3 e início da verificação do Grupo 4.

Iniciando a fase da ação com a Figura 153 por D2, D6, D9 e D12 em que realizam o manuseio do tabuleiro para a resolução dos ladrilhamentos de forma rápida. O relato do estudante D10 permite constatar a eficácia da estratégia utilizada para que os demais colegas realizem a resolução.

> *É só a gente montar tudo de novo que nem o Tetradovan lá, que tem aquela peça amarela, o pentaminó, e não olhar pros polinômios. Aí vai sair fácil. Só quando chegar no final que a gente montar tudo que a gente vai multiplicando.*

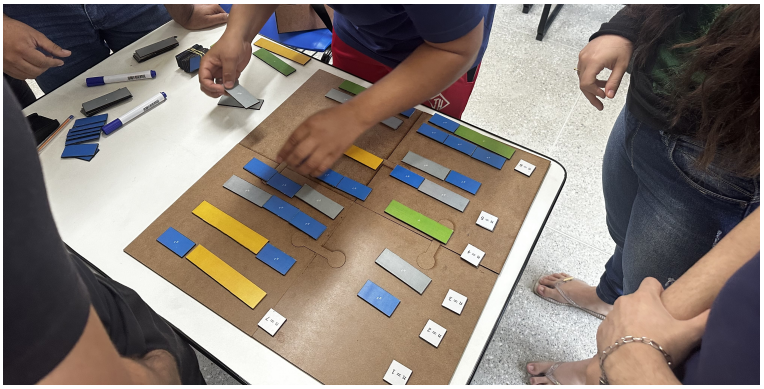
A Figura 154 retrata a fase da formulação por D2, D6, D7, D9 e D12 finalizando a interpretação combinatória da sequência. Uma discussão importante é mencionada abaixo, concretizando a compreensão acerca das regras e manuseio dos ladrilhamentos da sequência.

Figura 153 – Fase da ação da situação-problema 5 pelo D2, D6, D9 e D12 do Grupo 4

Fonte: Acervo da pesquisa.

D4: *Bora conferindo, contando as peças.*
D3: *Pra* $n = 0$ *é* 1*, né? Que foi lá definido.*
D17: *Pra* $n = 1$ *tem nada. Pra* $n = 2$ *tem* 1 *possibilidade. Pra* $n = 3$ *tem também* 1*. Pra* $n = 4$ *tem duas possibilidades. Pra* $n = 5$ *tem* 3*. Pro* $n = 6$ *tem* 4*. E pro* $n = 7$*?*
D16: *Vai ficar com* 7*. Amarelo e azul, inverte, dois azuis e um cinza, um cinza e dois azuis, azul com cinza e azul, verde e cinza e cinza e verde.*
D5: *Eu sabia que tinha que dar* 5 *possibilidades por causa do Tetradovan.*

Figura 154 – Fase da formulação da situação-problema 5 pelo D2, D6, D7, D9 e D12 do Grupo 4



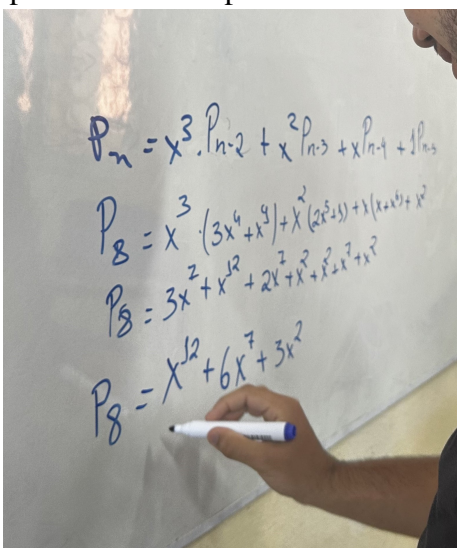
Fonte: Acervo da pesquisa.

A fase da validação tem início com a discussão dos colegas. De fato, ocorre o erro E_4, em que os estudantes sentem dificuldade em montar a definição, e vão tentando retirar ladrilhos, que já haviam sido disponibilizados na questão. É possível ainda perceber a dificuldade de alguns estudantes em formalizar a recorrência.

D8: *Já sabia que a soma seria a soma de quatro termos, seguindo a lógica das duas sequências anteriores. O que a gente resolveu fazer, foi verificar se o dominó realmente iria entrar ou não.*
D11: *Claro que ele entra. Até se a gente olhar aqui sem o dominó, vai furar logo pro* $n = 4$*, porque tá dando* 1 *e seria* 2*.*
D5: *Vamos seguindo com a ideia. Tem que ter o dominó. A questão tá dizendo que tem, então tem.*
D18:*O que a gente pensou aqui. A gente fixava uma peça e pegava mais um termo. Então o último termo aqui a gente não tem nenhum coeficiente. E o primeiro a gente tem o coeficiente x.Então vamos começar aumentando os coeficientes x. Até chegar no coeficiente* 1 *que é* x^0*.*
D15: *Então temos só que verificar aonde inserir esses coeficientes aí.*
D13: *Se a gente agora começa com o dominó pesando* x^3*, então o primeiro coeficiente vai ser ele. E vai ser logo no anterior, depois do pulo.*
D15: *Depois a gente só vai decrescendo.*
D6: *E esses pesos das peças são os coeficientes que a gente vai jogando nos* P_n*.*
D19: *Então fica* $P_n = x^3 P_{n-2} + x^2 P_{n-3} + x^1 P_{n-4} + 1 \cdot P_{n-5}$*.*
D13: *Eu tava fazendo essa conta, mas não sabia formalizar não.*

De fato, novamente ocorre E_5, onde os estudantes denominam a sequência como P_n, como pode ser visualizando na Figura 155 por D19.

Figura 155 – Início da fase da validação da situação-problema 5 pelo D19 do Grupo 4

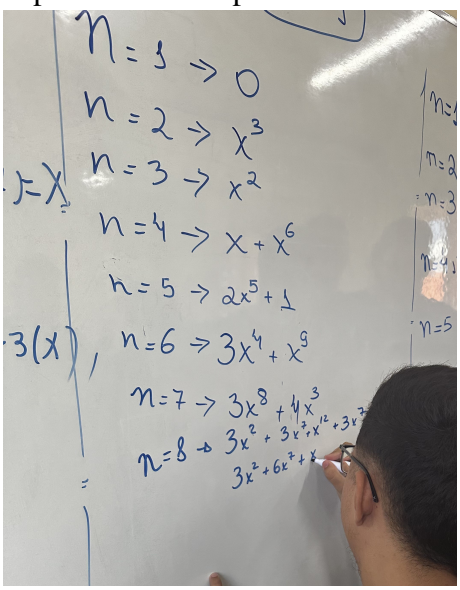


Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 156 representa D7 verificando a fórmula para o caso de $n = 8$, conforme o diálogo com seu colega D16.

D7: *Bora verificar pro caso* 8*, pra saber se essa fórmula tá batendo mesmo e se é essa a definição mesmo.*
D16: *A gente vai fazendo aqui no tabuleiro pra conferir com tuas contas depois.*

Figura 156 – Continuação da fase da validação da situação-problema 5 pelo D7 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 157 finaliza a fase da validação com a verificação no tabuleiro do caso para $n = 8$ pelos estudantes D5, D9 e D12.

Figura 157 – Fase da validação da situação-problema 5 pelo D5, D9 e D12 do Grupo 4

Fonte: Acervo da pesquisa.

Com isso, finaliza a análise dos dados da situação-problema 5. A análise conduzida durante a experimentação da situação-problema revelou uma redução dos erros e dificuldades previstos, indicando que os estudantes estavam mais familiarizados com o desenvolvimento do modelo combinatório, especialmente em relação aos pesos das peças. Essa familiaridade e as

discussões realizadas, contribuíram para uma execução mais precisa das atividades propostas, evidenciando o progresso na compreensão do conceito em estudo.

Esses resultados sugerem que o enfoque na exploração do modelo combinatório ao longo das situações-problema anteriores teve um impacto positivo no entendimento dos alunos. A ausência menor de erros indica uma melhoria na capacidade dos estudantes de aplicar o conhecimento adquirido anteriormente, consolidando suas habilidades na resolução de problemas relacionados à sequência de Padovan e suas extensões.

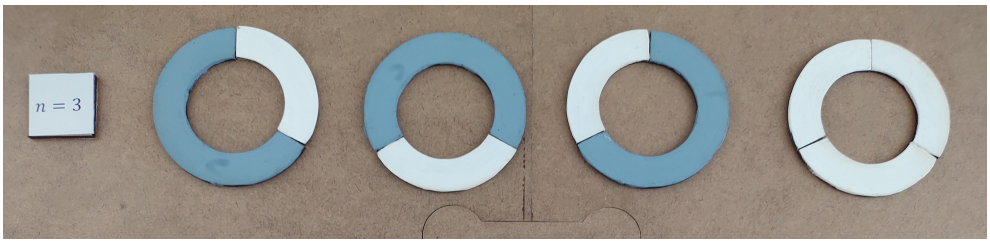
6.4.6 Situação-problema 6

Para a situação-problema 6, serão analisadas as seguintes variáveis didáticas:

- sequência de Perrin (ver Definição 4.6);
- modelo combinatório de Padovan (ver Teorema 5.113);
- modelo combinatório de Lucas (ver Teorema 5.126);
- modelo combinatório de Perrin (ver Teorema 5.127).

Situação-problema 6: Observando a relação entre a sequência de Fibonacci e Lucas, constata-se a mesma relação de recorrência e apresentando os valores iniciais diferentes entre essas duas sequências. Brevemente, apresenta-se a sequência de Lucas $\{L_n\}_{n\geqslant 0}$, e o seu modelo combinatório, sendo l_n o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro circular composto de n células marcadas com quadrados e dominós 1 x 2 (Benjamin; Quinn, 2003b). a Figura 158 é apresentada a quantidade de ladrilhamentos no bracelete de Lucas de tamanho 3, ou seja, l_3, obtendo um total de 4 maneiras de ladrilhar no bracelete.

Figura 158 – Interpretação combinatória da sequência de Lucas para $n = 3$



Fonte: Acervo da pesquisa.

Com referência nos estudos realizados acerca do modelo combinatório de Padovan e do bracelete da sequência de Lucas, tem-se a investigação do modelo combinatório de Perrin. Assim, os números de Perrin formam uma sequência recorrente de terceira ordem, possuindo a mesma fórmula de recorrência da sequência de Padovan. A sequência de Perrin, R_n, com $n \geqslant 0$

e $n \in \mathbb{N}$, é definida pela fórmula de recorrência: $R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$, com os valores iniciais: $R_0 = 3$, $R_1 = 0$ e $R_2 = 2$.

A partir da relação $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4}$ (Yilmaz; Taskara, 2013), tem-se r_n o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com $(n-2)$ posições rotuladas no sentido horário, usando um monominó curvo preto, dominós curvos azuis e triminós curvos cinzas, de modo que o monominó curvo preto, se aparecer, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições $1,2,3$ quando seguido do triminó curvo e dentre as primeiras posições $1,2$ quando seguido do dominó curvo. É importante destacar que a rotação das peças iguais é válida para a contagem.

Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Ressalta-se que um bracelete é dito *fora de fase* se existe um dominó na posição $(n,1)$. Caso contrário ele é dito *em fase*. Observe que essa definição pode ser estendida no caso de um triminó nas posições $(n-1,n,1)$ ou $(n,1,2)$. Destaca-se que o quadrado preto curvo aparece apenas uma vez, e nas três primeiras posições.

Assim, utilizando o material manipulável, quantos serão os braceletes de Perrin de tamanhos 1 x 5, 1 x 6 e 1 x 7?

6.4.6.1 Análise a priori

Para a presente atividade, tem-se a construção das definições:

- Definição 1. Regras de configurações das peças e interpretação combinatória de Perrin (ver Teorema 5.127);
- Definição 2. Modelo combinatório de Perrin (ver Teorema 5.127).

Fase da ação: com referência nos braceletes de Lucas, é possível investigar os braceletes de Perrin. Assim, de posse da sequência de Perrin e suas configurações, os estudantes deverão observar a relação entre a sequência de Padovan e Perrin para assim conseguirem apresentar os braceletes de Perrin de tamanhos 1 x 5, 1 X 6 e 1 x 7. Faz-se necessário que os estudantes retornem ao modelo combinatório de Padovan, para que possam construir os braceletes de Perrin. Um possível erro que pode ocorrer durante essa fase, refere-se ao bracelete de Perrin ser dado de tamanho $n-2$. Desse modo, os estudantes podem acreditar que ao observarem os ladrilhamentos de Padovan de tamanho n, poderão formar o bracelete de Perrin de tamanho igual. Para isso, é importante que os sujeitos estejam atentos para o tamanho do bracelete de Perrin $(n-2)$, denominado de E_1. A partir desse momento, ocorre o início da construção das Definições 1 e 2.

Fase da formulação: os estudantes deverão retornar para os ladrilhamentos de Padovan, observando os seguintes tamanhos: $n = 3$ para compor os braceletes de tamanho 1 x 5; $n = 4$ para compor os braceletes de tamanho 1 x 6; e $n = 5$ para compor os braceletes de tamanho 1 x 7. Com isso, deverão rotacionar as figuras de acordo com as regras estabelecidas, visando obter as formas combinatórias dos braceletes, bem como os números de Perrin. O erro previsto nessa fase é em relação à rotação dos braceletes e suas fases. Desse modo, os estudantes deverão observar as regras e relação $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4}$, percebendo assim que quando um ladrilhamento de Padovan encerra com um dominó, geram-se dois braceletes; já quando um ladrilhamento de Padovan encerra com um triminó, esse geram-se três braceletes com as suas devidas rotações (o erro previsto nessa fase é denominado de E_2, tratando da construção dos braceletes). Assim, é dado continuidade ao processo de construção das Definições 1 e 2.

Fase da validação: durante essa fase, os estudantes deverão observar as construções realizadas na fase anterior e compreender que a quantidade de casos possíveis para o bracelete de Perrin de tamanho 1 x 5, representa o quinto termo da sequência de Perrin (possuindo também valor 5). Para o bracelete de Perrin de tamanho 1 x 6, representa o sexto termo da sequência de Perrin (possuindo também valor 5). Para o bracelete de Perrin de tamanho 1 x 7, representa o sétimo termo da sequência de Perrin (possuindo valor 7). A abordagem pode ser visualizada no material manipulável, conforme apresentada na Figura 159.

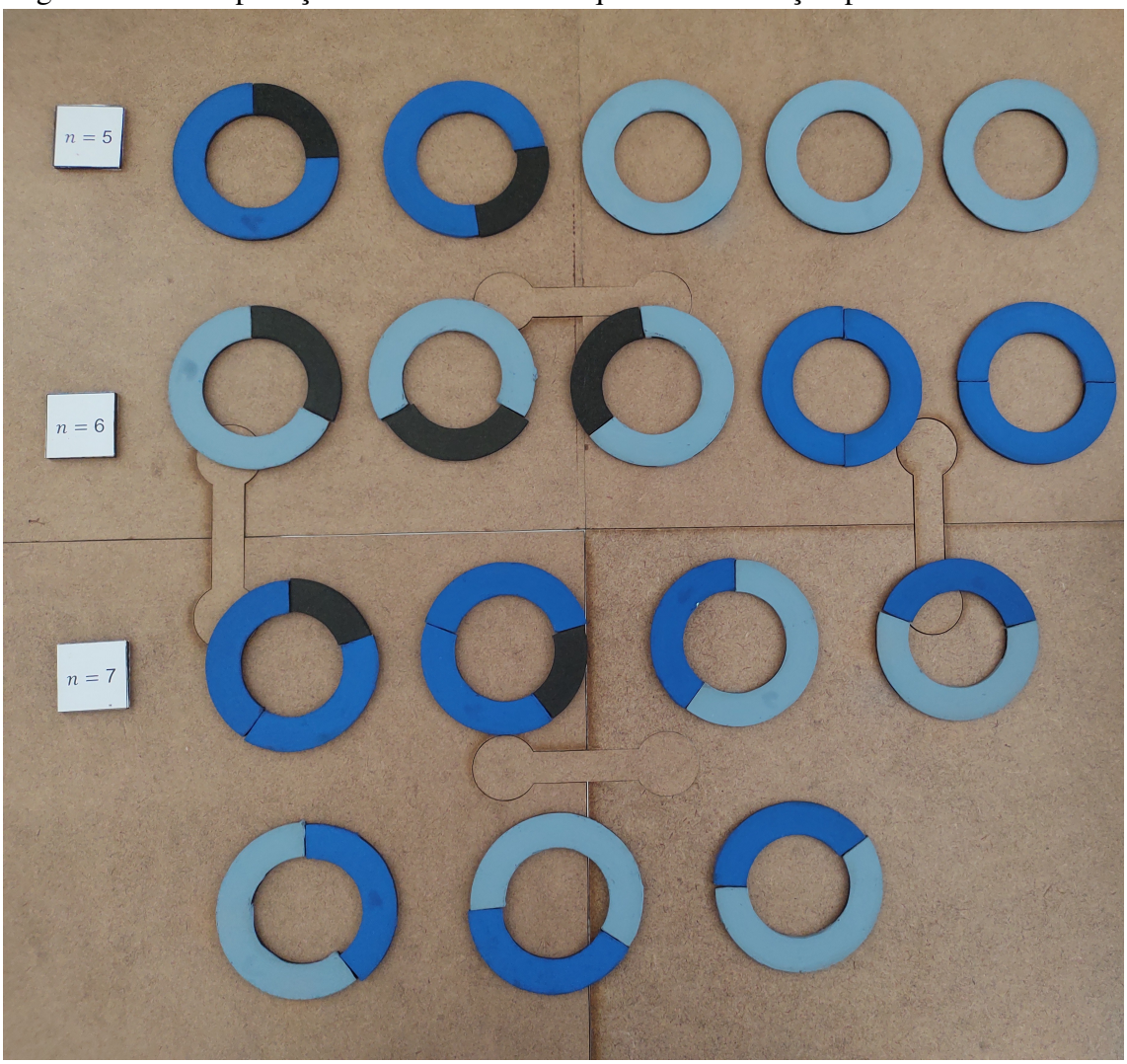
A Figura 160 retrata os braceletes de Perrin a partir do modelo combinatório de Padovan para o valor de $n = 6$. Assim, observam-se os ladrilhamentos de Padovan para o caso de $n = 4$, rotacionando as figuras para obter os braceletes para $n = 6$ de Perrin.

Aqui, tem-se as construções das Definições 1 e 2.

Fase da institucionalização: o professor retoma o papel central e analisa as resoluções, bem como divulga a intenção da atividade proposta. Com isso, tem-se a construção do modelo combinatório de Perrin, por meio de seus braceletes de tamanho $n-2$. Logo, para $n \geqslant 5$, os possíveis braceletes orientados de um tabuleiro $1n-2$ com quadrado preto curvo, dominó azul curvo e triminó cinza curvo, apresentando o quadrado preto aparecendo apenas uma vez, e nas três primeiras posições é dado por: $r_n = R_n$, onde r_n é o número de braceletes $(n-2)-$ e R_n é o n-ésimo termo da sequência de Perrin (ver Figura 161).

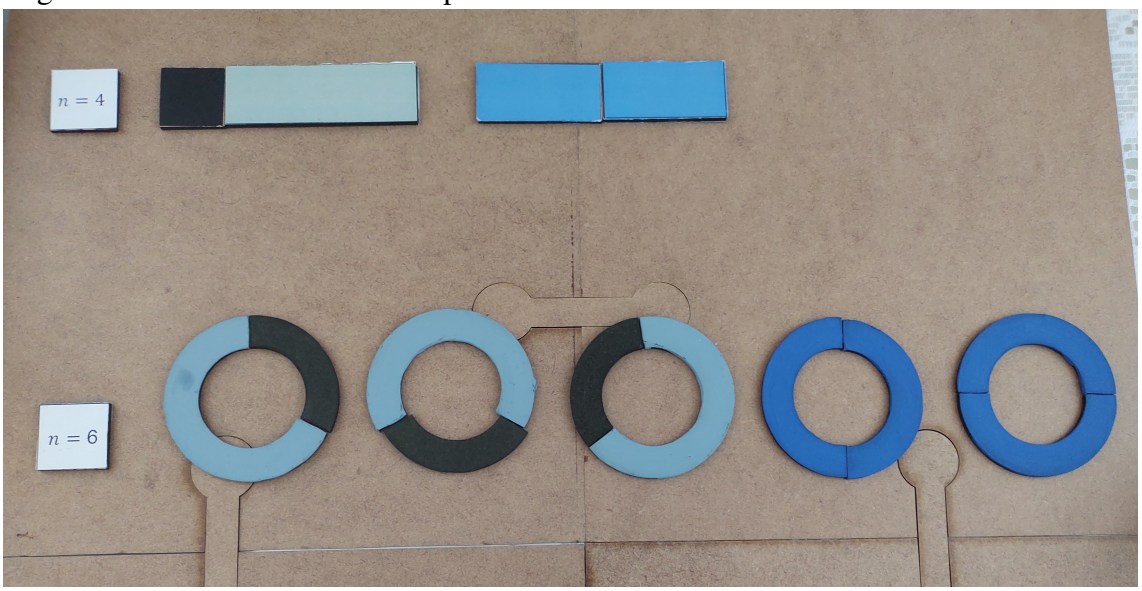
Feito isso, tem-se a finalização dos braceletes de Perrin, com as Definições 1 e 2 construídas durante a atividade proposta.

Figura 159 – Interpretação combinatória da sequência da situação-problema 6



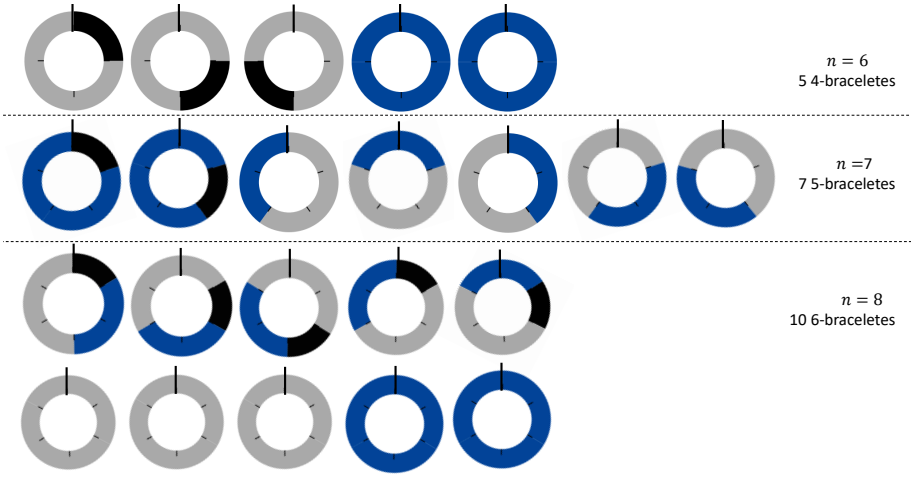
Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 160 – Braceletes de Perrin por meio dos ladrilhamentos de Padovan



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 161 – Braceletes de Perrin para os casos $n = 6, 7, 8$



Fonte: Elaborado pela autora.

6.4.6.2 Análise a posteriori

A situação-problema 6 tem como objetivo realizar a construção da abordagem combinatória de Perrin. Desse modo, a aula teve início com a institucionalização da situação-problema 5, apresentando os aspectos históricos e evolutivos matemáticos da sequência polinomial de Tetradovan. Em seguida, a situação-problema 6 foi proposta aos estudantes.

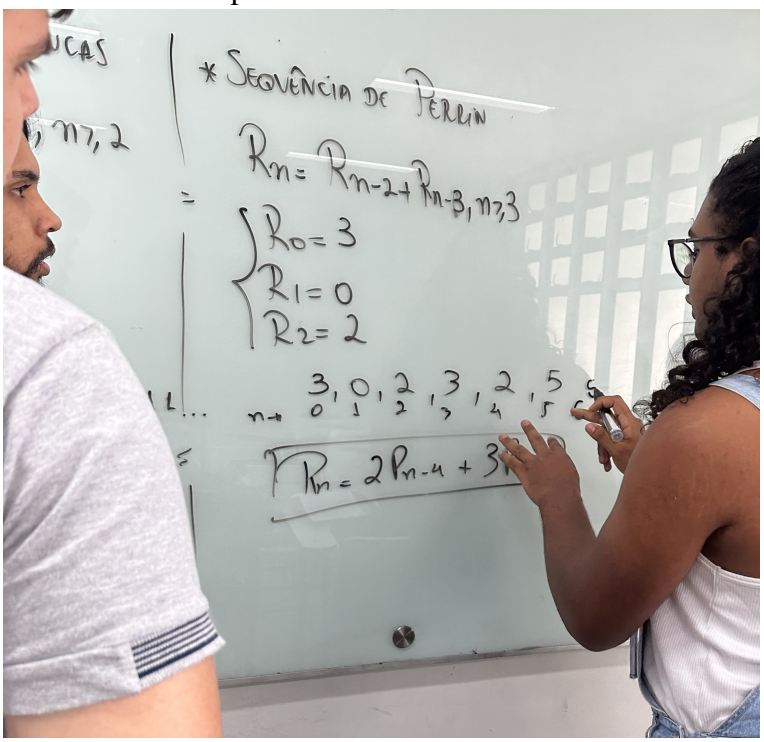
Na fase da ação, os estudantes tentam compreender a relação entre as duas sequências. A Figura 162 mostra a discussão entre os estudantes no quadro, para conseguirem avançar na obtenção dos braceletes de Perrin.

Um diálogo entre os estudantes pode ser observado a seguir identificando o erro E_1 em relação à compreensão da configuração dos braceletes

> A1: *A gente tem que esse modelo agora tem tamanho diferente.*
> A5: *Eita! Cuidado pra gente não se atrapalhar e errar.*
> A6: *É bom a gente olhar pras contagens olhando pro Padovan menor ou pro Padovan maior?*
> A8: *Calma aí! Vamos olhando tudo com calma pra saber o que a gente vai fazer.*
> A2: *Olha, se nas outras questões a peça tinha significado pra montar o tabuleiro, então agora também é pra ter. Porque olha só, se a gente tem P_{n-4} e P_{n-5} e o tamanho do bracelete é $n-2$, é melhor a gente fazer logo essa redução pra não se confundir.*
> A3: *Então fica só P_{n-2} e P_{n-3}. Que é o dominó e o triminó. E o moniminó?*
> A5: *Sei não. Vamos tentar montar e depois a gente vê como fica essa história do monominó quando a gente for conjecturar.*

Nota-se a preocupação do estudante em relação ao tamanho do bracelete de Perrin, contribuindo para que não ocorra nenhum erro.

Figura 162 – Fase da ação da situação-problema 6 pelo A7, A8 e A11 do Grupo 1



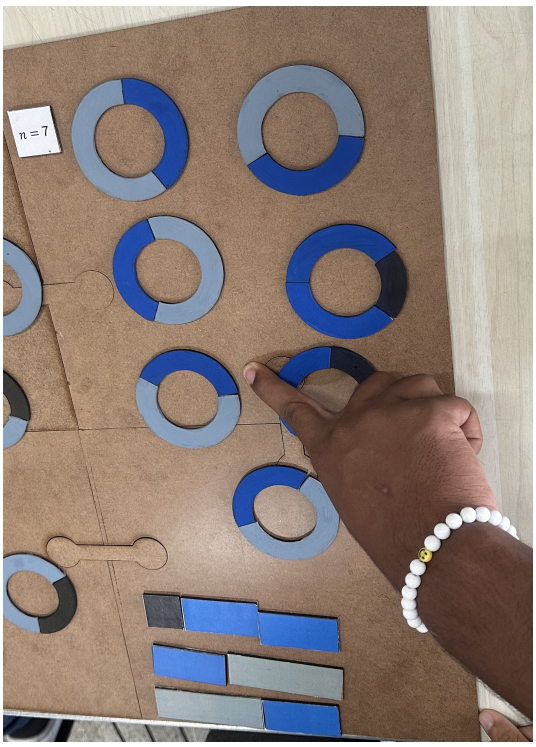
Fonte: Acervo da pesquisa.

A fase da formulação tem início com o manuseio dos braceletes, conforme apresentada na Figura 163. Os estudantes optaram por refazer os ladrilhamentos de Padovan para o caso $n = 5$, a fim de obter os braceletes de $n = 7$. Os participantes optaram por iniciaram a construção dos braceletes para o valor de $n = 7$, e em seguida foram construindo para os valores de n menores.

O estudante A9 preferiu desenvolver o modelo combinatório com o papel, resultando na Figura 164.

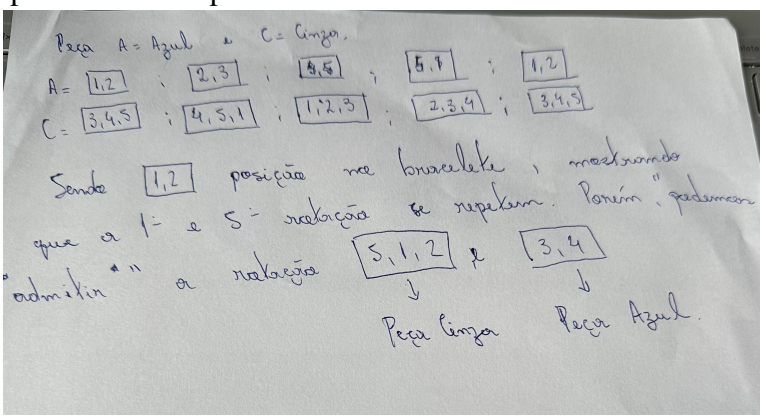
Pode-se notar que o participante opta por desenhar as posições das peças, denominando-as de A o dominó (peça azul) e C o triminó (peça cinza). Os casos em que são iniciados com o monominó preto são ignorados pelo participante, ocorrendo o erro em relação a interpretação combinatória, identificando E_2. Assim, é possível perceber que o aluno analisa somente os casos em que iniciam com dominó e triminó, porém um segundo erro que acontece na sua análise é que ele verifica somente o começo dos braceletes, não se atentando para o final, visto que terão casos em que terão braceletes iguais. A exemplo, pode-se verificar que ele considera um total de 10 braceletes para $n = 7$, porém os casos dos dominós são os mesmos dos triminós, pois quando o dominó está na posição $1,2$ e o triminó nas posições $3,4,5$ são contabilizados duas vezes. Logo, para as análises da peça A, serão os mesmos braceletes para a

Figura 163 – Fase da formulação da situação-problema 6 pelo A8 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 164 – Fase da formulação da situação-problema 6 pelo A9 do Grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisa.

peça B, resultando somente em 5 casos. Os dois casos ausentes na ideia do estudante A9 são dos ladrilhos que iniciam com monominó, totalizando 7 braceletes para o caso $n = 7$. Com isso, é identificado o erro previsto na análise a *priori* referente à rotação dos braceletes e suas fases.

Ocorreu ainda uma discussão acerca da construção dos braceletes

> A9: *Pra Padovan a gente fez pra verificar a posição e tá dando o quê?*
> A10: *Se a gente rodar pra cá, a gente tem outra peça. Se a gente rodar pra esse outro lado, a gente tem mais outra peça.*
> A11: *É melhor a gente ir vendo as posições pra não se confundir.*

> A10: *Eu tava achando que se a peça do triminó sozinha a rotação dela não ia contabilizar, como acontece pra Lucas.*
> A11: *Mas pra Perrin tem que contar, porque tá na questão, é definido.*
> A7: *Olha, aqui a gente quando tem dominó a gente tá virando dois. E quando a gente tem triminó tá virando três.*
> A11: *E o monominó?*
> A7: *Não vai dar em nada, porque a gente tá olhando só pro final do ladrilhamento de Padovan e o monomió não aparece.*

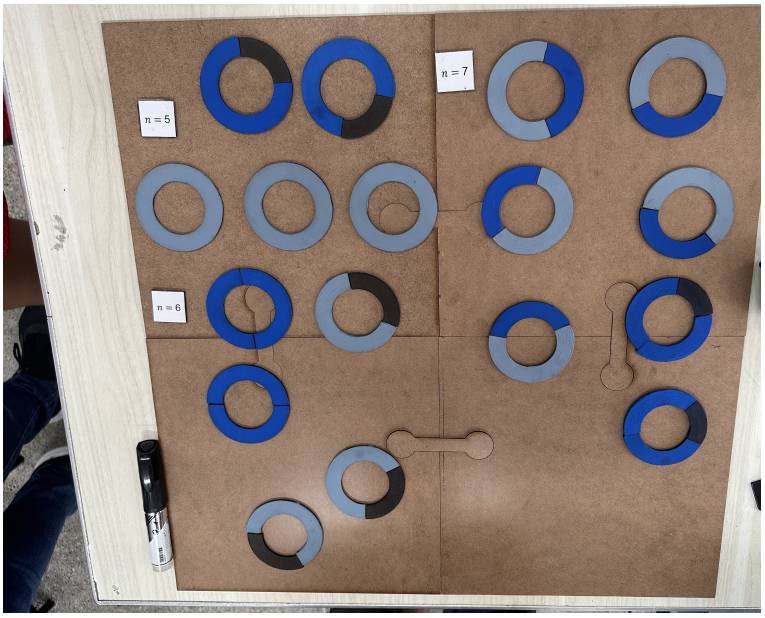
Assim, os estudantes conseguem compreender a regra de construção do modelo combinatório de Perrin, resgatando os conhecimentos obtidos no modelo combinatório de Padovan. A relação entre entre essas duas sequências e a montagem do modelo combinatório, não foi visualizada ainda pelos estudantes, porém na fase da validação o estudante A3 consegue obter tal conhecimento quando diz

> *Ah! Então já que elas rodam assim, isso tem sentido quando a gente olha pra relação entre as duas sequências, porque olha só, quando a gente reduziu pra P_{n-2} e P_{n-3}, a gente tem justamente $R_n = 2P_{n-2} + 3P_{n-3}$ que quer dizer que o dominó roda duas e o triminó roda três vezes, isso tudo a partir dos ladrilhamentos de Padovan.*

A Figura 165, permite visualizar os casos para $n = 5, 6, 7$ dos braceletes de Perrin pelo A4. Assim, o estudante A10 conjectura que

> *Então resumindo fica assim: pra n=5 tem 5 braceletes, pra n=6 tem 5 também e pra n=7 tem 7 braceletes.*

Figura 165 – Fase da validação da situação-problema 6 pelo A4 do Grupo 1

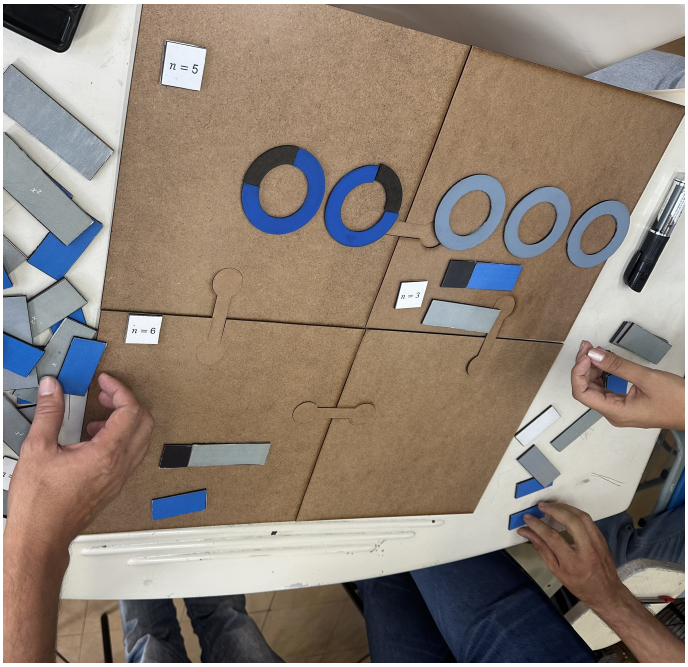


Fonte: Acervo da pesquisa.

A seguir, são analisados os comportamentos dos estudantes do Grupo 2.

Para a presente atividade, os estudantes sentiram dificuldade em compreender o tamanho do bracelete e a rotação das peças, como previsto em E_1, visto que o bracelete de Perrin tem tamanho $n-2$. Porém, com a ajuda dos demais colegas, conseguiram obter a Figura 166, durante a fase da ação.

Figura 166 – Fase da ação da situação-problema 6 por B4, B6 e B7 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

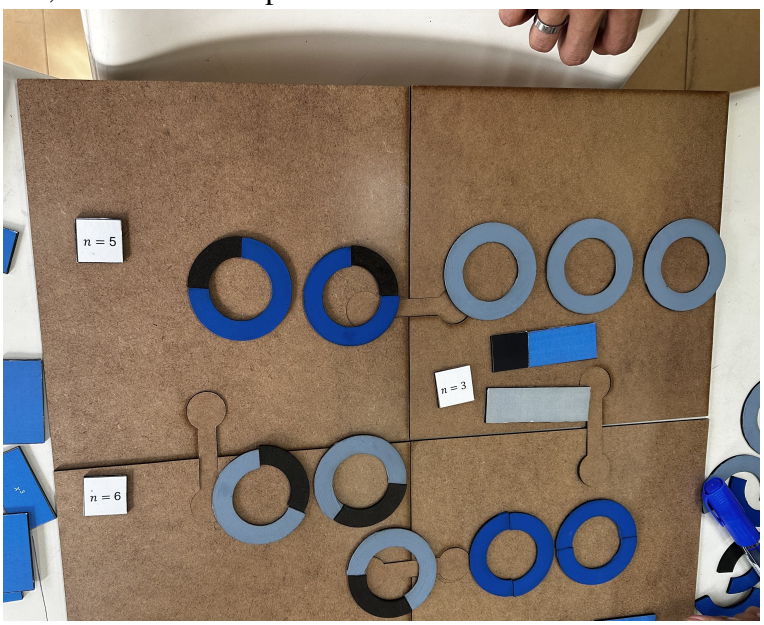
Para o caso $n = 5$, pode-se observar o relato dos estudantes B2, B5 e B9.

> B9: *Bora começar pelo Padovan. Bora fazer n = 5 pra Padovan.*
> B2: *Não, mas o bracelete tem tamanho menor. Então a gente faz é o n = 3 do Padovan.*
> B9: *Vixe! Verdade! Nem tinha me ligado nesse tamanho menor aí. Tava pensando na sequência de Lucas ainda.*
> B5: *Então Padovan n = 3 tem esses casos aqui.Preto e azul e o cinza sozinho.*
> B2: *Aí daqui a gente faz os giros.*
> B5: *Esse aqui da cor única dá pra rodar três vezes. Que é o cinza*
> B2: *E quando tiver o preto com o azul só vai rodar duas.*

A fase da formulação foi identificada quando os estudantes discutiram e conseguiram obter os braceletes de Perrin para $n = 6$, coforme pode ser visualizado na Figura 167.

O relato dos estudante B1, B8 e B10 é apresentado, possibilitando compartilhar com os demais colegas sobre a ideia desenvolvida durante a resolução da atividade, onde alguns apresentaram dúvidas como previsto em E_2.

Figura 167 – Fase da formulação da situação-problema 6 por B4, B5 e B7 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

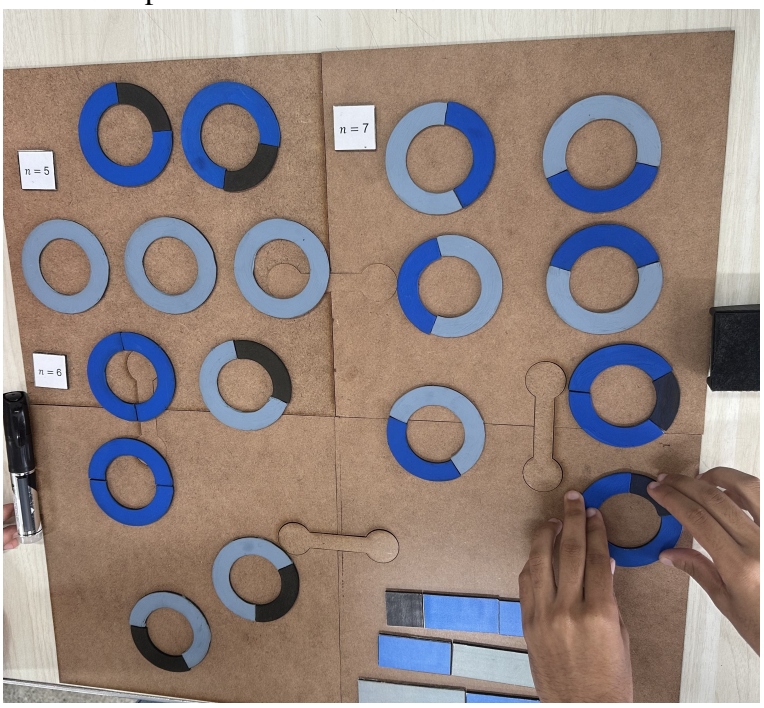
> B10: *Se a gente pegar agora o Padovan* $n = 4$*, a gente vai pensar como vamos rodar essas peças se a gente fosse fechar.*
> B1: *Então a gente tem agora preto e cinza e dois azuis.*
> B8: *Só que o preto e o cinza vai rodar três vezes, porque o preto só pode ocupar até a terceira posição. E o azul vai rodar duas vezes, senão fica a mesma peça repetida.*
> B1: *E eu tava rodando aqui mais vezes.*
> B10: *Não. Porque fica assim: na posição* $1,2$ *e rodando* $2,1$*. O resto fica igual. Ia duplicar os casos.*
> B1: *Entendi*
> B1: *Então no final das contas seriam* 5 *casos.*

A fase da validação, vem com a finalização da atividade, permitindo que os estudantes desenvolvam os braceletes de Perrin até o caso de $n = 7$. Para isso, tem-se a Figura 168.

Percebe-se que ao desenvolver o último valor de n solicitado, os estudantes conseguiram compreender a lógica de rotação das peças dos braceletes, como é possível observar na interação entre os colegas.

> B2: *Agora pra* $n = 7$ *a gente pega o Padovan* $n = 5$*. Que tem o cinza e azul, azul e cinza e o preto com dois azuis.*
> B9: *E a rotação? Como vamos rodar agora?*
> B1: *Melhor a gente fazer no papel?*
> B2: *Não, fica mais difícil! Porque a gente não tem como olhar se tá batendo memso.*
> B5: *Vai! Fica assim: começando com o cinza e terminando com o azul. Roda aqui, aqui e aqui.*
> B2: *Começando com o azul e terminando com o cinza então vai rodar: aqui e aqui. Porque se a gente rodar de novo vai ficar repetido.*
> B8: *E o preto com azuis fica só essas duas aqui.*
> B2: *Confere aí se tá tudo ok. Se as posições tão ok.*

Figura 168 – Fase da validação da situação-problema 6 por B3 do Grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa.

> B5: *Melhor assim, olha: Azul fica nas posições 1,2; 2,3; 3,4; 4,5. O cinza fica nas posiçoes 1,2,3; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,1; 5,1,2. Só que fica repetido. Por exemplo aqui, quando tem o azul nas posições 1,2 é o mesmo caso do cinza nas posições 3,4,5. Então corta 1. Azul na 2,3 é a mesma coisa do cinza na 4,5,1. Azul na 3,4 é a mesma coisa do cinza na 5,4,1. E 4,5 é a mesma coisa do 1,2,3.*
> B2: *Bicho, com essas rotações a gente vê que quando termina com o cinza tá sempre rodando três vezes. E quando termina com o azul, sempre tá rodando duas vezes.*
> B5: *Como?*
> B2: *Olha pra relação que tem na questão, que a professora disse. Perrin e Padovan.* $R_n = 3P_{n-5} + 2P_{n-4}$. *Então se a gente tirar o tamanho do bracelete que é dois. Vamos perceber essas rotações.*
> B5: *Ah! Como se ficasse* $3P_{n-3} + 2P_{n-2}$.*Aí o* P_{n-3} *é o cinza que tem tamanho 3 e vai rodar três vezes. Se terminar com ele.*
> B1: *Eita! Essa sacada foi show! E se terminar com o dominó vai rodar só duas. E eu tava fazendo aqui no olhomêtro e achismo.*
> B3: *Eu não tinha entendido no primeiro caso porque o preto com azul só tinha rodado duas vezes. Agora entendi o negócio.*

Observa-se que, conforme relatado pelo estudante B3, a compreensão da rotação só ocorreu após a discussão com os colegas e a resolução da atividade para $n = 7$. Antes desse momento, o conceito não estava completamente assimilado. Essa experiência ressalta a importância do diálogo e da colaboração entre os estudantes para o aprofundamento do entendimento dos conteúdos, além de evidenciar a necessidade de abordagens variadas para garantir uma compreensão plena dos conceitos matemáticos. Ainda é possível destacar pela discussão acima, que os estudantes optaram por utilizar o tabuleiro como facilitador do processo

de ensino e resolução da atividade.

Finalizando a atividade com o relato dos estudantes B3 e B10, permitindo um *feedback* em relação à atividade proposta.

> B10: *Embora o conteúdo de recorrência tenha sido visto só com a sequência de Fibonacci, com esse tabuleiro e as explicações iniciais foi possível realizar as atividades propostas. E ainda posso dizer mais, que a aula foi interessante, professora. Vimos que o assunto é bem legal e que, ficou mais fácil, quando a gente usou o tabuleiro, pois conseguimos construir as recorrências e entender o que o problema queria.*
> B3: *E o fato da gente não conhecer as sequências foi legal, porque a gente foi descobrindo aos poucos e ter o material concreto ajuda bastante na assimilação, facilitando em manter o foco em outras questões. Posso dizer também que essa método utilizado pro ensino favorece a participação dos colegas.*

Com isso, torna-se evidente que os estudantes apreciaram tanto a utilização do tabuleiro mórfico quanto a metodologia de ensino empregada. Essa constatação reflete não apenas o interesse dos alunos nas atividades propostas, mas também a eficácia da abordagem pedagógica em envolvê-los de maneira significativa. Além disso, o entusiasmo dos estudantes em relação ao uso do tabuleiro mórfico e à metodologia adotada sugere que essas ferramentas e estratégias podem ser consideradas como recursos, promovendo o engajamento e o interesse dos alunos no ensino da matemática.

Assim, finaliza-se a verificação do Grupo 2, tendo início ao processo do Grupo 3. Tão logo, tem-se a fase da ação presente no diálogo entre os participantes, ao estabelecerem estratégias para manusearem os braceletes, de acordo com as regras fornecidas.

> C5: *Com que eu sei aonde vai começar a peça?*
> C4: *Tu pode fazer assim, olha. Tu pode olhar, por exemplo. Esse aqui eu vou começar o preto com azul, então eu vou começar daqui, e deixa ele torto.*
> C2: *Os braceletes vão ser menores? Como é essa história do* -2*?*
> C1: *Eu acho que é só no final que a gente olha a quantidade de braceletes formados e tira* 2*, né não?*
> C7: *Não! Tem nada a ver! Tu vai pegar o tamanho do bracelete e diminuir* 2 *do tamanho do Padovan. Pra conseguir o Perrin. Olha pro Padovan sempre com tamanho menor* 2 *vezes.*
> C8: *É só tu esquecer o tamanho do bracelete no início, e diminuir o tamanho que tá aí* 2 *vezes. No final tu só vai olhar pro n pra saber se o valor tá batendo com o número de Perrin.*
> C1: *Ah! Então aqui o* $n = 5$ *vai dá* $n = 3$*, né?*
> C8: *É, porque é* $n - 2$*.*
> C7: *Vamos montar logo o Perrin, porque Padovan* $n = 3$ *é pequeno e dá pra fazer de cabeça.*
> C2: *Tu lembra?*
> C7: *Lembro! Ficava preto e azul e um cinza.*
> C3: *Então vai ficar preto e azul, rodando quantas vezes?*
> C5: *Ele só pode rodar na primeira e na segunda posição. Então só vai rodar duas vezes.*
> C1: *A posição desse azul tá na posição* 1*?*
> C7: *Então o azul vai ficar nas posições* 2 *3* 3 *e roda, ficando nas posições* 3 *e* 4*.*

Percebe-se que os estudantes têm certa facilidade com a sequência de Padovan, pois não precisam montar os ladrilhamentos de Padovan para criar os braceletes de Perrin. Isso é evidenciado pelo relato de C7, que menciona que, devido aos valores pequenos de n, é possível manipular rapidamente e lembrar dos ladrilhos disponíveis. No entanto, a dificuldade E_1 surge quando alguns participantes têm dificuldade em compreender as rotações e os tamanhos dos braceletes. Ainda assim, com a ajuda dos colegas, a ideia é compreendida, o que contribui para a continuidade da atividade. A Figura 169 representa a fase da ação pelos estudantes C3 e C8, discutindo como serão inseridos os braceletes e suas estratégias para a resolução da atividade.

Figura 169 – Fase da ação da situação-problema 6 por C3 e C8 do Grupo 3

Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 170 apresenta a fase da formulação pelos estudantes C1,C2, C3 e C8, montando os casos para os braceletes $n = 5$ e $n = 6$. Já nesse momento, pode-se observar a presenta do erro E_2 em relação ao bracelete $n = 5$, onde os participantes inserem somente um bracelete cinza, resultando em 3 braceletes, o que seria na verdade 5. Assim, os estudantes não observam as duas rotações possíveis para o bracelete de caso $n = 5$ na cor cinza, com o triminó curvo.

O diálogo a seguir revela a identificação de um erro na rotação dos braceletes, detectado pelos colegas durante a fase de formulação da atividade, enquanto organizavam as estratégias e definiam as regras.

C2: *E o cinza fica só uma vez.*
C1: *O preto e o azul tem que andar juntos. E coloca só o cinza aí.*
C7:*Tá faltando uma rotação, né não?*

Figura 170 – Fase da formulação da situação-problema 6 por C1,C2, C3 e C8 do Grupo 3

Fonte: Acervo da pesquisa.

C3: *Porque mesmo sendo peça igual, vai contar.*
C5: *Então o cinza não vai ter só* 1*. Vai ter mais uma rotação.*
C8: *Não, ele vai rodar* 3*.*
C5: *Por que* 3*?*
C8: *Porque olha, ele tá na posição* $1,2,3$*, depois roda pra* $2,3,1$ *e depois aqui, na* $3,1,2$*.*
C4: *Então eu posso rodar mais uma, na* $1,2,3$*.*
C7: *Aí volta pra primeira rotação. Fica igual.*
C4: *Ah! Verdade! Então ficam* 3 *cinzas aqui.*
C3: *E bate ali, né? Porque o* $n = 5$ *de Perrin é* 5*.*

Durante a fase da validação, os estudantes iniciam uma nova discussão, onde verificam os números de braceletes relacionados aos números de Perrin.

C3: *Pro* $n = 7$ *o azul tá começando no* $1,2$*. Aqui ele vai rodar e ficar no* $2,3$*. Agora ele vai ficar no* $3,4$*. Então azul e cinza ficam esses* 3 *casos.*
C1: *Não roda mais porque vai repetir, né?*
C2: *Isso! Se a gente rodar de novo, vai ficar* $4,5$*,* $5,1$*. E a próxima rotação volta pro primeiro caso, que é* $1,2$*.*
C4: *Repetir aonde?*
C7: *Porque no Padovan a gente tem azul e cinza e depois tem cinza e azul. Então se a gente rodar o azul nas posições* $4,5$ *e* $5,1$*, vai ser a mesma coisa do caso que começa com cinza e termina com azul, onde tem o cinza nas posições* $1,2,3$ *e* $2,3,4$*.*
C4: *Verdade! Porque no Padovan teve essa permutação, e agora no Perrin não tava enxergando.*
C3: *E o preto com azul só pode rodar* 2 *vezes. Então fica assim.*
C8: *Olha, pro Perrin tem* $n = 5$ *são* 5 *braceletes. Pro* $n = 6$ *são* 5 *de novo e* $n = 7$ *são* 7 *braceletes.*
C5: *Então pro* $n = 8$ *iam ser* 10 *braceletes.*
C1: *Foi o que tu disse lá no começo, né? Esse n é melhor a gente olhar só no final, pra não confundir com o* $n - 2$*.*
C8: *É, porque a gente vai precisar desse n pra saber o número da sequência de*

> *Perrin. E o $n-2$ a gente tem que saber o tamanho do bracelete, não pode esquecer dessa subtração, senão ia errar tudo.*

Por fim, a Figura 171 mostra o estudante C7 apresentando a conclusão dos casos dos braceletes de Perrin, relatando ainda sua concepção sobre a prática abordada.

> *Por se tratar de uma forma mais lúdica e de um material palpável a atividade se tornou mais interessante de resolver. E eu gostei muito da metodologia, ela é muito impactante. Mostra algo que podemos usar na sala de aula. Ela consegue contemplar vários aspectos da matemática, principalmente quando se utiliza resolução de problemas.*

Figura 171 – Fase da validação da situação-problema 6 por C7 do Grupo 3

Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, o estudante C1 interage com C5 referente

> C1: *Eu achei que essa questão teve um obstáculo maior, no sentido de estabelecer um termo geral. Porque possivelmente um dos obstáculos foi o uso das duas sequências pra chegar nos braceletes. Mesmo agora a gente já tendo a recorrência, mas mesmo assim foi mais difícil.*
> C5: *Exato! Mas como a gente já conhecia Padovan e os ladrilhamentos, aí foi ficando mais fácil e a gente conseguiu fazer a atividade. Montar os braceletes de Perrin. Os obstáculos que a gente foi encontrando, essas dificuldades, foram importantes também pra gente desenvolver os conteúdos e atingir os objetivos.*
> C1: *É uma maneira interessante de se trabalhar, tal tipo de conteúdo, e eu nunca tinha visto parecido. O aspecto de jogo que eu particularmente senti no decorrer do processo. Isso é extremamente positivo para a educação. Digo pra educação básica também, levar essas questões da atividade em forma de jogo e aplicar variando o nível da turma, do curso.*
> C5: *Tem que olhar o conteúdo e modificar ele pra transformar em jogo. Aí a gente pode levar. Agora esse já fica muito avançado pra turma da educação básica.*

C1: *Fica sim. Eu tô falando na questão de transformar o conteúdo em jogo.*

Com a conclusão da análise do Grupo 3, é dado início ao processo do Grupo 4. Na fase da ação os estudantes optam por iniciarem montando os ladrilhamentos de Padovan com valores de n menores do que o bracelete de Perrin. Nesse momento, ocorre E_1, onde os estudantes não compreendem o tamanho do bracelete que é $n-2$ e o retorno para a sequência de Padovan, como pode ser constatado no diálogo.

D1: *Se a gente pegar o Padovan, a gente vai só transformar ele em bracelete e dá o Perrin.*
D3: *Mas a gente vai pegar qual o n de Padovan?*
D9: *Tem que ser o* $n = 5$.
D12: *Não, a gente tem que pegar o n menor, porque o bracelete é menor. Então vai ser o* $n = 3$ *Padovan.*
D10: *Então bora fazer o* $n = 3,4,5$ *de Padovan e depois ir fazendo os braceletes. Para gente ir vendo os que vão tá em fase e fora de fase e quantos vão dar.*
D3: *Tem que ir olhando pra saber se vai bater com a fórmula lá de Perrin.*
D17: *Bora montar a sequência de Perrin logo. Olha, é* $3,0,2,3,2,5,5,7$. *A gente só vai precisar desses.*

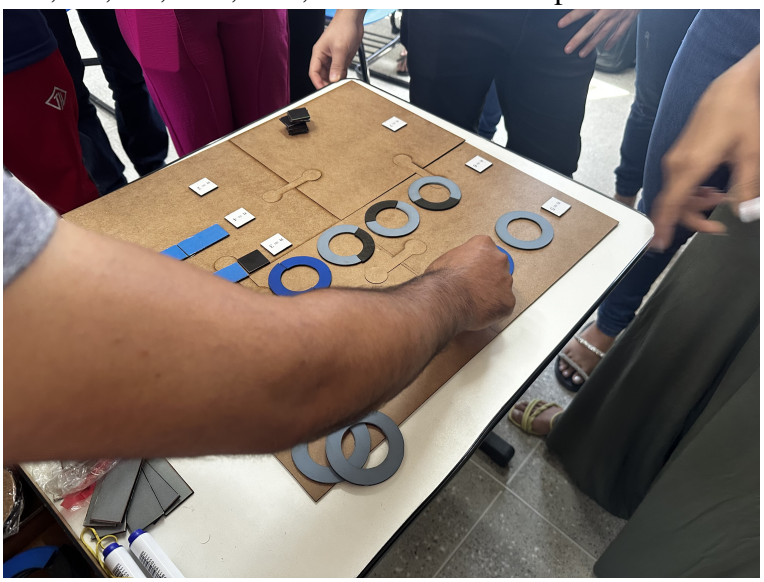
O estudante D3 não entende qual o valor de n dos ladrilhamentos de Padovan que ele deverá resgatar, para que possa verificar os casos dos braceletes de Perrin para $n = 5$. Com a ajuda dos colegas, consegue compreender que o tamanho do bracelete é menor.

A Figura 172 retrata o início do manuseio do tabuleiro por D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19, onde estabelecem as estratégias para alcançar o objetivo da atividade.

A fase da formulação ocorre com o desenvolvimento das estratégias estabelecidas, possibilitando a montagem da interpretação combinatória de Perrin via braceletes. O diálogo entre os colegas pode constatar E_2, onde o estudante não compreende que os braceletes de iguais, contabilizam para o modelo combinatório, bem como o processo de fase e em fora de fase.

D15: *Agora vamos pra esse aqui. Tem tamanho* 3.
D6: *Pro Padovan tem* 2 *possibilidades. Então a gente gira o preto com azul duas vezes, porque não pode girar na terceira posição quando tem azul.*
D8: *O cinza gira só uma.*
D2: *Agora vamos pro* $n = 4$, *que é o* $n = 6$ *Perrin. Tem preto e cinza e azul duas vezes.*
D8: *Ah! Pra Perrin vai ficar preto e cinza girando três vezes. E os dois azuis ficam duas vezes, esse vai tá em fase e o outro fora de fase.*
D5: *Agora pro* $n = 5$*? O bicho pega.*
D1: *Vai ficar preto e azul duas vezes. E o azul e cinza três vezes.*
D7: *Mas Padovan tem cinza e azul. Como fica esses?*
D1: *Não conta, porque vai dar a mesma coisa quando girar.*
D7: *Vai não! Coloca na posição certa, a posição inicial e observa se tá em*

Figura 172 – Fase da ação da situação-problema 6 por D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

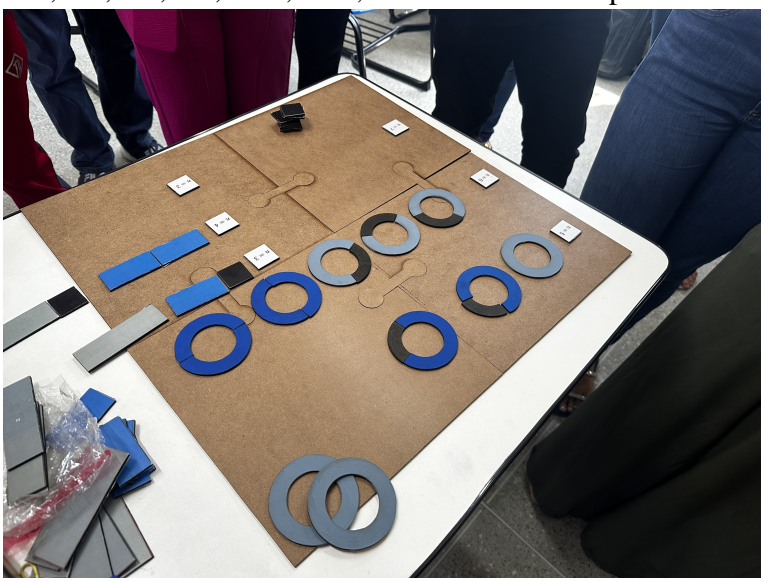
fase e fora de fase.
D5: *Olha! Esse cinza e azul fica aqui e esse outro aqui. Então ficam mais esses dois casos aqui.*
D8: *Olhando aqui pros Padovans, o preto só podia ser o primeiro no Padovan.*
D11: *O preto só pode rodar* 2 *vezes no azul. Então ficam esses* 2 *casos aqui. E agora?*
D15: *Fica azul e o cinza, depois ele de novo com a rotação.*
D19: *Agora com esse cinza e azul aí fica rodando assim, como se tivesse na posição* $1,2,3$ *e depois vai rodando pra* $2,3,4$*, depois pra* $3,4,5$.
D3: *Aí fica igual, né não?*
D5: *Fica não, porque a gente vai olhando pras posições que eles tão ocupando e vê que não tão iguais. Olha esse tá diferente! Coloca perto pra tu olhar!*
D11: *Verdade, porque tu tava colocando ele torto, então dava pra pensar que tava igual.*
D8: *Então ficam* 7*?*
D11: *Fica sim!*
D15: *Pronto, fechou!*
D2: *Pera, pera!*
D5: *Ali no* $n = 5$ *tá faltando. Porque na questão diz que as rotações iguais contam como casos sim. Então ficam mais cinzas.*
D7: *Ficam* 5 *casos.*

A Figura 173 apresenta a fase da formulação pelos estudantes D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19, onde seguem para o caso $n = 6$, esquecendo os braceletes cinzas do caso $n = 5$.

Finalizando, tem-se a fase da validação, onde os estudante dialogam para verificar se os braceletes encontrados estão corretos, conferindo com a recorrência da sequência.

D5: *Vamos arrochar aqui pra vê se tá batendo com Perrin.*
D6: *Mas aqui olha,* $n-2$ *é* 4 *e aqui tá com* 5*.*
D8: *O* R_1 *é quanto? é* 1*?*
D7: *Não, isso aí era Padovan.*

Figura 173 – Fase da formulação da situação-problema 6 por D1, D2, D5, D9, D11, D17, D18 e D19 do Grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisa.

D9: *Agora fica* $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 2, R_5 = 5, R_6 = 5, R_7 = 7$.
D11: *Tá aí o* 5*, por isso que as rotações iam importar. Pra dá certinho aí no* 5.
D15: *A gente tinha esquecido de rotacionar os triminós.*
D11: *A gente tem que sempre lembrar desses detalhes. O preto só pode rodar* 2 *vezes quando tá com dominó. E só pode rodar* 3 *vezes quando tá com cinza. E ainda tem esse detalhe da rotação importar quando as cores são iguais.*

A Figura 174 apresenta a fase da validação pelos estudantes D2, D5, D11, D15 e D19, onde resolvem juntar os casos dos ladrilhamentos de Padovan ao lado dos braceletes de Perrin, de forma a facilitar a resolução da atividade.

Figura 174 – Fase da validação da situação-problema 6 por D2, D5, D11, D15 e D19 do Grupo 4

Fonte: Acervo da pesquisa.

O relato do estudante D13 ao final da atividade comprova o benefício da utilização do tabuleiro para a interpretação combinatória.

> *Com a utilização do tabuleiro e as demais definições que a gente foi conseguindo ficou bem explicado o conteúdo e mais fácil de achar a definição. É muito importante a gente definir essas sequências, porque a gente vai vendo como elas são construídas. A aula ficou bem planejada e com a ajuda dos colegas ficou mais fácil de conseguir resolver as questões também.*

Desse modo, é finalizada a análise da situação-problema 6 e da experimentação. A análise conduzida durante a experimentação da situação-problema 6 confirmou a ocorrência dos erros e dificuldades previstos na análise a *priori* das situações didáticas. Os estudantes encontraram dificuldades e cometeram erros relacionados ao tamanho do bracelete de Perrin, à forma de rotacioná-los e às suas respectivas fases.

Essa identificação de erros e dificuldades é fundamental para compreender os pontos de desafio enfrentados pelos alunos ao lidar com o conceito de braceletes de Perrin. Esses erros oferecem *insights* valiosos sobre as áreas que necessitam de maior atenção durante o processo de ensino.

Desse modo, resgatam-se que os erros e dificuldades previstos, apresentados no Quadro 28 conforme sua categorização e nomenclatura atribuída na fase da análise a *priori*. Esse processo permite uma compreensão mais aprofundada dos possíveis obstáculos e desafios que os alunos podem enfrentar, o que é crucial para o desenvolvimento de estratégias eficazes de ensino. De fato, destaca-se que E_5 foi inserido após a experimentação e coleta de dados, não sendo previsto.

Quadro 28 – Categorização dos erros e dificuldades previstos

Código	**Descrição**
E_1	Regras e configurações dos ladrilhos dos tabuleiros e braceletes e, respectivos pesos.
E_2	Construção dos ladrilhamentos, formas de ladrilhar e rotação dos braceletes.
E_3	Ladrilhamentos ocorrendo obtendo o termo adiantado da sequência, assim como para Fibonacci.
E_4	Obtenção da recorrência da sequência estudada, atentando-se para o salto existente entre o termo anterior imediato e a forma polinomial (quando tratar de sequência Polinomial).
E_5	Nomenclatura da sequência.

Fonte: Elaborado pela autora.

Tendo em vista o erro e dificuldade E_5 referente à nomenclatura utilizada pelos estudantes durante as resoluções das situações-problema proposta, tem-se o Quadro 29 com o breve glossário com as suas respectivas denominações elaboradas pelos sujeitos participantes. Percebe-se que os estudantes do Grupo 1 criaram duas nomenclaturas para as sequências estudadas, esse fato deu-se pelas aplicações terem ocorrido em semestres distintos, resultando

em dois subgrupos. Já o Grupo 2, basicamente permanece sempre com a mesma independente da sequência se tratar de sua forma polinomial ou não. Ao contrário do Grupo 1, que em quase todas as situações-problema, atentam-se para o formato da sequência (e sua forma polinomial), resultando na inserção do termo (x) na nomenclatura. Assim, ocorre a exceção para a sequência de Tetradovan, em que os estudantes do Grupo 1, denominam a sequência de $T_n(x)$, apresentando o erro em relação à variável x. O Grupo 3 alternaram a nomenclatura entre F_n para as sequências de Padovan, Tridovan e Tetradovan e P_n para a sequência polinomial de Tridovan e $P_n(x)$ para a sequência polinomial de Tetradovan, não percebendo a existência de (x) para a nomenclatura. O Grupo 4 não distinguiu a nomenclatura das sequências polinomiais, alternando entre as denominações de F_n, P_n e Q_n, por eles atribuídas.

Quadro 29 – Glossário com as nomenclaturas elaboradas pelos Grupos

Sequência / Grupo	**Padovan**	**Tridovan**	**Polinomial de Tridovan**	**Tetradovan**	**Polinomial de Tetradovan**
Grupo 1	F_n	$\tilde{P}_n$	$\tilde{P}_n(x)$ e T_n	$T_n(x)$ e $\tilde{P}_n$	$T_n(x)$ e $\tilde{P}_n(x)$
Grupo 2	F_n	F_n	$P_n(x)$	$P_n(x)$	$P_n(x)$
Grupo 3	F_n	F_n	P_n	F_n	$P_n(x)$
Grupo 4	F_n	F_n	P_n	Q_n	P_n

Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, tem-se o Quadro 3 com a comparação dos erros e dificuldades vivenciados por cada Grupo em cada situação-problema aplicada. Observa-se que o Grupo 2 teve uma quantidade de erros e dificuldades menor do que em relação aos Grupos 1, 3 e 4. A situação-problema 6, apresentou como previsão de erros e dificuldades somente E_1 e E_2, por não tratar da construção de definições, logo as demais dificuldades não foram previstas durante a análise a *priori*. De fato, percebe-se que E_3 não ocorreu em nenhum dos grupos analisados, uma vez que os teoremas apresentados já obtinham os termos da sequência de forma imediata. Com isso, os estudantes não atentaram-se para a possibilidade de atraso na sequência como acontece para Fibonacci e para o modelo combinatório de Tedford (2019).

Com tudo, os estudantes apresentaram comportamentos parecidos em todos os grupos analisados. Em relação aos erros e dificuldades, pode-se identificar que as situações-problema 1 e 3, ocorreram de maneira bem similar para todos os grupos, onde todos apresentaram as mesmas dificuldades e erros como previstos na análise a *priori*. A situação-problema 2, teve uma maior dificuldade a ser desenvolvida pelos Grupos 3 e 4, onde alguns grupos não encontraram dificuldades conseguindo obter a resolução de modo mais rápido e prático. Nas

situações-problema 4 e 5, somente o Grupo 1 encontrou uma maior dificuldade, os demais grupos apresentaram níveis similares. Na situação-problema 6 todos os grupos apresentaram dificuldades e erros semelhantes, como previsto anteriormente. Isso ocorreu pelo fato da atividade apresentar um maior detalhamento das informações e um nível mais avançado, além disso é necessário reunir os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, seguindo uma sequência didática.

Tabela 3 – Comparação dos erros e dificuldades previstos pelos Grupos

Erros e dificuldades / Situação-problema	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
S1	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 3 Grupo 4		Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4
S2	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 3 Grupo 4		Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4
S3	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4		Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4
S4	Grupo 1				Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4
S5		Grupo 1		Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4
S6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4	Não previsto	Não previsto	Não previsto

Fonte: Elaborado pela autora.

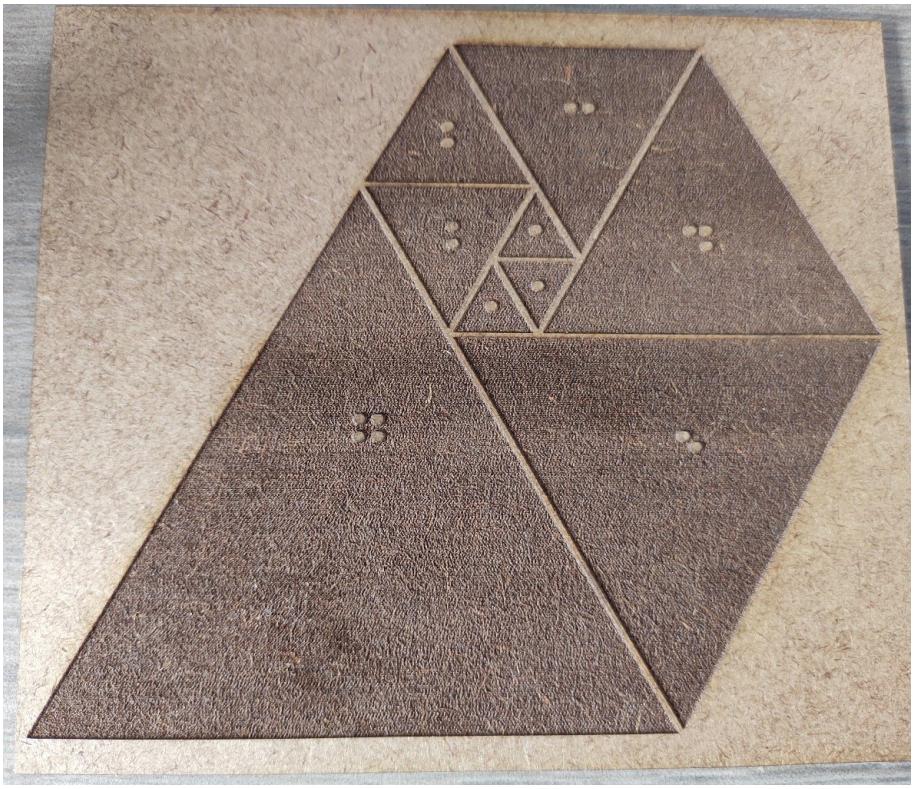
A análise desses resultados proporciona uma base sólida para aprimorar as estratégias didáticas e projetar intervenções mais direcionadas. Ao compreender os desafios específicos enfrentados pelos alunos, os professores podem adaptar suas abordagens de ensino, proporcionando uma experiência de aprendizagem mais eficaz e orientada para superar as dificuldades identificadas.

6.4.7 Situação-problema extra

Situação-problema extra: Com referência nos conhecimentos prévios, na espiral da sequência apresentada perante o material elaborado, é possível estabelecer uma regra de

recorrência para essa nova sequência presente no respectivo produto (ver Figura 175)?

Figura 175 – Espiral da sequência com o material manipulável



Fonte: Confecção da autora.

6.4.7.1 Análise a priori

Para a atividade proposta, os estudantes discutem as definições de sequência numérica, sequência de Fibonacci e sequência de Padovan. Fase da ação: os estudantes deverão atentar-se para a regra de construção do espiral de Padovan e discutir como ocorre o processo de formação. Assim, deverão observar que incialmente tem-se três triângulos de tamanhos iguais a 1, cada. Em seguida, esse novo polígono, formado pela composição desses três triângulos, tem lados iguais a 2, logo deve-se inserir um triângulo de lado 2 no local de maior lado. O novo polígono formado tem lado igual a 2, sendo introduzido um triângulo também de lados 2. Com isso, tem-se a inserção de um triângulo de lado 3, em seguida um triângulo equilátero de lados 4, posteriormente triângulo de lados 5 e finalizando a inserção do triângulo de lado 7.

Uma dificuldade que pode ocorrer nesse momento é o fato de os estudantes não conseguirem compreender a construção do espiral de Padovan, para isso é necessário que retomem para o estudo da sequência de Fibonacci, de forma a compreender melhor a formação da representação geométrica dessas sequências.

Fase da formulação: busca-se que os sujeitos participantes possam observar os números que estão sendo apresentados e, com isso verifiquem a construção que está acontecendo para que esses possam ser calculados. De fato, os estudantes devem interpretar o salto existente, possuindo a fórmula de recorrência um pouco distinta dos números de Fibonacci. Assim, é possível verificar que a soma dos dois números anteriores, sem contar o termo anterior mais imediato, resulta no próximo termo da sequência. A exemplo disso, tem-se que: 1+1=2, 1+1=2, 1+2=3, 2+2=4, 2+3=5, 3+4=7. Além disso, deve-se observar que os três triângulos de valores iguais a 1, são os termos iniciais da sequência.

Para tanto, é possível que ocorra a dificuldade durante essa fase, sendo esse em relação a compreensão do salto existente para a obtenção do próximo termo da sequência. Para isso, os sujeitos deverão retomar o estudo de sequências numéricas, deparando-se com a definição da fórmula de recorrência. Além disso, pode-se observar a recorrência da sequência de Fibonacci, tomando como base para a construção da definição dos números de Padovan.

Fase da validação: durante essa fase os estudantes deverão formular as estratégias utilizadas e validar a recorrência encontrada. Para isso, é importante que os sujeitos percebam que o valor 7 é oriundo da soma do quinto termo (3) com o sexto termo (4), ignorando o sétimo termo. Assim, pode-se estabelecer a recorrência para a sequência estudada S_n como sendo: $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$, necessitando dos valores iniciais $S_0 = S_1 = S_2 = 1$, para $n \geqslant 3$.

A dificuldade esperada para essa fase é o fato da definição dos termos iniciais, porém os sujeitos deverão observar que como a sequência é de terceira ordem, deve então definir três valores iniciais, ao contrário da sequência de Fibonacci que só necessita de dois (sendo essa de segunda ordem). Fase da institucionalização: o professor deve analisar as discussões dos estudantes, verificando as soluções corretas e erradas. Por fim, deve apresentar a intenção da atividade, revelando a fórmula de recorrência da sequência de Padovan.

Ao tudo, observa-se a construção de Definições desenvolvidas nesta tese, investigando as sequências de Padovan e Perrin diante da abordagem combinatória desses números. É interessante notar que os estudantes poderão trabalhar os objetos matemáticos por meio na ideia de construção de definições, utilizando o recurso didático do material manipulável como forma de contribuir e facilitar o processo de ensino e de aprendizagem.

De fato, descata-se que a pesquisa ocorreu com referência no modelo dos níveis de atividade do professor de Matemática, segundo Margolinas (2002) em que trata:

– **Nível +3:** Valores e concepções sobre o ensino/aprendizagem/projeto educativo - valores

educativos, concepções de ensino.

- **Nível +2:** Construção do tema - construção didática global na qual se inscreveu a aula, sendo realizada as noções a estudar e aprendizagem a realizar.
- **Nível +1:** Projeto de aula - projeto didático específico para uma aula com os objetivos, planejamento do trabalho (Preparação da aula).
- **Nível 0:** Situação didática - realização da aula, interação com os alunos, tomada de decisões na ação (Etapa da experimentação, com a interação do professor).
- **Nível -1:** Observação da atividade do aluno - percepção da atividade dos alunos, regulação do trabalho atribuído aos alunos (Etapa da experimentação - com o professor observando as ações dos alunos).

Com isso, foi possível atingir os dois últimos objetivos específicos, analisando os saberes matemáticos emergidos a partir dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, por intermédio de situações-problema em sala de aula e, discussão das ações realizadas nas aulas da componente curricular de História da Matemática, envolvendo o conhecimento epistemológico-matemático dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin com a utilização do material manipulável.

Em seguida são discutidos os resultados da pesquisa, realizando entrevistas com os participantes, com o viés de obter a percepção dos professores em formação inicial o qual participaram da investigação.

6.5 Análise e resultados dos estudantes da pesquisa

Nesta seção são discutidas as percepções dos participantes da pesquisa, resultado da experimentação da ação didática realizada baseada nos pressupostos da ED. Silva (2019) destaca da importância de verificar as percepções dos estudantes diante da vivência nas aulas de Matemática após a experimentação da investigação. Assim, é possível contribuir com melhorias para o projeto, bem como observar as contribuições da pesquisa para os participantes.

As entrevistas permitiu explorar alguns elementos das atividades de definição matemática e as conexões que mantém a demonstração, seu raciocínio e as invariantes, testando assim o modelo epistemológico de Lakatos (1976).

Pelo fato do conteúdo ser de extrema dependência e dois alunos do Grupo 1 faltaram duas aulas, isso tornou-se um obstáculo em relação ao entendimento desses participantes em relação às atividades propostas. Dessa forma, vale mencionar que os estudantes faltosos foram A1 e A4 na situação-problema 3 e A4 e A9 na situação-problema 5. Em relação ao Grupo 2,

não houveram faltosos, porém somente alguns atrasos em relação ao início da aula, tornando um pouco de dificuldade em acompanhar a atividade já em execução. No Grupo 3 houve 1 aluno ausente na última aula, não participando da situação-problema 6, sendo esse o aluno C6. No Grupo 4, houveram 3 faltosos na situação-problema 5, sendo esses D1, D11 e D14. Na situação-problema 6 houveram 3 faltosos do referido grupo, sendo esses D4, D14 e D16.

O questionário final consistiu de cinco perguntas, destinadas a explorar a opinião dos estudantes sobre a construção de definições das sequências de Padovan e Perrin diante das abordagens combinatórias, bem como sua percepção ao usar o material manipulável. Abaixo, são destacadas as respostas de alguns estudantes para cada uma das cinco perguntas e analisadas.

1) Como você chegou até as definições (recorrências)? Que elementos foram fundamentais para você descobri-la?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *Sempre montando os ladrilhamentos no tabuleiro e, depois, uma tabela para tentar relacionar os elementos da sequência entre si. Testar e descartar casos foi a estratégia, assim como o estudo de algumas sequências que serviram como referência.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Utilização do tabuleiro e uso da lousa, ajudaram na recorrência para a definição.*

Resposta de A11 do Grupo 1

> *As sequências apresentadas no tabuleiro mórfico, me fez refletir sobre as recorrências. A análise da sequência, escrevendo equações, usando métodos de solução de recorrência e verificando a veracidade.*

Resposta de B2 do Grupo 2

> *Analisando os casos (por construção) iniciais e os valores iniciais, então consegui construir as recorrências, tendo o tabuleiro e as peças como facilitadores.*

Resposta de B5 do Grupo 2

> *Através da intuição, trabalho em grupo e tabuleiro, podendo construir termo a termo das sequências. Assim foi possível usar os termos para achar a recorrência e montar a conjectura. A visualização prática do tabuleiro facilitou a determinação das sequências, o restante foi buscar o padrão. Primeiro utilizamos o tabuleiro e a sua manipulação, para depois observarmos os resultados e chegarmos a definição.*

Resposta de B9 do Grupo 2

> *O repertório de conhecimentos prévios e a análise dos padrões criados ao utilizar as peças foram fundamentais. Analisamos com isso, as somas dos termos anteriores na intuição, com base no que tínhamos, nas informações que a questão trazia.*

Resposta de C3 do Grupo 3

> *A ajuda do tabuleiro e as anotações foram possíveis para visualizar as recorrências. A observação do tabuleiro levou a uma construção do conhecimento de forma lúdica.*

Resposta de C5 do Grupo 3

> *A observação dos sistemas propostos e do tabuleiro, sendo possível generalizar para uma fórmula geral. Além disso a ajuda dos colegas e os conhecimentos prévios foi essencial para alcançar as resoluções das atividades.*

Resposta de C8 do Grupo 3

> *A partir das observações feitas no uso das peças para montar as sequências. A diferença no valor das peças para representar cada número e entre outros, fez a gente observar um padrão após alguns passos iniciais. Utilizando assim a tentativa de repetição e, principalmente, utilizando o tabuleiro que tinham as peças disponíveis com os valores e regras padronizadas.*

Resposta de D2 do Grupo 4

> *A ajuda, pois com o trabalho "solo"não existem muitos benefícios. Além do material que ficou bem mais fácil de aprender, podendo visualizar no tabuleiro mórfico para colocarmos todas as informações e irmos observando a construção.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Usando o tabuleiro, os ladrilhos e a lógica neles encontrado para irmos manipulando as peças de acordo com as regras.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Através das possibilidades construídas geometricamente com os ladrilhamentos foi fundamental a utilização do material concreto para que fosse possível ver a quantidade de possibilidades e os ladrilhamentos para montar a definição.*

A progressiva contribuição das atividades na construção das definições é um aspecto significativo a ser observado. Os estudantes destacaram a importância das atividades para reforçar seus conhecimentos ao longo do experimento. Isso fornece uma evidência valiosa de que as atividades foram cuidadosamente planejadas em uma sequência que permitiu aos estudantes construir conhecimento à medida que avançavam nas questões.

2) Quais elementos evoluíram na construção das definições, bem como identifique facilidades que você tenha percebido no processo ou dificuldades que você tenha

identificado e que de alguma forma lhe atrapalham de expressar os conhecimentos/ideias que você tenha sobre o estudo de sequências numéricas.

Resposta de A1 do Grupo 1

A sequência que tive maior dificuldade de observar foram as polinomiais, pois até então a recorrência, ficaram difíceis de identificar.

Resposta de A5 do Grupo 1

À medida que fomos entendendo os padrões iniciais, os próximos padrões se tornam mais tranquilos de se entender.

Resposta de A11 do Grupo 1

À medida que foram acontecendo os encontros, senti mais facilidade em identificar as fórmulas de recorrência, a dificuldade principal foi nas expressões polinomiais.

Resposta de B2 do Grupo 2

A facilidade é observar os termos das sequências obtidas através do tabuleiro. Com essas infromações fica mais fácil chegar nos próximos termos. A maior dificuldade foi na sequência de Lucas e Perrin, pois envolvia novas peças.

Resposta de B5 do Grupo 2

Encontrar um padrão, reconhecê-lo, para enfim escrever uma recorrência que determine toda a sequência é mais difícil. Depois de montada a definição, fica mais fácil. Além disso, deu pra notar que facilita bastante envolver prática com a teoria.

Resposta de B9 do Grupo 2

As facilidades foram no sentido de descobrir os números com o tabuleiro, formando uma espécie de jogo e ir estimulando a gente pra resolver mais e mais atividades. A dificuldade foi em descobrir a definição das sequências, porque sempre queria partir de Fibonacci e ficava atrás de somar os termos sem o salto.

Resposta de C3 do Grupo 3

Foi percebido a construção das sequências e a partir daí ir estabelecendo um padrão, uma regra. A medida que foi sendo realizado os processos foram ficando mais fáceis, pois já havia um conhecimento a mais pra ser adicionado. Fomos, de certa forma, pegando o jeito e as regras foram ficando fáceis, facilitando o processo.

Resposta de C5 do Grupo 3

> *A dificuldade, acredito que foi o tipo de algumas sequências, a forma de recorrência, diferente da de Fibonacci, atrapalhando no começo, mas depois ficou mais fácil. No começo de fato se sente um pouco de dificuldade, visto que é algo novo, porém com o passar do desenvolvimento a compreensão vai aumentando e ficando mais fácil de acimilar. Acrescento que o elemento que mais se destacou pra mim foi no aspecto qualitativo. Quanto a visualização de problemas, que foram gerados pela pesquisadora.*

Resposta de C8 do Grupo 3

> *A comunicação entre os colegas, a rapidez com o que encontraram a solução, foi algo muito interessante. As fórmulas encontradas, a elaboração dessas fórmulas, a percepção diante do uso das peças para montar sequências, tudo isso foi interessante. Uma das dificuldades que considero foi encontrar a recorrência, a definição, uma vez que tinha elemento que se repetia sendo assim, surgia a ideia de ser constante.*

Resposta de D2 do Grupo 4

> *A evolução ocorreu com base em padrões estabelecidos nas sequências de cada ladrilho, o que tornou fácil de trabalhar com o material concreto, já que com o passar das sequências foi utilizando a lógica para construção delas.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *A construção foi fácil e a fórmula também, com a ajuda do tabuleiro. Houve uma evolução por conta do material manipulável, entendendo melhor as sequências. De fato o uso do material é essencial na explicação.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *A construção foi rápida pois as combinações foram sendo percebidas no decorrer das sequências, nas fórmulas e nas construções dos padrões que foram ficando fáceis de visualizar.*

As respostas fornecidas indicam que os estudantes reconhecem a importância de uma reflexão mais profunda na utilização do tabuleiro mórfico, especialmente no que diz respeito à elaboração de definições e ao estudo das sequências. Essa reflexão se mostra fundamental devido às particularidades do material manipulável, incluindo as peças e sua manipulação gradual na criação dos modelos combinatórios. Isso contribui para que os estudantes tenham uma compreensão mais sólida do processo em que estão envolvidos.

A situação observada reforça a importância da etapa de construção de definições, pois durante o processo de desenvolver a recorrência, os estudantes são desafiados a avaliar o que já sabem e o que ainda precisam aprender (recorrendo aos seus conhecimentos prévios), e a criar estratégias para resolver a atividade. As respostas obtidas, juntamente com as análises conduzidas ao longo desta experiência, proporcionam uma compreensão mais clara da relevância da construção de definições.

3) Com relação ao uso do tabuleiro mórfico, você considera que este o faz refletir melhor sobre o conteúdo a ser tratado? Que elementos o levam a essa conclusão? Você considera que fazer as atividades com suporte do material manipulável facilita de alguma maneira o aprendizado? Por quê?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *Sim, quando se tem algo visual como o tabuleiro, o aprendizado do discente se torna mais acessível para a compreensão, então torna mais fácil de refletir sobre o conteúdo abordado.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Sim. A facilidade de aparecer as recorrências através do tabuleiro. Sim, pelo mesmo motivo elencado no início da pergunta.*

Resposta de A11 do Grupo 1

> *Sim. A agilidade em reconhecer os padrões melhorou consideravelmente, assim como o repertório dos ladrilhamentos foi fundamental para construir as novas sequências e resultados.*

Resposta de B2 do Grupo 2

> *Sim. O pedagógico facilita muito a compreensão, a utilização prática facilita usando algo concreto à teoria. Fica muito interessante e construtivo utilizar o tabuleiro nas atividades, tem mais interação. Ao mover as peças poderíamos ver todas as combinações possíveis, facilitando a resolução e levando a prática a perfeição. Logo, aprender a teoria ao mesmo tempo que usa o material prático, certeza que facilita.*

Resposta de B5 do Grupo 2

> *Sim. A prática e o resultado. O material ajuda, com a organização e a facilidade da manipulação dos termos. Visualmente fica mais fácil de montar os termos, já que se pode dividir o problema e ir montando os termos.*

Resposta de B9 do Grupo 2

> *Sim. Quando vemos um resultado mais palpável no tabuleiro, melhora o foco em outras questões. As vezes não conseguimos abstrair adequadamente as questões envolvidas, facilitando com o material manipulável. Assim, faz com que o estudante analise possibilidades e crie conjecturas de forma autônoma. Manipular objetos ajuda a manter os alunos focados.*

Resposta de C3 do Grupo 3

> *Sim, pois é uma forma dinâmica de ser estudado o assunto, levando os alunos a uma euforia e curiosidade de solucionar o problema, sendo mais fácil de visualizar o que foi solicitado. O material ajuda a gente a se concentrar no problema, pensando nas combinações.*

Resposta de C5 do Grupo 3

> *Sim faz, tornando o conteúdo mais atraente, e por vezes facilitando o processo de compreensão, desperta interesse e instiga o aluno a querer adquirir mais conhecimento. Ajuda o aluno a melhorar a visualização das possibilidades, tendo mais autonomia pra fazer os testes e acaba aprendendo melhor.*

Resposta de C8 do Grupo 3

> *Sim. Uma vez que o material concreto torna mais atrativo o conteúdo, saindo da abstração. A própria percepção na hora de manipular o material para montar uma sequência torna mais fácil a compreensão e contextualiza melhor uma situação. O tabuleiro é uma forma de abordar conceitos matemáticos de forma lúdica, fato que contribui para uma melhor aceitação, pela turma, do tema.*

Resposta de D2 do Grupo 4

> *Sim, foi fácil refletir. Os fatos de ter uma combinação de ser fácil de ser resolvido. Sim, facilita ao ter algo para ajudar a absorver e com o tabuleiro fica mais didático e com as manipulação é possível encontrar boa parte das respostas.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Sim, a aprendizagem com o material concreto torna-se mais compreensivo e de extrema importância, ficando mais fácil de trabalhar e trazendo uma aula mais diferenciada do que só colocar no papel. O que de fato a prática facilita mais do que só ver.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Sim. Através da atividade feita no tabuleiro (concreto) consegui chegar nas conclusões teóricas com mais facilidade. Usando os materiais manipuláveis facilitaram bastante as visualizações das possibilidades. O tabuleiro faz aplicações da nossa realidade e a manipulação dos materiais diminui a ideia de alta complexidade de contepudos que parece ser.*

As respostas dos estudantes deixam claro que eles reconhecem a importância de construir definições a partir de ideias mais simples e, em seguida, gradualmente incorporar outros conceitos ou subconceitos necessários para estabelecer conexões entre as ideias. Aparentemente, os estudantes demonstraram um entendimento sólido do processo de criação de uma recorrência. No entanto, quando suas definições não estavam corretas ou enfrentaram dificuldades, isso sugere que pode ter havido algumas lacunas na compreensão de certos conceitos e na relação entre os coeficientes e pesos das peças.

4) Se você fosse propor uma maneira/método de se estudar as abordagens combinatórias por meio de uma sequência didática de ensino, que "passos" você indicaria para uma pessoa seguir?

Resposta de A1 do Grupo 1

Por permutação. Determinar as formas em que podem organizar os objetos em uma ordem específica, considerando permutaçã com e sem repetição.

Resposta de A5 do Grupo 1

Utilizaria, primeiramente, o tabuleiro mórfico, para indicar as recorrências, depois construir uma tabela, para mostrar como a recorrência se comporta.

Resposta de A11 do Grupo 1

Certamente pensar num material que torne possível visualizar os conceitos de uma forma mais palpável, dada a abstração dos conceitos estudados.

Resposta de B2 do Grupo 2

Buscaria que a pessoa tentasse resolver o problema de forma prática, com algum material de apoio, que facilitasse a visualização e o conhecimento matemático por trás de cada problema.

Resposta de B5 do Grupo 2

Iria propor para tentarem visualizar as situações e logo depois escrever a sua conclusão.

Resposta de B9 do Grupo 2

Da mesma forma. Com a pergunta instigadora, análise dos casos e introdução dos métodos. Tendo a orientação da turma ir desenvolvendo a atividade e o professor ser só o mediador.

Resposta de C3 do Grupo 3

Iniciar algo palpável para depois ser levado para o teor escrito do matemático. Continuando usando os objetos manipulativos para se adquirir uma noção, seguindo de abstrações ncessárias.

Resposta de C5 do Grupo 3

Continuaria com os mesmos que foram utilizados nas atividades feitas, seguindo com os passos: apresentação de uma situação-problema, possíveis soluções, formalização do conteúdo, definição e atividade de fixação, tudo isso com o uso do material manipulável.

Resposta de C8 do Grupo 3

Da mesma forma, propondo desafios lúdicos que gerem sequências e consequentemente afetem a aprendizagem de forma positiva.

Resposta de D2 do Grupo 4

Utilizar o material concreto para facilitar o aprendizado e aplicar a teoria do conteúdo. Tentando sempre começar pelo mais fácil e simples para depois ir para o mais complexo.

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Utilizaria material, usaria a lógica e o raciocínio, como foi feito pela professora. Talvez só fizesse um card e entregaria para os alunos com as peças.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Iniciaria com uma abordagem geométrica e levaria isso para a aplicação na matemática. Do mesmo jeito que a atividade foi conduzida. Assim, as reflexões seriam matematizadas e os resultados encontrados de forma prática.*

Os alunos demonstram claramente a compreensão de que o tabuleiro mórfico é uma ferramenta de apoio e não um substituto para o pensamento humano. Nesse tipo de abordagem, a responsabilidade pelo processo de ensino continua a recair principalmente sobre o aluno, especialmente com o uso da Teoria das Situações Didáticas. A dinâmica do aprendizado passa em grande parte para as mãos do estudante por meio das fases didáticas dessa teoria, transferindo a responsabilidade do professor para o aluno. É importante destacar que ainda há um momento de institucionalização, mas antes disso, o estudante é incentivado a conjecturar e refletir sobre o tema a ser aprendido. Portanto, a dinâmica proporcionada pelo material manipulável parece estar em sintonia com a proposta investigativa da Teoria das Situações Didáticas.

5) Se você tivesse que construir os tabuleiros sem o auxílio do material manipulável, ou seja, se você tivesse que fazê-los com lápis e papel, que dificuldades/facilidades você teria?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *A dificuldade de visualização das peças no lápis e papel é maior e a explicação se torna mais complexa.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Desenhar, pois teria dificuldade em padronizar todos os desenhos e isso traria dificuldade para os alunos entenderem.*

Resposta de A11 do Grupo 1

> *Principalmente em padronizar os elementos de representação seria uma dificuldade.*

Resposta de B2 do Grupo 2

> *O grau de abstração é muito elevado, caso usasse somente lápis e papel. E com o uso do tabuleiro facilita bastante o aprendizado. Esse contato prático facilita a compreensão. Reproduzir os desenhos, sem as peças, poderia confundir e dificultar o entendimento.*

Resposta de B5 do Grupo 2

A maior dificuldade seria em perder a parte lúdica que o material manipulável propõe. Pra o estudante, isso seria infinitamente mais tedioso e dificultaria a compreensão sem visualizar as peças e as manipulações.

Resposta de B9 do Grupo 2

Com o papel ficaria facilmente mais descartável, difícil do aluno usar em sala. O tempo para fazer várias peças e possibilidades das abordagens combinatórias ficaria muito ruim. Quando usamos o material manipulável, facilita a mudança da posição das peças, correção de erros, o que fica prejudicado com o lápis, papel, quadro.

Resposta de C3 do Grupo 3

Seria mais difícil, por não ser possível a visualização de forma clara. Ficaria muito cansativo e atrapalharia o processo de investigação do problema.

Resposta de C5 do Grupo 3

Acredito que não desenvolveria e nem compreenderia da mesma forma que foi. Faltando uma melhor visualização. Se fosse construir com outro material, acredio que teria problemas com a padronização e de armazenamento, visto que seria de um material mais vulnerável à interpéries.

Resposta de C8 do Grupo 3

Teria dificuldade para definir uma recorrência, dificuldade de fórmulas, uma lei de formação ou função, não seriam facilmente montados e desenhados os ladrilhamentos. Eu acredito que possa ser desenvolvido com materiais de baixo custo, tornando mais acessível, só não sei se teriam a mesma durabilidade e eficiência, porque as peças poderiam ficar moles (talvez).

Resposta de D2 do Grupo 4

Faria as anotações mais rápido, porém teria mais dificuldade em achar o caminho e a resposta da questão. Porque ao desenhar as possibildiades de ladrilhamentos para visualizar fica difícil de enxergar todas as possibilidades.

Resposta de D5 do Grupo 4

Teria dificuldade pelo fato do material de papel ser mais frágil e meio mole, por isso considero que de madeira tenha sido a melhor forma. A falta das peças complicaria na resolução, pois com o material fica mais fácil de manipular e visualizar.

Resposta de D15 do Grupo 4

Haveria mais dificuldade, pois com o material concreto torna-se interativo, visual, mais compreensivo. Teria mais trabalho vendo passo a passo do tabuleiro, mas poderia colocar o peso e o valor nas peças de papel para trabalhar, podendo os alunos construírem o próprio tabuleiro deles.

Os estudantes enfatizam, com esta resposta, a dinâmica proporcionada pelo material manipulável. A capacidade de construir e reconstruir facilmente as abordagens combinatórias das sequências em estudo no tabuleiro mórfico cria uma dinâmica que não seria possível com o uso apenas de quadro, lápis e papel. Portanto, compreende-se que a pesquisa e avaliação nesta tese se enquadram perfeitamente na construção de definições com referência no tabuleiro mórfico para o estudo de sequências e suas abordagens combinatórias.

De maneira geral, as respostas fornecidas neste questionário permitiram avaliar de forma positiva os instrumentos escolhidos para a aplicação deste experimento. O trabalho com o tabuleiro mórfico, a análise cuidadosa das estratégias para a resolução das questões e a dinâmica promovida, tanto pelas atividades quanto pelo material manipulável, são aspectos relevantes para o estudo de suas influências no processo educacional.

Nesta seção são discutidas as percepções dos participantes da pesquisa, resultado da experimentação da ação didática realizada baseada nos pressupostos da ED. Silva (2019) destaca da importância de verificar as percepções dos estudantes diante da vivência nas aulas de Matemática após a experimentação da investigação. Assim, é possível contribuir com melhorias para o projeto, bem como observar as contribuições da pesquisa para os participantes.

As entrevistas permitiu explorar alguns elementos das atividades de definição matemática e as conexões que mantém a demonstração, seu raciocínio e as invariantes, testando assim o modelo epistemológico de Lakatos (1976).

Pelo fato do conteúdo ser de extrema dependência e dois alunos do Grupo 1 faltaram duas aulas, isso tornou-se um obstáculo em relação ao entendimento desses participantes em relação às atividades propostas. Dessa forma, vale mencionar que os estudantes faltosos foram A1 e A4 na situação-problema 3 e A4 e A9 na situação-problema 5. Em relação ao Grupo 2, não houveram faltosos, porém somente alguns atrasos em relação ao início da aula, tornando um pouco de dificuldade em acompanhar a atividade já em execução. No Grupo 3 houve 1 aluno ausente na última aula, não participando da situação-problema 6, sendo esse o aluno C6. No Grupo 4, houveram 3 faltosos na situação-problema 5, sendo esses D1, D11 e D14. Na situação-problema 6 houveram 3 faltosos do referido grupo, sendo esses D4, D14 e D16.

O questionário final consistiu de cinco perguntas, destinadas a explorar a opinião dos estudantes sobre a construção de definições das sequências de Padovan e Perrin diante das abordagens combinatórias, bem como sua percepção ao usar o material manipulável. Abaixo, são destacadas as respostas de alguns estudantes para cada uma das cinco perguntas e analisadas.

1) Como você chegou até as definições (recorrências)? Que elementos foram fundamentais para você descobri-la?

Resposta de A1 do Grupo 1

Sempre montando os ladrilhamentos no tabuleiro e, depois, uma tabela para tentar relacionar os elementos da sequência entre si. Testar e descartar casos foi a estratégia, assim como o estudo de algumas sequências que serviram como referência.

Resposta de A5 do Grupo 1

Utilização do tabuleiro e uso da lousa, ajudaram na recorrência para a definição.

Resposta de A11 do Grupo 1

As sequências apresentadas no tabuleiro mórfico, me fez refletir sobre as recorrências. A análise da sequência, escrevendo equações, usando métodos de solução de recorrência e verificando a veracidade.

Resposta de B2 do Grupo 2

Analisando os casos (por construção) iniciais e os valores iniciais, então consegui construir as recorrências, tendo o tabuleiro e as peças como facilitadores.

Resposta de B5 do Grupo 2

Através da intuição, trabalho em grupo e tabuleiro, podendo construir termo a termo das sequências. Assim foi possível usar os termos para achar a recorrência e montar a conjectura. A visualização prática do tabuleiro facilitou a determinação das sequências, o restante foi buscar o padrão. Primeiro utilizamos o tabuleiro e a sua manipulação, para depois observarmos os resultados e chegarmos a definição.

Resposta de B9 do Grupo 2

O repertório de conhecimentos prévios e a análise dos padrões criados ao utilizar as peças foram fundamentais. Analisamos com isso, as somas dos termos anteriores na intuição, com base no que tínhamos, nas informações que a questão trazia.

Resposta de C3 do Grupo 3

A ajuda do tabuleiro e as anotações foram possíveis para visualizar as recorrências. A observação do tabuleiro levou a uma construção do conhecimento de forma lúdica.

Resposta de C5 do Grupo 3

A observação dos sistemas propostos e do tabuleiro, sendo possível generalizar para uma fórmula geral. Além disso a ajuda dos colegas e os conhecimentos prévios foi essencial para alcançar as resoluções das atividades.

Resposta de C8 do Grupo 3

> *A partir das observações feitas no uso das peças para montar as sequências. A diferença no valor das peças para representar cada número e entre outros, fez a gente observar um padrão após alguns passos iniciais. Utilizando assim a tentativa de repetição e, principalmente, utilizando o tabuleiro que tinham as peças disponíveis com os valores e regras padronizadas.*

Resposta de D2 do Grupo 4

> *A ajuda, pois com o trabalho "solo"não existem muitos benefícios. Além do material que ficou bem mais fácil de aprender, podendo visualizar no tabuleiro mórfico para colocarmos todas as informações e irmos observando a construção.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Usando o tabuleiro, os ladrilhos e a lógica neles encontrado para irmos manipulando as peças de acordo com as regras.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Através das possibilidades construídas geometricamente com os ladrilhamentos foi fundamental a utilização do material concreto para que fosse possível ver a quantidade de possibilidades e os ladrilhamentos para montar a definição.*

A progressiva contribuição das atividades na construção das definições é um aspecto significativo a ser observado. Os estudantes destacaram a importância das atividades para reforçar seus conhecimentos ao longo do experimento. Isso fornece uma evidência valiosa de que as atividades foram cuidadosamente planejadas em uma sequência que permitiu aos estudantes construir conhecimento à medida que avançavam nas questões.

2) Quais elementos evoluíram na construção das definições, bem como identifique facilidades que você tenha percebido no processo ou dificuldades que você tenha identificado e que de alguma forma lhe atrapalham de expressar os conhecimentos/ideias que você tenha sobre o estudo de sequências numéricas.

Resposta de A1 do Grupo 1

> *A sequência que tive maior dificuldade de observar foram as polinomiais, pois até então a recorrência, ficaram difíceis de identificar.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *À medida que fomos entendendo os padrões iniciais, os próximos padrões se tornam mais tranquilos de se entender.*

Resposta de A11 do Grupo 1

À medida que foram acontecendo os encontros, senti mais facilidade em identificar as fórmulas de recorrência, a dificuldade principal foi nas expressões polinomiais.

Resposta de B2 do Grupo 2

A facilidade é observar os termos das sequências obtidas através do tabuleiro. Com essas infromações fica mais fácil chegar nos próximos termos. A maior dificuldade foi na sequência de Lucas e Perrin, pois envolvia novas peças.

Resposta de B5 do Grupo 2

Encontrar um padrão, reconhecê-lo, para enfim escrever uma recorrência que determine toda a sequência é mais difícil. Depois de montada a definição, fica mais fácil. Além disso, deu pra notar que facilita bastante envolver prática com a teoria.

Resposta de B9 do Grupo 2

As facilidades foram no sentido de descobrir os números com o tabuleiro, formando uma espécie de jogo e ir estimulando a gente pra resolver mais e mais atividades. A dificuldade foi em descobrir a definição das sequências, porque sempre queria partir de Fibonacci e ficava atrás de somar os termos sem o salto.

Resposta de C3 do Grupo 3

Foi percebido a construção das sequências e a partir daí ir estabelecendo um padrão, uma regra. A medida que foi sendo realizado os processos foram ficando mais fáceis, pois já havia um conhecimento a mais pra ser adicionado. Fomos, de certa forma, pegando o jeito e as regras foram ficando fáceis, facilitando o processo.

Resposta de C5 do Grupo 3

A dificuldade, acredito que foi o tipo de algumas sequências, a forma de recorrência, diferente da de Fibonacci, atrapalhando no começo, mas depois ficou mais fácil. No começo de fato se sente um pouco de dificuldade, visto que é algo novo, porém com o passar do desenvolvimento a compreensão vai aumentando e ficando mais fácil de acimilar. Acrescento que o elemento que mais se destacou pra mim foi no aspecto qualitativo. Quanto a visualização de problemas, que foram gerados pela pesquisadora.

Resposta de C8 do Grupo 3

A comunicação entre os colegas, a rapidez com o que encontraram a solução, foi algo muito interessante. As fórmulas encontradas, a elaboração dessas fórmulas, a percepção diante do uso das peças para montar sequências, tudo isso foi interessante. Uma das dificuldades que considero foi encontrar a recorrência, a definição, uma vez que tinha elemento que se repetia sendo assim, surgia a ideia de ser constante.

Resposta de D2 do Grupo 4

> *A evolução ocorreu com base em padrões estabelecidos nas sequências de cada ladrilho, o que tornou fácil de trabalhar com o material concreto, já que com o passar das sequências foi utilizando a lógica para construção delas.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *A construção foi fácil e a fórmula também, com a ajuda do tabuleiro. Houve uma evolução por conta do material manipulável, entendendo melhor as sequências. De fato o uso do material é essencial na explicação.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *A construção foi rápida pois as combinações foram sendo percebidas no decorrer das sequências, nas fórmulas e nas construções dos padrões que foram ficando fáceis de visualizar.*

As respostas fornecidas indicam que os estudantes reconhecem a importância de uma reflexão mais profunda na utilização do tabuleiro mórfico, especialmente no que diz respeito à elaboração de definições e ao estudo das sequências. Essa reflexão se mostra fundamental devido às particularidades do material manipulável, incluindo as peças e sua manipulação gradual na criação dos modelos combinatórios. Isso contribui para que os estudantes tenham uma compreensão mais sólida do processo em que estão envolvidos.

A situação observada reforça a importância da etapa de construção de definições, pois durante o processo de desenvolver a recorrência, os estudantes são desafiados a avaliar o que já sabem e o que ainda precisam aprender (recorrendo aos seus conhecimentos prévios), e a criar estratégias para resolver a atividade. As respostas obtidas, juntamente com as análises conduzidas ao longo desta experiência, proporcionam uma compreensão mais clara da relevância da construção de definições.

3) Com relação ao uso do tabuleiro mórfico, você considera que este o faz refletir melhor sobre o conteúdo a ser tratado? Que elementos o levam a essa conclusão? Você considera que fazer as atividades com suporte do material manipulável facilita de alguma maneira o aprendizado? Por quê?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *Sim, quando se tem algo visual como o tabuleiro, o aprendizado do discente se torna mais acessível para a compreensão, então torna mais fácil de refletir sobre o conteúdo abordado.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Sim. A facilidade de aparecer as recorrências através do tabuleiro. Sim, pelo mesmo motivo elencado no início da pergunta.*

Resposta de A11 do Grupo 1

Sim. A agilidade em reconhecer os padrões melhorou consideravelmente, assim como o repertório dos ladrilhamentos foi fundamental para construir as novas sequências e resultados.

Resposta de B2 do Grupo 2

Sim. O pedagógico facilita muito a compreensão, a utilização prática facilita usando algo concreto à teoria. Fica muito interessante e construtivo utilizar o tabuleiro nas atividades, tem mais interação. Ao mover as peças poderíamos ver todas as combinações possíveis, facilitando a resolução e levando a prática a perfeição. Logo, aprender a teoria ao mesmo tempo que usa o material prático, certeza que facilita.

Resposta de B5 do Grupo 2

Sim. A prática e o resultado. O material ajuda, com a organização e a facilidade da manipulação dos termos. Visualmente fica mais fácil de montar os termos, já que se pode dividir o problema e ir montando os termos.

Resposta de B9 do Grupo 2

Sim. Quando vemos um resultado mais palpável no tabuleiro, melhora o foco em outras questões. As vezes não conseguimos abstrair adequadamente as questões envolvidas, facilitando com o material manipulável. Assim, faz com que o estudante analise possibilidades e crie conjecturas de forma autônoma. Manipular objetos ajuda a manter os alunos focados.

Resposta de C3 do Grupo 3

Sim, pois é uma forma dinâmica de ser estudado o assunto, levando os alunos a uma euforia e curiosidade de solucionar o problema, sendo mais fácil de visualizar o que foi solicitado. O material ajuda a gente a se concentrar no problema, pensando nas combinações.

Resposta de C5 do Grupo 3

Sim faz, tornando o conteúdo mais atraente, e por vezes facilitando o processo de compreensão, desperta interesse e instiga o aluno a querer adquirir mais conhecimento. Ajuda o aluno a melhorar a visualização das possibilidades, tendo mais autonomia pra fazer os testes e acaba aprendendo melhor.

Resposta de C8 do Grupo 3

Sim. Uma vez que o material concreto torna mais atrativo o conteúdo, saindo da abstração. A própria percepção na hora de manipular o material para montar uma sequência torna mais fácil a compreensão e contextualiza melhor uma situação. O tabuleiro é uma forma de abordar conceitos matemáticos de forma lúdica, fato que contribui para uma melhor aceitação, pela turma, do tema.

Resposta de D2 do Grupo 4

> *Sim, foi fácil refletir. Os fatos de ter uma combinação de ser fácil de ser resolvido. Sim, facilita ao ter algo para ajudar a absorver e com o tabuleiro fica mais didático e com as manipulação é possível encontrar boa parte das respostas.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Sim, a aprendizagem com o material concreto torna-se mais compreensivo e de extrema importância, ficando mais fácil de trabalhar e trazendo uma aula mais diferenciada do que só colocar no papel. O que de fato a prática facilita mais do que só ver.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Sim. Através da atividade feita no tabuleiro (concreto) consegui chegar nas conclusões teóricas com mais facilidade. Usando os materiais manipuláveis facilitaram bastante as visualizações das possibilidades. O tabuleiro faz aplicações da nossa realidade e a manipulação dos materiais diminui a ideia de alta complexidade de contepudos que parece ser.*

As respostas dos estudantes deixam claro que eles reconhecem a importância de construir definições a partir de ideias mais simples e, em seguida, gradualmente incorporar outros conceitos ou subconceitos necessários para estabelecer conexões entre as ideias. Aparentemente, os estudantes demonstraram um entendimento sólido do processo de criação de uma recorrência. No entanto, quando suas definições não estavam corretas ou enfrentaram dificuldades, isso sugere que pode ter havido algumas lacunas na compreensão de certos conceitos e na relação entre os coeficientes e pesos das peças.

4) Se você fosse propor uma maneira/método de se estudar as abordagens combinatórias por meio de uma sequência didática de ensino, que "passos" você indicaria para uma pessoa seguir?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *Por permutação. Determinar as formas em que podem organizar os objetos em uma ordem específica, considerando permutaçã com e sem repetição.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Utilizaria, primeiramente, o tabuleiro mórfico, para indicar as recorrências, depois construir uma tabela, para mostrar como a recorrência se comporta.*

Resposta de A11 do Grupo 1

> *Certamente pensar num material que torne possível visualizar os conceitos de uma forma mais palpável, dada a abstração dos conceitos estudados.*

Resposta de B2 do Grupo 2

Buscaria que a pessoa tentasse resolver o problema de forma prática, com algum material de apoio, que facilitasse a visualização e o conhecimento matemático por trás de cada problema.

Resposta de B5 do Grupo 2

Iria propor para tentarem visualizar as situações e logo depois escrever a sua conclusão.

Resposta de B9 do Grupo 2

Da mesma forma. Com a pergunta instigadora, análise dos casos e introdução dos métodos. Tendo a orientação da turma ir desenvolvendo a atividade e o professor ser só o mediador.

Resposta de C3 do Grupo 3

Iniciar algo palpável para depois ser levado para o teor escrito do matemático. Continuando usando os objetos manipulativos para se adquirir uma noção, seguindo de abstrações ncessárias.

Resposta de C5 do Grupo 3

Continuaria com os mesmos que foram utilizados nas atividades feitas, seguindo com os passos: apresentação de uma situação-problema, possíveis soluções, formalização do conteúdo, definição e atividade de fixação, tudo isso com o uso do material manipulável.

Resposta de C8 do Grupo 3

Da mesma forma, propondo desafios lúdicos que gerem sequências e consequentemente afetem a aprendizagem de forma positiva.

Resposta de D2 do Grupo 4

Utilizar o material concreto para facilitar o aprendizado e aplicar a teoria do conteúdo. Tentando sempre começar pelo mais fácil e simples para depois ir para o mais complexo.

Resposta de D5 do Grupo 4

Utilizaria material, usaria a lógica e o raciocínio, como foi feito pela professora. Talvez só fizesse um card e entregaria para os alunos com as peças.

Resposta de D15 do Grupo 4

Iniciaria com uma abordagem geométrica e levaria isso para a aplicação na matemática. Do mesmo jeito que a atividade foi conduzida. Assim, as reflexões seriam matematizadas e os resultados encontrados de forma prática.

Os alunos demonstram claramente a compreensão de que o tabuleiro mórfico é uma ferramenta de apoio e não um substituto para o pensamento humano. Nesse tipo de abordagem, a responsabilidade pelo processo de ensino continua a recair principalmente sobre o aluno, especialmente com o uso da Teoria das Situações Didáticas. A dinâmica do aprendizado passa em grande parte para as mãos do estudante por meio das fases didáticas dessa teoria, transferindo a responsabilidade do professor para o aluno. É importante destacar que ainda há um momento de institucionalização, mas antes disso, o estudante é incentivado a conjecturar e refletir sobre o tema a ser aprendido. Portanto, a dinâmica proporcionada pelo material manipulável parece estar em sintonia com a proposta investigativa da Teoria das Situações Didáticas.

5) Se você tivesse que construir os tabuleiros sem o auxílio do material manipulável, ou seja, se você tivesse que fazê-los com lápis e papel, que dificuldades/facilidades você teria?

Resposta de A1 do Grupo 1

> *A dificuldade de visualização das peças no lápis e papel é maior e a explicação se torna mais complexa.*

Resposta de A5 do Grupo 1

> *Desenhar, pois teria dificuldade em padronizar todos os desenhos e isso traria dificuldade para os alunos entenderem.*

Resposta de A11 do Grupo 1

> *Principalmente em padronizar os elementos de representação seria uma dificuldade.*

Resposta de B2 do Grupo 2

> *O grau de abstração é muito elevado, caso usasse somente lápis e papel. E com o uso do tabuleiro facilita bastante o aprendizado. Esse contato prático facilita a compreensão. Reproduzir os desenhos, sem as peças, poderia confundir e dificultar o entendimento.*

Resposta de B5 do Grupo 2

> *A maior dificuldade seria em perder a parte lúdica que o material manipulável propõe. Pra o estudante, isso seria infinitamente mais tedioso e dificultaria a compreensão sem visualizar as peças e as manipulações.*

Resposta de B9 do Grupo 2

> *Com o papel ficaria facilmente mais descartável, difícil do aluno usar em sala. O tempo para fazer várias peças e possibilidades das abordagens combinatórias ficaria muito ruim. Quando usamos o material manipulável, facilita a mudança da posição das peças, correção de erros, o que fica prejudicado com o lápis, papel, quadro.*

Resposta de C3 do Grupo 3

> *Seria mais difícil, por não ser possível a visualização de forma clara. Ficaria muito cansativo e atrapalharia o processo de investigação do problema.*

Resposta de C5 do Grupo 3

> *Acredito que não desenvolveria e nem compreenderia da mesma forma que foi. Faltando uma melhor visualização. Se fosse construir com outro material, acredio que teria problemas com a padronização e de armazenamento, visto que seria de um material mais vulnerável à interpéries.*

Resposta de C8 do Grupo 3

> *Teria dificuldade para definir uma recorrência, dificuldade de fórmulas, uma lei de formação ou função, não seriam facilmente montados e desenhados os ladrilhamentos. Eu acredito que possa ser desenvolvido com materiais de baixo custo, tornando mais acessível, só não sei se teriam a mesma durabilidade e eficiência, porque as peças poderiam ficar moles (talvez).*

Resposta de D2 do Grupo 4

> *Faria as anotações mais rápido, porém teria mais dificuldade em achar o caminho e a resposta da questão. Porque ao desenhar as possibildiades de ladrilhamentos para visualizar fica difícil de enxergar todas as possibilidades.*

Resposta de D5 do Grupo 4

> *Teria dificuldade pelo fato do material de papel ser mais frágil e meio mole, por isso considero que de madeira tenha sido a melhor forma. A falta das peças complicaria na resolução, pois com o material fica mais fácil de manipular e visualizar.*

Resposta de D15 do Grupo 4

> *Haveria mais dificuldade, pois com o material concreto torna-se interativo, visual, mais compreensivo. Teria mais trabalho vendo passo a passo do tabuleiro, mas poderia colocar o peso e o valor nas peças de papel para trabalhar, podendo os alunos construírem o próprio tabuleiro deles.*

Os estudantes enfatizam, com esta resposta, a dinâmica proporcionada pelo material manipulável. A capacidade de construir e reconstruir facilmente as abordagens combinatórias das sequências em estudo no tabuleiro mórfico cria uma dinâmica que não seria possível com o uso apenas de quadro, lápis e papel. Portanto, compreende-se que a pesquisa e avaliação nesta tese se enquadram perfeitamente na construção de definições com referência no tabuleiro mórfico para o estudo de sequências e suas abordagens combinatórias.

De maneira geral, as respostas fornecidas neste questionário permitiram avaliar de forma positiva os instrumentos escolhidos para a aplicação deste experimento. O trabalho com o

tabuleiro mórfico, a análise cuidadosa das estratégias para a resolução das questões e a dinâmica promovida, tanto pelas atividades quanto pelo material manipulável, são aspectos relevantes para o estudo de suas influências no processo educacional.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS

A presente pesquisa insere-se na área de Didática da Matemática, tendo como foco a investigação do ensino da generalização, complexificação e dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin no curso de formação inicial de professores de Matemática. O ensino das referidas sequências permitiram o desenvolvimento de novas definições, propriedades e teoremas matemáticos, de forma a serem explorados com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de determinadas instituições de ensino superior.

Esta investigação teve como objetivo geral analisar as contribuições da ED e da TSD, para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, diante de uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatório desses números (campo epistêmico-matemático), no curso de Formação Inicial de Professores. Utilizou-se como objetivos específicos, os seguintes: discutir sobre à generalização e complexificação das sequências de Padovan e Perrin acerca das abordagens combinatórias; analisar os saberes matemáticos emergidos a partir dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, por intermédio de situações - problema em sala de aula; discutir sobre as ações realizadas nas aulas da componente curricular de História da Matemática, envolvendo o conhecimento epistemológico-matemático dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin com a utilização do material manipulável.

A metodologia utilizada foi da ED, em associação com a teoria de ensino da TSD. Desse modo, os resultados obtidos foram alcançados, de forma a contribuir para os professores em formação inicial de Matemática. A hipótese e tese foram comprovadas, permitindo um estudo das sequências de Padovan e Perrin com a ED e TSD numa investigação no Brasil.

Como participantes foram 48 alunos do curso de Licenciatura em Matemática das instituições de ensino superior: IFCE *campus* Fortaleza, URCA *campus* Crajubar, UECE *campi* Fortaleza e Quixadá, de forma a contribuir para o processo investigativo de coleta e análise dos dados com uma maior variedade de instituições e estudantes.

Os desafios encontrados durante o processo giram acerca da coleta e análise de dados, uma vez que tornou-se necessária a aplicação em outras instituições de ensino superior, para alcançar uma amostragem considerável para obter-se a validação das atividades propostas. De fato, foi possível observar que após a análise rerente ao tema pesquisado, os estudantes optam pela utilização de materiais e recursos manipuláveis em sala de aula, permitindo uma abordagem mais intuitiva e dinâmica diante do processo de ensino.

A relevância do estudo para a área remetem-se acerca do ensino de História da

Matemática com Matemática, estudando outras sequências recorrentes de forma a investigar o avanço matemático desses números e integração com outros conteúdos matemáticos (como é o caso da abordagem combinatória).

Diante do delineamento dos objetivos da pesquisa e com referência na metodologia de pesquisa da ED e teoria de ensino da TSD, realizou-se durante a primeira etapa do projeto, a análise preliminar do objeto matemático em estudo. Desse modo, foram investigados trabalhos oriundos da área de Matemática acerca da sequência de Padovan e Perrin. Assim, foram constatados livros, artigos, teses e dissertações como basilares para o avançado da pesquisa desses números, resgatando os seus respectivos aspectos históricos, cognitivos e didáticos. Destaca-se o desenvolvimento de definições matemáticas e teoremas inéditos, potencializando a evolução dessas sequências numéricas recorrentes.

Perante esses fatos, destaca-se a discussão dos trabalhos presentes na área de Matemática, acerca do processo de generalização, complexificação negligenciado em livros de História da Matemática consultados. Os modelos combinatórios das sequências de Padovan e Perrin, foram desenvolvidos de modo primordial nesta pesquisa, tendo como base alguns trabalhos voltados para outras sequências numéricas recorrentes. As generalizações e complexificações também apresentaram alguns teoremas matemáticos inéditos, utilizando a dissertação de Vieira (2020) como base na evolução da sequência de Perrin.

A partir desses levantamentos bibliográficos, foi desenvolvido o campo epistêmico-matemático, permitindo um desenvolvimento da generalização, complexificação e abordagem combinatória das sequências de Padovan e Perrin, alcançando assim os três primeiros objetivos específicos. Em seguida, foram selecionados teoremas e definições acerca dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin, permitindo elaborar situações didáticas de ensino para serem aplicadas em sala de aula, em cursos de formação inicial de professores de Matemática, alcançando assim o quarto objetivo específico.

Perante essa perspectiva, foram selecionados os conteúdos referentes à interpretação combinatória de Padovan, Tridovan (sua extensão) e Perrin, realizando uma transposição do assunto para o contexto didático-cognitivo. A discussão dos conceitos matemáticos foram movidos pela história e evolução das sequências, elaborando situações didáticas de ensino amparada na TSD. Feito isso, foram analisados os possíveis comportamentos dos estudantes, para uma aplicação em cursos de formação inicial de professores de Matemática.

De fato, os pressupostos assumidos como metodologia de pesquisa (ED) e teoria de

ensino (TSD), permitem uma reflexão acerca do conteúdo e sua correspondente transposição didática.

As perspectivas para estudos e pesquisas futuras são em relação a novas aplicações da pesquisa em outros países, além do estudo para outras sequências recorrentes. Por fim, ressaltam-se as contribuições de pesquisadores de Portugal, ampliando a investigação e divulgação do trabalho para professores-pesquisadores da área, assinalando um interesse pela formação e aperfeiçoamento das práticas ordinárias em sala de aula do professor de Matemática.

Para a área de Didática da Matemática, a pesquisa demonstra a viabilidade e relevância de integrar conteúdos históricos e epistemológicos ao ensino de Matemática, ampliando o repertório didático e científico. A análise das sequências de Padovan e Perrin forneceu uma base sólida para investigações futuras sobre outras sequências numéricas recorrentes e sua integração com diferentes áreas da Matemática, como combinatória, álgebra e geometria.

Para os professores em formação, os resultados reforçam a importância de metodologias ativas e do uso de materiais manipuláveis, permitindo aos futuros docentes experimentar e aplicar abordagens inovadoras no ensino de Matemática. Além disso, a pesquisa incentiva o desenvolvimento de uma postura investigativa e reflexiva, essencial para o aprimoramento contínuo das práticas pedagógicas.

Os teoremas inéditos, as novas definições e a sistematização de propriedades matemáticas desenvolvidas no estudo também oferecem subsídios para a formação acadêmica e científica dos licenciandos, promovendo um avanço significativo na compreensão e na aplicação dos conceitos combinatórios das sequências investigadas.

A tese defendida nesta pesquisa comprova que a aplicação integrada da ED e da TSD no ensino de Matemática é capaz de gerar impactos significativos na formação inicial de professores. A análise dos dados demonstrou que a utilização de situações didáticas baseadas em materiais manipuláveis facilita a compreensão de conceitos abstratos e incentiva a formulação de estratégias criativas para resolução de problemas.

As contribuições deste trabalho são ainda mais relevantes ao considerar que as sequências de Padovan e Perrin, embora amplamente estudadas no âmbito matemático, permanecem subexploradas em contextos didáticos. A pesquisa ressalta a necessidade de aprofundar os estudos sobre generalizações e complexificações matemáticas, integrando-as a práticas de ensino que promovam o pensamento crítico e a construção colaborativa do

conhecimento.

Entre os desafios encontrados, destacou-se a necessidade de expandir a aplicação da pesquisa para um número maior de instituições e contextos educacionais, garantindo maior diversidade na amostragem e maior robustez nos resultados. Além disso, embora o estudo tenha avançado na compreensão das sequências de Padovan e Perrin, outras sequências numéricas recorrentes podem ser exploradas com abordagens semelhantes, ampliando o escopo de aplicação dos métodos aqui utilizados.

Como perspectiva para pesquisas futuras, sugere-se a replicação e adaptação deste trabalho em contextos internacionais, considerando diferentes realidades educacionais e culturais. Também se propõe investigar a aplicabilidade dos resultados obtidos em outros níveis de ensino, como o fundamental e o médio, e em diferentes disciplinas da Matemática.

Finalmente, a colaboração com pesquisadores e instituições internacionais, como as de Portugal, evidenciada nesta pesquisa, apresenta um caminho promissor para a disseminação e o aperfeiçoamento das práticas didáticas relacionadas às sequências numéricas e à Matemática em geral. Esses esforços conjuntos podem contribuir significativamente para a formação e o aperfeiçoamento de professores, promovendo inovações no ensino de Matemática e fortalecendo os laços entre teoria e prática educativa.

Em síntese, esta pesquisa marca um avanço significativo na integração de abordagens teóricas e metodológicas ao ensino de Matemática, destacando-se como uma contribuição relevante para a formação inicial de professores e para o desenvolvimento do campo da Didática da Matemática.

REFERÊNCIAS

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n. 2, p. 56–58, 2001.

ABAR, C. A. A. P. A transposição didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 59–75, 2020.

ADAMS, W.; SHANKS, D. Strong primality tests that are not sufficient. **Mathematics of Computation**, v. 39, n. 159, p. 255–300, 1982.

AL-SUWAIYEL, M. I.; ALANI, D.; AL-SWAILEM, A. An investigation of Fibonacci-like sequences in biology and mathematics. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, v. 7, n. 2, p. 133–136, 2006.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. [*S. l.*]: UFPR, 2010.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.

COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA. **Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da Sequência de Fibonacci apoiada na Tecnologia**. CREPHIMat, 2013. 1-17 p. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/eventos/vi_htem/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T5_36_fco_regis_v_ALVES.pdf. Acesso em: 15 jan. 2023.

ALVES, F. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. **Revista Vydia Educação**, v. 35, p. 133–148, 2015.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - ac. **Ciência e Natura**, v. 38, n. 2, p. 694–715, 2016.

ALVES, F. R. V. Fórmula de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 1, p. 1–16, 2017.

ALVES, F. R. V. The quaterionic and octonionic Fibonacci Cassini's indetity: An historical investigaation with the maple's help. **International Eletronic Journal of Mathematic Education**, v. 13, n. 3, p. 125–138, 2018.

ALVES, F. R. V. A vertente francesa de estudos da didática profissional: Implicações para a atividade do professor de matemática. **Indagatio Didactica**, v. 39, n. 1, p. 255–275, 2019.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Situação didática profissional: um exemplo de aplicação da didática profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de matemática no Brasil. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 1, p. 103–129, 2019.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A sequência de Padovan ou Cordonnier. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 45, p. 21–43, 2022.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S. Teaching recurrent sequences in brazil using historical facts and graphical illustrations. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 13, n. 1, p. 87–104, 2020a.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S. Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocensia**, v. 13, n. 1, p. 87–104, 2020b.

ARAúJO, K. V. de. **Efeito do ensino do algoritmo na aprendizagem de operações de adição e subtração com diferentes posições da incógnita.** 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento, Universidade de Brasília, 2020.

ARISTOTELES. **Organon**: les topiques. [*S. l.*]: Paris: Vrin, 1965.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Researches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

ARTIGUE, M. Didactic engineering as a framework for the conception of teaching products. *In*: DOUADY, R.; MERCIER, A. (ed.). **Mathematics didactics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer, 1993. p. 123–145.

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? *In*: HOLTON, D. (ed.). **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level**. New York: Kluwer Academic Publisher, 2002. p. 207–221.

ARTIGUE, M. Didactic Engineering in Mathematics education. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. New York: Springer, 2014a. p. 159–162.

ARTIGUE, M. Perspectives on design research: The case of didactical engineering. *In*: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (ed.). **Approaches to qualitative research in mathematics education**. New York: Springer, 2014b. p. 467–496.

ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 25–64, 2020.

ARTIGUE, M.; DOUDAY, R.; MORENO, L.; GóMEZ, P. Ingeniería Didáctica en educación Matemática. *In*: GóMEZ, P. (ed.). **Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M.; GLORIAN, M. J. P. Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 1, p. 13–18, 1991.

ARTIGUE, M.; HASPEKIAN, M.; CORBLIN-LENFANT, A. Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). *In*: BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (ed.). **Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education**. New York: Springer, 2014. p. 47–67.

AYDIN, F. T. Hyperbolic k-Fibonacci quaternions. **Journal of Computer Science & Computational Mathematics**, v. 9, n. 4, p. 63–68, 2019.

BACANI, J.; RABAGO, J. F. On generalized Fibonacci numbers. **Applied Mathematical Sciences**, v. 9, n. 52, p. 2595–2607, 3 2015.

BALACHEFF, N. Conception, connaissance et concept. *In*: GRENIER, D. (ed). **Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques**. Grenoble: IMAG, 1995. p. 219–244. Disponível em: https://hal.science/hal-01072247/document. Acesso em: 10 jan. 2024.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The Fibonacci numbers-exposed more discretely. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 3, p. 182–192, 2003a.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs the realy count**: the art of cominatorial proof. [*S. l.*]: American Mathematical Society, 2003b.

BESSOT, A.; COMITI, C. Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération: étude didactique du processus. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 6, n. 2-3, p. 305–346, 1985.

BILGICI, G. Fibonacci and Lucas sedenions. **Journal of Integer Sequences**, v. 20, p. 1–11, 2017.

BORBA, V. M. de L.; LIMA, A. P. de A. B.; CAVALCANTI, J. D. B. Tipologia do contrato didático: um estudo teórico. **Bolema**, v. 38, n. e230056, p. 1–24, 2024.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 years of didactic transposition. **ICMI Bulletin**, v. 58, p. 51–64, 2006.

BRANDÃO, J. C. **Matemática e deficiência visual.** 2010. 150 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, 2010.

BROUSSEAU, G. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. **Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques**, p. 39–60, 1982.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherchesen Didactiquedes Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. New York: Kluwer Academic: [*S. n.*], 2002. v. 19.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. [*S. l.*]: São Paulo: Ática, 2008.

BURTON, D. M. **The history of mathematics**: an introduction. [*S. l.*]: New York: McGraw-Hill, 2007.

CALDERÓN, D.; LEÓN, O. L. La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. *In*: CALDERÓN, D.; LEÓN, O. L. (ed.). **Lenguaje y educación**. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012. p. 71–104.

CAMINHA, A. Resolvendo recorrências. **Revista Matemática Universitária**, v. 1, p. 23–31, 2019.

CATARINO, P. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, v. 3, n. 4, p. 1–38, 1995.

CATARINO, P. On hyperbolic k-Pell quaternions sequences. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 49, p. 61–73, 2018.

CATARINO, P. On k-pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, Taylor & Franci**, v. 19, p. 1–7, 2019.

CATARINO, P. The articulation of didactic engineering with the didactic situations theory: Examples of applications to the study of integer sequences. **Open Education Studies**, n. 1, p. 228–239, 2020.

CATARINO, P.; BILGICI, G. A note on modified k-Pell hybrid numbers. **Journal of Integer Sequences**, v. 8, n. 2, p. 229–233, 2020.

CAWAGAS, R. E. On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra. **Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications**, v. 24, p. 251–265, 2004.

CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2018. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1806.02231. Acesso em: 09 jan. 2021.

CERECEDA, J. L. Binet's formula for generalized tribonacci numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 4, p. 1–9, 2015.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. *In*: J. L. DORIER, M. ARTAUD, M. ARTIGUE, R. BERTHELOT E R. FLORIS. **Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques**. Grenoble: Grupo Editorial Iberoamérica, 2002. p. 3–22, 41–56.

CIHAN, A.; AZAK, A. Z.; GUNGOR, M.; TOSUN, M. V. A study of dual hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers. **Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta**, v. 27, n. 1, p. 35–48, 2019.

CORCUFF, M.-P. Modularity and proportions in architecture and their relevance to a generative approach to architectural design. **Nexus Network Journal**, v. 14, n. 1, p. 53–73, 2012.

COSTA, D. F. da; SOUSA, R. C. de; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CASTRO, J. B. de; SALES, G. L. Teoria das situações didáticas gamificadas: um esboço detalhado no ensino da sequência de Padovan. **Revista de Estudios e Investigación en Psicología Y Educación**, v. 7, n. 2, p. 104–114, 2020.

CRAVEIRO, I. M. **Extensões e interpretações combinatórias para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal.** 2020. 266 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP, 2004.

D'AMBRÓSIO, U. A matemática nas escolas. **A Educação Matemática em Revista**, ano 9, n. edição especial, p. 29–33, 2002.

DATTOLI, G.; LICCIARDI, S.; PIDATELLA, R. M.; SABIA, E. Hybrid complex numbers: The matrix version. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 28, p. 57–58, 2018.

DETEMPLE, D.; WEBB, W. **Cominatorial Reasoning**: An introduction to the art of couting. [*S. l.*]: Wiley, 2014.

DISKAYA, O.; MENKEN, H. On the (s,t)-Padovan and (s,t)-Perrin quaternions. **Journal of Advanced Mathematical Studies**, v. 12, n. 2, p. 186–192, 2019.

DISKAYA, O.; MENKEN, H. On the (p,q)-Fibonacci n-dimensional recurrences. **Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute**, v. 12, n. 2, p. 205–212, 2022.

DISKAYA, O.; MENKEN, H. Compositions of positive integers with 2s and 3s. **Demonstratio Mathematica**, v. 56, n. 1, p. 1–14, 2023.

DISKAYA, O.; MENKEN, H.; CATARINO, P. M. M. C. On the bivariate Padovan polynomials matrix. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 407–420, 2023.

DUNLAP, R. A. **The Golden Ratio and Fibonacci Numbers**. [*S. l.*]: World Scientific, 1997.

EVEREST, G.; POORTEN, A. van der; SHPARLINSKI, I. **Recurrence Sequence**. [*S. l.*]: American Mathematical Society, 2003. v. 104.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de Licenciatura das demonstrações geométricas. (Tese de Doutorado).** 2016. 342 f. Tese (Doutorado) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo - PUC, 2016.

FERREIRA, R. **Números mórficos.** 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

FREGE, G. **Logic in mathematics**. Trad. Long & White: Posthumous Writings, 1979.

GALVÃO, T. F.; PEREIRA, M. G. Revisão sistemática da literatura: passos para sua elaboração. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v. 23, n. 1, p. 441, 2014.

GISPERT, H. Mathematics education in france, 1900–1980. *In*: KARP, A.; SCHUBRING, G. (ed.). **Handbook on the history of mathematics education**. New York: Springer, 2014. p. 229–240.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológicosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, p. 1–37, 2014.

GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. R. B. de. O teorema de Cayley-Hamilton. **IME-USP-Oswaldo Rio Branco de Oliveira**, p. 1–11, 2019.

GRAVEMEIJER, K. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, p. 155–177, 1999.

GRIMALDI, R. P. **Fibonacci and Catalan numbers**. [*S. l.*]: New York: Wiley and Sons, 2012.

GUL, K. Dual bicomplex Horadam quaternions. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 26, n. 4, p. 187–205, 2020.

GULLBERG, J. **Mathematics**: from the birth of numbers. [*S. l.*]: New York: Norton, 1997.

HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, p. 23–33, 1993.

HORZUM, T.; KOCER, E. G. On some properties of horadam polynomials. **International Mathematical Forum**, v. 25, n. 4, p. 1243–1252, 2009.

IFCE. **Matriz Curricular - Matemática**. 2023a. Disponível em: https://ifce.edu.br/fortaleza/cursos/superiores/licenciatura/matematica/pdf/matriz-curricular-matematica.pdf. Acesso em: 05 fev. 2021.

IFCE. **Programa de Unidade Didática – PUD**. 2023b. Disponível em: https://ifce.edu.br/fortaleza/cursos/superiores/licenciatura/matematica/pdf/ementas-s6-licenciatura-em-matematica.pdf. Acesso em: 05 fev. 2021.

IMAEDA, K.; IMAEDA, M. Sedenions: algebra and analysis. **Applied Mathematics and Computation**, v. 115, p. 77–88, 2000.

INGAR, K. V. **A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais.** 2014. 202 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

ISBILIR, Z.; GURSES, N. Padovan and Perrin generalized quaternions. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, p. 1–17, 2021.

JANCEWICZ, B. **he extended Grassmann algebra of R^3, in Clifford (Geometric) Algebras with Applications and Engineering**. [*S. l.*]: Birkhauser, Boston, 1996.

KARATAS, A.; HALICI, S. Horadam octonions. **Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta**, v. 25, n. 3, p. 97–10, 2017.

KAUERS, M.; PAULE, P. **The Concrete Tetrahedron**: Symbolic sums, recurrence equations, generating functions, asymptotic estimates. [*S. l.*]: New York: Springer, 2011.

KECILIOGLU, O.; AKKUS, I. The Fibonacci octonions. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 25, n. 1, p. 151–158, 2015.

KITCHENHAM, B.; BRERETON, P.; BUDGEN, D.; TURNER, M.; BAILEY, J.; LINKMAN, S. Systematic literature reviews in software engineering – a systematic literature review. **Information and Software Technology**, v. 51, p. 7–15, 2009.

KIZILATES, C. A note on horadam hybrinomials. **Preprints**, p. 1–10, 2020. Disponível em: https://www.preprints.org/manuscript/202001.0116/v1. Acesso em: 15 jun. 2023.

KNUTH, D.; BIBBY, D.; MAKAI, I. **The texbook**. [*S. l.*]: Addison-Wesley, 1986. v. 1993.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. [*S. l.*]: New York: Wiley-Interscience, 2001. v. 1.

KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications**. [*S. l.*]: New York: Wiley-Interscience, 2014.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. [*S. l.*]: New York: Wiley-Interscience, 2019. v. 2.

LAAN, D. H. V. D. **Le Nombre Plastique**. [*S. l.*]: Leiden E. J. Brill, 1960.

LABORDE, C. Designing tasks for learning geometry in a computer based environment. *In*: BURTON, L.; JAWORSKI, B. (ed.). **Technology in mathematics teaching-a bridge between teaching and learning**. London: Chartwell-Bratt, 1995. p. 35–68.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, n. 1, p. 97–112, 1997.

LAGRANGE, J. D. A combinatorial development of Fibonacci numbers in graph spectra. **Linear Algebra and Applications**, v. 438, n. 11, p. 4335–4347, 2013.

LAKATOS, I. **Essays in the Logic of Mathematical Discovery. Thesis**. [*S. l.*]: Cambridge University Library, 1961.

LAKATOS, I. **Proofs and refutations**. [*S. l.*]: Cambridge: Cambridge University Library, 1976.

LAKATOS, I. **The Methodology of Scientific Research Programmes**. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 1980. v. 1.

LALLEMAND, C.; BONNEFOY, M. P.; CHAPUY, P.; VILLAIN; LÉON, G. S. **A Grande Rota Industrial**: os alunos da escola de minas na escandinávia (1839-1897). [*S. l.*]: Minas ParisTech, 2019.

LARSEN, S.; ZANDIEH, M. Provas e refutações na graduação em matemática sala de aula. **Estudos Educacionais em Matemática**, v. 67, p. 205–216, 2008.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. [*S. l.*]: Campinas: Autores Associados, 2006.

LUCAS sequence (or Lucas numbers). **On-line encyclopedia of integers sequences**. *In*: SLOANE, N. J. A. 1964. Disponível em: https://oeis.org/search?q=lucas&language=portuguese&go=Busca. Acesso em: 19 mar. 2023.

LUKDE, M. A pesquisa qualitativa e o estudo da escola. **Cadernos de Pesquisa**, n. 49, p. 43–44, 1984.

LUKDE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. [*S. l.*]: São Paulo: EPU, 1986.

LUNA-ELIZARRARÁS, M. E.; SHAPIRO, M.; STRUPPA, D. C.; VAJIAC, A. **Bicomplex Holomorphic Functions**: The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. [*S. l.*]: Frontiers in Mathematics, Birkhauser, 2015.

MAGALHÃES, A. R. **Mapas Conceituais Digitais como Estratégia para o Desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções. (Tese de Doutorado).** 2009. 257 f. Tese (Doutorado) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo - PUC, 2009.

MANGUEIRA, M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Números híbridos de Mersenne. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1–11, 2020a.

MANGUEIRA, M.; VIEIRA, R.; ALVES, F.; CATARINO, P. The hybrid numbers of Padovan and some identities. **Annales Mathematicae Silesianae**, v. 34, n. 2, p. 256–267, 2020b.

MANGUEIRA, M. C. dos S. **Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas.** 2022. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2022.

MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização da forma matricial da sequência de Perrin. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 1, p. 384–392, 2020.

MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalized Perrin polynomial sequence and its two-dimensional recurrences. **Analele ştiinţifice ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi. Matematică (Serie nouă)**, LXVII, n. 2, p. 261–277, 2021.

MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The sequences of the hyperbolic k-Perrin and k-Leonardo quaternions. **Journal of Mathematical Extension**, v. 17, n. 4, p. 1–16, 2023.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur. *In*: J.-L. DORIER, J. L.; ARTAUD, M.; ARTIGUE, M.; BERTHELOT, R.; FLORIS, R. (ed.). **Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques**. [*S. l.*]: Grenoble La Pensée Sauvage, 2002.

MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir des distinctions frontalières? **Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières, Lausanne, Suisse**, p. 1–39, 2012.

MAROHNIC, L.; KOVACIC, B.; RADISIC, B. O nultočkama polinoma oblika x^n-x-1. **Osječki matematički list**, v. 13, p. 1–13, 2013.

MCLLROY, M. Number theory in computer graphics. *In*: STEFAN A. BURR. **The Unreasonable Effectiveness of Number Theory**. New York: Stefan AB, 1992. p. 105–121.

MEHDAOUI, A. **Combinatoire des transversales de la pyramide de Pascal. (thése de Doctorat)**. Dissertação (Mestrado) – University of Sciences and Technology Houari Boumediene, 2021.

MEYER, A. R.; RUBINFELD, R. Generating functions. *In*: MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. **Mathematics for Computer Science**. [*S. l.*], 2005. p. 1–13. Notas de aula do Prof. Albert R. Meyer e Prof. Ronitt Rubinfeld, semana 11, nov. 2016.

MOTTER, A. E.; ROSA, A. F. Hyperbolic calculus. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 8, n. 1, p. 109–128, 1998.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**. 2. ed. [*S. l.*]: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 2016. v. 4.

NORMA, W. de J. M.; ALLEVATO, S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debates**, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019.

OCHAíTA, E.; ESPINOSA, M. A. Desenvolvimento e intervenção educativa nas crianças cegas ou deficientes visuais. *In*: COOL, C.; MARCHESI, A. P. (ed.). **Desenvolvimento psicológico e educação: transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais**. Porto Alegre: Artmed, 2004. v. 3.

OLIVEIRA, A. S. dos S. **Uma Engenharia Didática para o Ensino das Operações com números racionais por meio da calculadora para o quinto ano do ensino fundamental.** 2015. 125 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo, 2015.

OLIVEIRA, H. Percursos de identidade do professor de Matemática em início de carreira: O contributo da formação inicial. **Quadrante**, v. 13, n. 1, p. 115–145, 2004.

OLIVEIRA, H.; HANNULA, M. Individual prospective mathematics teachers: Studies on their professional growth. *In*: T. WOOD (ED). **International Handbook of Mathematics Teacher Education**. [*S. l.*]: The Netherlands: Sense Publishers, 2008. p. 13–34.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci**: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2018.

ORHAN, D.; HAMZA, M. On the split (s,t)-Padovan and (s,t)-Perrin quaternions. **International Journal of Applied Mathematics and Informatics**, v. 13, p. 25–28, 2019.

OUVRIER-BUFFET, C. **Construction de définitions / construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. (Doctorat thesis).** 2003. 327 f. Tese (Doutorado) – Université Joseph Fourier, 2003.

OZDEMIR, M. Introducion to hybrid numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 28, n. 11, 2018.

PADOVAN, R. **Dom Hans van der Laan**: modern primitive. [*S. l.*]: Amsterdam, Architecture and Natura Press, 1994. v. 1.

PADOVAN, R. **Proportion**: Science, philosophy, architecture. [*S. l.*]: Taylor & Francis Grupo, 2002.

PADOVAN sequence (or Padovan numbers). **On-line encyclopedia of integer sequences**. *In*: SLOANE, N. J. A. (ed.). 2007. Disponível em: https://oeis.org/search?q=padovan+sequence&language=portuguese&go=Busca. Acesso em: 13 set. 2022.

PERRIN, M. R. **Sur une méthode nouvelle de notation des enclenchements**. Paris: [*S. n.*], 1905.

PINHEIRO, C. P. S. R.; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a visualização da sequência de Padovan por meio do software Geogebra. **Revista Científico-Educacional de La Provincia Granma**, v. 18, n. 1, p. 467–487, 2022.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. *In*: L. ENGLISH (ED). **Handbook of international research in mathematics education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 223–261.

POPPER, K. **Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique**. [*S. l.*]: Paris: Payot, 1985.

ROCHA, A. M. C.; AGUIAR, A. M. C. Aprender e ensinar construir identidade e profissionalidade docente no contexto da universidade: uma realidade possível. *In*: ANPED. **Anais[...]**. 35ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2012. p. 1–17. Disponível em: https://legado.anped.org.br/sites/default/files/gt08-1829_int.pdf. Acesso em: 13 set. 2022.

ROCHA, L.; SPREAFICO, E. V. P. Grafos e coeficientes trinomiais. **Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas PORANDU**, v. 3, n. 1, p. 25–32, 2019.

RODRIGUES, H. W.; GRUBBA, L. S. Bachelard e os obstáculos epistemológicos à pesquisa científica do direito. **Sequência - Estudos Jurídicos e Políticos**, v. 33, n. 64, p. 307–333, 2012.

SA, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Funções geradoras em recorrências lineares. **PORANDU - Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 3, n. 1, p. 33–40, 2019.

SA, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Sobre um novo método de inversão de matrizes de Vandermonde para solução de recorrências lineares homogêneas de ordem superior. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasilieira de Matemática**, v. 8, n. 1, p. 64–72, 2020.

SAMPAIO, C. A. do A. **Funções geradoras e aplicações em partições. (Dissertação de mestrado).** 1998. 102 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 1998.

SANCHEZ, J. E. S. **On periodic tilings with regular polygons**. 2020.

SANTOS, A. A. dos. **Engenharia didática sobre o estudo da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci.** 2017. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2017.

SANTOS, J. P. de O.; SILVA, R. da. **Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números**. [*S. l.*]: The Electronic Library of Mathematics Mathematical Journals, 2012.

SEENUKUL, P.; NETMANEE, S.; PANYAKHUN, T.; AUISEEKAEN, R.; MUANGCHAN, S. at. Matrices which have similar properties to Padovan q -matrix and its generalized relations. **Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology**, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SENTURK, T. D.; BILGICI, G.; DASDEMIR, A.; UNAL, Z. A study on Horadam hybrid numbers. **Turkish Journal of Mathematics**, v. 44, n. 4, p. 1212–1221, 2020.

SHANNON, A. G.; ANDERSON, P. G.; HORADAM, A. F. Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 37, n. 7, p. 825–831, 2006.

SHOHAM, M. On grassmann's products and clifford's dual unit. *In*: M. CECCARELLI (ED). **Anais[...]**. International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM, 2000. p. 173–180. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-015-9554-4_20. Acesso em: 28 jun. 2023.

SHTAYAT, J.; AL-KALEEB, A. The Perrin R-matrix and more properties with an application. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, v. 25, n. 1, p. 41–52, 2022.

SILVA, A. L. da. **Uma engenharia didática para aprendizagem de geometria analítica no ensino médio**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, 2019.

SILVA, C. V. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal. (Tese de Doutorado).** 2015. 312 f. Tese (Doutorado) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo - PUC, 2015a.

SILVA, I. C. da. **Recorrências**: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no ensino médio. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática - Universidade de Brasília, 2015b.

SILVA, R. L.; SPREAFICO, E. V. P. On combinatorial identities for *r*-generalized Fibonacci sequences. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, n. 3, p. 124–135, 2024.

SINGH, P. The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. **Historia Mathematica**, v. 12, n. 1, p. 229–244, 1985.

SOBCZYK, G. The hyperbolic number plane. **The College Mathematics Journal**, v. 26, n. 4, p. 268–280, 1995.

SOKHUMA, K. Matrices formula for Padovan and Perrin sequences. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 142, p. 7093–7096, 2013.

SOUSA, R. T. de; Vieira, R. P. M.; ; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F.; CATARINO, P. M. M. C. Articulação entre sequências recursivas e teoria dos grupos finitos: o caso da sequência de Padovan. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, v. 13, n. 31, p. 1–20, 2024.

SOYKAN, Y. Generalized Pell-Padovan numbers. **Asian Journal of Advanced Research and Reports**, v. 11, n. 2, p. 8–28, 2020.

SOYKAN, Y.; GOCEN, M. Properties of hyperbolic generalized Pell numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 26, n. 4, p. 136–153, 2020.

SPIVEY, Z. M. **The Art of Proving Binomial Identities**. [*S. l.*]: London: Taylor and Francis Ltd, 2019.

SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas - IME, 2014.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of mathematics education: Seeking new frontiers**. [*S. l.*]: Berlin/Heidelberg: Springer, 2010.

STEWART, I. Tales of a neglected number. **Mathematical Recreations - Scientific American**, v. 274, p. 102–103, 1996.

STILLWELL, J. **Mathematics and it's History**. [*S. l.*]: New York: Springer, 2010.

SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, Sciendo**, v. 38, n. 1, p. 91–98, 2018.

SZYNAL-LIANA, A.; WLOCH, I. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers. **Annales Mathematicae Silesianae**, v. 33, n. 1, p. 276–183, 2019.

SÁ, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Funções geradoras em recorrências lineares. **Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 3, n. 1, p. 33–40, 2019.

TAHER, R. B.; RACHIDI. Solving some generalized vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the Binet formula. **Applied Mathematics and Computatione**, v. 290, p. 267–280, 2016.

TAHTA, D. About geometry. **For the Learning of Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 2–9, 1980.

TAS, S.; KARADUMAN, E. The Padovan sequences in finite groups. **Chiang Mai Journal of Science**, v. 41, n. 2, p. 456–462, 2014.

TASCI, D. Gaussian Padovan and gaussian Pell-Padovan sequences. **Annales Mathematicae SilesianaeCommunications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics**, v. 67, n. 2, p. 82–88, 2018.

TASYURDU, Y.; AKPINAR, A. Perrin octonions and Perrin sedenions. **Konuralp Journal of Mathematics**, v. 8, n. 2, p. 384–390, 2020.

TEDFORD, S. J. Combinatorial identities for the Padovan numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 4, n. 57, p. 291–298, 2019.

TEMPIER, F. New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, p. 261–276, 2016.

TROUCHE, L. Didactics of mathematics: Concepts, roots, interactions and dynamics from France. *In*: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (ed.). **Tools and mathematics, instruments for learning**. New York: Springer, 2016. p. 219–256.

VIEIRA, R.; SPREAFICO, E. V. P.; ALVES, F. R.; CATARINO, P. M. M. C. A note of the combinatorial interpretation of the Perrin and Tetrarrin sequence. **Journal of Universal Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 1–11, 2024.

VIEIRA, R. P. M. **Engenharia Didática (ed)**: o caso da generalização e complexificação da sequência de padovan ou cordonnier. 2020. 266 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da sequência de Padovan. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, p. 24–40, 2019a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Sequences of Tridovan and their identities. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 185–197, 2019b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a sequência de Padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim GEPEM**, v. 74, p. 161–169, 2019c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Identidades Tribonacci. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, n. 1, p. 216–226, 2019d.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Os números duais de Padovan. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 52–61, 2019e.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática e a sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a priori. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 59, p. 227–251, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Alternative views of some extensions of the Padovan sequence with the google colab. **Anale. Seria Informatica**, VVII, n. 2, p. 266–273, 2019a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sequência matricial (s1,s2,s3)-Tridovan: aspectos históricos e propriedades. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 100–121, 2019b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma exploração da sequência de Padovan num curso de licenciatura em matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A Didactic Engineering in the research process of the generalization of the Padovan sequence: An experience in a pre-service teacher training course. **Acta Scientiae**, v. 22, n. 6, p. 109–136, 2020a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A historic alanalys is of the Padovan sequence. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, v. 3, n. 1, p. 8–12, 2020b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The (s, t)-Padovan quaternions matrix sequence. **Punjab University Journal of Mathematics**, v. 52, n. 11, p. 1–9, 2020c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização da sequência de Padovan-Perrin. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 21, p. 140–151, 2021a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relations on higher dimensional Padovan sequences. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 27, n. 4, p. 167–179, 2021b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Combinatorial interpretation of numbers in the generalized Padovan sequence and some of its extensions. **Axioms**, v. 11, n. 11, p. 1–9, 2022a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A sequência dos quatérnios k-Perrin hiperbólica. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 4, p. 43–49, 2022b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. On the (s, t)-Padovan n-dimensional recurrences. **Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute**, v. 12, n. 2, p. 387–395, 2022c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Os quatérnios circulares hiperbólicos e os númeroshibrinomiais de Perrin. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v. 3, n. 6, p. 106–120, 2022d.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A study of the complexification process of the (s,t)-Perrin sequence. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 29, n. 1, p. 40–47, 2023a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. O estudo de sequências numéricas para o ensino de matemática: publicações em periódicos de 2017 a 2022. **Revista Contrapontos**, v. 23, n. 1, p. 20–32, 2023b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The construction of definitions through Padovan's combinatorial model: An investigation with didactic engineering in an initial education course for mathematics teachers. **Acta Scientiae**, v. 25, n. 6, p. 366–395, 2023c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. **A Engenharia Didática na formação inicial de professores de matemática**: o estudo da generalização e complexificação da sequência de Padovan. [*S. l.*]: Editora IFCE, 2023d.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A note on Leonardo's combinatorial approach. **Journal of Instructional Mathematics**, v. 4, n. 2, p. 119–126, 2023e.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A combinatorial interpretation of the Padovan generalized polynomial sequence. **Armenian Journal of Mathematics**, v. 15, n. 11, p. 1–9, 2023f.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A note on the Tetrarrin sequence. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 1–11, 2024.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Função de Perrin. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 54–60, 2024a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Polinômios de Padovan generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 61–67, 2024b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A didactic engineering for the study of the Padovan's combinatory model. **Pedagogical Research**, v. 9, n. 3, p. 1–9, 2024c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; RODRIGUES, A. M. F. B. V. Construção da forma matricial de sequências lineares e recorrentes: um estudo da matriz geradora. **Cadernos do IME- Série Matemática**, v. 15, p. 167–180, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V. Uma Engenharia Didática para o ensino de história da matemática com o google meet durante a pandemia: relato de experiência. **Revista Práxis**, v. 26, n. 13, p. 51–61, 2021.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Padovan and Perrin hybrid number identities. **Communications in Advanced Mathematical Sciences**, v. 4, n. 4, p. 190–197, 2021a.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Perrin n-dimensional relations. **Fundamental Journal of Mathematics and Applications**, v. 4, n. 2, p. 100–109, 2021b.

VIEIRA, R. P. M.; SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V. The gaussian sequence 3th order mod m. **Communications in Advanced Mathematical Sciences**, v. 7, n. 3, p. 135–146, 2024.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning of mathematics. *In*: TALL, D. (ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. [*S. l.*]: Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1991. p. 65–80.

WILSON, E. Pascal's triangle. **The Scales of Mt. Meru**, v. 46, p. 1–18, 4 1993.

YILMAZ, N. **Padovan ve perrin sayilarinin matris temsilleri. (Doctorat thesis).** 2015. 117 f. Tese (Doutorado) – Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, p. 1–7, 2013.

ZBOROWSKI, C. A.; PIGATTO, A. G. S. Contribuições da Engenharia Didática como metodologia para o ensino de ciências nos anos iniciais. **Vidya**, v. 38, n. 2, p. 71–88, 2018.

ZIERLER, N. Linear recurring sequences. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 31–48, 1959.

APÊNDICE A – INSTRUÇÕES DO TABULEIRO MÓRFICO

O presente manual apresenta o Tabuleiro Mórfico, um recurso pedagógico desenvolvido para auxiliar no ensino e na aprendizagem dos modelos combinatórios das sequências numéricas de Fibonnaci, Lucas, Padovan e Perrin. Este material é composto por ladrilhos manipuláveis que promovem uma abordagem prática e visual, incentivando a exploração matemática por meio da construção e análise de padrões, definições e propriedades.

O objetivo do Tabuleiro Mórfico é facilitar a compreensão de conceitos relacionados à generalização e combinatória das referidas sequências numéricas. Ele serve como um instrumento didático para:

- Proporcionar uma experiência de aprendizagem ativa e intuitiva;
- Estimular o raciocínio lógico e a formulação de definições matemáticas;
- Promover a resolução de problemas e a construção de teoremas a partir de situações práticas;
- Integrar elementos históricos e epistemológicos ao ensino de Matemática, ampliando a compreensão conceitual dos estudantes.

A metodologia proposta para a utilização do Tabuleiro Mórfico segue os princípios da ED e da TSD, introduindo aos estudantes ao material manipulável, explicando a composição do Tabuleiro Mórfico e o significado dos ladrilhos representativos das sequências numéricas.

A utilização do Tabuleiro Mórfico segue uma sequência estruturada de etapas que visam maximizar seu potencial didático. Inicialmente, os estudantes são apresentados ao material manipulável, onde é explicada a composição do tabuleiro e o significado dos ladrilhos que representam as sequências numéricas. Em seguida, são propostas atividades voltadas para a construção de modelos, nas quais os estudantes utilizam os ladrilhos para criar representações das sequências de Padovan e Perrin, explorando padrões e relações matemáticas de forma prática.

Após essa etapa, ocorre a exploração e análise dos modelos construídos, incentivando os estudantes a identificar propriedades como recorrências e complexificações, usando o tabuleiro como base para formulações teóricas. Essa exploração culmina na fase de discussão e formalização, em que debates em grupo são promovidos para validar as construções realizadas e para elaborar definições e teoremas a partir das descobertas feitas.

O processo avaliativo durante a execução das atividades é pautado em critérios claros e objetivos. Primeiramente, a participação ativa dos estudantes é observada, avaliando o engajamento na manipulação dos ladrilhos e na formulação de conjecturas. Em paralelo, a

resolução de problemas é analisada, considerando a habilidade de identificar padrões, propor soluções e justificar matematicamente os resultados obtidos. A construção de conhecimento é outro aspecto essencial, com foco no progresso individual e coletivo na compreensão dos conceitos, especialmente na transposição das observações práticas para definições formais. Por fim, a reflexão e argumentação dos estudantes é avaliada, considerando a capacidade de discutir ideias, validar descobertas e contribuir para o aprendizado coletivo.

Ao término das atividades, é realizada uma avaliação final que integra diferentes instrumentos de análise. Os estudantes registram suas observações, hipóteses e resultados em relatórios, que incluem esquemas visuais criados com o Tabuleiro Mórfico. Além disso, sessões de feedback em grupo são conduzidas, nas quais os desafios e avanços percebidos durante o uso do material são discutidos. Por último, é feita uma análise detalhada dos registros, avaliando o impacto do recurso na construção de conhecimento e nas habilidades desenvolvidas, como pensamento crítico e resolução de problemas.

Este manual, portanto, serve como um guia prático para educadores interessados em implementar o Tabuleiro Mórfico como uma ferramenta didática inovadora. Ele busca transformar a experiência de ensino e aprendizagem em cursos de Matemática, com destaque para a formação inicial de professores, ao oferecer uma abordagem interativa e dinâmica para a construção de conceitos matemáticos.

O Tabuleiro Mórfico consta de:

- 57 Quadrados brancos
- 13 Quadrados pretos
- 32 Dominós brancos
- 28 Dominós azuis
- 19 Dominós azuis peso x^2
- 16 Dominós azuis peso x^3
- 15 Triminós cinza
- 7 Triminós cinza peso x
- 9 Triminós cinza peso x^2
- 6 Tetraminós verde
- 6 Tetraminós verde peso x
- 4 Pentaminós amarelo
- 8 Braceletes para n=3 de Lucas
- 10 Braceletes para n=3 de Perrin
- 10 Braceletes para n=4 de Perrin
- 14 Braceletes para n=5 de Perrin
- Quadrados brancos com valores de n=1 até n=7
- 1 tabuleiro de encaixe

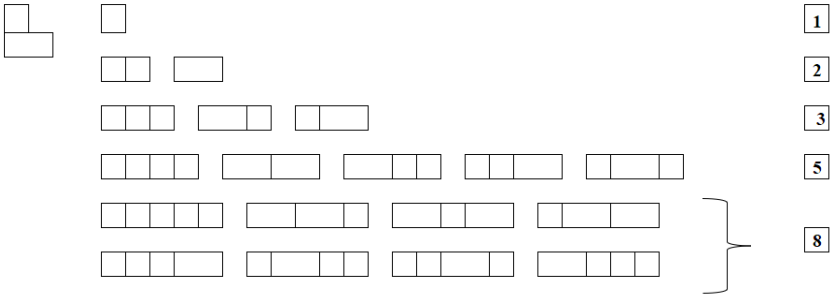
Aplicações:

Diversas são as aplicações para o Tabuleiro Mórfico, sendo algumas:

- **Ladrilhamento de Fibonacci**

  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Fibonacci (f_n), utilizando quadrado branco (1x1) e dominó branco (1x2). Logo: $f_n = F_{n+1}$, sendo f_n a quantidade de formas de ladrilhar e F_n o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

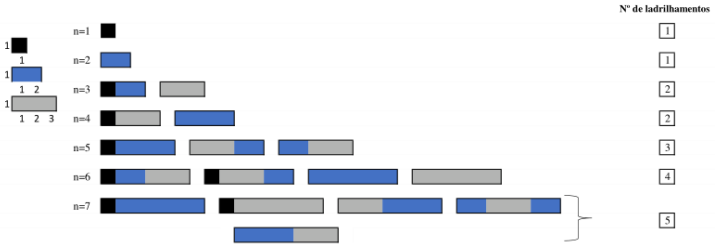
  Resultado esperado:



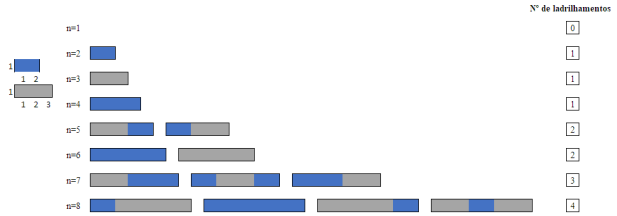
- **Ladrilhamento de Padovan**

  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Padovan (p_n), utilizando quadrado preto (1x1), dominó azul (1x2) e triminó cinza (1x3). Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Logo: $p_n = P_n$, sendo p_n a quantidade de formas de ladrilhar e P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan com $P_0 = 1$.

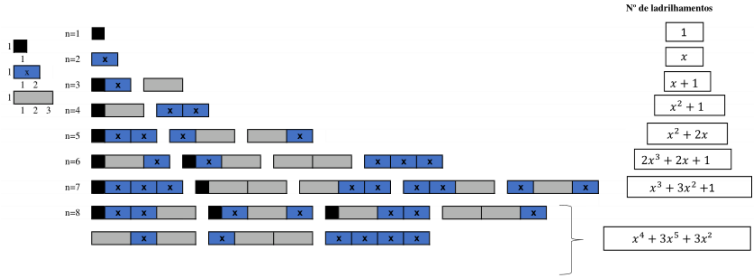
  Resultado esperado:



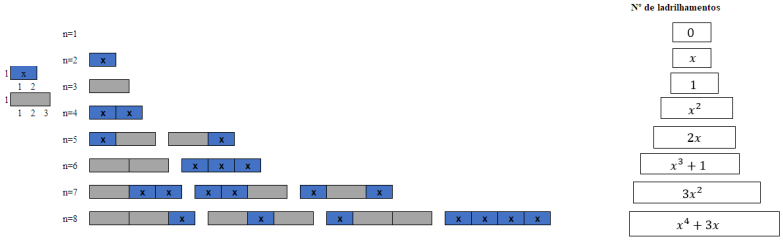
- **Ladrilhamento de Padovan (outra abordagem)**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Padovan (p_n), utilizando dominó azul (1x2) e triminó cinza (1x3). Logo: $p_n = P_{n-2}$, sendo p_n a quantidade de formas de ladrilhar e P_n o n -ésimo termo da sequência de Padovan com $P_0 = 1$.
  Resultado esperado:



- **Ladrilhamento de Padovan com peso**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento polinomial de Padovan ($p_n(x)$), utilizando quadrado preto (1x1) com peso 1, dominó azul (1x2) com peso x e triminó cinza (1x3) com peso 1. Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Logo: $p_n(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x)$, sendo $p_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $P_n(x)$ o n -ésimo termo da sequência polinomial de Padovan com $P_0(x) = 1$.
  Resultado esperado:

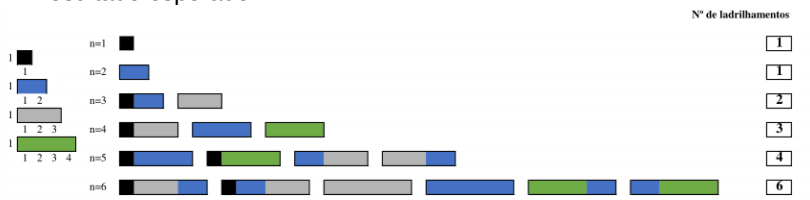


- **Ladrilhamento de Padovan com peso (outra abordagem)**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Padovan ($p_n(x)$), utilizando dominó azul (1x2) com peso x e triminó cinza (1x3) com peso 1. Logo: $p_n(x) = P_n(x)$, sendo $p_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $P_n(x)$ o n -ésimo termo da sequência de Padovan com $P_0(x) = 1$.
  Resultado esperado:

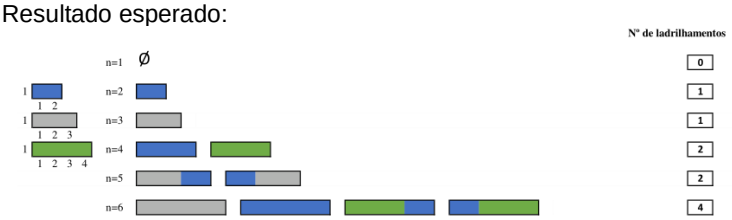


- **Ladrilhamento de Tridovan**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Tridovan (t_n), utilizando quadrado preto (1x1), dominó azul (1x2), triminó cinza (1x3) e tetraminó verde (1x4). Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $t_n = T_n + T_{n-1}$, sendo t_n a quantidade de formas de ladrilhar e T_n o n-ésimo termo da sequência de Tridovan com $T_0 = 1$.

  Resultado esperado:



- **Ladrilhamento de Tridovan (outra abordagem)**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Tridovan (t_n), utilizando dominó azul (1x2), triminó cinza (1x3) e tetraminó verde (1x4). Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $t_n = T_n$, sendo t_n a quantidade de formas de ladrilhar e T_n o n-ésimo termo da sequência de Tridovan com $T_0 = 1$.
  Resultado esperado:

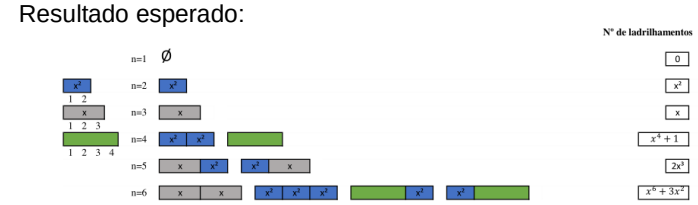


- **Ladrilhamento de Tridovan com peso (polinomial)**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento polinomial de Tridovan ($t_n(x)$), utilizando quadrado preto (1x1) com peso 1, dominó azul (1x2) com peso x², triminó cinza (1x3) com peso x e tetraminó verde (1x4) com peso 1. Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $t_n(x) = T_n(x) + T_{n-1}(x)$, sendo $t_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $T_n(x)$ o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tridovan com $T_0(x) = 1$.
  Resultado esperado:

- **Ladrilhamento de Tridovan com peso (polinomial) (outra abordagem)**

Permitir que o aluno construa o ladrilhamento polinomial de Tridovan ($t_n(x)$), utilizando dominó azul (1x2) com peso x², triminó cinza (1x3) com peso x e tetraminó verde (1x4) com peso 1. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $t_n(x) = T_n(x)$, sendo $t_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $T_n(x)$ o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tridovan com $T_0(x) = 1$.

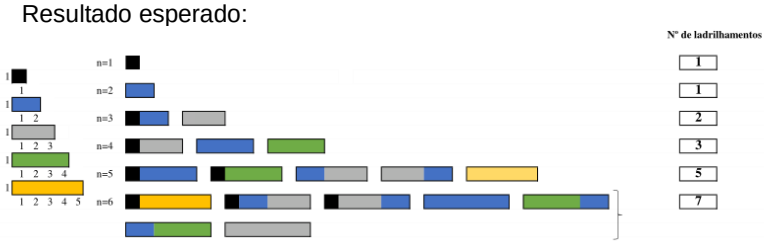
Resultado esperado:



- **Ladrilhamento de Tretradovan**

  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Tetradovan (te_n), utilizando quadrado preto (1x1), dominó azul (1x2), triminó cinza (1x3), tetraminó verde (1x4) e pentaminó amarelo (1x5). Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $te_n = Te_n + Te_{n-1}$, sendo te_n a quantidade de formas de ladrilhar e Te_n o n-ésimo termo da sequência de Tetradovan com $Te_0 = 1$.

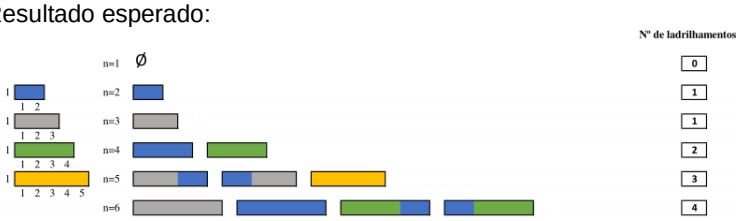
  Resultado esperado:



- **Ladrilhamento de Tretradovan (outra abordagem)**

  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento de Tetradovan (te_n), utilizando dominó azul (1x2), triminó cinza (1x3), tetraminó verde (1x4) e pentaminó amarelo (1x5). Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $te_n = Te_n$, sendo te_n a quantidade de formas de ladrilhar e Te_n o n-ésimo termo da sequência de Tetradovan com $Te_0 = 1$.

  Resultado esperado:

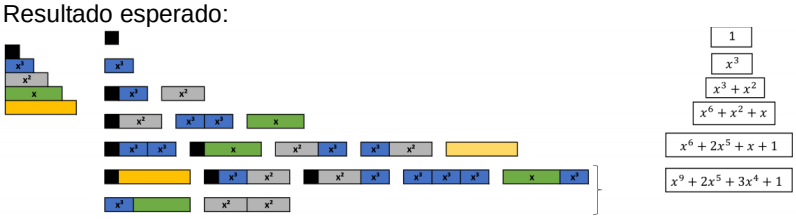


- **Ladrilhamento de Tretradovan com peso (polinomial)**

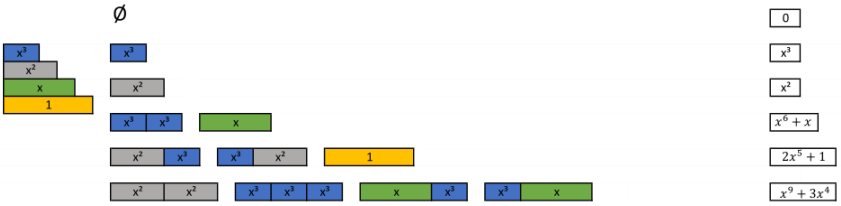
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento polinomial de Tetradovan ($te_n(x)$), utilizando quadrado preto (1x1) com peso 1, dominó azul (1x2) com peso x³, triminó cinza (1x3) com peso x², tetraminó verde (1x4) com peso x e pentaminó

amarelo (1x5) com peso 1. Sendo que o quadrado preto é sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $te_n(x) = Te_n(x) + Te_{n-1}(x)$, sendo $te_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $Te_n(x)$ o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tetradovan com $Te_0(x) = 1$.

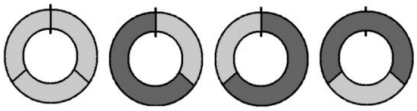
Resultado esperado:



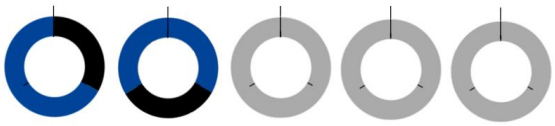
- **Ladrilhamento de Tretradovan com peso (polinomial) (outra abordagem)**
  Permitir que o aluno construa o ladrilhamento polinomial de Tetradovan ($te_n(x)$), utilizando dominó azul (1x2) com peso x³, triminó cinza (1x3) com peso x², tetraminó verde (1x4) com peso x e pentaminó amarelo (1x5) com peso 1. Sabendo que para o caso n=0, tem-se o valor 1. Logo: $te_n(x) = Te_n(x)$, sendo $te_n(x)$ a quantidade de formas de ladrilhar e $Te_n(x)$ o n-ésimo termo da sequência polinomial de Tetradovan com $Te_0(x) = 1$.
  Resultado esperado:



- **Bracelete de Lucas**
  Permitir que o aluno construa o bracelete de Lucas, utilizando quadrado branco curvo (1x1) e dominó branco curvo (1x2), para n=3. Logo: $l_n = L_n$, sendo l_n a quantidade de formas de ladrilhar e L_n o n-ésimo termo da sequência de Lucas.
  Resultado esperado:

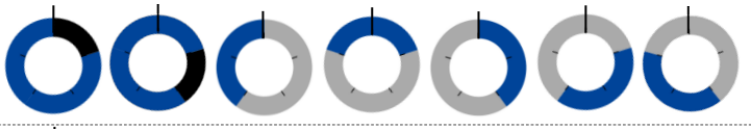


- **Bracelete de Perrin**
  Permitir que o aluno construa o bracelete de Perrin (r_n), utilizando quadrado branco curvo (1x1) e dominó branco curvo (1x2), de modo que o monominó curvo preto, se aparecer, cobre somente uma posição dentre as primeiras posições 1,2,3. Logo: $r_n = R_n$, sendo r_n a quantidade de formas de ladrilhar e R_n o n-ésimo termo da sequência de Perrin.
  Resultado esperado:
  Para n=5



Para n=6

Para n=7



APÊNDICE B – APLICAÇÃO COM *SOFTWARE* GEOGEBRA

Inúmeros são os recursos e ferramentas tecnológicas disponíveis para que os professores possam utilizá-las em sala de aula. Para isso, é necessário um planejamento e domínio do objeto, perante a sua prática de ensino. Segundo Abar (2020, p. 33) "o desenvolvimento das tecnologias da informação e comunicação, bem como sua introdução nas escolas e nos ambientes de formação, é acompanhando de fenômenos da mesma ordem que os da transposição didática". Em outras palavras, a compreensão do aluno é facilitada devido à grande flexibilidade do suporte tecnológico, que oferece recursos para uma transposição didática mais eficaz e significativa.

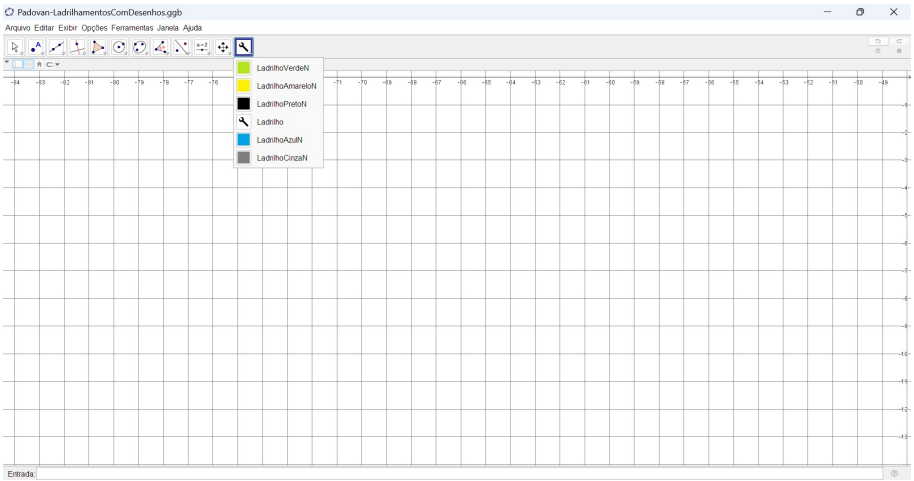
Diante disso, tem-se o desenvolvimento do Tabuleiro Mórfico no *software* GeoGebra, de forma a contemplar as sequências de Padovan e suas extensões, com o viés de aprimorar e aumentar a gama de recursos disponíveis para a prática do professor em sala de aula. A seleção da ferramenta foi pelo fato do GeoGebra ser uma ferramenta de matemática dinâmica que se destaca por sua acessibilidade e facilidade de uso. Isso o torna um recurso valioso para uma abordagem diferenciada, permitindo a apresentação de vários tópicos de Matemática em uma única interface. Essa característica possibilita a experimentação e visualização de conceitos matemáticos, proporcionando um grande potencial para o desenvolvimento do conhecimento do aluno.

Uma adaptação do Tabuleiro Mórfico foi desenvolvida utilizando o *software* GeoGebra, permitindo uma visualização dos termos da sequência de Padovan com o auxílio do recurso tecnológico. Para tanto, foram desenvolvidas ferramentas, incluindo os ladrilhos de tamanhos n-dimensionais com suas respectivas cores, para que os usuários possam clicar e manusear no objeto. A Figura 176 mostra a tela inicial da aplicação, com os dados e recursos disponíveis e desenvolvidos para facilitar o manuseio do usuário.

Inicialmente o usuário deverá clicar na opção "Ladrilho"e em seguida clicar no vértice do quadrado da malha do *software*. Logo após, uma janela irá abrir, solicitando que seja digitado o tamanho do ladrilho. Feito isso, deverá ser clicado novamente no vértice para o ladrilho ser desenhado. Para os ladrilhos com as cores disponibilizadas, como é o caso do "LadrilhoVerdeN", esse permite que o usuário insira um ladrilho na cor verde, de acordo com o tamanho digitado. A sua inserção dar-se com um clique no vértice ou dentro da malha que deseja que o ladrilho seja desenhado, e sem seguida abre-se uma janela para que seja digitado o tamanho do ladrilho. Logo em seguida a peça é desenhada no local sugerido pelo usuário.

Para as demais cores e ladrilhos, "LadrilhoAmareloN", "LadrilhoPretoN", "LadrilhoAzulN"e "LadrilhoCinzaN"o *script* acontece da mesma forma. Após desenhados, os objetos ficam fixos, de forma a evitar que ocorram deslizes na aplicação. O fato de possuir ladrilhos de tamanhos n-dimensionais, ou seja o usuário incluir o tamanho do ladrilho, permite que a aplicação possa ser utilizada para outras sequências.

Figura 176 – Tela inicial dos ladrilhamentos no GeoGebra



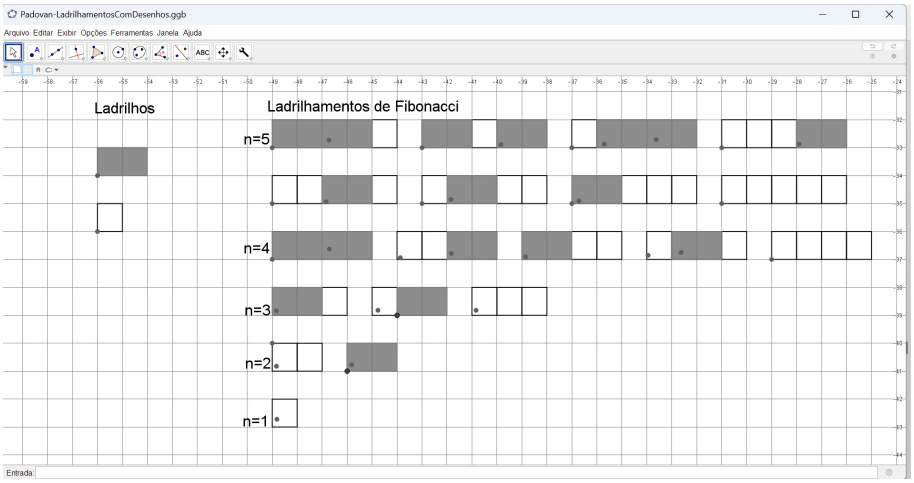
Fonte: Elaborado pela autora.

É importante destacar que o objeto desenvolvido não chegou a ser aplicado em sua totalidade, pois foi concluído após algumas experimentações em sala de aula. Como resultado, as análises para fins de validação seriam comprometidas, uma vez que não haveria uma base de comparação consistente, dada a amostra reduzida da utilização do *software* GeoGebra. Esta limitação evidencia a necessidade de planejamento cuidadoso e implementação adequada de intervenções educacionais para garantir a robustez dos resultados obtidos. Por isso, optou-se por utilizar somente o Tabuleiro Mórfico no material concreto, utilizando o GeoGebra apenas com caráter de recurso extra. Assim, ocorreu a utilização do GeoGebra para explorar as identidades combinatórias de Padovan. Essa abordagem pode enriquecer o processo de ensino na prática docente, oferecendo uma ferramenta poderosa para ilustrar e compreender conceitos complexos de forma acessível e dinâmica.

Inicalmente, tem-se a Figura 177 em que apresenta os ladrilhamentos de Fibonacci no GeoGebra, utilizando o modelo proposto por Benjamin e Quinn (2003b), em que utiliza os seguintes ladrilhos: quadrado branco (□) e dominó cinza (■■). O dominó teve a sua cor alterada de branco para cinza para efeitos de melhor visualização no GeoGebra.

A Figura 178 apresenta os ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra, utilizando o

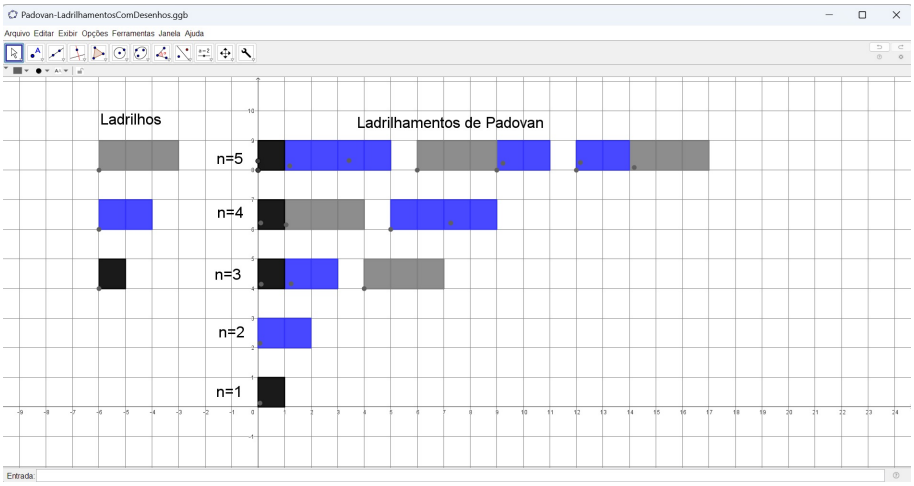
Figura 177 – Ladrilhamentos de Fibonacci no GeoGebra - modelo de Benjamin e Quinn (2003b).



Fonte: Elaborado pela autora.

modelo proposto por Vieira, Alves e Catarino (2022a), em que utiliza os seguintes ladrilhos: quadrado preto (■), dominó azul (■■) e triminó cinza (■■■).

Figura 178 – Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a).



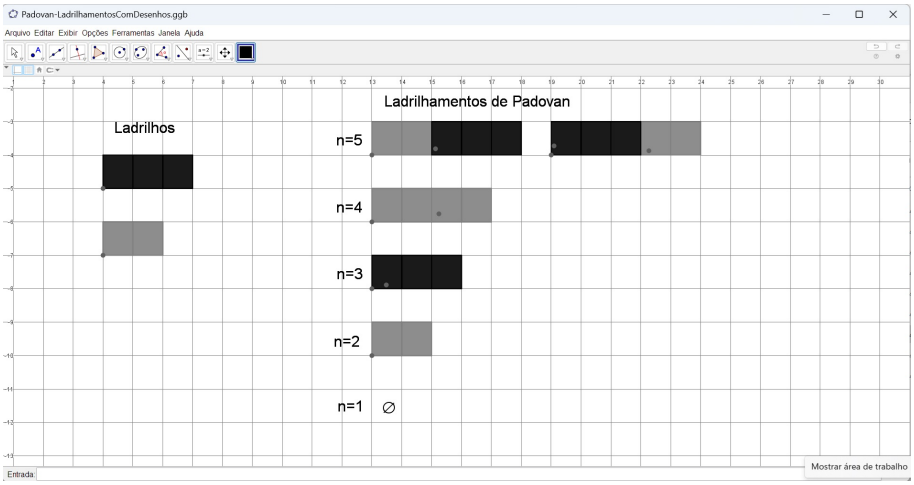
Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, tem-se a Figura 179 com os ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra com o modelo proposto por Tedford (2019), o qual utiliza os seguintes ladrilhos com uma adaptação nas cores por conta da visualização: dominó cinza (■■) e triminó preto (■■■).

A Figura 180 retrata os ladrilhamentos de Tridovan no GeoGebra com o modelo proposto por Vieira, Alves e Catarino (2022a), o qual utiliza os seguintes ladrilhos: quadrado preto (■), dominó azul (■■), triminó cinza (■■■) e tetraminó verde (■■■■).

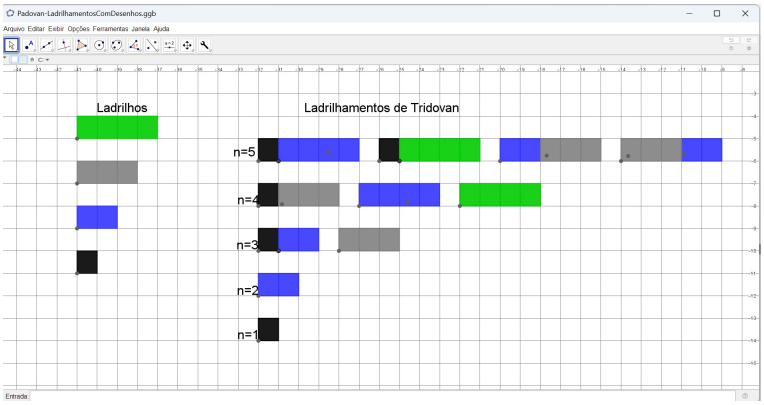
Tratando-se ainda da sequência de Tridovan, tem-se a Figura 181 com os respectivos ladrilhamentos no GeoGebra, utilizando os seguintes ladrilhos: dominó azul (■■), triminó cinza

Figura 179 – Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra - modelo de Tedford (2019).



Fonte: Elaborado pela autora.

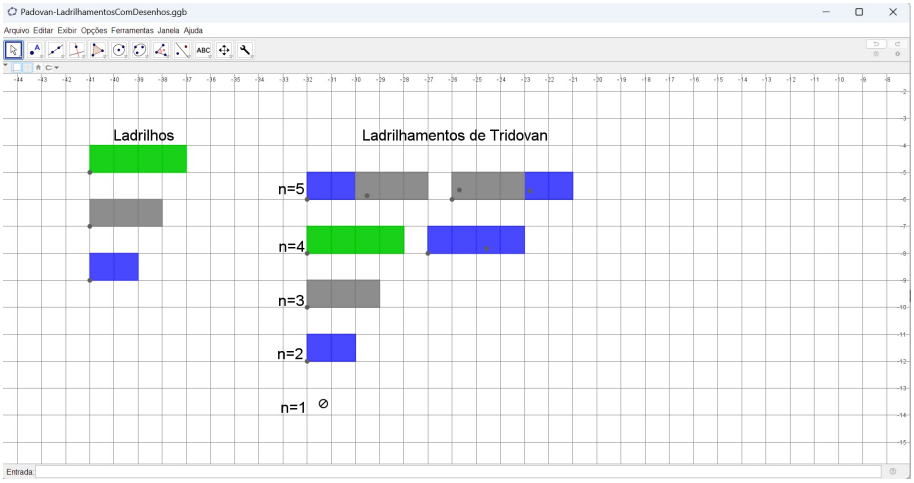
Figura 180 – Ladrilhamentos de Tridovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a).



Fonte: Elaborado pela autora.

(■■■) e tetraminó verde (■■■■).

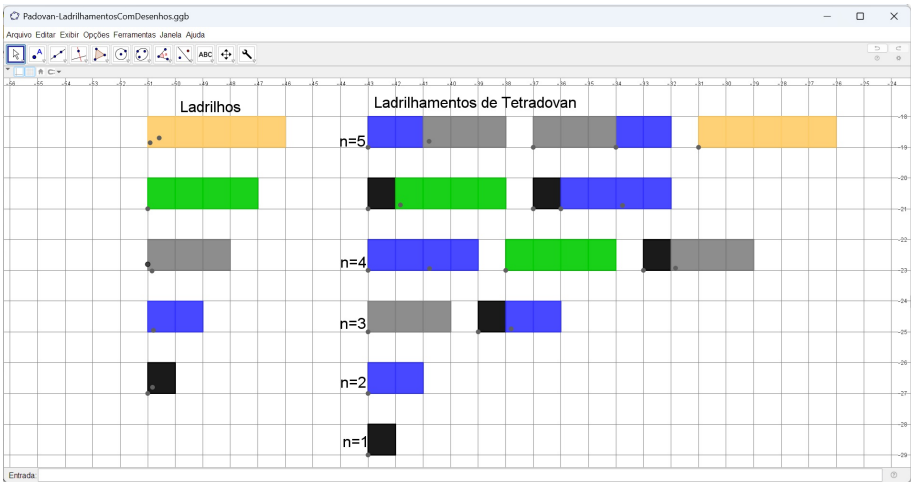
Figura 181 – Ladrilhamentos de Tridovan no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora.

Partindo para a sequência de Tetradovan, pode-se visualizar a Figura 182 com os respectivos ladrilhamentos no GeoGebra com o modelo proposto por Vieira, Alves e Catarino (2022a), utilizando os seguintes ladrilhos: quadrado preto (■), dominó azul (■■), triminó cinza (■■■), tetraminó verde (■■■■) e pentaminó amarelo (■■■■■).

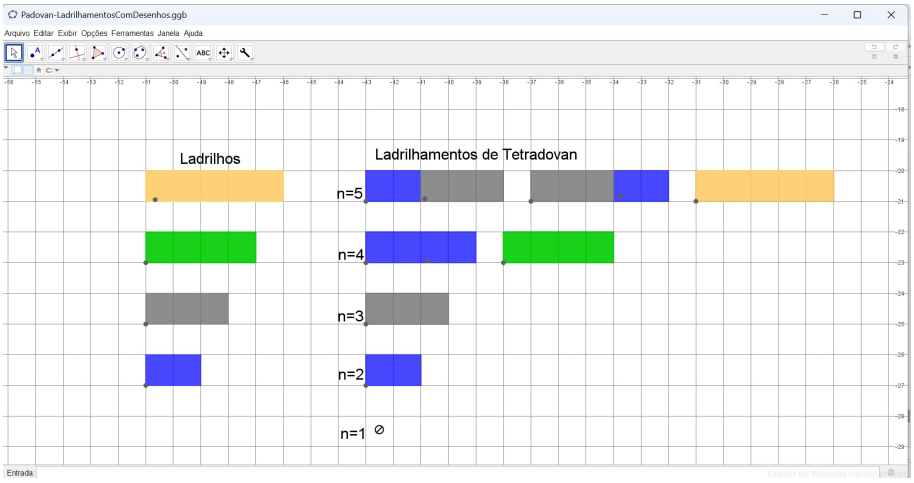
Figura 182 – Ladrilhamentos de Tetradovan no GeoGebra - modelo de Vieira, Alves e Catarino (2022a).



Fonte: Elaborado pela autora.

Continuando o estudo da sequência de Tridovan, tem-se a Figura 183 com os respectivos ladrilhamentos no GeoGebra, utilizando os seguintes ladrilhos: dominó azul (■■), triminó cinza (■■■), tetraminó verde (■■■■) e pentaminó amarelo (■■■■■).

Figura 183 – Ladrilhamentos de Tetradovan no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora.

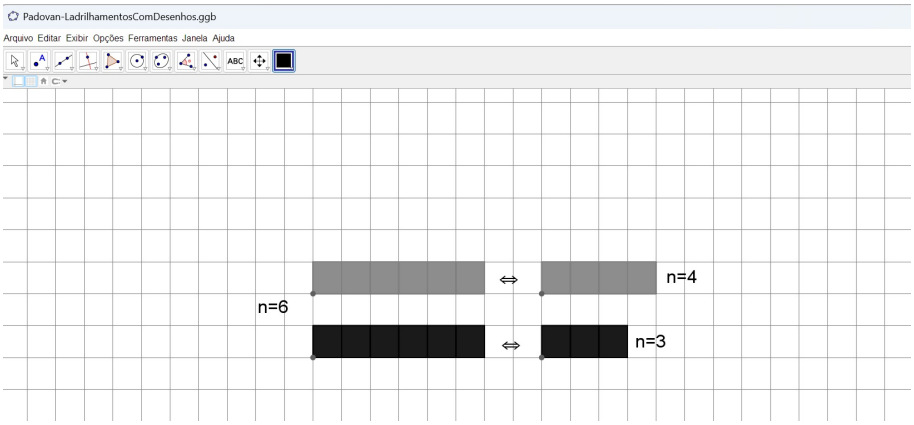
Tão logo, tem-se a Concepção e Análise a *Piori*, apresentando a situação didática proposta, seguida de uma previsão atitudinal dos estudantes, com referência nas fases delineadas pela TSD:

Situação didática: Considerando os ladrilhamentos de Padovan propostos por Tedford (2019), com as suas respectivas peças disponíveis, demonstre a identidade $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$, para $n \geq 5$.

Antes de iniciar as fases da TSD, o professor deve apresentar o recurso desenvolvido no *software* GeoGebra. Isso permitirá a visualização dos ladrilhamentos de Padovan, facilitando a compreensão e o desenvolvimento da atividade. Como forma de visualizar melhor os mapeamentos que serão realizados, os triminós brancos são alterados para triminós pretos, facilitando o processo de visualização dos estudantes durante a demonstração da identidade.

Fase da Ação: O objetivo é que os estudantes, ao revisitar seus conhecimentos prévios sobre tabuleiros, ladrilhos e ladrilhamentos, aprofundem sua compreensão do modelo combinatório de Padovan. Durante esse processo, é possível reexaminar a prova apresentada por Tedford (2019), destacando a importância da validação por meio do mapeamento cuidadoso dos conjuntos envolvidos. Essa abordagem não só fortalece a fundamentação teórica, mas também promove uma compreensão mais profunda da interação entre os elementos do problema. É importante que os estudantes observem os casos para os valores de n da sequência de Padovan por meio de sua interpretação combinatória, verificando o que acontece quando aplica a recorrência para os ladrilhamentos, ou seja, retirando e inserindo ladrilhos para que possa chegar ao valor de n do caso analisado. A Figura 184 apresenta o caso de mapeamento do $n = 6$ no GeoGebra.

Figura 184 – Mapeamento dos Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra para $n = 6$.



Fonte: Elaborado pela autora.

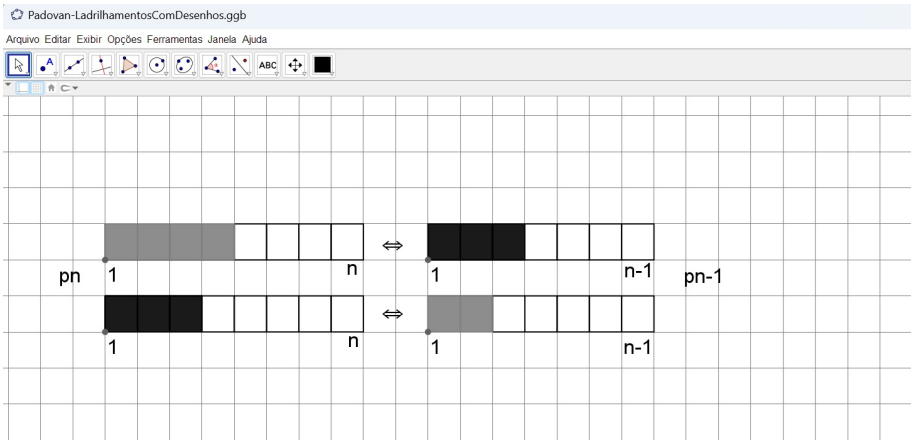
Fase da Formulação: Espera-se que os estudantes iniciem o mapeamento para determinados valores de n, para que assim possam generalizar e identificar os casos apresentados na identidade. Eles devem verificar e identificar a possibilidade de mapeamento que estão acontecendo para os casos das peças no tabuleiro, os casos de transformação. Por exemplo, para

um tabuleiro de tamanho n mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$:

- Iniciar com um par de dominós, que é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo as peças por um triminó.
- Iniciar com um triminó, ocorre a substituição da peça por um dominó.

A Figura 185, retrata o mapeamento de p_n para p_{n-1}, que pode ser alcançada com a substituição dos valores de n para os casos dos ladrilhamentos de Padovan.

Figura 185 – Mapeamento de p_n e p_{n-1}.



Fonte: Elaborado pela autora.

Esses exemplos ilustram como os estudantes devem proceder no mapeamento, permitindo uma exploração prática e detalhada das identidades combinatórias envolvidas.

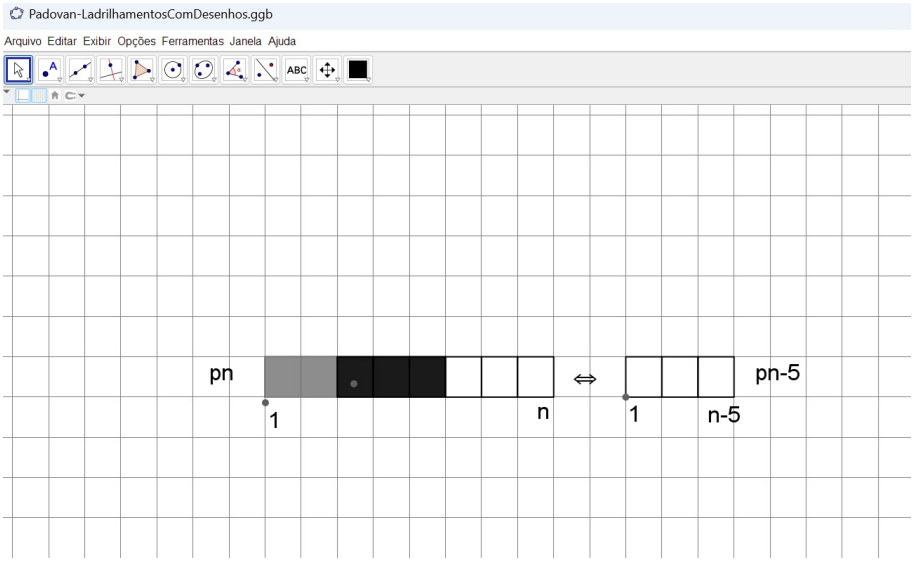
Fase da Validação: Para a demonstração da identidade por meio da noção de tabuleiro, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de p_n e $p_{n-1} \cup p_{n-5}$.

A Figura 186 retrata o mapeamento de p_n para p_{n-5}, permitindo a validação da identidade por meio dos ladrilhamentos, uma vez que consta da união entre os conjuntos verificados e mapeados.

Fase da Institucionalização: Espera-se que o professor, ao revelar a intenção da atividade, crie um ambiente propício para a exploração aprofundada da identidade do modelo combinatório de Padovan por meio do uso de tabuleiros. Essa abordagem permite, além da compreensão teórica, uma análise prática por meio da resolução de problemas. Ao discutir as resoluções dos participantes, o objetivo é explorar os diferentes caminhos seguidos, elucidar dúvidas, corrigir equívocos e reforçar acertos, promovendo uma aprendizagem mais robusta e participativa.

A experimentação foi conduzida na UECE *campus* Fortaleza, no curso de

Figura 186 – Mapeamento de p_n para p_{n-5}.



Fonte: Elaborado pela autora.

Licenciatura em Matemática, especificamente na componente curricular de Práticas de Ensino de Matemática, obrigatória no 5º semestre, com 8 alunos matriculados. A aplicação estendeu-se após as aplicações das 6 situações didáticas abordadas anteriormente nesse trabalho, com mais um encontro com duração de 2 horas/aula.

Na fase de análise a *posteriori*, os dados coletados são organizados e comparados com os dados da fase de concepção e análise a *priori*. Questionamentos são realizados para verificar até que ponto os dados coletados durante a experimentação suportam a concepção e análise a *priori*, identificar convergências e divergências significativas e interpretar eventos não previstos. Essa conexão entre a concepção e análise a *priori* e a análise a *posteriori* permite a validação das hipóteses subjacentes à estrutura da pesquisa. É importante notar que sempre há diferenças entre a referência fornecida pela concepção e análise a *priori* e a contingência observada na análise a *posteriori*. A concepção e análise a *priori* aborda os estudantes de forma genérica e epistêmica.

Assim, tem-se a análise dos dados e validação, conforme previsto na ED e com referência na TSD. A aplicação iniciou com a distribuição do exercício e regras para o manuseio do *software*. A validação aconteceu com a elaboração de uma situação didática, por meio de atividade proposta aos estudantes, com o objetivo de instigar o lado investigativo do participante, propondo os conhecimentos necessários para as soluções e construção de definição.

Diante disso, a situação-problema permitiu a compreensão da identidade da sequência de Padovan via a sua abordagem combinatória, sendo discutida de acordo com a variável didática. Destaca-se que a validação ocorreu de forma interna, conduzida pela pesquisadora na UECE,

campus Fortaleza. Os alunos foram nomeados de C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 e C8, totalizando 8 estudantes participantes.

Diante disso, são analisadas as seguintes variáveis didáticas:

– noção de tabuleiro;
– modelo combinatório de Fibonacci;
– regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Padovan;
– modelo combinatório de Padovan.

A prática aconteceu com a divisão dos estudantes em duplas, possibilitando o manuseio do *software* nas máquinas. Assim, durante a fase da ação, tem-se o diálogo de uma das duplas estabelecendo as estratégias para a resolução da atividade.

> C3: *A gente agora não tem mais o quadrado preto. Então vamos montar o Padovan pra poder ver como vão ficar as peças.*
> C5: *Isso! Depois a gente olha como vai ser a volta, pensando nessa identidade.*
> C5: *O* $n = 1$ *vai ficar vazio?*
> C3: *Vai sim, porque não vai ter peça pra ele.* C5: *O* $n = 2$ *já vai ter peça. Uma combinação e já coloca o dominó.*
> C3: *Agora o* $n = 4$ *só vai ter uma combinação.*
> C5: *No* $n = 4$*? Tem mais.*
> C3: *Tem não, só vai ter 2 dominós.*

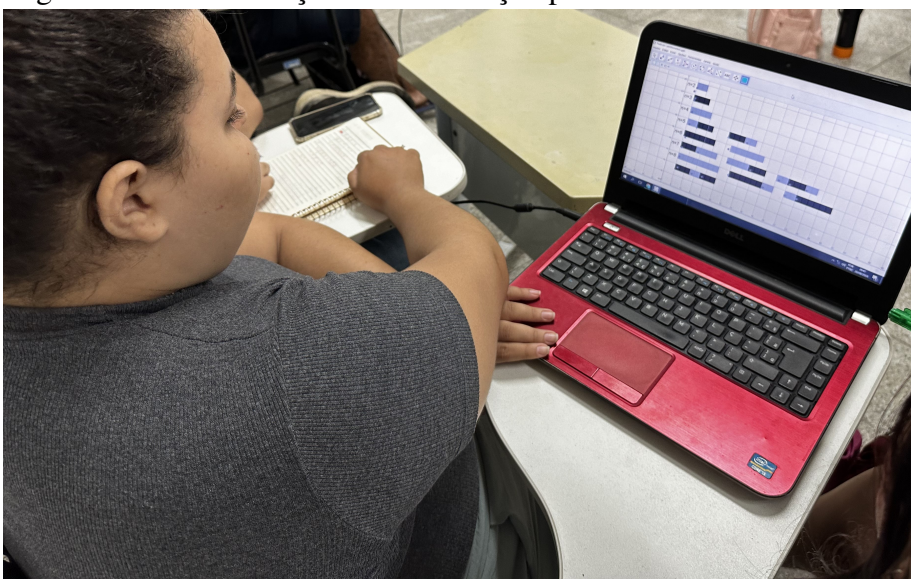
A Figura 187 na fase da ação, realizando os ladrilhamentos de Padovan.

Figura 187 – Fase da ação por C3 e C5.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Ainda na fase da ação, tem-se a Figura 188 pelos estudantes C4 e C7, apresentando os ladrilhamentos até o caso $n = 8$, utilizando a mesma estratégia dos demais colegas.

Figura 188 – Continuação da fase da ação por C4 e C7.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na fase da formulação, tem-se uma breve discussão entre C1 e C2, onde os participantes questionam entre si a quantidade de peças que devem ser retiradas para o alcance da demonstração da identidade.

> C1: *Vamos olhando quantas peças a gente vai tirando.*
> C2: *A quantidade de peças a gente não sabe. Porque vai variando de acordo com o valor de n. O que a gente tem que olhar é o início da peça e não a quantidade que vamos tirar. Porque olha só, pros casos de n maiores, a gente vai ter mais peças, então vamos tirando mais peças.*
> C1: *Beleza! Então vamos olhando pro* $n = 5$ *e transformar na identidade. Depois a gente pega o* $n = 6, 7, 8$ *pra ir conferindo. Ou vamos vendo qual o mais fácil de fazer essa volta.*

A Figura 189 representa o mapeamento do caso $n = 7$ para $n = 6$ e $n = 2$, com referência na identidade.

Ainda dando continuidade à fase da formulação, observa-se uma discussão entre os estudantes C4 e C7 acerca do mapeamento dos casos de n, na tentativa de utilizar a estratégia de identificar a regra com referência no final do tabuleiro.

> C4: *A gente deduziu que o nosso parâmetro vai ser o triminó.*
> C7: *Como assim?*
> C4: *Se a gente inicia a sequência por um triminó, a gente vai retirar esse triminó e colocar um dominó no lugar dele. Caso a nossa sequência ela termine, ela finde em um triminó, a gente vai retirar os dominós e colocar um*

Figura 189 – Fase da formulação por C1 e C2.

Fonte: Acervo da pesquisa.

> *triminó nesses lugares retirados. E esse triminó tiver em posições distintas do começo ou do fim, a gente retira todas as peças e inclusive o triminó.*
> C7: *Mas aí vai furar, pq a gente não tem garantia de como vai terminar a peça. Só como ela vai iniciar.*
> C4: *Então a gente ficar só com essa tese que conseguimos de começar com o triminó e colocar dominó. Vamos analisar mais e verificar como vão ficar as outras peças.*

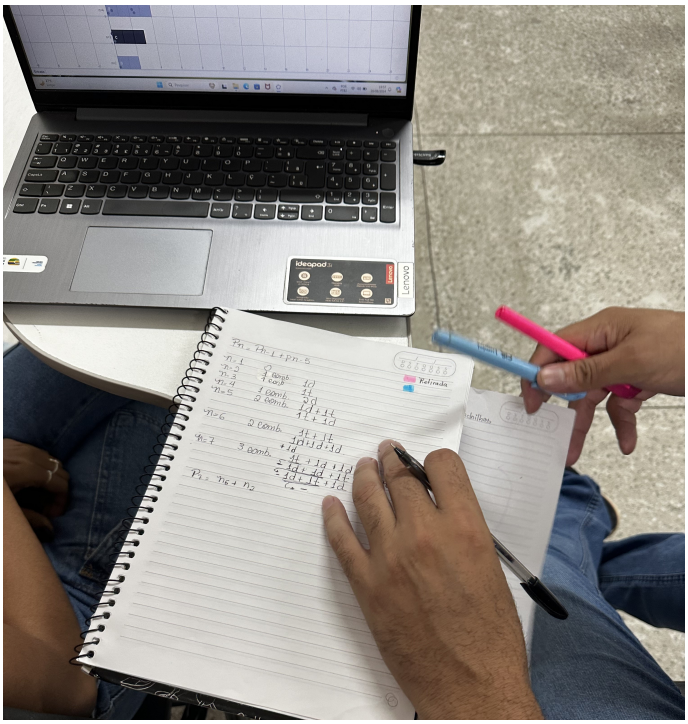
A Figura 190 retrata os estudantes C1 e C2 escrevendo as suas ideias pra o caderno, como forma de organizar os passos analisados.

A Figura 191 permite visualiza a fase da validação pelos estudantes C6 e C8.

Ainda na fase da validação, destaca-se a discussão entre os participantes C6 e C8, como forma de demonstrar a identidade proposta.

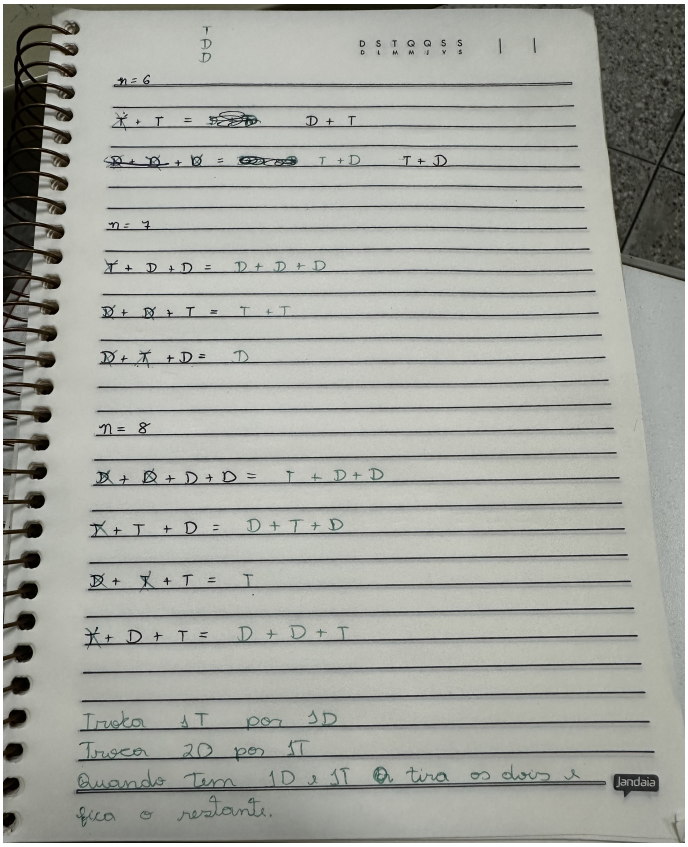
> C6: *A gente tem que ir fazendo olhando pra identidade. Então a gente vai ter que pegar o n menor. Porque se a gente fizer de $n-1$ pra n vai ficar mais difícil.*
> C8: *Bora fazer o $n=7$.*
> C6: *Então vamos fazer aqui. A gente olha pro $n=6$ e o $n=2$. O que fazer pra poder transformar nessas peças? Eita!*
> C8: *Vamos chamar de D os dominós e T os triminós. Vou anotando aqui pra gente saber o que tirou e o que acrescentou.*
> C6: *Então temos TDD, DDT e DTD. Aí a gente tem que transformar isso em TT, DDD e D.*
> C8: *Pra transformar em TT a gente só pode pegar o DDT.*
> C6: *Por quê?*
> C8: *Porque é a única peça que vai terminar com o T. Então a gente vai tirar DD e colocar o T e ficar o restante que tava.*
> C6: *Então ficar DD vira T.*
> C8: *Agora pro TDD vai virar DDD ou D. Se a gente pegar o TDD e tirar o TD vai ficar só o D. E o DTD tira o DT e fica só o D também.*

Figura 190 – Continuação da fase da formulação por C1 e C2.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 191 – Fase da validação por C6 e C8.



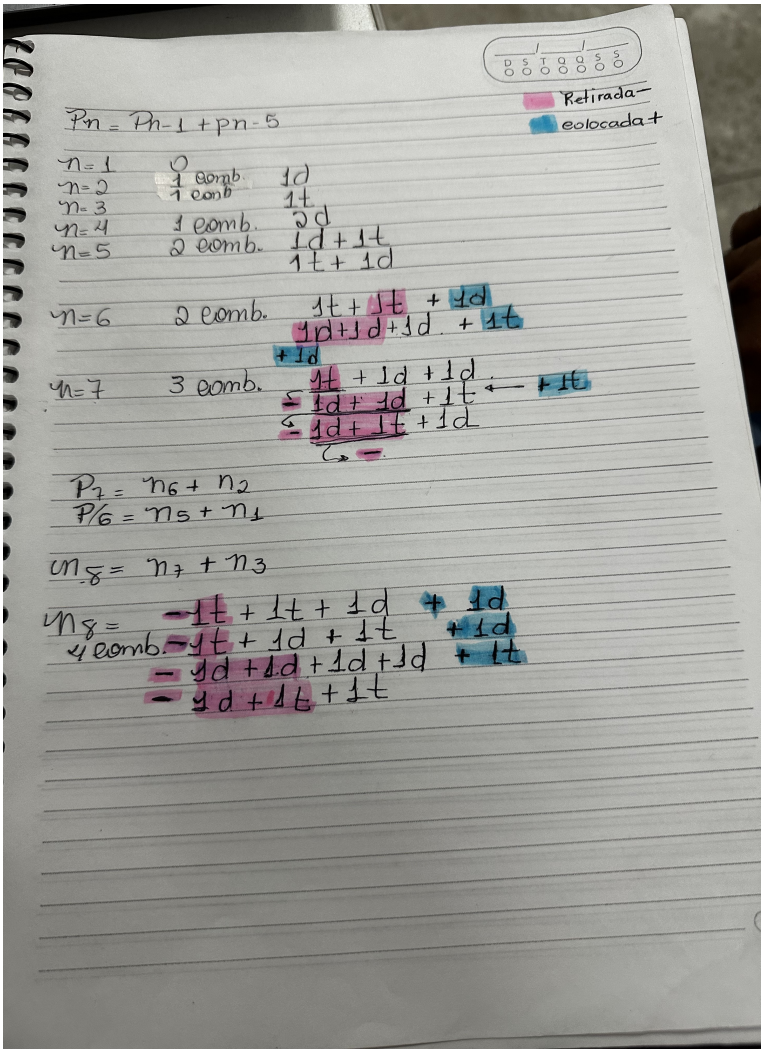
Fonte: Acervo da pesquisa.

C6: *Vamos pegar o DT e tirar DT pra ficar só o restante. Depois a gente faz o*

$n = 8$ *pra testar.*
C8: *E o TDD vai virar DDD, pegando o TD e tirando e colocar o D.*
C6: *Agora olhando pro* $n = 8$*. É fica isso mesmo!*
C8: *Então fechou. Fica DD vira T. T vira D e DT vira o resto.*

Por fim, tem-se a Figura 192 em que os estudantes C1 e C2 demonstram a identidade por meio dos ladrilhamentos de Padovan, com referência em Tedford (2019).

Figura 192 – Continuação da fase da validação por C1 e C2.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao confrontar os dados fornecidos pelos participantes, procedeu-se à comparação entre a análise a *priori* e a *posteriori*, de modo a avaliar o dispositivo elaborado e os resultados obtidos. Essa comparação culminou em uma validação interna dos dados, destacando a relevância deste modelo de atividade no contexto dos cursos de formação inicial de professores de Matemática. A integração dos conteúdos matemáticos, como a sequência de Padovan e seu modelo combinatório, com ferramentas como o GeoGebra, não apenas aprimorou a compreensão

dos alunos em formação inicial, mas também ressaltou a eficácia dessas estratégias no ensino da Matemática.

É importante destacar que a análise foi conduzida de forma independente, sem estabelecer comparações diretas entre o uso do tabuleiro e a aplicação no GeoGebra. Ao adotar essa abordagem, buscou-se avaliar cada ferramenta em seu próprio contexto, considerando suas características e funcionalidades específicas, o que permitiu uma compreensão mais detalhada e individualizada de como cada uma contribui para o entendimento dos conceitos envolvidos.

ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ PROPESQ - UFC

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Uma investigação da complexificação, generalização e do modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com a Engenharia Didática.

Pesquisador: Renata Passos Machado Vieira

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 66454622.5.0000.5054

Instituição Proponente: Universidade Federal do Ceará/ PROPESQ

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.911.836

Apresentação do Projeto:

As sequências de Padovan e Perrin são discutidas na disciplina de Histórica da Matemática, na licenciatura da Matemática, porém não estão presentes na matriz curricular do curso, e nem existem facilmente literaturas sobre este assunto, ficando a caráter do professor obter tal aprofundamento sobre o assunto. Dessa forma, visando transformar esse conteúdo pouco visto, em um tópico a ser ensinado, pode-se considerar que pesquisadores, educadores matemáticos, estudam os "fenômenos" inerentes ao ensino de Matemática, através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática. Será usada como ferramenta de estudo a Engenharia didática.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

-Analisar as contribuições da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, diante de uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatório desses números (campo epistêmico-matemático), no curso de Formação Inicial de Professores.

Objetivo Secundário:

• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Padovan e para a sequência polinomial de Padovan;

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000
Bairro: Rodolfo Teófilo **CEP:** 60.430-275
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3366-8344 **E-mail:** comepe@ufc.br

• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Perrin e para a sequência polinomial de Perrin;
• Investigar e introduzir os teoremas, propriedades e definições matemáticas inerentes à generalização e complexificação das sequências de Padovan e Perrin;
• Pesquisar, por intermédio de situações didáticas, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin;• Desenvolver e analisar, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, a construção do conhecimento epistemológico-matemático dos modelos generalizados e combinatórios de Padovan e Perrin, mediante a elaboração de situações-problema em sala de aula

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos

mínimos

Benefícios:

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes as sequências de Padovan e Perrin. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores de Matemática, evoluindo o pensamento intuitivo matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto em questão está muito bem escrito, de boa leitura e entendimento. Está incluído desenho do estudo, introdução, revisão, objetivos, metodologia, cronograma de atividades, orçamento e outros. A documentação exigida pela RESOLUÇÃO 466/2012/CNS/MS que regulamenta os estudos aplicados aos seres humanos está incluída.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos de apresentação do trabalho estão coerentes com o tema abordado e o rigor da
ética em pesquisa.

Recomendações:

O projeto de pesquisa está devidamente instruído para que o mesmo seja executado. Portanto o parecer é favorável à sua APROVAÇÃO.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado

Considerações Finais a critério do CEP:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ PROPESQ - UFC

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2046581.pdf	11/12/2022 16:06:15		Aceito
Folha de Rosto	folhaderostoatual.pdf	11/12/2022 16:06:01	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Outros	carta.pdf	22/11/2022 08:56:02	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Declaração de concordância	concordancia.pdf	22/11/2022 08:53:41	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Renata_AUTORIZACAO_PESQUISA_assinado.pdf	19/11/2022 08:57:31	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Outros	Lattes.pdf	19/11/2022 08:39:44	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto_de_pesquisa_renata.pdf	19/11/2022 08:39:04	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo.docx	19/11/2022 08:38:48	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Orçamento	orcamentoass.pdf	19/11/2022 08:38:19	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Cronograma	cronogramaass.pdf	19/11/2022 08:38:08	Renata Passos Machado Vieira	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

FORTALEZA, 27 de Fevereiro de 2023

Assinado por:
FERNANDO ANTONIO FROTA BEZERRA
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000
Bairro: Rodolfo Teófilo **CEP:** 60.430-275
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3366-8344 **E-mail:** comepe@ufc.br

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

Elaborado pela Instituição Coparticipante

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Uma investigação da complexificação, generalização e do modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com a Engenharia Didática.

Pesquisador: Renata Passos Machado Vieira

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 66454622.5.3001.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.105.226

Apresentação do Projeto:

Resumo

De acordo pesquisas realizadas em alguns livros de História da Matemática, onde esses apresentam alguns os conceitos matemáticos de forma superficial, ausentando as sequências de Padovan e Perrin. Desse modo esses números serão explorados num curso de formação inicial de professores no IFCE (Licenciatura em Matemática), partindo desta problemática e com a utilização de duas metodologias, sendo: uma de pesquisa e

conhecida como Engenharia Didática e, a outra de ensino e conhecida como Teoria das Situações Didáticas. Dessa forma, serão trabalhadas as investigações históricas, análise didática e epistemológica do objeto de estudo, os números de Padovan e Perrin diante de suas abordagens combinatórias. A investigação de algumas propriedades será realizada para evoluir no processo de da abordagem combinatória desses modelos. Os

possíveis comportamentos dos discentes em relação à essas situações didáticas, serão elencados nesta pesquisa e organizados de acordo com a fase da experimentação da Engenharia Didática.

Metodologia Proposta:

A metodologia de pesquisa utilizada é Engenharia Didática criada para analisar as situações didáticas. Ressalta-se que “o termo da Engenharia

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br

Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professorengenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (DOUADY, 1995, p. 62). A Engenharia Didática, segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, porém, é submetido a trabalhar com objetos mais rigorosos que os objetos puros contidos na ciência. Com a Engenharia Didática um estudo acerca do tema é feito, para que haja uma investigação teórica desses conteúdos, e assim possa ter um maior aprofundamento e embasamento teórico, para que os docentes possam repassar os conteúdos aos seus alunos por meio dessa metodologia de pesquisa, instigando-os a ativar o lado investigativo e indutivo, sem perder o rigor matemático do objeto de estudo. Alves e Catarino (2017, p. 126) retratam que essa metodologia "é compreendida como uma metodologia que visa ao estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula". Em relação a Teoria das Situações Didáticas, utilizada como metodologia de ensino nesta pesquisa, essa surgiu no início da década de 60 durante a renovação do ensino de matemática. Essa teoria foi definida por Brousseau (1986) como um modelo teórico, que considera o ensino como um projeto onde o discente conquista um saber constituído ou em constituição, havendo ainda a transformação da Didática Matemática numa ciência com apropriação de conhecimentos matemáticos. Com isso, é possível destacar um dos objetivos principais da Didática Matemática, a preparação do processo de aprendizagem utilizando diversas situações reprodutíveis, conhecidas como situações didáticas. Os professores, alunos e o meio (milieu) são indispensáveis para a relação de ensino e aprendizagem. As relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser
representadas por meio do triângulo didático. No momento dessas situações propostas na Teoria das Situações Didáticas, o professor deve esclarecer os componentes preeminentes nas fases didáticas de ensino elaboradas por Brousseau, seja ela de ação, formulação, validação e institucionalização (BROUSSEAU, 1986). Com isso, Teixeira e Passos (2013) retrata que na situação de ação "A sequência de 'situações de ação' constitui o processo pelo qual o aluno elabora estratégias, ou seja, 'ensina a si mesmo' um método de resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio, constitui a dialética de ação. Usamos a palavra 'dialética' em vez da palavra 'interação' porque, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições validadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação" (BROUSSEAU, 2002, p. 9, tradução

nossa). Nesse momento o participante executa procedimentos instantâneos, com base em seus conhecimentos prévios, a fim de resolver a situação-problema proposta. Assim, o estudante apresenta um raciocínio de natureza mais experimental do que teórico, processando reflexões e
tentativas para assim chegar na estratégia de resolução. É nesse momento que o estudante deve buscar as resoluções para a atividade proposta, devendo o professor registrar todos os passos desenvolvidos pelo aluno.Na situação de formulação, tem-se: “Pode-se assumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático” (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019, p. 268). Durante este processo o aluno retrata uma maneira, conhecida.

Critério de Inclusão:
Visando estabelecer uma faixa etária do público alvo da pesquisa deste projeto, foi observada que na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE a disciplina de História da Matemática é ofertada no 6° semestre, visto que a coleta de dados do referido projeto será realizada na mesma. Essa disciplina apresenta ainda alguns pré-requisitos, sendo esses: Geometria Plana e construções geométricas (1° semestre), Cálculo II (3° semestre) e Metodologia do Ensino da Matemática (4° semestre). Assim, pode-se concluir que estes discentes matriculados na referida disciplina possuirão uma média de idade de vinte anos, sendo então maiores de idade.

Objetivo da Pesquisa:
Objetivo Primário:
Analisar as contribuições da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, diante de uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatório desses números (campo epistêmico-matemático), no curso de Formação Inicial de Professores.

Objetivo Secundário:
• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Padovan e para a sequência polinomial de Padovan;
• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Perrin e para a sequência polinomial de Perrin;
• Investigar e introduzir os teoremas, propriedades e definições matemáticas inerentes à generalização e complexificação das sequências de Padovan e Perrin;• Pesquisar, por intermédio de situações didáticas, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin;
• Desenvolver e analisar, fundamentada na Teoria das
Situações Didáticas, a construção do conhecimento epistemológico-matemático dos modelos generalizados e combinatórios de Padovan e Perrin, mediante a elaboração de situações-problema em sala de aula.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Riscos:
Você não deve participar deste estudo, caso venha sentir-se constrangido com algum dos procedimentos citados, tendo a liberdade de deixar de participar do estudo em qualquer momento, sem haver nenhum prejuízo para a sua conduta.
Procedimentos:
-Participar da pesquisa que será aplicada em forma de aulas com duração de noventa (90) minutos, no Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Estado do Ceará, campus Fortaleza.
-A previsão de início das aulas de aplicação é de: 03 de abril de 2023.
-As aulas serão registradas através de fotos, gravações de áudio e anotações das produções dos participantes.
-Serão aplicados questionários, com situações-problema propostos de forma de lista de exercícios, com tempo de noventa (90) minutos para as
respostas.
-Os dados coletados serão utilizados somente para a pesquisa e os resultados serão mostrados por meio de revistas especializadas na área de
investigação e/ou encontros científicos e na tese do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, promovido pela
Universidade Federal do Ceará (RENOEN-UFC) no campus Fortaleza, sem expor a identificação dos

participantes.

Benefícios:
Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes as sequências de Padovan e Perrin. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores de Matemática, evoluindo o pensamento intuitivo
matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
Tese de doutorado

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
Todos os documentos estão Corretamente apresentados

Recomendações:
Nada a declarar

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
Aprovado

Considerações Finais a critério do CEP:
Parecer consubstanciado de aprovação disponível na pasta (ou diretório) “Pareceres”.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2094646.pdf	12/04/2023 14:49:13		Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA.pdf	12/04/2023 14:48:43	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo.pdf	12/04/2023 14:47:59	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Outros	carta.pdf	22/11/2022	Renata Passos	Aceito

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE

Continuação do Parecer: 6.105.226

Outros	carta.pdf	08:56:02	Machado Vieira	Aceito
Outros	Lattes.pdf	19/11/2022 08:39:44	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto_de_pesquisa_renata.pdf	19/11/2022 08:39:04	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo.docx	19/11/2022 08:38:48	Renata Passos Machado Vieira	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

FORTALEZA, 06 de Junho de 2023

Assinado por:
Emmanuel Alves Carneiro
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Jorge Dumar, nº 1703
Bairro: Jardim América **CEP:** 60.410-426
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3401-2332 **E-mail:** cep@ifce.edu.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ PROPESQ - UFC

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Uma investigação do modelo combinatório dos números de Padovan e Perrin com a Engenharia Didática

Pesquisador: Renata Passos Machado Vieira

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 75455523.2.0000.5054

Instituição Proponente: Universidade Federal do Ceará/ PROPESQ

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.528.207

Apresentação do Projeto:

Algumas pesquisas em livros de História da Matemática e de Matemática Pura, percebeu-se uma discussão referente às sequências recursivas e lineares, abordando apenas os números de Fibonacci e Lucas. Dessa forma, destaca-se a relação destes números com os números de Padovan, apresentando as suas respectivas relações de convergência com os números mórficos. Esses números possuem apenas duas soluções, conhecidas como número de ouro e número plástico, em que a sequência de Fibonacci se relaciona com o número de ouro e, a sequência de Padovan com o número plástico. De fato, é importante destacar que os números de Perrin diferenciam-se dos números de Padovan somente em relação aos seus termos iniciais, assim como acontece para os números de Fibonacci e Lucas. Será realizado uma estudo utilizando a metodologia da Engenharia Didática e, a outra de ensino e conhecida como Teoria das Situações Didáticas.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

-Analisar as contribuições da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas para o ensino dos modelos de Padovan e Perrin, diante de

uma investigação do processo de generalização, complexificação e combinatório desses números (campo epistêmico-matemático), no curso de

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000
Bairro: Rodolfo Teófilo **CEP:** 60.430-275
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3366-8344 **E-mail:** comepe@ufc.br

Formação Inicial e Continuada de Professores.
Objetivo Secundário:
• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Padovan e para a sequência polinomial de Padovan;
• Introduzir e descrever a abordagem combinatória para a sequência de Perrin e para a sequência polinomial de Perrin;
• Investigar e introduzir os teoremas, propriedades e definições matemáticas inerentes à generalização e complexificação das sequências de
Padovan e Perrin;
• Pesquisar, por intermédio de situações didáticas, os modelos combinatórios de Padovan e Perrin;
• Desenvolver e analisar, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, a construção do conhecimento epistemológico-matemático dos modelos
generalizados e combinatórios de Padovan e Perrin, mediante a elaboração de situações-problema em sala de aula.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos

Vale destacar que os riscos previstos são referentes a possibilidade de constrangimento ao responder o questionário; medo de não saber responder ou de ser identificado; estresse; quebra de sigilo;

Benefícios:

Os participantes terão a oportunidade de participar de situações didáticas possibilitando aos discentes da Licenciatura em Matemática e do Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT) desenvolver uma concepção epistemológica da História da Matemática através de estudos de definições, teoremas e propriedades matemáticas inerentes as sequências de Padovan e Perrin. Assim, contribuirão com a formação inicial dos professores de
Matemática, evoluindo o pensamento intuitivo matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto em questão está com a escrita razoável. Porém, de boa leitura e entendimento. Está incluído desenho do estudo, introdução, objetivos, metodologia, cronograma de atividades, orçamento e outros. A documentação exigida pela RESOLUÇÃO 466/2012/CNS/MS que regulamenta os estudos aplicados aos seres humanos está incluída.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ PROPESQ - UFC

Continuação do Parecer: 6.528.207

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos de apresentação do trabalho estão coerentes com o tema abordado e o rigor da ética em pesquisa.

Recomendações:

O projeto de pesquisa está devidamente instruído para que o mesmo seja executado. Portanto o parecer é favorável à sua APROVAÇÃO.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2213922.pdf	19/09/2023 11:39:49		Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto.pdf	19/09/2023 11:39:32	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	AutorizacaoUECE.pdf	19/09/2023 08:00:47	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	AutorizacaoURCA.pdf	14/09/2023 16:11:53	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Outros	apreciacao.pdf	14/09/2023 09:09:36	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo2.pdf	14/09/2023 09:06:57	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto_de_pesquisa_renata2.pdf	14/09/2023 09:05:02	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Outros	Lattes.pdf	14/09/2023 09:02:25	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Orçamento	orcamentoass.pdf	14/09/2023 09:01:33	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Declaração de concordância	concordancia2.pdf	14/09/2023 09:00:52	Renata Passos Machado Vieira	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA.pdf	14/09/2023 08:59:40	Renata Passos Machado Vieira	Aceito

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000
Bairro: Rodolfo Teófilo **CEP:** 60.430-275
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3366-8344 **E-mail:** comepe@ufc.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ PROPESQ - UFC

Continuação do Parecer: 6.528.207

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

FORTALEZA, 23 de Novembro de 2023

Assinado por:
FERNANDO ANTONIO FROTA BEZERRA
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000
Bairro: Rodolfo Teófilo **CEP:** 60.430-275
UF: CE **Município:** FORTALEZA
Telefone: (85)3366-8344 **E-mail:** comepe@ufc.br