UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GUTTENBERG SERGISTÓTANES SANTOS FERREIRA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: ASPECTOS HISTÓRICOS E UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS ALGÉBRICOS, GEOMÉTRICOS E COMPUTACIONAIS DE SOLUÇÕES

FORTALEZA
2014

GUTTENBERG SERGISTÓTANES SANTOS FERREIRA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: ASPECTOS HISTÓRICOS E UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS ALGÉBRICOS, GEOMÉTRICOS E COMPUTACIONAIS DE SOLUÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA

2014

GUTTENBERG SERGISTÓTANES SANTOS FERREIRA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: ASPECTOS HISTÓRICOS E UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS ALGÉBRICOS, GEOMÉTRICOS E COMPUTACIONAIS DE SOLUÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

Aprovada em: _____/ _____/ _____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. José Rogério Santana
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará - UECE

A meus pais, que sempre acreditaram que a Educação é o melhor caminho, que oportunizaram o meu constante aprendizado, isto tudo também foi por vocês!

A Maria Edna, incansável guerreira que sempre esteve ao meu lado, seja me apoiando, me estimulando ou me orientando: Obrigado! (sem você isto não seria possível...)

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me permitiu a vida e me orienta a cada dia.

Ao meu orientador, prof. Dr. José Othon Dantas Lopes, por toda a inspiração e ajuda dispensada a mim, pela colaboração, paciência e humildade explicitadas durante toda esta jornada.

A todos os meus professores do programada de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA – por todo o saber transmitido durante o curso e, principalmente, por contribuir significativamente para o meu crescimento enquanto profissional docente.

Aos colegas da turma 2011.2, com quem passei excelentes momentos, em especial a Edneide Silva, Francisco José, Odijas Elery e José Cláudio.

Aos meus pais, pela vida concedida, pelo amor e pela força durante toda esta jornada.

A Maria Edna, minha esposa amada, que sempre esteve ao meu lado me apoiando, e que sem ela, este sonho ainda seria apenas um sonho.

Aos meus irmãos, Klayrton Rommell e Charlys Myrelly, os outros dois terços da nossa casa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – por fornecer subsídios durante todo o curso.

Aos meus alunos, que sempre me entenderam e me ajudaram durante todo o curso.

RESUMO

Este estudo propõe a discussão sobre Equações Algébricas, objetivando realizar um estudo sobre as demonstrações das fórmulas, abordando desde aspectos históricos até os diversos métodos de resolução de problemas, neste caso, os métodos trabalhados foram o Algébrico, o Geométrico e o Computacional. Esta pesquisa se baseou num estudo bibliográfico sobre as dificuldades de realizar as demonstrações das fórmulas trabalhadas nos conteúdos de matemática, bem como nas demonstrações propriamente ditas, aliadas a diversos exemplos resolvidos. A análise do material bibliográfico permitiu distribuir este estudo através do Método Algébrico de resolução de problemas, em que se discutiu a demonstração e aplicação das fórmulas resolutivas das equações polinomiais de 1º, 2º, 3º e 4º graus, e ainda citando a impossibilidade da existência de fórmulas para equações de grau $n > 4$. No estudo sobre o Método Geométrico, percebeu-se como a geometria está eficientemente presente na resolução de problemas e que as soluções são possíveis apenas através de régua e compasso, neste tópico foram abordados métodos para resolução de equações polinomiais de 1º e 2º graus. Sobre o Método Computacional, foi enfatizado o estudo sobre os métodos iterativos de resolução, que são processos de aproximações sucessivas, para o cálculo de zeros da função, neste item foram discutidos os métodos de Newton, bisseção, secante, cordas e ponto fixo, de modo que ao final do tópico foram comparados os métodos sob os aspectos de garantia e agilidade de convergência e esforço computacional. Os resultados conseguidos indicaram a importância do tema de resolução de problemas com ênfase nas demonstrações das fórmulas, e que a contextualização histórica pode contribuir para desmitificar o processo de criação e humanização da matemática.

Palavras-chave: Equações Algébricas, Métodos de Resolução, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This study proposes a discussion of Algebraic Equations, aiming to conduct a study on the statements of the formulas, addressing the historic aspects to the various methods of problem solving, in this case, the methods were worked Algebraic, Geometric and Computational. This research was based on a literature study of the difficulties of performing demonstrations of formulas worked in the contents of mathematics as well as in the statements themselves, together with many worked examples. The analysis of the bibliographic material allowed to distribute this study by the method Algebraic problem-solving, in which they discussed the demonstration and application of resolving formulas of polynomial equations of 1st, 2nd, 3rd and 4th grades, and even citing the impossibility of the existence of formulas equations above 4 degree. In the study of the geometric method, we noticed how this geometry efficiently present in solving problems and those solutions are possible only by ruler and compass, this topic was discussed methods for solving equations of 1st and 2nd grade. About Computational Method, the study on the iterative resolution methods that are processes of successive approximations for the calculation of zeros of the function, this item was discussed methods of Newton, bisection, secant, and ropes fixed point was emphasized in so that at the end of the topic the methods under warranty and agility aspects of convergence and computational effort were compared. The achieved results show the importance of the topic of problem solving with emphasis on the statements of the formulas, and the historical context can help to demystify the process of creating and humanization of mathematics.

Keywords: Algebraic Equations, Resolution Methods, Teaching of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A educação escolar, no que se refere à Matemática, enfrenta uma série de obstáculos, tais como memorização exaustiva de fórmulas e teoremas, falta de aplicações práticas de alguns dos tópicos abordados e dificuldades na dedução de fórmulas e compreensão da teoria relacionada às mesmas. Desta forma, os estudantes de matemática desde os primeiros anos na educação básica no ensino fundamental ou no ensino médio, e por fim no ensino superior, são levados a praticar a resolução de problemas por meio de fórmulas diversas, de modo que estas resoluções são apenas numéricas, inexistindo o incentivo à dedução algébrica e à contextualização histórica sobre o processo de criação (descoberta) destas fórmulas e/ou teoremas. Esta prática de deduzir e generalizar o pensamento matemático ocorre, com maior ênfase, no ensino superior, principalmente em cursos de bacharelado em Matemática, de modo que nestes cursos há a necessidade de provar e conjecturar os temas estudados. Esta ação contribui diretamente para o desenvolvimento constante da Matemática e auxilia na evolução de outras áreas do conhecimento.

Os cursos de licenciatura em Matemática, responsáveis pela formação de inicial docente, lidam cotidianamente com a missão de contribuir para o desenvolvimento da Matemática e com a preparação pedagógica dos seus estudantes para o pleno exercício da docência. Estes estudantes, quando concluem o curso e vão exercer a profissão de professor , percebem que não existem ações permanentes que fomente a dedução e o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático na escola.

Ao longo de pouco mais de uma década de experiência profissional docente, pude observar que alguns dos livros de matemática destinados à educação básica, especialmente no ensino médio, não trazem todas as demonstrações das fórmulas utilizadas. Analisando as coleções de livros para o ensino médio dos autores Luis Roberto Dante (2004, Editora Ática), Katia Stocco Smole (2005, Editora Saraiva), José Ruy Giovanni (2005, Editora FTD), Manoel Paiva (2005, Editora Moderna), Carlos Alberto Marcondes (2003, Editora Ática) e Claudio Xavier da Silva (2005, Editora FTD), pude perceber que alguns tópicos são mais facilmente trabalhados por estes autores e que, nestes casos, as demonstrações são devidamente explicitadas ao estudante; mas vários outros tópicos não trazem as devidas demonstrações e/ou o fazem de forma muito tímida e simplória, evitando a conjectura e a evolução dos raciocínios dedutivo e indutivo no estudante. Deste modo, resta ao estudante apenas o hábito de decorar e exercitar a resolução de problemas e, sendo assim, algumas das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em matemática não são cumpridas, revelando fragilidades na sistemática do ensino de matemática.

Dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, pode-se citar a identificação e interpretação de problemas, a discussão de ideias, a relação entre a história da matemática e a evolução da humanidade, a distinção e o uso entre raciocínios dedutivo e indutivo, ou ainda, fazer e/ou validar conjecturas, bem como formular hipóteses e prever resultados.

Com o intuito de auxiliar os licenciandos em matemática a conhecerem demonstrações de fórmulas para solução de equações algébricas, aliada à contextualização histórica, estimular o desenvolvimento desta prática, e ainda utilizar os métodos algébrico, geométrico e computacional para resolução de problemas, sob a perspectiva de tornar o estudo sobre provas e demonstrações mais consistente e atrativo, é que se propôs este trabalho tendo por objetivo geral realizar um estudo sobre demonstrações de fórmulas e apresentação dos métodos algébrico, geométrico e computacional para resolução de equações e problemas algébricos, evidenciando os aspectos dedutivo e indutivo a partir do levantamento histórico. Para conseguir êxito nesta ação, procurou-se de forma específica realizar uma revisão de literatura que envolvesse demonstrações de fórmulas e apresentação de métodos para solução de equações algébricas; analisar as resoluções dos problemas propostos no intuito de encontrar dificuldades de compreensão; apresentar os métodos algébrico, geométrico e computacional para o desenvolvimento de soluções de problemas evidenciando seu aspecto histórico; e, ao fim, elaborar uma apostila que contenha demonstrações e métodos de solução a fim de colaborar no desenvolvimento desta temática junto aos licenciandos em matemática.

A partir desta ação, espera-se que o estudante desperte em si maior apreço por este tema e, com isso, seja estimulado a desenvolver e/ou verificar variadas formas de resolução de situações-problema no seu estudo cotidiano sobre matemática. Enfim, estima-se divulgar os processos de conjectura e formalização do pensamento matemático, a partir dos quais se espera que o estudante consiga um acréscimo no desenvolvimento de todas as faculdades inerentes ao saber matemático, ao passo que se estimula o raciocínio lógico-matemático e contribui para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

A compreensão de questões sobre os mais diversos temas se inicia com a pesquisa e através deste instrumento o pesquisador formula hipóteses visando dar suporte à conjectura de teses, que contribuem para o progresso do conhecimento. Entende-se que o objetivo da pesquisa é discutir a realidade educacional a partir dos dados obtidos. Estes dados são obtidos através de documentos diversos, tais como livros, artigos científicos, revistas especializadas, periódicos e/ou internet, usados como fonte de referência, nos quais se realizaram estudos analíticos. O caminho seguido almejando o pleno desenvolvimento deste trabalho se deu através de uma pesquisa bibliográfica de cunho exploratório, visando à fundamentação sobre a temática abordada, a partir do qual foi possível identificar e estabelecer relações históricas com o conhecimento já produzido, no sentido de analisar as demonstrações existentes e apresentar as mais diversas abordagens para o desenvolvimento de soluções de problemas.

Este trabalho de dissertação está estruturado em quatro tópicos. No primeiro, apresenta-se o embasamento teórico sobre os estudos de provas e demonstrações, vista aqui como prática de experimentação em matemática, bem como uma fundamentação teórica acerca do uso de história da matemática, vista aqui como recurso pedagógico de contextualização e humanização do processo lógico matemático, ambos de extrema importância no cotidiano do estudante. No segundo tópico é apresentado o método algébrico de resolução de equações, descrevendo desde as demonstrações de equações do 1º grau até as de equações do 4º grau e o cenário histórico em que se ocorreram estes estudos. No terceiro tópico, abordamos o método geométrico através do método de Descartes para resolução de equações quadráticas e do método de Cardano para resolução de equações cúbicas e, por fim, no quarto tópico é desenvolvido o método computacional abordando os métodos de Newton, da secante, da bissecção, das cordas e do ponto fixo, realizando, ao fim, um estudo comparativo entre estes métodos.

O propósito maior desta dissertação, e da apostila contidas nos CD correspondentes, é servir de subsídio para estudos futuros sobre equações algébricas e seus métodos de resolução, visando proporcionar um maior desenvolvimento nos hábitos de conjecturar, provar e demonstrar aos licenciandos em matemática, fornecendo-lhes material que pode ser utilizado para solidificar ainda mais a sua educação superior, o que pode propiciar uma prática docente diferenciada.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 A Matemática enquanto ciência

No Brasil a educação escolar foi dividida em Educação Básica (composta por educação infantil, ensino fundamental e ensino médio) e Educação Superior devido à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB – Lei 9.394/96). Segundo BRASIL (2002), o conhecimento proposto à Educação Básica foi escalonado em três grandes áreas do conhecimento, a saber: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias, e Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Como parte integrante desta área do conhecimento a matemática é vista como linguagem que une as mais diversas ciências, "contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui o caráter apenas formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais e específicas." (BRASIL, 2002, p. 252).

A partir dessa visão sobre o ensino de matemática, destacando-a como Ciência, foi que nos últimos anos houve um aumento exponencial no número de estudos em Educação Matemática sobre provas e demonstrações, de tal forma que estes estudos apareceram como objeto de muitas discussões em vários programas de pós-graduação em Matemática e em Educação Matemática. De acordo com Nagafuchi e Batista (2012, p. 2) "um dos possíveis motivos da explosão de pesquisas sobre provas e demonstrações foi a inclusão das demonstrações no currículo da educação básica em países como Estados Unidos, Canadá e Inglaterra". Este fato já tinha sido percebido por Pietropaolo (2005) quando afirmou que este grande número de pesquisas realizadas se deu devido à inclusão deste tema nos currículos da educação básica, apesar de a maior parte destes estudos ainda não ocorrer no Brasil.

Uma vez assumida a condição de ciência surge na matemática a ideia de laboratório de práticas. Neste contexto educacional as ideias de conjectura e formulação de hipóteses aparecem como parte integrante essencial do processo de experimentação da matemática. De acordo com Lorenzato (2006) é na experimentação que o estudante se envolve com o tema estudado, favorecendo inclusive a socialização, além de levar o discente à reflexão, provocando o raciocínio e a construção do conhecimento através de novas proposições. Portanto, as demonstrações de fórmulas para solução de equações algébricas, bem como os diferentes métodos de resolução de problemas, podem e devem ser considerados fatores preponderantes para a disseminação do conhecimento matemático.

Devido ao tratamento científico dado à matemática, é importante que haja uma abordagem sobre a História de Matemática aliado aos conceitos de prova e demonstração. A partir dessa associação de ideias, além de conseguir conjecturar em matemática, os estudantes tanto na educação básica quanto na educação superior, podem realizar uma contextualização histórica, que vai facilitar e desmistificar o seu processo criativo.

2.2 Equações Algébricas

Este estudo trata da resolução de equações algébricas a partir das abordagens algébrica, geométrica e computacional. Deste modo, faz-se necessário definir os tipos de equações que existem, a saber: equações algébricas e equações transcendentes. Sendo assim, de acordo com Garbi (2010b), temos que:

a) equações algébricas são aquelas em que as incógnitas são submetidas apenas às operações algébricas mais elementares, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação;
b) equações transcendentes são aquelas em que as soluções não podem ser expressas através de funções elementares.

A partir destas definições, percebe-se que as equações algébricas são aquelas que são resolvidas com o uso de funções polinomiais, enquanto que as equações transcendentes se utilizam de métodos computacionais. Do mesmo modo mostramos que os números reais também seguem esta organização, de acordo com Garbi (2010b, p. 194) podemos "[...] classificar os números reais em duas categorias: os algébricos (que são as raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros) e os transcendentes, que não o são (o nome transcendente vem do fato de que eles transcendem as operações da Álgebra)".

O significado prático de resolver uma equação algébrica é, na verdade, calcular sua(s) raiz(es) ou zero(s) da função, ou seja, determinar para quais valores a equação se torna nula. As equações algébricas podem ser representadas por polinômios da forma,

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n .$$

Segundo Contador (2008b), deve-se a Gauss[1] a descoberta do Teorema Fundamental da Álgebra, chamado inicialmente de *Uma nova demonstração do teorema de que toda equação algébrica racional inteira em uma variável pode ser decomposta em fatores*

[1] Carl Friedrich Gauss, matemático alemão (1777 - 1855)

reais de primeiro ou segunda graus, indicando que toda equação polinomial $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 0$, de grau n $(\mathrm{n} \geq 1)$, possui n raízes complexas.

2.3 Estudos sobre provas e demonstrações

O desejo de obter a verdade e, com isso, validar os resultados matemáticos se tornou o anseio de muitos matemáticos ao longo da história. Provas e demonstrações não eram divulgadas ao público em geral, apenas alguns especialistas se preocupavam com essa temática. De acordo com Pietropaolo (2005) nos últimos anos, houve um acréscimo na preocupação de tornar tais provas mais claras e mais abrangentes a todos os níveis de ensino. Para Silva e Sales (2009) estas provas e demonstrações são de extrema importância no processo educacional, entretanto o seu desenvolvimento passa por dificuldades, tais como a falta de maturidade dos educandos e a carência desta temática nos livros didáticos. Apesar dos empecilhos que porventura existam no desenvolvimento das provas e demonstrações em sala de aula, este ato educacional deve ocorrer constantemente,

> Uma vez que a Matemática não é uma ciência experimental, tal como a Física e a Química, porque, ao contrário do que ocorre com estas disciplinas, a Matemática está entremeada de fatores abstratos que podem ser compreendidos por meio de suas provas e argumentações teóricas. Deste modo é importante que provas e argumentações figurem no currículo escolar (MENDES, L.J., 2007, p. 18).

A compreensão do raciocínio lógico matemático segue algumas etapas, que são a explicação, a prova e demonstração. Em seus estudos Almouloud (2007, p. 2) destaca que "usualmente, consideramos a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais [...]", corroborando Balacheff (1988) quando "[...] releva a importância da demonstração como único meio de legitimar uma hipótese matemática". Desta forma, afirma-se que,

> A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição verdadeira ou não (ALMOULOUD, 2007, p. 3).

E como a ideia de "prova" permeia todo e qualquer estudo sobre matemática, faz-se necessário a sua definição. Segundo Balacheff (1982) existem dois tipos de provas, são elas:

a) prova pragmática: experiência empírica que leva o estudante a aceitar algumas afirmações;

b) prova intelectual: experiência com deduções e com o formalismo adequado, sendo aceita por toda a comunidade acadêmica.

Outra definição de prova é apontada por Garbi ao citar que:

> Prova é uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas (GARBI, 2010a, p. 33).

Em outros estudos sobre provas e demonstrações, Balacheff (1988) aponta para uma classificação composta por quatro formas de validação do pensamento matemático, são elas:

a) empirismo ingênuo: aponta a verdade de uma proposição após análise de alguns casos, sendo que estes casos podem ser validados sem muito rigor, e por isso, é considerado o início do processo de generalização;
b) experimento crucial: é a validação feita através de um único exemplo, normalmente um experimento novo, alheio ao conhecimento do estudante, mas ainda sem conseguir generalizar;
c) exemplo genérico: ocorre quando se estudam vários exemplos, aos quais após haver a manipulação devida, percebe-se que existem propriedades semelhantes entre estes exemplos, e que estas propriedades encerram uma generalidade;
d) exemplo genérico: ocorre quando se estudam vários exemplos, aos quais após haver a manipulação devida, percebe-se que existem propriedades semelhantes entre estes exemplos, e que estas propriedades encerram uma generalidade;
e) experimento mental: ocorre quando o estudante já consegue generalizar e passa a argumentar em linguagem natural, sendo este estudo baseado em casos específicos.

De acordo com Almouloud (2007) existe um consenso entre os educadores matemáticos, e até mesmo entre os próprios matemáticos, estabelecendo que as demonstrações sejam a parte mais importante da matemática, pois estas estabelecem a validade de uma afirmação matemática; mais que isso, pode apresentar novos métodos, ferramentas e estratégias para aplicabilidades em matemática. Fossa (2009, p. 48) ainda destaca que "demonstrar não é um ato mecânico e sim um ato criativo". Deste modo, entende-se que,

> A demonstração é teórica e restrita a uma comunidade em particular, que tenha uma linguagem em comum, partindo de axiomas (postulados) e teoremas tem por fim uma única verdade sem deixar espaço para dúvidas a respeito de sua validação. Enquanto a argumentação não fica limitada a um campo do saber. A demonstração visa uma comunidade especial que se interessa pelo estudo da matemática (SILVA E SALES, 2009, p. 2).

2.4 O recurso da História da Matemática

Nos últimos anos a comunidade matemática vem consolidando a temática de História da Matemática como uma das tendências em Educação Matemática. Mendes, I. A. (2012, p. 466) afirma que "no que diz respeito ao movimento científico/acadêmico da História da Matemática no Brasil podemos admitir que esse campo de pesquisa é bastante recente, tendo se estruturado a partir de 1995". Mendes, I. A. (*Ibid.*, p. 469) aponta ainda que os trabalhos desenvolvidos se concentram em três grandes áreas, sendo elas: História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino de Matemática.

Em seus estudos, Santos, Souza e Nunes (2011, p. 3) corroboram estas informações e identificam que existe "[...] uma escassez de livros didáticos que usam a história da matemática como recurso metodológico de ensino". E que o uso da história da matemática, como instrumento pedagógico para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem em matemática, apresenta dificuldades para uso cotidiano pelos professores, pois os mesmos relatam que não houve muito empenho em sua formação ou as experiências com relação a esta tendência de ensino foram insuficientes. Apesar destas dificuldades, deve-se usar do recurso da contextualização histórica para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, estando prevista como competência e habilidade nos PCN's (BRASIL, 2002, p. 259) ao orientar que devemos "relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade".

Percebe-se que a matemática chega aos estudantes de forma fragmentada, como um conteúdo pronto e acabado, ao qual não cabe discussão sobre os métodos que levaram à construção dos seus teoremas e nem ao contexto histórico em que tais descobertas e estudos ocorreram. Deste modo os conhecimentos matemáticos aparecem descontextualizados e, aparentemente, sem função de contribuir para o desenvolvimento da humanidade. Sendo assim, a matemática, enquanto disciplina,

> [...] aparece descontextualizada e isolada das outras disciplinas, como se seus conteúdos fossem um mundo à parte, sem relação com os demais saberes que envolvem a escola e a própria vida dos estudantes. Entende-se que os conhecimentos matemáticos não surgiram sistematizados com algoritmos prontos que podem ser aplicados em situações com ou sem significado real, mas são construções humanas originadas na necessidade de resolver uma situação concreta (LOPES E FERREIRA, 2012, p. 2).

Uma solução possível para este desconexo entre a matemática e as outras disciplinas se dá através do uso adequado de tópicos de História da Matemática. Entretanto é preciso fazer ponderações quanto ao seu uso, pois o uso indevido ou mal planejado pode atrapalhar o desenvolvimento do raciocínio do estudante, ao passo que não se aprende os conteúdos de matemáticos a que se propõe estudar. Lopes e Ferreira (2012, p. 4) apontam que "um equívoco frequente ocorre ao utilizar-se a História da Matemática apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes famosos e datas".

Entretanto, de acordo com Santos, Souza e Nunes (2011, p. 10), "a contextualização histórica, ao fornecer as ideias primeiras de determinados assuntos, potencializa o aluno a ter uma visão ampla de tais assuntos, favorecendo a apreensão dos conceitos específicos relacionados ao contexto histórico apresentado". Os benefícios educacionais do uso de História da Matemática no cotidiano escolar são vários, dentre estes, Lopes e Ferreira (2012) destacam: a percepção (do ponto de vista discente) de que a Matemática é uma ciência desenvolvida pela humanidade e, por isso, passível de erros; uma ciência que se desenvolve a partir de problemas concretos; a construção da criticidade sobre os temas abordados. Corroborando com este pensamento, alguns objetivos do uso da História da Matemática são indicados como sendo:

> a) propiciar ao aluno o conhecimento da história dos conceitos matemáticos;
> b) propiciar ao aluno a percepção de que o conhecimento matemático é fruto do trabalho de várias gerações de pensadores;
> c) fazer com que o aluno estabeleça relações entre a origem de um conceito matemático e o contexto sociocultural onde isto se deu. (Nobre, 2012, p. 511)

O uso cotidiano de História da Matemática em sala de aula vem propiciar reflexões junto aos estudantes sobre o desenvolvimento dessa ciência (a Matemática), que pode lhes estimular a investigar o conhecimento matemático, ao passo que consegue fornecer a contextualização necessária para compreender diferentes épocas do desenvolvimento científico. Deste modo, pode-se afirmar que o recurso pedagógico de tópicos de história em aulas de matemática, vem trazer benefícios aos estudantes.

3 O MÉTODO ALGÉBRICO DE RESOLUÇÃO

Neste tópico será trabalhado o método algébrico de resolução de equações de 1º, 2º, 3º e 4º graus aliado a sua contextualização histórica, enfatizando a demonstração das fórmulas resolutivas e aplicando o referido método para resolução de alguns problemas. Este método consiste, basicamente, na utilização e/ou devida manipulação de fórmulas matemáticas, com vistas a encontrar as raízes das equações supracitadas.

3.1 Equação de 1º grau

A problemática acerca da resolução das equações de 1º grau foi resolvida a partir das proposições de Euclides[2] em sua obra célebre: *Os Elementos*. Nesta obra, precisamente no Livro I, Euclides propõe seus axiomas[3], dentre eles:

a) entidades iguais a uma terceira são iguais entre si;
b) se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais;
c) iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Representando algebricamente estes axiomas tem-se:

a) Se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$;
b) Se $a = b$ então $a + c = b + c$ ou $a - c = b - c$;
c) Se $a = b$ então $a \cdot c = b \cdot c$ ou $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (com $c \neq 0$).

A partir deste raciocínio, resoluções de equações de 1º grau se tornaram elementares. A equação genérica de uma equação do 1º grau é dada por:

$$ax + b = c, (a \neq 0) \tag{1}$$

Equações como esta podem ser resolvidas seguindo os axiomas de Euclides, de modo que,

$$ax + b = c, (a \neq 0)$$
$$ax + b - b = c - b$$
$$ax = c - b$$

[2] Euclides de Alexandria, matemático da qual não se conhece sua nacionalidade, nem sua data de nascimento, estima-se que sua morte ocorreu por volta de 300 a.C.
[3] Axioma é uma proposição aceita sem demonstração.

$$\frac{ax}{x} = \frac{c - b}{a}$$

$$x = \frac{c - b}{a} \tag{2}$$

De acordo com Contador (2008a), os axiomas de Euclides não só possibilitaram esta resolução, como também permitiram aos matemáticos futuros a base para a resolução de toda e qualquer forma de equação, independentemente de seu grau de complexidade.

3.1.1 Resolução de equação de 1º grau

Exemplo 1 – Determinar a raiz da equação 3x + 2 = 8.

Solução: sendo a = 3, b = 2, c = 8 e usando a fórmula (2), temos:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

$$x = \frac{8 - 2}{3}$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

Exemplo 2 – Determinar um número que somado com sua metade é igual a 15.

Solução: equacionando o problema temos:

$$x + \frac{x}{2} = 15$$

$$2x + x = 30$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$\mathbf{x = 10}$$

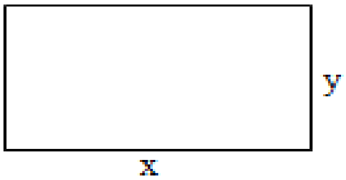
3.2 Equação de 2º grau

Os primeiros relatos sobre problemas cuja solução depende do uso de equações de 2º grau estão associados aos babilônios[4]. De acordo com Contador (2008a, p. 80), "fontes

---

[4] Civilizações antigas que viveram na Mesopotâmia, entre elas: sumérios, acadianos, caldeus, dentre outras.

babilônicas antigas revelam a presença de equações do segundo grau e tudo indica que sua origem esteja relacionada com a vontade dos babilônios em querer saber qual a relação entre o perímetro e a área de um retângulo". Deste modo, supondo um retângulo de lados x e y, tem-se:



Em que o semiperímetro é dado por: $p = x + y$ (3) e a área é dada por $q = x \cdot y$. Tomando $y = \frac{q}{x}$ e substituindo na equação (3), tem-se:

$$x + \frac{q}{x} = p$$
$$x^2 + q = px$$
$$x^2 - px + q = 0 \qquad (4)$$

A partir de situações-problema semelhantes à descrita acima se iniciaram estudos em matemática que culminaram em equações de 2º grau, que eram resolvidas pelos babilônios. Entretanto, a fórmula da resolução de equações de 2º grau está ligada a Bhaskara[5], apesar de não ter sido criação sua pois, de acordo com Garbi (2010b), o próprio Bhaskara teria relatado, por meados do século XII, que a descoberta se devia a Sridhara[6]. Porém, segundo Contador (2008a), muitas pessoas produziram quase que simultaneamente a solução para estas equações, seja de modo algébrico, como Bhaskara ou Sridhara, ou então através do modo geométrico com o uso das cônicas, como Brahmagupta[7] ou Omar Khayyam[8], de modo que não se pode atribuir a um único homem esta descoberta.

O modo algébrico para resolver equações de 2º grau propõe isolar a incógnita da equação, uma vez feito isso, pode-se proceder segundo as proposições de Euclides. Desta forma, seja a equação quadrática genérica:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0) \qquad (5)$$

---

5 Bhaskara, matemático hindu (1114 – 1185).
6 Sridhara, matemático hindu (870 – 930).
7 Brahmagupta, matemático hindu (598 - 665)
8 Omar Khayyam, matemático hindu (1048 – 1123).

Portanto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Utilizando-se dos axiomas de Euclides, soma-se aos dois membros da equação a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$, com vistas formar um quadrado perfeito, segue que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (6)$$

A partir da fórmula (6), podem-se determinar as raízes da equação quadrática. Com isso, algumas aplicações que envolvem equações quadráticas puderam ser resolvidas, por exemplo, o cálculo de áreas; e problemas que discorrem sobre soma e produto de dois números, etc.

Além disso, a expressão $b^2 - 4ac$ recebeu o nome de discriminante, denotado pela letra grega Δ (delta), e possui a função de determinar a quantidade de raízes da equação quadrática. Apesar do avanço nestes estudos, ainda existia o caso em que $b^2 - 4ac < 0$ que não possuía solução, pois à época de Bhaskara não havia formas de descobrir raízes quadradas de números negativos. Este problema só seria solucionado por Bombelli[9], no século XVI, através de seus estudos sobre números complexos.

Um problema que envolve as equações de 2º grau remete ao cálculo de dois números dos quais se conhece sua soma e seu produto. Denotando os dois números por x e y, a soma de ambos por S e seu produto por P, obtém-se:

$$\begin{cases} x + y = S & (7) \\ x \, . \, y = P & (8) \end{cases}$$

De (7), tem-se que y = S – x, e substituindo (7) em (8), obtém-se,

$$x \, . (S - x) = P$$
$$xS - x^2 = P$$
$$x^2 - Sx + P = 0 \qquad (9)$$

Utilizando a equação de Bhaskara na equação (9), conclui-se que,

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \qquad (10)$$

E com isso, calcula-se o valor de y a partir de (7) e (8), como sendo,

$$y = S - x$$
$$y = S - \left(\frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}\right)$$
$$x = \frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \qquad (11)$$

3.2.1 Resolução de equação de 2º grau

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Solução: sendo a = 1, b = –3, c = 2 e usando a fórmula (6), temos:

---
9 Rafael Bombelli, matemático italiano (1526 – 1572)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2}$$

$$\mathbf{x_1 = 1}$$

$$x_2 = \frac{3 + 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{2}$$

$$\mathbf{x_2 = 2}$$

Exemplo 2 – Determinar as raízes da equação $2x^2 - 16x + 32 = 0$.

Solução: sendo a = 2, b = –16, c = 32 e usando a fórmula (6), temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(2)(32)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm 0}{4}$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x_1 = x_2 = 4$$

Exemplo 3 – Um grupo de estudantes deseja juntar o montante de R$ 360,00 para determinada atividade escolar. Este montante será dividido em partes entre os estudantes. Entretanto, após fazer a divisão das cotas, 4 estudantes desistiram de colaborar e com isso, o valor de cada cota sofreu um acréscimo de R$ 15,00. Determine a quantidade de estudantes do início da atividade escolar.

Solução: temos que a quantidade de estudantes é dada por x e cada cota inicial é dada por 360/x. Deste modo, com a desistência de 4 estudantes, a nova cota é dada por 360/(x – 4). Uma vez que a diferença entre cotas é de R$ 15,00, temos:

$$\frac{360}{x-4} - \frac{360}{x} = 15$$

$$\frac{360x - 360(x-4) = 15x(x-4)}{x(x-4)}$$

$$360x - 360x + 1440 = 15x^2 - 60x$$

$$15x^2 - 60x - 1440 = 0$$

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

Que recai numa equação de 2º grau com a = 1, b = –4 e c = –96, sendo assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-96)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 384}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 20}{2}$$

$$\mathbf{x_1 = 12}$$

$$\mathbf{x_2 = -8}$$

Deste modo, fica determinado que a quantidade de estudantes que iniciaram a atividade escolar era de 12 pessoas.

3.3 Equação de 3º grau

Assim como ocorreu com as equações do 2º grau, os babilônios reconheciam e resolviam equações de 3º grau. Segundo Contador (2008a, p. 83), “equações cúbicas do tipo $x^3 = a$, eram resolvidas com o auxílio de tabelas de cubos e raízes cúbicas. As equações do tipo $x^3 + x^2 = a$, também eram resolvidas referenciando-se tabelas”. Mas a comunidade matemática precisou aguardar até o séc. XIII para conhecer a fórmula que fornece as raízes da equação de 3º grau. Segundo Garbi (2010b), o precursor deste episódio foi Fibonacci[10], que ainda muito jovem viajou para o norte da África (tendo contato direto com a matemática árabe), além de Egito, Grécia, França e Constantinopla (hoje, Turquia), com isso obtendo conhecimento sobre vários sistemas de numeração, com o qual adquiriu grande habilidade na resolução de problemas.

Fibonacci recebeu do imperador da Itália, Frederico II em 1225, o desafio de resolver com apenas régua e compasso (ou seja, segundo as leis euclidianas) a seguinte equação:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \qquad (12)$$

De acordo com Contador (2008b), Fibonacci provou que não seria possível resolver tal equação seguindo apenas os ensinamentos de Euclides e ainda conseguiu uma aproximação bastante razoável para o problema, calculando x = 1,3688081075.

As equações do 3º grau, segundo Lima (1991), são aqueles da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0) \qquad (13)$$

Portanto, equivalente a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Considerando apenas as equações em que o coeficiente do termo x^3 é 1 e tomando $x = y - \frac{a}{3}$, com vistas a eliminar o termo de 2º grau, tem-se:

---

[10] Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci (filho de Bonacci) matemático italiano (1175 – 1250)

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Que é equivalente às equações cúbicas da forma

$$y^3 + py + q = 0 \tag{14}$$

Somente no século XVI foi que surgiram os protagonistas aptos a resolver equações do 3º grau. Segundo Garbi (2010b), por volta de 1510, Del Ferro[11] conseguiu um método geral para resolver equações cúbicas da forma (14). Mas não conseguiu publicar tal descoberta devido a sua morte. Coube a um de seus discípulos, Antonio Maria Fior[12], fazer o anúncio de tal feito matemático. Fior se utilizou de um costume da época entre os matemáticos: a proposição de desafios públicos. Como era um matemático sem muita expressão no cenário mundial, Fior decidiu desafiar Tartaglia[13] que já tinha um nome respeitado entre os matemáticos.

O desafio era composto de uma série de situações-problema, dentre os quais Fior, logicamente, só iria propor aqueles que envolvessem equações de 3º grau, para poder usar a descoberta de seu falecido mestre. Porém, Tartaglia conseguiu resolver todos os problemas propostos por Fior, que saiu do desafio humilhado e ridicularizado, por não ter a habilidade necessária para resolver os problemas propostos por Tartaglia, dentre os quais, equações do 3º grau do tipo:

$$x^3 + px^2 + q = 0 \tag{15}$$

Segundo Tartaglia, citado por Garbi (2010b, p. 33), "mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas

[11] Scipione del Ferro, matemático italiano (1465 – 1526)
[12] Antonio Maria Fior, matemático italiano
[13] Nicoló Fontana (Tartaglia), matemático italiano (1500 – 1557)

equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535”.

De acordo com Garbi (*Ibid*, p. 39), a resolução algébrica proposta por Tartaglia consiste numa divisão do problema em duas etapas. Supondo x = u + v, tem-se que,

$$x^3 = (u + v)^3$$
$$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$
$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$
$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(x)$$
$$x^3 - 3uv(x) - (u^3 + v^3) = 0 \qquad (16)$$

Uma vez que se deseja resolver a equação (14), basta fazer a comparação com a equação (16) de modo que:

$$p = -3uv$$
$$p^3 = -27u^3v^3$$
$$-\frac{p^3}{27} = u^3v^3 \qquad (17)$$

$$q = -(u^3 + v^3)$$
$$-q = (u^3 + v^3) \qquad (18)$$

Tem-se então a soma e o produto de dois números, o que recai numa equação de 2º grau, dada por:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Utilizando-se da equação de Bhaskara, obtém-se:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad (19)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad (20)$$

A partir de (19) e (20) e lembrando que x = u + v, tem-se que,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (21)$$

De acordo com Lima (1991), a expressão definida por $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ é determinante para se calcular o número de raízes, pois se D > 0 tem-se que uma raiz é real e as outras duas são complexas conjugadas; se D = 0 tem que as três raízes são reais mas ocorre uma repetição; e, se D < 0 então as três raízes são reais e distintas, entretanto, neste último caso, ao se utilizar a fórmula de Tartaglia recai-se noutra equação cúbica, sendo este caso chamado de irredutível.

3.3.1 Resolução de equação de 3º grau

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$.
Solução: sendo a = 1, b = –9, c = 23, d = –15, fazendo x = y + m e reduzindo a equação inicial para outra de forma $y^3 + py + q = 0$, temos:

$$m = -\frac{b}{3a}$$

$$m = -\frac{(-9)}{3(1)}$$

$$m = \frac{9}{3}$$

$$\mathbf{m = 3}$$

$$p = 3am^2 + 2bm + c$$

$$p = 3(1)(3)^2 + 2(-9)(3) + 23$$

$$p = 27 - 54 + 23$$

$$\mathbf{p = -4}$$

$$q = am^3 + bm^2 + cm + d$$

$$q = (1)(3)^3 + (-9)(3)^2 + (23)(3) + (-15)$$

$$q = 27 - 81 + 69 - 15$$

$$\mathbf{q = 0}$$

Deste modo a equação fica reduzida a:

$y^3 - 4y = 0$

$y(y^2 - 4) = 0$

$\mathbf{y_1 = 0}$

$y^2 - 4 = 0$

$y^2 = 4$

$y = \pm\sqrt{4}$

$y = \pm 2$

$\mathbf{y_2 = -2}$

$\mathbf{y_3 = 2}$

Uma vez que $x = y + m$, determinamos as raízes da equação:

$x_1 = 0 + 3 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 3}$

$x_2 = -2 + 3 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 1}$

$x_3 = 2 + 3 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 5}$

Resolvendo pela fórmula de Tartaglia e lembrando que x = y + m, temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + m$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + 3$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3}} + 3$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[2]{-\frac{64}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt[2]{-\frac{64}{27}}} + 3$$

$$x = \sqrt[3]{8\sqrt[2]{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-8\sqrt[2]{-\frac{1}{27}}} + 3$$

$$x = 2\sqrt[3]{\sqrt[2]{-\frac{1}{27}}} - 2\sqrt[3]{\sqrt[2]{-\frac{1}{27}}} + 3$$

$$\mathbf{x_1 = 3}$$

Uma vez que (x_1, x_2, x_3) é a solução da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, esta pode ser reescrita em função de suas raízes, e usando o fato de que $x_1 = 3$ segue que:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)x - (x_1x_2x_3) = 0$$

$$x^3 - (3 + x_2 + x_3)x^2 + (3x_2 + 3x_3 - x_2x_3)x - (3x_2x_3) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 3 + x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_2x_3 = 23 \\ 3x_2x_3 = 15 \end{cases}$$

Segue que,

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ x_2x_3 = 5 \end{cases}$$

Que resulta em uma equação de 2º grau em x_2 (ou x_3) da forma $(x_2)^2 - 6x_2 + 5 = 0$, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara, nos fornecendo as outras duas raízes, que são:

$$\mathbf{x_2 = 1}$$

$$\mathbf{x_3 = 5}$$

Exemplo 2 – Determinar as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Solução: neste caso a equação já se encontra na forma $x^3 + px + q = 0$, de modo que $p = -6$, $q = -9$, resolvendo pela fórmula de Tartaglia, temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt[2]{\left[\frac{(-9)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(-6)}{3}\right]^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt[2]{\left[\frac{(-9)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(-6)}{3}\right]^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt[2]{\frac{81}{4} + \left(-\frac{216}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt[2]{\frac{81}{4} + \left(-\frac{216}{27}\right)}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt[2]{\frac{2187 - 864}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt[2]{\frac{2187 - 864}{108}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt[2]{\frac{1323}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt[2]{\frac{1323}{108}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt[2]{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt[2]{\frac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1$$

$$\mathbf{x_1 = 3}$$

Uma vez que (x_1, x_2, x_3) é a solução da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, esta pode ser reescrita em função de suas raízes, e usando o fato de que $x_1 = 3$, segue que:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)x - (x_1x_2x_3) = 0$$

$$x^3 - (3 + x_2 + x_3)x^2 + (3x_2 + 3x_3 - x_2x_3)x - (3x_2x_3) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 3 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_2x_3 = -6 \\ 3x_2x_3 = 9 \end{cases}$$

Segue que,

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -3 \\ x_2 x_3 = 3 \end{cases}$$

Que resulta em uma equação de 2º grau em x_2 (ou x_3) da forma $(x_2)^2 + 3x_2 + 3 = 0$, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara, nos fornecendo as outras duas raízes, que são:

$$\mathbf{x_2 = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}}$$

$$\mathbf{x_3 = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2}}$$

3.4 Equação de 4º grau

A descoberta do modo de resolução de equações de 4º grau seguiu os mesmos moldes da equação de 3º grau, ou seja, através de um desafio proposto entre os matemáticos. A história nos remete ao século XVI, aproximadamente em 1545, quando Cardano[14] recebeu de Zuanne de Tonini da Coi[15] a missão de resolver a equação abaixo:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0 \tag{22}$$

De acordo com Contador (2008b), Cardano realizou várias tentativas para resolver tal equação sem, no entanto, obter êxito. O jovem Ferrari[16], servo de Cardano, recebia atenção especial do mestre por possuir uma inteligência excepcional, e coube a Ferrari a missão de desvendar os segredos da resolução de equações de 4º grau. Estas equações são do tipo

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0) \tag{23}$$

Uma vez que o problema proposto a Cardano era de uma equação incompleta do 4º grau, com $b = 0$, faz-se necessário transformar a equação completa em outra do tipo:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{24}$$

[14] Gerolano Cardano, matemático italiano (1501 – 1576)

[15] Zuanne Tonini da Coi, matemático da qual não se conhece sua nacionalidade, nem sua data de morte, estima-se o seu nascimento por volta de 1500

[16] Ludovico (Luigi) Ferrari, matemático italiano (1522 – 1560)

Escolhendo adequadamente x = y + m, tem-se que:

$$a(y + m)^4 + b(y + m)^3 + c(y + m)^2 + d(y + m) + e = 0$$

$$a(y^4 + 4y^3m + 6y^2m^2 + 4ym^3 + m^4) + b(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + \ldots$$
$$\ldots + c(y^2 + 2ym + m^2) + d(y + m) + e = 0$$

$$ay^4 + 4ay^3m + 6ay^2m^2 + 4aym^3 + am^4 + by^3 + 3by^2m + 3bym^2 + bm^3 + \ldots$$
$$\ldots + cy^2 + 2cym + cm^2 + dy + dm + e = 0$$

$$ay^4 + (4am + b)y^3 + (6am^2 + 3bm + c)y^2 + (4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d)y + \ldots$$
$$\ldots + (am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e) = 0 \qquad (25)$$

Com efeito, fazendo 4am + b = 0, com vistas a anular o termo y^3, temos que $m = -\frac{b}{4a}$. Desta forma, a partir de (24) com (25) obtém-se a correlação entre as equações completas do 4º grau e incompletas do tipo (24). De modo que:

$$p = 6am^2 + 3bm + c \qquad (26)$$
$$q = 4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d \qquad (27)$$
$$r = am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e \qquad (28)$$

Segundo Ferrari, citado por Contador (2008b, p. 46), "[...] Se eu conseguir trabalhar esta equação de modo a formar nos dois lados da igualdade um quadrado perfeito, me bastaria extrair a raiz quadrada e o problema estaria resolvido". De posse deste raciocínio, Ferrari trabalhou na equação (24) obtendo o seguinte resultado:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$
$$y^4 + py^2 + r = -qy$$
$$y^4 + py^2 + uy^2 + r = uy^2 - qy$$
$$y^4 + (p + u)y^2 + (r + v) = uy^2 - qy + v \qquad (29)$$

Para que os dois lados da equação (29) sejam quadrados perfeitos é necessário que os seus discriminantes sejam iguais a zero, sendo assim:

$$(p + u)^2 - 4.1.(r + v) = 0$$

$$p^2 + 2pu + u^2 - 4r - 4v = 0 \qquad (30)$$

$$(-q)^2 - 4uv = 0$$

$$v = \frac{q^2}{4u} \qquad (31)$$

Substituindo o valor de v da equação (31) na equação (30), obtém-se:

$$p^2 + 2pu + u^2 - 4r - 4\left(\frac{q^2}{4u}\right) = 0$$

$$p^2u + 2pu^2 + u^3 - 4ru - q^2 = 0$$

$$u^3 + 2pu^2 + p^2u - 4ru - q^2 = 0$$

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0 \qquad (32)$$

Obtém-se em (32) uma equação do 3º grau que pode ser solucionada através do método de Tartaglia. Após calcular as três raízes desta equação restam extrair as raízes quadradas de (29) obtendo a solução para equações de 4º grau, conforme a equação abaixo:

$$\sqrt{y^4 + (p + u)y^2 + (r + v)} = \pm\sqrt{uy^2 - qy + v} \qquad (33)$$

A partir deste raciocínio, apesar de complexo e trabalhoso, Ferrari conseguiu um método algébrico para extrair as raízes de equações e 4º grau, quer estas equações fossem completas ou incompletas.

3.4.1 Resolução de equação de 4º grau

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.

Solução: reconhecendo que a equação acima já se encontra na forma $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ e utilizando o método de Ferrari, temos:

$$x^4 + (p + u)x^2 + (r + v) = ux^2 - qx + v$$

$$x^4 + (-15 + u)x^2 + (24 + v) = ux^2 - (-10)x + v$$

$$x^4 - (15 - u)x^2 + (24 + v) = ux^2 + 10x + v$$

Fazendo $\Delta = 0$ em ambos os lados da equação, para se conseguir quadrados perfeitos, temos:

$$\begin{cases}(15 - u)^2 - 4(1)(24 + v) = 0 \\ (10)^2 - 4(u)(v) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}225 - 30u + u^2 - 96 - 4v = 0 \\ 100 - 4uv = 0\end{cases}$$

Uma vez que $100 - 4uv = 0$, tem-se que $4v = \frac{100}{u}$, segue que:

$$225 - 30u + u^2 - 96 - \frac{100}{u} = 0$$

$$u^2 - 30u + 129 - \frac{100}{u} = 0$$

$$u^3 - 30u^2 + 129u - 100 = 0$$

Esta equação possui raízes $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 25$ substituindo estas raízes em $x^4 - (15 - u)x^2 + (24 + v) = ux^2 + 10x + v$ obtemos os quadrados perfeitos desejados. Deste modo:

a) Se $u_1 = 1$ então $v = 25$, daí,

$$x^4 - (15 - 1)x^2 + (24 + 25) = 1x^2 + 10x + 25$$

$$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2$$

$$(x^2 - 7) = \pm\sqrt{(x + 5)^2}$$

$$x^2 - 7 = +(x + 5)$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\mathbf{x_1 = -3}$$

$$\mathbf{x_2 = 4}$$

Ou

$$x^2 - 7 = -(x + 5)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\mathbf{x_3 = -2}$$

$$\mathbf{x_4 = 1}$$

b) Se $u_1 = 4$ então $v = \frac{25}{4}$, daí,

$$x^4 - (15 - 4)x^2 + \left(24 + \frac{25}{4}\right) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2}$$

$$x^2 - \frac{11}{2} = +\left(2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\mathbf{x_1 = -2}$$

$$\mathbf{x_2 = 4}$$

Ou

$$x^2 - \frac{11}{2} = -\left(2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\mathbf{x_3 = -3}$$

$$\mathbf{x_4 = 1}$$

c) Se $u_1 = 25$ então $v = 1$, daí,

$$x^4 - (15 - 25)x^2 + (24 + 1) = 25x^2 + 10x + 1$$

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1$$

$$(x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2$$

$$(x^2 + 5) = \pm\sqrt{(5x + 1)^2}$$

$$x^2 + 5 = +(5x + 1)$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\mathbf{x_1 = 1}$$

$$\mathbf{x_2 = 4}$$

Ou

$$x^2 + 5 = -(5x + 1)$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$\mathbf{x_3 = -3}$

$\mathbf{x_4 = -2}$

De modo que as raízes da equação são (–3, –2, 1, 4).

3.5 Equação de grau n > 4

Após as descobertas das fórmulas resolutivas das equações de 3º e 4º graus, restou à comunidade acadêmica discutir a existência ou inexistência de fórmulas algébricas para solução de equações de grau maior ou igual a 5. O matemático Évariste Galois[17], mostrou que existem polinômios de grau 5 e de qualquer grau maior que 5 cujas raízes não podem ser encontradas usando radiciação e as operações aritméticas, mostrando com isto que é impossível encontrar fórmulas algébricas com as quais possamos resolver todas as equações de grau 5 ou de qualquer grau maior ou igual a 5.

> Inspirado pela prova de Abel[18] da insolubilidade por radicais da equação quíntica, Galois descobriu que uma equação algébrica irredutível é resolúvel por radicais se e só se seu grupo – isto é, o grupo simétrico sobre suas raízes – é resolúvel. [...] Lagrange[19] já tinha mostrado que a ordem de um subgrupo deve ser um fator da ordem do grupo; mas Galois foi mais fundo e achou relações entre a fatorabilidade do grupo de uma equação e resolubilidade da equação (Boyer, 2010, p. 366)

[17] Évariste Galois, matemático francês (1811 – 1832)
[18] Niels Henrik Abel, matemático norueguês (1802 – 1829)
[19] Joseph Louis Lagrange, matemático italiano (1736 – 1813)

4 O MÉTODO GEOMÉTRICO DE RESOLUÇÃO

Neste tópico será realizada uma discussão sobre a resolução de equações algébricas através do método geométrico, ou seja, formas de resolver as equações algébricas com o auxílio do estudo geométrico, como assim o fizeram Descartes[20] para a equação quadrática e Cardano para a equação cúbica. Ao longo do texto existe a contextualização histórica, enfatizando a demonstração dos referidos métodos e como aplicá-los na resolução de alguns problemas. Utilizou-se do software livre GeoGebra® para se realizar todas as construções geométricas necessárias à resolução dos problemas pertinentes.

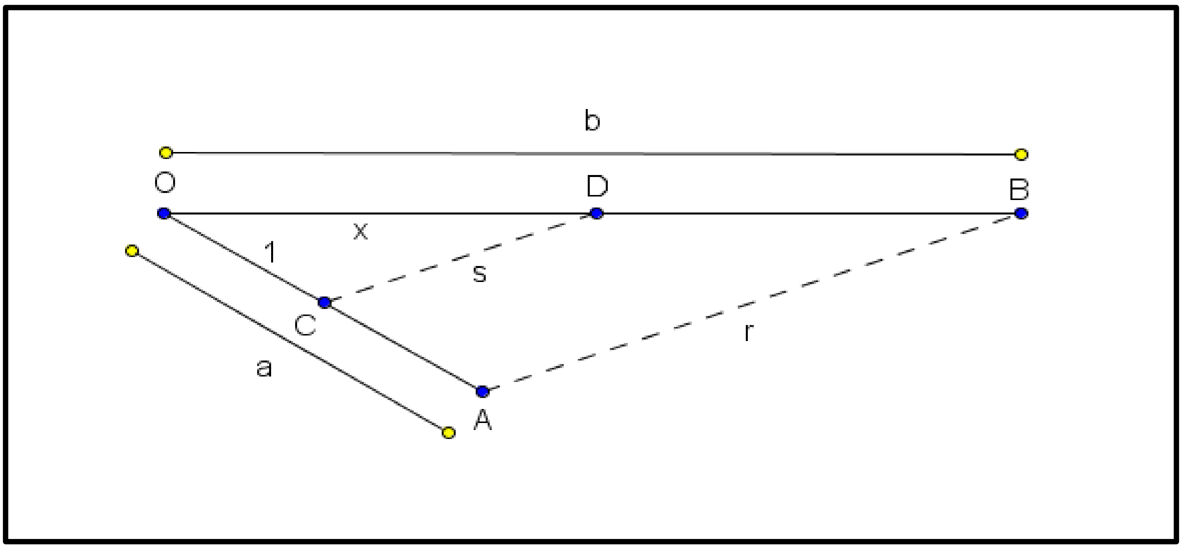
4.1 Método para resolução da equação de 1º grau

As equações de 1º grau, do tipo $ax \pm b = 0$, cuja solução algébrica é orientada pelas proposições de Euclides, também possui uma abordagem geométrica para o cálculo das suas raízes. Este método de resolução faz referência à semelhança de triângulos, utilizando o teorema de Tales[21] sobre proporcionalidade de segmentos paralelos cortados por transversais.

Esta construção geométrica se inicia com dois segmentos de reta, partindo da origem, um de comprimento b (segmento $\overline{OB}$) e outro com comprimento a (segmento $\overline{OA}$). Em seguida deve-se traçar um novo segmento de reta ($\overline{AB}$), denotado por r, unindo os extremos de $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$. No segmento $\overline{OA}$, marca-se um ponto C, de comprimento igual a 1 unidade, e sobre este ponto deve-se traçar um novo segmento de reta, denotado por s, que é paralelo segmento $\overline{AB}$. O segmento s faz intersecção com $\overline{OB}$ no ponto D, de comprimento x, que é a solução da equação desejada. Percebendo que os triângulos ΔAOB e ΔCOD são semelhantes, pode-se determinar a raiz de uma equação de 1º grau a partir da Figura 1 abaixo:

[20] René Descartes, matemático francês (1596 – 1650)
[21] Tales de Mileto, matemático grego (640 – 550 a.C)

Figura 1 – Semelhança de triângulos para resolução de equações de 1º grau



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra

Utilizando o teorema de Tales sobre proporcionalidade, temos que:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{b}{a}$$

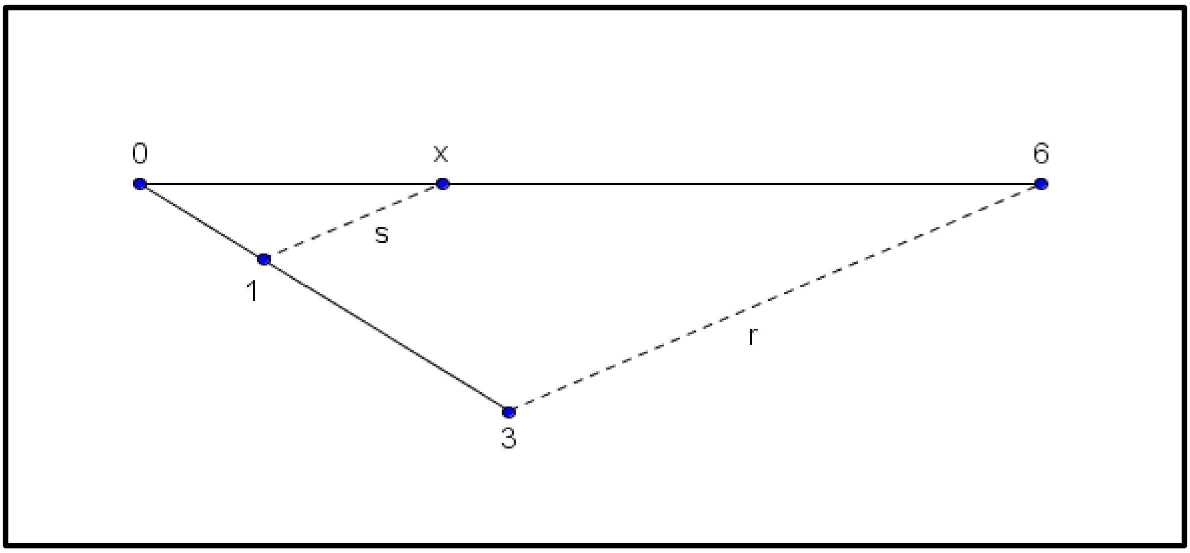
Ocorre que a raiz x calculada por este método é determinada através do segmento $\overline{OD}$, de modo que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são dados em módulo. Sem perca de generalidade, podemos perceber que, se $a < 0$ ou $b < 0$ temos que a raiz é um número negativo, enquanto que se $a < 0$ e $b < 0$ temos que a raiz é positiva.

4.1.1 Resolução de equação de 1º grau

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $3x - 6 = 0$ através do método de semelhança de triângulos.

Solução: montando os triângulos a partir dos coeficientes da equação dada, $a = 3$, $b = 6$, temos:

Figura 2 – Resolução da equação 3x – 6 = 0 pelo método de semelhança de triângulos.



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra

De onde se conclui que a raiz de equação é igual a 2, pois

$$\frac{x}{1} = \frac{6}{3}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

4.2 Método de Descartes para resolução da equação de 2º grau

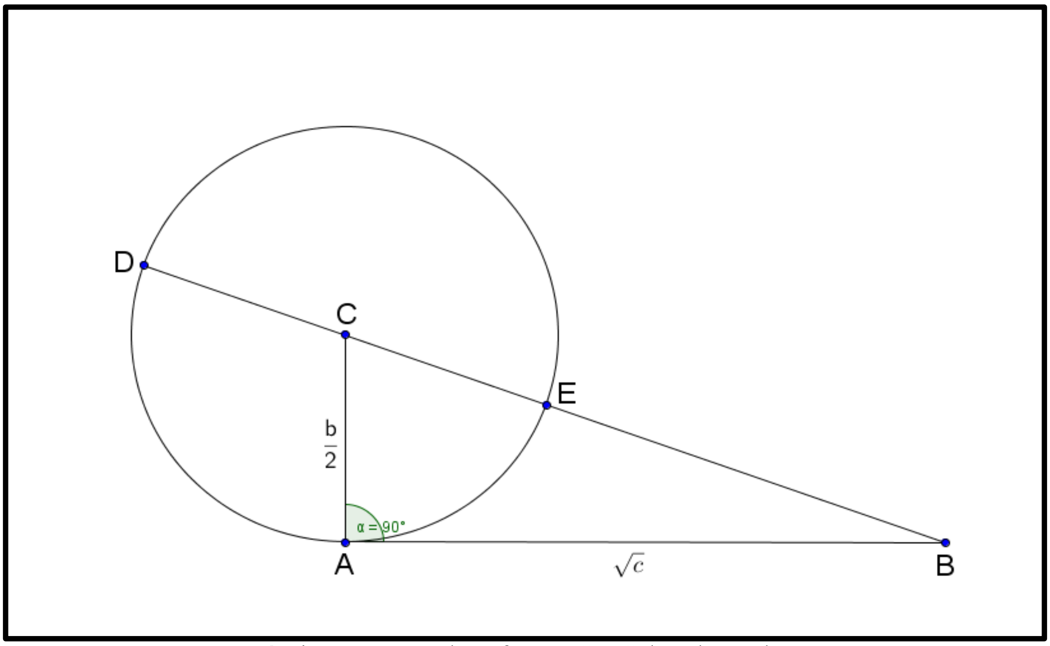
René Descartes foi um estudioso de matemática que contribuiu de forma muito significativa no desenvolvimento de geometria analítica, aliando o estudo de álgebra ao estudo de geometria. De acordo com Contador (2008b), Descartes considerava falho o método de ensino de matemática, pois o mesmo deveria aliar os estudos sobre álgebra e geometria, esta consideração se justificava através do Teorema de Pitágoras, pois este relacionava uma equação algébrica com uma figura geométrica.

Descartes produziu vários trabalhos, dentre eles o *Discurso do Método para o bem conduzir a própria razão e buscar a verdade na Ciência*, que estava subdividido em três livros que tratavam sobre ótica, meteoros e geometria analítica. Neste estudo, que no futuro foi denominado geométrica analítica,

> [...] Descartes, considerava a base da nova Geometria, apresentava a aplicação de seu novo método da análise; introduz a noção de coordenadas espaciais; estabelece o conceito de função com duas variáveis; demonstra que cada curva corresponde a uma função e apresenta o processo para obtenção de raízes quadradas e cúbicas. Descartes resolvia equações quadráticas, não de forma algébrica, mas assim como os gregos, de forma geométrica (CONTADOR, 2008b, p. 177-178).

O método de Descartes para resolução de equações quadráticas, do tipo $x^2 \pm bx - c = 0$ sugere a construção de um triângulo retângulo e de uma circunferência de raio igual ao cateto menor do triângulo, através desta construção geométrica é possível se determinar as raízes da equação. Sendo assim, pode-se montar uma circunferência e um triângulo retângulo como na Figura 3 abaixo:

Figura 3 – Circunferência de Descartes para resolução de equações quadráticas

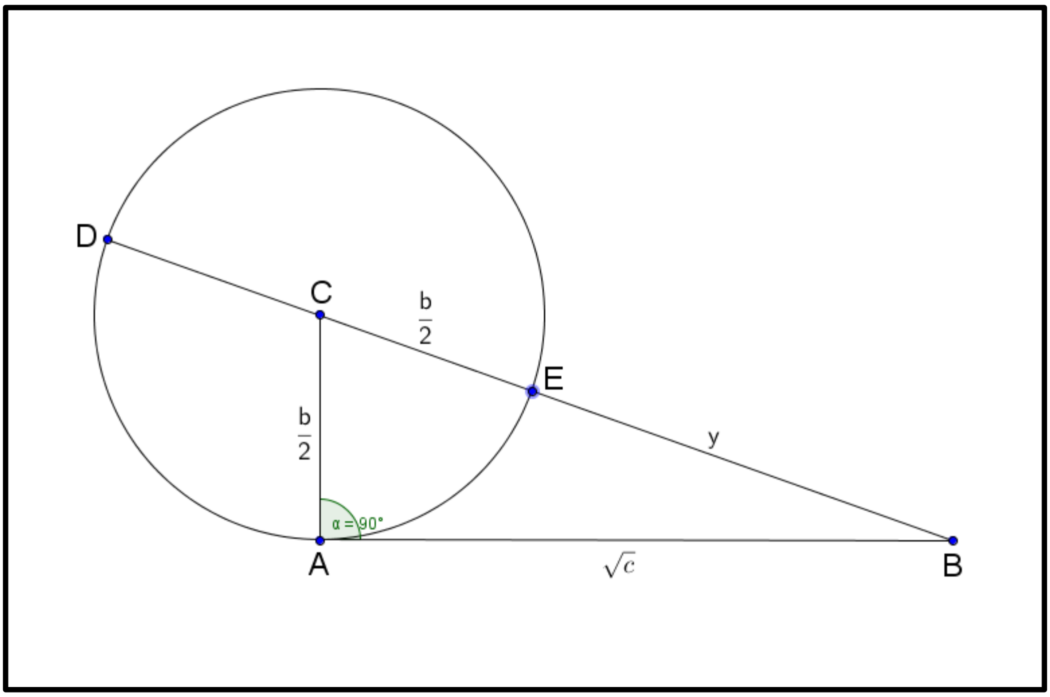


Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em KILHIAN, 2012

Conforme foi abordado, este método resolve equações quadráticas do tipo $x^2 \pm bx - c = 0$, logo temos dois casos a considerar:

a) se b for negativo: seja a circunferência de centro C e raio $\frac{b}{2}$ e o triângulo retângulo ABC, no qual o cateto menor mede $\frac{b}{2}$ e a hipotenusa mede $x + \frac{b}{2}$, conforme Figura 4 abaixo.

Figura 4 – Circunferência de Descartes para resolução de equações quadráticas



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em KILHIAN, 2012

Ocorre que a raiz positiva calculada por este método é determinada através do segmento $\overline{BD}$, enquanto que a raiz negativa é dada pelo segmento $\overline{BE}$ (dada em módulo), pois à época de Descartes, não se admitia a existência de raiz negativa, uma vez que não faz sentido um segmento de reta com comprimento negativo. Sendo o segmento $\overline{BD} = x$, temos que $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{CD}$, logo $x = y + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$, logo se pode expressar o segmento $\overline{BC} = x - \frac{b}{2}$, de posse destas informações e utilizando o teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2$$

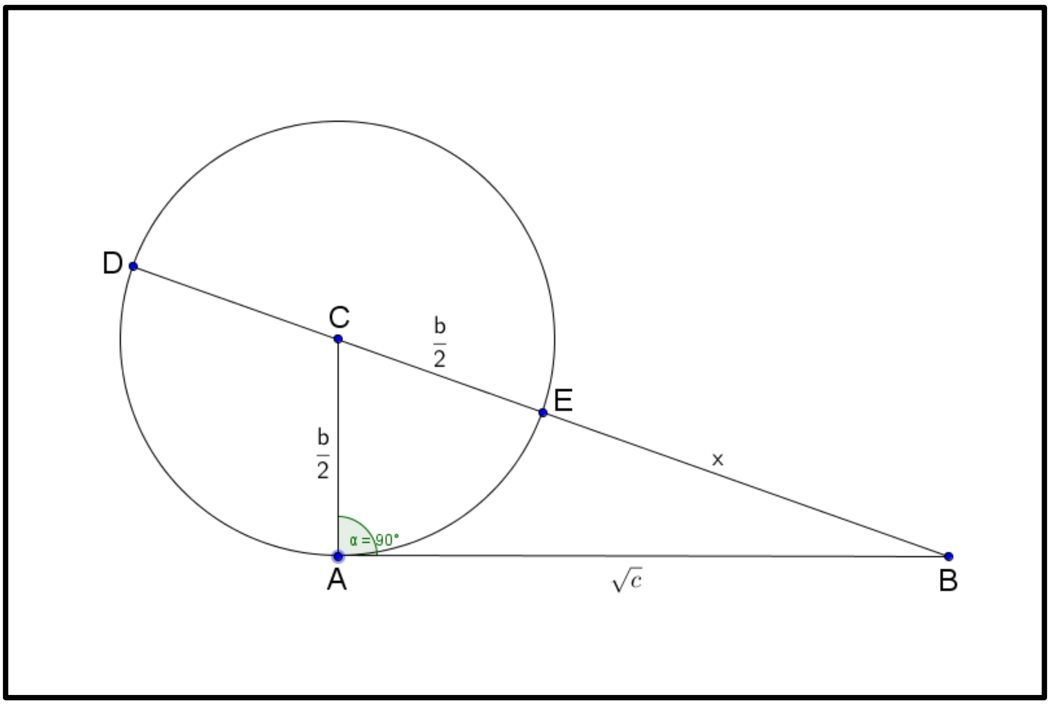
$$x^2 - 2.x.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

$$x^2 - b.x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} - c = 0$$

$$x^2 - bx - c = 0 \tag{34}$$

b) se b for positivo: seja a circunferência de centro C e raio $\frac{b}{2}$ e o triângulo retângulo ABC, no qual o cateto menor mede $\frac{b}{2}$ e a hipotenusa mede $x + \frac{b}{2}$, conforme Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Circunferência de Descartes para resolução de equações quadráticas



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em KILHIAN, 2012

Ocorre que a raiz positiva calculada por este método é determinada através do segmento $\overline{BE}$, enquanto que a raiz negativa é dada pelo segmento $\overline{BD}$ (dada em módulo). Sendo o segmento $\overline{BC} = x + \frac{b}{2}$ e utilizando o teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2$$

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

$$x^2 + b.x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} - c = 0$$

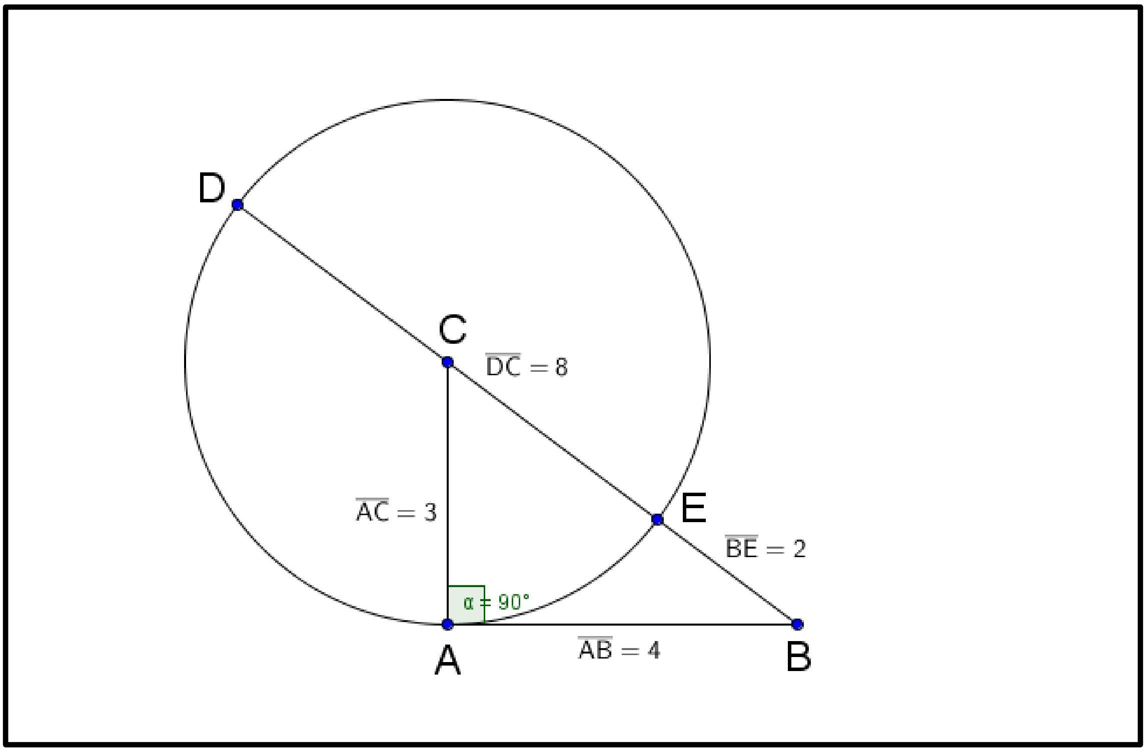
$$x^2 + bx - c = 0 \tag{35}$$

4.2.1 Resolução de equação de 2º grau pelo método de Descartes

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ através do método de Descartes.

Solução: montando a circunferência de Descartes a partir dos coeficientes da equação dada, a = 1, b = –6 e c = –16, temos:

Figura 6 – Resolução da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ pelo método de Descartes



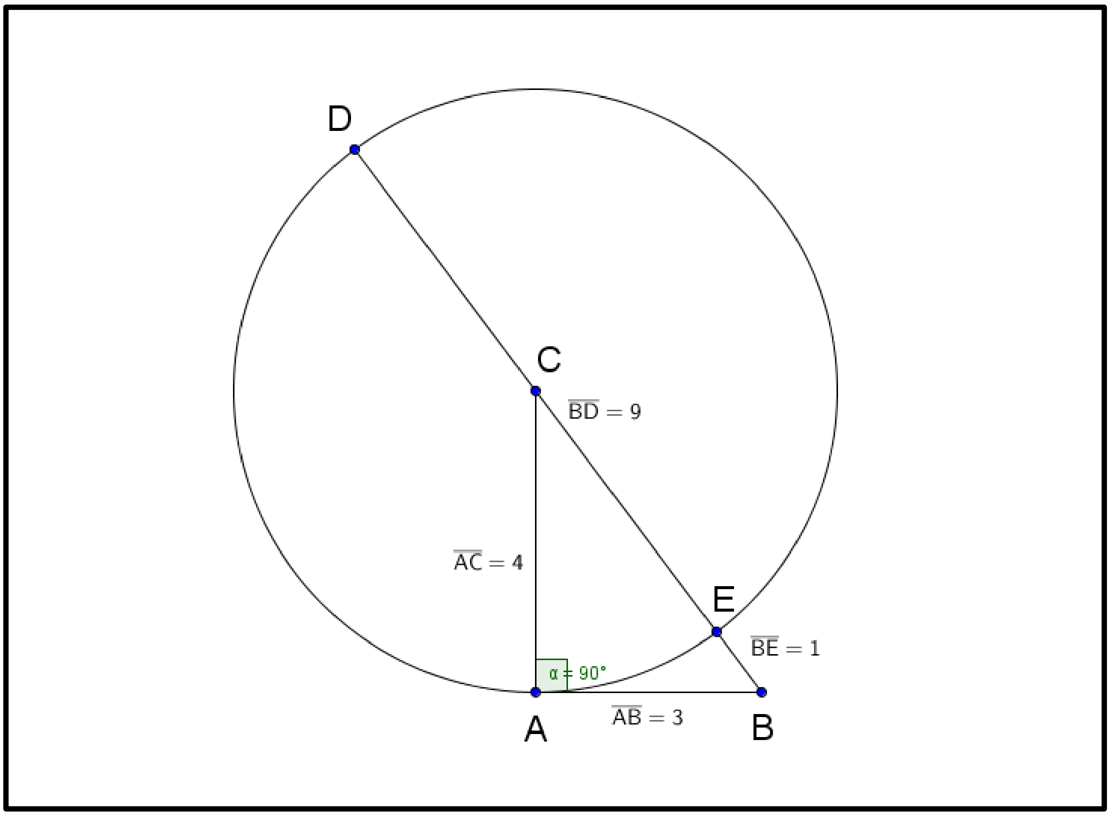
Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra

De onde se conclui que as raízes de equação são dadas pelos segmentos $\overline{DC} = 8$ e $\overline{EC} = 2$, de forma que as raízes são $x_1 = 8$ e $x_2 = -2$.

Exemplo 2 – Determinar as raízes da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$ através do método de Descartes.

Solução: montando a circunferência de Descartes a partir dos coeficientes da equação dada, a = 1, b = 8 e c = –9, temos:

Figura 7 – Resolução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$ pelo método de Descartes



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra

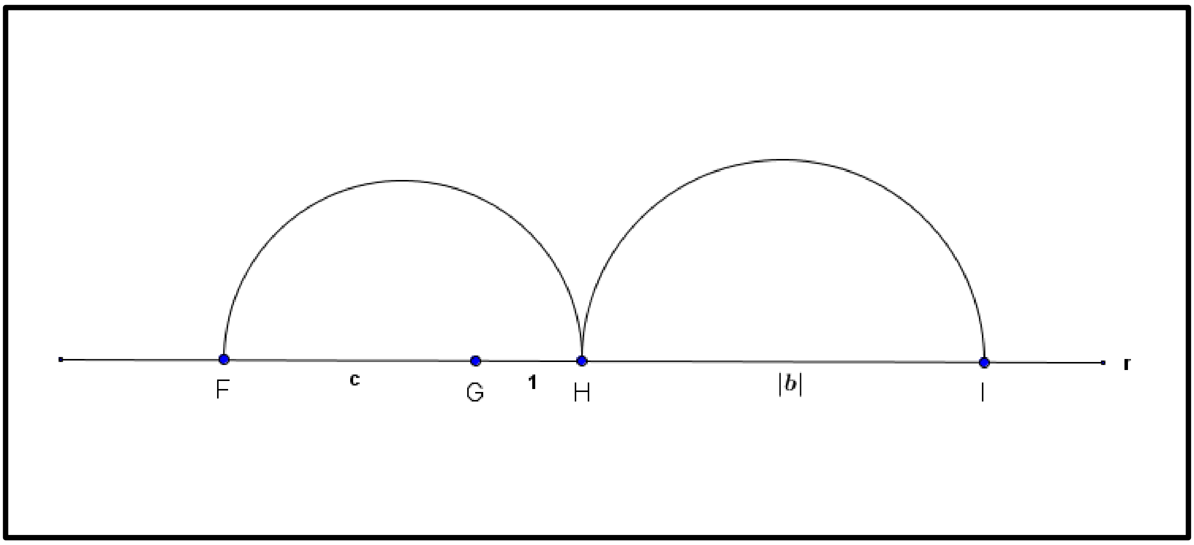
De onde se conclui que as raízes de equação são dadas pelos segmentos $\overline{DC} = 9$ e $\overline{EC} = 1$, de forma que as raízes são $x_1 = -9$ e $x_2 = 1$.

4.3 Método das semicircunferências tangentes para resolução da equação de 2º grau

As equações quadráticas, do tipo $x^2 \pm bx \pm c = 0$, também podem ser resolvidas se utilizando de duas semicircunferências tangentes entre si. Logo temos dois casos a considerar:

a) se c for positivo: implica que as raízes procuradas possuem o mesmo sinal, logo $|x_1| + |x_2| = |b|$ e $|x_1|.|x_2| = c$. Sobre uma reta, subdivida em segmentos de comprimentos c, 1 e $|b|$ devem ser determinados os pontos F, G, H e I, conforme Figura 8 abaixo, de modo que os segmentos $\overline{FH}$ e $\overline{HI}$ são os diâmetros das duas semicircunferências propostas:

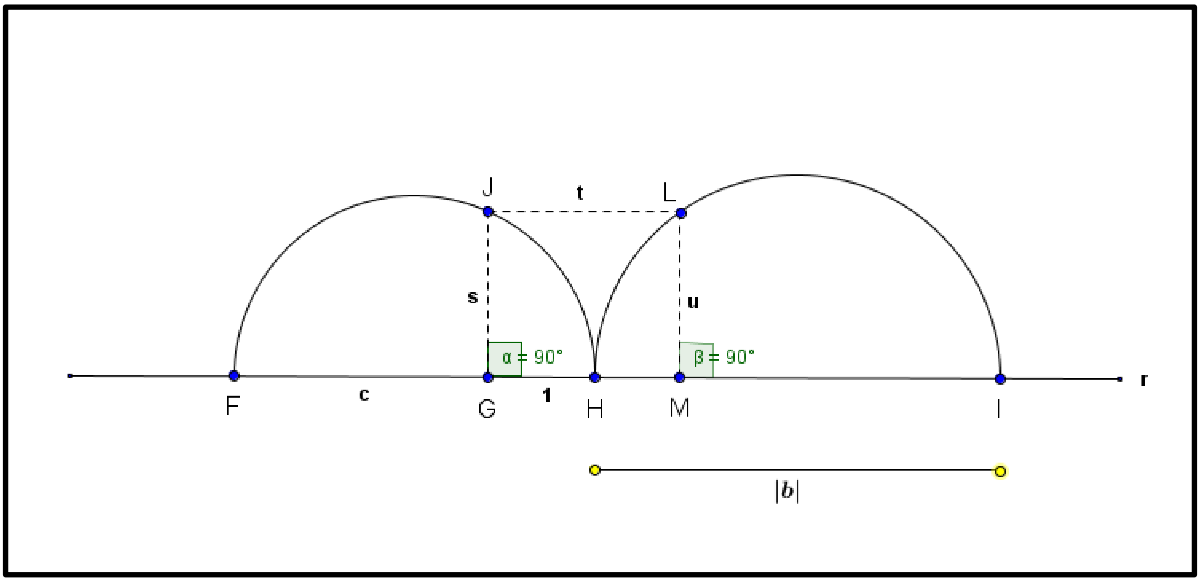
Figura 8 – Semicircunferências tangentes para resolução de equações quadráticas



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em TUNALA, 1988.

Sobre o ponto G, traça-se um segmento de reta perpendicular, aqui denotado por s, que faz intersecção com a semicircunferência de diâmetro (c + 1), gerando o ponto J. A partir de J traça-se um segmento de reta, paralelo à reta r e denotado por t, que intersectará a semicircunferência de diâmetro |b|, marcando o ponto L. Sobre L, passa um segmento u, perpendicular a r e paralelo a s, marcando o ponto M sobre a reta r, conforme Figura 9 abaixo.

Figura 9 – Semicircunferências tangentes para resolução de equações quadráticas, caso $c > 0$



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em TUNALA, 1988.

Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo na circunferência de diâmetro (c + 1), percebe-se que:

$(\overline{\mathrm{GJ}})^2 = \overline{\mathrm{FG}}.\overline{\mathrm{GH}}$

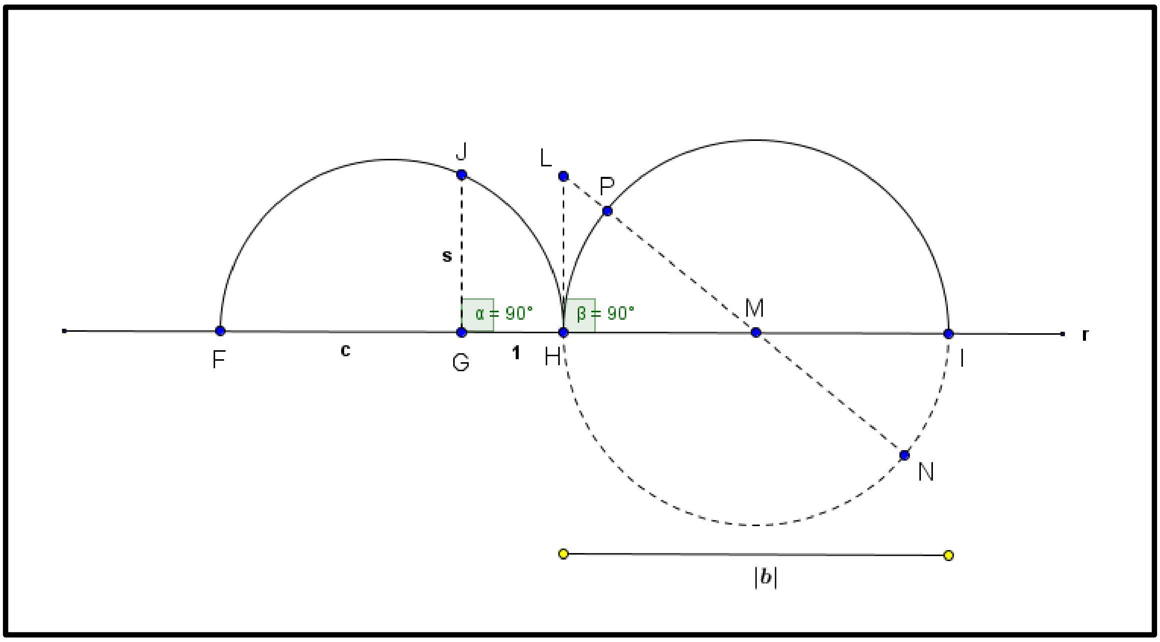
$(\overline{\mathrm{GJ}})^2 = \mathrm{c}.1$

$\overline{\mathrm{GJ}} = \sqrt{\mathrm{c}}$

Uma vez que $\overline{\mathrm{GJ}} \equiv \overline{\mathrm{ML}}$ e $(\overline{\mathrm{ML}})^2 = \overline{\mathrm{HM}}.\overline{\mathrm{MI}}$, conclui-se que $\overline{\mathrm{HM}}.\overline{\mathrm{MI}} = \mathrm{c}$ e $\overline{\mathrm{HM}} + \overline{\mathrm{MI}} = |\mathrm{b}|$. Com isso, consegue-se determinar dois segmentos cuja soma é igual a $|\mathrm{b}|$ e cujo produto é igual a c, logo os segmentos $\overline{\mathrm{HM}}$ e $\overline{\mathrm{MI}}$ são as raízes procuradas. Vale salientar que se b < 0 então as raízes são $\overline{\mathrm{HM}}$ e $\overline{\mathrm{MI}}$, enquanto que se b > 0 então as raízes são $-\overline{\mathrm{HM}}$ e $-\overline{\mathrm{MI}}$.

b) Se c for negativo, implica que as raízes procuradas possuem sinais contrários, logo $|\mathrm{x}_1| - |\mathrm{x}_2| = |\mathrm{b}|$ e $|\mathrm{x}_1|.|\mathrm{x}_2| = \mathrm{c}$. O procedimento geométrico é bastante semelhante ao caso inicial, em que c > 0, a diferença está no segmento $\overline{\mathrm{ML}}$ que é obtido através do translado do segmento $\overline{\mathrm{GJ}}$ até a ponto de intersecção das semicircunferências, conforme Figura 10 abaixo.

Figura 10 – Semicircunferências tangentes para resolução de equações quadráticas, caso c < 0



Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra, baseada em TUNALA, 1988.

Na Figura 10, acima, percebe-se que os segmentos $\overline{\mathrm{GJ}}$ e $\overline{\mathrm{HL}}$ são congruentes, logo

$\overline{\mathrm{GJ}} \equiv \overline{\mathrm{HL}}$. Percebe-se também que ΔFJH é retângulo e neste caso, tem-se que $(\overline{\mathrm{GJ}})^2 = \overline{\mathrm{FG}}.\overline{\mathrm{GH}}$, logo $\overline{\mathrm{GJ}} = \sqrt{c}$, que implica que $\overline{\mathrm{HL}} = \sqrt{c}$. Sendo $\overline{\mathrm{HM}} \equiv \overline{\mathrm{MN}} \equiv \overline{\mathrm{PM}}$, $\overline{\mathrm{LM}} = \overline{\mathrm{LP}} + \overline{\mathrm{PM}}$ e percebendo que o ΔHLM é retângulo, conclui-se que $(\overline{\mathrm{HL}})^2 = \overline{\mathrm{LP}}.\overline{\mathrm{LN}}$, de fato:

$$(\overline{\mathrm{LM}})^2 = (\overline{\mathrm{HL}})^2 + (\overline{\mathrm{HM}})^2$$
$$(\overline{\mathrm{LM}})^2 = (\overline{\mathrm{HL}})^2 + (\overline{\mathrm{HM}})^2$$
$$(\overline{\mathrm{LP}} + \overline{\mathrm{PM}})^2 = (\overline{\mathrm{HL}})^2 + (\overline{\mathrm{PM}})^2$$
$$(\overline{\mathrm{LP}})^2 + 2(\overline{\mathrm{LP}}.\overline{\mathrm{PM}}) + (\overline{\mathrm{PM}})^2 = (\overline{\mathrm{HL}})^2 + (\overline{\mathrm{PM}})^2$$
$$(\overline{\mathrm{LP}})^2 + 2(\overline{\mathrm{LP}}.\overline{\mathrm{PM}}) = (\overline{\mathrm{HL}})^2$$
$$\overline{\mathrm{LP}}[\overline{\mathrm{LP}} + 2\overline{\mathrm{PM}}] = (\overline{\mathrm{HL}})^2$$
$$\overline{\mathrm{LP}}.\overline{\mathrm{LN}} = (\overline{\mathrm{HL}})^2$$

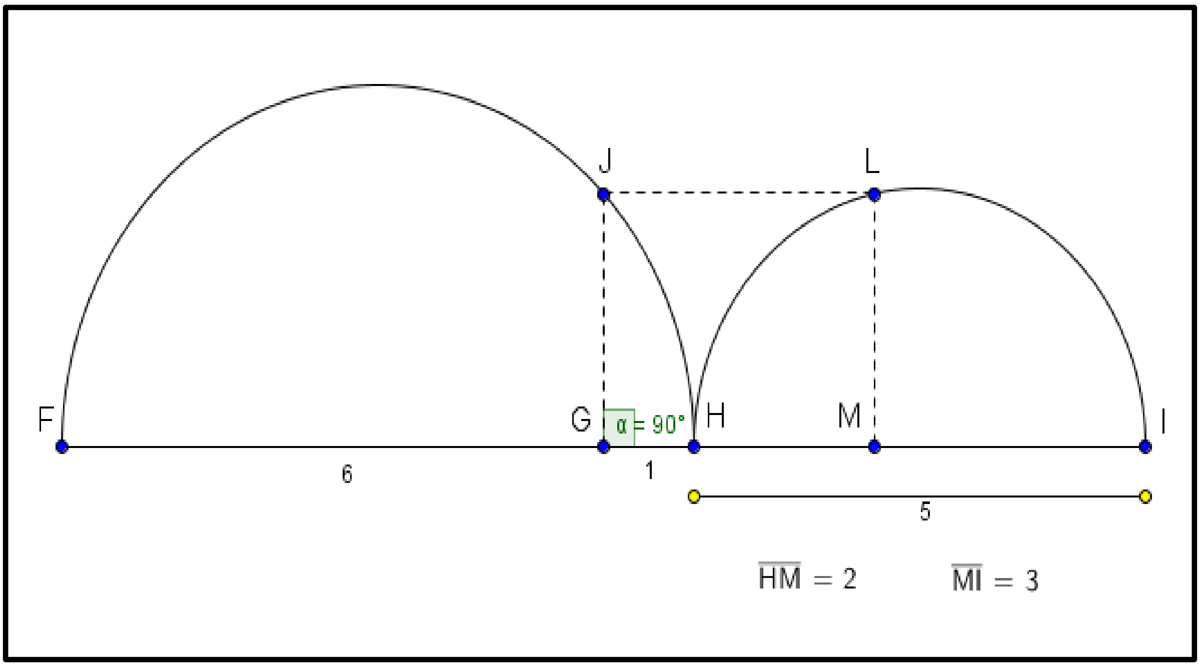
Com isso, $\overline{\mathrm{LM}}.\overline{\mathrm{MN}} = \mathrm{c}$ e $\overline{\mathrm{LN}} - \overline{\mathrm{LP}} = |\mathrm{b}|$, ou seja, consegue-se determinar dois segmentos cuja diferença é igual a $|\mathrm{b}|$ e cujo produto é igual a c, logo os segmentos $\overline{\mathrm{LP}}$ e $\overline{\mathrm{LN}}$ são as raízes procuradas. Vale salientar que se $b < 0$ então as raízes são $\overline{\mathrm{LN}}$ e $-\overline{\mathrm{LP}}$, enquanto que se $b > 0$ então as raízes são $-\overline{\mathrm{LN}}$ e $\overline{\mathrm{LP}}$.

4.3.1 Resolução de equações de 2º grau pelo método das semicircunferências tangentes

Exemplo 1 – Determinar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ através do método das semicircunferências tangentes.

Solução: neste exemplo, percebe-se que $c > 0$, logo se procede a resolução montando as semicircunferências tangentes a partir dos coeficientes da equação dada, $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, temos:

Figura 11 – Resolução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ pelo método das semicircunferências tangentes



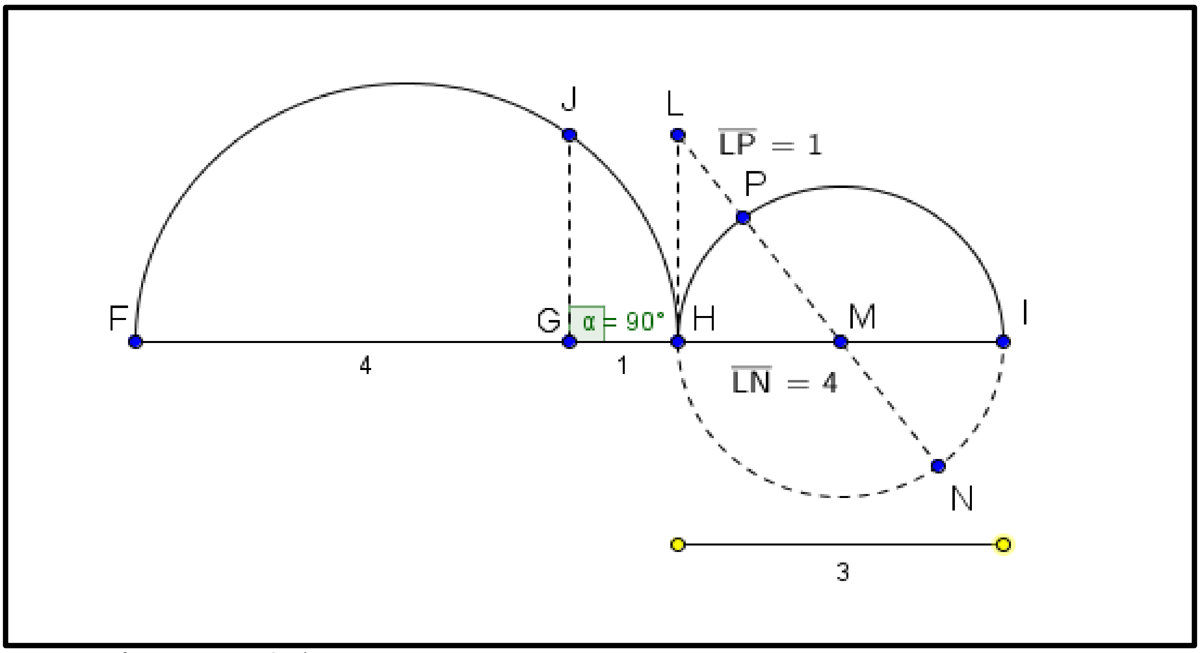
Fonte: Formatação própria com o uso do software GeoGebra

De onde se conclui que as raízes são dadas pelos segmentos $\overline{HM} = 2$ e $\overline{MI} = 3$, logo as raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 2 – Determinar as raízes da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ através do método das semicircunferências tangentes.

Solução: neste exemplo, percebe-se que $c < 0$, logo se procede a resolução montando as semicircunferências tangentes a partir dos coeficientes da equação dada, $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$, temos:

Figura 12 – Resolução da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ pelo método das semicircunferências tangentes



Fonte: formatação própria

De onde se conclui que as raízes são dadas pelos segmentos $\overline{LP} = 1$ e $\overline{LN} = 4$, logo as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$.

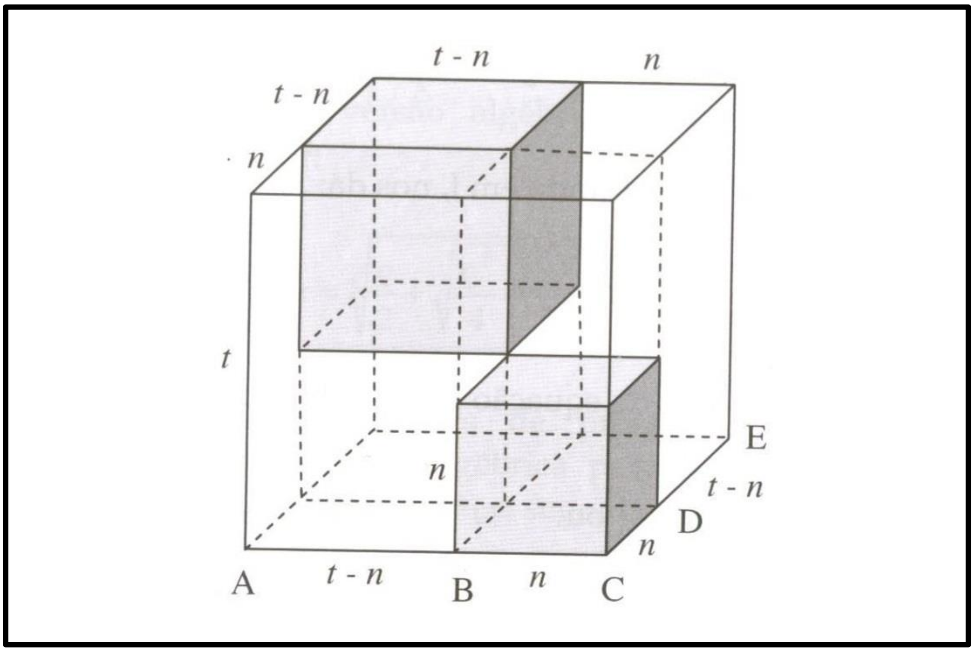
4.4 Método de Cardano para resolução da equação de 3º grau

Girolamo Cardano também publicou a fórmula para resolução de equações de 3º grau. De acordo com Contador (2008b), quando Tartaglia venceu o desafio contra Fior, o que lhe trouxe fama, isso fez com que Cardano se aproximasse dele a fim de publicar a recém-descoberta em seu livro *Prática Arithmeticae Generalis*. Mas com a recusa de Tartaglia veio a intriga entre os dois, que só seria amenizada anos mais tarde. Porém ao obter a equação resolutiva, Cardano a publicou sem o consentimento de Tartaglia, o que resultou em novas intrigas. Cardano viria a publicar em seu livro célebre *Ars Magna* a solução geométrica para uma equação cúbica específica do tipo,

$$x^3 + px = q \quad (34)$$

A solução envolve a construção de um cubo de aresta $\overline{AC}$ que denotaremos por t, e outro cubo de aresta $\overline{BC}$ que denotaremos por n, conforme a Figura 13 abaixo.

Figura 13 – Cubo de Cardano para resolução de equações cúbicas



Fonte: Contador, 2008, p. 35

a) o cubo de aresta n possui volume n^3;

b) o cubo de aresta t – n possui volume $(t – n)^3$;

c) o volume do poliedro acima do cubo de aresta n é dado por $n^2 . (t – n)$;

d) o poliedro à esquerda do cubo de lado n, assim como o de aresta $\overline{DE} = t - n$, ao fundo, possuem volumes dado por t . n . (t – n);

e) o volume do poliedro abaixo do cubo de aresta (t – n) é dado por $n . (t – n)^2$.

Percebendo que o cubo de aresta t, é igual à soma de todos os sólidos internos a ele, pode-se determinar que o volume t^3 é igual à soma de todos os volumes de seus sólidos internos. Sendo assim,

$$t^3 = n^3 + (t - n)^3 + 2tn(t - n) + n^2(t - n) + n(t - n)^2 \qquad (35)$$

Com o propósito de montar a partir desta equação (35), outra equação semelhante à (34) segue que,

$$t^3 - n^3 = (t - n)^3 + [2tn(t - n) + n^2(t - n) + n(t - n)^2]$$
$$t^3 - n^3 = (t - n)^3 + (t - n)[2tn + n^2 + n(t - n)]$$
$$t^3 - n^3 = (t - n)^3 + (t - n)[2tn + n^2 + tn - n^2]$$
$$t^3 - n^3 = (t - n)^3 + 3tn(t - n) \qquad (36)$$

Com efeito, fazendo $t - n = x$ e consequentemente $(t - n)^3 = x^3$ resultando em $t^3 - n^3 = x^3 + 3tnx$, pode-se comparar com a equação (34) o que fornece

$$p = 3tn \qquad (37)$$
$$q = t^3 - n^3 \qquad (38)$$

Uma vez que $n = \frac{p}{3t}$, de acordo com a equação (37), e depois substituindo em (38) obtém-se,

$$t^3 - \frac{p^3}{27t^3} = q$$
$$t^3.\left(t^3 - \frac{p^3}{27t^3}\right) = t^3.q$$
$$t^6 - qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$
$$(t^3)^2 - q(t^3) - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (39)$$

Ou seja, recai-se em uma equação de 2º grau na variável t^3, que pode ser resolvida através do método de Bhaskara, o que resulta em,

$$t^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$
$$t^3 = \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$
$$t^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{40}$$

Da equação (38) se conclui que $n^3 = t^3 - q$, e substituindo (40) em (38) segue que,

$$n^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)^3 - q$$

$$n^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - q$$

$$n^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{41}$$

De posse das equações (40) e (41) e da relação $x = t - n$ obtém-se a seguinte equação resolutiva:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{42}$$

Surge então a resolução para equações cúbicas proposta por Cardano. Porém as equações cúbicas são aquelas do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e o que foi resolvido foram casos especiais de equações incompletas do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ ou $x^3 + px = q$. Mas é possível transformar uma equação completa em uma incompleta através de uma simples troca de variáveis. Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x = y + m$, segue que,

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

$$a(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + b(y^2 + 2ym + m^2) + c(y + m) + d = 0$$

$$ay^3 + 3ay^2m + 3aym^2 + am^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + (b + 3am)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0 \quad (43)$$

Com efeito, fazendo $b + 3am = 0$ ou $3am^2 + 2bm + c = 0$ na equação (43) obtém-se as equações incompletas desejadas. E deste modo, Cardano conseguiu uma explicação geométrica para a resolução das equações cúbicas e, com isso, demonstrou a fórmula de resolução.

5 O MÉTODO COMPUTACIONAL DE RESOLUÇÃO

Neste tópico será abordada a resolução de equações algébricas através do método computacional. Humes *et al* (1984) afirma que este método de resolução é muito útil para calcular os zeros de funções por utilizar processos numéricos iterativos, que são processos de aproximações sucessivas x_1, x_2, x_3 ... x_n da solução desejada. Corroborado com Ruggiero e Lopes (1996, p. 37) quando afirmam que "um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos".

Este trabalho está subdividido em método de Newton, método da secante, método da bissecção ou da dicotomia, método das cordas ou da posição falsa, e método do ponto fixo ou iteração linear, de modo que, ao fim do capítulo, se possa realizar uma comparação entre estes métodos de resolução. Ao longo do trabalho se fez a contextualização histórica, enfatizando a demonstração das fórmulas pertinentes e aplicando os referidos métodos para resolução de alguns problemas. Estes métodos consistem, basicamente, na tentativa de localizar as raízes de equações polinomiais através de aproximações sucessivas, forma esta que é utilizada por calculadoras e computadores.

5.1 O Método de Newton[22]

Isaac Newton foi um estudioso de matemática e de física que desenvolveu inúmeras teorias nestas duas grandes áreas acadêmicas de concentração do conhecimento. De acordo com Garbi (2010b), Newton adquiriu notabilidade no meio científico-acadêmico devido haver desenvolvido estudos em Matemática (pura e aplicada), Sistematização das Leis da Dinâmica, Concepção da Lei da Gravitação Universal, Óptica (incluindo a Teoria das Cores) e criação e fabricação de diversos instrumentos científicos, dentre estes, telescópios e lentes.

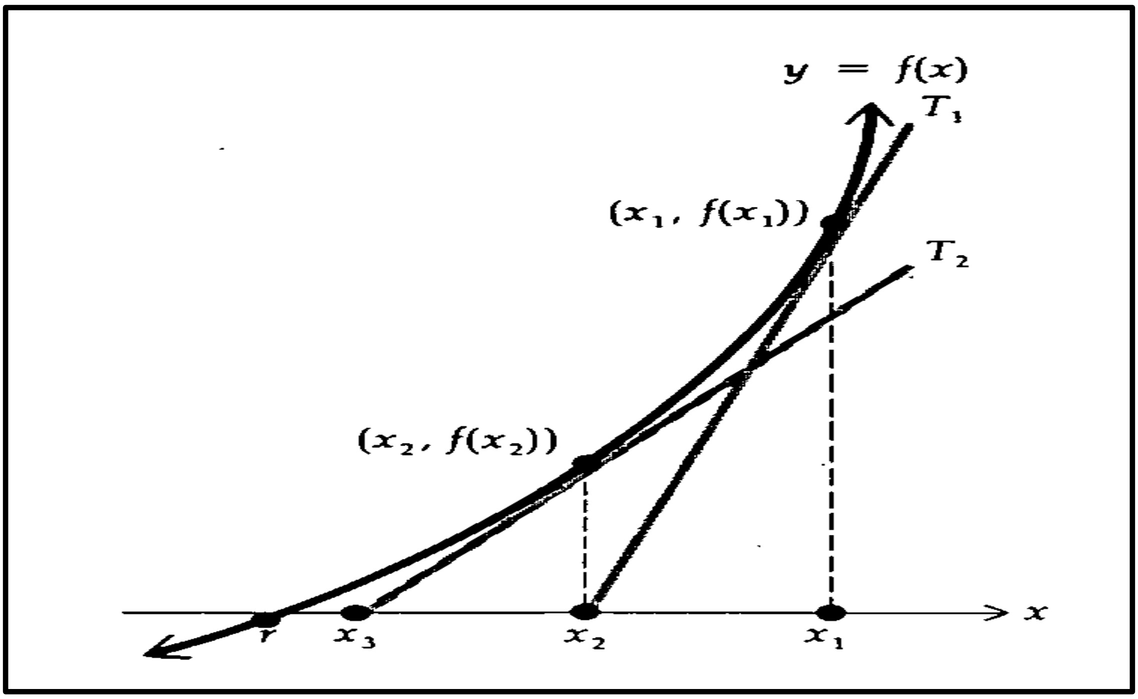
Segundo Contador (2008b), no que concerne aos estudos específicos em matemática, Newton se destacou por estudos em cálculo de áreas por expansão binomial, criação do Cálculo Diferencial e Integral, Teorema Binomial, estudo para cálculo do número π [23] e método para calcular as raízes de equações algébricas.

Segundo Leithold (1994, p. 277), "consideremos a equação f(x) = 0, onde f é uma função derivável. O método de Newton fornece um processo para aproximar uma raiz dessa

[22] Isaac Newton, matemático inglês (1642 – 1727).
[23] Newton determinou o valor de $\pi = 3{,}141592688$, com sete casas decimais corretas.

equação ou, equivalentemente, um zero de f, isto é, um número r tal que f(r) = 0". Analisando geometricamente a Figura 14 abaixo, percebe-se a aproximação da raiz desejada, ao passo que se enfatiza o uso do conceito de reta tangente, culminando no estudo sobre derivadas.

Figura 14 – Aproximação da raiz de uma função f(x) pelo método de Newton.



Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 278

Dada uma função y = f(x) e um ponto x_1 pertencente ao domínio de f(x), pode-se traçar a reta tangente ao ponto (x_1, f(x_1)), pertencente ao gráfico de f(x), determinando assim o ponto x_2 ainda no domínio de f(x). Repetindo este processo, determina-se o valor de x_3, x_4, x_5 de modo que estes valores se aproximam cada vez mais do número r, que é uma raiz de f(x) com a aproximação decimal desejada.

A equação da reta T_1 é calculada utilizando a derivada da função f, culminando na fórmula:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{quando o limite existir.} \qquad (44)$$

Ou seja, y – f(x_1) = f'(x_1)(x – x_1). Uma vez que a reta tangente T_1 intercepta o eixo das abscissas no ponto x_2, pode-se fazer x = x_2 e y = 0 na equação (44), resultando em:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, f'(x_1) \neq 0 \tag{45}$$

Utilizando-se do mesmo raciocínio para reta tangente T_2, que intercepta o eixo das abscissas no ponto x_3, e assim sucessivamente, obtém-se a fórmula criada por Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{46}$$

A escolha adequada da primeira aproximação de x, ou seja, a escolha adequada de x_1 é muito importante. Deve-se escolher um número x_1 que esteja no intervalo aberto (a, b) de modo este x_1 esteja próximo da raiz desejada, este fato pode ser observado através do gráfico da função f. Outra possibilidade é utilizar o Teorema de Bolzano[24], que indica que:

> Dados uma equação algébrica em sua forma canônica $P(x) = 0$ e dois números reais a e b ($a < b$), se P(a) e P(b) tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será par; se P(a) e P(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será ímpar (GARBI, 2010b, p. 123).

De acordo com Massarani (1967, p. 20), "o método de Newton é o método mais empregado na solução de equações algébricas e transcendentes por aliar à simplicidade de sua execução uma boa velocidade de convergência".

A convergência do método de Newton ocorre quando se verifica que, na função $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ definida no intervalo [a, b], existe um intervalo I contido em [a, b] e centrado em algum r, de forma que as duas condições abaixo são satisfeitas, a saber:

a) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I;

b) $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I$.

Para mostrar que $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I, temos que $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, derivando esta equação obtemos:

[24] Bernhard Bolzano, matemático checo (1781 – 1848).

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \left[\frac{f'(x).f'(x) - f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right]$$

$$\varphi'(x) = 1 - \left[\frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right]$$

$$\varphi'(x) = 1 - \left[\frac{\left(f'(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2} - \frac{f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right]$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2} + \frac{f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

$$\varphi'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x).f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} \tag{47}$$

Uma vez que f'(x) é contínua em [a, b], pode-se obter um intervalo $I \subset [a, b]$ de modo que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Deste modo tem-se que f(x), f'(x) e f''(x) são contínuas no intervalo I e $f'(x) \neq 0$. Com isso φ(x) e φ'(x) são contínuas no intervalo I.

Deste modo tem-se que φ'(x) é contínua em I com φ'(r) = 0. Com isto, pode-se determinar um novo intervalo $I_2 \subset I$ de modo que $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$, e que r seja o centro deste intervalo I_2.

Então, desde que φ(x) e φ'(x) sejam contínuas em I_2 e $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$, tem-se que $I = I_2$. Logo, a sequência gerada por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge para a raiz r, desde que $r \in I$.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996), "em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido suficientemente próximo da raiz r".

5.1.1 Resolução de equações pelo método de Newton

Exemplo 1 – Use o método de Newton para encontrar a raiz real da equação $x^3 - 2x - 2 = 0$ com cinco casas decimais de aproximação.

Solução: a raiz real da equação $x^3 - 2x - 2 = 0$ é igual ao zero real da função $f(x) = x^3 - 2x -$

2, sendo sua função derivada igual a f'(x) = $3x^2 - 2$. Percebendo ainda que f(1) = –3 e f(2) = 2, conclui-se que pelo menos uma raiz real se encontra entre 1 e 2, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, tomando x_1 = 1,5, temos:

Tabela 1 – Resolução da equação $x^3 - 2x - 2 = 0$ pelo método de Newton

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,50000	-1,62500	4,75000	-0,34211	1,84211
2	1,84211	0,56674	8,18011	0,06928	1,77283
3	1,77283	0,02621	7,42878	0,00353	1,76930
4	1,76930	0,00006	7,39127	0,00001	1,76929
5	1,76929	-0,00002	7,39116	0,00000	1,76929

Em que se conclui que x = 1,76929 é uma aproximação da raiz da equação $x^3 - 2x - 2 = 0$.

Exemplo 2 – Use o método de Newton para determinar a raiz cúbica de 10 com cinco casas decimais de aproximação.

Solução: determinar a raiz cúbica de 10 significa encontrar a raiz da equação $x^3 - 10 = 0$ o que implica na raiz da função f(x) = $x^3 - 10$. Deste modo, tem-se que a função derivada é igual a f'(x) = $3x^2$, e que pelo menos uma raiz se encontra entre 2 e 3, pois f(2) = –2 e f(3) = 17, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, tomando x_1 = 2,5, temos:

Tabela 2 – Resolução da equação $x^3 - 10 = 0$ pelo método de Newton

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	2,50000	5,62500	18,75000	0,30000	2,20000
2	2,20000	0,64800	14,52000	0,04463	2,15537
3	2,15537	0,01306	13,93688	0,00094	2,15444
4	2,15444	0,00001	13,92477	0,00000	2,15443

5	2,15443	0,00000	13,92477	0,00000	2,15443

Em que se conclui que x = 2,15443 é uma aproximação da raiz da equação $x^3 - 10 = 0$, logo $\sqrt[3]{10} = 2{,}15443$, com cinco casas decimais de aproximação.

Exemplo 3 – Use o método de Newton para determinar a raiz da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, com dez casas decimais de aproximação.

Solução: a equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ possui raiz igual à da função $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, logo sua função derivada será dada por $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$. Percebendo ainda que $f(1) = -7$ e $f(2) = 6$, concluímos que pelo menos uma raiz real se encontra entre 1 e 2, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, tomando $x_1 = 1{,}5$, temos:

Tabela 3 – Resolução da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ pelo método de Newton

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,5000000000	2,8750000000	22,7500000000	0,1263736264	1,3736263736
2	1,3736263736	0,1017886835	21,1550537375	0,0048115540	1,3688148196
3	1,3688148196	0,0001415934	21,0962213098	0,0000067118	1,3688081078
4	1,3688081078	0,0000000003	21,0961393396	0,0000000000	1,3688081078
5	1,3688081078	0,0000000000	21,0961393394	0,0000000000	1,3688081078

Em que se conclui que x = 1,3688081078 é uma aproximação da raiz da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, com dez casas decimais de aproximação.

5.2 O Método da Secante

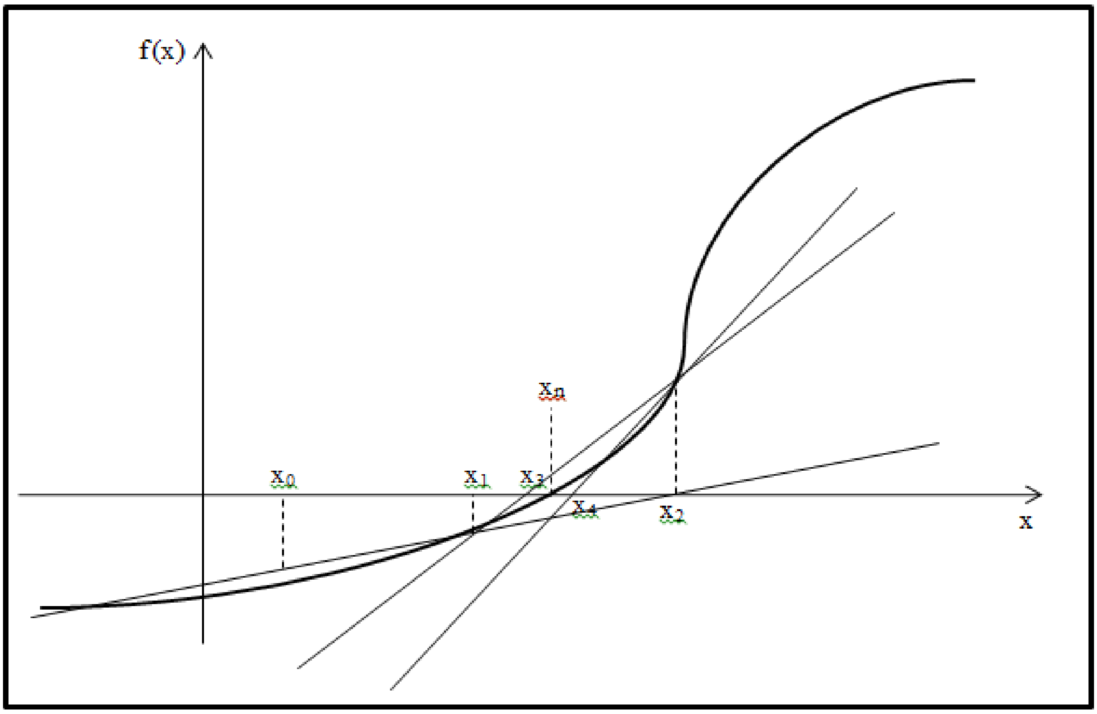
O método da secante, diferentemente do método de Newton, sugere a resolução de equações algébricas sem necessitar do cálculo da derivada primeira da função dada e de seu valor numérico a cada iteração. De acordo com Ruggiero e Lopes (1996), este método substitui a função derivada f'(x) pelo quociente de diferenças:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

de modo que $(x_n - x_{n-1}) \neq 0$, e ressaltando que x_n e x_{n-1} são aproximações sucessivas.

Uma interpretação geométrica deste método é dada pela Figura 15 abaixo, em que se percebe o uso de retas secantes ao gráfico da função dada até que se consiga determinar uma aproximação da raiz da função.

Figura 15 – Aproximação da raiz de uma função f(x) pelo método das secantes.



Fonte: formatação própria, baseada em RUGGIERO E LOPES, 1996, p. 75.

Deste modo, substituindo a função derivada de f pelo quociente de diferenças $f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ na equação abaixo, obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n.[f(x_n) - f(x_{n-1})] - f(x_n).(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n.f(x_n) - x_n.f(x_{n-1}) - x_n.f(x_n) + x_{n-1}.f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}.f(x_n) - x_n.f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (48)$$

Deve-se observar que se faz necessário a escolha adequada de x_n e x_{n-1}, de modo que $f(x_n)$ e $f(x_{n-1})$ tenham sinais contrários, isto de acordo com o Teorema de Bolzano, que indica que existe pelo menos uma raiz real neste intervalo.

Ruggiero e Lopes (1996) destacam que o método da secante é uma aproximação para o método de Newton e que as condições de convergência são praticamente as mesmas, ou seja, deve-se ter que $f(x)$e $f'(x)$ são contínuas num dado intervalo I e que $|f'(x)| < 1, \forall x \in I$. Vale ressaltar que $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ e que se $f(x_n) \approx f(x_{n-1})$ então o método pode divergir na aproximação da raiz desejada.

5.2.1 Resolução de equações pelo método da secante

Exemplo 1 – Use o método de secante para determinar uma raiz da equação $10x^4 - 64x^3 - 52x^2 + 64x + 42 = 0$, com três casas decimais de aproximação.

Solução: a equação $10x^4 - 64x^3 - 52x^2 + 64x + 42 = 0$ possui raiz igual à da função $f(x) = 10x^4 - 64x^3 - 52x^2 + 64x + 42$. Percebendo ainda que $f(0) = 42$ e $f(2) = -390$, e que pelo menos uma raiz real se encontra entre 0 e 2, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com $a < b$), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 4 – Resolução da equação $10x^4 - 64x^3 - 52x^2 + 64x + 42 = 0$ pelo método da secante

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}.f(x_n) - x_n.f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
1	0,00000	2,00000	42,00000	-390,00000	0,19444
2	0,19444	2,00000	52,02218	-390,00000	0,40694
3	0,40694	2,00000	55,39425	-390,00000	0,60507
4	0,60507	2,00000	48,84953	-390,00000	0,76035

5	0,76035	2,00000	35,80900	-390,00000	0,86460
6	0,86460	2,00000	22,68690	-390,00000	0,92701
7	0,92701	2,00000	13,04277	-390,00000	0,96174
8	0,96174	2,00000	7,07854	-390,00000	0,98025
9	0,98025	2,00000	3,72129	-390,00000	0,98988
10	0,98988	2,00000	1,92355	-390,00000	0,99484
11	0,99484	2,00000	0,98560	-390,00000	0,99737
12	0,99737	2,00000	0,50273	-390,00000	0,99867
13	0,99867	2,00000	0,25584	-390,00000	0,99932
14	0,99932	2,00000	0,13005	-390,00000	0,99966

Em que se conclui que x = 0,999 é uma aproximação da raiz da equação $10x^4 - 64x^3 - 52x^2 + 64x + 42 = 0$, com três casas decimais de aproximação.

Exemplo 2 – Use o método de secante para determinar uma raiz cúbica de 9, com cinco casas decimais de aproximação.

Solução: determinar a raiz cúbica de 9 significa encontrar a raiz positiva da equação $x^3 - 9 = 0$ implicando na raiz da função $f(x) = x^3 - 9$. Uma vez que $f(2) = -1$ e $f(3) = 18$, e que pelo menos uma raiz real se encontra entre 2 e 3, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 5 – Resolução da equação $x^3 - 9 = 0$ pelo método da secante

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}.f(x_n) - x_n.f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
1	2,00000	3,00000	-1,00000	18,00000	2,05263
2	2,05263	3,00000	-0,35165	18,00000	2,07079
3	2,07079	3,00000	-0,12016	18,00000	2,07695
4	2,07695	3,00000	-0,04065	18,00000	2,07903
5	2,07903	3,00000	-0,01371	18,00000	2,07973
6	2,07973	3,00000	-0,00462	18,00000	2,07996
7	2,07996	3,00000	-0,00155	18,00000	2,08004
8	2,08004	3,00000	-0,00052	18,00000	2,08007

9	2,08007	3,00000	-0,00018	18,00000	2,08008
10	2,08008	3,00000	-0,00006	18,00000	2,08008

Em que se conclui que x = 2,08008 uma aproximação da raiz cúbica de 9, com cinco casas decimais de aproximação.

Exemplo 3 – Use o método de secante para determinar uma raiz da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, com quatro casas decimais de aproximação.

Solução: a equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ possui raiz igual à da função $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Percebendo ainda que f(1) = –2 e f(2) = 1, e que pelo menos uma raiz real se encontra entre 1 e 2, através do Teorema de Bolzano, que indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 6 – Resolução da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ pelo método da secante

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}.f(x_n) - x_n.f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
1	1,00000	2,00000	-2,00000	1,00000	1,66667
2	1,66667	2,00000	-0,81481	1,00000	1,81633
3	1,81633	2,00000	-0,12323	1,00000	1,83648
4	1,83648	2,00000	-0,01533	1,00000	1,83895
5	1,83895	2,00000	-0,00186	1,00000	1,83925
6	1,83925	2,00000	-0,00022	1,00000	1,83928
7	1,83928	2,00000	-0,00003	1,00000	1,83929
8	1,83929	2,00000	0,00000	1,00000	1,83929

Em que se conclui que x = 1,8392 é uma aproximação da raiz da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, com quatro casas decimais de aproximação.

5.3 O Método da Bissecção

O método da bissecção, também conhecido por método da dicotomia, sugere a determinação de raízes de equações algébricas através de iterações sucessivas. Este processo consiste na divisão ao meio do intervalo [a, b] até que se obtenha a aproximação desejada da raiz da equação, ressaltando que o intervalo [a, b] é validado pelo Teorema de Bolzano. Outra característica deste método de resolução é a aproximação da raiz com o erro ϵ desejado, conforme indica Ruggiero e Lopes (1996) ao mencionar que o objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida: $(b - a) < \epsilon$, usando para isto a sucessiva divisão de [a, b] ao meio.

De acordo com Humes *et al* (1984), ao se dividir o intervalo [a, b] em [a, (a + b)/2] e [(a + b)/2, b] deve-se determinar qual destes intervalos contém a raiz desejada, para tal se usa o fato de que se $f(x_n) . f(a) < 0$, então os novos extremos do intervalo serão dados por $[a, x_n]$; caso $f(x_n) . f(a) > 0$, então os extremos serão dados por $[x_n, b]$. A partir dessas orientações, pode-se definir a raiz x_n e o erro ϵ_n, como sendo:

$$x_n = \frac{a + b}{2} \tag{49}$$

e,

$$\epsilon_n = \left|\frac{b - a}{2}\right| \tag{50}$$

Humes *et al* (1984) ainda destaca que o método da bissecção converge, em suas iterações sucessivas, para o resultado desejado x_n com precisão ϵ_n, mas que essa convergência pode ser prejudicada por erros de arredondamento. Segundo Ruggiero e Lopes (1996), realizando o estudo da convergência, o método da bissecção pode gerar três sequências, sendo:

a) não decrescente e limitada superiormente por b_0, de modo que existe $r \in \mathbf{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = r$;
b) não crescente e limitada inferiormente por a_0, de modo que existe $s \in \mathbf{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = s$;
c) por construção $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, em que $a_n < x_n < b_n$, $\forall n$, de modo que a amplitude n de cada intervalo é a metade da amplitude do intervalo anterior.

Sendo assim,

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

E como a_n e b_n são convergentes, tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

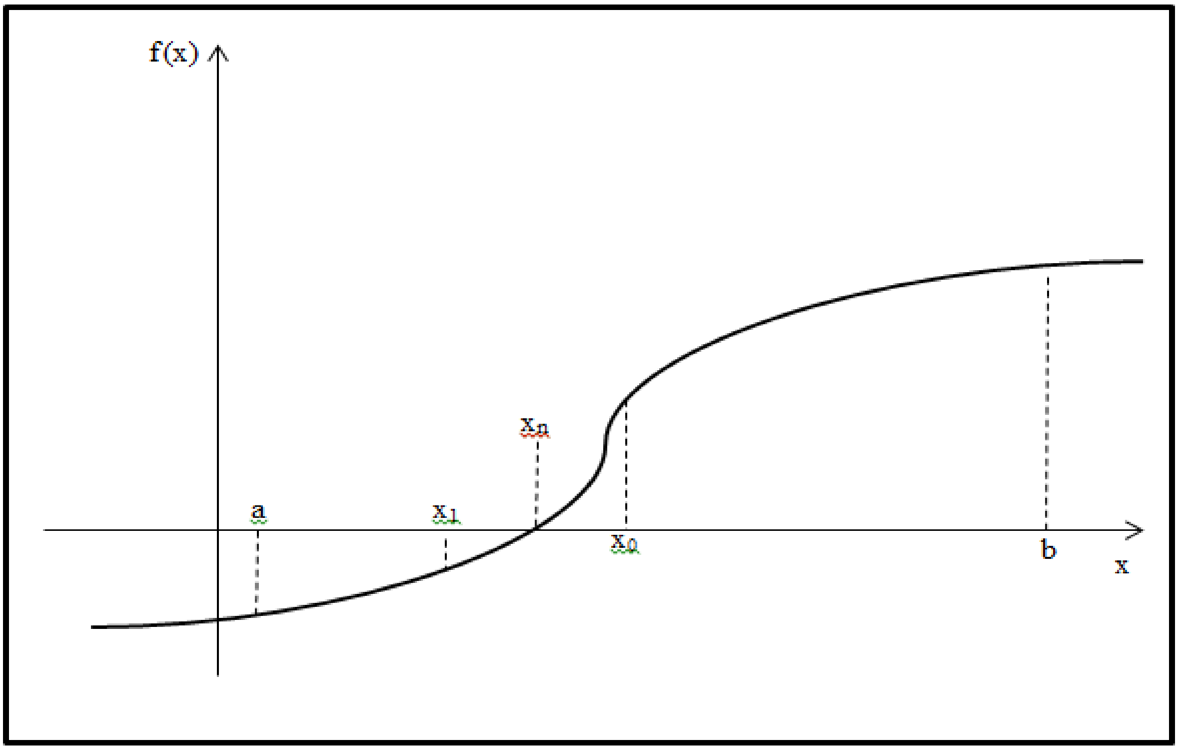
Com isso, tem-se que r = s, segue que o limite destas duas sequências é dado por L = r = s. E para se provar que L é a raiz da função, basta provar que f(L) = 0. Uma vez que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n). f(b_n) \leq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n). \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$$
$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) . f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \leq 0$$
$$f(r). f(s) \leq 0$$
$$f(L). f(L) \leq 0$$
$$0 \leq [f(L)]^2 \leq 0$$
$$f(L) = 0$$

Com isso, percebe-se que este método gera uma sequência convergente quando a função for contínua em [a, b] com f(a) . f(b) < 0.

Uma interpretação geométrica deste método é dada pela Figura 16 abaixo, em que se percebe a divisão ao meio do intervalo [a, b], de forma constante, até que se consiga uma aproximação da raiz da função.

Figura 16 – Aproximação da raiz de uma função f(x) pelo método da bissecção.



Fonte: formatação própria, baseada em RUGGIERO E LOPES, 1996, p. 41.

5.3.1 Resolução de equações pelo método da bissecção

Exemplo 1 – Use o método da bissecção para encontrar um valor aproximado da raiz quadrada de 5, com erro menor ou igual a 0,01.

Solução: determinar a raiz quadrada de 5 significa encontrar a raiz positiva da equação $x^2 - 5 = 0$ implicando na raiz da função $f(x) = x^2 - 5$. Uma vez que $f(2) = -1$ e $f(3) = 4$, então existe pelo menos uma raiz real entre 2 e 3, pois o Teorema de Bolzano indica que dados dois números a e b (com $a < b$), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 7 – Resolução da equação $x^2 - 5 = 0$ pelo método da bissecção

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$\epsilon_n = \left\|\frac{b-a}{2}\right\|$	Sinal de $f(x_n)\,.\,f(a)$
1	2,000000	3,000000	2,500000	0,500000	–
2	2,000000	2,500000	2,250000	0,250000	–
3	2,000000	2,250000	2,125000	0,125000	+

4	2,125000	2,250000	2,187500	0,062500	+
5	2,187500	2,250000	2,218750	0,031250	+
6	2,218750	2,250000	2,234375	0,015625	+
7	2,234375	2,250000	2,242188	0,007813	

Com isso, determina-se que uma aproximação para $\sqrt{5} \cong 2{,}242188$ com erro $\epsilon \leq 0{,}01$.

Exemplo 2 – Use o método da bissecção para encontrar uma raiz da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com erro menor ou igual a 0,01.

Solução: observando que da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$se determina o zero da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$, sendo que a raiz se encontra no intervalo [2, 3], pois $f(2) = -7$ e $f(3) = 3$, então existe pelo menos uma raiz real entre 2 e 3, pois o Teorema de Bolzano indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 8 – Resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ pelo método da bissecção

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$\epsilon_n = \left\lvert\frac{b-a}{2}\right\rvert$	Sinal de $f(x_n) \,.\, f(a)$
1	2,000000	3,000000	2,500000	0,500000	+
2	2,500000	3,000000	2,750000	0,250000	+
3	2,750000	3,000000	2,875000	0,125000	−
4	2,750000	2,875000	2,812500	0,062500	+
5	2,812500	2,875000	2,843750	0,031250	−
6	2,812500	2,843750	2,828125	0,015625	−
7	2,812500	2,828125	2,820313	0,007813	

Logo, uma aproximação da raiz da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ é dada por $x = 2{,}820313$ com erro $\epsilon \leq 0{,}01$.

Exemplo 3 – Use o método da bissecção para encontrar uma raiz da equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, com erro menor ou igual a 0,001.

Solução: observando que da equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ se determina a raiz da função $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [0, 1], pois $f(0) = 36$ e f(1) = –17, então existe pelo menos uma raiz real entre 0 e 1, pois o Teorema de Bolzano indica que dados dois números a e b (com a < b), se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes neste intervalo será ímpar. Com base neste teorema, temos:

Tabela 9 – Resolução da equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ pelo método da bissecção

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$\epsilon_n = \left\lvert\frac{b-a}{2}\right\rvert$	Sinal de $f(x_n) . f(a)$
1	0,000000	1,000000	0,500000	0,500000	+
2	0,500000	1,000000	0,750000	0,250000	–
3	0,500000	0,750000	0,625000	0,125000	+
4	0,625000	0,750000	0,687500	0,062500	–
5	0,625000	0,687500	0,656250	0,031250	–
6	0,625000	0,656250	0,640625	0,015625	+
7	0,640625	0,656250	0,648438	0,007813	–
8	0,640625	0,648438	0,644532	0,003906	–
9	0,640625	0,644532	0,642579	0,001954	+
10	0,642579	0,644532	0,643556	0,000976	

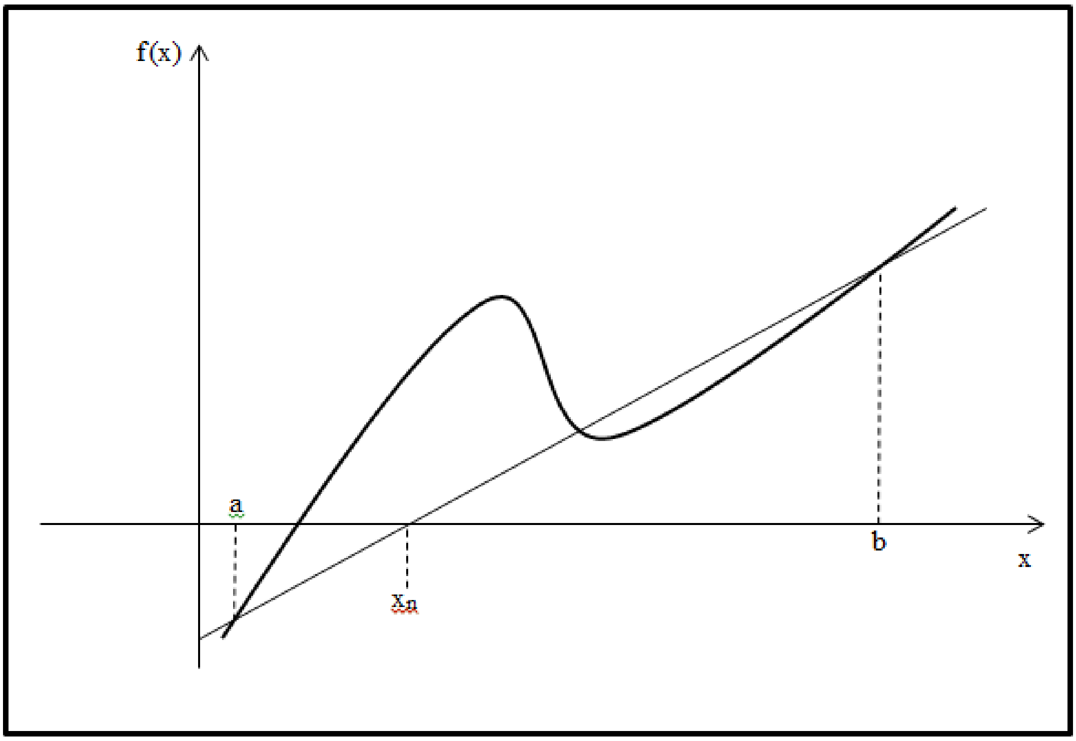
Logo, uma aproximação da raiz da equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ é dada por x = 0,643556 com erro $\epsilon \leq 0,001$.

5.4 O Método das Cordas

O método das cordas, ou método da posição falsa, sugere a determinação de raízes de equações algébricas através de interações sucessivas. De acordo com Barroso *et al* (1987), este método pode ser utilizado em funções que tenham a derivada segunda com sinal constante no intervalo [a, b], de modo que f(a) . f(b) < 0, e exista apenas um número $x_n \in [a, b]$ de forma que $f(x_n) = 0$. Este processo consiste na divisão do intervalo [a, b] em partes proporcionais à razão $-\frac{f(a)}{f(b)}$ até que se localize a raiz da equação, conforme Figura 17 abaixo. É válido ressaltar ainda que o número x_n é o ponto de intersecção do eixo x com a reta que passa por (a, f(a)) e (b, f(b)).

Segundo Ruggiero e Lopes (1996), o estudo de convergência da sequência gerada pelo método da posição falsa segue o mesmo raciocínio utilizado para demonstrar a convergência no método da bissecção, ressaltando que quando a função f é derivável duas vezes em [a, b] então o sinal de f''(x) não muda neste intervalo.

Figura 17 – Aproximação da raiz de uma função f(x) pelo método das cordas.



Fonte: formatação própria, baseada em RUGGIERO E LOPES, 1996, p. 49.

De acordo com a Figura 17 acima, pode-se determinar a raiz da função através de aproximações sucessivas por partes proporcionais, de modo que:

$$\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{- f(x_0)} = \frac{x_0 - b}{f(x_0) - f(b)}$$

$$x_1 - x_0 = - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(b)}.(x_0 - b)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(b)}.(x_0 - b) \tag{51}$$

Utilizando o processo de indução matemática na equação (51), pode-se concluir que:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(c)}.(x_{n-1} - c) \qquad (52)$$

De acordo com Barroso *et al* (1987), na equação (52) acima, tem-se n = 1,2, 3, ..., c é ponto extremo do intervalo [a, b], de modo que f(c) . f''(c) > 0. Ao ser aplicar a equação (51) sucessivas vezes, tem-se que a aproximação x_n se aproxima cada vez mais da raiz desejada do que a aplicação anterior x_{n-1}.

Seja δ uma aproximação da raiz desejada e supondo $\delta = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}$, com a < δ < b e sabendo que "se f(x) é contínua em [a, b] com f(a) . f(b) < 0 então o método da posição falsa gera uma sequência convergente" (Ruggiero e Lopes, 1996, p. 51), temos que:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(c)}.(x_{n-1} - c)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(c)}.(x_{n-1} - c)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(c)}.(x_{n-1} - c) \qquad (53)$$

Lembrando que $\delta = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}$, por hipótese, temos:

$$\delta = \delta - \frac{f(\delta)}{f(\delta) - f(c)}(\delta - c)$$

$$\frac{f(\delta)}{f(\delta) - f(c)}(\delta - c) = \delta - \delta$$

$$\frac{f(\delta)}{f(\delta) - f(c)}(\delta - c) = 0$$

$$\frac{f(\delta)}{f(\delta) - f(c)} = 0$$

$$f(\delta) = 0$$

Uma vez que f(x) = 0 tem somente uma raiz em [a, b], pode-se concluir que esta raiz é δ. Determina-se ainda a precisão do cálculo através da margem de erro desejada, sendo dada por $\epsilon = x_n - x_{n-1}$.

5.4.1 Resolução de equações pelo método das cordas

Exemplo 1 – Use o método das cordas para determinar uma raiz da equação $2x^3 + x^2 - 2 = 0$, com erro menor ou igual a 0,00001.

Solução: observando que da equação $2x^3 + x^2 - 2 = 0$ se determina a raiz da função $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [0, 1], pois $f(0) = -2$ e $f(1) = 1$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Além disso, dada $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2$ tem-se que $f''(x) = 12x + 2$, e com isso, uma escolha adequada é $c = 1$, pois $f(1) \,.\, f''(1) > 0$ Deste modo, temos:

Tabela 10 – Resolução da equação $2x^3 + x^2 - 2 = 0$ pelo método das cordas

n	x_{n-1}	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(c) - f(x_{n-1})}.(c - x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$
1	0,00000	0,66667	
2	0,66667	0,83019	0,16352
3	0,83019	0,85442	0,02423
4	0,85442	0,85762	0,00320
5	0,85762	0,85803	0,00042
6	0,85803	0,85809	0,00005
7	0,85809	0,85809	0,00001

Logo, uma raiz da equação $2x^3 + x^2 - 2 = 0$ é dada por $x = 0{,}85809$ com erro $\epsilon \leq 0{,}00001$.

Exemplo 2 – Use o método das cordas para determinar uma raiz da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com erro menor ou igual a 0,001.

Solução: observando que da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ se determina a raiz da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [1, 3], pois $f(1) = -5$ e $f(3) = 3$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Além disso, dada $f(x) = x^3 - 9x + 3$ tem-se que $f''(x) = 6x$, e com isso, uma escolha adequada é $c = 3$, pois $f(3) \,.\, f''(3) > 0$. Deste modo, temos:

Tabela 11 – Resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ pelo método das cordas

n	x_{n-1}	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(c) - f(x_{n-1})}.(c - x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$

1	1,00000	2,25000	
2	2,25000	2,74603	0,49603
3	2,74603	2,80987	0,06384
4	2,80987	2,81623	0,00636
5	2,81623	2,81685	0,00062

Logo, uma raiz da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ é dada por $x = 2{,}81685$ com erro $\epsilon \leq 0{,}001$.

Exemplo 3 – Use o método das cordas para determinar uma raiz quíntupla de 13, com erro menor ou igual a 0,0001.

Solução: observando que calcular a raiz quíntupla de 13, equivale à resolução da equação $x^5 - 13 = 0$, ou determinar a raiz da função $f(x) = x^5 - 13$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [1, 2], pois $f(1) = -12$ e $f(2) = 19$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Além disso, dada $f(x) = x^5 - 13$ tem-se que $f''(x) = 20x^3$, com isso, uma escolha adequada é $c = 2$, pois $f(2) \cdot f''(2) > 0$. Deste modo, temos:

Tabela 12 – Resolução da equação $x^5 - 13 = 0$ pelo método das cordas

n	x_{n-1}	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(c) - f(x_{n-1})} . (c - x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$
1	1,500000	1,610755	0,110755
2	1,610755	1,650440	0,039685
3	1,650440	1,663780	0,013340
4	1,663780	1,668162	0,004382
5	1,668162	1,669590	0,001428
6	1,669590	1,670054	0,000464
7	1,670054	1,670205	0,000151

Logo, uma raiz quíntupla de 13, ou seja, a raiz da equação $x^5 - 13 = 0$ é dada por $x = 1{,}670205$ com erro $\epsilon \leq 0{,}0001$.

5.5 O Método do Ponto Fixo

O método do ponto fixo, também denotado por método da iteração linear, indica o cálculo da raiz da função f(x) em um intervalo [a, b] através da transformação sucessiva da equação f(x) = 0 em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$, a partir de artifícios algébricos, usando-se uma aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$. Segundo Ruggiero e Lopes (1996), Com isso, transforma-se o problema do cálculo da raiz de f(x) em se determinar um ponto fixo de $\varphi(x)$, de modo que esta função $\varphi(x)$ será chamada de função de iteração para a equação inicial $f(x) = 0$. A fim de obter $\varphi(x)$ a partir de f(x), deve-se proceder segundo a forma geral $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ com a condição de que com o ponto fixo de $\varphi(x)$, aqui denotado como $\bar{x}$, se tenha $A(\bar{x}) \neq 0$. Com isso, tem-se que $f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}) = \bar{x}$, de fato:

($\Rightarrow$) Seja $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$

$\varphi(\bar{x}) = \bar{x} + A(\bar{x})f(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \bar{x}$

($\Leftarrow$) Se $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$

$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$

$\varphi(\bar{x}) = \bar{x} + A(\bar{x})f(\bar{x})$

$\bar{x} = \bar{x} + A(\bar{x})f(\bar{x})$

$A(\bar{x})f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

Um empecilho ou dificuldade deste método de resolução está na escolha adequada de $\varphi(x)$, conseguida através da devida manipulação algébrica de f(x), pois uma escolha inadequada pode levar a função que não convirja para a raiz desejada. Com isso, faz-se necessária a determinação de conceitos de convergência para a raiz desejada a partir de f(x), a saber:

> Seja $\bar{x}$ uma raiz de uma função f, isolada num intervalo I = [a, b] e seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para f(x) = 0. Se
> a) φ e φ' são funções contínuas em I;
> b) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$;
> c) $x_0 \in I$
> Então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para $\bar{x}$ (Ruggiero e Lopes, 1996, p. 58)

Uma vez que $\bar{x}$ é raiz da função f(x), temos que $f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \varphi(\bar{x})$. Deste modo, $x_{k+1} = \varphi(x_k) \Rightarrow x_{k+1} - \bar{x} = \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})$.

Sendo $\varphi(x)$ uma função contínua e diferenciável no intervalo I, pode-se afirmar, através do Teorema do Valor Médio[25] do Cálculo Diferencial, que se $x_k \in I$, então existe um número c_k entre x_k e $\bar{x}$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
&\varphi'(c_k)(x_k - \bar{x}) = \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) \\
&\varphi'(c_k)(x_k - \bar{x}) = \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) = x_{k+1} - \bar{x} \\
&\varphi'(c_k)(x_k - \bar{x}) = x_{k+1} - \bar{x} \\
&|\varphi'(c_k)(x_k - \bar{x})| = |x_{k+1} - \bar{x}| \\
&|\varphi'(c_k)||x_k - \bar{x}| = |x_{k+1} - \bar{x}| \\
&\underbrace{|\varphi'(c_k)|}_{<1}|x_k - \bar{x}| = |x_{k+1} - \bar{x}| < |x_k - \bar{x}| \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Com isso, percebe-se que a distância entre x_{k+1} e $\bar{x}$ é menor que a distância entre x_k e $\bar{x}$. Como o intervalo I está centrado em $\bar{x}$, se $x_k \in I$ então $x_{k+1} \in I$.

Vamos mostrar, agora, que o limite $\lim_{x\to\infty} x_k$ converge para $\bar{x}$. Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} - \bar{x} = \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) \\
&|x_1 - \bar{x}| = |\varphi(x_0) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi'(c_0)||x_0 - \bar{x}| \le M|x_0 - \bar{x}| \\
&|x_2 - \bar{x}| = |\varphi(x_1) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi'(c_1)||x_1 - \bar{x}| \le M|x_1 - \bar{x}| \le M^2|x_0 - \bar{x}| \\
&|x_3 - \bar{x}| = |\varphi(x_2) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi'(c_2)||x_2 - \bar{x}| \le M|x_2 - \bar{x}| \le M^3|x_0 - \bar{x}|
\end{aligned}
$$

Por indução, temos que:

$$|x_k - \bar{x}| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi'(c_{k-1})||x_{k-1} - \bar{x}| \le M|x_{k-1} - \bar{x}| \le M^k|x_0 - \bar{x}| \qquad (55)$$

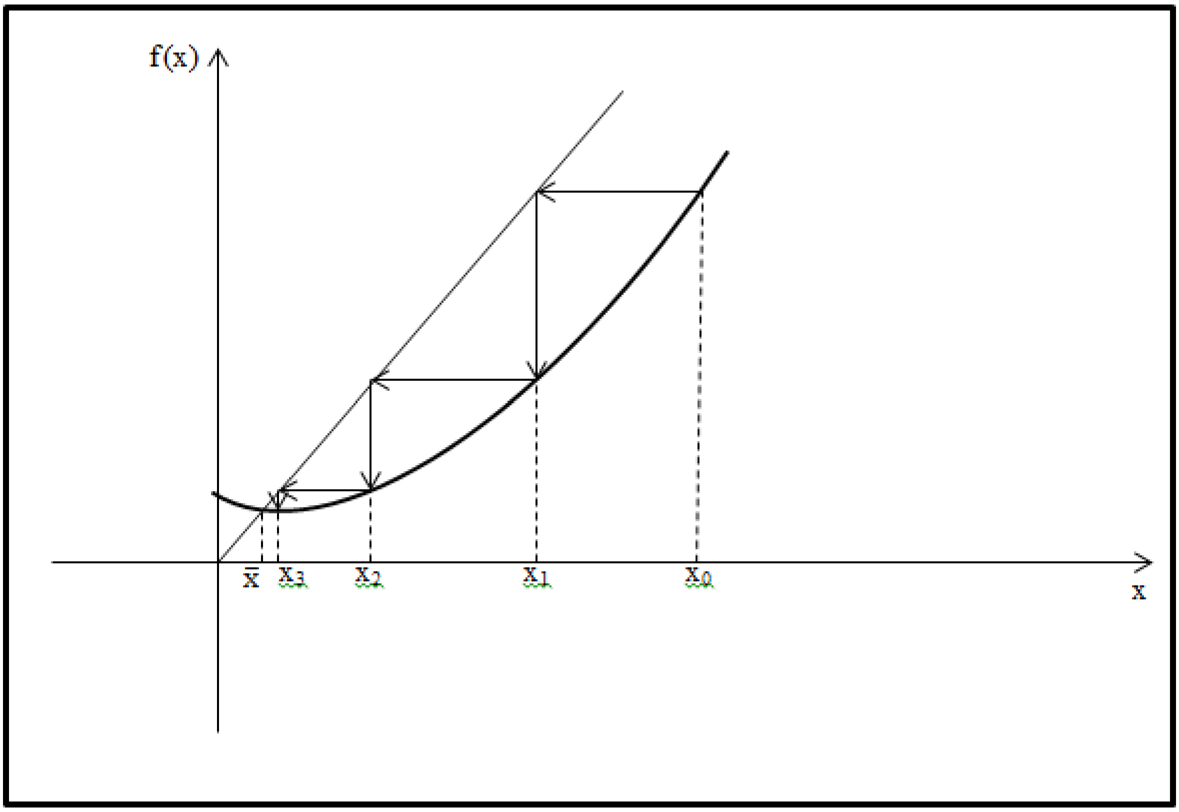
Com isso temos que $0 \le \lim_{k\to\infty}|x_k - \bar{x}| \le \lim_{k\to\infty} M^k|x_0 - \bar{x}|$, e como $0 < M < 1$, temos que:

$$\lim_{k\to\infty}|x_k - \bar{x}| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \qquad (56)$$

Graficamente, tem-se que a raiz $\bar{x}$ de f(x) é a abscissa do ponto de intersecção da reta y = x com a função de iteração $\varphi(x)$.

[25] Seja f(x) uma função real definida e contínua em [a, b], derivável em (a, b). Então existe c $\in$ (a, b) de modo que f(b) – f(a) = f'(c) . (b – a)

Figura 18 – Aproximação da raiz de uma função f(x) pelo método do ponto fixo.



Fonte: formatação própria, baseada em RUGGIERO E LOPES, 1996, p. 54.

5.5.1 Resolução de equações pelo método do ponto fixo

Exemplo 1 – Use o método do ponto fixo para determinar uma raiz da equação $x^3 - x - 1 = 0$, com erro menor ou igual a 0,001.

Solução: observando que da equação $x^3 - x - 1 = 0$ se determina a raiz da função $f(x) = x^3 - x - 1$, e destacando dentre as possíveis funções de iteração $\varphi(x)$, as funções $\varphi_1(x) = x^3 - 1$, $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$ e $\varphi_3(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, e ainda percebendo que uma raiz de f(x) se encontra no intervalo [1, 2] de acordo com o Teorema de Bolzano, pois f(1) = –1 e f(2) = 5, vê-se que a função de iteração adequada é a função $\varphi_2(x)$, pois tomando x_0 = 1,5 tem-se que $|\varphi'_2(1{,}5)| = 0{,}18096 \ldots < 1$, que é um dos critérios de convergência, já havendo percebido que tanto $\varphi_2(x)$ quanto $\varphi'_2(x)$ são contínuas em [1, 2]. Deste modo, temos:

Tabela 13 – Resolução da equação $x^3 - x - 1 = 0$ pelo método do ponto fixo

n	x_{n-1}	$\varphi(x_{n-1}) = x_n$	$f(x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$

1	1,50000	1,35721	0,87500	
2	1,35721	1,33086	0,14279	-0,14279
3	1,33086	1,32588	0,02635	-0,02635
4	1,32588	1,32494	0,00498	-0,00498
5	1,32494	1,32476	0,00094	-0,00094

Logo, uma raiz da equação $x^3 - x - 1 = 0$ é dada por $\bar{x} = 1{,}32494$ com erro $\epsilon \leq 0{,}001$.

Exemplo 2 – Use o método do ponto fixo para determinar a raiz quíntupla de 25, com erro menor ou igual a 0,0001.

Solução: observando que através da raiz quíntupla de 25 se determina a raiz da função $f(x) = x^5 - 25$, e destacando dentre as possíveis funções de iteração $\varphi(x)$, as funções $\varphi_1(x) = \frac{25}{x^4}$, $\varphi_2(x) = \pm\sqrt{\frac{25}{x^3}}$ e $\varphi_3(x) = \sqrt[3]{\frac{25}{x^2}}$, e ainda percebendo que uma raiz de f(x) se encontra no intervalo [1, 2] de acordo com o Teorema de Bolzano, pois f(1) = –24 e f(2) = 7, vê-se que a função de iteração adequada é a função $\varphi_3(x)$, pois tomando $x_0 = 1{,}5$ tem-se que $|\varphi'_3(1{,}5)| = 0{,}99175 \ldots < 1$, que é um dos critérios de convergência, já havendo percebido que tanto $\varphi_3(x)$ quanto $\varphi'_3(x)$ são contínuas em [1, 2]. Deste modo, temos:

Tabela 14 – Resolução da equação $x^5 - 25 = 0$ pelo método do ponto fixo

n	x_{n-1}	$\varphi(x_{n-1}) = x_n$	$f(x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$
1	1,500000	2,231443	-17,406300	
2	2,231443	1,712338	30,325980	0,731443
3	1,712340	2,042931	-10,278660	-0,519110
4	2,042930	1,816119	10,585130	0,330590
5	1,816120	1,964342	-5,243000	-0,226810
6	1,964340	1,864240	4,247320	0,148220
7	1,864240	1,930392	-2,483060	-0,100100
8	1,930392	1,886035	1,805698	0,066151
9	1,886035	1,915491	-1,135710	-0,044360
10	1,915491	1,895803	0,787008	0,029456
11	1,895803	1,908906	-0,511280	-0,019690
12	1,908906	1,900161	0,346771	0,013103

13	1,900161	1,905986	-0,228540	-0,008750
14	1,905986	1,902101	0,153531	0,005826
15	1,902101	1,904690	-0,101830	-0,003890
16	1,904690	1,902963	0,068120	0,002590
17	1,902963	1,904114	-0,045310	-0,001730
18	1,904114	1,903347	0,030253	0,001151
19	1,903347	1,903859	-0,020150	-0,000770
20	1,903859	1,903518	0,013441	0,000512
21	1,903518	1,903745	-0,008960	-0,000340
22	1,903745	1,903593	0,005973	0,000227
23	1,903593	1,903694	-0,003980	-0,000150
24	1,903694	1,903627	0,002654	0,000101
25	1,903627	1,903672	-0,001770	-0,000067

Logo, a raiz quíntupla de 25 é dada por $\overline{x} = 1{,}903627$ com erro $\epsilon \leq 0{,}0001$.

Exemplo 3 – Use o método do ponto fixo para determinar uma raiz da equação $-x^4 - x + 7 = 0$, com erro menor ou igual a 0,00001.

Solução: observando que da equação $-x^4 - x + 7 = 0$ se determina a raiz da função $f(x) = -x^4 - x + 7$, e destacando dentre as possíveis funções de iteração $\varphi(x)$, as funções $\varphi_1(x) = 7 - x^4$, $\varphi_2(x) = \pm\sqrt[4]{7 - x}$, $\varphi_3(x) = \frac{7-x}{x^3}$ e $\varphi_4(x) = \sqrt[3]{\frac{7-x}{x}}$, e ainda percebendo que uma raiz de f(x) se encontra no intervalo [–2, –1] de acordo com o Teorema de Bolzano, pois $f(-2) = -7$ e $f(-1) = 7$, vê-se que a função de iteração adequada é a função $\varphi_2(x)$, pois tomando $x_0 = -1{,}5$ tem-se que $|\varphi'_4(-1{,}5)| = 0{,}32626 \ldots < 1$, que é um dos critérios de convergência, já havendo percebido que tanto $\varphi_4(x)$ quanto $\varphi'_4(x)$ são contínuas em [–2, –1]. Deste modo, temos:

Tabela 15 – Resolução da equação $-x^4 - x + 7 = 0$ pelo método do ponto fixo

n	x_{n-1}	$\varphi(x_{n-1}) = x_n$	$f(x_{n-1})$	$\epsilon = x_n - x_{n-1}$
1	-1,500000	-1,782827	3,437500	
2	-1,782827	-1,701538	-1,319860	0,081289
3	-1,701538	-1,722866	0,319168	-0,021328

4	-1,722866	-1,717128	-0,087740	0,005738
5	-1,717128	-1,718661	0,023314	-0,001534
6	-1,718661	-1,718251	-0,006252	0,000411
7	-1,718251	-1,718360	0,001672	-0,000110
8	-1,718360	-1,718331	-0,000448	0,000029
9	-1,718331	-1,718339	0,000120	-0,000008
10	-1,718339	-1,718337	-0,000032	0,000002

Logo, uma raiz da equação $-x^4 - x + 7 = 0$ é dada por $\bar{x} = -1{,}718339$ com erro $\epsilon \leq 0{,}00001$.

5.6 Comparação entre os Métodos de Resolução

Após a abordagem sobre os diferentes métodos de resolução de equações algébricas, que foram trabalhados neste capítulo, um questionamento surge naturalmente: qual o método mais eficaz? Entretanto a resposta a este questionamento não é exata, posto que a pergunta possui várias faces. A eficácia de cada método depende de qual aspecto está sendo avaliado. De acordo com Ruggiero e Lopes (1996) e Barroso *et al* (1987), alguns dos critérios para se realizar o estudo comparativo são: garantias de convergência, rapidez de convergência e esforço computacional. Entende-se que o esforço computacional é calculado através de quantidade de iterações realizadas e sobre o grau de complexidade dessas iterações.

De acordo com as considerações acima e o desejo de detectar qual método se mostra mais rápido e objetivo na resolução de equações algébricas, propõe-se a solução simultânea de alguns problemas a partir dos métodos anteriormente descritos, a fim de se conseguir elementos que nos permitam uma conclusão sobre a referida comparação.

5.6.1 Resolução de equações – uma comparação simultânea com todos os métodos

Exemplo 1 – Calcule a raiz quarta de 5, com aproximação de cinco casas decimais, através dos métodos de Newton, secante, bissecção, cordas e ponto fixo a fim de evidenciar a eficácia de resolução.

Solução: observando que calcular a raiz quarta de 5, equivale à resolução da equação $x^4 - 5 = 0$, ou da raiz da função $f(x) = x^4 - 5$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [1, 2], pois $f(1) = -4$ e $f(2) = 11$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Deste modo, temos:

Tabela 16 – Resolução da equação $x^4 - 5 = 0$, comparação simultânea entre os métodos

	Newton			Secante			Bissecção			Cordas		Ponto Fixo	
n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	a	b	x_n	x_{n-1}	x_n	x_{n-1}	x_n
1	1,50000	0,00463	1,49537	1,00000	2,00000	1,26667	1,00000	2,00000	1,50000	1,00000	1,49231	1,500000	1,493802
2	1,49537	0,00002	1,49535	1,26667	2,00000	1,39916	1,00000	1,50000	1,25000	1,49231	1,49533	1,493802	1,495865
3	1,49535	0,00000	1,49535	1,39916	2,00000	1,45682	1,25000	1,50000	1,37500	1,49533	1,49535	1,495865	1,495177
4				1,45682	2,00000	1,48024	1,37500	1,50000	1,43750	1,49535	1,49535	1,495177	1,495406
5				1,48024	2,00000	1,48948	1,43750	1,50000	1,46875			1,495406	1,495330
6				1,48948	2,00000	1,49308	1,46875	1,50000	1,48438			1,495330	1,495355
7				1,49308	2,00000	1,49447	1,48438	1,50000	1,49219			1,495355	1,495347
8				1,49447	2,00000	1,49501	1,49219	1,50000	1,49609			1,495347	1,495349
9				1,49501	2,00000	1,49522	1,49219	1,49609	1,49414			1,495349	1,495349
10				1,49522	2,00000	1,49530	1,49414	1,49609	1,49512				
11				1,49530	2,00000	1,49533	1,49512	1,49609	1,49561				
12				1,49533	2,00000	1,49534	1,49512	1,49561	1,49536				
13				1,49534	2,00000	1,49535	1,49512	1,49536	1,49524				
14				1,49535	2,00000	1,49535	1,49524	1,49536	1,49530				
15							1,49530	1,49536	1,49533				
16							1,49533	1,49536	1,49535				
17							1,49535	1,49536	1,49535				

A partir da Tabela 16 acima, pode-se fazer um quadro resumo acerca dos resultados obtidos, como sendo:

Tabela 17 – Resolução da equação $x^4 - 5 = 0$, síntese da comparação entre os métodos

	Newton	**Secante**	**Bissecção**	**Cordas**	**Ponto Fixo**
Dados iniciais	x = 1,5	x(0) = 1 e x(1) = 2	[1, 2]	[1, 2]	[1, 2]
Solução encontrada	1,49535	1,49535	1,49535	1,49535	1,49535
Número iterações	3	14	17	4	9

Exemplo 2 – Encontre uma solução para a equação $x^3 + x^2 - 5x - 4 = 0$, com aproximação de cinco casas decimais, através dos métodos de Newton, secante, bissecção, cordas e ponto fixo a fim de evidenciar a eficácia de resolução.

Solução: observando que encontrar uma solução de $x^3 + x^2 - 5x - 4 = 0$, equivale a determinar uma raiz da função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 4$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo [2, 3], pois $f(2) = -2$ e $f(3) = 16$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Deste modo, temos:

Tabela 18 – Resolução da equação $x^3 + x^2 - 5x - 4 = 0$, comparação simultânea entre os métodos

	Newton			**Secante**			**Bissecção**			**Cordas**		**Ponto Fixo**	
n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	a	b	x_n	x_{n-1}	x_n	x_{n-1}	x_n
1	2,50000	0,28667	2,21333	2,00000	3,00000	2,10526	2,00000	3,00000	2,50000	2,00000	2,13559	2,50000	1,88571
2	2,21333	0,04779	2,16554	2,10526	2,00000	2,17024	2,00000	2,50000	2,25000	2,13559	2,15949	1,88571	2,46775
3	2,16554	0,00129	2,16425	2,17024	2,00000	2,16366	2,00000	2,25000	2,12500	2,15949	2,16347	2,46775	1,90928
4	2,16425	0,00000	2,16425	2,16366	2,00000	2,16431	2,12500	2,25000	2,18750	2,16347	2,16412	1,90928	2,43875
5				2,16431	2,00000	2,16424	2,12500	2,18750	2,15625	2,16412	2,16423	2,43875	1,93098
6				2,16424	2,00000	2,16425	2,15625	2,18750	2,17188	2,16423	2,16424	1,93098	2,41266
7				2,16425	2,00000	2,16425	2,15625	2,17188	2,16407	2,16424	2,16425	2,41266	1,95094
8							2,16407	2,17188	2,16797	2,16425	2,16425	1,95094	2,38916
9							2,16407	2,16797	2,16602			2,38916	1,96928
10							2,16407	2,16602	2,16505			1,96928	2,36798
11							2,16407	2,16505	2,16456			2,36798	1,98612
12							2,16407	2,16456	2,16432			1,98612	2,34886
13							2,16407	2,16432	2,16419			2,34886	2,00156
14							2,16419	2,16432	2,16425			2,00156	2,33160
15							2,16419	2,16425	2,16422			2,33160	2,01572
16							2,16422	2,16425	2,16424			2,01572	2,31600
17							2,16424	2,16425	2,16424			2,31600	2,02868

A partir da Tabela 18 acima, pode-se fazer um quadro resumo acerca dos resultados obtidos, como sendo:

Tabela 19 – Resolução da equação $x^3 + x^2 - 5x - 4 = 0$, síntese da comparação entre os métodos

	Newton	**Secante**	**Bissecção**	**Cordas**	**Ponto Fixo**
Dados iniciais	x = 2,5	x(0) = 2 e x(1) = 3	[2, 3]	[2, 3]	[2, 3]
Solução encontrada	2,16425	2,16425	2,16424	2,16425	2,16425
Número iterações	4	7	17	8	225

Exemplo 3 – Encontre uma solução para a equação $2x^2 - 8x - 7 = 0$, com aproximação de cinco casas decimais, através dos métodos de Newton, secante, bissecção, cordas e ponto fixo a fim de evidenciar a eficácia de resolução.

Solução: observando que encontrar uma solução de $2x^2 - 8x - 7 = 0$, equivale a determinar uma raiz da função $f(x) = 2x^2 - 8x - 7$, sendo que esta raiz se encontra no intervalo $[-1, 0]$, pois $f(-1) = 3$ e $f(0) = -7$, de acordo com o Teorema de Bolzano. Deste modo, temos:

Tabela 20 – Resolução da equação $2x^2 - 8x - 7 = 0$, comparação simultânea entre os métodos

	Newton			**Secante**			**Bissecção**			**Cordas**		**Ponto Fixo**	
n	x_n	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	a	b	x_n	x_{n-1}	x_n	x_{n-1}	x_n
1	-0,50000	0,25000	-0,75000	-1,00000	0,00000	-0,70000	-1,00000	0,00000	-0,50000	-1,00000	-0,72727	-0,50000	-0,81250
2	-0,75000	-0,01136	-0,73864	-0,70000	0,00000	-0,74468	-1,00000	-0,50000	-0,75000	-0,72727	-0,73913	-0,81250	-0,70996
3	-0,73864	-0,00002	-0,73861	-0,74468	0,00000	-0,73767	-0,50000	-0,75000	-0,62500	-0,73913	-0,73859	-0,70996	-0,74899
4	-0,73861	0,00000	-0,73861	-0,73767	0,00000	-0,73876	-0,62500	-0,75000	-0,68750	-0,73859	-0,73861	-0,74899	-0,73475
5				-0,73876	0,00000	-0,73859	-0,68750	-0,75000	-0,71875	-0,73861	-0,73861	-0,73475	-0,74003
6				-0,73859	0,00000	-0,73862	-0,71875	-0,75000	-0,73438			-0,74003	-0,73809
7				-0,73862	0,00000	-0,73861	-0,73438	-0,75000	-0,74219			-0,73809	-0,73881
8				-0,73861	0,00000	-0,73861	-0,73438	-0,74219	-0,73829			-0,73881	-0,73854
9							-0,73829	-0,74219	-0,74024			-0,73854	-0,73864
10							-0,73829	-0,74024	-0,73927			-0,73864	-0,73860
11							-0,73829	-0,73927	-0,73878			-0,73860	-0,73862
12							-0,73829	-0,73878	-0,73854			-0,73862	-0,73861
13							-0,73854	-0,73878	-0,73866				
14							-0,73854	-0,73866	-0,73860				
15							-0,73860	-0,73866	-0,73863				
16							-0,73860	-0,73863	-0,73862				
17							-0,73860	-0,73862	-0,73861				

A partir da Tabela 20 acima, pode-se fazer um quadro resumo acerca dos resultados obtidos, como sendo:

Tabela 21 – Resolução da equação $2x^2 - 8x - 7 = 0$, síntese da comparação entre os métodos

	Newton	**Secante**	**Bissecção**	**Cordas**	**Ponto Fixo**
Dados iniciais	x = -0,5	x(0) = -1 e x(1) = 0	[-1, 0]	[-1, 0]	[-1, 0]
Solução encontrada	-0,73861	-0,73861	-0,73861	-0,73861	-0,73861
Número iterações	4	8	17	5	12

Analisando as tabelas nos exemplos propostos acima, pode-se evidenciar que o método de Newton se mostrou muito eficiente para a determinação da raiz desejada, possuindo boa agilidade na convergência. O método da secante, por não exigir o conhecimento sobre função derivada, se mostra inicialmente mais prático que o método de Newton, possuindo boa rapidez de convergência. Quanto ao método da bissecção, pode-se perceber que possui uma convergência lenta, e por isso, alto número de iterações, sendo o método menos eficaz, apesar de possuir os cálculos mais simplificados entre todos os métodos utilizados. Já o método das cordas se mostrou com boa capacidade de convergência, bastante próximo ao método de Newton, entretanto tem como empecilhos o conhecimento do estudo de sinal da função derivada segunda e a escolha adequada do ponto fixo c para que haja boa convergência.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho de dissertação teve por finalidade realizar um estudo sobre os diferentes métodos de resolução de equações algébricas, envolvendo as estruturas algébrica, geométrica e computacional. Concomitantemente houve um estudo com ênfase na História da Matemática a fim de contextualizar as situações diversas nas quais tais métodos de resolução foram criados ou descobertos. As demonstrações das mais diversas fórmulas utilizadas ao longo do trabalho, visando estimular esta prática junto aos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, servem de subsídio para fomentar as discussões acerca deste tema em Educação Matemática e com isso, contribuir para a constante evolução da Matemática. Deste modo, houve o cuidado de se elaborar este trabalho com uma linguagem matemática acessível a vários níveis de ensino de matemática sem, no entanto, perder a generalidade e o rigor necessários ao bom desenvolvimento pertinentes à evolução dos estudos matemáticos.

Durante toda a pesquisa bibliográfica, realizada em livros, artigos científicos, dissertações de mestrado e teses de doutorado pertinentes ao tema deste trabalho, pode-se constatar que timidamente se constrói a ampliação do pensamento humanizado sobre a matemática. Dentre os diversos pilares que servem de base à Educação Matemática, pode-se perceber a demonstração das fórmulas e a contextualização histórica de fatos ligados à matemática podem propiciar aos futuros professores o diferencial para que contribuam ao real aprendizado e à utilização cotidiana da matemática pelos estudantes, quer na Educação Básica ou no Ensino Superior. E isto se deve ao fato de que quando se conhece e se discute a demonstração das fórmulas, se propicia ao estudante a compreensão da necessidade dos estudos em matemática estarem continuamente em ascensão; enquanto que quando se contextualiza historicamente os fatos matemáticos, se oferece ao estudante a oportunidade de perceber que a matemática é uma ciência exata, porém criada pelo homem e por isso é falível, e que os diferentes tópicos matemáticos trabalhados ao longo da sua vida escolar tiverem uma necessidade real que serviu de estímulo, ou seja, que sempre há uma aplicação prática em matemática.

Na abordagem sobre os métodos de resolução, além de evidenciar a demonstração das fórmulas e a inserção histórica dos fatos, procurou-se trabalhar com problemas e/ou exercícios que pudessem justificar e exemplificar a utilização cotidiana das abordagens algébrica, geométrica e computacional. Na abordagem algébrica se buscou refletir sobre como as fórmulas resolutivas para cálculo de equações de 1º, 2º, 3º e 4º graus foram criadas, trabalhando a demonstração de tais estruturas algébricas. A abordagem geométrica teve por ênfase a correlação entre álgebra e geometria, vislumbrando alguns métodos ou justificativas geométricas para a resolução das equações algébricas. Enquanto que, nos métodos computacionais, pode-se perceber que as mais variadas formas de resolução de um mesmo problema, utilizando-se de diferentes artifícios matemáticos, culminam na junção de álgebra e de geometria sobre a ótica da lógica computacional em que se utilizam métodos de iteração, ou seja, de aproximações sucessivas; realizando ao fim uma comparação entre estes métodos a fim de discutir qual o mais eficaz e sob qual perspectiva esta eficácia e eficiência se aproxima dos resultados desejados.

Finalmente, vale salientar que a proposta final desta dissertação é servir de subsídio para estudos futuros sobre demonstrações de equações algébricas, e por isso mesmo, este trabalho não se encontra acabado, considero apenas como uma reflexão sobre este tema que ainda deve ser trabalhado, num futuro próximo, a fim de se conseguir elementos que permitam um estudo mais aprofundado do tema e, com isso, uma contribuição significativa à comunidade que lida com o Ensino de Matemática. Mas, mesmo assim, não deseja esgotar os estudos sobre o tema, e sim, juntamente com outros trabalhos, servir de substrato para o desenvolvimento docente e acadêmico da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** In: 30º Encontro Anual da ANPED, 2007, Caxumbu. 30º Reunião Anual da ANPED. Timbauda-PE: Espaço Livre, 2007. v. 1. p. 1-18.Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Grenoble: la Pensée Sauvage, **Recherches em Didactique des Matémathiques**, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, N. **Une etude des processus de preuve em mathématiques chez des élèges de colège.** Grenoble – França: Univ. J. Fourier, 1988.

BARROSO, Leônidas Conceição *et al*. **Cálculo Numérico (com aplicações).** 2 ed. São Paulo: Editora Harbra, 1987.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 3 ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2010.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: MEC – SEMTEC, 2002.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** Vol. 1. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008(a).

_____._____. Vol. 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008(b).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Ática, 2004.

FOSSA, John A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática.** 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010(a).

_____. **O romance das equações algébricas.** 4ª Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010(b).

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática completa.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora FTD, 2005.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2.** Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em 01 out 2013.

HUMES, Ana Flora P. C. *et al*. **Noções de cálculo numérico.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984.

KILHIAN, Kleber. **Resolvendo equações qudráticas pelo método de Descartes.** Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/09/resolvendo-equacoes-quadraticas-

pelo.html>. Acesso em 01 out 2013.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André L. Andrejew. **A história da matemática em sala de aula: um recurso metodológico.** In: IV Jornada Nacional de Educação Matemática. Passo Fundo, 2012.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MARCONDES, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sergio Emilio. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2003.

MASSARANI, Giulio. **Introdução ao cálculo numérico.** Rio de Janeiro: Editora Ao Livro Técnico S.A, 1967.

MENDES, Iran Abreu. **Tendências da pesquisa em História da Matemática no Brasil: a propósito de dissertações e teses (1990 – 2010).** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 14, n. 3, p. 465-480, 2012

MENDES, Lourival Junior. **Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção de ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/lourival_mendes.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012

NAGAFUCHI, Thiago; BATISTA, Irinéa de Lourdes. **O que é demonstração? aspectos filosóficos.** Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/69-1-A-gt2_nagafuchi_ta.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012.

NOBRE, Sergio. **A disciplina acadêmica “História da Matemática” na formação de profissionais em matemática.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 14, n. 3, p. 507-524, 2012.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Editora Moderna. 2005.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.uems.br/semana/2009/Trabalhos/TC_05.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera L. da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2 ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SANTOS, Alex B. C.; SOUZA, Andreson C. Santos; NUNES, José M. V. **Inclusão da História da Matemática no processo ensino aprendizagem.** In: Encontro Paranaense de

Educação Matemática. Belém, 2011.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula: ensino médio.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora FTD, 2005.

SILVA, Marcilene M. S; SALES, Antonio. **A demonstração, prova e argumentação no ensino da matemática.** Disponível em: <http://www.uems.br/semana/2009/Trabalhos/TC_05.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez S. V. **Matemática – ensino médio.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

TUNALA, Nelson. **Resolução geométrica da equação do 2º grau.** Revista do Professor de Matemática – RPM – Vol. 12. Rio de Janeiro: SBM, 1988.