



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

FLÁVIA CRISTYNA OLIVEIRA ARAÚJO

FRATURAMENTO COESIVO DE MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS USANDO
ELEMENTOS DE INTERFACE

FORTALEZA
2014

FLÁVIA CRISTYNA OLIVEIRA ARAÚJO

FRATURAMENTO COESIVO DE MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS USANDO
ELEMENTOS DE INTERFACE

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Orientadora: Tereza Denyse Pereira de Araújo, D.Sc.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A689f Araújo, Flávia Cristyna Oliveira.
Fraturamento Coesivo de Materiais Quase-Frágeis Usando Elementos de Interface / Flávia Cristyna Oliveira Araújo. – 2014.
94 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2014.
Orientação: Prof. Dr. Tereza Denyse Pereira de Araújo .

1. Modelo da Zona Coesiva. 2. Elementos de Interface. 3. Lei de Amolecimento Linear. 4. Lei de Amolecimento Exponencial . 5. Modo Misto. I. Título.

CDD 624.1

FLÁVIA CRISTYNA OLIVEIRA ARAÚJO MONTENEGRO

FRATURAMENTO COESIVO DE MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS USANDO
ELEMENTOS DE INTERFACE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Tereza Denyse Pereira de Araújo, D.Sc. (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D. (Membro Externo ao Programa)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Deane de Mesquita Roehl, D.Sc. (Membro Externo a Universidade)
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

A Deus.

A meus pais, por serem meus pilares de
sustentação.

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo, por a vida, pelas oportunidades, pelo amor.

A meus pais, meu porto seguro, onde existe amor e confiança. E que acreditaram e me apoiaram em mais essa etapa.

A meu marido, Iuri, pelo amor, incentivo e, não menos importante, cooperação acadêmica.

A meus irmãos, Flavianne e Matheus, pela cumplicidade e apoio.

À minha orientadora, Tereza Denyse Pereira de Araújo, por permitir que eu trabalhasse com um assunto do meu interesse.

Aos grandes amigos que fiz no mestrado, Lucas e Edson, por a rede de confiança e apoio que criamos, essencial nos momentos difíceis ultrapassados.

Aos novos membros da família, tia Graça, tia Aúrea e Katiucha, pelo amor e amparo.

RESUMO

O estudo de estruturas fraturadas vem sendo largamente analisado através de teorias da Mecânica da Fratura tradicionais. Entretanto, alguns materiais possuem comportamento que não são descritos corretamente por essas teorias, como os materiais quase-frágeis. Logo, surgiram novos modelos capazes de englobar fenômenos inerentes a esses materiais, como o Modelo da Zona Coesiva. Tal modelo é capaz de descrever de forma mais simples e adequada as zonas de fraturamento, visto que resume todas as trincas em uma única entidade, abrange fenômenos como transferência de tensão entre as faces durante a propagação da trinca e permite que as mesmas surjam sem a presença de uma trinca pré-existente. Com o Método dos Elementos Finitos, o MZC é aplicado através do uso de elementos de interface, regidos pelas leis constitutivas coesivas, que representam o comportamento da trinca até haver uma abertura completa da mesma, quando as forças de tração coesivas entre as faces são nulas. As leis coesivas podem ser representadas por inúmeras formas de curvas, como a linear, trapezoidal e exponencial, todas relacionando as tensões e os deslocamentos relativos. Os modelos constitutivos resultantes do MZC ainda podem se diferenciar conforme a carga aplicada, visto que esta pode acarretar uma abertura perpendicular a direção da carga (modo I), deslizamento das faces (modo II) ou deslizamento fora do plano (modo III), ou ainda uma composição de mais de um dos modos (modo misto). Apresentar um programa computacional para analisar esses problemas de fraturamento em materiais quase-frágeis é o objetivo do presente trabalho. Logo, o MZC é incorporado ao programa CAP3D, baseado no MEF, através da implementação de elementos de interface bidimensionais de espessura nula. Através da não linearidade física, as leis coesivas de amolecimento linear e exponencial são implementadas como modelos constitutivos destes elementos. A lei de amolecimento linear é empregada na formulação de dois destes modelos, o primeiro visa aplicações apenas no modo I e o segundo pode ser aplicado tanto aos modos I e II puros quanto ao modo misto (modos I e II), assim como o modelo empregando a lei de amolecimento exponencial. Os modelos são aplicados a exemplos conceituados na literatura, como o DCB e SEN(B), utilizando as propriedades dos materiais quase-frágeis. Os modelos também foram submetidos a um estudo paramétrico, empregando o número de pontos de integração, escolha de método de solução, tensão resistente e energia de fraturamento da interface e rigidez inicial. Os resultados levam a conclusão que o MZC é sensível e suscetível a mudanças nas propriedades dos materiais ou da geometria do problema.

Palavras-chave: modelo da zona coesiva; elementos de interface; lei de amolecimento linear; lei de amolecimento exponencial; modo misto.

ABSTRACT

Crack nucleation and propagation in brittle structures has been widely analyzed through traditional theories of Fracture Mechanics. However, fracture behavior of a certain class of materials dubbed quasi-brittle cannot be reasonably assessed by such theories. Therefore, models capable of describing phenomena inherent to these materials have emerged, e. g. the Cohesive Zone Model. This model can describe the fracture process zone in a simple and adequate way, since it summarizes all cracks in a main cohesive crack, embraces phenomena as stress transference between the crack faces during crack propagation and allows for the cohesive crack to develop even without preexisting macrocracks. Using the Finite Element Method, the CZM is applied as cohesive laws inside constitutive models through interface elements. These constitutive models represent the crack behavior until its complete opening, when cohesive tractions between the crack faces become zero. The cohesive laws can be represented by several curves, called softening curves, that connect traction and relative displacement. Among many possible formulations, the linear, trapezoidal and exponential curves are often used. Besides deciding on the softening curve shape, one also needs to decide which fracture modes are going to be considered. This in turn depends on which load types are acting on the crack faces. The possible modes are the tensile normal opening of the crack faces (mode I), in-plane shearing (mode II), out-of-plane shearing (mode III) or a composition of two or more of them (mixed mode). The objective of this research work is to formulate and implement analysis methods for quasi-brittle materials based on the cohesive zone method in an academic software based on the Finite Element Method (FEM). In order to provide the framework for such implementations, a zero-thickness two-dimensional interface finite element was first incorporated in the code, followed by both linear and exponential initially rigid softening cohesive laws. Both models are capable of dealing with fracture modes I and II, both in isolation and combined. They were applied to renowned examples dealing with quasi-brittle materials in the literature, such as DCB and SEN(B). The models were put to the test through an extensive parametric study, including number of integration points, interfacial strength and fracture toughness, initial stiffness and choice of path-following method. Results lead to the conclusion that the CZM is sensitive and susceptible to changes in both material properties, boundary conditions and loading configuration.

Keywords: cohesive zone model; interface elements; linear softening law; exponential softening law; mixed mode.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
1.1	Objetivos e Metodologia	4
1.2	Organização da Dissertação	5
2	FRATURAMENTO COESIVO	7
2.1	Modelo de Fissura Fictícia	10
2.2	Modelos Numéricos	14
2.2.1	<i>Método dos Elementos Finitos</i>	14
2.3	Leis Constitutivas Coesivas	18
3	ELEMENTO FINITO DE INTERFACE	21
4	LEIS COESIVAS	31
4.1	Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I	31
4.2	Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto	35
4.3	Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto	40
5	IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO	44
5.1	Implementação Computacional	44
5.1.1	<i>Elemento de Interface de Espessura Nula</i>	45
5.1.2	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I</i>	46
5.1.3	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto</i>	49
5.1.4	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto</i>	51
5.2	Validações	53
5.2.1	<i>Elemento de Interface de Espessura Nula</i>	53
5.2.2	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I</i>	55
5.2.3	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto</i>	58
5.2.4	<i>Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto</i>	61
6	APLICAÇÕES	63
6.1	Viga dupla em balanço (DCB)	63
6.2	Viga com três pontos e uma trinca inicial (tipo SENB)	70
7	CONCLUSÕES	81
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	82
	REFERÊNCIAS	84

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica da Fratura é uma especialização dentro da mecânica dos sólidos, onde a partir da hipótese da existência de uma trinca, estudam-se maneiras de encontrar relações quantitativas entre o comprimento da trinca, a resistência do material ao crescimento desta e a tensão com que a trinca se propaga até causar a ruína da estrutura.

A importância da Mecânica da Fratura é inquestionável, visto que quando uma trinca alcança um comprimento crítico, a estrutura fica comprometida. Quando a trinca atinge tal comprimento, a tensão necessária para sua propagação torna-se igual à tensão aplicada, fazendo com que esta trinca se propague indefinidamente. No caso de materiais frágeis ou quase-frágeis, a desconsideração da mecânica da fratura é ainda mais grave, tendo em vista que as trincas crescem e se propagam catastróficamente, muitas vezes sem aviso.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) presume a pré-existência de fendas ou microfissuras para impulsionar o surgimento de trincas. Entretanto, a formação destas não é, necessariamente, dependente dessa condição. Em materiais frágeis, imperfeições microscópicas podem ocasionar o surgimento e propagação de trincas sem a presença de uma trinca inicial. Neste caso, a zona de processo de fraturamento é considerada ocorrer na ponta da trinca, sendo muito pequena quando comparada com as dimensões da peça e desprezando o que nela acontece. Já o Modelo de Zona Coesiva (MZC), que é considerado uma abordagem mais simples e adequada para a caracterização das zonas de processos de fraturamento e que defende a simplificação das trincas em uma única trinca principal, prediz que trincas podem surgir em qualquer situação, desde que a estrutura esteja sujeita à tração (1).

A hipótese básica do MZC, que o torna intuitivo e simples, é que a região de processos inelásticos de fratura pode ser descrita através de uma trinca fictícia, entre cujas faces ainda há uma transferência de tensão conforme a trinca abre. A zona de fraturamento é, então, regida por leis coesivas constitutivas que relacionam as tensões transferidas entre as faces da trinca e os deslocamentos relativos entre as mesmas.

O MZC é também vantajoso sobre as teorias clássicas da Mecânica da Fratura por causa da capacidade dos critérios de iniciação e evolução da trinca do modelo serem encontradas naturalmente na formulação, sem pressuposições. Contraste importante, visto que os modelos constitutivos de fratura que descrevem um material precisam conter três principais componentes, que são: conhecer o comportamento tensão-deformação da região não fraturada, normalmente descrita por modelos constitutivos clássicos, como o linear elástico; o critério de iniciação da trinca, que determina as condições necessárias para a formação de novas trincas, assim como a direção que estas tomarão; e, o critério de evolução da trinca, que relaciona tensões transferidas entre as faces da trinca ao deslocamento relativos destas.

O MZC é empregado, preferencialmente, em estruturas cuja zona de fraturamento contém tensões que gradualmente decrescem de um pico até zero, ou seja, em regiões onde a zona de processos inelásticos existente é maior que a considerada no MFLE. Logo, o MZC, que foi inicialmente desenvolvido para aplicações em concreto (2), é bem aplicado a materiais

quase-frágeis, que possuem as características apropriadas ao modelo. Em tais materiais, supõe-se que a relação constitutiva inicial é isotrópica linear elástica e que a trinca surge quando a tensão em um dado ponto atinge a tensão máxima resistida pelo material.

Entretanto, em princípio, o MZC não é aplicável apenas a concreto, cerâmica ou outros materiais cimentícios, podendo ser empregado também em análise de polímeros, metais e compósitos, desde que a trinca seja dominada por forças de tração.

Com o advento de métodos numéricos de análise, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), trabalhos envolvendo teorias não lineares da mecânica da fratura, como o MZC, tornaram-se viáveis, proporcionando uma expansão da pesquisa na área (2–7). No contexto da análise de Elementos Finitos, diferentes estratégias podem ser adotadas para tratar a complexidade do material e o comportamento das trincas. O material pode ser analisado como contínuo (aplicando-se conceitos da mecânica do contínuo), heterogêneo (aplicando, por exemplo, o método da multi-escala com modelos coesivos), como também pode-se assumir a existência de descontinuidade no material através de uma variação do MEF, o XFEM.

As leis coesivas do MZC são inseridas na análise de elementos finitos através de abordagens numéricas como a incorporação dos elementos de interface, que simulam a abertura da trinca. Os elementos de interface consistem em duas linhas (elementos bidimensionais) ou superfícies (elementos tridimensionais) conectadas aos elementos contínuos adjacentes. Tais elementos podem ter suas duas faces constituintes unidas (elementos sem espessura) (6, 8–20) ou separadas (elementos com espessura) (15, 21, 22).

O uso destes elementos torna desnecessário que os elementos contínuos possuam a capacidade de capturar efeitos localizados, precisando apenas representarem deformações elásticas suaves, tendo em vista que todas as possibilidades de trinca estão concentradas nos elementos de interface (23).

Os elementos de interface são apropriados para problemas com descontinuidades. Dentre as várias aplicações nas quais estes elementos são utilizados, destaca-se a modelagem de mecanismos de deslizamento na sismologia sobre rochas, juntas de concreto e alvenaria, interfaces de estacas-solo e solo-geotêxteis, trincas fictícias na mecânica da fratura e descolamento matriz-agregado em micro-modelos de concreto (14).

A diferença entre os deslocamentos das faces, definidos como deslocamentos relativos, substituem a deformação na relação tensão-deformação no modelo constitutivo do elemento de interface. As leis coesivas aplicadas a estes elementos podem ser escolhidas dentre várias curvas tensão-deslocamento relativo, que geralmente apresentam relações matemáticas simples (2). Estas relações constitutivas podem se apresentar como bilineares, linear-parabólica, trapezoidal e exponenciais.

Quanto ao tratamento da malha, nas simulações numéricas tradicionais, a propagação das trincas são acompanhadas com rediscretizações da malha (24), desde que o trajeto das mesmas ainda não sejam conhecidos. Uma outra abordagem aplicada, ainda considerando o desconhecimento da direção da trinca, é posicionar elementos de interface em uma grande

quantidade de linhas da malha (23, 25), tentando abranger todos os trajetos prováveis da trinca. Contudo, a direção da trinca ainda pode ser influenciada pela formação da malha, mesmo que esta seja mais refinada. Ambos os métodos descritos são computacionalmente caros, entretanto existem outros meios de analisar a propagação das trincas.

Quando o caminho da trinca é conhecido *a priori*, a abordagem comumente aplicada nas análises com elementos de interface é inserir estes elementos entre elementos contínuos selecionados, representando o principal caminho provável da trinca. A presença dos elementos de interface não força a abertura das faces, visto que a tensão e a deformação local são os fatores que determinam quais dos elementos de interface realmente abrirão (23).

Alguns trabalhos afirmam que a localização dos elementos de interface em linhas predeterminadas obrigam a trinca a seguir traçados não-naturais, podendo trazer problemas numéricos (26). Porém, outros autores contrapõem que a resposta macroscópica não sofre influência significativa da localização precisa das trincas, desde que a escolha inicial seja razoável (23).

1.1 Objetivos e Metodologia

O objetivo geral do presente trabalho é apresentar um programa computacional de elementos finitos para analisar problemas de fraturamento em materiais quase-frágeis. O trabalho está dividido em várias etapas, explicitadas nos objetivos específicos:

- (a) Estudar o estado da arte em elementos de interface e zona coesiva.
- (b) Formular e implementar elementos de interface bidimensionais com espessura nula, lineares e quadráticos, em um software de elementos finitos.
- (c) Formular e implementar modelos de zona coesiva para análise de materiais quase-frágeis.
- (d) Utilizar os elementos formulados e implementados na análise de estruturas de interesse como vigas de concreto e pavimentos com revestimento de concreto asfáltico.

A partir de uma formulação bidimensional baseada no Método dos Elementos Finitos, no presente trabalho, são implementados elementos de interface com altura nula, quadráticos e lineares. Aos elementos são aplicados modelos constitutivos coesivos fisicamente não lineares, fundamentados pelo Modelo da Zona Coesiva. As leis coesivas consideradas são a linear e a exponencial, envolvendo o modo I puro e o modo misto de fratura (modos I e II).

As leis coesivas implementadas consideram a possível existência de um descarregamento, ao mesmo tempo em que garantem a irreversibilidade do modelo. Nas análises empregando estas leis, os elementos contínuos são assumidos elásticos, embora os materiais quase-frágeis sejam o foco da presente pesquisa.

A inserção dos elementos de interface na malha é realizada conforme o problema estudado, dispondo os elementos de maneira que haja uma representação do caminho real da trinca. Nos exemplos aqui empregados, os elementos de interface são inseridos em uma linha central paralela ou perpendicular ao comprimento da estrutura, conforme necessário para reproduzir a trinca de cada exemplo. Todos os modelos formulados são implementados no CAP3D, um programa de Elementos Finitos que utiliza os conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO), desenvolvido pelo Laboratório de Mecânica de Pavimentos da UFC (27). A estrutura de classes básica do programa é apresentada, assim como uma descrição detalhada das modificações realizadas, incluindo a criação de novas classes.

1.2 Organização da Dissertação

A presente dissertação é dividida em 6 capítulos. O Capítulo 1 traz uma introdução a Mecânica da Fratura e ao Modelo da Zona Coesiva, mostrando brevemente as vantagens do uso do segundo sobre as teorias clássicas do primeiro na análise de específicos materiais e apresentando o MZC como um método viável de estudar as trincas em materiais quase-frágeis. No Capítulo 2, uma breve introdução a Mecânica da Fratura é apresentada. Então, é realizada uma descrição detalhada do MZC, bem como dos processos não lineares retratados pelo mesmo. Alguns dos modelos numéricos existentes para a aplicação no MZC são relatados, com ênfase no MEF e abordagens empregadas no presente trabalho. A seguir, algumas leis coesivas e seus comportamentos são discriminados.

O Capítulo 3 apresenta a formulação do elemento de interface com espessura nula, abrangendo elementos com interpolação linear e quadrática. Estes elementos possuem algumas particularidades como a designação de deslocamentos relativos entre as faces substituindo as deformações na relação constitutiva tensão-deformação e emprego dos pontos de integração de Newton-Cotes.

O Capítulo 4 aborda os modelos constitutivos implementados no CAP3D. Os modelos representam as leis coesivas através das leis linear e exponencial, explorando o modo I puro e o modo misto (I e II), além de acompanhar o descarregamento da estrutura.

O Capítulo 5 contém os detalhes das implementações dos elementos de interface e dos modelos constitutivos apresentados, bem como a validação dos mesmos. Após uma breve explanação da estrutura geral do programa CAP3D, é relatado o processo de implementação no mesmo. Então, cada implementação é verificada através de um exemplo com solução analítica. Entretanto, durante a validação dos modelos constitutivos, os modos são verificados separadamente.

O Capítulo 6 traz exemplos que empregam os elementos de interface e os modelos constitutivos implementados. Primeiro, as implementações são validadas através de um exemplo com solução analítica, uma viga dupla com pré-trinca. Logo após, utiliza-se um exemplo com resultados experimentais, uma viga biapoiada sujeita a flexão. O capítulo ainda apre-

sentam alguns estudos paramétricos, a fim de analisar a sensibilidade do modelo a variações de parâmetros, em cada exemplo.

Por fim, o Capítulo 7 descreve as conclusões do trabalho e apresenta algumas sugestões para futuros trabalhos.

2 FRATURAMENTO COESIVO

A fratura da maioria dos materiais acontece quando a tensão atuante atinge um determinado valor crítico. As primeiras teorias sobre fraturas, concebidas no século XIX, consideravam a tensão resistente como uma característica inerente ao material (28), entretanto o mecanismo da natureza da fratura não era claro, pois não havia fundamentação sobre o fenômeno. Após ser verificado que a resistência à fratura sofria variações não esperadas, iniciou-se um questionamento sobre as teorias existentes.

Em 1921, o engenheiro aeronáutico A. A. Griffith (29) publicou um artigo que estudava os fenômenos da fratura através de experimentos com fibra de vidro, determinando as primeiras relações quantitativas entre resistência e tamanho da fissura. A teoria concluía que, em um corpo de vidro, existe uma concentração de tensão na ponta da trinca, considerada pré-existente, cuja intensidade é capaz de quebrar os vínculos atômicos do material, um a um, como um zíper.

Griffith (29) ainda afirmou que conforme a trinca cresce, novas superfícies de fratura surgem e a energia superficial aumenta, no entanto a energia elástica diminui. Utilizando a termodinâmica, que dita que o processo de crescimento segue a direção por onde a energia total é reduzida, concluiu que a soma entre a energia superficial e a energia elástica deve diminuir para a trinca crescer ou mesmo surgir.

Na década de 40, George Rankin Irwin e Egon Orowan, independentemente, iniciaram o desenvolvimento de extensões para a teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), generalizando e refinando a teoria de Griffith, acrescentando a plasticidade ao modelo. A extensão foi, então, aplicada a materiais elasto-plásticos, como o aço.

Griffith usou a energia superficial para explicar o processo inelástico da quebra de vínculo entre as partículas do material e obteve a seguinte condição para a trinca:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (1)$$

onde σ_f é a tensão de ruptura, E é o módulo de Young, γ_s é a energia superficial por unidade de área e a é o raio da trinca. Irwin e Orowan, contudo, utilizaram a energia de fratura para esclarecer, além dos processos inelásticos explicados por Griffith, a deformação plástica, modificando a condição de fraturamento para

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\Gamma E}{\pi a}} \quad (2)$$

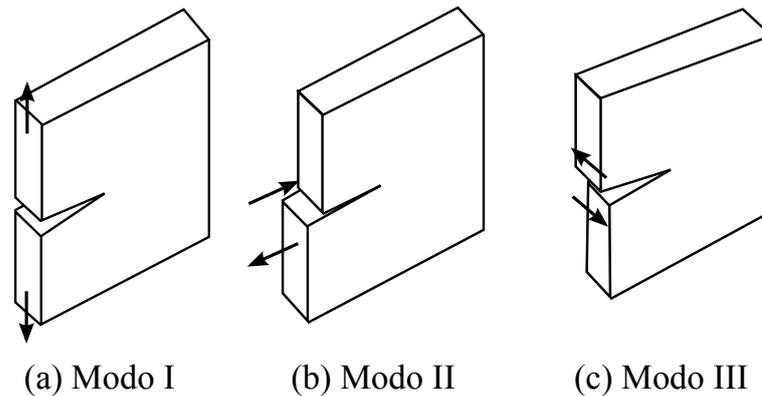
onde Γ é a energia de fratura, que, por sua vez, é a soma da energia superficial (γ_s) e do trabalho plástico por unidade de área de superfície criada (γ_p) (30), ou seja,

$$\Gamma = \gamma_s + \gamma_p \quad (3)$$

As trincas têm suas formas de abertura (modos de fraturamento) dependentes do tipo de sollicitação que a fissura está submetida, existindo três modos básicos de fraturamento (Figura 1). Estes modos de fratura descrevem a condição local em um ponto no contorno da trinca, dependendo da simetria do campo de tensão ao redor da ponta da trinca.

Quando a carga que age no corpo o empurra na direção perpendicular ao plano da trinca, causando uma abertura normal ao mesmo plano, cada ponto ao longo de todo o contorno da trinca está submetido ao modo I (Figura 1a). Quando a carga cisalha o corpo na direção paralela ao plano da trinca, causando um deslizamento entre as faces da mesma, a trinca está no modo II (Figura 1b), e quando a abertura das faces ocorre fora do plano da trinca por escorregamento entre as faces na direção normal à do comprimento da trinca, esta se encontra no modo III (Figura 1c). Os modos de fratura ainda podem se apresentar combinados em um corpo, como o modo I e II, simultaneamente.

Figura 1 – Modos de fratura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os modos I e II são descritos pelo estado plano de deformação, sendo que o modo mais comum é o modo I, pois os materiais são mais susceptíveis à fratura devido a tensões normais do que por tensões de cisalhamento. A relevância dos modos depende da resistência do material aos tipos de deformação dos modos. No concreto, o modo I é o mais importante, particularmente quando a modelagem é realizada no nível meso, onde a estrutura dos agregados e os vazios entre eles são explicitamente modelados (26).

Através de experimentos e considerações teóricas, foi concluído que a MFLE não pode ser aplicada diretamente a materiais com grande heterogeneidade como o concreto, argamassa, rocha e cerâmica, apesar de modificações da mesma serem aplicadas no estudo destes materiais (31, 32). Em situações reais, a heterogeneidade do material provoca fenômenos como microfissuras e efeito de ponte (*bridging*) entre as faces da trinca, os quais são negligenciados na análise de tal modelo (26).

Na MFLE, a tensão se aproxima do infinito na ponta da trinca, entretanto tensões infinitas não podem ser desenvolvidas em materiais reais. Segundo Barenblatt *et al.* (33), fica claro que soluções onde tensões infinitas são obtidas na ponta da trinca são inadequadas para

qualquer modelo físico correto de um corpo frágil. Abordagens mais reais, portanto, surgiram na análise da região ao redor da trinca, como a suposição que deve existir uma zona inelástica nessa região, denominada zona de processos de fratura.

Percebeu-se, também, que a mecânica da fratura convencional não é adequada para materiais quase-frágeis (concreto, rocha, misturas asfálticas, dentre outros). Dentre as razões pelas quais a aplicação não é indicada estão: o tamanho da zona de fraturamento considerado nos modelos tradicionais é pequeno comparado ao tamanho da estrutura; as tensões dentro da zona de fraturamento, durante o aumento da carga, são consideradas constantes ou crescentes; e, as teorias tradicionais trabalham apenas com uma trinca existente (34).

Portanto, segundo Hillerborg, Modéer e Petersson (2), a necessidade de estudar comportamentos mais complexos das estruturas despertou o interesse por teorias mais completas. Até então, os métodos eram baseados em pesquisas empíricas, assistidos por modelos simplificados, não sendo considerado, por exemplo, formação e propagação de trincas.

Com o avanço dos modelos da mecânica da fratura, juntamente com o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversos fenômenos foram incluídos nas análises de casos mais complicados. Dentre esses fenômenos estão, além da iniciação e evolução da trinca, deformação devido a retração, existência de duas ou mais trincas paralelas, interação entre concreto e armadura e entre matriz cimentícia e agregados. Modelos da Mecânica da Fratura Não-Linear englobam alguns desses processos. Dentre estas abordagens há o modelo da fissura coesiva que conduz a um modelo constitutivo coesivo.

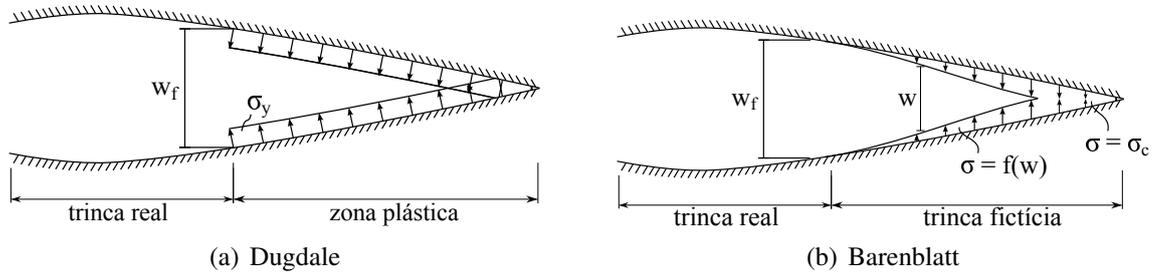
A zona de processos de fraturamento pode ser descrita por duas abordagens simplificadas. Na primeira, toda a zona de processos de fraturamento está concentrada na linha da trinca e é caracterizada pela relação tensão-deslocamento com amolecimento, podendo ser chamado de Modelo da Trinca Coesiva, Modelo da Trinca Fictícia ou Modelo Dugdale-Barenblatt. Na segunda, as deformações inelásticas da mesma zona são distribuídas em uma faixa de certa largura, desenvolvida para existir ao redor da trinca principal (31).

Já no início da década de sessenta, o Modelo da Faixa de Escoamento (*Strip Yield Model*) de Dugdale (35) e o Modelo da Zona Coesiva (MZC) de Barenblatt (33, 36) surgiram da urgência por métodos não lineares da Mecânica da Fratura. Ambos os modelos foram baseados no conceito de comprimento de fissura fictícia, entretanto o primeiro foi aplicado a metais e o último, a materiais frágeis. O objetivo destes modelos era uma simplificação da representação da zona onde ocorrem processos inelásticos na ponta da fissura, substituindo a ponta da trinca e o comprimento das zonas plastificadas por uma trinca mais longa, cujas faces estão submetidas a tensões que resistem ao deslocamento entre as mesmas, chamadas de forças coesivas. No modelo de Dugdale, as faces da trinca estão submetidas a tensões que correspondem a tensão de escoamento do material σ_y .

Os modelos de Dugdale e Barenblatt, embora considerados similares, diferem quando o primeiro assume, que na zona de plasticidade na ponta da trinca, a tensão é constante e igual a tensão resistente σ_c , e o outro supõe que a tensão (σ) varia conforme o deslocamento

relativo w entre as faces da trinca, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Representação das tensões na ponta das trincas nos modelos de (a) Dugdale e (b) Barenblatt.

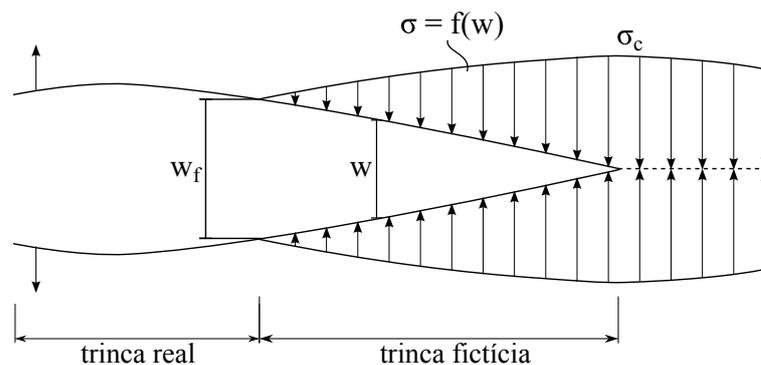


FONTE: Baseado em (2).

2.1 Modelo de Fissura Fictícia

O conceito de fraturamento coesivo, desenvolvido para representar o comportamento das trincas que possuem uma região onde há transmissão de esforços entre as suas faces (Figura 3), foi aplicado ao concreto, material quase-frágil, nas décadas de setenta e oitenta por autores como A. Hillerborg (2, 34), M. Modéer (3) e P. E. Petersson (37), além de proporem o modelo de fissura fictícia (*Fictitious Crack Model*).

Figura 3 – Modelo da zona coesiva.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo teve igual sucesso quando aplicado a fraturas em rochas e outros materiais cimentícios (4, 38–40). Formulado para o modo I de fratura, o modelo depois foi estendido para o modo misto (modos I e II) por outros autores (41). O trabalho de Hillerborg, Modéer e Petersson (2) teve dois pontos principais, a tensão resistente σ_c e a curva de amolecimento, que permite que o material não rompa logo após atingir σ_c . Assumiu-se que a fissura coesiva pode se manifestar em qualquer material, mesmo sem haver microfissuras preexistentes. Tal postura contrariou todas as abordagens construídas sobre o trabalho de Barenblatt e Dugdale, que

restringia a fissura coesiva à análises de trincas próximas às preexistentes. Apesar de Hillerborg trabalhar com estruturas ou amostras sem macrofissuras iniciais, ainda considera-se que podem existir pequenas falhas no tamanho dos agregados ou grãos do cimento.

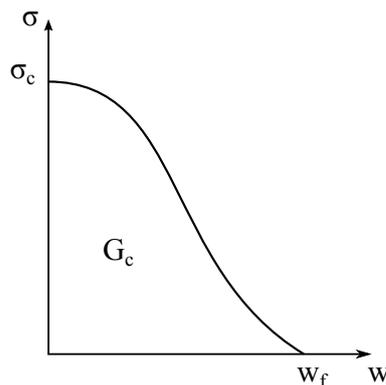
A propriedade do material que relaciona a tensão que atua entre as faces da trinca à abertura w , é dada por

$$\sigma = f(w) \quad (4)$$

A função $f(w)$ é conhecida como função de amolecimento do material e é determinada através de ensaios de tração. A tensão transferida, no modo I, é normal às faces da trinca, e neste caso, as duas propriedades mais importantes para a curva de amolecimento são a tensão resistente normal σ_c e a energia de fraturamento coesivo G_c .

A curva de amolecimento (Figura 4) foi comprovada por experimentos de vários pesquisadores (31, 39, 42), que mostraram que a trinca pode evoluir após alcançar a tensão crítica σ_c , havendo uma transição gradual desta tensão até o valor nulo, e não instantânea, como considerado pela MFLE. Resultados experimentais também mostraram que as deformações, após atingir σ_c , se concentram em uma região estreita, onde depois surgirá a trinca, enquanto no restante da peça há descarregamento e as deformações diminuem (31, 32). Entretanto, para efeitos de simplificação computacional, Hillerborg *et al.* (2) assumiram que esse descarregamento fora da zona de processo de fraturamento era desprezível, visto que o material no restante da estrutura é tomado como linear elástico.

Figura 4 – Curva geral da relação tensão-abertura do modelo de Hillerborg, Modéer e Petersson (2).



FONTE: Baseado em (2).

O modelo da fissura fictícia divide a curva do diagrama tensão-deformação, que é a representação usual das propriedades mecânicas dos materiais, em dois trechos: o primeiro trecho é crescente até atingir a tensão máxima resistente, que também marca o início do segundo trecho, cuja curva é descendente. Este último trecho é usado para acompanhar a tensão transferida entre as faces da trinca no modelo da fissura coesiva (43).

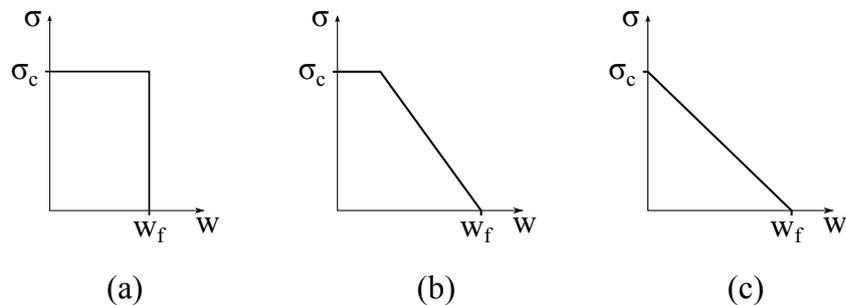
Segundo o modelo, após a tensão na ponta da trinca atingir a tensão resistente do material σ_c , inicia-se a propagação da trinca. As faces da trinca ainda transferem tensão entre si, enquanto a abertura entre as faces aumenta. A tensão decresce suavemente até a abertura máxima da trinca w_f ser alcançada, quando então as tensões são nulas. A energia absorvida para separar completamente as faces da trinca é

$$G_c = \int_0^{w_f} \sigma(w) dw \quad (5)$$

e é representada pela área abaixo da curva tensão-abertura da trinca (Figura 4). A expressão para G_c é baseada na abordagem do balanço de energia, que assume a absorção de uma certa quantidade de energia G_c durante a formação de uma unidade de área de trinca (2).

Ainda segundo Hillerborg, Modéer e Petersson (2), a curva $\sigma(w)$ pode ser escolhida entre diversas formas (Figura 5), todas apresentando relações matemáticas simples. A primeira curva (Figura 5a) é compatível com o modelo de Dugdale, válida para materiais que apresentam escoamento, com a tensão decaindo de σ_c para zero subitamente. A última curva (Figura 5c) corresponde a aplicações em concreto, compatível com análises com o MEF e, conforme o autor, corresponde razoavelmente bem aos resultados experimentais do teste de tração.

Figura 5 – Exemplos de curvas $\sigma(w)$ para modelos de análise de trincas.



Fonte: Baseado em (2).

Utilizando a curva (c) da Figura 5 ao modelo, Hillerborg, Modéer e Petersson (2) aplicaram os conceitos do MZC de Barenblatt (33, 36) ao MEF, criando a lei linear de amolecimento coesivo para o concreto, na qual a energia de fraturamento G_c é

$$G_c = \frac{\sigma_c w_f}{2} \quad (6)$$

Segundo Tvergaard e Hutchinson (44), em comparação a outros parâmetros coesivos, como a resistência do material σ_c e a energia de fraturamento coesivo G_c , a influência do formato da curva tensão-deslocamento relativo na resposta numérica é relativamente fraca, geralmente. Já Chandra *et al.* (45) defendem que a curva constitutiva depende do material e processos inelásticos micromecânicos e, logo, a forma da curva deve refletir esses comportamentos, de outra forma, os resultados não têm importância significativa.

O MZC descrito se apresenta na forma mais simples deste modelo, comumente encontrado na literatura, e, em suma, compreende as seguinte hipóteses:

- a) O material original da estrutura, *bulk material*, pode ser aproximado por um material isotrópico linear elástico, com coeficiente de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν .
- b) A trinca surge quando a tensão de um ponto atinge a tensão resistente do material σ_c . A trinca formada é perpendicular a direção da tensão máxima.
- c) A Eq. (4) descreve a tensão transferida entre as faces da trinca, desde que a análise seja restrita ao modo I de abertura, sem a consideração de escorregamento entre as faces da trinca, por exemplo.

A formulação padrão do modelo coesivo tem algumas limitações, sendo que a principal delas é que devido à curva de amolecimento ser considerada uma propriedade do material, a energia de fratura será uma constante do material. Além disso, considera-se que nenhuma energia é dissipada fora da zona coesiva. Estas hipóteses são aproximações, que após extensas aplicações no concreto, apresentam resultados concisos. Para representar com mais pureza os fenômenos da zona de processo, a curva de amolecimento não seria apenas uma função da abertura da trinca, mas dependeria da triaxialidade e talvez das rotações relativas das faces da trinca coesiva. Entretanto, não existem modelos que incluam tais efeitos (1).

Segundo Bazant e Planas (31), a fim de obter um MZC generalizado, há pelo menos cinco possíveis extensões que vale considerar. A primeira seria expandir a formulação de forma que uma singularidade na ponta da trinca fosse admissível. A segunda seria supor um outro comportamento, que não linear elástico, ao material ao redor da trinca. A terceira seria incluir uma dependência em relação ao estado de tensão triaxial; a quarta seria considerar uma formulação consistente para modo misto; e a quinta extensão seria supor o comportamento da trinca e do restante da estrutura dependentes em relação ao tempo.

Apesar do MZC incluir a presença de processos que o torna mais completo e factual que outros modelos que o antecederam, existem ainda desencontros em sua teoria, causando inconsistências internas. Uma delas é a questão de trincas secundárias, que mostram-se impossíveis de evitar, visto que uma das hipóteses tomadas no modelo é a presença de uma única trinca, o que contradiz outra hipótese do mesmo modelo que sugere que trincas podem surgir em qualquer ponto onde a tensão ultrapassar σ_c (1).

Dentre os materiais quase-frágeis também estão os pavimentos de concreto asfálticos, cujo desenvolvimento de métodos de análise para fraturas é restrito, basicamente, a modelos que simulam a propagação das trincas considerando o material como homogêneo, sendo verificados e calibrados através de experimentos (46, 47). Existindo um número limitado de trabalhos empregando a distinta heterogeneidade do material.

Algumas implementações considerando a homogeneidade foram feitas por Soares, Freitas e Allen (46), que aplicaram o MZC proposto por Tvergaard (48), por causa de sua capacidade de capturar o comportamento de complexas zonas de processo, na investigação da propagação da trinca em teste de tração indireta em pavimentos (*Superpave Indirect Tension Test* - IDT); e Paulino, Song e Buttlar (49), que implementaram um modelo coesivo intrínseco para concreto asfáltico baseado na abordagem de energia potencial de Xu e Needleman (50). Já Kim e Buttlar (47), analisaram o comportamento de trincas no concreto asfáltico considerando a heterogeneidade do material através do Modelo dos Elementos Discretos.

2.2 Modelos Numéricos

Análises do crescimento da trinca coesiva são altamente não lineares, logo requerem o uso de métodos numéricos para encontrar a solução. Muitos métodos numéricos já foram empregados na literatura, dentre eles, o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM).

2.2.1 Método dos Elementos Finitos

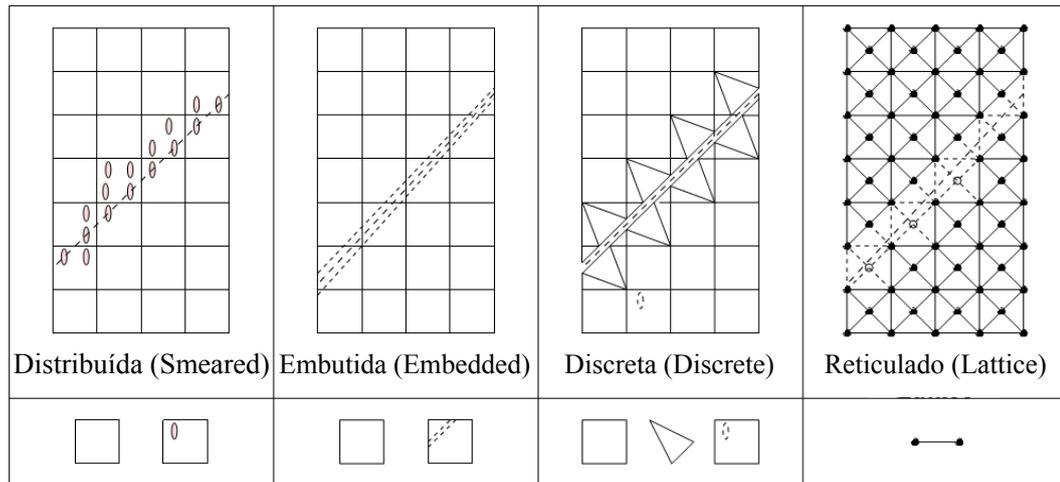
As principais abordagens de modelagem de fratura coesiva, dentro dos arcabouços de análise não linear de elementos finitos, estão divididas em três grupos. Abordagens contínuas descrevem o processo de fratura por modelos constitutivos de alta ordem, como modelos integrais não locais (*Integral-type nonlocal models*) (51, 52). Em modelos contínuos com descontinuidades, onde as fraturas são descritas como deslocamentos descontínuos, que são contidas dentro da descrição de continuidade do material (53). Por fim, abordagens discretas que descrevem o processo de fratura não linear com a falha de elementos discretos, como treliças e vigas (54).

A trinca, assim como seu crescimento, pode ser incorporada à malha de elementos finitos através de diferentes metodologias. Na Figura 6, algumas estratégias são mostradas, como o tratamento de trincas distribuídas (*smearred crack*), trincas embutidas na malha (*embedded crack*) e a que trata o fraturamento como falha de elementos discretos. A figura ainda apresenta a malha de uma modelagem que utiliza elementos reticulados (*lattice model*) (41). As duas principais estratégias empregadas para fraturas em materiais quase-frágeis são as trincas distribuídas (*smearred crack*) e as trincas discretas (41, 55).

As formulações dos modelos com as fissuras distribuídas e embebidas são baseadas em formulações da mecânica do contínuo (55, 56), enquanto as fissuras discretas são mais compatíveis com análises dentro da mecânica da fratura (56).

No conceito da trinca distribuída (*smearred crack*), a formulação tradicional do MEF é utilizada juntamente com elementos que dependem das relações tensão-deformação obtidas após aplicar a abertura w no elemento interceptado pela trinca. As fraturas, dentro desta

Figura 6 – Estratégias de incorporação de fissuras em simulações numéricas.



FONTE: Saouma (56).

abordagem, são representadas por número infinito de trincas paralelas com aberturas infinitesimais (41). As trincas são incorporadas através de leis constitutivas (tensão-deformação) do material, que deve ser necessariamente não linear e apresentar o comportamento de amolecimento (55). A propagação destas é simulada pela redução da rigidez e resistência do material (41). As deformações são decompostas entre uma parte contínua e uma parte considerando a trinca. A vantagem inicial desse método é que, normalmente, a topologia da malha não é modificada durante a progressão da trinca (31, 41, 55). A formulação do modelo é semelhante aos modelos de faixa coesiva, conhecidos como *crack-band models* (31).

O emprego desse modelo traz algumas desvantagens, como a limitação dos modos de deformação advindos do método de elementos finitos baseado em deslocamentos que, geralmente, não acomoda campos de descontinuidade facilmente, exceto quando as descontinuidades são alinhadas com as bordas dos elementos. Alguns outros problemas já foram apontados e solucionados com abordagens secundárias, entretanto, algumas das soluções encontradas funcionam bem em determinados casos, mas apenas parcialmente bem em outros (55, 57, 58). Modelos mais elaborados empregando a tal formulação foram propostos em outros trabalhos (5, 6).

Na abordagem com trinca discreta, a trinca estende-se entre os elementos e as forças coesivas são simuladas utilizando elementos de interface conectando os nós de ambos os lados da trinca. Os elementos devem considerar o deslocamento relativo entre as faces, prevenir interpenetração das mesmas e estimar precisamente as tensões ao longo e através da interface (8). A fim de evitar a interpenetração, a abordagem dos multiplicadores de Lagrange pode ser empregada, entretanto, o método introduz graus de liberdade adicionais (8, 59). Uma alternativa ao método é utilizar a abordagem da penalidade, que supõe a inserção de molas entre os nós da interface. Contudo, a condição de compatibilidade é apenas satisfeita aproximadamente, necessitando de um valor mais elevado para a penalidade normal K_n , com o intuito de minimizar a interpenetração (8, 59).

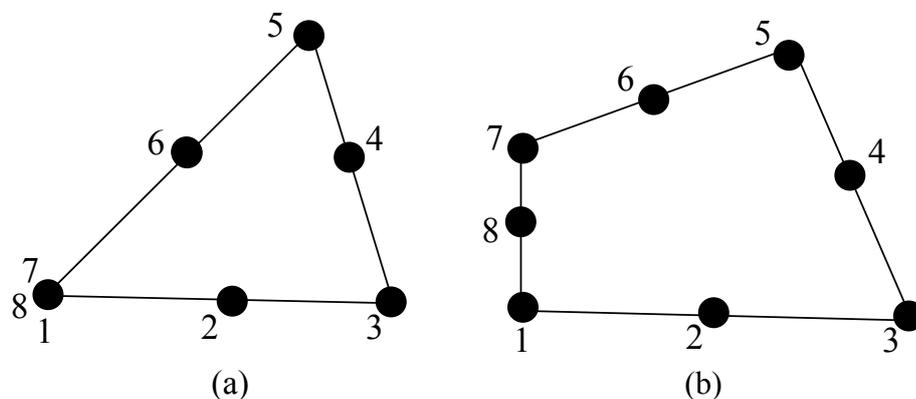
O emprego de elementos de interface é facilmente justificado, visto que interfaces estão presentes em diversos tipos de estruturas. Dentro da engenharia civil, elas são encontradas em solos reforçados, como camada intermediária entre rocha e concreto e em análises de juntas de rochas (7). Aplicações em concreto armado e protendido, em delaminações de estruturas compósitas e tantas outras (60).

O conceito de elementos de interface já foi dividido entre diversos elementos na literatura, com a criação de elementos com diferentes denominações e formulações, basicamente, semelhantes. A principal diferença entre estes elementos são: a espessura do elemento (finita ou nula), formulação constitutiva baseada em deformações ou deslocamentos, número de nós duplos (linear ou quadrático), e esquema de quadraturas (8).

O primeiro elemento de interface com espessura nula foi proposto por Goodman, Taylor e Brekke (7) para uso na geotecnia, desde então diversos outros autores basearam-se na sua formulação. O elemento formulado era formado de 4 nós e 8 graus de liberdade e, por causa de sua formulação simples, implementação numérica fácil e resposta normal robusta, foi amplamente empregado, mesmo possuindo deficiências cinemáticas associadas à resposta tangente.

Vale ressaltar que o MEF é aplicado também a outros métodos da Mecânica da Fratura, porém utilizando abordagens diferentes das utilizadas com o MZC. No MFLE, a presença da singularidade $1/\sqrt{r}$ na região da ponta da trinca torna necessário o uso de elementos especiais que são capazes de capturá-la. Para problemas bidimensionais, por exemplo, o elemento quadrilateral Q8 pode ser degenerado a um triângulo na ponta da trinca, como mostrado na Figura 7. Os nós da ponta ocupam a mesma posição no espaço, quando o elemento está indeformado, e movem-se quando o elemento se deforma. Os elementos são dispostos na ponta da trinca em forma de uma roseta, que, na forma padrão, é composta por oito elementos, que podem ser T6 convencionais ou os Q8 colapsados, formando um ângulo de 45° entre si e é comumente alinhada com a fissura (24).

Figura 7 – Representação do elemento Q8 colapsado. (a) Elemento indeformado. (b) Elemento deformado.



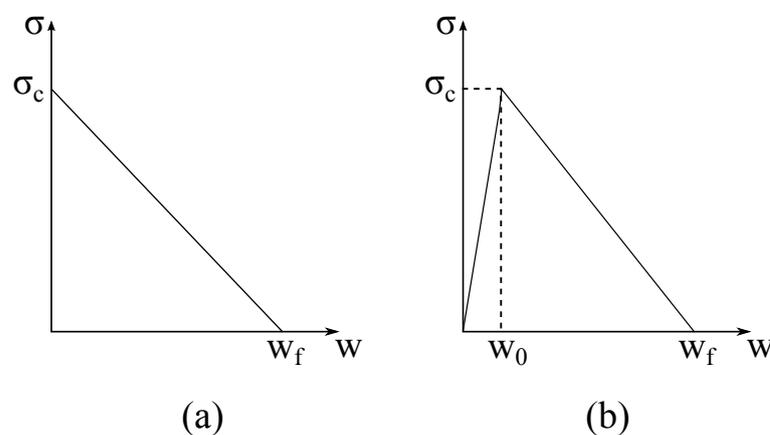
FONTE: Araújo (24).

Ainda nas aplicações numéricas ao MZC, o principal problema da abordagem com trincas discretas é que a localização das descontinuidades é determinada no início da análise e permanece constante durante todo o processo (59, 61, 62). Limitando o número de caminhos disponíveis para a fratura, o que possivelmente resulta em direções de propagação influenciadas pela malha (25). Logo, é necessário que haja uma boa estimativa do caminho da fissura. Entretanto, segundo Carol, López e Roa (23), desde que o traçado previsto inicialmente seja razoável, a localização precisa da trinca não desempenhará papel decisivo na resposta macroscópica.

Uma alternativa para situações onde o traçado da trinca não é previamente conhecido é o emprego de algoritmos que refazem a malha automaticamente, as malhas adaptativas (25, 31, 63), que possibilitam refinamento da malha na região das trincas e, portanto, viabiliza o aumento de possíveis direções de propagação. Entretanto, o procedimento, na prática, limita o número de trincas simultâneas a uma ou duas (63) e o custo computacional e o gerenciamento de estrutura de dados restringe a aplicação a problemas mais simples (62). Outra alternativa é posicionar elementos de interface em todas as linhas da malha, considerando-as como possíveis caminhos para a trinca e deixando a tensão local guiar a mesma (6, 23, 60). Contudo, a abordagem também tem desvantagens, como o uso de demasiados nós na análise (23) e a possibilidade de haver influência no trajeto da trinca, caso o tamanho da malha não seja adequado.

Os modelos coesivos podem diferir também na forma como os elementos são inseridos na geometria inicial: formulações intrínsecas ou extrínsecas (Figura 8). A diferença entre ambas está associada a maneira como a iniciação da trinca é modelada. Na formulação intrínseca, os elementos coesivos são introduzidos entre elementos contínuos já no início da análise. O critério de propagação da trinca é incorporado ao modelo constitutivo dos elementos de interface (47). As tensões coesivas crescem de zero até um ponto de tensão máxima e, então, decrescem gradualmente até sumir novamente, permitindo o descolamento completo das faces (Figura 8b).

Figura 8 – Representação das formulações (a) extrínseca e (b) intrínseca.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na formulação extrínseca, os elementos são inseridos adaptativamente, através de algoritmos que refazem a malha, apenas após a previsão da interface começar a falhar (64). Portanto, nessa situação o critério de propagação é externo ao elemento de interface. Quando as tensões agindo ao longo da interface entre dois elementos contínuos atingem um valor crítico (Figura 8a), permite-se que essa interface abra conforme a relação tensão-deslocamento relativo, introduzindo elementos de interface com lei coesiva ao longo da interface danificada (47). A malha adaptativa utilizada na formulação sofre de problemas, já citados, que restringe a aplicação à modelos mais complexos.

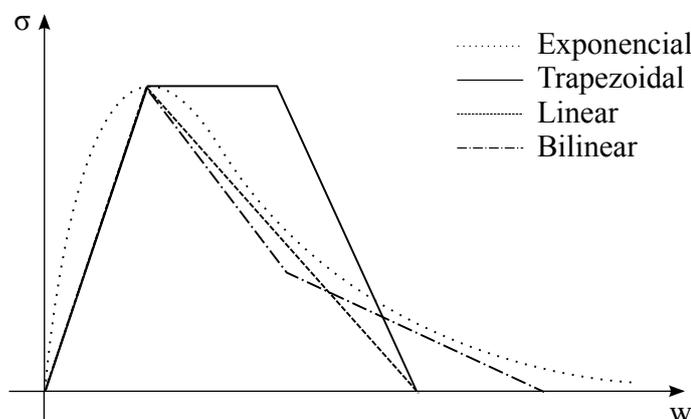
2.3 Leis Constitutivas Coesivas

O formato da função $\sigma(w)$ é definida por leis coesivas de tensão-separação, que são independentes da escolha das técnicas computacionais empregadas. Entretanto, quando uma formulação intrínseca é aplicada, uma rigidez elástica inicial é requerida na relação constitutiva (65).

Já que o MZC é um modelo fenomenológico, não existem evidências sobre a forma da função $\sigma(w)$ (66). As relações constitutivas podem ser obtidas através de abordagens teóricas, experimentais ou computacionais (31, 65, 67). Não existe concordância geral sobre a melhor curva de amolecimento, pois tal curva deveria ser determinada para cada tipo de material quase-frágil.

Na Figura 9 constam alguns dos diferentes tipos de curvas constitutivas encontradas na literatura. Desde 1981, as curvas bilineares, caracterizadas por possuírem duas retas aproximando a curva de resistência, têm sido aceitas como boas aproximações para a curva de amolecimento coesivo do concreto de cimento Portland (31). Mas além da lei bilinear, outras curvas também são propostas, com diferentes formas matemáticas. Entre elas, trapezoidal, exponencial, trilinear e linear, são as mais comuns.

Figura 9 – Leis constitutivas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No modelo constitutivo exponencial, segundo Needleman (67), as relações constitutivas da interface têm a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{q}) \quad (7)$$

onde $(\dot{\quad})$ é $\partial(\quad)/\partial t$, com relação ao tempo, $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões, \mathbf{w} são os deslocamentos relativos e \mathbf{q} representa um conjunto de variáveis internas compatível com o problema. As variáveis internas podem ser escalares, vetores ou tensores.

Dentre as restrições impostas às relações constitutivas da interface, que são poucas, está a suposição de que a resposta da interface é dissipativa, demandando que o trabalho realizado dentro de um ciclo fechado deve ser não negativo. Ou seja, essa restrição é expressa por

$$-\oint \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{w} \geq 0 \quad (8)$$

cuja satisfação mostra que o trabalho não pode ser extraído da interface.

Considerando uma relação constitutiva linear, na qual a tensão é uma função do deslocamento relativo, a Eq. (7) toma a forma de

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \quad (9)$$

Segundo Needleman (67), a aplicação da Eq. (8) em relações constitutivas elásticas provoca a existência de um potencial $\phi(\mathbf{w})$, que assegura que o trabalho dentro de qualquer processo fechado é dissipado por completo, já que restringir o trabalho dentro da interface apenas é possível se o mesmo for eliminado em cada ciclo, supondo como verdade a Eq. (9), e que o trabalho não se dissipa dentro de um ciclo fechado. Logo, é necessário que o potencial seja explicitado, permitindo que as tensões sejam obtidas a partir de

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{w}} \quad (10)$$

A lei universal da relação entre energia de abertura e separação atômica Smith-Ferrante proposta em Rose, Ferrante e Smith (68) é largamente aplicada como uma lei exponencial coesiva, apesar da natureza das tensões tangenciais precisarem ser adicionalmente impostas, visto que a relação foi voltada para interfaces atômicas finas. Needleman (67) e muitos outros autores na literatura já apresentaram inúmeras expressões do potencial com a forma exponencial de Rose, Ferrante e Smith (68) representando os deslocamentos tangenciais de diferentes maneiras. Dentre elas, a equação apresentada por Needleman (67), que permite abertura tangencial e normal,

$$\phi(w_n, w_t) = \sigma_c e w_n^c \left\{ 1 - \left[1 + \frac{w_n}{w_n^c} \right] \exp\left(\frac{-w_t^2}{(w_t^c)^2}\right) \exp\left(-\frac{w_n}{w_n^c}\right) \right\} \quad (11)$$

onde as tensões, σ_n e σ_t , são dadas por

$$\sigma_n = -\sigma_c e \left\{ \frac{w_n}{w_n^c} \exp \left(-\frac{w_t^2}{(w_t^c)^2} \right) \exp \left(-\frac{w_n}{w_n^c} \right) \right\} \quad (12)$$

$$\sigma_t = -\sigma_c e \left\{ \frac{2w_n^c}{w_t^c} \frac{w_t}{w_t^c} \left[1 + \frac{w_n}{w_n^c} \right] \exp \left(-\frac{w_t^2}{(w_t^c)^2} \right) \exp \left(-\frac{w_n}{w_n^c} \right) \right\} \quad (13)$$

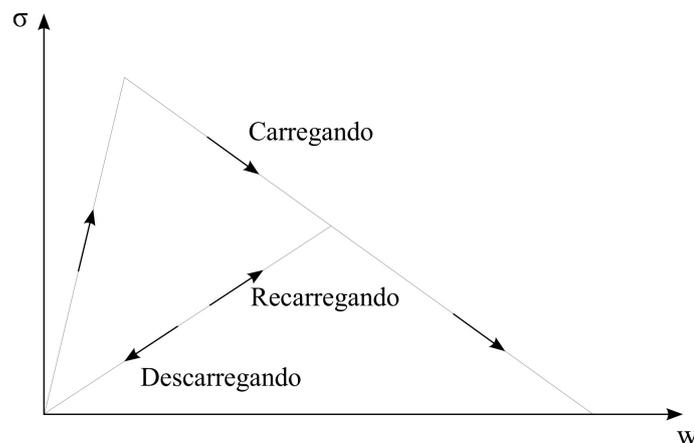
sendo que $e = \exp(1)$, σ_c é a resistência da interface à abertura normal e w_n^c é o comprimento característico da interface.

No presente trabalho, optou-se pela implementação dos modelos linear para modo I puro, baseado nos trabalhos de Hillerborg, Modéer e Petersson (2) e Camanho, Davila e Moura (69), linear para modo misto, baseado em Turon (70) e van der Meer (71), e modelo exponencial, baseado no trabalho de Ortiz e Pandolfi (72). Todos os modelos consideram descarregamento. Os fundamentos matemáticos destes modelos são expostos adiante, no Capítulo 4.

O comportamento dos elementos coesivos sob o efeito de descarregamento tem que ser definido, caso seja considerada a irreversibilidade do processo de dano no modelo, garantindo a compatibilidade com os processos termodinâmicos (73). Os termos ‘carregamento’ e ‘descarregamento’, aqui, são aplicados no sentido da separação das faces da trinca aumentar ou diminuir, respectivamente, visto que as tensões nas faces decrescem à medida que aumenta a abertura da trinca, após atingir a tensão máxima (66).

As fraturas frágeis e quase-frágeis, que são caracterizadas por microfissuras, não seriam modeladas corretamente com uma separação residual permanente no descarregamento, já que as microfissuras fecham completamente. Entretanto, estas microfissuras, após fecharem, não mantêm as mesmas rigidezes iniciais, como visto na Figura 10.

Figura 10 – Esquema de carregamento e descarregamento/recarregamento.



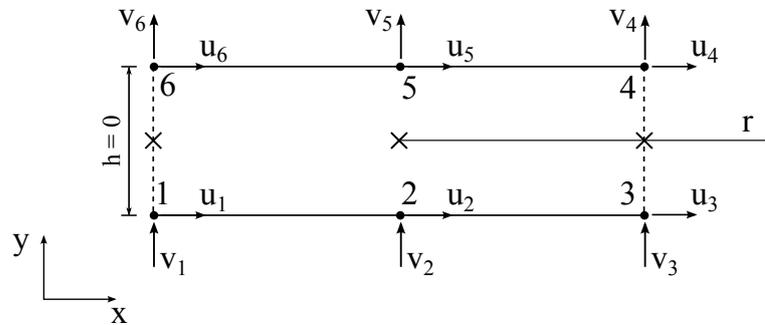
Fonte: Elaborada pelo autor.

3 ELEMENTO FINITO DE INTERFACE

Nesta seção, são apresentados detalhes sobre a formulação dos elementos de interface bidimensionais implementados no programa computacional CAP3D. Estes elementos permitem a modelagem de zonas coesivas, os quais são utilizados em conjunto com as leis mostradas no Capítulo 4.

Elementos de interface tanto lineares quanto quadráticos foram implementados. Para o elemento linear, apenas 4 nós estão presentes, enquanto o quadrático possui 6 nós, cada um com dois graus de liberdade. Conforme esquematizado na Figura 11, o elemento é composto por duas linhas, que no estado indeformado estão unidas, posto que a espessura inicial é nula, e à medida que os elementos adjacentes se deformam, elas se separam.

Figura 11 – Elemento de interface quadrático com espessura nula.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As coordenadas no interior dos elementos, \mathbf{x} e \mathbf{y} , são interpoladas a partir dos valores nodais, por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{Bmatrix}^T = \mathbf{N}\bar{\mathbf{x}} \quad (14)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{Bmatrix}^T = \mathbf{N}\bar{\mathbf{y}} \quad (15)$$

onde o subscrito n é o número de nós do elemento, \mathbf{x} e \mathbf{y} são as coordenadas globais de um ponto dentro do elemento, $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ são as coordenadas nodais do elemento no sistema de eixos global e \mathbf{N} são as funções de forma, que são funções utilizadas na interpolação.

Os elementos de interface implementados são baseados na formulação isoparamétrica, isto é, utiliza as mesmas funções polinomiais para interpolar a geometria e os deslocamentos (74). As funções de forma \mathbf{N} para os elementos linear e quadrático, respectivamente, são as mesmas utilizadas para os elementos de barra e são expressas por

$$\mathbf{N} = \left[\frac{1}{2}(1-r) \quad \frac{1}{2}(1+r) \quad \frac{1}{2}(1+r) \quad \frac{1}{2}(1-r) \right] \quad (16)$$

$$\mathbf{N} = \left[\frac{1}{2}r(r-1) \quad 1-r^2 \quad \frac{1}{2}r(r+1) \quad \frac{1}{2}r(r+1) \quad 1-r^2 \quad \frac{1}{2}r(r-1) \right] \quad (17)$$

onde r é a coordenada natural definida no intervalo $-1 \leq r \leq 1$.

Os deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{u}}$ do elemento quadrático, com componentes (u_i, v_i) no sistema global de coordenadas (Figura 11), estão representados como

$$\bar{\mathbf{u}} = \left\{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \right\}^T \quad (18)$$

A deformação do elemento de interface é definida como o deslocamento relativo entre as duas faces (8, 20). Logo, o vetor de deformação (ou vetor de deslocamento relativo) \mathbf{w} é a diferença entre os deslocamentos dos nós superiores e inferiores do elemento, ou seja,

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{\text{sup}} - u_{\text{inf}} \\ v_{\text{sup}} - v_{\text{inf}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

No sistema de coordenadas locais, o vetor de deslocamento relativo \mathbf{w} faz uma distinção entre os deslocamentos tangenciais w_t e os normais w_n ao longo da interface.

O campo de deslocamento contínuo entre as faces, que é obtido através da interpolação com os deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{u}}$ usando as mesmas funções de forma dos elementos finitos isoparamétricos de barra, é definido por

$$\begin{Bmatrix} u_{\text{inf}} \\ v_{\text{inf}} \\ u_{\text{sup}} \\ v_{\text{sup}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \quad (20)$$

Assim, o vetor de deslocamento relativo, e, por conseguinte, seu vetor incremental, ambos no sistema global de coordenadas, podem ser expressos por

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (21)$$

$$\delta \mathbf{w} = \bar{\mathbf{B}} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (22)$$

onde \mathbf{B} é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais e os relativos:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

e $\bar{\mathbf{B}}$ relaciona os incrementos de deslocamentos relativos aos incrementos de deslocamentos nodais. Entretanto, $\bar{\mathbf{B}}$ e \mathbf{B} são iguais em problemas geometricamente lineares (pequenos deslocamentos).

A fim de permitir que o elemento possua qualquer orientação no espaço, faz-se uma distinção entre os vetores e matrizes locais e globais, relacionando-os através de uma matriz de

transformação \mathbf{T} (74). Assim, a relação entre os deslocamentos locais \mathbf{u}' e globais \mathbf{u} é dada por

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (24)$$

No sistema local, o vetor de deslocamentos relativos, \mathbf{w}' , é

$$\mathbf{w}' = \mathbf{T}\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação, composto pelos cossenos diretores das coordenadas do sistema local para o global:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x}'(r)}{\|\mathbf{x}'(r)\|} & \frac{\mathbf{y}'(r)}{\|\mathbf{x}'(r)\|} \\ -\frac{\mathbf{y}'(r)}{\|\mathbf{x}'(r)\|} & \frac{\mathbf{x}'(r)}{\|\mathbf{x}'(r)\|} \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde $\mathbf{x}'(r)$ e $\mathbf{y}'(r)$ são as derivadas das coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} em relação a r e $\|\mathbf{x}'(r)\|$ é a norma do vetor das derivadas das coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} em relação a r , ou seja, é o comprimento do vetor na direção r :

$$\|\mathbf{x}'(r)\| = \sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2} \quad (27)$$

Por equilíbrio de energia, tem-se que o trabalho realizado pelas forças internas de deformação é igual ao trabalho das forças externas que atuam no corpo. Aplicando, então, o Princípio do Trabalho Virtual (PTV), onde o sistema é perturbado da posição de equilíbrio por um deslocamento virtual $\delta\mathbf{u}^T$, que é fictício, arbitrário e cinematicamente admissível, tem-se

$$\int_V \sigma_{\mathbf{T}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta\mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho}\mathbf{b} dV - \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q} dS - \sum \delta\mathbf{u}_p^T F_p = 0 \quad (28)$$

onde

$$\int_V \sigma_{\mathbf{T}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (29)$$

é o trabalho realizado pelas forças internas, com $\sigma_{\mathbf{T}}$ sendo o tensor de tensão, $\boldsymbol{\varepsilon}$, o tensor de deformação conjugado, e $\boldsymbol{\sigma}$, o vetor das tensões transferidas entre as faces. Entretanto, os elementos coesivos contribuem apenas para a segunda parcela da Eq. (29) (75).

$$- \int_V \delta\mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho}\mathbf{b} dV - \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q} dS - \sum \delta\mathbf{u}_p^T F_p \quad (30)$$

é o trabalho realizado pelas forças externas, com $\boldsymbol{\rho}\mathbf{b}$ correspondendo às forças de corpo agindo no volume do elemento, \mathbf{q} corresponde às forças superficiais atuantes na superfície e a última parcela refere-se às cargas nodais.

A integral resultante no volume do trabalho interno (Eq. 29) é dividida numa integral dupla, integrando na espessura fora do plano t e na coordenada x . A coordenada y é desconsiderada, visto que o elemento não possui espessura nessa direção. Logo, a equação resultante para o trabalho interno torna-se

$$W_{int} = t \int_x \delta \mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (31)$$

Entretanto, as equações anteriores estão no sistema global, enquanto que problemas com interfaces devem ser resolvido no sistema local. Sabendo que o trabalho interno calculado no sistema global deve ser igual ao calculado no sistema local (74), obtém-se

$$W_{int} = t \int_x \delta \mathbf{w}'^T \boldsymbol{\sigma}' dx \quad (32)$$

Os incrementos de deslocamento relativo para o sistema global $\delta \mathbf{w}$, conforme mostrado na Eq. (22), são relacionados aos deslocamentos através da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ e podem ser transformados para o sistema local. Logo, a partir da Eq. (25), os incrementos de deslocamento relativo tomam a seguinte forma:

$$\delta \mathbf{w}^T = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T \Rightarrow \delta \mathbf{w}'^T = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^T \quad (33)$$

Diferenciando, também, o vetor dos deslocamentos \mathbf{u}^T , obtém-se

$$\delta \mathbf{u}^T = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}^T \quad (34)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (33) e (34) na forma geral do PTV, tem-se

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^T t \int_x \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}' dx - \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} = 0 \quad (35)$$

como os deslocamentos $\delta \bar{\mathbf{u}}^T$ de ambas as parcelas devem ser diferentes de zero, ou seja, admissíveis na configuração de equilíbrio, a Eq. (35) resulta em

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{f} = 0 \quad (36)$$

onde \mathbf{f} é o vetor de forças externas; e o vetor de forças internas da estrutura $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}})$ depende dos deslocamentos, caracterizando-se não linear, em virtude da existência da não linearidade física decorrente do comportamento do material. O vetor $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}})$, expresso em função da não linearidade física, é

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}) = t \int_x \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{w}'(\bar{\mathbf{u}})) dx \quad (37)$$

onde, considerando que o elemento é geometricamente linear, tem-se que

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \quad (38)$$

Problemas associados com interface costumam, em geral, serem não lineares, inclusive quando o material da estrutura é linear elástico, pois as deformações na interface apresentam fortes não linearidades durante os processos de deslizar, abrir ou fechar (11). Tipicamente, as técnicas de solução iterativas aplicadas, como o método de Newton-Raphson, que é frequentemente empregado em análise estrutural, envolvem linearizações das equações governantes. Portanto, deve-se linearizar a dependência dos incrementos de tensão $\delta\boldsymbol{\sigma}'$ nos incrementos de deslocamento $\delta\bar{\mathbf{u}}$. O incremento de tensão $\delta\boldsymbol{\sigma}'$ depende do incremento do tensor deformação (deslocamento relativo) $\delta\mathbf{w}'$, enquanto o incremento do tensor deformação pode ser uma função não linear do incremento do campo de deslocamento contínuo $\delta\bar{\mathbf{u}}$ (60), ou seja,

$$\delta\boldsymbol{\sigma}' = \delta\boldsymbol{\sigma}'(\delta\mathbf{w}'(\delta\bar{\mathbf{u}})) \quad (39)$$

O incremento de tensão $\delta\boldsymbol{\sigma}'$ pode ser linearizado como

$$\delta\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}_t \delta\mathbf{w}' \quad (40)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente dada por

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}'}{\partial\mathbf{w}'} \quad (41)$$

A Figura 12 apresenta o gráfico da lei coesiva exponencial, que relaciona as tensões e os deslocamentos relativos. No trecho linear, a rigidez é constante e $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}$, já na curva não linear, trechos infinitesimais da curva são aproximados por retas tangentes e \mathbf{C}_t depende dos deslocamentos relativos.

A matriz de rigidez tangente é obtida da linearização da equação de equilíbrio (Eq. 36). Logo, por definição a matriz de rigidez é

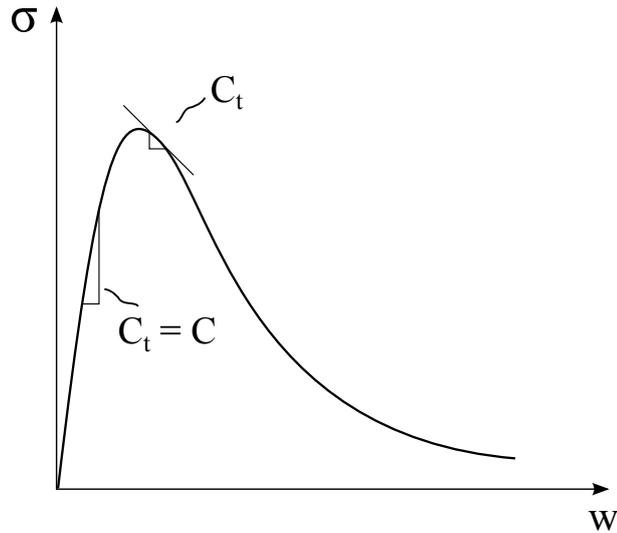
$$\mathbf{K} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\bar{\mathbf{u}}} \quad (42)$$

Substituindo o vetor de forças internas da Eq. (37), tem-se

$$\mathbf{K} = \mathbf{t} \frac{(\int_x \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^T \partial\boldsymbol{\sigma}' dx + \int_x \partial\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}' dx)}{\partial\bar{\mathbf{u}}} \quad (43)$$

Entretanto, $\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}^T}{\partial\bar{\mathbf{u}}} = 0$, pois $\bar{\mathbf{B}}^T$ não depende de $\bar{\mathbf{u}}$, visto que $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$, dado que a formulação é

Figura 12 – Exemplo de uma matriz tangente do material para uma lei constitutiva não-linear.



Fonte: Elaborada pelo autor.

geometricamente linear. Assim,

$$\mathbf{K} = t \int_x \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (44)$$

Utilizando a regra da cadeia,

$$\mathbf{K} = t \int_x \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'} \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (45)$$

$$\mathbf{K} = t \int_x \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}_t \mathbf{T} \mathbf{B} dx \quad (46)$$

O vetor tensão $\boldsymbol{\sigma}'$ se relaciona com o vetor deslocamento relativo \mathbf{w}' , ambos no sistema local, através da matriz constitutiva \mathbf{C}_t . Segundo Bueno (76), os elementos de interface possuem apenas duas componentes de tensão (σ_t , σ_n), não dependendo, portanto, se o problema é modelado como um estado plano de tensões ou de deformações. Já no caso de elementos paramétricos convencionais, o vetor de tensão $\boldsymbol{\sigma}'$ possui três componentes para um estado plano de tensões (σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}) ou quatro componentes para um estado plano de deformações (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy}). Deste modo, o vetor $\boldsymbol{\sigma}'$ é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{w}' = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{T} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (47)$$

O vetor de forças internas da Eq. (37), após substituir na Eq. (47), resulta em

$$\mathbf{g} = t \int_x \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{T} \mathbf{B} dx \bar{\mathbf{u}} \quad (48)$$

Convertendo as coordenadas das integrais do vetor das forças internas e da matriz de rigidez tangente em naturais, obtém-se

$$\mathbf{g} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{T} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dr \bar{\mathbf{u}} \quad (49)$$

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}_t \mathbf{T} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dr \quad (50)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana, responsável por transformar as coordenadas globais (x e y) nas coordenadas paramétricas do elemento (r e s).

O Jacobiano (\mathbf{J}) pode ser considerado como um fator de escala que relaciona um comprimento físico dx a um comprimento de referência dr (19, 74):

$$dx = \mathbf{J} dr \quad (51)$$

sendo o determinante do Jacobiano dado por (18, 19)

$$|\mathbf{J}| = \left[\left(\frac{dx}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

Como o elemento possui apenas uma dimensão, já que a espessura é nula, o determinante do Jacobiano fica:

$$|\mathbf{J}| = \frac{dx}{dr} = \frac{1}{2}(2r-1)x_1 - 2rx_2 + \frac{1}{2}(2r+1)x_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) + r((x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)) \quad (53)$$

Apesar do Jacobiano depender das coordenadas locais do elemento, seu valor se reduz a uma constante em qualquer ponto do mesmo se os nós centrais estiverem no meio. Como mostrado em Cook *et al.* (74) para elementos de barra, caso os nós centrais (nós 2 e 5 - Figura 11) sejam equidistantes dos nós das extremidades, tem-se que $(x_1 - x_2) = (x_2 - x_3) = \frac{L}{2}$. Logo, $|\mathbf{J}| = \frac{L}{2}$, onde L é o comprimento do elemento.

É importante ressaltar que se o determinante da matriz jacobiana for calculado como o de um elemento de barra comum, seu valor final será L , pois o elemento de interface é composto por duas linhas. Porém, de modo a calcular corretamente a energia interna do elemento, o valor do determinante deve ser $L/2$. De modo a corrigir esta discrepância, pode-se utilizar apenas uma das linhas no cálculo, como mostrado na Eq. (53), ou utilizar as duas linhas, mas dividir os pesos da integração numérica por 2, estratégia utilizada no presente trabalho.

Na prática, as integrais do vetor de forças internas e da matriz de rigidez são resolvidas numericamente através de esquemas de quadraturas como as de Gauss, Lobatto e Newton-Cotes. Nos elementos de interface de linha e plano, as integrais podem ser resolvidas tanto por integração numérica quanto por integração *lumped*, onde na primeira a relação tensão-deslocamento relativo é avaliada ao longo do campo de deslocamento interpolado nos pontos

de integração e no segundo a mesma relação é avaliada apenas com os valores nodais (17). Os pontos de integração, em virtude da espessura nula do elemento e da existência de apenas uma coordenada natural, estão distribuídos apenas em uma linha central entre as duas linhas do elemento, conforme é visto na Figura 11.

O vetor \mathbf{g} e a matriz \mathbf{K} , utilizando a integração numérica, são escritos como

$$\mathbf{g} = \int \sum_{p=1}^{n_p} \mathbf{B}_p^T \mathbf{T}_p^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{w}'_p} \mathbf{T}_p \mathbf{B}_p w_p |\mathbf{J}|_p \bar{\mathbf{u}}_p \quad (54)$$

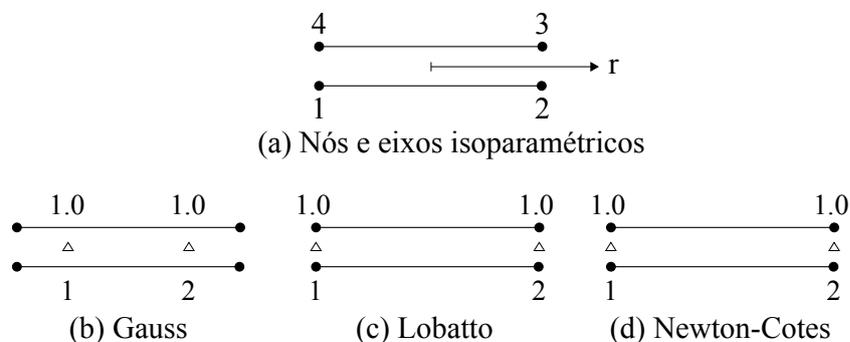
$$\mathbf{K} = \int \sum_{p=1}^{n_p} \mathbf{B}_p^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{C}_{tp} \mathbf{T}_p \mathbf{B}_p w_p |\mathbf{J}|_p \quad (55)$$

onde as integrais são substituídas por somatórios ponderados, sendo w_p o peso e o índice p refere-se ao número de pontos utilizados conforme a quadratura escolhida.

Desai e Nagaraj (77), através de um estudo paramétrico, encontraram incongruências nos resultados após analisarem os elementos de espessura nula com pontos de Gauss. A média dos resultados das tensões normal e de cisalhamento, assim como dos deslocamentos horizontais, foram compatíveis com os valores analíticos quando obtidos pelos pontos de Gauss em elementos de espessura fina. Entretanto, nos elementos de espessura nula, os resultados foram inconsistentes com 3 pontos de Gauss, apesar de terem convergido para os resultados do elemento de espessura fina utilizando apenas 2 pontos.

Segundo Schellekens e De Borst (17) e De Borst *et al.* (60), o valor muito elevado da rigidez inicial requerido pelo elemento de interface para evitar deformações adicionais durante o estágio elástico do carregamento pode causar indesejáveis oscilações espúrias no campo de tensão, dependendo do esquema de integração utilizado. Os autores compararam ainda as quadraturas de Gauss, Newton-Cotes e Lobatto, verificando que os esquemas de Newton-Cotes e Lobatto são idênticos quando são utilizados dois ou três pontos de integração (Figuras 13 e 14).

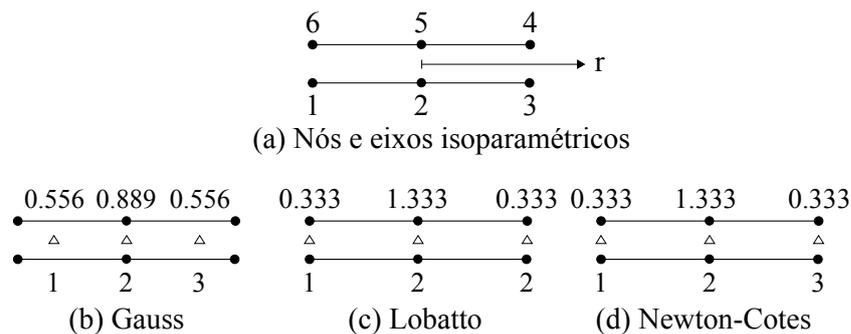
Figura 13 – Localização e peso dos pontos de integração para elementos de interface lineares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Schellekens e De Borst (17) mostram que o uso mencionado da elevada rigidez inicial e os efeitos indesejáveis se apresentam quando no emprego da quadratura de Gauss, onde surgiram oscilações nos resultados na direção vertical. Tal fato ocorreu tanto em análises lineares quanto não-lineares. A causa das oscilações, conforme os autores, não é apenas a elevada rigidez, mas sim a combinação do esquema de integração de Gauss e os elevados gradientes de tensão resultantes sobre o elemento de interface. Integração reduzida, assim como super integração (utilização de mais pontos de integração que o necessário) não produz melhoras nos resultados quando comparados à integração completa de Gauss. Já as quadraturas de Newton-Cotes e Lobatto, ainda segundo os mesmos autores, levam a resultados corretos independente da magnitude da rigidez inicial. Entretanto, caso sejam utilizados mais pontos que o necessário, oscilações na distribuição de tensão surgem novamente, visto que com quatro pontos ou mais o uso dessas quadraturas fornece resultados iguais aos obtidos pela quadratura de Gauss com três pontos.

Figura 14 – Localização e peso dos pontos de integração para elementos de interface quadráticos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Hohberg (14) apontou que utilizar esquemas de integração cujos pontos estão localizados nos nós, conforme visto nas Figuras 13 e 14 para as quadraturas de Newton-Cotes e Lobatto, produz um perfil de tensão mais suave que pontos posicionados dentro do elemento, como os pontos de Gauss, acarretando o desaparecimento das oscilações independentemente da magnitude da rigidez inicial (penalidade). Da mesma forma, Gens, Carol e Alonso (78) reportam um melhor desempenho da integração de Newton-Cotes sobre a de Gauss.

Simone (79) afirma que os esquemas de integração nodais, como o de Newton-Cotes, apenas estão isentos das oscilações enquanto a malha da análise for estruturada. Day e Potts (80), ao contrário de outros autores, afirmam que o esquema de integração de Newton-Cotes não apresenta vantagens sobre a integração de Gauss. Mesmo assim, a fim de evitar as deficiências causadas pela quadratura de Gauss, a quadratura de Newton-Cotes é utilizada neste trabalho, baseando-se nos autores já citados e em outros, como (60, 69, 81–86).

A matriz constitutiva tangente, definida na Eq. (41), tem a seguinte forma, quando

o modelo constitutivo é linear e não há acoplamento entre os deslocamentos relativos normais e tangenciais:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \quad (56)$$

onde K_t e K_n são os coeficientes de rigidez elástica tangencial e normal, respectivamente.

Segundo Carol, Prat e López (55), nos elementos de interface sem espessura, os coeficientes elásticos K_t e K_n podem ser interpretados como coeficientes de penalidade que devem possuir valores tão elevados quanto possível, sem causar dificuldades numéricas. De outra forma, estes coeficientes devem representar a deformabilidade do material contido na espessura fora do plano da interface. Nesses casos,

$$K_n = \frac{E}{t} \quad (57)$$

$$K_t = \frac{G}{t} \quad (58)$$

onde E é o módulo de elasticidade e G é o módulo de cisalhamento transversal e t , a espessura fora do plano do elemento de interface (14).

4 LEIS COESIVAS

Os termos da matriz constitutiva \mathbf{C} obtida no capítulo anterior dependem das leis constitutivas formuladas a seguir. As leis coesivas aplicadas aos elementos de interface, aqui, apresentam perda de rigidez e permitem o descarregamento irreversível.

4.1 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I

O modelo linear é baseado parcialmente no proposto por Hillerborg, Modéer e Petersson (2) e semelhante ao de Barenblatt (36), visto que a tensão varia em função dos deslocamentos relativos. O Modelo de Zona Coesiva (MZC), ao contrário do modelo de fratura de Griffith, permite que os critérios de iniciação e evolução da trinca sejam obtidos naturalmente na formulação, sem a necessidade de considerar hipóteses *a priori* (64, 87).

O presente modelo também se baseia no trabalho de Camanho, Davila e Moura (69), utilizando elementos da Mecânica do Dano, visto que o dano é uma grandeza física que pode ser mensurada através da redução progressiva de uma propriedade mecânica, como a rigidez do material (88). Os elementos da Mecânica do Dano incorporados à formulação são, por exemplo, a irreversibilidade do processo do dano e a variável de dano D , que avalia a evolução da trinca. O início do dano é determinado após ser verificado que a tensão atuante ultrapassou a tensão resistente.

Dentro da abordagem intrínseca do MZC, a tensão σ no elemento de interface do modelo cresce linearmente com o deslocamento relativo w , partindo de zero até atingir a tensão limite de resistência à tração do material (σ_c), onde se inicia o processo de amolecimento, com o decréscimo gradual da tensão até atingir zero novamente, quando a abertura máxima w_f é alcançada. Logo, entende-se que o critério de iniciação da trinca é alcançado quando a tensão correspondente for igual a tensão resistente à tração da interface σ_c ,

$$\sigma = \sigma_c \quad (59)$$

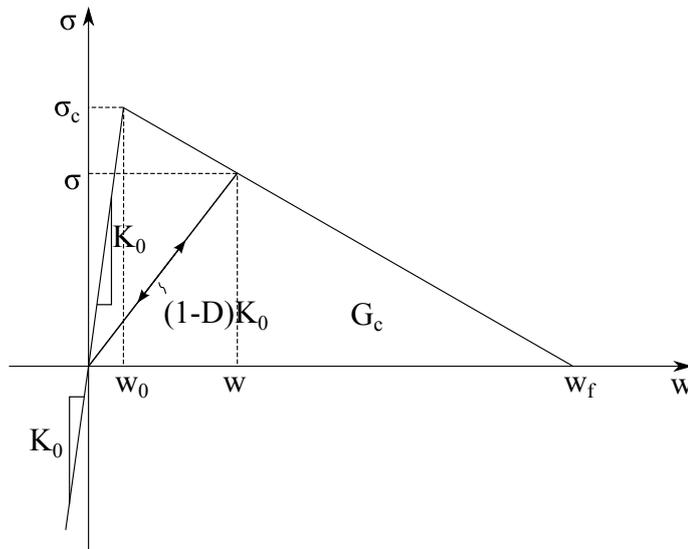
Importante frisar que, segundo Shah, Swartz e Ouyang (32), a tensão limite de resistência à tração σ_c empregada aqui e a tensão resistente à tração convencional do material σ'_c obtida através do teste comum de tração são diferentes. O primeiro é um parâmetro de fratura do material, e o segundo depende tanto do material quanto do tamanho e geometria da amostra ensaiada e do procedimento do teste.

A Figura 15 mostra a curva $\sigma - w$ escolhida, que, assim como a curva assumida por Hillerborg, Modéer e Petersson (2), apresenta relações matemáticas simples, sendo possível estabelecer os vínculos entre as variáveis existentes na lei constitutiva. O trecho ascendente da curva é ditado por uma alta rigidez inicial K_0 (relacionada com as eqs. 57 e 58) utilizada como uma rigidez penalidade para garantir uma abertura desprezível w_0 antes da tensão alcançar o

limite de resistência à tração do material σ_c , ou seja,

$$w_0 = \frac{\sigma_c}{K_0} \quad (60)$$

Figura 15 – Modelo constitutivo linear.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A rigidez penalidade refere-se a rigidez da interface antes do amolecimento da mesma. No modo I, para evitar interpenetração, essa rigidez penalidade também é aplicada caso haja compressão, visto que materiais quase-frágeis possuem comportamentos diferentes para os estados de tração e compressão (51).

A área abaixo da curva $\sigma - w$, na Figura 15, denota a tenacidade à fratura do material G_c , um parâmetro de fratura do material que representa a taxa de energia absorvida por unidade de área da trinca aberta. Parâmetro que é obtido experimentalmente, mas que pode ser expresso por

$$G_c = \int_0^{w_f} \sigma(w) dw = \frac{1}{2} \sigma_c w_f \quad (61)$$

A expressão permite também determinar o deslocamento final w_f , dado por

$$w_f = \frac{2G_c}{\sigma_c} \quad (62)$$

A propagação da trinca, que é baseada em energia, é prevista para quando a taxa de

liberação de energia G_T for igual a tenacidade à fratura do material G_c ,

$$G_T = G_c \quad (63)$$

Após a tensão na trinca atingir a tensão resistente à tração σ_c , inicia-se a redução de rigidez das faces da mesma, onde a tensão não zera imediatamente, mas decresce linearmente com o crescimento do deslocamento w , visto que, ainda segundo Hillerborg, Modéer e Petersson (2), no trecho onde $w < w_f$, a “trinca” na realidade corresponde a uma região com microfissuras que transferem tensão através de ligamentos remanescentes.

Após os deslocamentos atingirem a abertura máxima w_f , a transferência de tensões entre as faces é interrompida, logo a rigidez é nula e, por conseguinte, as tensões também são anuladas.

O processo do amolecimento pode ser relacionado à degradação da matriz constitutiva elástica e é acompanhado por um parâmetro escalar interno D associado à evolução do dano, que gradualmente desenvolve o processo de falha, reduzindo dificuldades na convergência (84). Como visto na Figura 15, considerando uma matriz constitutiva secante,

$$K_{sec} = (1 - D)K_0 \quad (64)$$

onde $D \in [0, 1]$, com $D = 0$ e $K_{sec} = K_0$ antes do início da degradação e $D = 1$ e $K_{sec} = 0$ representando um estado de degradação completa (69).

Assim, como o dano é um processo de deformação irreversível termodinamicamente (73), o valor de D não decresce. A fim de obter a expressão para o parâmetro de dano, D , aproveita-se da linearidade da curva tensão-deslocamento utilizando geometria simples, dada por

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{w_f - w}{w_f - w_0} \quad (65)$$

Através de algebrismo e aplicando as Eqs. (60) e (64), encontra-se a expressão para D , expressa a seguir.

$$D = \frac{w_f}{w_f - w_0} \left(1 - \frac{w_0}{w} \right), \quad \text{para } w \geq w_0 \quad (66)$$

Com a finalidade de controlar o máximo deslocamento alcançado durante o carregamento, a equação constitutiva pode ser formulada em termos do máximo deslocamento relativo w_{max} ,

$$w_{max} = \max\{w_{max}, w\}, \quad \text{com } w_{max} \geq 0 \quad (67)$$

Logo, o parâmetro de dano D , quando $w \geq w_0$, fica

$$D = \frac{w_f(w_{max} - w_0)}{w_{max}(w_f - w_0)} \quad (68)$$

As leis coesivas podem ser reversíveis e independentes do histórico de carregamento, presumindo que a tensão coesiva refará toda a curva tensão-deslocamento relativo quando houver descarregamento. Entretanto, a inclusão do descarregamento, considerando que a carga aplicada ao modelo pode não ser monotônica, torna a formulação mais versátil, visto que espera-se, pelo menos, algum grau de irreversibilidade em fraturas a nível macroscópico (72).

No presente modelo, apesar da abertura fechar-se após o descarregamento, com os deslocamentos relativos nulos, também assume-se que durante o recarregamento a estrutura já não possui a mesma rigidez inicial e segue o mesmo caminho do descarregamento, utilizando uma rigidez secante K_{sec} (Eq. 64) (89), enquanto não atinge o deslocamento relativo máximo w_{max} . Isso garante o caráter irreversível da equação constitutiva.

A equação constitutiva linear para o modo I puro, como se apresenta na Figura 15, é definida como

$$\sigma = \begin{cases} K_0 w, & w_{max} \leq w_0 \\ (1 - D)K_0 w, & w_{max} > w_0 \\ 0, & w_{max} \geq w_f \end{cases} \quad (69)$$

A presença do amolecimento na lei constitutiva coesiva, conforme diversos autores na literatura, ocasiona dificuldades na convergência de soluções para o problema não linear (6, 69, 83, 90–95), levando à utilização de métodos direcionados para o amolecimento, como algumas modificações do método do comprimento de arco (94, 95).

As desvantagens dos métodos tradicionais como o controle de carga e o controle de deslocamento são: o primeiro não ultrapassa os pontos-limites da tangente horizontal na curva carga-deslocamento e o último não ultrapassa pontos-limites da tangente vertical (*snaps-backs*) (6), que podem surgir após o ponto de bifurcação (90). O método do comprimento de arco soluciona tais desvantagens, desempenhando um forte papel na análise de fraturas localizadas com amolecimento (6).

Todavia, segundo Crisfield, Hellweg e Davies (91), De Borst (92, 93) e Song, Paulino e Buttlar (96), o método do comprimento de arco, apesar de ser empregado com sucesso em problemas com não linearidade geométrica, às vezes falha em pontos limites de problemas fisicamente não lineares, já que estes envolvem amolecimento, falha ou bifurcação, que são geralmente modos altamente localizados.

O método de Newton-Raphson com controle de deslocamento é o método aplicado no presente trabalho para resolver o problema não linear. Entretanto, o mesmo requer a matriz constitutiva tangente K_{tan} . A equação constitutiva secante (Eq. 69) obtida é aplicada no cálculo

das tensões. Portanto, sabendo que

$$K_{tan} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{w}} \quad (70)$$

E conhecendo as Eqs. (64) e (66), tem-se, então, respectivamente,

$$K_{tan} = K_{sec} + \frac{\partial K_{sec}}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w} = (1 - D)K_0 - K_0 \frac{\partial D}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w} \quad (71)$$

$$K_{tan} = (1 - D)K_0 - \frac{K_0 w_f w_0}{(w_f - w_0)w} \quad (72)$$

Através da Eq. (60), sabe-se que $\sigma_c = K_0 w_0$, logo a Eq. (72) converte-se em

$$K_{tan} = -\frac{\sigma_c}{(w_f - w_0)} \quad (73)$$

onde o sinal negativo indica o caráter descendente do gráfico, a fim de representar o amolecimento. A mesma expressão pode ser obtida geometricamente através do gráfico na Figura 15.

A lei constitutiva com amolecimento linear empregada na obtenção da matriz \mathbf{C} , durante o carregamento, é

$$K_n = \begin{cases} K_0, & w_{max} \leq w_0 \\ -\frac{\sigma_c}{(w_f - w_0)}, & w_{max} > w_0 \\ 0, & w_{max} \geq w_f \end{cases} \quad (74)$$

4.2 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto

O modelo constitutivo empregado para modo misto foi desenvolvido para problemas tridimensionais por Turon (70) e modificado por van der Meer (71), e aqui é adaptado para problemas bidimensionais. Assim como no modelo linear do modo I puro apresentado no item anterior, a lei constitutiva relaciona as tensões e deslocamentos relativos através de uma variável de dano D e uma rigidez penalidade K_0 , entretanto, no presente modelo, as tensões e abertura tangenciais são incluídas, bem como as componentes normais, caracterizando um modo misto de abertura. A variável de dano D , como já dito, quantifica a evolução do dano, onde $D \in [0, 1]$.

O vetor tensão segue a seguinte expressão:

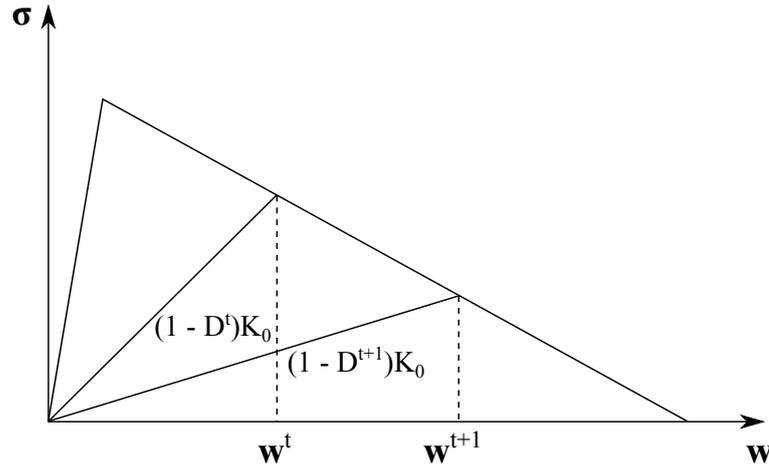
$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{I} - D\mathbf{P}]K_0 \mathbf{w} \quad (75)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{P} é

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\langle w_n \rangle}{w_n} \end{bmatrix} \quad (76)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ é o colchete de MacAuley, com $\langle x \rangle = (x + \|x\|)/2$ e é aplicado a fim de evitar a interpenetração das faces na abertura normal, cancelando a contribuição da direção normal no dano caso haja compressão. A Figura 16 mostra como a tensão é calculada através da rigidez secante K_{sec} em cada passo da análise.

Figura 16 – Cálculo da tensão através de uma rigidez secante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A variável de dano D é expressa como

$$D = \max \begin{cases} 0, & w \leq w_0 \\ \frac{w_f(w - w_0)}{w(w_f - w_0)}, & w_0 < w < w_f \\ 1, & w \geq w_f \end{cases} \quad (77)$$

e depende dos deslocamentos relativos de cada passo. Logo, define-se uma relação para as aberturas normal e tangencial com a norma do vetor dos deslocamentos relativos, bem como um critério para evolução da trinca (70). Entretanto, mantendo a formulação consistente com a termodinâmica e garantindo a irreversibilidade, D é tomado como variável interna e tem variação sempre positiva ou nula, sem haver redução do estado de dano da estrutura.

A norma do vetor de deslocamentos relativos, também chamada de deslocamento relativo equivalente, é definida por

$$w = \sqrt{\langle w_n \rangle^2 + w_t^2} \quad (78)$$

Notavelmente, as formulações de Turon (70) e van der Meer (71) discordam em relação à variável interna. O primeiro regula o processo de fraturamento através de w , armazenando o valor máximo da variável para garantir a evolução do processo; já o segundo utiliza a variável D para o mesmo fim. A diferença entre as duas abordagens, segundo van der Meer (71),

se dá em exemplos de modo misto, embora seja pequena. Casos com modo puro não sofrem influência, os resultados são idênticos. Apesar da influência dessa abordagem nos resultados ser pequena, ela é mais consistente com o conceito de dano, visto que o parâmetro de dano D é a razão entre a região fraturada e a intacta e a norma dos deslocamentos w é uma medida de deformação (71).

Os deslocamentos inicial e final do modo misto, w_0 e w_f , respectivamente, são definidos a partir do critério de iniciação e evolução da trinca, baseados na interação dos componentes de tensão e nas taxas de liberação de energia. No modo I puro, descrito na seção anterior, a iniciação da trinca é baseada em tensão e a evolução em energia, como visto.

Os critérios baseados em energia têm sua propagação expressa, na sua forma generalizada, por (70)

$$f_{propag} = f(G_i) - 1 = 0 \quad (79)$$

onde f_{propag} é uma função das energias de fratura de modo puro e $f(G_i)$ é uma norma das taxas de liberação de energia. Dentre os critérios que adotam esse modelo está o critério baseado na lei de potência (*Power Law*), no qual a propagação é estabelecida através de uma relação linear ($\eta = 1$) ou quadrática ($\eta = 2$) das taxas de liberação de energia dos modos I e II, quando não há resultados experimentais a serem atribuídos a cada modo. O critério de falha é definido como

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\eta + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\eta = 1 \quad (80)$$

A interação entre os modos é obtida através da razão β , dada por

$$\beta = \frac{w_t}{w_t + \langle w_n \rangle} \quad (81)$$

através da qual encontra-se os deslocamentos inicial e final do modo misto, expressos, respectivamente, por

$$w_0 = \frac{\sqrt{1 + 2\beta^2 - 2\beta w_n^0 w_t^0}}{[\left((1 - \beta)w_t^0\right)^{2\eta} + \left(\beta w_n^0\right)^{2\eta}]^{\frac{1}{2\eta}}} \quad (82)$$

$$w_f = \frac{2[1 + 2\beta^2 - 2\beta]}{K_0 w_0} \left[\left(\frac{(1 - \beta)^2}{G_{Ic}}\right)^\eta + \left(\frac{\beta^2}{G_{IIc}}\right)^\eta \right]^{-\frac{1}{\eta}} \quad (83)$$

No critério proposto por Benzeggagh e Kenane (BK) (97), também baseado em energia, a função de propagação se apresenta como

$$f_{propag} = \frac{G_T}{G_c} - 1 = 0 \quad (84)$$

onde G_T é a taxa de liberação total de energia, expressa por

$$G_T = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (85)$$

e G_c é

$$G_c = G_{Ic} + (G_{IIc} - G_{Ic}) \left(\frac{G_I + G_{II}}{G_T} \right)^\eta \quad (86)$$

onde η é dado através de resultados experimentais.

A interação entre os modos é descrita através da razão α , deduzida a partir das taxas de liberação de energia (G_i) ou deslocamentos relativos normais e tangenciais, conforme exposto a seguir,

$$\alpha = \frac{G_{II}}{G_I + G_{II}} = \frac{w_t^2}{w_t^2 + \langle w_n \rangle^2} \quad (87)$$

Através da Eq. (81) é possível expressar a razão α em termos de β ,

$$\alpha = \frac{\beta^2}{1 + 2\beta^2 - 2\beta} \quad (88)$$

Desenvolvendo o deslocamento inicial, a partir do critério de BK, tem-se

$$w_0 = \sqrt{(w_n^0)^2 + ((w_t^0)^2 - (w_n^0)^2)\alpha^\eta} \quad (89)$$

onde w_n^0 e w_t^0 são os deslocamentos relativos iniciais para os modos I e II, respectivamente,

$$w_n^0 = \frac{\sigma_n^c}{K_0} \quad (90)$$

$$w_t^0 = \frac{\sigma_t^c}{K_0} \quad (91)$$

onde σ_n^c e σ_t^c são as tensões resistentes normal e tangencial. O deslocamento final utilizando o mesmo critério é

$$w_f = \frac{w_n^0 w_n^f + (w_t^0 w_t^f - w_n^0 w_n^f)\alpha^\eta}{w_0} \quad (92)$$

onde w_n^f e w_t^f são os deslocamentos finais dos modos normal e tangencial dados por

$$w_n^f = \frac{2G_{Ic}}{\sigma_n^c} \quad (93)$$

$$w_t^f = \frac{2G_{IIc}}{\sigma_t^c} \quad (94)$$

cujos parâmetros de tenacidade à fratura G_{Ic} e G_{IIc} são obtidos através de experimentos.

A matriz constitutiva tangente \mathbf{C} , empregada na implementação computacional para o cálculo da matriz de rigidez tangente K_T , é obtida através da diferenciação da rigidez secante (Eq. 75), utilizada no cálculo do vetor tensão $\boldsymbol{\sigma}$. Ou seja,

$$\mathbf{C} = K_0 \left[\mathbf{I} - D\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{w} \left(\frac{\partial D}{\partial \mathbf{w}} \right)^T \right] \quad (95)$$

onde, de acordo com a Eq. (77),

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial D}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial D}{\partial w_0} \frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial D}{\partial w_f} \frac{\partial w_f}{\partial \mathbf{w}} \quad (96)$$

Expandindo os termos da Eq. (96) e empregando o critério de energia BK, tem-se (71)

$$\frac{\partial D}{\partial w} = \frac{w_f w_0}{w^2 (w_f - w_0)} \quad (97)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{w} \mathbf{w} \quad (98)$$

$$\frac{\partial D}{\partial w_0} = -\frac{w_f (w_f - w)}{w (w_f - w_0)^2} \quad (99)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial w_0}{\partial \alpha^\eta} \frac{\partial \alpha^\eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} \quad (100)$$

$$\frac{\partial D}{\partial w_f} = -\frac{w_0 (w - w_0)}{w (w_f - w_0)^2} \quad (101)$$

$$\frac{\partial w_f}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial w_f}{\partial \alpha^\eta} \frac{\partial \alpha^\eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} \quad (102)$$

e

$$\frac{\partial w_0}{\partial \alpha^\eta} = \frac{(w_t^0)^2 - (w_n^0)^2}{2w_0} \quad (103)$$

$$\frac{\partial w_f}{\partial \alpha^\eta} = -\frac{w_f}{w_0} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha^\eta} + \frac{w_t^0 w_t^f - w_n^0 w_n^f}{w_0} \quad (104)$$

$$\frac{\partial \alpha^\eta}{\partial \alpha} = \eta \alpha^{\eta-1} \quad (105)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} = 2\alpha(1 - \alpha) \left\{ \frac{1}{w_t}, -\frac{1}{\langle w_n \rangle} \right\}^T \quad (106)$$

Já empregando o critério da lei de potência, os termos das Eqs. (97)-(99) e (101)

permanecem iguais, o restante apresentam-se na seguinte forma,

$$\frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{w}} = \frac{w_0[w_t^2((1-\beta)w_t^0)^{2\eta} - \langle w_n \rangle^2(\beta w_n^0)^{2\eta}]}{w^2[((1-\beta)w_t^0)^{2\eta} + (\beta w_n^0)^{2\eta}]} \left\{ \frac{1}{w_t}, -\frac{1}{\langle w_n \rangle} \right\}^T \quad (107)$$

$$\frac{\partial w_f}{\partial \mathbf{w}} = \frac{w_f(\langle w_n \rangle^2 A + w_t^2 B)}{[((1-\beta)w_t^0)^{2\eta} + (\beta w_n^0)^{2\eta}] \left[\left(\frac{(1-\beta)^2}{G_{Ic}} \right)^\eta + \left(\frac{\beta^2}{G_{IIc}} \right)^\eta \right] w^2} \left\{ \frac{1}{w_t}, -\frac{1}{\langle w_n \rangle} \right\}^T \quad (108)$$

onde

$$A = (\beta w_n^0)^{2\eta} \left[\left(\frac{(1-\beta)^2}{G_{Ic}} \right)^\eta - \left(\frac{\beta^2}{G_{IIc}} \right)^\eta \right] - 2((1-\beta)w_t^0)^{2\eta} \left(\frac{\beta^2}{G_{IIc}} \right)^\eta \quad (109)$$

$$B = 2 \left(\frac{(1-\beta)^2}{G_{Ic}} \right)^\eta (\beta w_n^0)^{2\eta} + ((1-\beta)w_t^0)^{2\eta} \left[\left(\frac{(1-\beta)^2}{G_{Ic}} \right)^\eta - \left(\frac{\beta^2}{G_{IIc}} \right)^\eta \right] \quad (110)$$

Desenvolvendo os vetores nos termos da matriz \mathbf{C} (Eq. 95), obtém-se uma matriz não diagonal e não simétrica, dada por:

$$\mathbf{C} = K_0 \begin{bmatrix} 1 - D - \frac{\partial D(w_t)}{\partial \mathbf{w}} w_t & -\frac{\partial D(w_n)}{\partial \mathbf{w}} w_t \\ -\frac{\partial D(w_t)}{\partial \mathbf{w}} \langle w_n \rangle & 1 - D - \frac{\partial D(w_n)}{\partial \mathbf{w}} \langle w_n \rangle \end{bmatrix} \quad (111)$$

4.3 Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto

O modelo coesivo exponencial de modo misto empregado aqui é baseado no trabalho de Ortiz e Pandolfi (72) e conta com um reduzido número de parâmetros. Dois dos parâmetros existentes, σ_c e G_c , são associados ao modo I de fratura e o terceiro, β_{exp} , é responsável por controlar a influência do comportamento de modo misto através da relação modo I-modo II.

Leis coesivas exponenciais são largamente empregadas, visto que estas possuem vantagens sobre outras leis, como, por exemplo, a continuidade da tensão e suas derivadas, o que torna a lei computacionalmente atrativa. Tais leis coesivas originam-se da relação universal entre energia de ligação e separação atômica das interfaces.

Assim como outras leis coesivas, as leis exponenciais podem ser descritas através da termodinâmica baseada em variáveis internas, considerando a existência de uma densidade de energia livre por unidade de área indeformada, ou potencial de energia livre (ϕ). Supondo que a superfície coesiva é isotrópica, para fins de simplificação, e restringindo a lei constitutiva a processos isotérmicos, o potencial de energia livre apresenta-se na seguinte forma (72, 98):

$$\phi = \phi(\mathbf{w}, \mathbf{q}) \quad (112)$$

E por conseguinte,

$$\phi = \phi(w_n, w_t, \mathbf{q}) \quad (113)$$

onde \mathbf{q} é um conjunto de variáveis internas que descreve os processos inelásticos decorrentes da decoesão.

A fim de simplificar as formulações para as leis coesivas com modo misto, Camacho e Ortiz (25) introduziram um deslocamento relativo efetivo w , bem como uma tensão efetiva, que utiliza um parâmetro escalar β_{exp} , definido como a razão entre as tensões normais e tangenciais máximas (99, 100), para atribuir diferentes pesos aos deslocamentos relativos e tensões normais e tangenciais. Camacho e Ortiz (25) utilizaram $\beta_{exp} = \sqrt{2}$. Os deslocamentos relativos efetivos e as tensão efetivas são expressas como

$$w = \sqrt{w_n^2 + \beta_{exp}^2 w_t^2} \quad (114)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \beta_{exp}^{-2} \sigma_t^2} \quad (115)$$

O potencial de energia, após o uso do deslocamento relativo efetivo w , se apresenta como

$$\phi = \phi(w, \mathbf{q}) \quad (116)$$

Ortiz e Pandolfi (72), assim como outro autores, conforme dito no Capítulo 2, indicam o uso da Eq. (117), fornecida pela função universal da energia de ligação de Ferrante e Smith (68), para representar o potencial coesivo de energia livre ϕ que relacionará a tensão σ e o deslocamento relativo w ,

$$\phi = e \sigma_c w_c \left[1 - \left(1 + \frac{w}{w_c} \right) e^{-\frac{w}{w_c}} \right] \quad (117)$$

onde e é o número de Euler, σ_c é a máxima tensão resistente à tração da interface e w_c é o deslocamento relativo característico. A tensão efetiva correspondente ao potencial ϕ dado é

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial w} = e \sigma_c \frac{w}{w_c} e^{-\frac{w}{w_c}} \quad (118)$$

As componentes normais e tangenciais de tensão, σ_n e σ_t , respectivamente, são encontradas também através da derivada do potencial em função do vetor de deslocamentos relativos (98):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial w_n} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial w_t} = \frac{\partial \phi}{\partial w} \left(\frac{w_n}{w} + \beta_{exp}^2 \frac{w_t}{w} \right) \quad (119)$$

e conhecendo a Eq. (118), têm-se

$$\sigma_n = e \sigma_c \frac{w_n}{w_c} e^{-\frac{w}{w_c}} \quad (120)$$

$$\sigma_t = \beta_{exp}^2 e \sigma_c \frac{w_t}{w_c} e^{-\frac{w}{w_c}} \quad (121)$$

Através da variável interna w_{max} , responsável por armazenar o máximo deslocamento relativo atingido, é possível rastrear o descarregamento, que é linear e sempre retorna à origem dos eixos $\sigma - w$ (25), devido a irreversibilidade. w_{max} também é escolhido para ser a variável interna que descreve os processos irreversíveis, q (12). Logo, o carregamento se caracteriza quando $w = w_{max}$ e $\dot{w} \geq 0$. Enquanto o descarregamento, retornando a origem, existe quando $w < w_{max}$ ou $\dot{w} < 0$, o mesmo se aplica ao recarregamento, que retorna ao ponto $(w_{max}; t(w_{max}))$. A expressão da tensão para o descarregamento/recarregamento é, então,

$$\sigma = \frac{\sigma(w_{max})}{w_{max}} w \quad (122)$$

onde σ_{max} e w_{max} são a tensão e o deslocamento relativo no ponto onde a carga retornou, respectivamente.

A expressão de σ_n (Eq. 120), entretanto, não satisfaz as condições de compressão necessárias para evitar interpenetrações das faces. Logo, baseando-se na modificação empregada em Távora *et al.* (98), mas empregando a função de Heaviside, a expressão final de σ_n é

$$\sigma_n = e \sigma_c \frac{w_n}{w_c} e^{-\frac{w}{w_c}} H[w_n] \quad (123)$$

onde a função Heaviside $H[]$ é igual a 0 quando seu argumento é negativo e igual a 1 quando o argumento é positivo.

A tenacidade à fratura do material G_c , que representa a área abaixo da curva da tensão-deslocamento relativo, é definida aqui por

$$G_c = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw \quad (124)$$

Substituindo a Eq. (118) na equação acima, obtém-se

$$G_c = e \sigma_c w_c \quad (125)$$

onde G_c relaciona-se com a tensão resistente à tração e o deslocamento característico.

Entretanto, conforme discutido na seção anterior, a lei constitutiva apresentada nas Eqs. (120), (121), (122) e (123) é utilizada apenas no cálculo das tensões. Em implementações computacionais necessita-se da matriz constitutiva tangente, visto que o método de solução empregado calcula a matriz de rigidez tangente. Logo, conhecendo a Eq. (70) e diferenciando

σ_n e σ_t (Eqs. 120 e 121) em relação aos deslocamentos relativos, encontram-se os termos K_n e K_t da matriz constitutiva \mathbf{C} (Eq. 56), assim como os termos adicionais da diagonal secundária, K_{nt} e K_{tn} , para carregamento.

$$K_n = \frac{\sigma_c (w w_c - w_n^2) e^{1 - \frac{w}{w_c}}}{w w_c^2} \quad (126)$$

$$K_t = \frac{\beta_{exp}^2 \sigma_c (w w_c - \beta_{exp}^2 w_t^2) e^{1 - \frac{w}{w_c}}}{w w_c^2} \quad (127)$$

$$K_{nt} = K_{tn} = \frac{\beta_{exp}^2 \sigma_c w_n w_t e^{1 - \frac{w}{w_c}}}{w w_c^2} \quad (128)$$

As rigidezes K_{nt} e K_{tn} são não-nulas apenas para caso de carregamento. Na presença de compressão ou descarregamento, as rigidezes K_n e K_t também sofrem mudanças em suas expressões. No caso de compressão no modo I, K_n deve ser modificada tal qual como σ_n (Eq. 123),

$$K_n = \frac{\sigma_c (w w_c - H[w_n] w_n^2) e^{1 - H[w_n] \frac{w}{w_c}}}{w w_c^2} \quad (129)$$

O modo II não sofre mudanças quando os deslocamentos relativos são negativos, visto que o modo é de deslizamento entre as faces, e uma troca de sinal apenas simboliza a mudança de direção do deslizamento. Já para casos de descarregamento, K_n e K_t representam a inclinação da reta retornando a origem,

$$K = \frac{\sigma_{max}}{w_{max}} \quad (130)$$

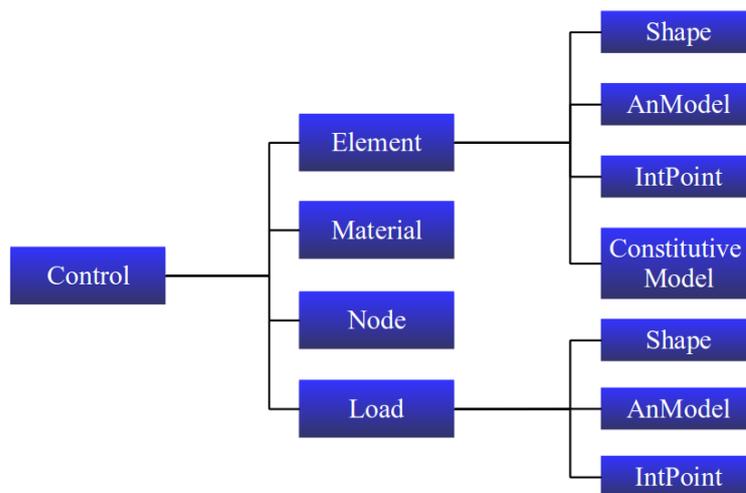
5 IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO

5.1 Implementação Computacional

As formulações apresentadas foram implementadas no programa de elementos finitos CAP3D (*Computer Analysis of Pavements*) que está sendo desenvolvido pelo Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará. O programa é baseado no paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) e utiliza a linguagem C++ (27). A POO é uma abordagem indicada para *softwares* modulares, como aqueles que utilizam elementos finitos, que possuem inúmeros e diferentes elementos, modelos constitutivos e algoritmos de análise, tendo em vista que os programas são divididos entre objetos modulares. Em razão da estrutura independente de classes da POO, a implementação de novas expansões para o programa é simples e mais natural, já que causam mínimo impacto no código existente.

No fluxograma da Figura 17, a estrutura de classes geral do programa é apresentada com as principais classes. A classe *cControl* é responsável por gerenciar os processos de análises, além de realizar tarefas secundárias como a montagem dos vetores e matrizes globais.

Figura 17 – Estrutura do programa CAP3D.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A classe *cElement* controla o comportamento de cada elemento finito dentro da análise, contendo, portanto, um objeto da classe *cShape*, que guarda aspectos geométricos e de interpolação do elemento, um modelo de análise (*cAnModel*), que é responsável pelas particularidades do modelo matemático do problema a ser solucionado, como número de graus de liberdade e de componentes da tensão e estrutura da matriz constitutiva. A classe *cIntPoint* contém as coordenadas paramétricas e os pesos correspondentes aos pontos de integração na integração numérica, logo, um objeto dessa classe é criado para cada ponto de integração do elemento.

A classe *cNode* armazena as informações referentes ao nó, como coordenadas, condições de contorno, deslocamentos, molas, dentre outros. A classe *cMaterial* contém os dados referentes aos materiais disponíveis, armazenando suas propriedades. Por fim, a classe *cLoad* define o comportamento de cargas externas no sistema, para diferentes tipos de carga.

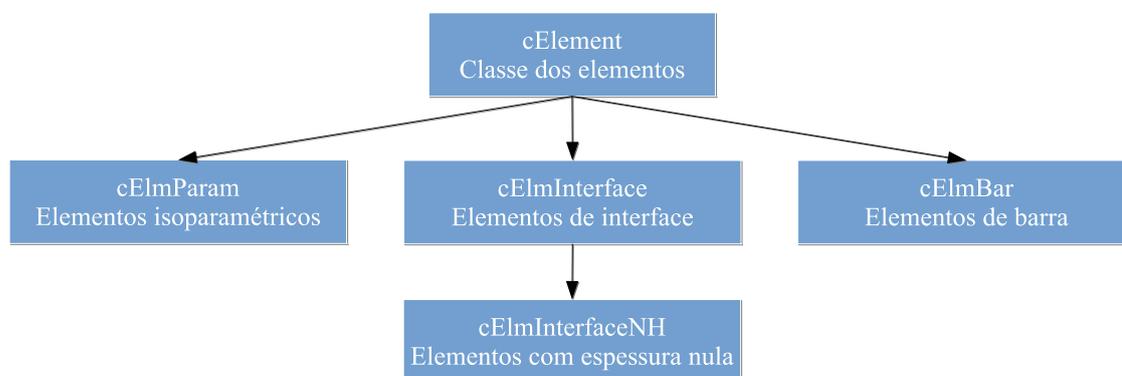
5.1.1 Elemento de Interface de Espessura Nula

O elemento de interface de espessura nula foi implementado a partir do trabalho realizado por Reina e Araújo (101) para elementos de interface com espessura finita. As classes modificadas do CAP3D no trabalho citado foram as classes *cElement*, com a criação da classe-filha *cElmInterface*, e *cShape*, onde uma classe-filha também foi concebida, *cShapeInterface*. A classe *cShapeInterface* deriva para duas classes-filha, *cShapeInterface2* e *cShapeInterface3*, referentes aos elementos de interpolação linear e quadrático, respectivamente.

Apesar do elemento ser paramétrico, por causa de algumas alterações devido ao elemento, a implementação, no presente trabalho, se deu dentro da classe *cElmInterfaceNH*, herdando membros da classe *cElmInterface*. As modificações da classe foram restringidas às rotinas de cálculo da matriz de rigidez, vetor de forças internas e função que calcula as tensões e deformações nos pontos de integração, de maneira a desconsiderar a espessura do elemento, acrescentar o uso da matriz de transformação e dividir os pesos dos pontos de integração, em todas as rotinas.

A formulação das leis constitutivas aplicadas ao elemento de interface de espessura nula são definidas a partir dos modos de fraturamento de abertura ou deslizamento, que devem ser representados no sistema local, por isso a implementação da matriz de transformação. E os pesos dos pontos de integração são divididos por 2, a fim de compensar a utilização das duas linhas do elemento no cálculo do Jacobiano. Na Figura 18, um diagrama para a classe *cElmInterface* é mostrado.

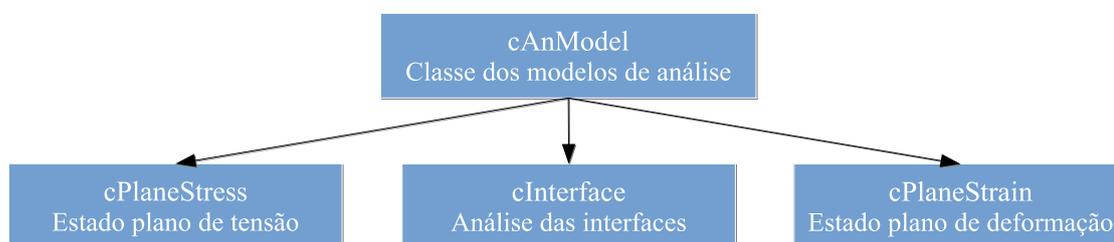
Figura 18 – Estrutura da classe *cElmInterface*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma outra fase da implementação foi a criação de uma nova classe dentro da classe *cAnModel*, chamada *cInterface*. Os elementos finitos dependem de qual estado de tensão a estrutura é submetida para, então, conhecer o número de componentes dos vetores de tensão e de deformação. Análises no Estado Plano de Tensão possuem três componentes para os vetores: 3 tensões (σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy}) e 3 deformações (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e γ_{xy}); e no Estado Plano de Deformação já apresentam quatro componentes para os vetores: 4 tensões (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} e τ_{xy}) e 4 deformações (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} e γ_{xy}). Entretanto, o elemento de interface sempre tem apenas duas componentes para a tensão e deformação (deslocamento relativo): $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_t \ \sigma_n\}^T$ e $\boldsymbol{w}' = \{w_t \ w_n\}^T$, daí a conveniência de uma nova classe de análise. A Figura 19 apresenta o diagrama da classe *cInterface*.

Figura 19 – Estrutura da classe *cInterface*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

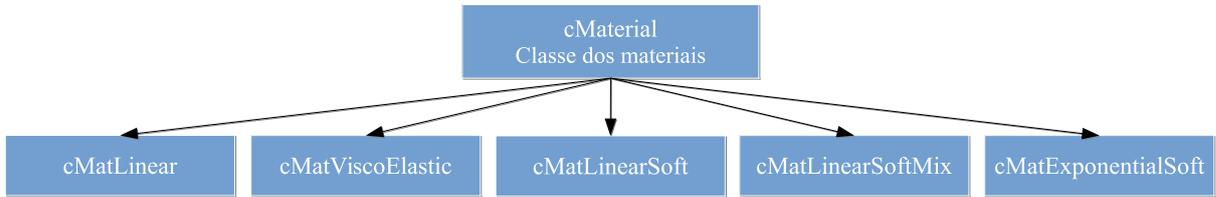
As matrizes **B** e **C** voltadas aos elementos de interface, incorporadas por Reina e Araújo (101), foram redefinidas para possuírem apenas duas linhas e retiradas das classes de análise pré-existentes, *cPlaneStress* e *cPlaneStrain*. A classe de análise *cInterface* foi implementada de forma a englobar ambos os elementos de interface, espessura nula e com espessura finita, incluindo o membro da classe que faz uso da espessura do elemento quando solicitado por *cElmInterface*.

5.1.2 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I

A lei linear de amolecimento foi implementada a partir do elemento de interface com espessura nula, conforme seção anterior do presente trabalho. As classes modificadas do CAP3D para inclusão das leis coesivas foram as classes *cMaterial* e *cConstModel*.

Na classe *cMaterial*, o novo material foi adicionado através da criação da classe-filha *cMatLinearSoft* (Figura 20). A nova classe recebe três parâmetros de material do arquivo de entrada de dados *.dat* de entrada, que são eles: Coeficiente de penalidade inicial (K_0), a tenacidade à fratura do material no modo I (G_c) e a resistência do material à abertura normal (σ_c). Os parâmetros recebidos são “transferidos” para a classe *cConstModel*, responsável pelos modelos constitutivos.

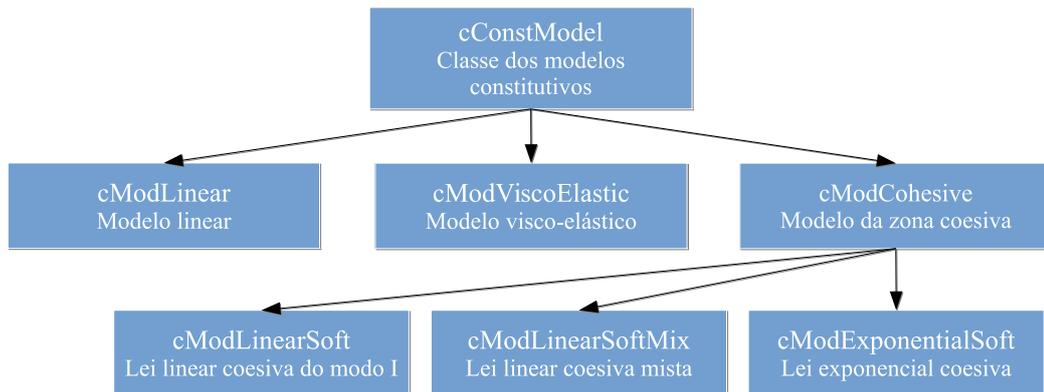
Figura 20 – Estrutura de parte da classe *cMaterial*, com a inclusão dos novos materiais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na classe *cConstModel*, uma classe-filha também foi gerada, *cModCohesive* (Figura 21), onde as leis constitutivas foram concebidas. Inicialmente, a classe *cModCohesive* derivou para a classe-filha *cModLinearSoft*, onde apenas as funções da Matriz C e da tensão foram reimplementadas, conforme explanado na seção anterior.

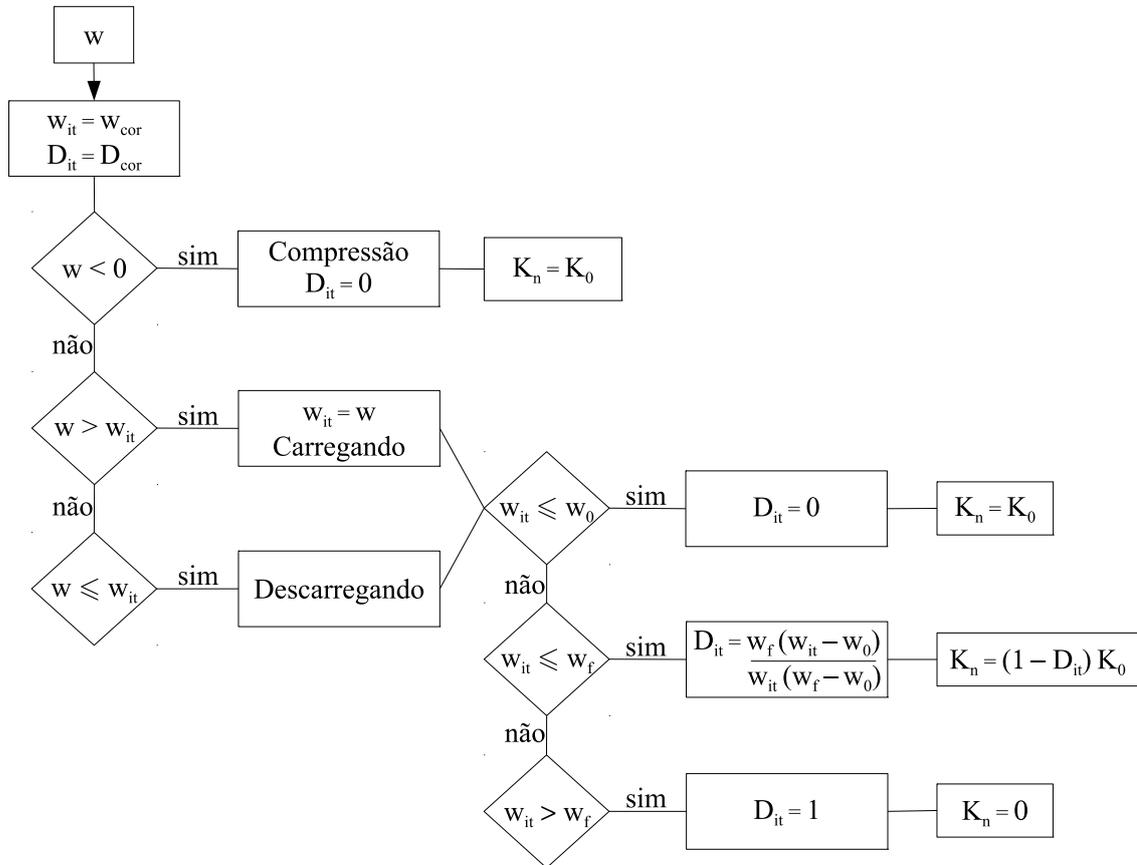
Figura 21 – Estrutura da classe *cModCohesive*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No cálculo das tensões, as variáveis iterativas de deslocamento relativo (w_{it}) e de dano (D_{it}) são atualizadas para os valores correntes e, então, analisa-se se está havendo compressão, carregamento ou descarregamento/recarregamento (Figura 22). Caso haja compressão, o dano D_{it} é zero e a rigidez K_n é igual a rigidez inicial K_0 . Caso contrário, verifica-se em qual trecho da curva tensão-abertura está o deslocamento relativo obtido, comparando a deformação normal (abertura) calculada com os limites inicial (w_0) e final (w_f) estabelecidos nas Eqs. (60) e (62), respectivamente. O coeficiente de dano D_{it} é, então, calculado e, a partir deste, a rigidez K_n é obtida, conforme relação estipulada na Eq. (64).

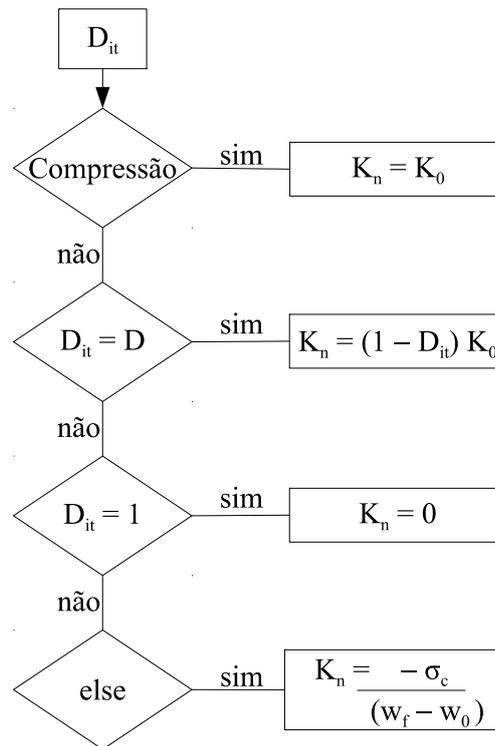
Figura 22 – Fluxograma das rotinas de cálculo da tensão na classe *cModLinearSoft*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na matriz C, o estado de deformação de um determinado ponto da estrutura é averiguado através do valor da variável D_{it} , calculado na função da tensão. Após verificado a presença de compressão, onde a rigidez K_n tem o valor de K_0 , a variável de dano D_{it} indica a posição atual na curva constitutiva, investigando se aquele ponto da estrutura atingiu as aberturas limites (w_0 e w_f) ou se está submetido a carregamento ou descarregamento/re carregamento. A avaliação de D_{it} permite o cálculo da rigidez K_n , conforme a Eq. (74). Na Figura 23, o diagrama mostra as rotinas simplificadas da matriz C da lei coesiva.

Figura 23 – Fluxograma das rotinas de cálculo da matriz C na classe *cModLinearSoft*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.3 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto

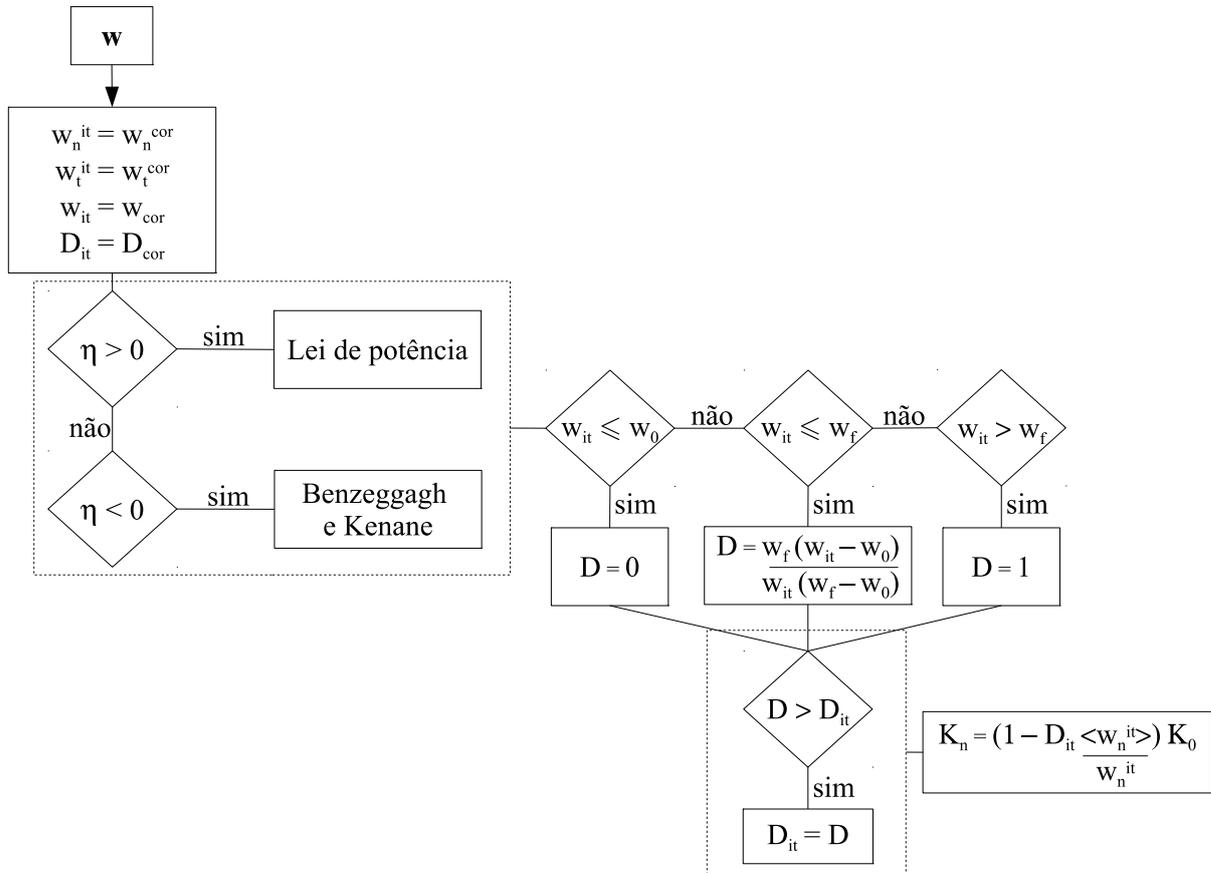
Assim como a lei de amolecimento linear para modo I puro, a lei de amolecimento linear para modo misto foi implementada no CAP3D modificando as classes *cMaterial* e *cConstModel*.

Na classe *cMaterial* (Figura 20) foi adicionado um novo material após criar a classe-filha *cMatLinearSoftMix*. A nova classe recebe seis parâmetros de entrada: o coeficiente de penalidade inicial K_0 , os coeficientes de tenacidade à fratura do material dos modos I (G_{Ic}) e II (G_{IIc}), as resistências do material às aberturas normal (σ_n^c) e tangencial (σ_t^c), e o parâmetro de modo misto η .

Na classe *cConstModel*, a classe-filha *cModCohesive* gerou uma outra classe para o novo modelo constitutivo, a *cModLinearSoftMix*, que herda apenas a função *UpdateState*. Logo, foram reimplementadas as funções da Matriz C e vetor Tensão. A organização da nova classe criada dentro da *cConstModel* está representada na Figura 21.

No cálculo das tensões (Figura 24), as variáveis iterativas de deslocamento relativo normal e tangencial (w_n^{it} e w_t^{it}), assim como a variável de dano D_{it} e o deslocamento relativo equivalente w_{it} são atualizados com os valores correntes. Com os novos deslocamentos relativos obtidos, calculam-se as razões do modo misto β e α .

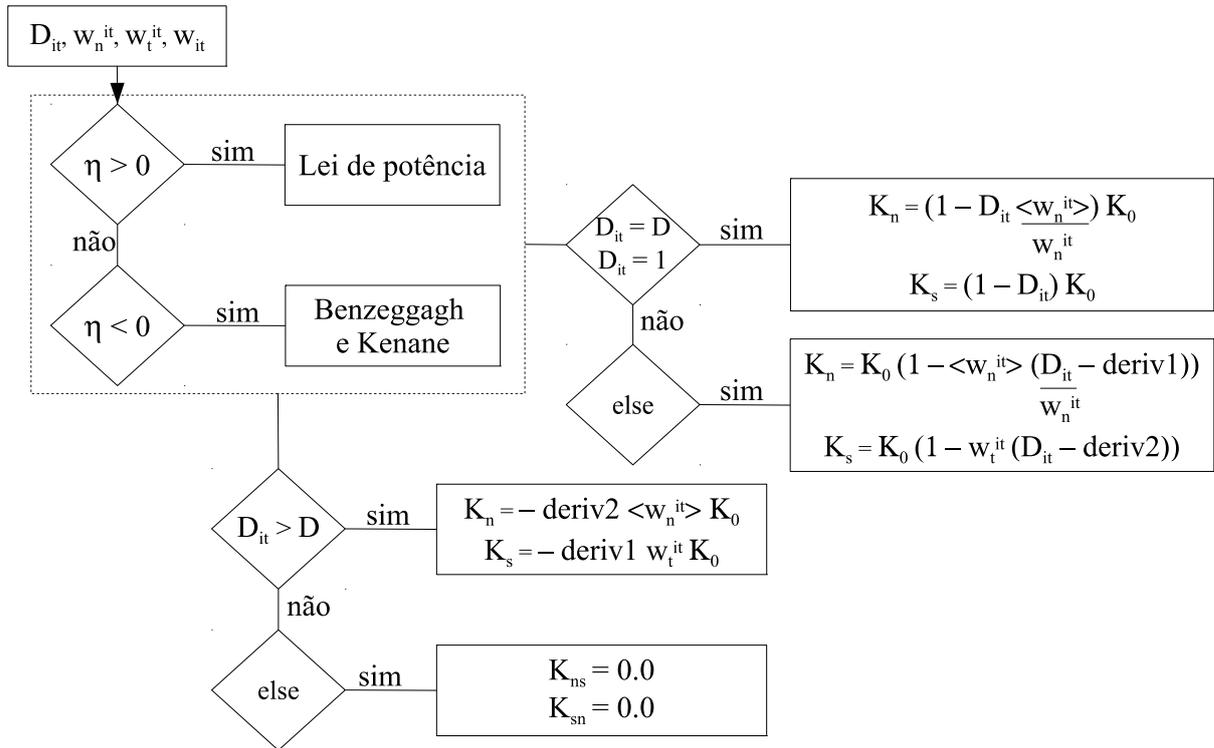
Figura 24 – Fluxograma das rotinas de cálculo da tensão na classe *cModLinearSoftMix*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Através do sinal do valor dado no arquivo de entrada para o parâmetro η , o critério de energia do modo misto é escolhido. Caso positivo, utiliza-se a lei de potência (*Power Law*) e caso negativo, o critério BK. O sinal só é atribuído para diferenciar os dois critérios, após a identificação o sinal negativo é eliminado. O valor de D é calculado conforme a posição de w esteja em relação às aberturas inicial e final, e caso o valor de D seja superior ao último valor convergido, D_{it} , este último é atualizado para D . Então, as rigidezes secantes K_n e K_s são calculadas.

Na matriz C , após identificar o critério de energia através do sinal do parâmetro η , verifica-se a variável de dano D_{it} . Através de D_{it} é possível rastrear o progresso da trinca. Caso a variável iterativa seja igual ao último valor convergido, o modelo está no trecho linear, descarregando/re carregando ou na compressão, logo a rigidez secante é empregada para calcular K_n e K_s . Já quando o modelo está carregando ($D > D_{it}$) utiliza-se as rigidezes tangentes na diagonal principal na Matriz C . Os termos da diagonal secundária são não-nulos apenas durante o carregamento da estrutura. Na Figura 25, *deriv1* e *deriv2* são as componentes da derivada da variável D em função de w .

Figura 25 – Fluxograma das rotinas de cálculo da matriz C na classe *cModLinearSoftMix*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

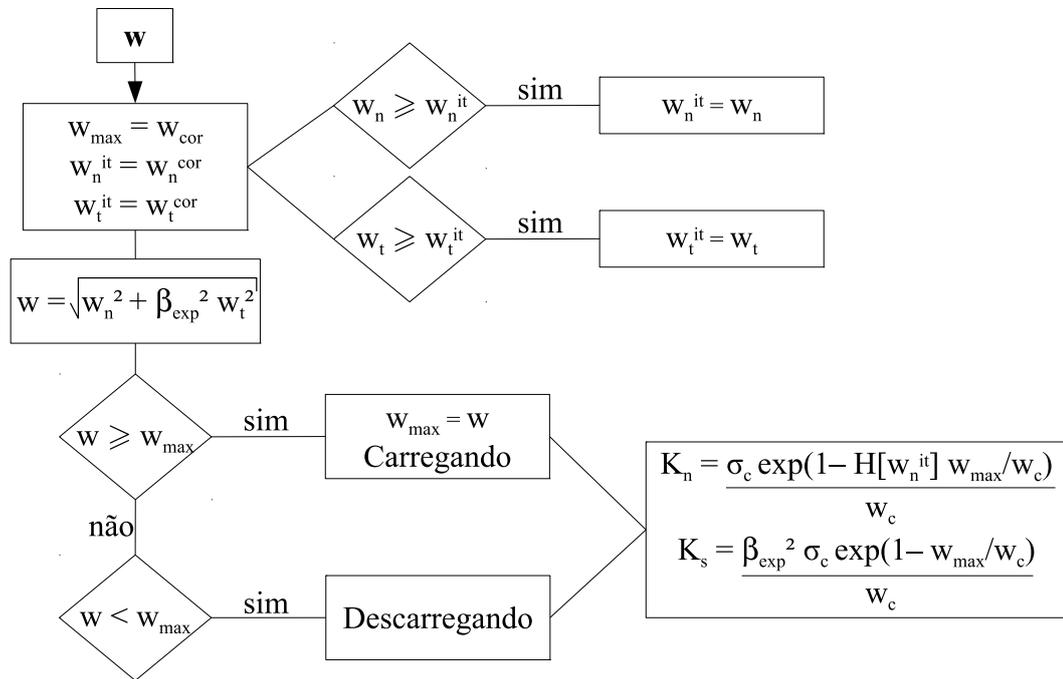
5.1.4 Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto

O modelo constitutivo exponencial foi implementado nas classes *cMaterial* e *cConstModel* do CAP3D. Na classe *cMaterial* (Figura 20) foi criada a classe *cMatExponentialSoft*, que é responsável por armazenar os parâmetros do material. Os parâmetros, advindos do arquivo de dados de entrada, são: a razão entre os modos I e II (β_{exp}), a energia de fraturamento (G_c) e a tensão resistente à abertura normal do material (σ_c).

Na classe *cConstModel* (Figura 21), a classe *cModCohesive* gerou uma outra classe-filha, a *cModExponentialSoft*, onde foram reimplementadas as funções que calculam a matriz **C** e as tensões.

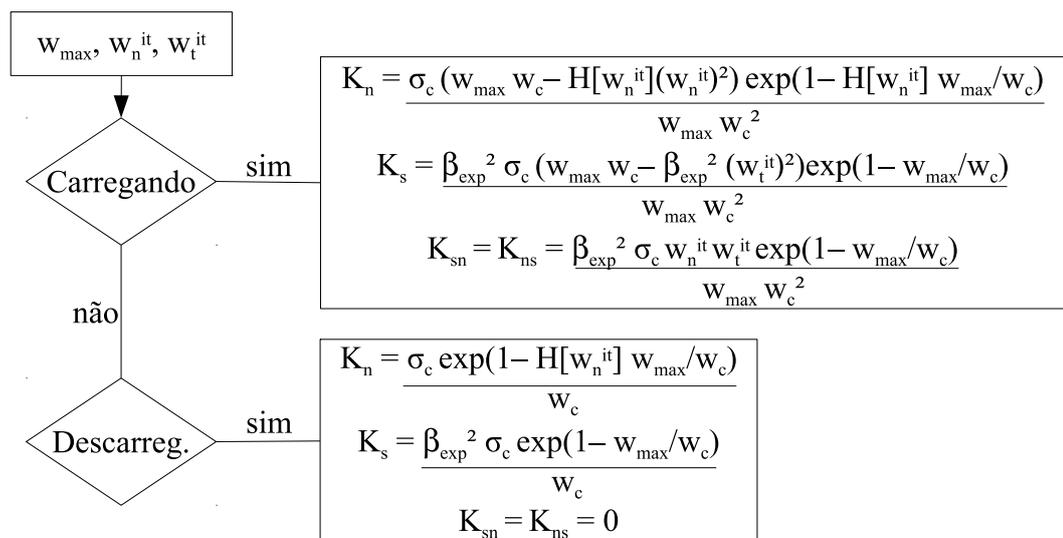
Na função das tensões (Figura 26), as variáveis iterativas são atualizadas para os valores correntes do último passo convergido. As variáveis de deslocamentos relativos normal e tangencial iterativas, w_n^{it} e w_t^{it} devem possuir sempre os maiores valores entre os deslocamentos relativos, w_n e w_t , e os valores iterativos, w_n^{it} e w_t^{it} . Após o cálculo do deslocamento relativo efetivo w , verifica-se se o mesmo é maior ou menor que w_{max} , a fim de identificar se o modelo está carregando ou descarregando/re carregando. Então, obtém-se a devida expressão para as rigidezes. Na função da matriz **C** (Figura 27), identifica-se a presença de carregamento ou descarregamento/re carregamento para calcular os termos da matriz.

Figura 26 – Fluxograma das rotinas de cálculo das tensões na classe *cModExponentialSoft*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Fluxograma das rotinas de cálculo da matriz C na classe *cModExponentialSoft*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Validações

5.2.1 Elemento de Interface de Espessura Nula

O exemplo empregado, utilizado por Bueno (76), consiste em uma chapa quadrada de material homogêneo (Figura 28). A chapa está sob carregamento de tração uniforme na aresta superior, na aresta inferior estão localizados os apoios e entre essas duas arestas, na linha média, estão inseridos os elementos de interface de linha de comportamento elástico-linear. Na Tabela 1, as propriedades elásticas do material da chapa e da interface são apresentadas.

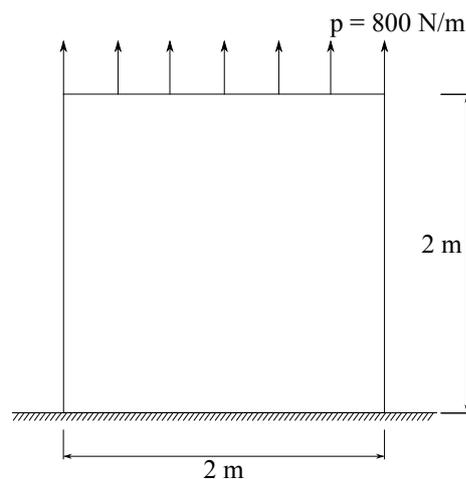
Tabela 1 – Propriedades dos materiais.

Chapa	Interface
$E = 100\text{MPa}$	$K_n = 1\text{MPa/m}$
$\nu = 0,30$	$K_t = 1\text{MPa/m}$

FONTE: Baseado em (76).

A geometria da chapa (Figura 28) foi modelada no software MTOOL (102), com 2 metros de lado, e a malha escolhida foi discretizada com elementos planos triangulares T3 e T6, conforme o uso de elementos de interface de linha lineares ou quadráticos, respectivamente. Com os elementos planos foram utilizados 1 e 3 pontos de integração de Gauss e com os elementos de interface foram utilizados 2 e 3 pontos de integração de Newton-Cotes, conforme fossem lineares ou quadráticos.

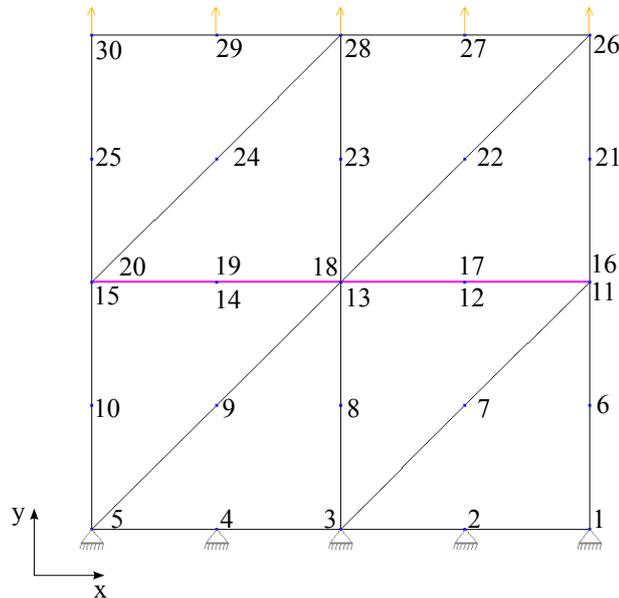
Figura 28 – Geometria e carregamento da chapa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 29, a malha utilizada no modelo é mostrada. É importante ressaltar que o mesmo número de elementos foi utilizado tanto para o modelo linear quanto para o quadrático.

Figura 29 – Discretização da chapa com elementos quadráticos, no software MTOOL.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O carregamento aplicado é de 800 N/m e é paralelo à direção y (Figura 29).

Os elementos planos utilizados são analisados considerando o Estado Plano de Deformação. Já os elementos de interface não fazem distinção entre os estados planos de deformação e de tensão, como mencionado anteriormente. A espessura fora do plano considerada para a chapa é de 1 metro.

As condições de contorno e carregamento impostas à chapa resultam em tensões constantes em toda a chapa, na direção do carregamento. Logo, os deslocamentos relativos podem ser extraídos de qualquer par de nós da interface, pois os valores são iguais. Os resultados numéricos dos deslocamentos relativos são comparados aos obtidos por Bueno (76) e os resultados analíticos calculados utilizando a Resistência dos Materiais, através da seguinte expressão:

$$w = \frac{PL}{EA} \quad (131)$$

onde P é a carga axial aplicada, L é o comprimento, E é o módulo de elasticidade e A é a área original da seção transversal. O deslocamento na interface é 0,0008m.

Os deslocamentos absolutos encontrados para os nós dos elementos de interface linear e quadrático do modelo estão dispostos na Tabela 2, com (*) simbolizando os nós inexistentes nos elementos lineares. A disposição dos deslocamentos dentro da tabela está dividida entre elementos lineares ou quadráticos, assim conforme a posição do nó seja na face inferior ou superior.

Tabela 2 – Deslocamentos absolutos no eixo y obtidos numericamente para os nós dos elementos de interface.

Nós	Deslocamento Absoluto	
	Elementos Lineares	Elementos Quadráticos
Inferior	7,0619E-06	7,5912E-06
	6,1697E-06	6,7919E-06
	5,9371E-06	6,5287E-06
	(*)	6,7070E-06
		7,6116E-06
Superior	8,0731E-04	8,0690E-04
	8,0647E-04	8,0687E-04
	8,0564E-04	8,0685E-04
	(*)	8,0684E-04
		8,0682E-04

Os deslocamentos relativos, determinados a partir da diferença entre o nós superior e inferior de cada par de nós, são apresentados na Tabela 3, que também compara os erros, entre os resultados numéricos e o analítico, para a abertura em y .

Tabela 3 – Resultado numérico e teórico dos deslocamentos relativos.

Deslocamentos Relativos			Erro em y (%)	
Resultado Numérico		Resultado		
Elem. Lineares	Elem. Quadráticos	Teórico	Linear	Quadrático
7,9970E-04	7,9930E-04	8,00E-04	0,0370	0,0870
8,0030E-04	8,0008E-04	8,00E-04	-0,0369	-0,0101
7,9970E-04	8,0032E-04	8,00E-04	0,0369	-0,0404
(*)	8,0013E-04	8,00E-04	(*)	-0,0161
	7,9921E-04	8,00E-04		0,0988

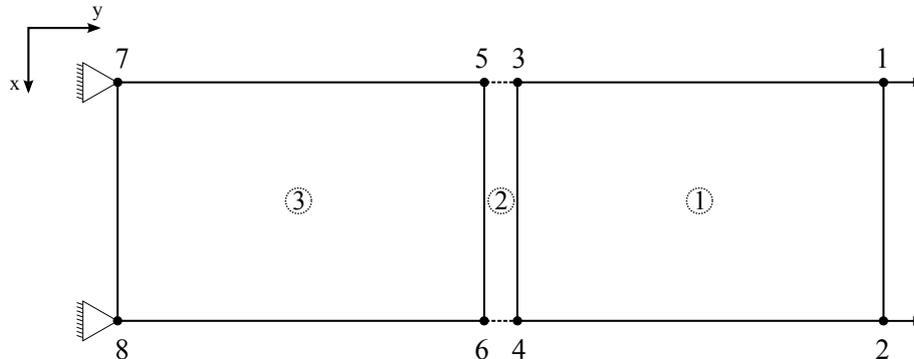
Com elementos quadráticos, os resultados obtidos para os deslocamentos, absolutos ou relativos, mostram-se semelhantes aos de Bueno (76), em ambas as direções, com discrepâncias mínimas. Em relação ao valor teórico, o modelo com elementos lineares apresenta um erro máximo de aproximadamente 0,04% na abertura em y . Analogamente, aquele com elementos quadráticos o erro é cerca de 0,1%, logo, ambos os elementos possuem desempenhos satisfatórios.

5.2.2 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo I

A fim de verificar a validade do modelo constitutivo de amolecimento linear implementado, utilizou-se o exemplo de Evangelista Jr., Roesler e Proença (62), apesar do autor tê-lo aplicado a elementos tridimensionais. No exemplo, uma barra uniaxial é sujeita a tensão uniforme. Em uma das extremidades, a barra é fixa com a outra extremidade livre, onde é aplicado um deslocamento prescrito na direção y . A barra tem 0,10 m de comprimento (L) e seção qua-

drada de 0,025 m de lado. A Figura 30 apresenta as condições de contorno e carregamento e a geometria da barra. Na linha central, entre as extremidades, o elemento de interface é inserido.

Figura 30 – Geometria, carregamento, condições de contorno e malha da barra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A barra é discretizada com dois elementos quadriláteros lineares Q4 e um elemento de interface linear INTNHL, proposto no presente trabalho. A rigidez inicial escolhida é $K_0 = 5 \times 10^{13}$ Pa/m, o material da barra é concreto, cujas propriedades do material estão dispostas na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedades do material da barra.

Material	E (GPa)	σ_c (MPa)	G_c (N/m)
Concreto	27,0	5,0	99,1

Os deslocamentos prescritos são aplicados através de molas inseridas nos nós da extremidade submetida ao carregamento, nós 1 e 2 (Figura 30), empregando o controle de carga como o método de solução. Visto que o propósito com o exemplo é acompanhar toda a curva constitutiva, o deslocamento final (w_f) é empregado como deslocamento prescrito. Através da Eq. (62), o deslocamento máximo é identificado, $w_f = 3,964 \times 10^{-5}$ m. Segundo a Lei de Hooke, a equação da mola é

$$F = ky \quad (132)$$

Então, arbitrando-se uma rigidez $k = 1 \times 10^{20}$ N/m, encontra-se a força necessária ($F = 3,964 \times 10^{15}$ N) para as molas e, por conseguinte, toda a estrutura sofre o deslocamento prescrito esperado y , no caso, w_f .

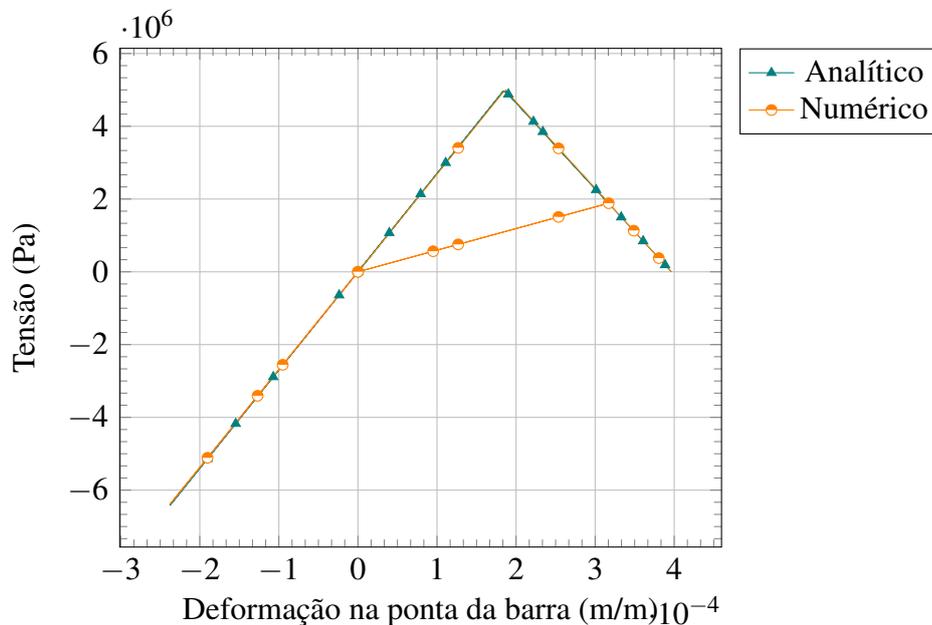
A solução analítica para a tensão na barra é função dos deslocamentos w_p da ponta da barra onde os deslocamentos prescritos estão sendo aplicados, e é obtida através da seguinte

expressão:

$$\sigma(w_p) = \begin{cases} E \frac{w_p}{L}, & \frac{w_p}{L} < \frac{\sigma_c}{E} \\ \frac{(\sigma_c w_p - 2G_c)E \sigma_c}{\sigma_c^2 L - 2EG_c}, & \frac{w_p}{L} \geq \frac{\sigma_c}{E} \end{cases} \quad (133)$$

Os resultados analíticos e numéricos das tensões da barra e das deformações na ponta da barra ε_p estão expostos através da curva tensão-deformação na Figura 31, onde $\varepsilon_p = w_p/L$. As curvas sobrepostas das soluções numéricas e analíticas contêm também resultados para situações de compressão e descarregamento/recarregamento. Entretanto, o descarregamento/recarregamento é disponível apenas no resultado numérico.

Figura 31 – Resultados numérico e analítico.



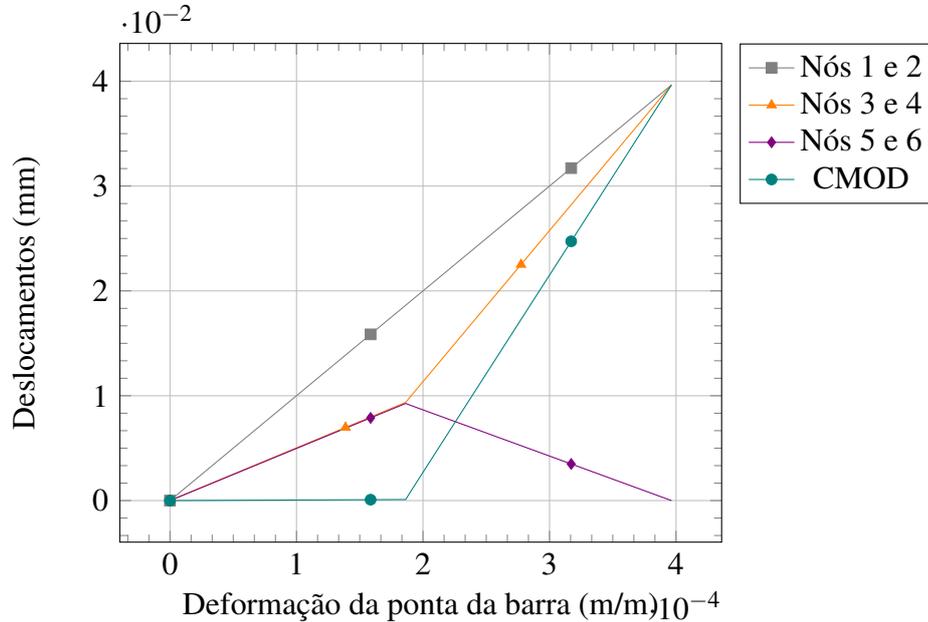
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 31 mostra que os resultados analíticos e numéricos são compatíveis entre si. O trecho descendente da curva, razão de diversos problemas numéricos em outros trabalhos da literatura, não causou qualquer instabilidade ao modelo no exemplo, conseguindo acompanhar inclusive o trecho de descarregamento/recarregamento. A tensão resistente à tração σ_c foi alcançada quando a deformação $\varepsilon_p = 1,85 \times 10^{-4}$ m/m e a deformação final é $3,964 \times 10^{-4}$ m/m, devido o deslocamento máximo aplicado.

As deformações da ponta da barra e os deslocamentos dos nós 1 e 2, na extremidade onde os deslocamentos prescritos são aplicados, dos nós 3 e 4, na face superior do elemento de interface, e dos nós 5 e 6, na face inferior do mesmo elemento, assim como os deslocamentos relativos (CMOD) do elemento de interface, são plotados na Figura 32. Observa-se que enquanto a deformação ε_p é menor que $1,85 \times 10^{-4}$ m/m, ou seja, antes da tensão atingir 5 MPa

(Figura 31), os conjuntos de nós 3 e 4 e nós 5 e 6 têm os mesmos deslocamentos. A partir daí, os conjuntos de nós começam a divergir para permitir as faces do elemento de interface abrirem.

Figura 32 – Deslocamentos dos nós x deformação na ponta da barra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

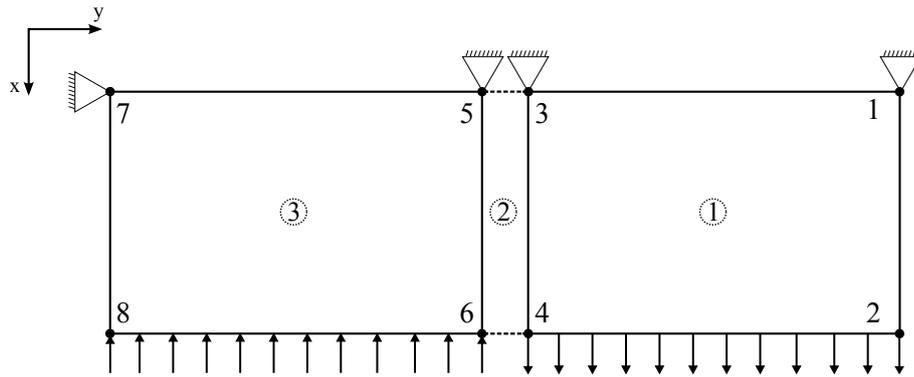
5.2.3 Lei Constitutiva com Amolecimento Linear para o Modo Misto

A validação do presente modelo constitutivo é realizada em duas etapas, através da validação dos modos puros I e II separadamente. O modo I puro é validado com o exemplo de Evangelista Jr., Roesler e Proença (62) aplicado no modelo linear para modo I puro apresentado na seção anterior. Já para o modo II puro é utilizado um exemplo com as mesmas propriedades do material da Tabela 4 e a mesma geometria do exemplo do modo I puro, entretanto as condições de contorno são adaptadas para criar uma situação de modo II puro.

No modo I puro, a geometria e as condições de contorno do exemplo estão mostradas na Figura 30. Já no modo II puro podem ser vistas na Figura 33. Como dito, ambos os critérios de energia dão o mesmo resultado para modos puros, logo, o η escolhido é 1,0. Embora, $\eta = -1,0$ alcance o mesmo resultado. Os parâmetros do material, dado por Evangelista Jr., Roesler e Proença (62) para o modo I, são copiados para os parâmetros pertencentes ao modo II, como o G_{IIc} e σ_t^c , tensão resistente tangencial. São utilizados 3 pontos de integração de Newton-Cotes e o controle de carga é o método de solução empregado.

No exemplo do modo I, a tensão, na direção da carga aplicada, é constante em toda a barra, logo os deslocamentos relativos normais são iguais em ambos os pares de nós do elemento de interface (nós 3 e 5 ou nós 4 e 6). A curva tensão-deslocamento relativo resultante da aplicação numérica de cargas de compressão e tração do exemplo está exposta na Figura 34,

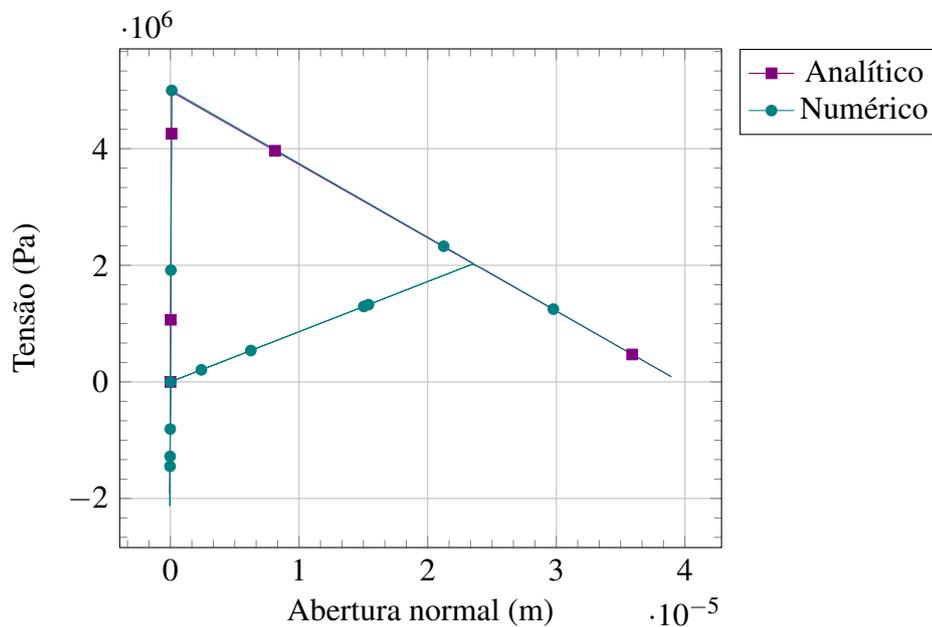
Figura 33 – Geometria, carregamento, condições de contorno e malha da barra para o modo II.



Fonte: Elaborada pelo autor.

exibindo também um trecho que indica o descarregamento/re-carregamento da barra. A solução analítica para o problema também está representada na Figura 34, permitindo apontar que ambas as soluções estão coerentes, apesar da solução analítica não contemplar resultados para o descarregamento/re-carregamento da barra.

Figura 34 – Resultados numérico e analítico para o modo I.



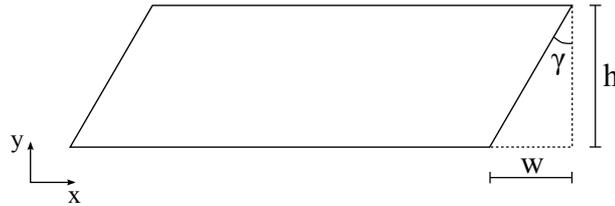
Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo do modo II, as condições de contorno e carregamento são aplicadas perpendicularmente ao elemento de interface. Um lado da barra é engastado, enquanto ao lado oposto são aplicadas cargas de compressão no elemento à esquerda do elemento de interface e de tração no elemento à direita do elemento de interface. As condições de contorno estabelecidas

e as cargas aplicadas provocam deslocamentos apenas na direção das cargas, o eixo x, o que se caracteriza como um modo II puro.

A solução analítica para este exemplo é obtida através da Resistência dos Materiais para o cisalhamento. A Figura 35 mostra a deformação de cisalhamento γ , através da qual o deslocamento relativo tangencial é encontrado. A espessura considerada para o elemento de interface é uma espessura artificial igual a 1, visto que o elemento possui espessura nula.

Figura 35 – Elemento de interface submetido ao cisalhamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A deformação por cisalhamento é expressa como

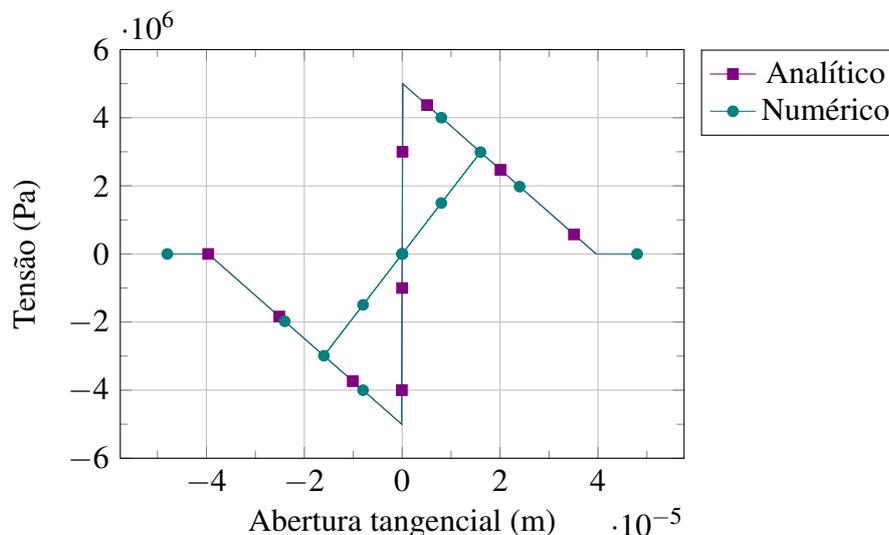
$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (134)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento e G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. A solução analítica em função da tensão é expressa então por

$$\tau(\delta) = \begin{cases} K_0 w, & w < \frac{\sigma_t^c}{K_0} \\ \frac{(\sigma_t^c w - 2G_{IIc}) K_0 \sigma_t^c}{(\sigma_t^c)^2 - 2G_{IIc} K_0}, & w \geq \frac{\sigma_t^c}{K_0} \end{cases} \quad (135)$$

Neste exemplo, os deslocamentos relativos e as tensões tangenciais são avaliados nos nós 4 e 6. A Figura 36 mostra o comportamento da relação constitutiva para tensões positivas ou negativas, bem como, a presença de descarregamento/rearregamento para ambas as tensões.

Figura 36 – Resultados numérico e analítico para o modo II.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas tensão-abertura dos modos I e II, em decorrência à atribuição de propriedades físicas e geométricas iguais para as verificações de ambos os modos, sobrepõem-se, ou seja, percorrem o mesmo trajeto, quando os deslocamentos são positivos.

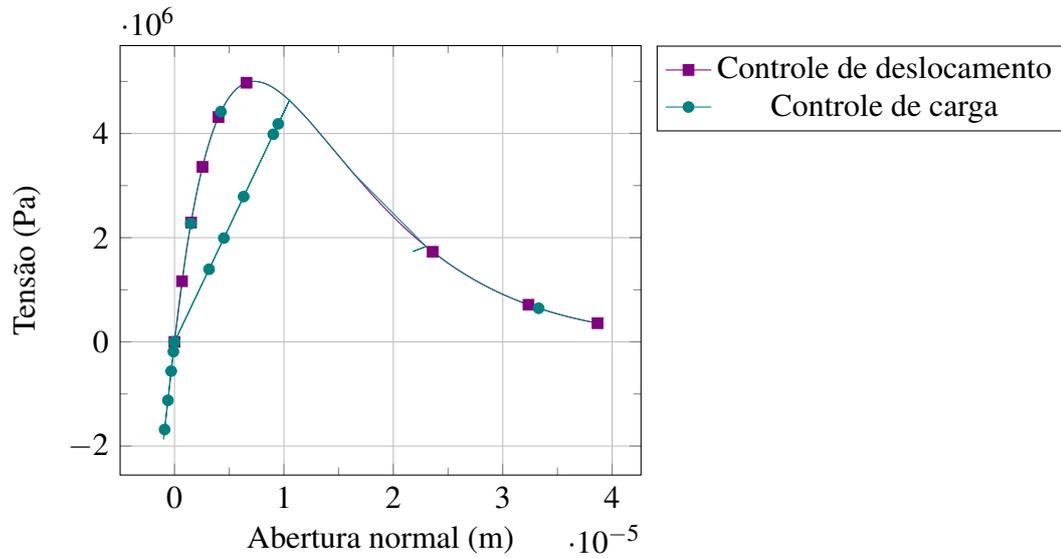
5.2.4 Lei Constitutiva com Amolecimento Exponencial para o Modo Misto

Na presente lei coesiva, o exemplo de Evangelista Jr., Roesler e Proença (62) para modo I puro, assim como o exemplo adaptado para o modo II puro, já empregados nos modelos constitutivos anteriores, são utilizados para validar a implementação do modelo. As propriedades do material e da interface são as mesmas vistas na Tabela 4, além dessas propriedades também é atribuído o valor 1,0 para o parâmetro β_{exp} .

No exemplo do modo I puro, os resultados são avaliados nos nós 3 e 5, entretanto os deslocamentos relativos normais em ambos os pares de nós são iguais, visto que a barra está submetida a tensões constantes, devido às condições de contorno e carregamento. Já no exemplo submetido ao modo II puro, os resultados são obtidos nos nós 4 e 6, onde a abertura tangencial é máxima.

A fim de captar o comportamento da estrutura quando há descarregamento/recarregamento, são aplicados às barras deslocamentos prescritos através do uso do controle de carga como aplicador de deslocamentos. A metodologia empregada já foi explicada durante a validação do modelo constitutivo de amolecimento linear para modo I puro (seção 5.2.2). No modo I, inicialmente são prescritos deslocamentos negativos, a seguir um carregamento é realizado até a abertura alcançar cerca de 1×10^{-5} m, quando é descarregado. Então, a estrutura é recarregada até o deslocamento 1×10^{-5} m e carregada até o deslocamento máximo. No modo II, os deslocamentos prescritos são aplicados em ambos os sentidos da carga, negativa ou positiva.

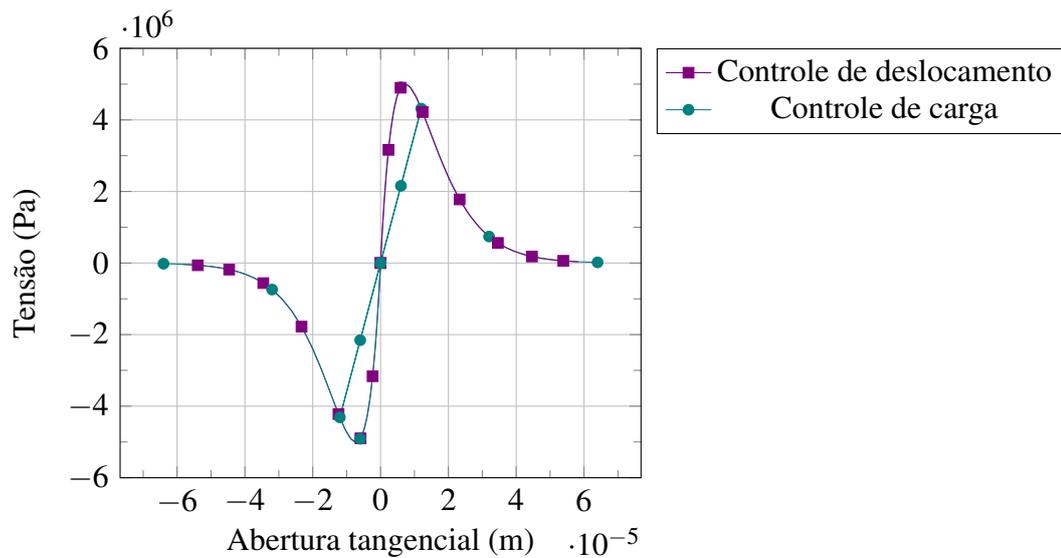
Figura 37 – Relação constitutiva para o modo I.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas resultantes do processo estão dispostas nas Figuras 37 e 38. Entretanto, a curva do modo I (Figura 37) apresentou um resultado anormal, um descarregamento/recarregamento falso, quando empregado o controle de carga, que precisa ser investigado. No controle de deslocamento, tal problema não se repete. No modo II (Figura 38) as curvas resultantes das análises com controle de deslocamento e de carga foram compatíveis entre si, não apresentando a mesma anomalia que surgiu no modo I.

Figura 38 – Relação constitutiva para o modo II.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos de estruturas fraturadas. Os exemplos são analisados através do programa CAP3D, empregando os elementos de interface e os modelos coesivos descritos no presente trabalho.

Inicialmente, um exemplo de modo I puro é analisado para avaliar o desempenho dos modelos. Em seguida, um outro exemplo de modo I puro é também utilizado para validar os modelos e estudar a importância dos parâmetros no mesmo exemplo. Os exemplos têm resultados comparados com solução analítica ou resultados experimentais da literatura.

O modo I de fraturamento é investigado através dos exemplos de Gonçalves *et al.* (84) e de Song, Paulino e Buttlar (99) e Wagoner, Buttlar e Paulino (103). O primeiro exemplo utiliza uma dupla viga em balanço do tipo DCB (*Double Cantilever Beam*) e o segundo, uma viga biapoiada sujeita à flexão do tipo SEN(B) (*Single-Edge Notched Beam*). Ambas as estruturas possuem trincas iniciais e são analisadas com os modelos constitutivos lineares para o modo I puro (*LinearSoft*) e modo misto (*LinearSoftMix*) e exponencial para modo misto (*ExponentialSoft*).

Na construção das malhas são empregados dois programas. No primeiro exemplo, o programa *MeshTAG*, desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da presente universidade. No segundo, o programa MTOOL (102), desenvolvido pelo Tecgraf da PUC-Rio.

6.1 Viga dupla em balanço (DCB)

O presente exemplo, extraído de Gonçalves *et al.* (84), possui solução analítica, logo é bem aceito como *benchmark* para modelos de fratura. Geometricamente, a viga possui 100 mm de comprimento, 3 mm de altura, 10 mm de largura e uma pré-trinca de 30 mm, como representado na Figura 39. A pré-trinca está localizada em uma das extremidades, na linha central paralela ao comprimento. Na mesma altura são inseridos os elementos de interface. As propriedades do material da viga e da interface estão dispostas na Tabela 5.

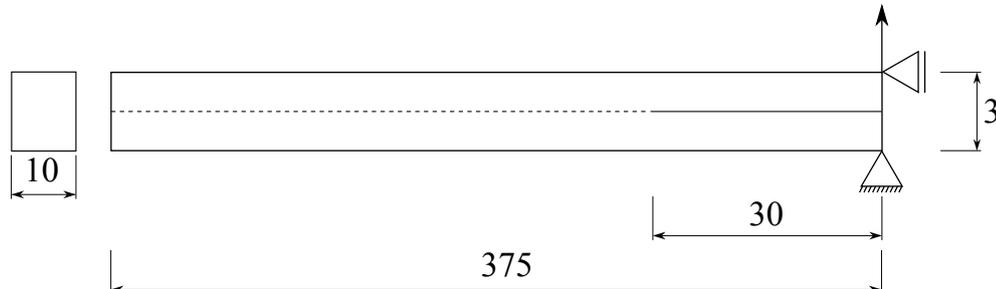
Tabela 5 – Propriedades dos materiais da viga DCB (84).

Viga		Interface			
E (N/mm ²)	ν	G_{Ic} (N/mm)	G_{IIc} (N/mm)	σ_n^c (N/mm ²)	σ_t^c (N/mm ²)
69.000	0,33	0,055	1,45	20	40

As condições de contorno impostas à viga impedem que as faces deslizem entre si, logo o modo de carregamento se caracteriza como modo I, visto que o carregamento está perpendicular às faces, na direção y . A viga tem os movimentos restritos em x e y na extremidade inferior direita (Figura 39) e em x na extremidade superior direita. O carregamento é

aplicado no mesmo nó desta última restrição, onde também são obtidos os deslocamentos para os resultados expostos adiante.

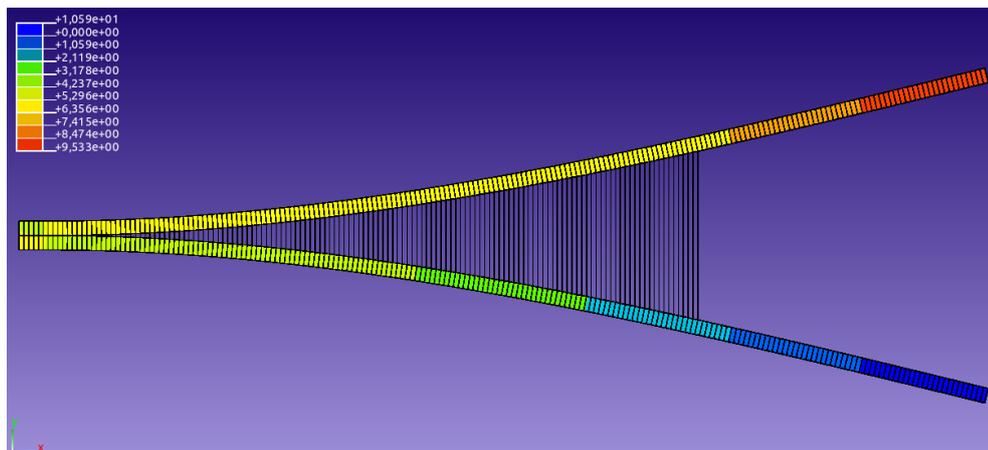
Figura 39 – Geometria e condições de contorno da viga DCB. Medidas em mm.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A malha empregada no modelo numérico, construída pelo *MeshTAG*, possui 200 divisões ao longo da viga (Figura 40), onde há, no total, 400 elementos quadriláteros quadráticos (Q8) e 140 elementos de interface quadráticos (INTNHQ). Os elementos de interface, inseridos ao longo da viga, possuem altura nula e neles são empregados pontos de integração de Newton-Cotes. O material da viga é elástico linear e a análise é realizada no estado plano de tensão, para os elementos contínuos.

Figura 40 – Resultado numérico dos deslocamentos da viga DCB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As soluções analíticas são baseadas na teoria das vigas e na mecânica da fratura, representando apenas a abertura normal, visto que os deslocamentos tangenciais se mostram insignificantes (84). As soluções analíticas apresentam uma relação entre a carga P aplicada e o deslocamento Δ na ponta da viga. Entretanto, existe uma relação para o trecho antes da trinca

começar a crescer, que é dada por (84)

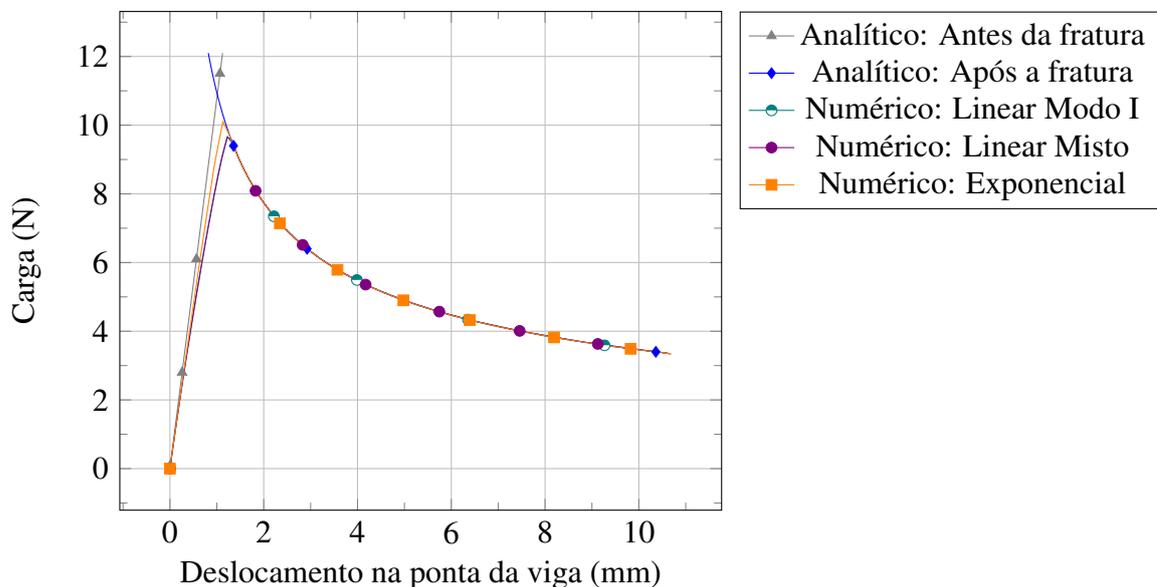
$$\Delta = \frac{16Pa_0^3}{3EI} \quad (136)$$

e outra durante a propagação da trinca,

$$\Delta = \frac{16}{3EIP^2} \left(\frac{bG_{Ic}EI}{8} \right)^{3/2} \quad (137)$$

onde b é a largura da viga, a_0 é o comprimento da trinca inicial e I é o momento de inércia da viga. As respostas analíticas, bem como as numéricas, estão representadas na Figura 41.

Figura 41 – Resultados numéricos das curvas carga-deslocamento, para a viga DCB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O surgimento de problemas de convergência, durante as análises numéricas com os modelos *LinearSoft* e *LinearSoftMix*, induziram a alteração em alguns parâmetros dados por Gonçalves *et al.* (84). A rigidez inicial, K_0 , indicada como 10^7 N/mm³, foi modificada para 10^6 N/mm³ e a tensão normal resistente, σ_n^c , foi alterada para 5 N/mm² (Figura 42). Durante essas análises, foram utilizados 12 pontos de integração de Newton-Cotes nos elementos de interface e integração de Gauss 3x3 nos elementos contínuos. O método de solução empregado foi o comprimento de arco de Riks-Wempner (104).

Segundo Turon (70), reduzir o valor da tensão resistente do material pode ser uma boa abordagem para possibilitar a análise de exemplos que requerem uma malha muito discretizada, o que pode inviabilizar o avanço de grupos de pesquisa que não possuem tantos recursos computacionais. Reduzir a resistência da interface pode melhorar a convergência do problema, sem haver discretização na malha, e não causa grandes mudanças no resultado da análise.

A razão pela qual essa redução da resistência da interface afeta positivamente a convergência da solução é que a zona coesiva demanda uma quantidade mínima de elementos para ser descrita propriamente. Caso contrário, as tensões na região da ponta da trinca podem não ser representadas corretamente (70). Entretanto, ainda não há uma determinação da quantidade correta de elementos na zona de fraturamento coesivo, alguns autores sugerem o uso de mais de 10 elementos, outros entre 2 e 5 elementos, dentre outros (70). O comprimento da zona coesiva pode ser calculada por (2):

$$l_{cz} = E \frac{G_c}{\sigma_c^2} \quad (138)$$

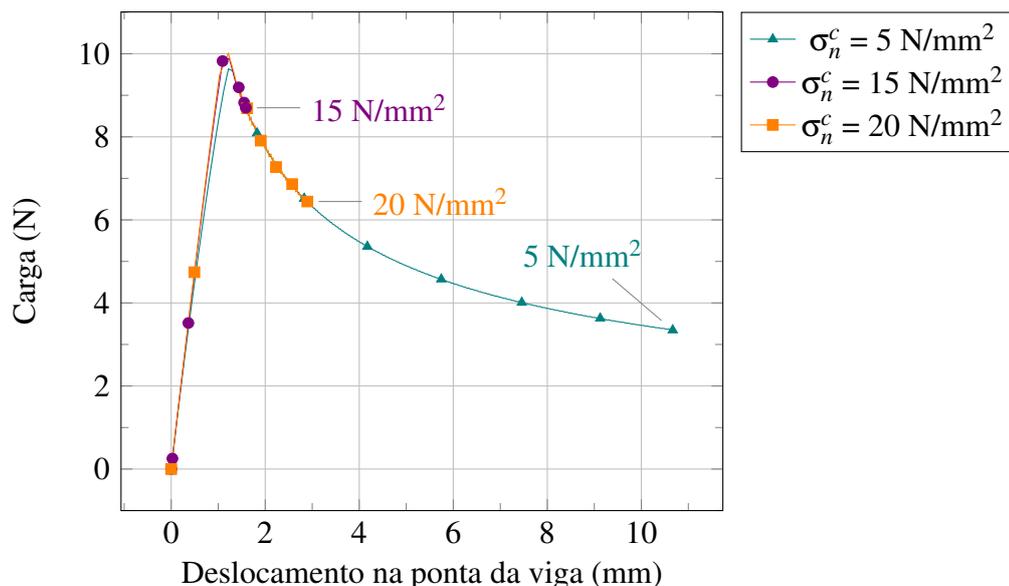
onde σ_c é a tensão máxima resistente da interface. O número de elementos na zona coesiva é:

$$N_e = \frac{l_{cz}}{l_e} \quad (139)$$

onde l_e é o tamanho dos elementos na direção da propagação da trinca.

Empregando essas equações, o comprimento da zona coesiva, tomando a tensão normal resistente como 20 N/mm^2 , é $9,48 \text{ mm}$ e o número de elementos nesta zona é 19 elementos. Entretanto, quando a resistência do material é reduzida para 5 N/mm^2 , o comprimento da zona coesiva é $151,8 \text{ mm}$, com 304 elementos, o que explica como o problema de convergência pôde ser superado sem discretização. A Figura 42 mostra como as análises não convergem até o final esperado para a curva carga-deslocamento quando as tensões σ_n^c são 20 N/mm^2 e 10 N/mm^2 .

Figura 42 – Estudo paramétrico da tensão resistente da interface à abertura normal, com o modelo linear misto, para a viga DCB.

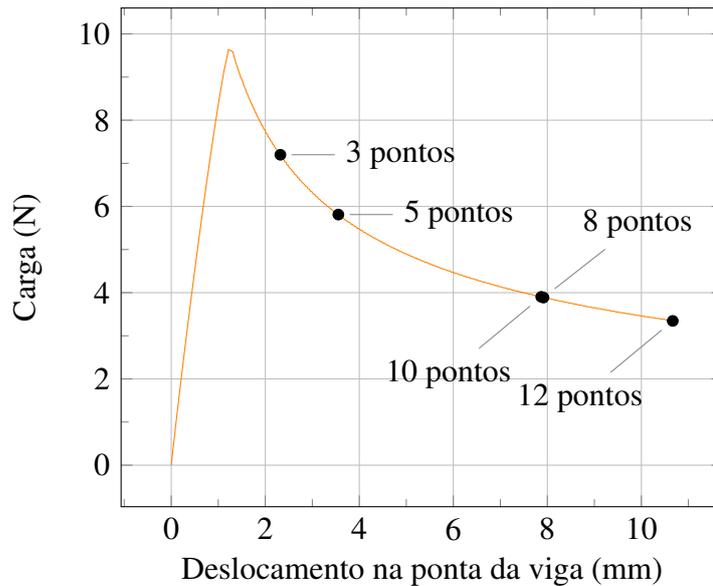


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os problemas de convergência também influenciaram na escolha do número de pon-

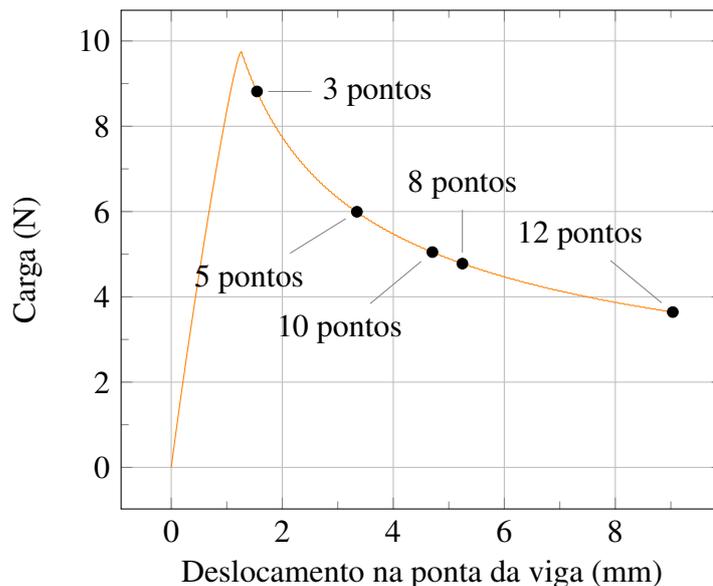
tos de integração para os elementos de interface nos modelos *LinearSoft* e *LinearSoftMix*. A fim de comparar a performance do comprimento de arco de Riks-Wempner e do controle de deslocamento como métodos de solução na viga analisada, bem como de encontrar a quantidade de pontos de integração ideal, foram realizadas análises numéricas com 3, 5, 8, 10 e 12 pontos de Newton-Cotes com ambos os métodos. Nos resultados, representados nas Figuras 43 e 44, a melhor performance foi obtida com 12 pontos de integração.

Figura 43 – Estudo paramétrico dos pontos de integração, com comprimento de arco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 44 – Estudo paramétrico dos pontos de integração, com controle de deslocamento.



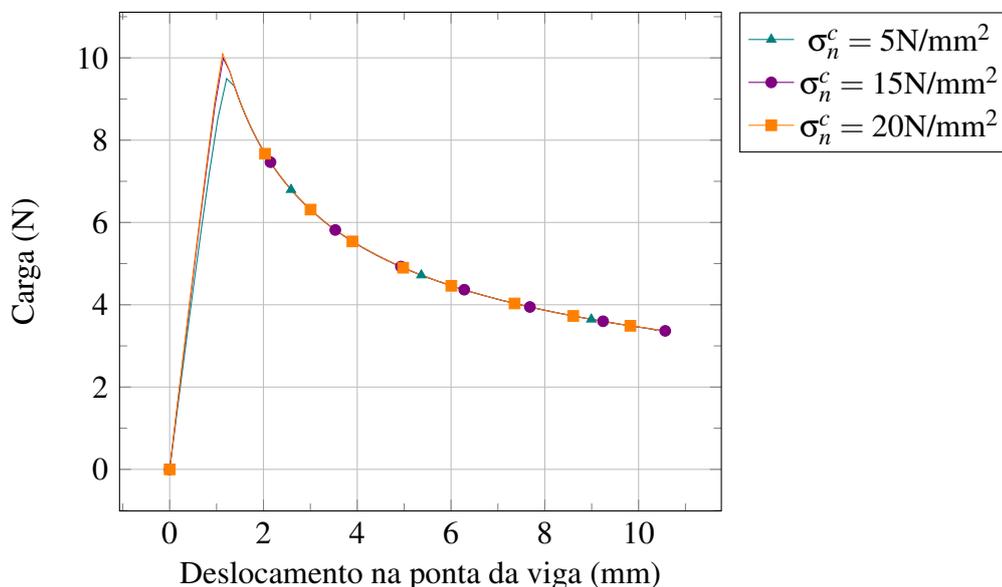
Fonte: Elaborada pelo autor.

O método de controle de deslocamento, ao contrário do comprimento de arco aplicado, não atingiu o deslocamento máximo esperado (> 10 mm), conforme o trabalho de Gonçalves *et al.* (84). Uma redução do tamanho do passo durante as análises com o controle de deslocamento promoveria melhores resultados na deflexão máxima, porém o número de passos requeridos torna o método do comprimento de arco mais adequado, visto que este empregou menos de 20% dos passos utilizados por aquele, nas análises com 12 pontos de integração. Enquanto isso, o modelo *ExponentialSoft* necessitou apenas de 3 pontos de integração de Newton-Cotes para convergir em todos os pontos da curva.

O modelo *ExponentialSoft* se apresentou mais suave para o exemplo, tornando desnecessário o emprego da abordagem aplicada aos modelos lineares. Mantendo todos os parâmetros do material como indicado no exemplo, a curva se desenvolveu sem o surgimento de problemas de convergência e com menos passos que os modelos anteriores (Figura 41). O método de solução aplicado foi o comprimento de arco de Riks-Wempner (104).

Com o propósito de verificar a sensibilidade da curva carga-deslocamento em relação aos parâmetros do material no presente exemplo, foram realizadas análises numéricas alterando os valores da tensão resistente do material e da energia de fraturamento. Inicialmente, atribuem-se os valores de 5, 15 e 20 N/mm² à tensão resistente, enquanto as outras variáveis são mantidas iguais.

Figura 45 – Estudo paramétrico da tensão normal resistente da interface, com o modelo exponencial, para a viga DCB.



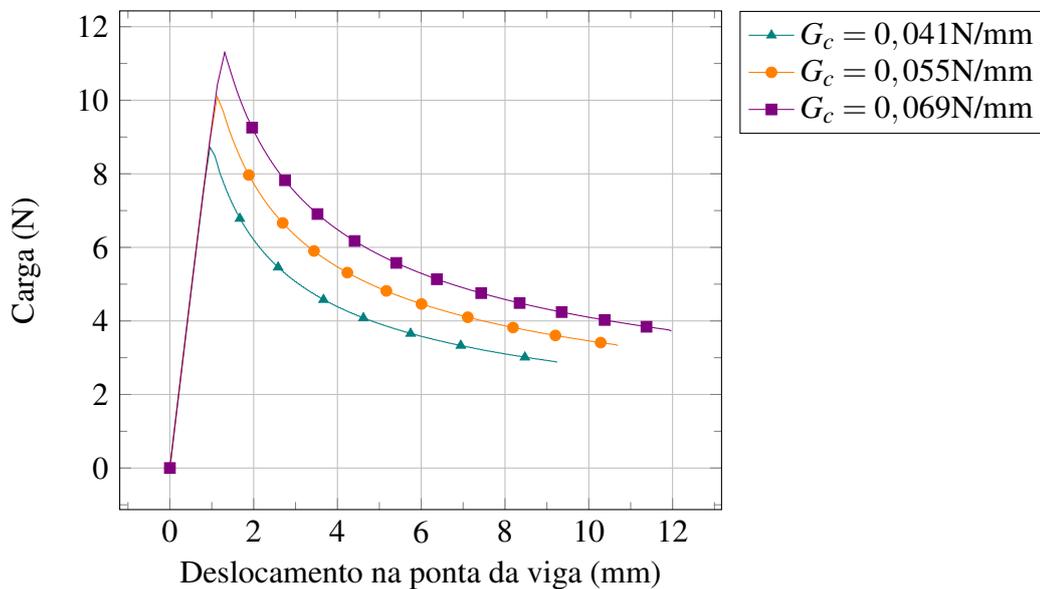
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando as Figuras 42 e 45, percebe-se que a mudança neste parâmetro não causa divergências significativas nos resultados, confirmando o que Turon (70) afirmou. Existem pequenas diferenças na inclinação inicial da curva antes da carga limite, mas após isso as curvas de amolecimento são iguais. No modelo exponencial, a carga limite atingida com 5

N/mm^2 (25% de 20 N/mm^2) é apenas 5,53% menor que o resultado com 20 N/mm^2 . No modelo linear misto, apesar das curvas não convergirem até o final esperado, percebe-se também que a mesma carga limite é apenas 3,71% menor que o resultado com 20 N/mm^2 .

Alterando o valor da energia de fraturamento, e conservando as outras variáveis, as curvas apresentam comportamentos com diferenças mais distinguíveis (Figuras 46 e 47). O trecho antes da estrutura atingir a carga limite possui a mesma inclinação, porém os valores alcançados pela carga são diferentes e, por conseguinte, o trecho da curva posterior ao ponto limite também diferenciam-se.

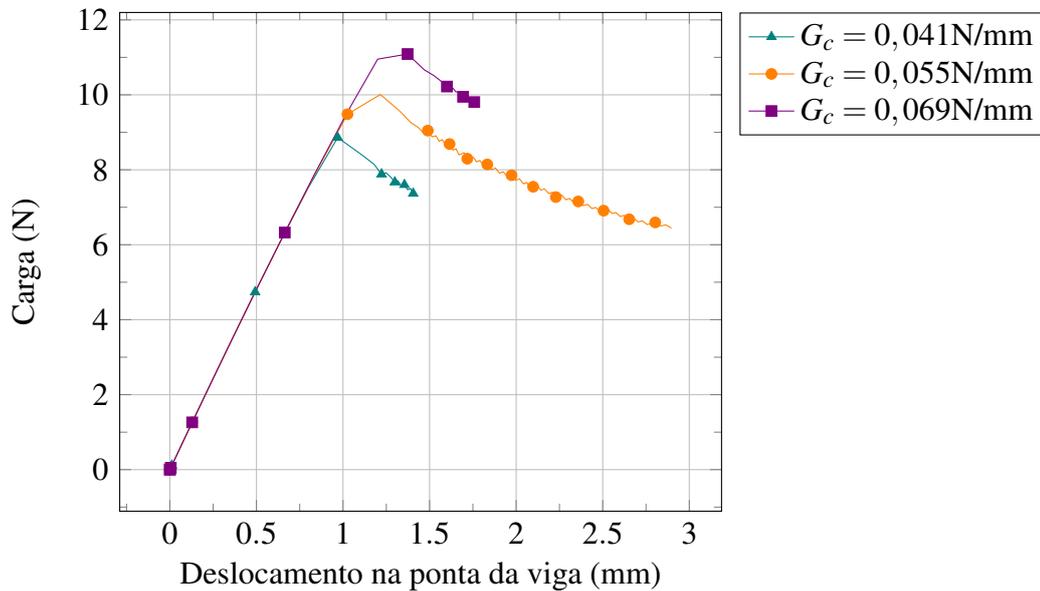
Figura 46 – Estudo paramétrico da energia de fraturamento G_c , com o modelo exponencial, para a viga DCB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No modelo exponencial, após a energia de fraturamento diminuir 20% do valor dado na Tabela 5, o valor da carga máxima atingida pela estrutura regrediu 13%, uma variação superior ao ocorrido no teste anterior. No modelo linear misto, também percebe-se o mesmo comportamento, inclinações similares nos dois trechos das curvas e variação significativa no ponto limite da carga, apesar das curvas não convergirem até o ponto esperado, visto que a tensão resistente à abertura normal considerada foi 20 N/mm^2 .

Figura 47 – Estudo paramétrico da energia de fraturamento G_c , com o modelo linear misto, para a viga DCB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Viga com três pontos e uma trinca inicial (tipo SENB)

O presente exemplo é baseado em Wagoner, Buttlar e Paulino (103) e Song, Paulino e Buttlar (99). Os primeiros autores realizaram um estudo experimental em vigas de concreto asfáltico submetidas à flexão e sujeitas à fratura, cujos resultados são comparados com os resultados numéricos do presente trabalho.

Os parâmetros do material foram extraídos de Song, Paulino e Buttlar (99), cujo trabalho empregou um modelo coesivo exponencial para comparar com os experimentos de Wagoner, Buttlar e Paulino (103). A resistência do material à abertura normal σ_c foi obtida experimentalmente através do teste IDT (*Superpave indirect tensile strength test*) a -10°C . A energia de fraturamento G_c foi determinada calculando a área abaixo da curva carga-abertura na ponta da trinca, que foi obtida experimentalmente. O módulo de Young também foi extraído de experimentos. A Tabela 6 contém os valores das propriedades do material.

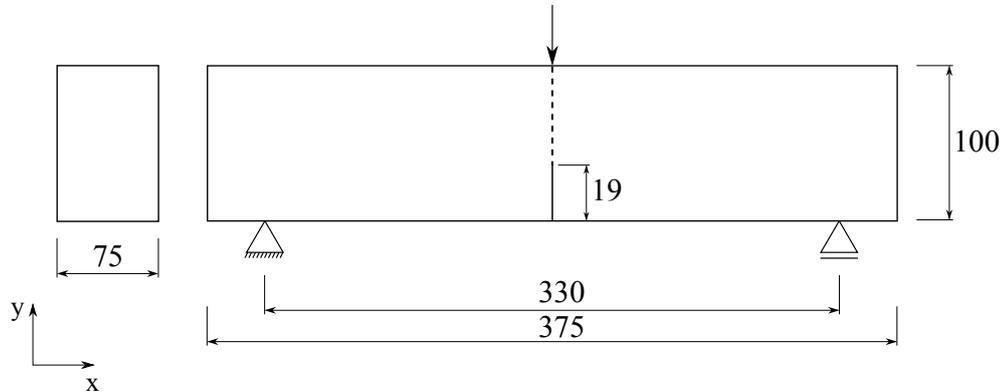
Tabela 6 – Propriedades dos materiais da viga SENB.

Viga		Interface	
E (GPa)	ν	G_c (J/m ²)	σ_c (MPa)
14,2	0,35	344	3,56

As dimensões da viga são as mesmas utilizadas por Wagoner, Buttlar e Paulino (103): 375 mm de comprimento, 100 mm de altura e 75 mm de espessura (Figura 48). Uma trinca inicial com 19 mm é inserida próximo a face inferior da viga. A viga é biapoiada e os apoios

distanciam-se das extremidades próximas por 22,5 mm, com vão de 330 mm. O carregamento é aplicado nos nós do elemento de interface da face superior.

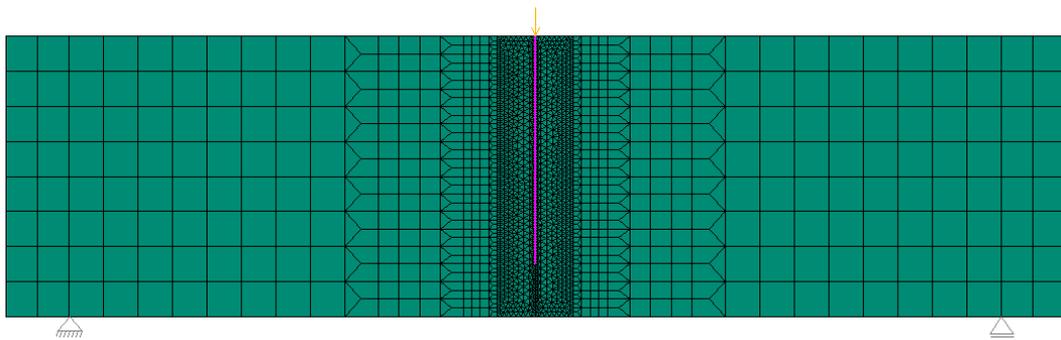
Figura 48 – Geometria e condições de contorno da viga SENB. Dimensões em mm.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo numérico empregado possui elementos contínuos lineares, quadriláteros (Q4) e triangulares (T3), além dos elementos de interface lineares INTNHL. A malha, construída pelo MTOOL (102), é composta por 3159 elementos, dentre eles 81 elementos de interface com 1 mm de comprimento cada (Figura 49). Os elementos de interface são inseridos em uma linha central ao longo da altura da viga, exceto no trecho da trinca inicial. A análise é realizada no estado plano de deformação.

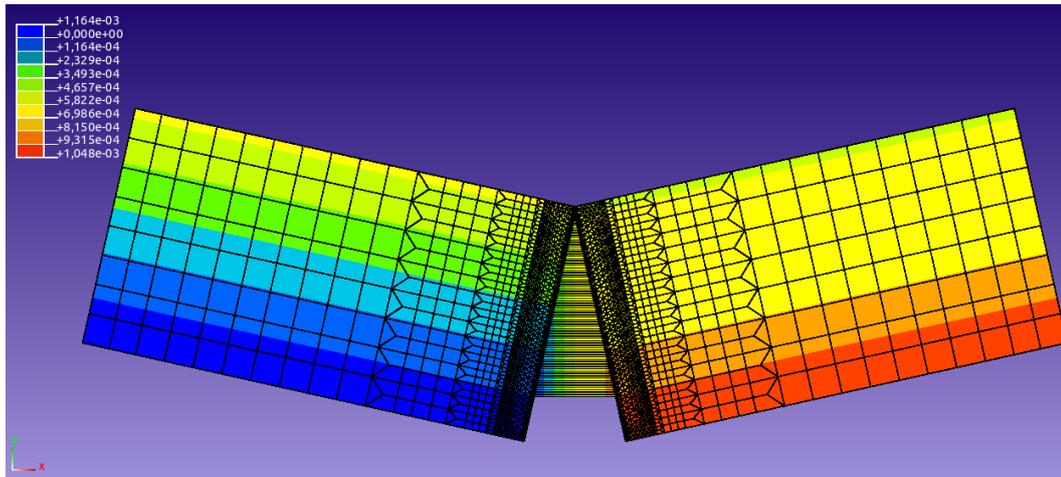
Figura 49 – Malha empregada nas análises numéricas da viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os modelos constitutivos aplicados ao exemplo são o modelo linear com modo I, linear com modo misto e exponencial com modo misto, visto que o exemplo se encontra no modo I. Em todos os modelos, os deslocamentos em x são obtidos dos nós localizados no ponto de maior deslocamento relativo normal, a fim de construir a curva carga-deslocamento relativo (Figura 50).

Figura 50 – Resultado das análises com os modelos constitutivos, da viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo *ExponentialSoft* (exponencial com modo misto) é empregado com o método de solução do controle de deslocamento. O parâmetro que representa a razão entre os modos de fratura (β_{exp}), adotado conforme Song, Paulino e Buttlar (99), é igual a $\beta_{exp} = \sqrt{2}$. São utilizados 3 pontos de integração de Newton-Cotes nos elementos de interface.

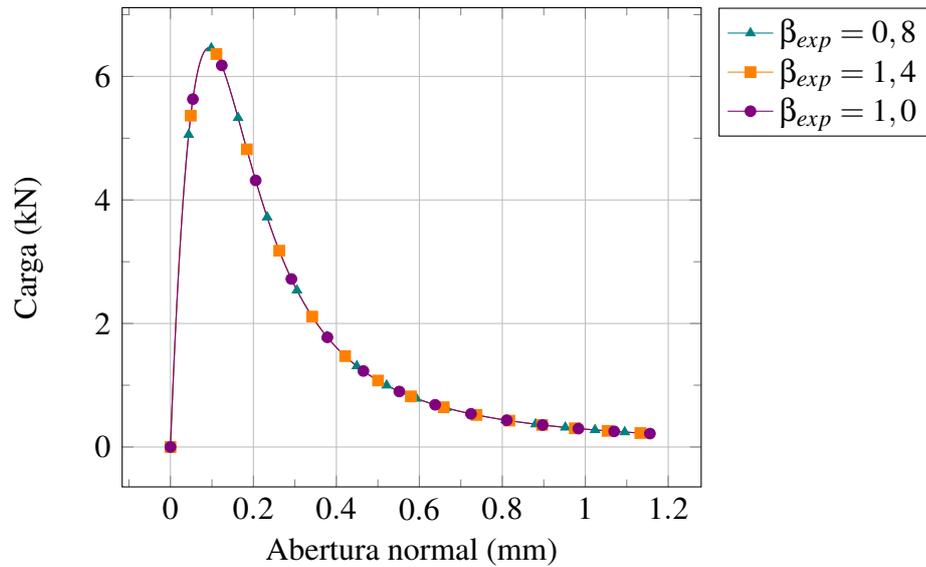
A fim de verificar a sensibilidade do modelo em relação a seus parâmetros, foi realizado um estudo paramétrico com $\beta_{exp} = 0,8, 1,0$ e $1,4$ (Figura 51), $G_c = 0,8G_{exp}$, G_{exp} e $1,2G_{exp}$ (Figura 52) e $\sigma_c = 0,8\sigma_{exp}$, σ_{exp} e $1,2\sigma_{exp}$ (Figura 53), onde σ_{exp} e G_{exp} são a tensão resistente à abertura normal da interface e a energia de fratura obtidas experimentalmente, dadas na Tabela 6.

Através da Figura 51, conclui-se que β_{exp} é inócua para o presente exemplo, visto que o parâmetro é uma variável que quantifica a razão entre o modo II em relação ao I e, no exemplo, a presença do modo II é inexpressiva.

As variações em σ_c mostram que, neste exemplo, a resistência do material controla, proporcionalmente, a carga máxima atingida pela estrutura, alterando, também, a inclinação inicial da curva. Enquanto ao mudar apenas G_c , a carga máxima é inalterada, havendo mudanças leves, mas perceptíveis, na inclinação do trecho inicial da curva e alterações maiores na curva de amolecimento da estrutura.

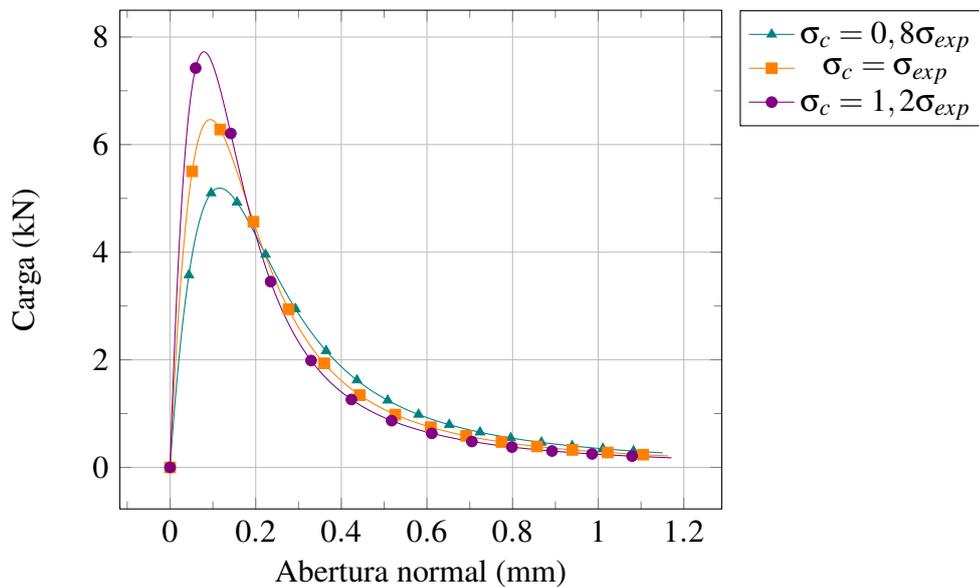
O modelo *LinearSoft* (linear com modo I puro) também utiliza o controle de deslocamento como método de solução, no presente exemplo, convergindo com poucas iterações durante os passos. O emprego desse modelo também requer a atribuição de valor a um outro parâmetro além dos que estão na Tabela 6, a rigidez inicial K_0 . O valor empregado inicialmente foi $1,842 \times 10^{11}$ N/m³, referente a um deslocamento relativo inicial w_0 igual a 10% do deslocamento relativo final w_f . Entretanto, como K_0 não é dado no exemplo, é importante verificar a sensibilidade do exemplo a variação do parâmetro (Figura 54).

Figura 51 – Estudo paramétrico do modelo exponencial em relação a β_{exp} , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

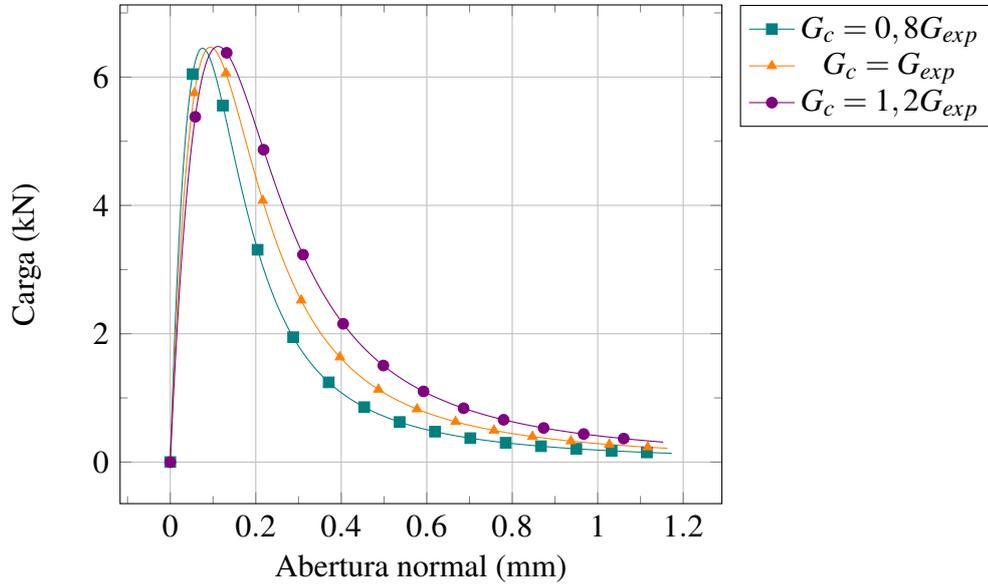
Figura 52 – Estudo paramétrico do modelo exponencial em relação a tensão resistente do material σ_c , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

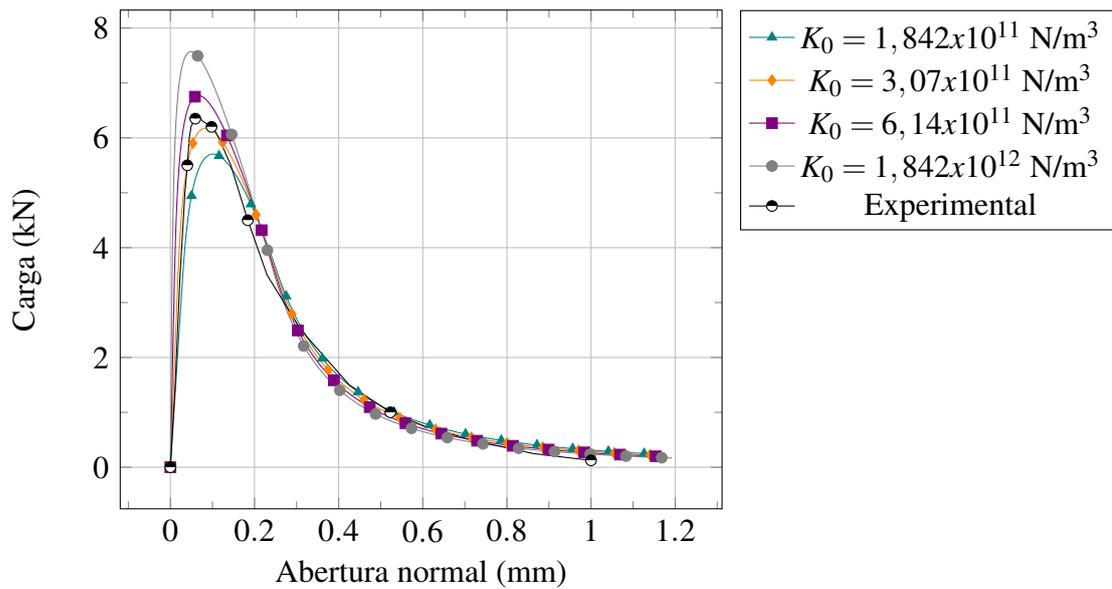
Logo, utilizaram-se quatro valores de K_0 para calibrar com a curva experimental. Os valores utilizados são $K_0 = 1,842 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$, $3,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$, $6,14 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$ e $1,842 \times 10^{12} \text{ N/m}^3$. Os valores são escolhidos conforme a relação entre os deslocamentos iniciais relativos w_0 e finais relativos w_f , $w_0 = 0,1w_f$, $0,06w_f$, $0,03w_f$ e $0,01w_f$, respectivamente. Analisando a curva experimental e as curvas referentes às rigidezes dadas, conclui-se que o valor que a curva que mais se aproxima da experimental é a concernente a $K_0 = 3,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$, bem como

Figura 53 – Estudo paramétrico do modelo exponencial em relação a energia de fratura G_c , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 54 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoft* em relação a rigidez inicial K_0 , na viga SENB.

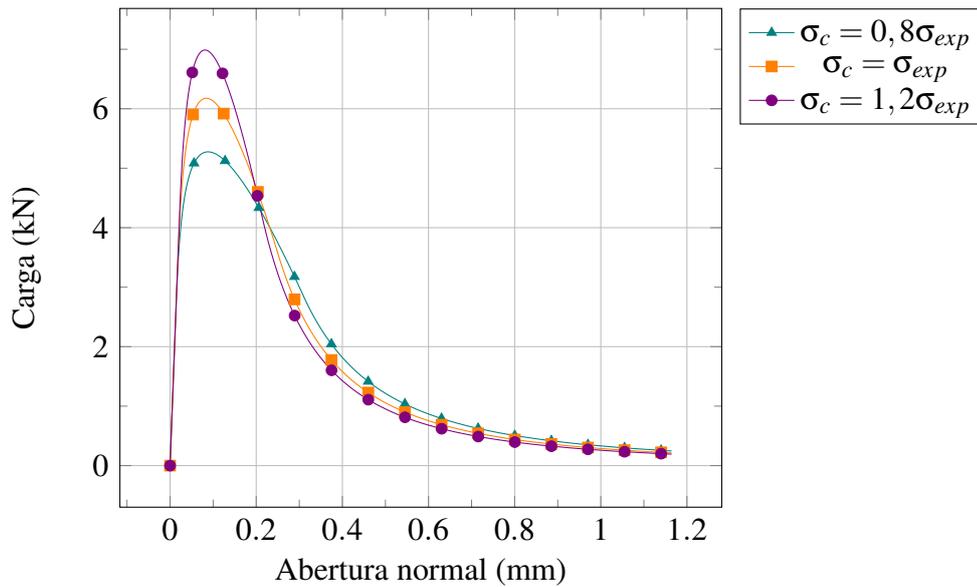


Fonte: Elaborada pelo autor.

também nota-se que a alteração da rigidez inicial provoca mudanças apenas na inclinação do trecho inicial e no ponto limite, o segundo trecho da curva permanece com a mesma forma.

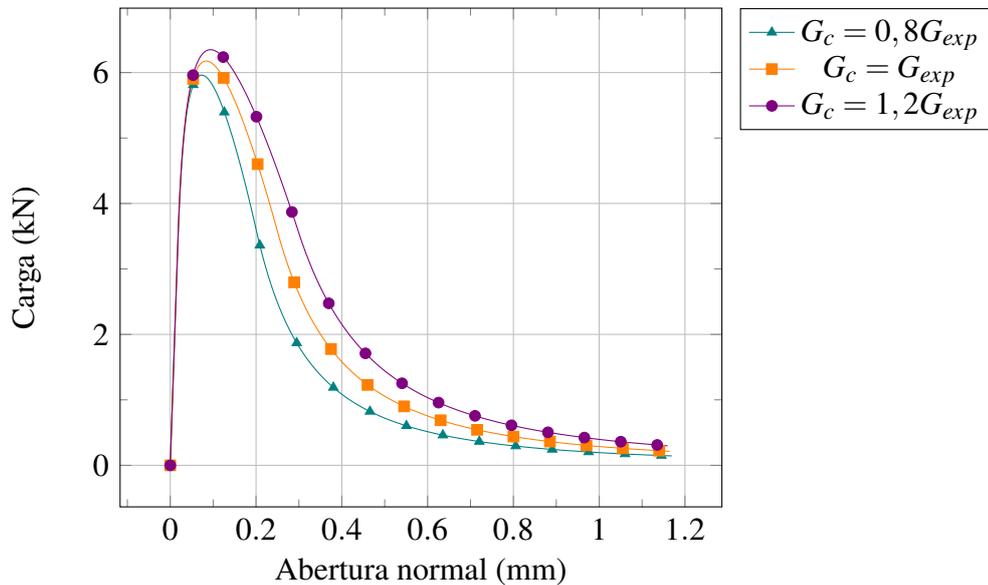
Após estabelecer um valor ideal para a rigidez inicial neste exemplo, também é realizado um outro estudo paramétrico com a tensão resistente da interface à abertura normal (Figura 55) e a energia de fraturamento (Figura 56). São utilizados os mesmos valores calculados para o modelo exponencial.

Figura 55 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoft* em relação a tensão resistente da interface σ_c , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoft* em relação a energia de fratura G_c , na viga SENB.



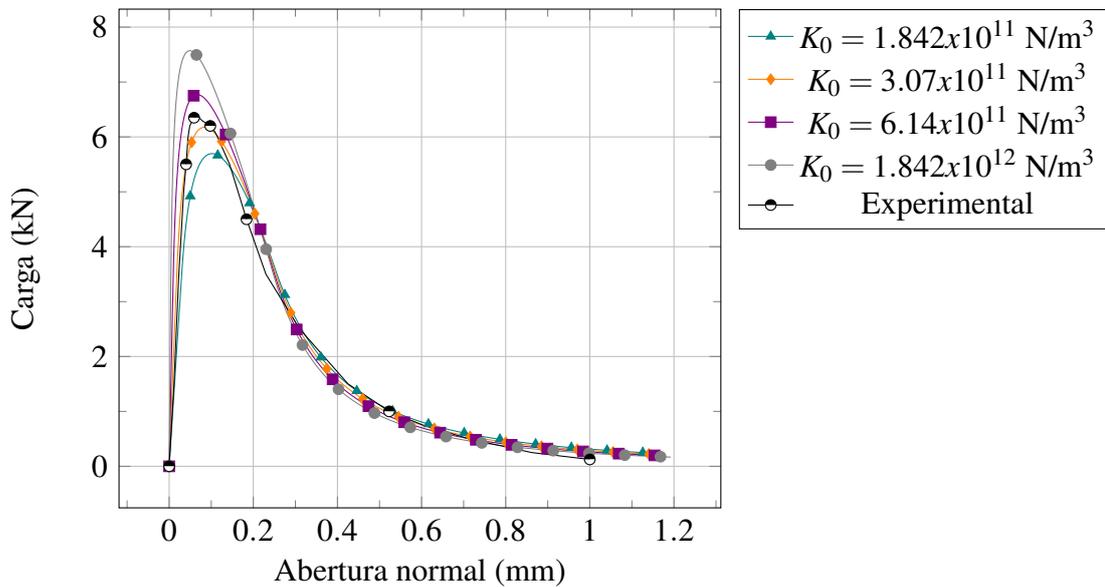
Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento das curvas, após variar σ_c , é semelhante ao ocorrido no modelo exponencial, atingindo diretamente a carga máxima resistida pela estrutura, embora aqui a inclinação inicial da curva permaneça inalterada. Entretanto, as curvas se comportam de maneira diferente quando a energia de fraturamento é modificada. Tanto a carga máxima atingida quanto a curvatura do trecho subsequente ao ponto limite são alteradas.

O modelo *LinearSoftMix* (linear com modo misto) também utiliza o controle de deslocamento, sem enfrentar problemas de convergência. Empregando apenas 3 pontos de integração de Newton-Cotes. Assim como no modelo *LinearSoft*, atribui-se um valor para K_0 após calibrar as curvas resultantes com a curva experimental (Figura 57). E, igualmente ao modelo *LinearSoft*, a curva referente a rigidez inicial que se aproxima mais do experimental é quando $K_0 = 3,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$.

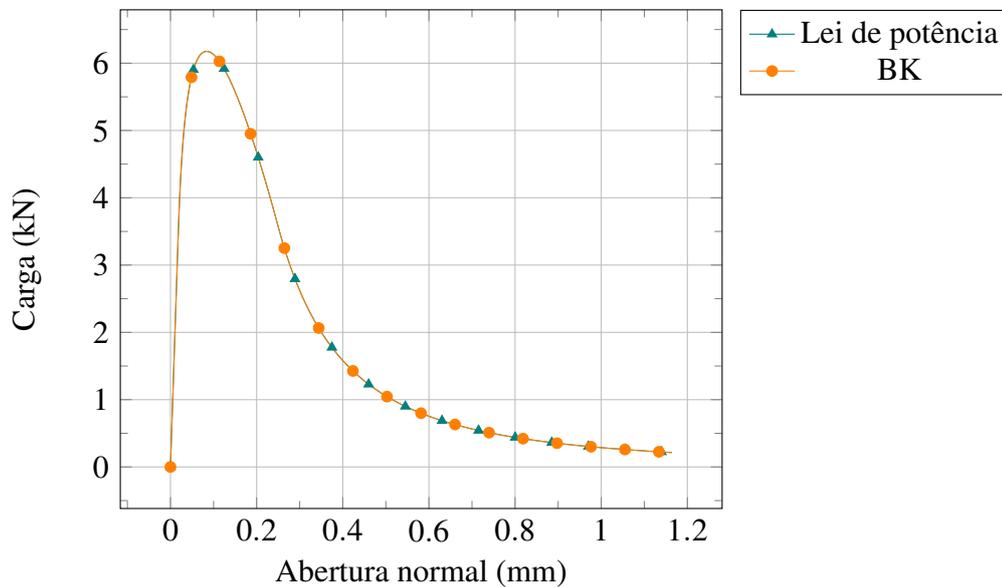
Com a finalidade de verificar o comportamento do modelo com os critérios de iniciação e evolução da trinca, BK e lei de potência (*Power Law*), são realizados testes numéricos com os dois critérios (Figura 58). O parâmetro η empregado, utilizado em ambos os critérios, é $\eta = 2,284$ para o primeiro e $\eta = 1,0$ para o segundo, compatível com a relação linear do critério. Os resultados mostram, como esperado, que as curvas são iguais, visto que exemplos com modos puros transformam a formulação mista em uma formulação modo puro.

Figura 57 – Estudo da sensibilidade do modelo *LinearSoftMix* em relação a rigidez inicial K_0 , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 58 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoftMix* em relação aos critérios de evolução, na viga SENB.

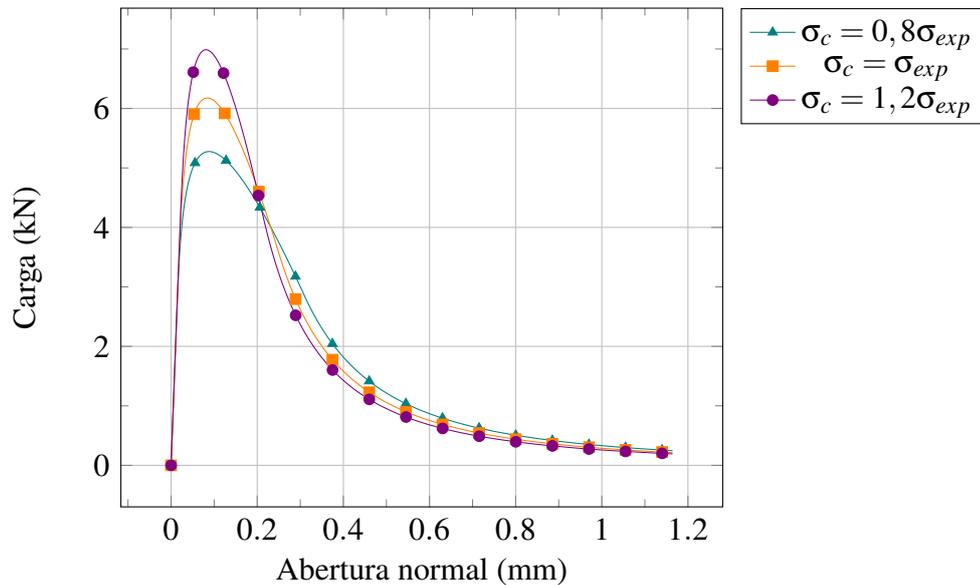


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os mesmos estudos paramétricos do modelo *LinearSoft* são refeitos aqui, como mostrados nas Figuras 59 e 60. O comportamento do modelo *LinearSoftMix*, devido a presença apenas do modo I, é igual ao do modelo *LinearSoft*.

Através das Figuras 45, 52, 55 e 59, percebe-se que os parâmetros do material possuem influências distintas para a viga DCB no exemplo da seção 6.1 e para a viga SENB do pre-

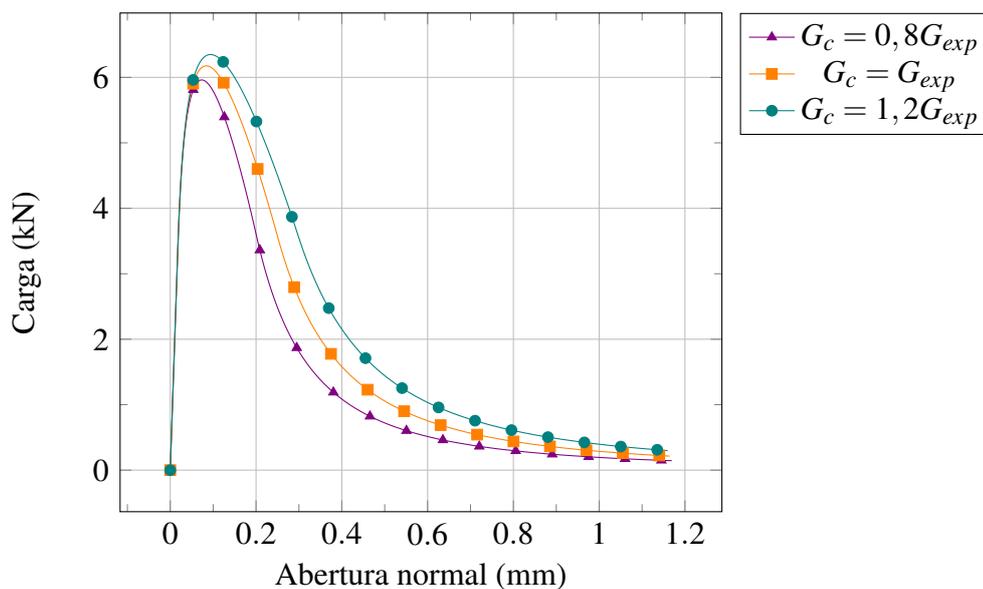
Figura 59 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoftMix* em relação a tensão resistente da interface σ_c , na viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

sente exemplo. No primeiro, a variação na tensão resistente do material tem pouca influência sobre os resultados, sendo, inclusive, uma abordagem recomendada para melhorar a convergência do modelo. Já no segundo, as alterações na tensão resistente provocam diferenças significativas nos resultados, e, logo, o uso da abordagem apresentada na seção 6.1 é inadequado para o presente exemplo, caso houvesse necessidade de malha mais discretizada.

Figura 60 – Estudo paramétrico do modelo *LinearSoftMix* em relação a energia de fratura G_c , na viga SENB.

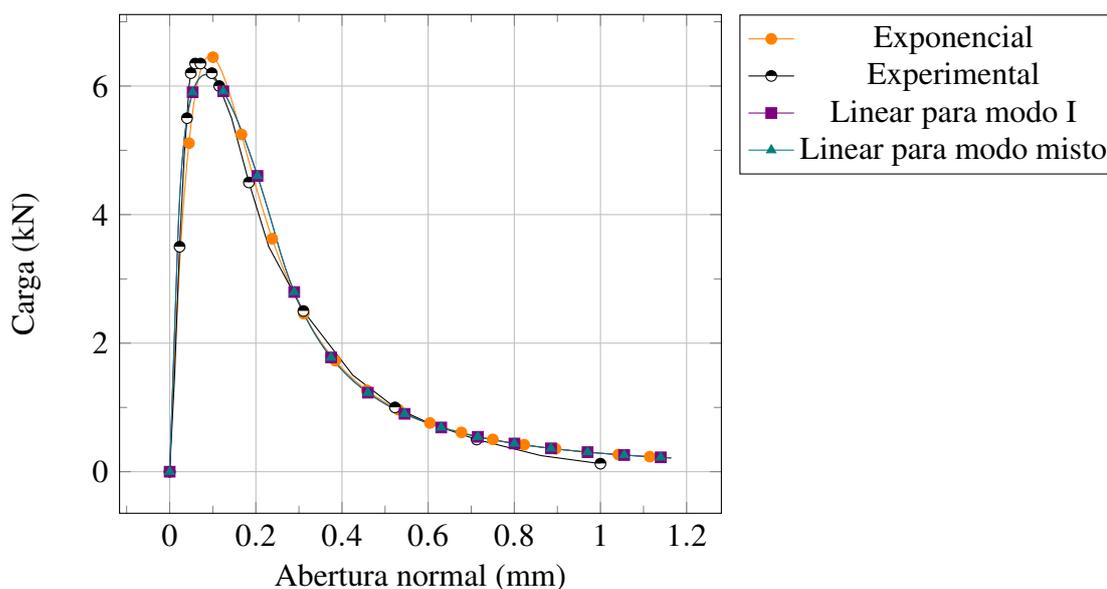


Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando também as variações nas energias de fraturamento dos modelos, deduz-se que os exemplos têm comportamento semelhantes entre si. Visto que, exceto o modelo exponencial, as curvas mostram que alterando a energia de fraturamento a curva tem um ponto limite que acompanha a alteração da energia, a inclinação do trecho inicial permanece inalterada. O segundo trecho aponta que a estrutura sofre deslocamentos superiores (ou inferiores) com a mesma carga, ou seja, quando a energia de fraturamento cresce, a carga necessária para um ponto deslocar-se é menor, após o ponto limite. Portanto, conclui-se que a interface torna-se mais flexível, quando a energia de fraturamento é maior. A razão pela qual o modelo exponencial apresenta o comportamento diferente para o presente exemplo deve ser investigada.

Finalmente, comparando os modelos entre si, todos apresentaram resultados compatíveis com os encontrados por Wagoner, Buttlar e Paulino (103) (Figura 61) e não apresentaram problemas de convergência durante os passos das análises numéricas. A Figura 62 apresenta os resultados experimentais (103) e numéricos, onde o método de solução aplicado ao último foi o controle de deslocamento.

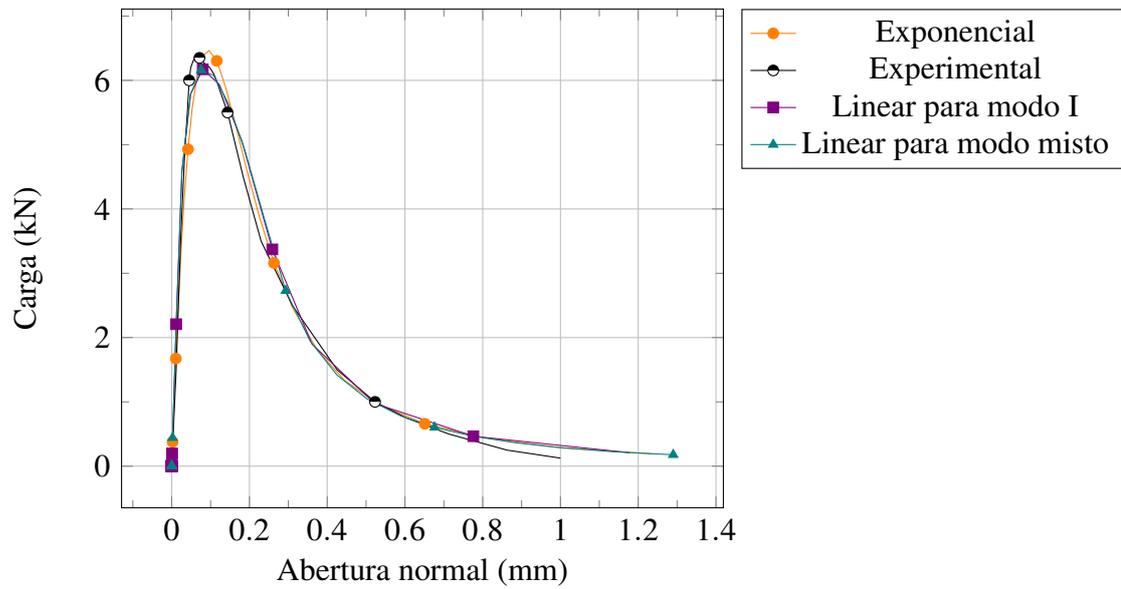
Figura 61 – Resultado numérico, com controle de deslocamento, e experimental das curvas carga-abertura da viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A fim de perceber o desempenho dos modelos em relação ao número de passos empregados, foram realizadas análises empregando o comprimento de arco de Riks-Wempner (104) como método de solução, visto que durante as análises anteriores, com controle de deslocamento, todos os modelos empregaram o mesmo número de passos. Os novos resultados encontrados (Figura 62) mostram que os modelos, no presente exemplo, possuem desempenhos semelhantes e necessitam de uma quantidade bem inferior de passos, quando comparado ao exemplo da viga DCB.

Figura 62 – Resultado numérico, com comprimento de arco, e experimental das curvas carga-abertura da viga SENB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho buscou investigar o comportamento das estruturas fraturadas através de modelos constitutivos não lineares mais realísticos. Inicialmente, foram apresentadas soluções encontradas na literatura para problemas de fratura. Dentre essas encontra-se o Modelo de Zona Coesiva. Também estudou-se o emprego do Método dos Elementos Finitos para as análises numéricas, encontrando, dentre as abordagens existentes, os elementos de interface, para simular a presença das trincas.

Nos arcabouços do MEF, foram implementados elementos de interface bidimensionais, linear e quadrático, com espessura nula e geometricamente lineares. Tais elementos trabalham com o conceito de deslocamentos relativos substituindo a deformação e são capazes de representar deslocamentos relativos normais e tangenciais, retratando a abertura das faces. A implementação foi realizada de forma que os elementos de interface independam dos estados planos de tensão (EPT) ou de deformação (EPD). Os pontos de integração utilizados nestes elementos também foram implementados, a quadratura de Newton-Cotes. A seguir, os elementos foram verificados, ainda sem a não linearidade física, através de um exemplo com solução analítica, apresentando resultados com ótimas concordâncias com a solução analítica.

Em seguida, foram implementados modelos constitutivos fisicamente não lineares, introduzindo o MZC na análise numérica. As leis coesivas constitutivas implementadas foram as leis lineares para o modo I puro e modo misto de fraturamento e lei exponencial para modo misto. Os modelos procuram descrever a presença de carregamento e descarregamento, atribuindo expressões específicas para cada situação. Além disso, os modelos tratam de forma distinta os modos I e II de fraturamento, evitando que tensões negativas provoquem interpenetração das faces no modo I. A verificação dos modelos foram realizadas através de exemplo com solução analítica, utilizando os elementos de interface e empregando cada modo separadamente.

Por fim, os modelos constitutivos foram validados com exemplos encontrados na literatura, com soluções analíticas e experimentais. O modo I foi analisado através de dois exemplos clássicos, uma viga dupla em balanço submetida a carregamento que provoca uma abertura normal ao comprimento da viga e uma viga biapoiada submetida a flexão, provocando uma abertura paralela ao comprimento da mesma. Embora o presente trabalho seja voltado para materiais quase-frágeis, o material considerado para os elementos contínuos foi o linear isotrópico, visto que a intenção inicialmente é entender o comportamento dos modelos coesivos. Contudo, as leis coesivas descrevem uma interface com características semelhantes aos dos materiais quase-frágeis.

No primeiro exemplo, o emprego dos modelos constitutivos de amolecimento lineares apresentaram muitos problemas de convergências, mesmo empregando métodos de solução que costumam ajudar em problemas não lineares geometricamente. Outras abordagens ainda foram necessárias para obter convergência em todos os pontos da curva carga-deslocamento. Dentre as alterações aplicadas ao exemplo pelos modelos citados estão a redução da resistência

do material, redução da rigidez inicial (penalidade) e o uso de uma quantidade de pontos de integração atípico. Entretanto, os resultados foram satisfatórios com a curva analítica, que não adotou os valores alterados, a fim de comprovar a validade da abordagem de Turon (70).

Ainda no mesmo exemplo, o modelo de amolecimento exponencial mostrou-se mais suave para representar o fraturamento. A convergência de todos os pontos foi obtida sem explorar abordagens alternativas, como procedido com os modelos lineares. O modelo comprovou a sua superioridade em relação aos outros modelos, para o tal exemplo. É necessário reiterar que os modelos conseguem ser solucionados através do controle de deslocamento, entretanto a conveniência de utilizar um número bem inferior de passos sobrepõem-se sobre o uso do método.

A viga biapoiada, analisada no segundo exemplo, também foi analisada com os três modelos constitutivos de amolecimentos implementados. Os resultados obtidos em todos os estudos paramétricos foram iguais para os modelos lineares, comprovando que as formulações dos modelos e suas implementações estão coerentes. O exemplo provou ser um problema de solução simples, visto que nenhum dos modelos teve problemas de convergência ou para concluir a análise, mesmo sem os tratamentos aplicados ao exemplo anterior.

Embora os modelos de amolecimento lineares tenha produzido ótimos resultados, compatíveis com experimentos existentes, nota-se que o modelo exponencial é mais robusto, visto que o mesmo não utiliza variáveis que necessitam de calibragem para cada exemplo, como é o caso da rigidez inicial K_0 .

Os resultados obtidos em estudos paramétricos mostraram discrepâncias entre as sensibilidades dos modelos para ambos os exemplos. O primeiro exemplo, o DCB, mostrou que a redução da tensão resistente do material pode ser realizada para beneficiar situações em que discretizar a malha não é uma opção. Entretanto, comprovou-se, no segundo exemplo, que neste a tensão resistente controla diretamente o ponto limite da estrutura. Tal resultado salienta como o MZC é sensível e suscetível quando surgem mudanças nas propriedades dos materiais ou da geometria do problema. Não podendo, portanto, haver conclusões abruptas sobre abordagens para solucionar determinados problemas de fraturamento.

7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente trabalho apresentou o início do estudo sobre modelos coesivos, restando ainda muitas dúvidas do grupo de pesquisa a serem solucionadas através de futuras pesquisas. Dentre elas:

- (a) Formular e implementar elementos de interface geometricamente não-lineares.
- (b) Aplicar os modelos implementados aqui aos elementos de interface com altura finita, já existentes no CAP3D.

- (c) Empregar os modelos constitutivos existentes a exemplos com modo misto de fraturamento.
- (d) Investigar o comportamento de outras leis coesivas.
- (e) Verificar efeito de escala, mesmo em simulações numéricas.
- (f) Investigar sensibilidade de malha e de número de elementos de interface.
- (g) Analisar interfaces entre materiais distintos.

REFERÊNCIAS

- 1 PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G. V.; GÓMEZ, F. J.; CENDÓN, D. A.; ARBILLA, I. Generalizations and specializations of cohesive crack models. **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdã, v. 70, p. 1759–1776, 2003.
- 2 HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of a crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, Londres, v. 6, p. 773–782, 1976.
- 3 MODÉER, M. **A fracture mechanics approach to failure analyses of concrete materials**. 1979. 102 f. Tese (Doutorado em Materials Engineering) – Lund University, Lund, Suécia, 1979.
- 4 BAŽANT, Z.; PFEIFFER, P. Shear fracture tests of concrete. **Materials and Structures**, Amsterdã, v. 19, n. 2, p. 111–121, 1986.
- 5 BORST, R.; NAUTA, P. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. **Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, Zurique, v. 240, n. 1, p. 35 – 46, 1985.
- 6 ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. 1988. 132 f. Tese (Doutorado em Civil Engineering) – Civil Engineering Department of Delft University of Technology, Delft, 1988.
- 7 GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. **Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering Division**, Reston, v. 94, p. 637 – 659, 1968.
- 8 KALIAKIN, V.; LI, J. Insight into deficiencies associated with commonly used zero-thickness interface elements. **Computers and Geotechnics**, Londres, v. 17, n. 2, p. 225 – 252, 1995.
- 9 GENS, A.; CAROL, I.; ALONSO, E. Rock joints: Fem implementation and applications. *In*: SELVADURAI, A. P. S.; BOULON, M. J. (Ed.) **Mechanics of Geomaterial Interfaces**. Amsterdam: Elsevier, 1995. v. 42, p. 395–420.
- 10 GONÇALVES, J. P. M.; MOURA, M. F. S. F.; MAGALHÃES, A. G.; CASTRO, P. M. S. T. Application of interface finite elements to three-dimensional progressive failure analysis of adhesive joints. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, Londres, v. 26, n. 5, p. 479–486, 2003.
- 11 LI, J.; KALIAKIN, V. *Numerical simulation of interfaces in geomaterials: development of new zero-thickness interface elements*. Newark: Department of Civil Engineering, University of Delaware, Julho 1993. Relatório Técnico 93-6.
- 12 JIN, Z.-H.; PAULINO, G. H.; DODDS, JR., R. H. Finite element investigation of quasi-static crack growth in functionally graded materials using a novel cohesive zone fracture model. **Journal of Applied Mechanics**, Houston, v. 69, p. 370–379, 2002.
- 13 LENS, L. N. **Modelos para análise de fratura do concreto simples empregando inter-**

- faces coesivas**. 2009. 113 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2009.
- 14 HOHBERG, J. M. Concrete joints. *In: SELVADURAI, A. P. S.; BOULON, M. J. (Ed.) Mechanics of Geomaterial Interfaces*. Amsterdam: Elsevier, 1995. p. 421–446.
 - 15 MAYER, M.; GAUL, L. Modeling of contact interfaces using segment-to-segment-elements for fe vibration analysis. *In: IMAC-XXIII: CONFERENCE & EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS*, 2005, Orlando, Florida (EUA). **23rd Conference and Exposition on Structural Dynamics 2005 (IMAC - XXIII)**. Bethel: Society for Experimental Mechanics, 2005. p. 1423–1434.
 - 16 SCHELLEKENS, J. C. J.; BORST, R. The application of interface elements and enriched or rate-dependent continua to micro-mechanical analyses of fracture in composites. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 14, n. 1, p. 68–83, 1994.
 - 17 SCHELLEKENS, J. C. J.; BORST, R. On the numerical integration of interface elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 36, n. 1, p. 43–66, 1993.
 - 18 FEIH, S. *Development of a user element in ABAQUS for modelling of cohesive laws in composite structures*. Roskilde (Dinamarca): Risø National Laboratory, Janeiro 2005. Relatório Técnico Risø-R-1501(EN).
 - 19 PRASAD, M.; KRISHNAMOORTHY, C. Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdã, v. 191, n. 25–26, p. 2699 – 2725, 2002.
 - 20 POTTS, D. **Guidelines for the use of advanced numerical analysis**. Londres: Thomas Telford, 2002.
 - 21 DESAI, C. S.; ZAMAN, M. M.; LIGHTNER, J. G.; SIRIWARDANE, H. J. Thin-layer element for interfaces and joints. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Londres, v. 8, n. 1, p. 19–43, 1984.
 - 22 NAZIR, S.; DHANASEKAR, M. A non-linear interface element model for thin layer high adhesive mortared masonry. **Computers & Structures**, Londres, v. 144, p. 23 – 39, 2014.
 - 23 CAROL, I.; LÓPEZ, C. M.; ROA, O. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 52, p. 193–215, 2001.
 - 24 ARAÚJO, T. D. P. **Análise elasto-plástica adaptativa de estruturas com trincas**. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.
 - 25 CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M. Computational modelling of impact damage in brittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, Londres, v. 33, n. 20–22, p. 2899 – 2938, 1996.

- 26 MIER, J. G. M. **Fracture processes of concrete: Assessment of material parameters for fracture models**. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- 27 HOLANDA, A. S.; PARENTE JR., E.; ARAÚJO, T. D. P.; MELO, L. T. B.; EVANGELISTA JR., F.; SOARES, J. B. Finite element modeling of flexible pavements. *In: XXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE)*, 2006, Belém. Anais [...]. Belém: Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2006. p. 1–14.
- 28 LAWN, B. R. **Fracture of brittle solids**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Solid State Science Series).
- 29 GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Londres, v. 221, p. 163–198, 1921.
- 30 ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and Applications**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2005.
- 31 BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- 32 SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C. **Fracture mechanics of concrete: applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-Brittle Materials**. Wiley-Interscience publication. New Jersey: John Wiley & Sons, 1995.
- 33 BARENBLATT, G. I.; OHIO, F. T. D. W.-P. A. **The mathematical theory of equilibrium cracks formed in brittle fracture**. Fort Belvoir: Defense Technical Information Center, 1962.
- 34 HILLERBORG, A. The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_F of concrete. **Materials and Structures**, Amsterdã, v. 18, p. 291–296, 1985.
- 35 DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Londres, v. 8, p. 100–104, 1960.
- 36 BARENBLATT, G. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. general ideas and hypotheses. axially-symmetric cracks. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, Londres, v. 23, n. 3, p. 622 – 636, 1959.
- 37 PETERSSON, P. E. **Crack growth and development of fracture zone in plane concrete and similar materials**. 1981. 174 f. Tese (Doutorado em Materials Engineering) – Lund University, Lund, Suécia, 1981.
- 38 CARPINTERI, A. Cracking of strain-softening materials. *In: M. H. ALIABADI, C. A. B.; PARTON, V. Z. (Ed.) Static and Dynamic Fracture Mechanics*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994. p. 311–365.
- 39 GUINEA, G. V.; PLANAS, J.; ELICES, M. A general bilinear fit for the softening curve of concrete. **Materials and Structures**, Amsterdã, v. 27, n. 2, p. 99–105, 1994.
- 40 CENDÓN, D. A.; GÁLVEZ, J. C.; ELICES, M.; PLANAS, J. Modelling the fracture of

- concrete under mixed loading. **International Journal of Fracture**, Amsterdã, v. 103, n. 3, p. 293–310, 2000.
- 41 GÁLVEZ, J.; ČERVENKA, J.; CENDÓN, D.; SAOUMA, V. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. **Cement and Concrete Research**, Londres, v. 32, n. 10, p. 1567 – 1585, 2002.
- 42 PARK, K.; PAULINO, G. H.; ROESLER, J. R. Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdã, v. 75, n. 13, p. 3806–3818, 2008.
- 43 MIER, J. G. M. Assessment of model parameters for fracture simulation in brittle disordered materials like concrete and rock. *In*: KONSTA-GDOUTOS, M. (Ed.) **Measuring, Monitoring and Modeling Concrete Properties**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2006. p. 221–232.
- 44 TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Londres, v. 40, n. 6, p. 1377 – 1397, 1992.
- 45 CHANDRA, N.; LI, H.; SHET, C.; GHONEM, H. Some issues in the application of cohesive zone models for metal–ceramic interfaces. **International Journal of Solids and Structures**, Londres, v. 39, n. 10, p. 2827 – 2855, 2002.
- 46 SOARES, J. B.; FREITAS, F.; ALLEN, D. H. Crack modeling of asphaltic mixtures considering heterogeneity of the material. **Transportation Research Record**, Thousand Oaks, v. 1832, p. 113–120, 2003.
- 47 KIM, H.; BUTTLAR, W. G. Micromechanical fracture modeling of asphalt mixture using the discrete element method. *In*: GEO-FRONTIERS CONGRESS, 2005, Austin. **Advances in Pavement Engineering**. Reston: American Society of Civil Engineers, 2005. p. 1–15.
- 48 TVERGAARD, V. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. **Materials Science and Engineering: A**, Amsterdã, v. 125, n. 2, p. 203 – 213, 1990.
- 49 PAULINO, G. H.; SONG, S. H.; BUTTLAR, W. G. Cohesive zone modeling of fracture in asphalt concrete. *In*: 5th INTERNATIONAL RILEM CONFERENCE, 2004, Limoges (França). **Proceedings of the 5th International RILEM Conference–Cracking in Pavements: Mitigation, Risk Assessment, and Preservation**. Bagnaux: RILEM Publications, 2004. p. 63–70.
- 50 XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Londres, v. 42, n. 9, p. 1397 – 1434, 1994.
- 51 BAŽANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 128, p. 1119–1149, 2002.

- 52 GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. A plastic model with non-local damage applied to concrete. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Londres, v. 30, p. 71–90, 2006.
- 53 JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model: I. basic formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 50, p. 1269–1290, 2001.
- 54 KAWAI, T. New discrete models and their application to seismic response analysis of structures. **Nuclear Engineering and Design**, Amsterdã, v. 48, p. 207–229, 1978.
- 55 CAROL, I.; PRAT, P.; LÓPEZ, C. Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 123, p. 765–773, 1997.
- 56 SAOUMA, V. E. **Fracture mechanics**. Boulder, 2000. Notas de Aula.
- 57 STEINMANN, P.; WILLAM, K. Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdã, v. 90, n. 1–3, p. 845 – 867, 1991.
- 58 STEINMANN, P.; WILLAM, K. Finite element analysis of elastoplastic discontinuities. **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 120, n. 11, p. 2428–2442, 1994.
- 59 HOHBERG, J. M. **A joint element for the nonlinear dynamic analysis of arch dams**. 1992. 303 f. Tese (Doutorado em Engenharia Estrutural) – Institute of Structural Engineering, ETH, Zurich, 1992.
- 60 BORST, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J. C.; VERHOOSSEL, C. V. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
- 61 BORST, R. Isotropic and anisotropic damage models for concrete fracture. *In*: PIJAUDIER-CABOT, G.; BITTNER, Z.; GÉRARD, B. (Ed.) *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*. Paris: Hermès Science Publications, 1999. p. 40–57.
- 62 EVANGELISTA, JR., F.; ROESLER, J. R.; PROENÇA, S. P. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdã, v. 97, p. 261 – 280, 2013.
- 63 CAROL, I.; IDIART, A.; LOPEZ, C. M.; CABALLERO, A. Advances in meso-mechanical analysis of concrete specimens using zero-thickness interface elements. **Fracture mechanics of concrete and concrete structures—proceedings FraMCoS-6, Taylor & Francis Group, Londres**, p. 163–174, 2007.
- 64 ALFANO, M.; FURGIUELE, F.; LEONARDI, A.; MALETTA, C.; PAULINO, G. H. Fracture analysis of adhesive joints using intrinsic cohesive zone models. *In*: XIX CONVEGNO NAZIONALE DEL GRUPPO ITALIANO DELLA FRATURA IGF, 2007, Milão (Itália). **Atti del XIX Convegno Nazionale del Gruppo Italiano Frattura (IGF 19)**. Arzago D’Adda: Ed. Grafiche GSS, 2007. p. 1701–1736.

- 65 PARK, K.; PAULINO, G. H. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. **Applied Mechanics Reviews**, Evanston, v. 64, n. 6, p. 060802, 2011.
- 66 SCHEIDER, I. Cohesive model for crack propagation analyses of structures with elastic-plastic material behavior foundations and implementation. **GKSS research center Geesthacht, Dept. WMS**, Geesthacht, 2001. Disponível em: https://www.hereon.de/imperia/md/content/hzg/institut_fuer_werkstoffforschung/wms/czm-doku.pdf. Acesso em: 23 setembro 2013.
- 67 NEEDLEMAN, A. Micromechanical modelling of interfacial decohesion. **Ultramicroscopy**, Amsterdã, v. 40, n. 3, p. 203 – 214, 1992.
- 68 ROSE, J. H.; FERRANTE, J.; SMITH, J. R. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. **Physical Review Letters**, College Park, v. 47, p. 675–678, 1981.
- 69 CAMANHO, P. P.; DAVILA, C. G.; MOURA, M. F. Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. **Journal of Composite Materials**, Londres, v. 37, n. 16, p. 1415–1438, 2003.
- 70 TURON TRAVESA, A. **Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models**. 2006. 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade de Girona, Girona, Espanha, 2006.
- 71 MEER, F. P. **Computational modeling of failure in composite laminates**. 2010. 123 f. Tese (Doutorado em Mecânica Computacional) – Universidade de Tecnologia de Delft, Delft, Holanda, 2010.
- 72 ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 44, n. 9, p. 1267–1282, 1999.
- 73 JU, J.; CHABOCHE, J.; VOYIADJIS, G. **Damage mechanics in engineering materials**. Amsterdam: Elsevier Science, 1998. (Studies in Applied Mechanics, v. 46).
- 74 COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2002.
- 75 BROCKS, W.; CORNEC, A.; SCHEIDER, I. 3.03 - computational aspects of nonlinear fracture mechanics. *In*: MILNE, I.; RITCHIE, R. O.; KARIHALOO, B. (Ed.) **Comprehensive Structural Integrity**. Oxford: Pergamon, 2003. p. 127 – 209.
- 76 BUENO, E. M. R. **Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos**. 1999. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- 77 DESAI, C.; NAGARAJ, B. Closure to “Modeling for cyclic normal and shear behavior of interfaces” by C. S. Desai and B. K. Nagaraj (july, 1988, vol. 114, no. 7). **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 116, n. 8, p. 1872–1880, 1990.

- 78 GENS, A.; CAROL, I.; ALONSO, E. An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction. **Computers and Geotechnics**, Londres, v. 7, n. 1–2, p. 133 – 151, 1989.
- 79 SIMONE, A. **Continuous-discontinuous modelling of failure**. 2003. 198 f. Tese (Doutorado em Mecânica Computacional) – Universidade de Tecnologia de Delft, Delft, Holanda, 2003.
- 80 DAY, R. A.; POTTS, D. M. Zero thickness interface elements—numerical stability and application. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Londres, v. 18, n. 10, p. 689–708, 1994.
- 81 LOURENÇO, P. J. B. B. **Computational strategies for masonry structures**. 1996. 210 f. Tese (Doutorado em Mecânica Computacional) – Universidade de Tecnologia de Delft, Delft, Holanda, 1996.
- 82 ALFANO, G.; CRISFIELD, M. A. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 50, p. 1701–1736, 2001.
- 83 EVANGELISTA, JR., F. **Three-dimensional modeling of failure in quasi-brittle materials and structures**. 2011. 142 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – University of Illinois, Urbana-Champaign, 2011.
- 84 GONÇALVES, J. P. M.; MOURA, M. F. S. F.; CASTRO, P. M. S. T.; MARQUES, A. T. Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. **Engineering Computations**, Londres, v. 17, p. 28 –47, 2000.
- 85 SIMONE, A. Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issues. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Londres, v. 20, n. 6, p. 465–478, 2004.
- 86 BELL, R. W. **The analysis of offshore foundations subjected to combined loading**. 1991. 140 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Wolfson College, Universidade de Oxford, Oxford, 1991.
- 87 CAZES, F.; CORET, M.; COMBESCURE, A.; GRAVOUIL, A. A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. **International Journal of Solids and Structures**, Londres, v. 46, n. 6, p. 1476 – 1490, 2009.
- 88 GUELLO, G. D. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. 2002. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, 2002.
- 89 OZBOLT, J.; ANANIEV, S. Scalar damage model for concrete without explicit evolution law. *In: EURO-C CONFERENCE, 2003, St. Johann Im Pongau (Áustria)*. **Computational modelling of concrete structures**. Lisse: Swets & Zeitlinger, 2003. p. 287–294.
- 90 CRISFIELD, M. A. Local instabilities in the non-linear analysis of reinforced concrete beams and slabs. **Proceedings of Institution of Civil Engineers, Part 2**, Londres, v. 73,

- p. 135 – 145, 1982.
- 91 CRISFIELD, M. A.; HELLWEG, H. B.; DAVIES, G. A. O. Failure analysis of composite structures using interface elements. *In: NAFEMS CONFERENCE ON APPLICATION OF FINITE ELEMENTS TO COMPOSITE MATERIALS*, 1994, Londres (Reino Unido). **Proceedings of NAFEMS Conference on Application of Finite Elements to Composite Materials**. Londres: National Agency for Finite Element Methods and Standards, 1994. p. 1–4.
 - 92 BORST, R. **Non-linear analysis of frictional materials**. 1986. 140 f. Tese (Doutorado em Mecânica Computacional) – Civil Engineering Department of Delft University of Technology, Delft, 1986.
 - 93 BORST, R. Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. **Computers & Structures**, Londres, v. 25, n. 2, p. 211 – 224, 1987.
 - 94 CHEN, Z.; SCHREYER, H. L. *A Numerical Solution Scheme for Softening Problems Involving Total Strain Control*. Albuquerque: New Mexico Engineering Research Institute, University of New Mexico, Outubro 1990. Relatório Técnico WL-TR-90-53.
 - 95 ROTS, J. G.; BORST, R. Analysis of concrete fracture in “direct” tension. **International Journal of Solids and Structures**, Londres, v. 25, n. 12, p. 1381 – 1394, 1989.
 - 96 SONG, S. H.; PAULINO, G. H.; BUTTLAR, W. G. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material. **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdã, v. 73, n. 18, p. 2829 – 2848, 2006.
 - 97 BENZEGGAGH, M. L.; KENANE, M. Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus. **Composites Science and Technology**, Londres, v. 56, n. 4, p. 439 – 449, 1996.
 - 98 TÁVARA, L.; MANTIC, V.; SALVADORI, A.; GRAY, L. J.; PARÍS, F. Cohesive-zone-model formulation and implementation using the symmetric galerkin boundary element method for homogeneous solids. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 51, n. 4, p. 535–551, 2013.
 - 99 SONG, S.; PAULINO, G.; BUTTLAR, W. Simulation of crack propagation in asphalt concrete using an intrinsic cohesive zone model. **Journal of Engineering Mechanics**, Reston, v. 132, n. 11, p. 1215–1223, 2006.
 - 100 ANDRÉS, A.; PÉREZ, J.; ORTIZ, M. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids and Structures**, Londres, v. 36, n. 15, p. 2231 – 2258, 1999.
 - 101 REINA, A. G. R.; ARAÚJO, T. D. P. Aplicações bidimensionais de elementos de interface isoparamétricos. *In: XXIX IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE)*, 2008, Maceió - AL. Anais [...]. Maceió: Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2008.

- 102 TECGRAF/PUC-RIO; CENPES/PETROBRAS. **Mtool**: Two-dimensional mesh tool. Versão 5.03, jun 2005. (Software não publicado, disponível sob solicitação.).
- 103 WAGONER, M. P.; BUTTLAR, W. G.; PAULINO, G. H. Development of a single-edge notched beam test for asphalt concrete mixtures. **Journal of Testing and Evaluation**, West Conshohocken, v. 33, n. 6, p. 452, 2005.
- 104 ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.