



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MATEUS MAIA NORONHA

**OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALÍVIO DE TENSÃO EM UMA PLACA PLANA
COM FURO CENTRAL SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAXIAL**

RUSSAS

2024

MATEUS MAIA NORONHA

OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALÍVIO DE TENSÃO EM UMA PLACA PLANA
COM FURO CENTRAL SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAXIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. George Luiz Gomes de Oliveira.

RUSSAS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N768o Noronha, Mateus Maia.

Otimização Paramétrica de Alívio de Tensão em uma Placa Plana com Furo Central
Submetida à Tração Uniaxial / Mateus Maia Noronha. – 2024.
122 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus
de Russas, Curso de Engenharia Mecânica, Russas, 2024.

Orientação: Prof. Dr. George Luiz Gomes de Oliveira.

1. concentração de tensão. 2. otimização paramétrica. 3. método dos elementos finitos. 4.
alívio de tensão. 5. furos de alívio. I. Título.

CDD 620.1

MATEUS MAIA NORONHA

OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALÍVIO DE TENSÃO EM UMA PLACA PLANA
COM FURO CENTRAL SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAXIAL

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Engenharia Mecânica do Campus de
Russas da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 04/09/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. George Luiz Gomes de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cândido Jorge de Sousa Lobo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ramon Rudá Brito Medeiros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus que tem abençoado minha vida pessoal me dando força física e principalmente mental, para que essa vitória fosse atingida.

Agradeço ao meu pai José, à minha mãe Maria (*in memoriam*) e a minha irmã Amanda, por todo sacrifício feito e todo incentivo nos momentos difíceis para que essa conquista se tornasse realidade, na qual é dedicada a eles.

Agradeço a todos os familiares pela sólida formação que me proporcionaram a continuidade nos estudos até a chegada dessa Graduação.

Agradeço ao Prof. Dr. George Luiz Gomes de Oliveira por todo o auxílio prestado ao longo da realização do trabalho, sem ele não seria viável a conclusão deste projeto.

Agradeço a Universidade Federal do Ceará, bem como todos os professores, colegas e amigos que participaram da minha caminhada acadêmica, pois eles me auxiliaram na obtenção dessa conquista.

Gostaria de expressar toda a minha gratidão e apreço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esta tarefa se tornasse uma realidade. A todos quero manifestar os meus sinceros agradecimentos.

“O SENHOR é o meu pastor, nada me faltará. Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam.” (Salmos 23)

RESUMO

A presente pesquisa investigou a otimização paramétrica de alívio de tensão em uma placa plana com furo central submetida à tração uniaxial. A concentração de tensões, um fenômeno crítico em engenharia que pode levar a falhas estruturais, foi abordada neste estudo através da busca pela configuração ideal de furos de alívio para minimizar a tensão máxima na região do furo central. Utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para simular o comportamento mecânico da placa no software ANSYS Workbench, e o algoritmo de otimização Adaptive Single-Objective (ASO) para encontrar a configuração ótima, foram investigadas diferentes geometrias de furos de alívio: circular, dois furos circulares, oval, elíptico e triangular. Os resultados demonstraram que a inclusão de furos de alívio reduz significativamente a concentração de tensões, com destaque para o furo triangular, que proporcionou a maior redução (38%). A otimização revelou a tendência dos parâmetros geométricos dos furos de alívio a convergir para valores específicos, como a proximidade do furo de alívio ao furo central e dimensões próximas ao diâmetro do furo central. A pesquisa também abordou a importância da discretização da malha no MEF, demonstrando a influência do refinamento da malha na precisão dos resultados. A utilização de malhas adequadas, com elementos finitos do tipo PLANE183 e refinamento na região do furo central, garantiu a captura precisa do gradiente de tensão e a convergência da solução. A comparação dos resultados do MEF com dados da literatura validou a precisão do modelo numérico, com boa concordância observada com os modelos teóricos de Young e Budynas (2002), Norton (2013) e Howland (1930).

Palavras-chave: concentração de tensão; otimização paramétrica; método dos elementos finitos; alívio de tensão; furos de alívio.

ABSTRACT

The present research investigated the parametric optimization of stress relief in a flat plate with a central hole subjected to uniaxial traction. Stress concentration, a critical phenomenon in engineering that can lead to premature structural failure, was addressed in this study by searching for the ideal configuration of relief holes to minimize the maximum stress in the central hole region. Using the Finite Element Method (FEM) to simulate the mechanical behavior of the plate in ANSYS Workbench software, and the Adaptive Single-Objective (ASO) optimization algorithm to find the optimal configuration, different relief hole geometries were investigated: circular, two circular holes, oval, elliptical, and triangular. The results showed that the inclusion of relief holes significantly reduces stress concentration, with the triangular hole providing the greatest reduction (38%). The optimization revealed a tendency for the geometric parameters of the relief holes to converge to specific values, such as proximity to the central hole and dimensions close to the central hole's diameter. The research also addressed the importance of mesh discretization in FEM, demonstrating the influence of mesh refinement on the accuracy of results. The use of suitable meshes, with PLANE183 finite elements and refinement in the central hole region, ensured accurate capture of the stress gradient and solution convergence. Comparison of FEM results with literature data validated the numerical model's accuracy, with good agreement observed with the theoretical models of Young and Budynas (2002), Norton (2013), and Howland (1930).

Palavras-chave: stress concentration; parametric optimization; finite element method; stress relief; relief holes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	– Diagrama tensão-deformação convencional e real para material dúctil (aço) (sem escala).	25
Figura 2.2	– Distribuição transversal de tensão ao longo de uma barra.	28
Figura 2.3	– Estado geral de tensão.	29
Figura 2.4	– Estado plano de tensão.....	30
Figura 2.5	– Exemplos de concentradores de tensão em um corpo de prova sob cargas axiais. Um bloco sólido e blocos com um buraco, um quadrado e um entalhe.	34
Figura 2.6	– Concentrações de tensões medidas por fotoelasticidade em uma barra plana com degrau e entalhe solicitada à flexão.	35
Figura 2.7	– Distribuição qualitativa de tensão em placa sob tração.....	37
Figura 2.8	– Elemento fino infinito com furo sob carga de tração.....	38
Figura 2.9	– Distribuição da tensão circunferencial na borda de um furo circular em um elemento fino infinito.	39
Figura 2.10	– Distribuição de σ_θ na seção <i>I-I</i> e σ_r na seção <i>II-II</i>	41
Figura 3.1	– Malha triangular plana.....	44
Figura 3.2	– Elementos finitos comuns.	46
Figura 3.3	– Representação geométrica por diversos gêneros de elementos não-estruturados (triângulos) e elementos estruturados (quadriláteros). ..	47
Figura 3.4	– Geometria aproximada por elementos triangulares.....	48
Figura 3.5	– Resultados do refino de malha.....	49
Figura 3.6	– Corpo tridimensional geral com um elemento finito tridimensional de oito nós.	53
Figura 4.1	– Correspondência entre extremidades de fx e $-fx$	57
Figura 4.2	– Project Schematic.	63
Figura 4.3	– (a) 6 Pontos de planejamento. (b) 20 Pontos de planejamento.	65
Figura 4.4	– Amostragem OSF após redução de domínio.	67
Figura 4.5	– Fluxo de trabalho ASO.	69
Figura 5.1	– Configuração Inicial.....	71
Figura 5.2	– Redução de problema.	73
Figura 5.3	– Linhas de simetria.	73
Figura 5.4	– Elemento PLANE183.	75

Figura 5.6 – (a) Modelo CAD no Design Modeler. (b) Malha convergida no Mechanical.....	77
Figura 5.5 – Fluxo do Projeto.	77
Figura 5.7 – (a) Parâmetros de otimização. (b) Propriedades de otimização.....	78
Figura 5.8 – Um furo de alívio.	81
Figura 5.9 – Dois furos de alívio.....	82
Figura 5.10 – Furo oval de alívio.....	82
Figura 5.11 – Furo elíptico de alívio.....	83
Figura 5.12 – Furo triangular de alívio.....	84
Figura 6.2 – Gradiente de tensão ao longo do comprimento da configuração inicial.	86
Figura 6.1 – Tensão de von Mises em função do comprimento da configuração inicial.	86
Figura 6.3 – Convergência de malha da configuração inicial.	87
Figura 6.4 – Gráfico de comparação entre os resultados.....	90
Figura A.1 – Parâmetros para o caso de um furo circular de alívio.....	104
Figura A.2 – Resultado para o caso de um furo circular de alívio.	104
Figura A.3 – Gráfico da convergência de Kt	105
Figura A.4 – Gráfico da convergência de D	105
Figura A.5 – Gráfico da convergência de S	106
Figura B.1 – Parâmetros para o caso de dois furos circulares de alívio.....	107
Figura B.2 – Resultado para o caso de dois furos circulares de alívio.	107
Figura B.3 – Gráfico da convergência de Kt	108
Figura B.4 – Gráfico da convergência de $D1$	108
Figura B.5 – Gráfico da convergência de $D2$	109
Figura B.6 – Gráfico da convergência de $S1$	109
Figura B.7 – Gráfico da convergência de $S2$	110
Figura C.1 – Parâmetros para o caso de furo oval de alívio.	111
Figura C.2 – Resultado para o caso de furo oval de alívio.....	111
Figura C.3 – Gráfico da convergência de Kt	112
Figura C.4 – Gráfico da convergência de D	112
Figura C.5 – Gráfico da convergência de S	113
Figura C.6 – Gráfico da convergência de L	113

Figura D.1	– Parâmetros para o caso de furo elíptico de alívio.....	114
Figura D.2	– Resultado para o caso de furo elíptico de alívio.	114
Figura D.3	– Gráfico da convergência de Kt	115
Figura D.4	– Gráfico da convergência de A	115
Figura D.5	– Gráfico da convergência de B	116
Figura D.6	– Gráfico da convergência de S	116
Figura E.1	– Parâmetros para o caso de furo triangular de alívio.	117
Figura E.2	– Resultado para o caso de furo triangular de alívio.....	117
Figura E.3	– Gráfico da convergência de Kt	118
Figura E.4	– Gráfico da convergência de $D1$	118
Figura E.5	– Gráfico da convergência de $D2$	119
Figura E.6	– Gráfico da convergência de S	119
Figura E.7	– Gráfico da convergência de H	120
Figura E.8	– Gráfico da convergência de L	120
Anexo A.1	– Fatores de concentração de tensão Ktg e Ktn para a tensão de um elemento fino de largura finita com um furo circular.....	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Configurações geométricas de alívio usadas.	72
Tabela 6.1 – Malha convergida em cada caso de alívio	88
Tabela 6.2 – Levantamento dos fatores de K_t	89
Tabela 6.3 – Comparação dos resultados de K_t^{FEM} com a literatura.	91
Tabela 6.4 – Resultados de otimização.....	93
Tabela A.1 – Dados de otimização para o caso de um furo circular de alívio.....	104
Tabela B.1 – Dados de otimização para o caso de dois furos circulares de alívio. .	107
Tabela C.1 – Dados de otimização para o caso de furo oval de alívio.	111
Tabela D.1 – Dados de otimização para o caso de furo elíptico de alívio.	114
Tabela E.1 – Dados de otimização para o caso de furo triangular de alívio.	117

LISTA DE ABRIVIATURAS E SIGLAS

ASO - Otimização Adaptativa de Objetivo Único
CAD - Desenho Auxiliado por Computador
CFD - Dinâmica dos Fluidos Computacional
DOE - Planejamento de Experimentos
EGT - Estado Geral de Tensão
EPT - Estado Plano de Tensão
FEM - Método dos Elementos Finitos
GPR - Regressão de Processo Gaussiano
HFSS - Simulador de Estrutura de Alta Frequência
LHS - Amostragem por Hipercubo Latino
MEF - Método dos Elementos Finitos
MINLP - Programação Não Linear Inteira Mista
MISQP - Programação Quadrática Sequencial Mista Inteira
MRD - Método de Rigidez Direta
OSF - Planejamento de Preenchimento Espacial Ótimo
PTV - Princípio dos Trabalhos Virtuais
SQP - Programação Quadrática Sequencial

LISTA DE SÍMBOLOS

- A - Semi-eixo maior da elipse (em mm)
- B - Semi-eixo menor da elipse (em mm)
- C - Matriz constitutiva
- d - Diâmetro do furo (em mm)
- D - Diâmetro do furo de alívio (em mm)
- D_1 - Largura do triângulo (em mm)
- D_2 - Base do triângulo (em mm)
- E - Módulo de Young (em GPa)
- F - Força resultante do carregamento (em N)
- $f(x)$ - Função objetivo
- G - Módulo de cisalhamento (em GPa)
- $g(x)$ - Restrições de desigualdade
- H - Altura da placa ou do triângulo (em mm)
- h - Espessura da placa (em mm)
- $h(x)$ - Restrições de igualdade
- K - Matriz de rigidez
- K_t - Fator de concentração de tensão
- K_{tg} - Fator de concentração de tensão (área bruta)
- K_{tn} - Fator de concentração de tensão (área líquida)
- K_{ts} - Fator de concentração de tensão cisalhante
- L - Comprimento da elipse ou do furo oval (em mm)
- l_i - Comprimento final (em mm)
- l_0 - Comprimento inicial (em mm)
- N - Funções de forma
- P - Carga aplicada (em N)
- R - Vetor dos carregamentos nodais equivalentes
- S, S_1, S_2 - Distância entre as bordas dos furos (em mm)
- U - Vetor de deslocamento
- \hat{U} - Vetor dos deslocamentos nodais
- u - Deslocamento (em mm)
- U_s - Densidade de energia de deformação (em J/m^3)

V - Volume do elemento (em mm^3)

W – Trabalho (em J)

x - Vetor n-dimensional das variáveis de projeto

$y(x)$ - Função de resposta desconhecida

$Z(x)$ - Função aleatória com média zero

ε - Deformação

ε_{ij} - Tensor deformação específica

ε_{long} - Deformação longitudinal

ε_{tr} - Deformação transversal

γ - Deformação de cisalhamento

γ_{ij} - Tensor deformação angular

δ_{ij} - Tensor delta de Kronecker

λ - Primeiro parâmetro de Lamé

μ - Segundo parâmetro de Lamé

ν - Coeficiente de Poisson

σ - Tensão (em Pa, MPa, etc.)

σ_{ij} - Tensor tensão cisalhante (em Pa)

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ - Componentes de tensão normal (em Pa, MPa, etc.)

σ_M - Tensão equivalente de von Mises (em Pa, MPa, etc.)

σ_r - Tensão radial (em Pa, MPa, etc.)

σ_θ - Tensão circunferencial (em Pa, MPa, etc.)

τ - Tensão cisalhante (em Pa, MPa, etc.)

τ_{ij} - Tensor tensão cisalhante (em Pa)

$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ - Componentes de tensão cisalhante (em Pa, MPa, etc.)

$\tau_{r\theta}$ - Tensão cisalhante em coordenada polar (em Pa, MPa, etc.)

ΔA - Variação da área da seção transversal do elemento (em m^2 , mm^2 , etc.)

Δl - Variação do comprimento (em mm)

ΔF - Variação da força resultante do carregamento (em N)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Contextualização do tema	17
1.2	Objetivos	19
1.2.1	<i>Objetivo geral</i>	19
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	19
1.3	Justificativa.....	20
1.4	Conteúdo do trabalho	21
2	RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS.....	22
2.1	Tensão e deformação	23
2.2	Princípio de Saint-Venant	27
2.3	Estado Geral de Tensão (EGT)	28
2.4	Estado Plano de Tensão (EPT)	29
2.5	Critério de von Mises	31
2.6	Concentração de tensão	32
2.6.1	<i>Fator de concentração de tensão</i>	35
2.7	Chapa fina com furo circular	36
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	43
3.1	Princípio do MEF	43
3.2	Tipos de elementos	45
3.3	Discretização da malha	47
3.3.1	<i>Singularidade de tensão</i>	49
3.3.2	<i>Element Quality</i>	50
3.4	Formulação matemática.....	51
3.4.1	<i>Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)</i>	51
3.4.2	<i>Método de Rigidez Direta (MRD)</i>	52
4	OTIMIZAÇÃO	57
4.1	Definição do problema de otimização	57
4.2	Definição matemática.....	59
4.3	Tipos de otimização estrutural	60
4.4	Software de simulação estrutural	61
4.4.1	<i>ANSYS Workbench</i>	62
4.5	Desing Of Experiments (DOE)	63

4.6	Optimal Space-Filling design (OSF).....	64
4.7	Gaussian Process Regression (GPR).....	65
4.8	Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming (MISQP)	66
4.9	Adaptive single-objective (ASO)	67
5	METODOLOGIA	70
5.1	Tipo de Otimização Estrutural	70
5.2	Configuração inicial	71
5.3	Configurações de alívio	71
5.4	Redução do problema	72
5.5	Condições de contorno.....	73
5.6	Função objetivo	74
5.7	Discretização da malha	74
5.8	Verificação numérica.....	75
5.9	Metodologia de otimização	76
5.10	Variáveis de projeto.....	80
5.10.1	<i>Um furo de alívio</i>	81
5.10.2	<i>Dois furos de alívio</i>	81
5.10.3	<i>Furo oval de alívio</i>	82
5.10.4	<i>Furo elíptico de alívio</i>	83
5.10.5	<i>Furo triangular de alívio</i>	83
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	85
6.1	Comprimento da placa sem alívio.....	85
6.2	Discretização da malha	86
6.3	Verificação numérica.....	89
6.4	Redução da concentração de tensão	91
7	CONCLUSÃO	94
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
	REFERÊNCIAS	99
	APÊNDICE A – UM FURO CIRCULAR DE ALÍVIO	104
	APÊNDICE B – DOIS FUROS CIRCULARES DE ALÍVIO	107
	APÊNDICE C – FURO OVAL DE ALÍVIO	111
	APÊNDICE D – FURO ELÍPTICO DE ALÍVIO	114
	APÊNDICE E – FURO TRIANGULAR DE ALÍVIO	117
	ANEXO A – FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO	121

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização do tema

A pesquisa em campos de engenharia é inegavelmente motivada por um imperativo essencial: a busca incessante por soluções inteligentes, nas quais a gestão criteriosa de recursos e investimentos é prioritária. Enquanto a engenharia tem suas raízes profundamente entrelaçadas com a construção e criação, as demandas da sociedade moderna imprimem um novo contexto a essa disciplina ancestral. Hoje, mais do que nunca, a eficiência, a inovação e a economia de recursos são os pilares nos quais a engenharia se fundamenta, moldando o rumo de suas investigações e inspirando a busca por soluções cada vez mais sofisticadas e pragmáticas.

No âmbito do desenvolvimento de projetos de engenharia, é uma constante que elementos mecânicos apresentem alterações significativas em suas seções transversais. Essas mudanças, muitas vezes, são resultado da necessidade de acoplamento e encaixe entre peças, incorporando furos, rasgos, ressaltos e outros detalhes de projeto que são cruciais para o funcionamento das máquinas e sistemas. Entretanto, essas descontinuidades na geometria das peças têm uma consequência direta e impactante na distribuição de tensão nas proximidades desses elementos, levando à formação de áreas de concentração de tensão.

Inúmeros autores apontam essas descontinuidades como regiões críticas da peça, em virtude do aparecimento de valores de tensões superiores ao valor nominal calculado através da teoria da elasticidade. No caso de um carregamento de tração uniaxial em uma placa ligeiramente grande com um furo central, este valor é da ordem de 3 vezes superior. Com isso, têm-se pontos de grande possibilidade de nucleação de trincas e, conseqüentemente, de falha.

O fenômeno das concentrações de tensão, muitas vezes negligenciado no passado, tornou-se uma preocupação central na engenharia moderna. O avanço tecnológico contínuo na fabricação e nas técnicas de projeto de componentes mecânicos permitiu uma compreensão mais profunda desses efeitos, destacando a importância de abordar essas descontinuidades com precisão e rigor. Elementos como furos para parafusos, escalonamento de eixos para acomodar rolamentos, rasgos para anéis elásticos, entalhes, entre outros, continuam a ser elementos

frequentes em projetos de engenharia, e a compreensão de seu impacto na distribuição de tensão é fundamental.

As equações utilizadas no projeto de componentes mecânicos geralmente são formuladas sob a suposição de que a área da seção transversal permanece constante ao longo da peça. No entanto, a presença de furos, rasgos, entalhes e outros elementos perturba essa constância, modificando drasticamente a distribuição de tensão. Consequentemente, a tensão tende a se concentrar em áreas específicas, desafiando a aplicação das equações analíticas tradicionais.

O campo de tensões resultante dessas perturbações pode ser considerado como uma interação entre perturbações estáticas, devidas à aplicação de cargas, e perturbações geométricas, devidas às mudanças abruptas na geometria das peças. A extensão dessas regiões de concentração de tensão pode ser aproximadamente definida pelo Princípio de Saint-Venant, que estabelece que as perturbações de tensão são suavizadas a uma certa distância das descontinuidades.

As descontinuidades ou variações na seção transversal ao longo de um componente mecânico apresentam picos de tensões localizados. Esse fenômeno é definido como concentração de tensão que é caracterizado e quantificado através do fator de concentração de tensão. A presença de concentração de tensão, em geral, é inevitável. Entretanto, existem várias formas de reduzir o valor da concentração de tensão, dentre as quais uma será tratado nesse presente trabalho.

Diante desse cenário, o Método dos Elementos Finitos emergiu como uma ferramenta fundamental para a análise e solução de sistemas estruturais na engenharia. Esse método, essencialmente, substitui um contínuo infinito por um número finito de subdomínios, onde a solução é aproximada internamente por funções simples. Esses elementos finitos são conectados entre si por meio de faces e arestas, definidas geralmente por funções polinomiais e pontos conhecidos como nós. O Método dos Elementos Finitos permitiu uma abordagem computacional eficaz para a análise de estruturas complexas e desafiadoras, tornando-se uma ferramenta essencial no pré-processamento de problemas de otimização estrutural.

Dessa forma, diante das demandas crescentes da engenharia moderna por soluções mais inteligentes, econômicas e eficientes, a compreensão e mitigação das concentrações de tensão em elementos mecânicos emergem como um desafio crucial. A integração do MEF e de ferramentas computacionais como o software

ANSYS Workbench, utilizado nesse trabalho, representa um avanço significativo nessa direção, permitindo uma análise precisa e sofisticada desses fenômenos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste estudo é investigar e desenvolver uma metodologia de otimização paramétrica para o alívio de tensões em uma placa plana com furo central submetida à tração através de um modelo computacional utilizando técnicas de simulação para analisar a distribuição de tensões na estrutura para diferentes configurações de parâmetros pré-estabelecidos e encontrar uma solução ótima, visando aumentar a durabilidade e a segurança.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos buscarão:

- Desenvolver um modelo computacional da placa plana com furo central, utilizando métodos de elementos finitos para simular o comportamento mecânico da estrutura;
- Identificar os parâmetros de projeto relevantes que influenciam a distribuição de tensões no modelo, incluindo a geometria da placa, o tamanho e a localização do furo;
- Validar o modelo computacional desenvolvido por meio de comparações com resultados analíticos ou experimentais disponíveis na literatura;
- Utilizar algoritmos de otimização paramétrica para encontrar a configuração de parâmetros que minimiza as tensões máximas no modelo sob condições de tração específicas;
- Analisar os resultados da otimização paramétrica para avaliar como as diferentes configurações de parâmetros afetam a distribuição de tensões na placa plana e identificar as principais características das soluções ótimas encontradas;

- Elaborar conclusões baseadas nos resultados obtidos e discutir as contribuições da pesquisa para o entendimento do alívio de tensão em concentradores de tensão e para o desenvolvimento de estratégias de otimização aplicadas à engenharia mecânica.

1.3 Justificativa

A pesquisa proposta tem sua importância fundamentada em diversas dimensões que abrangem tanto o contexto acadêmico quanto a sociedade como um todo. No cerne desta investigação encontra-se a análise das concentrações de tensão em elementos mecânicos, um tema de relevância indiscutível no âmbito da engenharia contemporânea. Neste sentido, é imperativo compreender a natureza e as implicações dessas concentrações de tensão, uma vez que elas podem resultar em falhas estruturais prematuras, acidentes graves e custos substanciais para a indústria. Portanto, o presente estudo se insere em um contexto em que a otimização de recursos e a redução de desperdícios são imperativos cruciais.

A relevância acadêmica desta pesquisa é multifacetada e impacta diversas áreas do conhecimento. Em primeiro lugar, ela contribui para o aprofundamento do entendimento no campo da análise estrutural. Especificamente, investiga o comportamento de elementos mecânicos sob concentrações de tensão, aspecto vital para uma compreensão precisa e preditiva do desempenho de componentes em uma ampla gama de aplicações.

Ademais, ao empregar o Método dos Elementos Finitos no estudo das concentrações de tensão, a pesquisa demonstra a eficácia e confiabilidade dessa abordagem na resolução de problemas complexos. Isso é de particular interesse para a comunidade acadêmica, pois reforça a utilidade e a validade dessa ferramenta analítica, amplamente empregada em pesquisas e práticas de engenharia.

Entretanto, a importância desta pesquisa transcende os limites acadêmicos e se estende à sociedade como um todo. A compreensão aprofundada das concentrações de tensão contribui significativamente para a segurança de estruturas e máquinas em vários setores, como a indústria automobilística e a construção civil. Isso é de vital importância para prevenir acidentes e garantir a segurança pública, o que é uma preocupação central em qualquer sociedade.

Além disso, a pesquisa nessa área de conhecimento pode resultar em designs mais eficientes, nos quais menos material é necessário para alcançar os mesmos níveis de desempenho, permitindo a criação de projetos menos robustos e pesados e de maior segurança, garantindo maior confiabilidade estática e dinâmica. Isso tem implicações diretas na redução de custos de produção e no uso sustentável de recursos naturais, contribuindo para a eficiência econômica e a sustentabilidade ambiental.

Por fim, a pesquisa pode estimular a inovação e aumentar a competitividade das empresas, já que aquelas que adotam abordagens de projeto mais avançadas e seguras têm uma vantagem considerável.

1.4 Conteúdo do trabalho

O trabalho está estruturado em oito Capítulos, sendo que o presente capítulo serve como introdução ao projeto. Em seguida, os Capítulos 2, 3 e 4 compõem a revisão bibliográfica: o Capítulo 2 aborda os fundamentos da resistência dos materiais, fornecendo a base teórica necessária para a compreensão desta tese; o Capítulo 3 introduz o Método dos Elementos Finitos, detalhando suas aplicações e relevância para a análise de estruturas mecânicas; e o Capítulo 4 explora o método de otimização aplicado, explicando os princípios e algoritmos utilizados para encontrar as configurações ótimas de furos de alívio.

O Capítulo 5 apresenta os procedimentos metodológicos utilizados para a solução do problema numérico corrente, descrevendo o processo de modelagem, simulação e as condições de contorno aplicadas. O Capítulo 6 lista e discute os resultados obtidos a partir das simulações e otimizações realizadas, com análise baseada na comparação com dados teóricos e experimentais disponíveis na literatura. O Capítulo 7 contém a conclusão do estudo, sintetizando os principais achados e implicações da pesquisa, resumindo os pontos-chave e destacando as contribuições do trabalho para o campo da engenharia mecânica.

O Capítulo 8 apresenta as considerações finais, discutindo as limitações do estudo e sugerindo direções para futuras pesquisas. Os apêndices fornecem dados complementares ao projeto, incluindo detalhes adicionais sobre a modelagem, parâmetros utilizados e resultados brutos das simulações, essenciais para a replicabilidade e validação dos resultados apresentados.

2 RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

A resistência dos materiais é uma disciplina essencial na engenharia dedicada ao estudo do comportamento de materiais submetidos a forças externas e deformações. Seu propósito principal é garantir que estruturas e componentes projetados sejam seguros e capazes de suportar as cargas a que serão submetidos durante sua vida útil. Além disso, a resistência dos materiais busca otimizar o design, minimizando o uso de materiais e reduzindo custos de produção, o que é especialmente valioso em aplicações industriais e de construção civil (BOTELHO,2017).

Para atingir esses objetivos, a disciplina utiliza princípios fundamentais para entender como os materiais respondem a diferentes tipos de tensão, que representam as forças internas que agem sobre um material, e deformação, que denota mudanças em sua forma ou tamanho. A relação entre tensão e deformação é fundamental na análise de materiais e é usada para calcular e analisar como os materiais se comportam sob diferentes condições de carga (GOMES, 2004).

Além disso, a resistência dos materiais desempenha um papel crucial na prevenção de falhas prematuras em estruturas e componentes, o que é vital para a segurança e eficiência de projetos em diversas indústrias. Os engenheiros aplicam os princípios da resistência dos materiais ao projetar uma ampla gama de estruturas, desde pontes e edifícios até aviões e carros, garantindo que esses projetos atendam aos padrões de segurança e desempenho exigidos (ASKELAN; WRIGHT, 2023).

Os estudos nessa área consideram uma variedade de materiais, incluindo metais, polímeros, cerâmicas e compósitos, levando em conta propriedades como elasticidade, plasticidade, rigidez, resistência à tração, compressão e cisalhamento. Essa compreensão aprofundada dos materiais ajuda no desenvolvimento de materiais mais resistentes e duráveis, impulsionando a tecnologia e a inovação em várias indústrias.

A área da resistência dos materiais concentra o seu estudo no equilíbrio dos mesmos, considerando os efeitos internos provocados pelas forças externas existentes. O objetivo dessa área de conhecimento é o dimensionamento e verificação da segurança do corpo e, para isso, deve-se levar em consideração as deformações e forças de atração moleculares, também chamadas de tensões.

Assim, o seguinte capítulo aborda alguns fundamentos da resistência dos materiais, entre os quais serão usados para determinação de equações fundamentais de concentração de tensão com aprofundamento especificamente em elementos com furo sob estado plano de tensão.

2.1 Tensão e deformação

A resistência de um material está relacionado à sua habilidade de suportar esforços externos, impedindo rupturas ou deformações significativas. Conforme a lei da ação e reação, quando uma força externa age sobre um corpo sólido, surge uma força interna de igual magnitude e sentido contrário. Esta força externa é chamada de carga ou carregamento. Na prática, a tensão representa a resistência interna de um material quando submetido a uma força externa, sendo diretamente proporcional à intensidade da força aplicada e inversamente proporcional à área da seção transversal do material (MEYERS; CHAWLA, 1982).

O conceito de tensão se origina do conceito elementar de pressão, como, por exemplo, a hidrostática que consiste numa força normal por unidade de área. Por tensão, entende-se uma extensão dessa ideia para os casos em que a força por unidade de área pode não ser, necessariamente, normal. Segundo Sadd (2005), para um elemento sujeito a um carregamento qualquer, a tensão é definida como a razão entre a força resultante do carregamento em uma seção qualquer do sólido e a área dessa seção. Matematicamente, a definição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Onde:

- σ é a tensão (em Pa, MPa, etc.);
- ΔF é a variação da força resultante do carregamento (em N);
- ΔA é a variação da área da seção transversal do elemento (em m², mm², etc.).

A tensão normal (σ) é calculada dividindo-se a força aplicada pela área transversal à direção da força. Por outro lado, a tensão tangencial (τ), ou cisalhante,

é calculada dividindo-se a força aplicada pelo produto da área de referência e a distância entre as seções de interesse (KOMATSU; CHRITOFORO, 2022). Ou seja, a tensão normal atua perpendicularmente à superfície analisada e a tensão cisalhante atua paralelamente à mesma superfície.

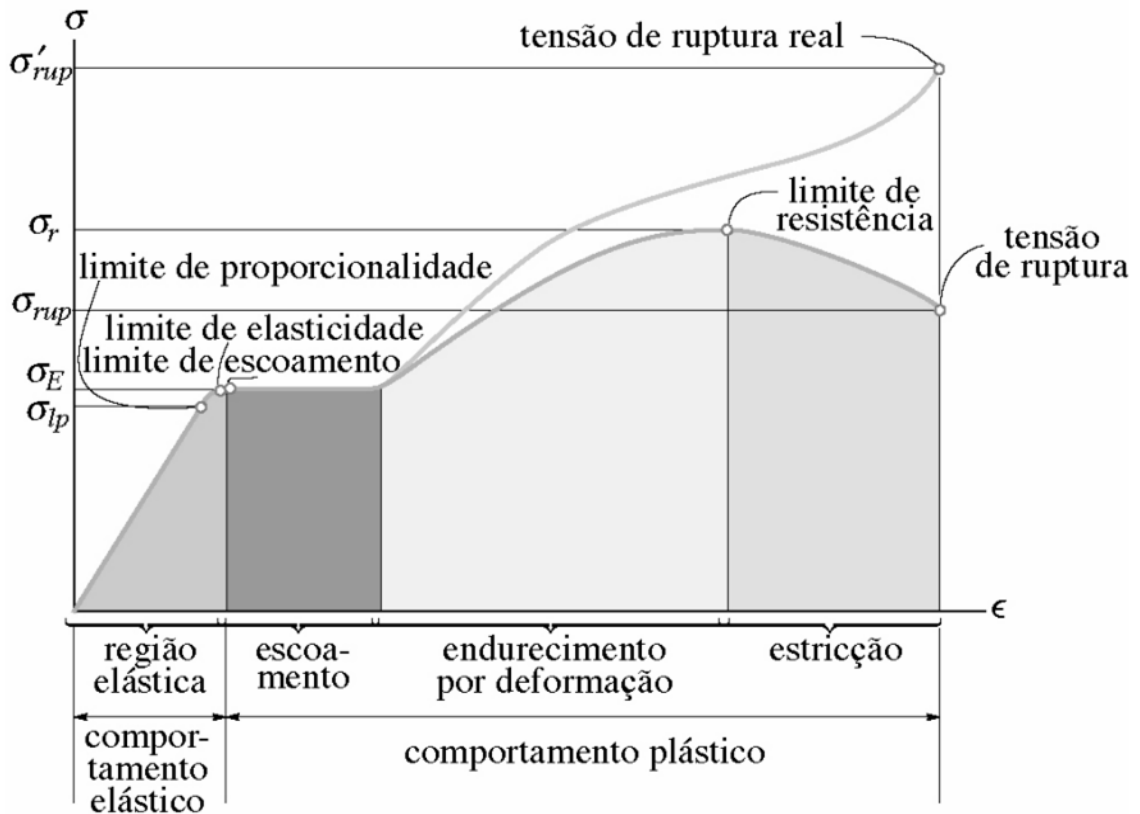
Já a deformação mecânica ε (equação 2.2) é uma medida que descreve a mudança na forma ou tamanho de um material. Pode ser representada como deformação linear, que é a mudança no comprimento (Δl) dividida pelo comprimento original (l_0), ou deformação angular, que é a mudança no ângulo entre duas linhas originalmente perpendiculares divididas pelo ângulo original. Ambas são grandezas adimensionais (VERLIDEN, 2018).

$$\varepsilon = \frac{l_i - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2)$$

Tanto a tensão quanto a deformação são grandezas tensoriais, o que significa que possuem direção e magnitude. Isso é essencial quando se lida com materiais anisotrópicos, que têm propriedades diferentes em direções diferentes. Engenheiros e cientistas usam gráficos de tensão-deformação (Figura 2.1) para caracterizar o comportamento dos materiais. Esses gráficos revelam como a tensão se relaciona com a deformação e são úteis para determinar propriedades como o limite de elasticidade, que é o ponto onde um material deixa de se comportar elasticamente (KOMATSU; CHRITOFORO, 2022). Os pontos mais importantes do diagrama tensão-deformação são: limite de proporcionalidade, limite de elasticidade, limite de escoamento, limite de resistência e tensão de ruptura.

O módulo de elasticidade E , conhecido como módulo de Young, é uma propriedade chave dos materiais elásticos e descreve sua resposta à tensão. Ele é definido como a razão entre a tensão e a deformação linear dentro da região elástica. O limite de elasticidade, por sua vez, é o ponto onde um material deixa de se comportar elasticamente, passando a sofrer deformações permanentes quando a tensão é removida. Esse limite é crítico na determinação da capacidade de carga de uma estrutura (BOTELHO, 2017).

Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação convencional e real para material dúctil (aço) (sem escala).



Fonte: Hibbeler (2022).

As estruturas atuais são projetadas para sofrerem apenas deformações dentro do limite elástico, conforme indicado no diagrama tensão-deformação da Figura 2.1 (BEER, 2011). Na região linear elástica, a tensão (σ_{ij}) é diretamente proporcional à deformação específica (ϵ_{ij}). Essa relação foi proposta por Hooke no século XVII e é conhecida como a 1ª Lei de Hooke sendo expressa matematicamente por

$$\sigma_{ij} = E \cdot \epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

A tensão tangencial, também conhecida como tensão de cisalhamento, ocorre quando há um esforço de cisalhamento em um material elástico. Da mesma forma, a 1ª Lei de Hooke estabelece que a tensão tangencial (τ_{ij}) é diretamente proporcional à deformação angular (γ_{ij}), representada como

$$\tau_{ij} = G \cdot \gamma_{ij} \quad (2.4)$$

Onde G é o módulo de cisalhamento (ou módulo de rigidez) que expressa a resistência do material à deformação angular (ARANHA *et al.*, 2016).

A lei de Hooke é aplicável apenas dentro da faixa elástica de um material. Quando essa faixa é ultrapassada, o material pode começar a apresentar deformações plásticas, nas quais a relação entre tensão e deformação não é mais linear. Portanto, essa lei é válida somente quando as deformações são pequenas o suficiente para que o material retorne ao seu estado original quando a carga é removida (MASCIA, 2006).

Em materiais elásticos lineares e isotrópicos, a relação entre o campo de tensões e o campo de deformações é estabelecida pela equação constitutiva. Essa equação pode ser escrita em notação indicial como (SÁNCHEZ, 2000):

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \quad (2.5)$$

Ou

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \quad (2.6)$$

Onde,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

Sendo,

- ν o coeficiente de Poisson;
- G o módulo de cisalhamento;
- δ_{ij} o tensor delta de Kronecker.

Materiais submetidos a cargas na região linear do diagrama tensão-deformação experimentam duas deformações: longitudinal e transversal. A deformação longitudinal é a mudança de comprimento na direção da carga aplicada, enquanto a deformação transversal é a mudança de diâmetro perpendicular à direção da carga. Na região linear, a relação entre as deformações transversal (ε_{tr}) e longitudinal (ε_{long})

é constante e conhecida como coeficiente de Poisson ν . Este coeficiente é adimensional e pode ser definido pela seguinte equação:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{long}} \quad (2.8)$$

2.2 Princípio de Saint-Venant

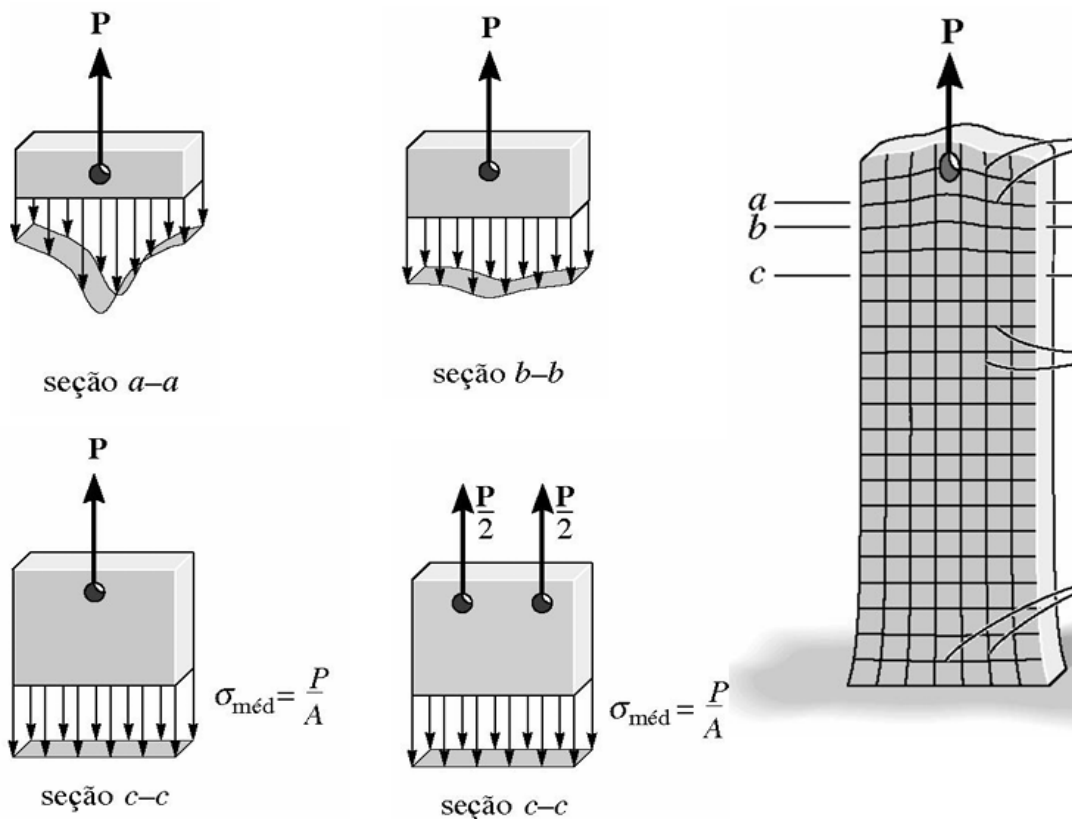
Segundo Beer *et al* (2011), a suposição de que as tensões normais são uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal perpendicular ao eixo não se verifica nas proximidades do ponto de aplicação da força ou de descontinuidades presentes na peça. Assim, a determinação da tensão real em qualquer seção é um problema estaticamente indeterminado.

O princípio de Saint-Venant permite analisar diferentes formas de carregamento (aplicação de cargas) de uma mesma maneira, desde que, em uma situação de cargas concentradas, se desconsidere a distribuição das tensões nas regiões próximas ao ponto de aplicação. Isto por que nessas condições o perfil de tensão nas proximidades do ponto de aplicação da força é de difícil análise, sendo necessários métodos matemáticos avançados para a determinação dessas tensões (BEER *et al* 2011).

Esse princípio supõe que o efeito de cargas aplicadas sobre um objeto é puramente local, e que a tensão decai rapidamente com a distância tendendo a se normalizar (HIBBELER, 2022). Assim, quanto mais próximas do ponto de aplicação da carga estão as tensões a serem analisadas, menos uniforme tende a ser sua distribuição em sua seção transversal.

Por exemplo, na Figura 2.2, se uma força P é aplicada ao longo do eixo do centroide da barra, a distribuição de tensão na seção $c - c$, que é suficientemente afastada dos efeitos localizados dessas cargas, será uniforme e, portanto, igual à P/A . Como regra geral, que também se aplica a muitos outros casos de carregamento e geometria de elementos estruturais, essa distância é, no mínimo, igual à maior dimensão da seção transversal carregada (HIBBELER, 2022).

Figura 2.2 – Distribuição transversal de tensão ao longo de uma barra.

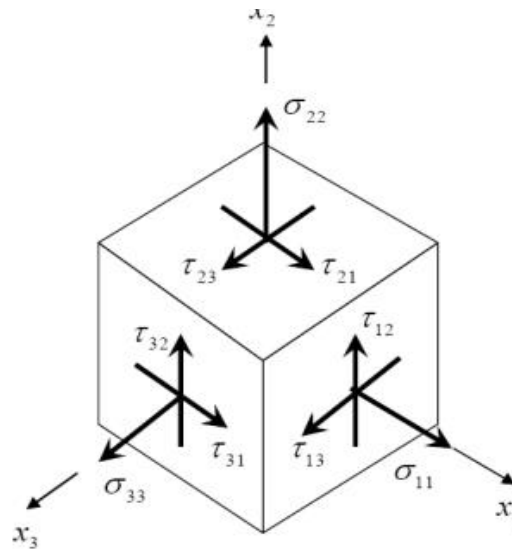


Fonte: Hibbeler (2022).

2.3 Estado Geral de Tensão (EGT)

Adotando-se um cubo de tamanho infinitesimal dentro do sólido em estudo, diz-se que um estado geral de tensão em um ponto é caracterizado por nove componentes independentes de tensões normais e de cisalhamento, que atuam nas faces de um elemento do material, conforme mostra a Figura 2.3, onde σ_{ij} representa a densidade de forças por unidade de área sobre uma face cujo vetor normal é o eixo cartesiano x_i e atuante na direção do eixo x_j . Assim, ocorrem 3 componentes de tensões normais (σ_{11} , σ_{22} e σ_{33}) e 6 componentes de tensões cisalhantes (τ_{12} , τ_{13} , τ_{21} , τ_{23} , τ_{31} e τ_{32}). Por simplicidade, a figura mostra apenas três faces do cubo porque, para manter o equilíbrio de forças, as outras faces apresentam tensões iguais, mas de direção contrária.

Figura 2.3 – Estado geral de tensão.



Fonte: Young e Budynas (2002).

Eliminando as componentes iguais, a forma expandida da Equação (2.5) para um material isotrópico pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde γ é a deformação de cisalhamento, λ e μ são os módulos de Lamé e cisalhamento, respectivamente, definidos como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.10)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.11)$$

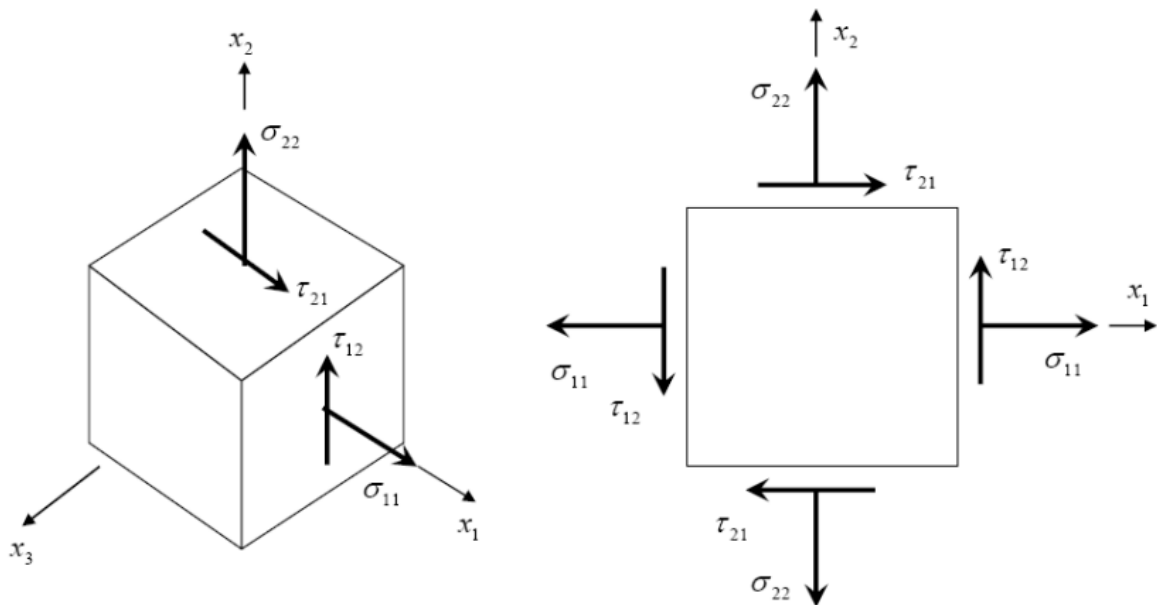
2.4 Estado Plano de Tensão (EPT)

Geralmente na engenharia são feitas aproximações, a fim de que a tensão produzida em um elemento estrutural ou mecânico possa ser analisada em um plano simples, neste caso diz-se que o material está sujeito a um estado plano de tensões.

Por não haver carga na superfície do corpo, os componentes de tensões normais e de cisalhamento serão nulos na face de um elemento localizado nesta superfície, conseqüentemente, os componentes de tensão correspondentes na face oposta também serão nulos e, portanto, o material estará sujeito ao estado plano de tensões. (HIBBELER, 2022).

Timoshenko (1976) apresenta uma simplificação importante para um estado geral de tensões. Segundo o autor, quando uma placa sofre um carregamento com esforços aplicados paralelamente ao plano da placa, as componentes σ_{33} , τ_{13} e τ_{23} , podem ser desprezadas, definindo assim um estado plano de tensões, conforme Figura 2.4. Dessa forma, o estado de tensão fica especificado por σ_{11} , σ_{22} e τ_{12} que são componentes apenas em função da posição na placa e não da espessura.

Figura 2.4 – Estado plano de tensão.



Fonte: Young e Budynas (2002).

Admitindo-se a hipótese de que as estruturas possam ser consideradas como placas finas negligenciando a espessura, a equação 2.9 pode ser simplificada para casos de estado plano de tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

A componente de deformação ao longo da direção da espessura, ε_{33} , pode ser também encontrada da relação de Poisson:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.13)$$

Em um estado plano de deformações, um corpo alongado no eixo z é submetido a um carregamento uniforme ao longo do mesmo, sem variações de carga ou geometria na direção longitudinal. Tal situação assemelha-se a um corpo comprido, como uma placa ou uma barra, sob condições específicas de carregamento e geometria. Como resultado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Quando um corpo elástico é submetido a um carregamento, ele experimenta deslocamentos que são linearmente relacionados à força aplicada. Como resultado do carregamento, o corpo armazena uma quantidade de trabalho na forma de energia potencial de deformação. A densidade de energia de deformação (U_s) pode ser definida como a energia de deformação armazenada por unidade de volume do material:

$$U_s = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon \quad (2.15)$$

2.5 Critério de von Mises

A partir da determinação das tensões em um ponto específico do componente, é possível realizar a predição da falha do material através da aplicação de critérios de falha. Para materiais dúcteis, isotrópicos e sob carregamento estático, o critério mais utilizado é o da densidade de energia de distorção, também conhecido como critério de von Mises-Hencky.

Segundo Budynas e Nisbett (2006), o critério de von Mises enuncia que o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade

de volume do material for igual ou superior à energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele atinge o escoamento em um ensaio de tração. Assim, o material inicia o processo de plastificação quando a tensão equivalente de von Mises, representada pela equação 2.16, supera o valor da tensão de escoamento do material.

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}{2}} \quad (2.16)$$

No estado plano de tensões, uma das tensões principais é nula ($\sigma_{33} = 0$), e as tensões de cisalhamento τ_{23} e τ_{31} também são nulas. Isso ocorre, por exemplo, em placas finas submetidas a carregamentos no plano. A equação do critério de von Mises em função das tensões cartesianas, nesse caso, se simplifica para:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}^2} \quad (2.17)$$

2.6 Concentração de tensão

Segundo Collins, Bussel e Stapleton (2013), a distribuição de tensão elástica em uma seção de um membro pode ser uniforme, como em uma barra sobre tração linear, por exemplo de uma viga em flexão, ou até mesmo rápida e curvilínea, como em um caso de uma viga curva. Diz-se que existe tensão nominal se o membro estiver livre de concentradores de tensão. Porém essa definição nem sempre é seguida.

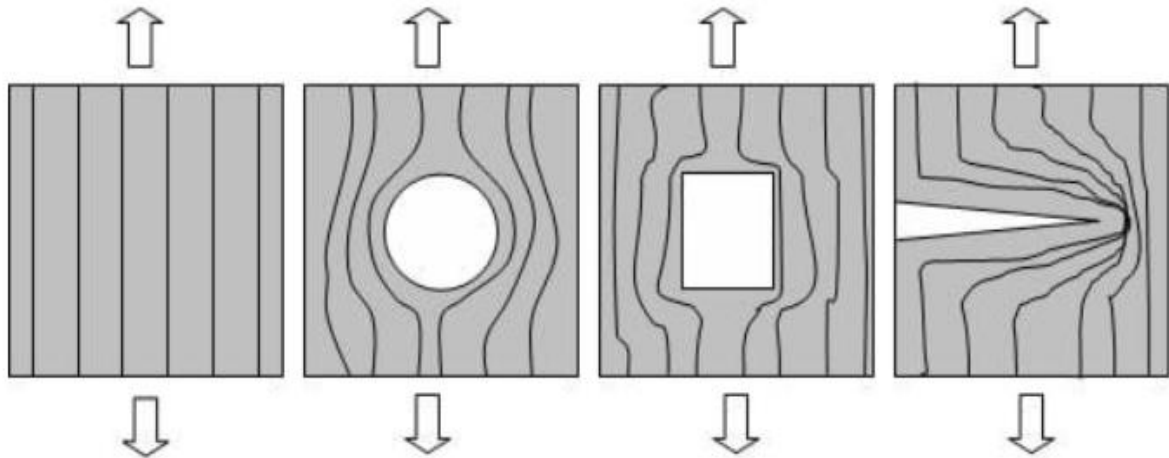
Geralmente, as equações utilizadas no projeto de componentes mecânicos são formuladas sob a hipótese de que o mesmo possui a área de seção transversal constante. Porém a maioria dos elementos de máquinas têm seções transversais não uniformes. Por exemplo, eixos são geralmente fabricados com rasgos ou furos para fixação de outros elementos ou possuem diâmetros diferentes para acomodar rolamentos, engrenagens, polias, etc. (Norton, 2013). Parafusos têm roscas e cabeças maiores que suas hastes. Qualquer uma dessas mudanças na geometria da seção transversal causará concentrações de tensão (BUDYNAS; NISBETT, 2006). Os efeitos da concentração de tensão apontados são (BOTELHO, 2017):

- Tensões Elevadas: a concentração de tensão resulta em uma região onde as tensões são muito mais elevadas do que o valor médio. Isso pode levar a deformações plásticas, fratura do material ou falha estrutural, dependendo da magnitude das tensões e das características do material;
- Fadiga: em aplicações sujeitas a cargas cíclicas, como peças em movimento, a concentração de tensão pode acelerar o processo de fadiga. As variações repetidas das tensões nas áreas de concentração podem causar a formação e propagação de trincas, resultando em falha por fadiga.

Uma forma de explicar a ocorrência do problema da concentração de tensão é por meio do conceito de linhas de força, apresentado por Young e Budynas (2002). Ele pode ser utilizado para a determinação qualitativa de possíveis pontos de tensão. Para um componente sujeito a uma carga e que está em equilíbrio, pode-se afirmar que todas as tensões que são aplicadas em uma região do componente passam por outras regiões, sendo o componente o caminho pelo qual as linhas de força transitam. À medida que as tensões são transferidas pela estrutura, elas se acumulam nas áreas onde ocorrem as descontinuidades, levando a concentrações de tensão. A Figura 2.5 demonstra três exemplos de entalhes em um corpo de prova submetidos à tração. Observa-se uma perturbação gerada no fluxo levando as linhas de tensão a ficarem saturadas nas proximidades das descontinuidades geométricas.

Diversos métodos experimentais permitem a determinação da orientação da distribuição de tensões. Entre os métodos, destacam-se a eletroresistividade, transdutores de força e deslocamento, holografia, interferometria e, principalmente, a fotoelasticidade onde possibilita a análise imediata da intensidade das tensões por meio de efeitos óticos, em estados planos ou tridimensionais, revelando suas respectivas distribuições (SCHIAVON, 2010). Esse último utiliza um modelo transparente de faces planas paralelas entre si que reproduz o sólido em tamanho real ou em escala e faz uso de um banco fotoelástico que consta de um instrumento para a produção e detecção de luz polarizada chamado polariscópio e um equipamento aplicador de carga para proporcionar as tensões ao modelo.

Figura 2.5 – Exemplos de concentradores de tensão em um corpo de prova sob cargas axiais. Um bloco sólido e blocos com um buraco, um quadrado e um entalhe.

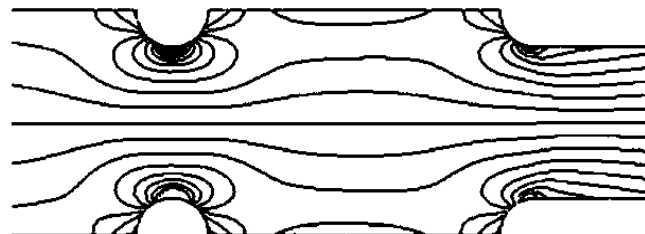
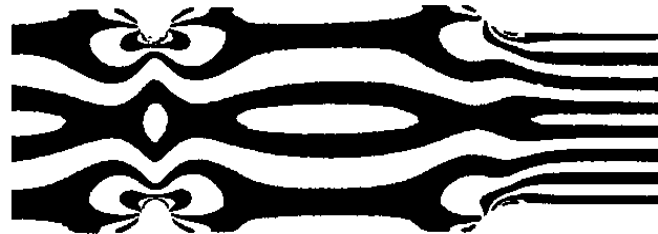
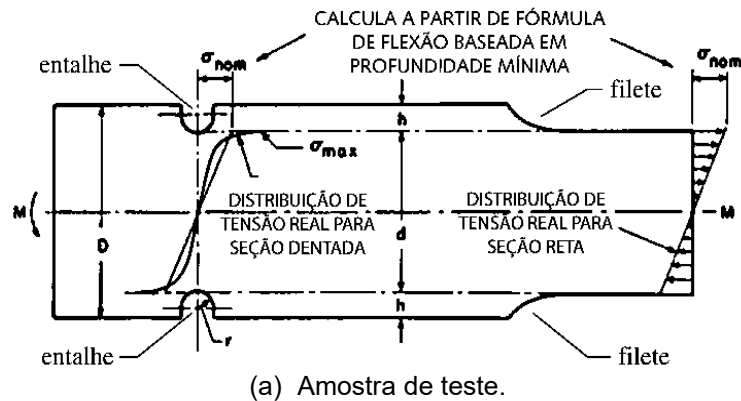


Fonte: Young e Budynas (2002).

A Figura 2.6a demonstra a geometria de uma barra plana sujeita a um momento fletor, com entalhes e chanfros em suas extremidades. A concentração de tensão causada por essas características geométricas é evidenciada na Figura 2.6b, através de técnicas de fotoelasticidade. A Figura 2.6c apresenta um modelo de elemento finito da mesma peça, com as linhas representando isóbaras (linhas de mesmo nível de tensão). A comparação com a Figura 2.6b revela que, na região sem entalhes, as linhas de franja e as isóbaras apresentam um padrão semelhante, indicando uma distribuição de tensão linear. Nas regiões com chanfros e entalhes, onde há mudanças bruscas na geometria, as linhas de franja e as isóbaras apresentam uma distorção e concentração de tensão. Isso confirma que as mudanças na geometria causam um aumento na magnitude da tensão. As Figuras 2.6b e 2.6c fornecem evidências experimentais (fotoelasticidade) e computacionais (elemento finito) da concentração de tensão em qualquer mudança na geometria da barra plana (NORTON, 2013).

A análise da concentração de tensão é essencial para o projeto seguro de estruturas e componentes. Isso envolve a avaliação das tensões nas áreas críticas usando métodos teóricos, numéricos (como o Método dos Elementos Finitos) e experimentais (VERLIDEN, 2018).

Figura 2.6 – Concentrações de tensões medidas por fotoelasticidade em uma barra plana com degrau e entalhe solicitada à flexão.



Fonte: Adaptado de Norton (2013).

2.6.1 Fator de concentração de tensão

Segundo Pilkey (2008), o fator de concentração de tensão K_t pode ser definido como a razão entre a tensão de pico no corpo (ou tensão na região perturbada) e alguma outra tensão (ou quantidade similar à tensão) tomada como referência, de acordo com as equações 2.18 e 2.19, onde as tensões σ_{max} e τ_{max} representam as tensões máximas esperadas no elemento sob cargas reais, e as tensões nominais σ_{nom} e τ_{nom} são as tensões normais e de cisalhamento de referência. No caso da teoria da elasticidade, a distribuição de tensão bidimensional de um corpo elástico

homogêneo sob cargas conhecidas é uma função apenas da geometria do corpo e não depende das propriedades do material. Na faixa plástica, deve-se considerar fatores de concentração de tensão e deformação separados que dependem da forma da curva tensão-deformação e do nível de tensão ou deformação.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (2.18)$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \quad (2.19)$$

Segundo Norton (2013), para entalhes e ranhuras, dois fatores K_t podem ser definidos: um fator K_{tg} onde a tensão σ_{nom} é calculada com base na seção bruta da peça, ou seja, considerando a peça sem as discontinuidades geométricas, e outro fator K_{tn} em que essa tensão obtida para o ponto de concentração é calculada a partir da seção líquida da peça (σ_n), ou seja, considerando a área removida pelo entalhe ou ranhura. A relação entre ambos pode ser definida como:

$$K_{tn} = K_{tg} \left(1 - \frac{d}{H}\right) \quad (2.20)$$

Onde d é o diâmetro do furo e H é a largura da chapa.

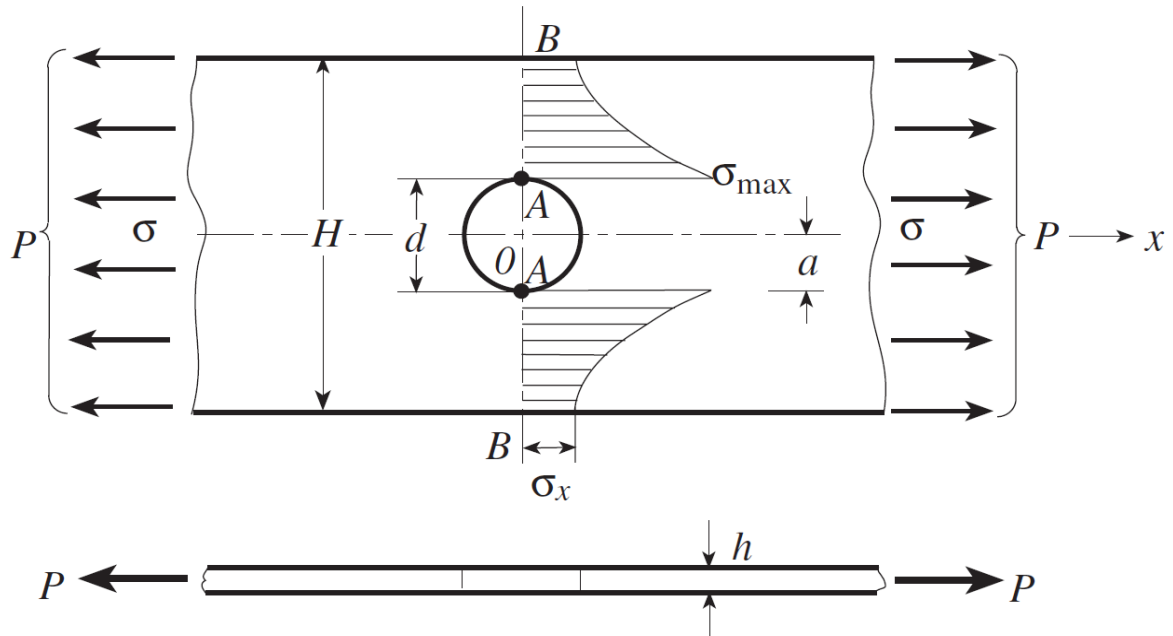
2.7 Chapa fina com furo circular

O furo central, uma característica geométrica comum em várias estruturas, como placas, discos e elementos de máquinas, é frequentemente utilizado para reduzir peso ou fornecer espaço para outros componentes. No entanto, a presença desse furo pode levar à concentração de tensões ao redor dele, tornando necessário um estudo cuidadoso desse fenômeno (HERRERA, 2022).

A Figura 2.7 apresenta um caso típico de concentração de tensão que é o estudo da distribuição de tensão em torno de um orifício circular em uma placa fina infinita que é submetido a tensão de tração no plano uniaxial (PILKEY, 2008), onde h é a espessura da chapa, H a largura da chapa, d o diâmetro do furo, P a força aplicada e σ a tensão gerada. Sob carregamento externo, as tensões em torno do furo central na seção $B - B$ não são uniformemente distribuídas. Elas atingem valores máximos

nas proximidades do furo (ponto A) e diminuem gradualmente à medida que se afastam dele.

Figura 2.7 – Distribuição qualitativa de tensão em placa sob tração.



Fonte: Pilkey (1997).

Utilizando a tensão em uma seção transversal distante do furo circular como a tensão de referência, ou seja, a área da seção transversal bruta, tem-se:

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{Hh} = \sigma \quad (2.21)$$

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{\sigma_{max}Hh}{P} \quad (2.22)$$

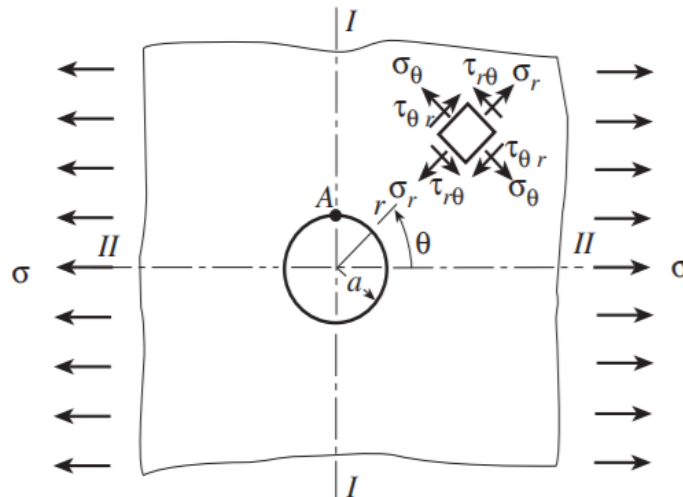
Já utilizando a tensão baseada na seção transversal do furo, que é formada pela remoção do furo circular da seção transversal bruta, ou seja, a área da seção transversal líquida, tem-se:

$$\sigma_n = \frac{P}{(H-d)h} \quad (2.23)$$

$$K_{tn} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{max}(H-d)h}{P} = K_{tg} \frac{H-d}{H} \quad (2.24)$$

Conforme a relação d/H aumenta de 0 para 1, K_{tg} aumenta de 3 para o ∞ , enquanto K_{tn} diminui de 3 para 2. Tanto K_{tn} quanto K_{tg} podem ser usados no cálculo da tensão máxima. Mesmo que K_{tg} seja mais fácil de determinar, seu valor se torna difícil de ler em um gráfico de concentração de tensão (Anexo A) para $d/H > 0,5$, pois a curva se torna muito íngreme. Em contraste, o valor de K_{tn} é de fácil leitura, mas é necessário calcular a área líquida. Normalmente é mais conveniente fornecer fatores de concentração de tensão utilizando tensões de referência baseadas na área líquida, já que a tensão de interesse é geralmente a que atua na seção do furo. A Figura 2.8 apresenta a análise mais aprofundada das tensões na borda do furo (PILKEY, 1997).

Figura 2.8 – Elemento fino infinito com furo sob carga de tração.



Fonte: Pilkey (1997).

Em coordenadas polares, tratado como um problema da teoria da elasticidade, com a tensão aplicada σ , as tensões podem ser dadas como (TIMOSHENKO E GOODIER, 1970):

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (2.25a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\sigma \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (2.25b)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \quad (2.25c)$$

Onde a é o raio do furo, r e θ são as coordenadas polares de um ponto no elemento como mostra a figura 2.8. Na borda do furo com $r = a$, as tensões são:

$$\sigma_r = 0 \quad (2.26a)$$

$$\sigma_\theta = \sigma(1 - 2\cos 2\theta) \quad (2.26b)$$

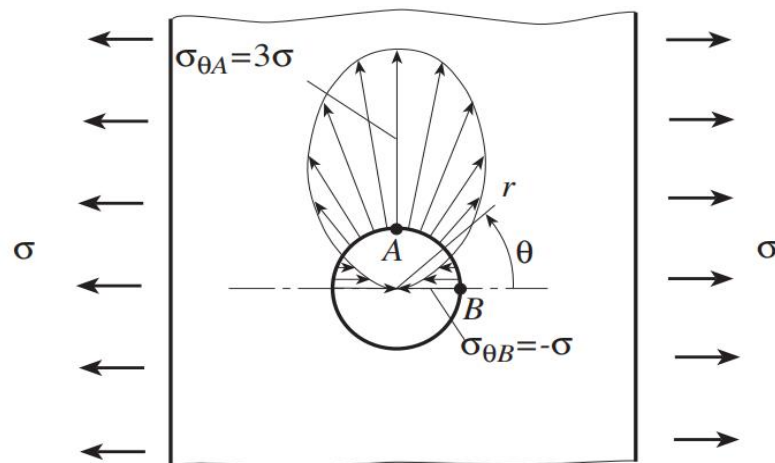
$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.26c)$$

No ponto A, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, assim

$$\sigma_{\theta A} = 3\sigma \quad (2.27)$$

Portanto, a máxima concentração de tensão ocorre na borda do furo central, na direção radial, onde o fator de concentração de tensão é $K_{tA} = 3$. Esse é o ponto crítico onde as tensões são mais elevadas e podem representar uma ameaça à integridade estrutural da placa. Essa concentração de tensão é particularmente relevante sob cargas de tração ou compressão axial (FARIA, 2023). O caso de um furo em uma placa fina é tão comumente utilizado como referência que frequentemente outros fatores de concentração de tensão são comparados a este padrão de valor 3. O valor de $K_{tA} = 3$ é mostrado no Anexo A para uma placa fina de largura infinita, ou seja, para valores grandes de H . A distribuição de σ_θ na borda do furo é mostrada na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Distribuição da tensão circunferencial na borda de um furo circular em um elemento fino infinito.



Fonte: Pilkey (1997).

No ponto B, com $\theta = 0$, a equação 2.26b fornece:

$$\sigma_{\theta B} = -\sigma \quad (2.28)$$

Já quando $\theta = \pm \pi/6$ (ou $\pm 5\pi/6$) a equação 2.26b fornece:

$$\sigma_{\theta} = 0 \quad (2.29)$$

Para os pontos na seção $I - I$, que passa pelo centro do furo e pelo ponto A, como mostrado na Figura 2.8, $\theta = \pi/2$ (ou $3\pi/2$) e as equações 2.25 se tornam:

$$\sigma_r = \frac{3}{2}\sigma \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right) \quad (2.30a)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}\sigma \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \quad (2.30b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.30c)$$

A partir das equações 2.30, observa-se que na seção transversal $I - I$, quando $r = a$, $\sigma_{\theta} = 3\sigma$, e conforme r aumenta, σ_{θ} diminui. Eventualmente, quando r é suficientemente grande, $\sigma_{\theta} = \sigma$, e a distribuição de tensão retorna a um estado uniforme. Além disso, as equações 2.30 demonstram que a concentração de tensão causada por um único furo é localizada. Por exemplo, quando $r = 5a$, σ_{θ} diminui para $1,02\sigma$. Assim, após uma distância de $5a$ do centro, a tensão se aproxima muito de uma distribuição uniforme.

A distribuição de tensões sobre a seção transversal $II - II$ da Figura 2.8 pode ser obtida utilizando um raciocínio semelhante. Assim, a partir das equações 2.25, com $\theta = 0$ (ou $\theta = \pi$), tem-se:

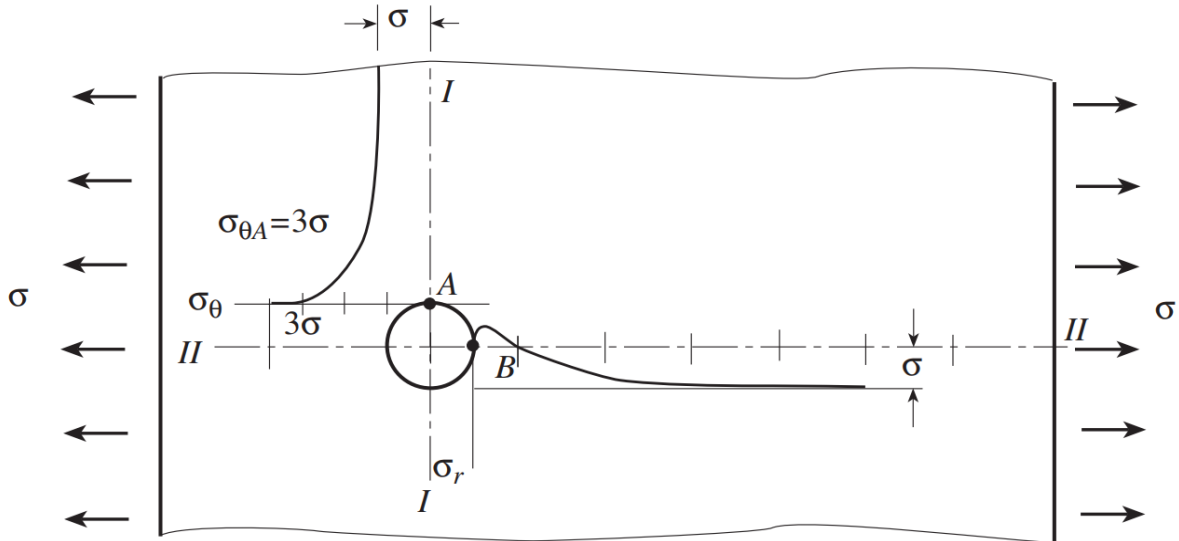
$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma \left(2 - \frac{5a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \quad (2.31a)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \quad (2.31b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.31c)$$

A Figura 2.10 mostra a distribuição de σ_θ na seção $I-I$ e a distribuição de σ_r sobre a seção $II-II$. Na seção transversal $II-II$, $\sigma_r \leq \sigma$, embora eventualmente alcance σ . O gradiente de tensão na seção $II-II$ é menor do que na seção $I-I$. Por exemplo, na seção $II-II$ quando $r = 11a$, $\sigma_r = 0,98\sigma$ ou $\sigma - \sigma_r = 2\%$. Em contraste, na seção $I-I$, quando $r = 5a$, σ_θ alcança σ dentro de um desvio de 2%.

Figura 2.10 – Distribuição de σ_θ na seção $I-I$ e σ_r na seção $II-II$.



Fonte: Pilkey (1997).

No caso de tensão em um elemento fino de largura finita com um furo circular, os valores de K_t são fornecidos no Anexo A para $d/H \leq 5$ (HOWLAND, 1929–1930). Os valores obtidos por fotoelasticidade (WAHL E BEEUWKES, 1934) e resultados analíticos (ISIDA, 1953; CHRISTIANSEN, 1968) são próximos. Para uma fileira de furos na direção longitudinal com uma razão da distância centro-a-centro dividido pelo diâmetro de furo de 3, e com $d/H = 1/2$, Slot (1972) obteve boa concordância com o valor de K_t de Howland (Anexo A) para um furo único com $d/H = 1/2$.

Em outro teste fotoelástico (COKER E FILON, 1931), observou-se que à medida que d/H se aproximava de 1, a tensão σ_θ nas bordas externas da chapa tendia ao ∞ , o que corresponderia a $K_{tn} = 2$. Muitos outros pesquisadores também indicam que $K_{tn} = 2$ para $d/H \rightarrow 1$ (WAHL E BEEUWKES, 1934; HEYWOOD, 1952; KOITER, 1957). Wahl e Beeuwkes observaram que, quando o diâmetro do furo se aproxima tanto da largura da chapa que a seção mínima entre a borda do elemento e o furo se torna um filamento infinitamente fino, para qualquer deformação finita, este filamento pode se mover para dentro em direção ao centro do furo o suficiente para

permitir uma distribuição uniforme de tensão, fornecendo assim $K_{tn} = 1$. Para deformações infinitamente pequenas em relação à espessura deste filamento, no entanto, K_{tn} ainda pode ser igual a 2. Eles descobriram, com um teste de modelo de aço, que a curva não cai para a unidade tão rapidamente quanto parece a partir de certos testes de fotoelasticidade (HENNIG, 1933). Como o movimento para dentro varia com σ e E , o K_{tn} não cairia para 1 tão rapidamente quanto com um modelo plástico. O caso de $d/H \rightarrow 1$ não tem muito significado do ponto de vista de projeto. Mais discussões são fornecidas em Belie e Appl (1972).

Uma fórmula empírica para K_{tn} foi proposta para cobrir toda a faixa de d/H (HEYWOOD, 1952), onde:

$$K_{tn} = 2 + \left(1 - \frac{d}{H}\right)^3 \quad (2.32)$$

A fórmula está em boa concordância com os resultados de Howland (HEYWOOD, 1952) para $d/H < 0,3$ e é apenas cerca de 1,5% menor em $d/H = 1/2$ ($K_{tn} = 2,125$ contra $K_{tn} = 2,16$ para Howland). A fórmula de Heywood da equação 2.26 é satisfatória para muitas aplicações de projeto, já que na maioria dos casos d/H é menor que $1/3$. Observa-se que a fórmula fornece $K_{tn} = 2$ quando $d/H \rightarrow 1$.

A fórmula de Heywood (equação 2.32), quando expressa como K_{tg} , de acordo com a equação 2.20, torna-se:

$$K_{tg} = \frac{2 + (1 - d/H)^3}{1 - (d/H)} \quad (2.33)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

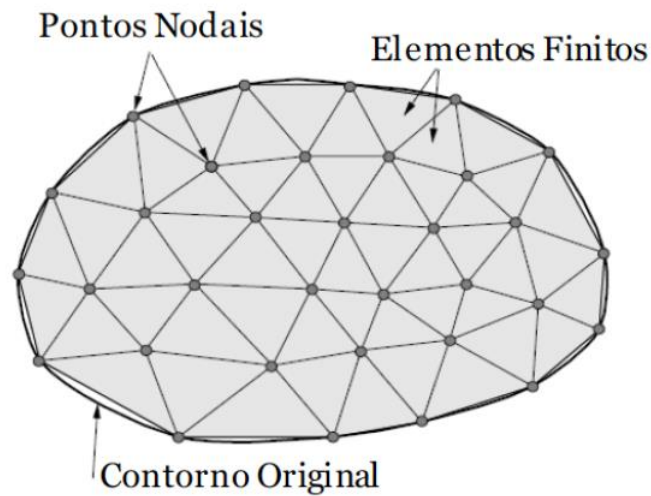
O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos representou um marco na engenharia, especialmente na área de cálculo estrutural. Essa técnica inovadora, que surgiu no século XX, combina conhecimentos de resistência dos materiais com ferramentas matemáticas avançadas, possibilitando a análise precisa do comportamento mecânico de estruturas complexas. O MEF superou as limitações de métodos analíticos tradicionais, permitindo a consideração de geometrias irregulares, materiais heterogêneos e carregamentos não lineares. Atualmente, o MEF se tornou indispensável para o projeto e análise de diversas estruturas, desde edifícios e pontes até máquinas e componentes aeroespaciais (ALVES FILHO, 2018). Este capítulo aborda alguns fundamentos do Método dos Elementos Finitos.

3.1 Princípio do MEF

Muitos fenômenos físicos na engenharia e na ciência podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Em geral, é quase impossível resolver essas equações por métodos analíticos clássicos para formas arbitrárias. Fish e Belytschko (2007) definem o Método dos Elementos Finitos como uma abordagem numérica pela qual essas equações diferenciais parciais podem ser resolvidas de forma aproximada. Do ponto de vista da engenharia, o MEF é um método para resolver problemas de engenharia, como análise de tensões, transferência de calor, fluxo de fluidos e eletromagnetismo, por meio de simulação computacional.

Segundo Souza (2003), o princípio central do MEF reside na discretização do domínio contínuo do problema em sub-regiões de elementos geométricos simples (triângulos, quadriláteros, cubos, etc.), interligados por pontos nodais, conforme ilustrado na Figura 3.1. Essa abordagem, amplamente utilizada na engenharia, visa resolver problemas complexos através da decomposição em problemas mais simples e de fácil resolução. As sub-regiões, por apresentarem dimensões finitas, são denominados elementos finitos, em contraste com os elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral. Essa distinção deu origem ao termo "Método dos Elementos Finitos", cunhado por Ray Clough.

Figura 3.1 – Malha triangular plana.



Fonte: Souza (2003).

Assim, o funcionamento do MEF começa com a divisão da estrutura em pequenos elementos finitos, que podem variar em forma dependendo da dimensão do problema e da geometria da estrutura. Cada elemento é caracterizado por suas propriedades materiais e geométricas, e as equações de equilíbrio são formuladas localmente, levando em consideração a deformação e o comportamento do material. Essas equações são então montadas em um sistema global de equações, considerando as condições de contorno e as conexões entre os elementos, resultando em um sistema de equações lineares (PORCARO et al., 2019). A resolução de problemas por meio do MEF envolve três etapas principais, conforme descrito por Saad (2005):

1º) Pré-processamento:

- i. Modelagem: criação do modelo geométrico do problema, geralmente utilizando softwares CAD;
- ii. Discretização: importação do modelo no software de MEF e definição da malha, incluindo tipo e tamanho dos elementos;
- iii. Definição de propriedades e condições de contorno: especificação das propriedades mecânicas do material e das condições que limitam o comportamento do modelo.

2º) Processamento:

- i. Montagem do sistema de equações: o software de MEF monta um sistema de equações lineares a partir da matriz de rigidez de cada elemento e das condições de contorno;
- ii. Resolução do sistema: o sistema de equações é resolvido numericamente, determinando os deslocamentos dos nós da malha.

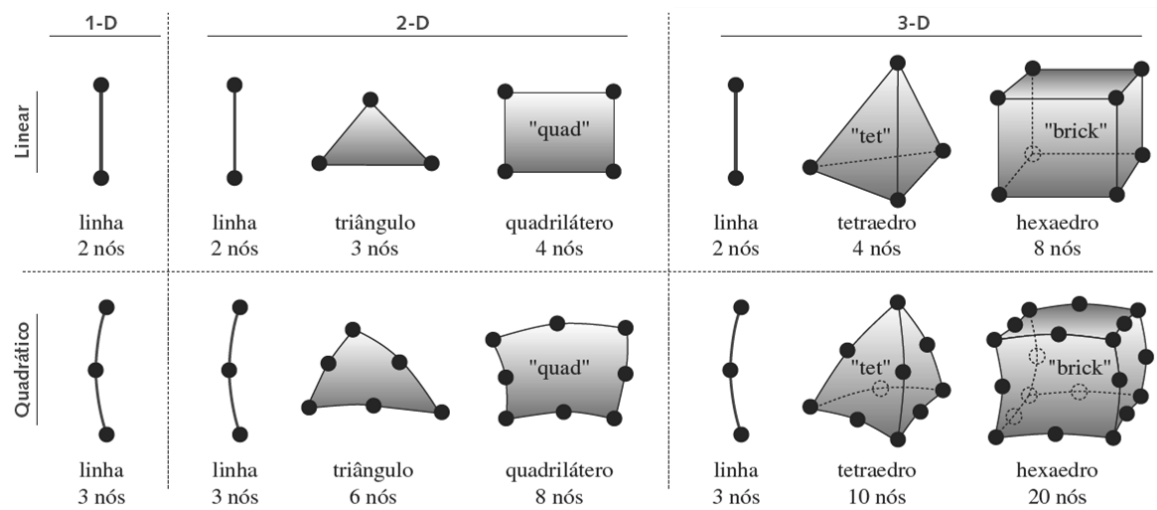
3º) Pós-processamento:

- i. Análise dos resultados: interpretação dos deslocamentos obtidos, geralmente por meio de visualizações gráficas;
- ii. Cálculo de deformações e tensões: conversão dos deslocamentos em deformações e tensões utilizando a relação constitutiva do material;
- iii. Verificação de critérios de falha: aplicação de critérios de falha para avaliar a segurança estrutural do modelo.

3.2 Tipos de elementos

Os elementos finitos podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Cada tipo de elemento é adequado para modelar diferentes tipos de problemas. A "ordem" do elemento se refere à ordem da função polinomial utilizada para interpolar o deslocamento dentro do elemento. A Figura 3.2 apresenta alguns dos elementos mais comuns, agrupados por dimensionalidade e ordem. Os elementos de alta ordem, como um triângulo de seis nós ou tetraedro de dez nós, permitem melhores aproximações quando comparados aos seus equivalentes de baixa ordem, mas o aumento da ordem dos elementos pode aumentar significativamente o tempo de processamento, motivo pelo qual os analistas preferem primeiro usar um modelo linear para modelar o componente (NORTON, 2013).

Figura 3.2 – Elementos finitos comuns.



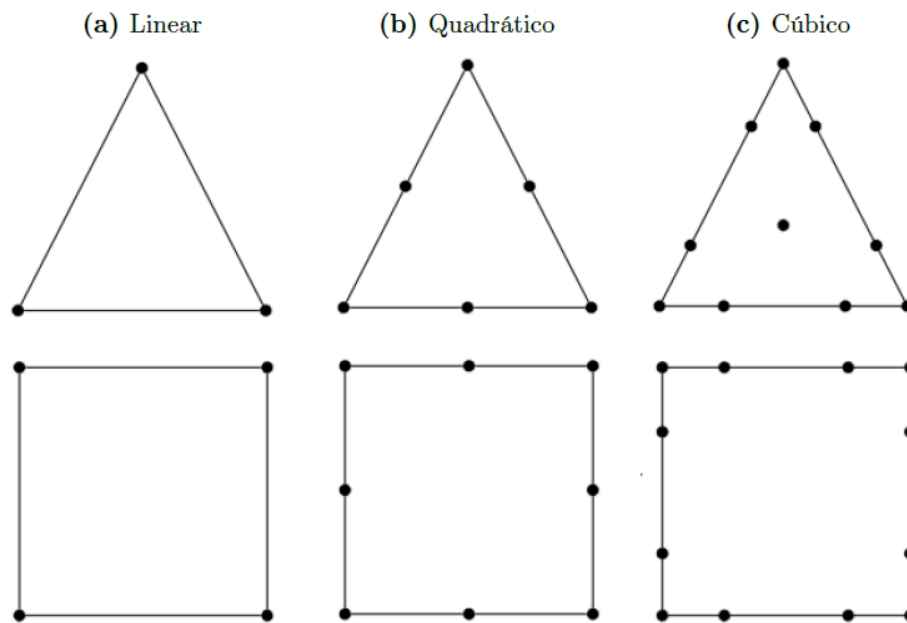
Fonte: Norton (2013)

Na discretização de estruturas, a escolha dos elementos finitos é crucial para garantir a qualidade da análise, influenciando diretamente na precisão dos resultados e na eficiência computacional do processo. Essa seleção estratégica, conforme destacado por Chandrupatla et al. (2002), exige do engenheiro uma avaliação criteriosa dos diversos fatores envolvidos. Para a discretização bidimensional, a literatura apresenta, majoritariamente, resultados para elementos triangulares e quadriláteros, conforme Figura 3.3.

Sadiku (2001) aponta que, para problemas bidimensionais, o elemento triangular se destaca por sua capacidade de se ajustar aos contornos de estruturas com geometrias complexas. No entanto, ele apresenta intrinsecamente baixa acurácia nos resultados. Em contrapartida, os elementos quadriláteros proporcionam maior precisão, mas exigem tempos computacionais mais extensos, em decorrência do aumento de incógnitas devido à adição de um nó por elemento (FISH; BELYTCHKO, 2007).

Na geração de malhas com elementos quadrangulares, a formação de elementos degenerados deve ser evitada. Elementos degenerados são caracterizados pela superposição das coordenadas de um nó em outro, aproximando-os de elementos triangulares. Essa ocorrência inviabiliza o cálculo de soluções nesse ponto, exigindo um remalhamento da geometria (FISH; BELYTCHKO, 2007).

Figura 3.3 – Representação geométrica por diversos gêneros de elementos não-estruturados (triângulos) e elementos estruturados (quadriláteros).



Fonte: adaptado de Dhatt, Lefrançois e Touzot (2012)

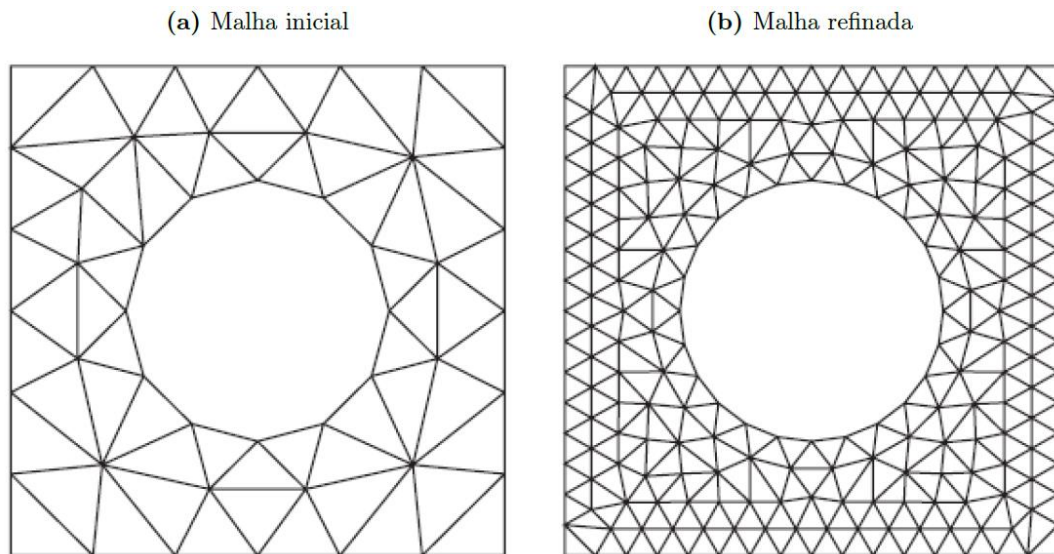
3.3 Discretização da malha

A caracterização de um domínio contínuo por elementos finitos é denominada malha. Segundo Norton (2013), uma malha com elementos grosseiros é desejada quando se quer minimizar o tempo de processamento. Nas regiões da peça onde o gradiente de tensão é pequeno, mesmo uma malha grosseira fornece bons resultados, mas nas regiões onde o gradiente de tensão é alto, como em locais com concentrações de tensão, o refinamento da malha deve ser usado para aumentar o número e reduzir o tamanho dos elementos para capturar a variação da tensão. Porém esta escolha aumenta o custo computacional, logo deve-se tomar cuidado ao exagerar neste quesito, pois o resultado pode não convergir ou o tempo de processamento pode ser muito alto (ALVES FILHO, 2018).

A relação entre a granulometria da malha e a precisão da solução no MEF é inversamente proporcional, ou seja, quanto menor o número de nós, menor a aproximação com a solução real. Essa característica é particularmente evidente na região do furo central da placa na Figura 3.4. A Figura 3.4a apresenta uma malha grosseira, onde o orifício circular não é definido com precisão. Isso resulta em um erro de aproximação geométrica significativo, pois a malha não consegue capturar a

verdadeira forma do furo. Em contraste, a Figura 3.4b apresenta uma malha mais fina, com um número significativamente maior de nós. Essa discretização mais refinada permite uma melhor definição do furo circular, reduzindo consideravelmente o erro de aproximação geométrica (FISH e BELYTSCHKO, 2007).

Figura 3.4 – Geometria aproximada por elementos triangulares.



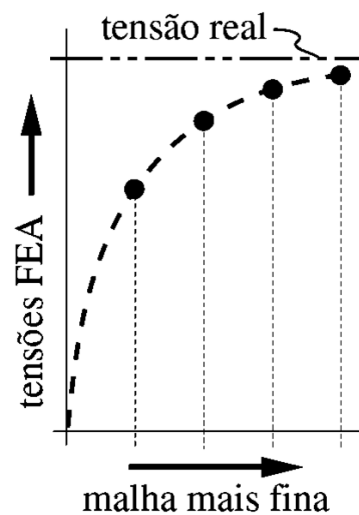
Fonte: Fish e Belytschko (2007).

Moraes (2015) destaca a importância da otimização do número de elementos finitos no Método dos Elementos Finitos. A busca por soluções aproximadas satisfatórias com o menor número de elementos possível deve ser priorizada, sempre que as características dos elementos permitam. Essa estratégia visa reduzir o consumo de recursos computacionais, sem comprometer a confiabilidade dos resultados. Por esta razão, estudos de convergência de malhas são essenciais para análise com MEF.

A densidade do refinamento deve ser cuidadosamente escolhida para cada nó da malha, considerando as características da análise em curso. Essa densidade é definida por uma razão entre o tamanho do elemento original e o tamanho do elemento refinado. Para garantir a convergência da solução, essa razão deve ser menor que 1, evitando erros na estimativa inicial (MUTHUKRISHNAN; NAMBIAR; LAWRENCE, 1995).

Em regiões de alta concentração de tensões, o refinamento da malha é realizado por meio da aplicação de um fator de redução. A nova malha mais fina permite o recálculo das tensões e a comparação com os valores obtidos na malha original. Se a diferença entre as tensões nas duas malhas for significativa, indica a necessidade de um novo refinamento da malha. Esse processo de refinamento e comparação é repetido até que a mudança nos valores calculados da tensão se torne menor, sinalizando a convergência da solução para o valor real. A representação gráfica da convergência da solução no MEF apresenta um crescimento exponencial da curva de tensões à medida que a malha é refinada, aproximando-se assintoticamente do valor real, conforme Figura 3.5 (NORTON, 2013).

Figura 3.5 – Resultados do refino de malha.



Fonte: Norton (2013).

3.3.1 Singularidade de tensão

Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013), na teoria matemática da elasticidade, certas condições de contorno levam a tensões ilimitadas em um ponto. Essas tensões são chamadas de singularidades de tensão e são uma consequência do modelo matemático e não da realidade física. Essas singularidades são pontos específicos em um modelo de elementos finitos onde os valores de tensão calculados não convergem para um valor definido, aumentando indefinidamente à medida que a malha é refinada. Teoricamente, a tensão nesses pontos seria infinita, mas na prática, o material cederia ou fraturaria antes disso.

Essas singularidades geralmente ocorrem em situações como aplicação de cargas pontuais, cantos vivos na geometria do modelo e restrições de deslocamento pontuais. São, portanto, um fenômeno comum em análises numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos. Com o conhecimento adequado, é possível prever a localização dessas singularidades e avaliar sua relevância para o estudo em questão. É importante ressaltar que, apesar da tensão teoricamente infinita nesses pontos, os resultados do modelo não são necessariamente inválidos.

Os deslocamentos calculados, por exemplo, permanecem corretos mesmo nos pontos de singularidade. As tensões próximas a esses pontos são afetadas, mas à medida que se distancia da singularidade, os resultados se tornam mais precisos e realistas, convergindo para valores esperados. Esse comportamento é explicado pelo Princípio de Saint-Venant, introduzido no segundo capítulo, que afirma que os efeitos de uma perturbação localizada em um corpo elástico se dissipam com a distância. Dessa forma, esse princípio é fundamental para interpretar os resultados de modelos com singularidades de tensão, permitindo identificar as regiões onde os resultados são mais confiáveis e precisos.

A fim de mitigar os efeitos das singularidades de tensão em modelos de elementos finitos, recomenda-se a adoção de estratégias como o refinamento da malha, a modelagem realista da geometria, a distribuição de cargas e restrições, a utilização de elementos especiais e a aplicação de técnicas de submodelagem. Além disso, é fundamental interpretar os resultados com cautela, considerando as tensões próximas à singularidade como indicadores de regiões críticas, e sempre que possível, validar os resultados numéricos com dados experimentais.

3.3.2 Element Quality

O método Element Quality se destaca como uma ferramenta crucial para avaliar a qualidade da malha. Segundo Júnior (2011), esse parâmetro é definido pela razão entre o volume do elemento e o comprimento de uma de suas arestas. O valor 1 indica um elemento ideal, representado por um quadrado ou cubo perfeito, enquanto valores próximos de 0 representam elementos com qualidade inferior, como aqueles com volume negativo ou zero. Elementos com baixa qualidade podem levar a resultados imprecisos e instáveis na simulação, afetando a confiabilidade da análise. A utilização

de elementos com qualidade superior contribui para a convergência mais rápida e eficiente da solução numérica.

A qualidade dos elementos em uma análise de elementos finitos é crucial para garantir a precisão, confiabilidade e eficiência dos resultados. Elementos de alta qualidade garantem a convergência da solução, a estabilidade numérica e facilitam a visualização e interpretação dos resultados. Por outro lado, elementos de baixa qualidade podem levar a resultados imprecisos, instabilidade numérica e dificultar a análise. Portanto, é fundamental garantir a qualidade dos elementos para obter resultados confiáveis e significativos em análises de elementos finitos.

3.4 Formulação matemática

As origens do MEF podem ser traçadas até a década de 1940, com trabalhos pioneiros de Hrennikoff (1943) e Courant (1943). No entanto, o MEF só ganhou o seu nome e se popularizou na década de 1950, com o trabalho de Turner et al. (1956). Desde então, diversas formulações matemáticas foram propostas e utilizadas, impulsionando o desenvolvimento de softwares comerciais e a aplicação do MEF em diversos campos.

3.4.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

A base do MEF é o Princípio dos Deslocamentos Virtuais, por vezes, também designado por Princípio dos Trabalhos Virtuais (BATHE, 1996). Segundo este princípio, o equilíbrio de um corpo é satisfeito para qualquer campo de deslocamento pequeno e compatível quando o trabalho virtual interno for igual ao trabalho virtual externo, ou seja, o equilíbrio é alcançado quando o trabalho virtual interno realizado pelas forças internas do corpo é igual ao trabalho virtual externo realizado pelas forças aplicadas externamente. Portanto, Se não houver influência de forças externas, o trabalho virtual total será nulo. O adjetivo “virtual” significa que os deslocamentos não são os deslocamentos reais de um corpo ou elemento finito devido ao carregamento aplicado. Formalmente, o princípio dos deslocamentos virtuais pode ser expresso como:

$$W_{interno} = W_{externo} \quad (3.1)$$

$$\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\bar{U}^{S_f}\}^T \{f^{S_f}\} dS + \sum_i \{\bar{U}^i\}^T \{R_C^i\} \quad (3.2)$$

Onde:

- $\{\sigma\}$ é o vetor das tensões $\{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \tau_{12} \tau_{23} \tau_{31}\}^T$;
- $\{\bar{U}\}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais (o traço denota quantidades virtuais);
- $\{\bar{\varepsilon}\}$ é o vetor das deformações virtuais correspondentes;
- $\{f^B\}$ é o vetor das forças de corpo aplicadas (por exemplo: por ações gravíticas, isto é, o peso próprio dos corpos; as forças de atração elétrica e, em análise dinâmica, as forças de inércia);
- $\{f^{S_f}\}$ é o vetor das trações na superfície do corpo (forças por unidade de área de superfície, por exemplo: forças distribuídas em vigas ou em placas ou cascas);
- $\{R_C^i\}$ é o vetor das forças concentradas no ponto i .

3.4.2 Método de Rigidez Direta (MRD)

A formulação matemática do MEF pode ser baseada em diferentes abordagens, como o Método dos Deslocamentos, Modelos de Equilíbrio, ou Métodos Híbridos e Mistos (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 1988). A abordagem mais utilizada pelos softwares comerciais de MEF é o Método da Rigidez Direta também chamado de Método dos Deslocamentos. O MRD baseia-se na rigidez do elemento para calcular os deslocamentos nodais e as forças internas resultantes de um conjunto de cargas externas aplicadas e das condições de contorno. O mecanismo fundamental é determinar a matriz de rigidez de cada elemento e, a partir da superposição das matrizes, definir a matriz de rigidez global do modelo, que é a relação entre o carregamento aplicado e os deslocamentos de cada nó. As deformações são calculadas a partir dos deslocamentos e as tensões pela lei de Hooke.

Considerando o corpo tridimensional geral e o elemento finito típico m definido pela Figura 3.6, os deslocamentos referenciados num sistema de coordenadas local (x,y,z) no interior de cada elemento são assumidos como sendo função dos

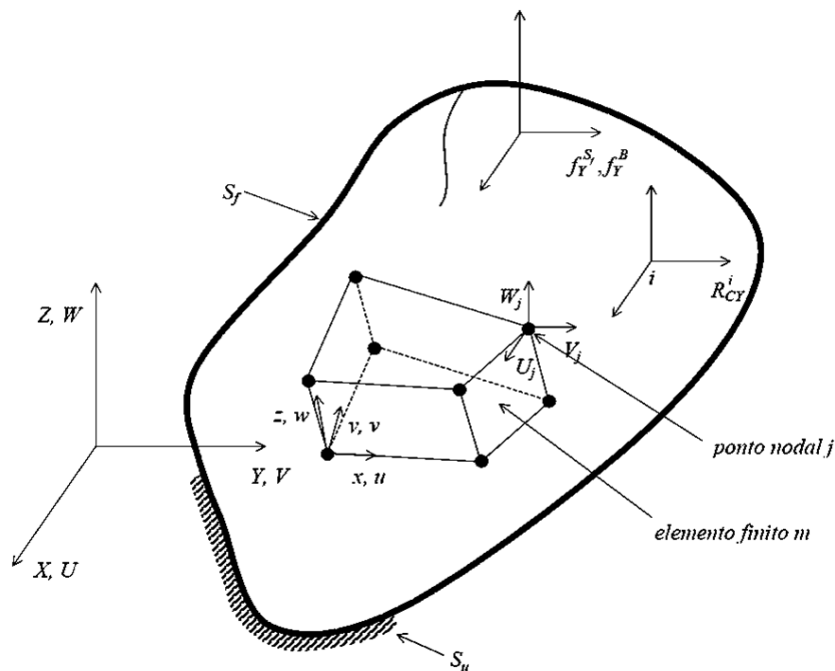
deslocamentos dos N nodos do mesmo. Desse modo, para o elemento m , tem-se:

$$\{u^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\} \quad (3.3)$$

Onde $\{u^{(m)}\}_{(x,y,z)}$ representa o vetor que contém as componentes dos deslocamentos nas coordenadas globais x,y,z ; $[N^{(m)}]_{(x,y,z)}$ é a matriz das funções de forma que depende da geometria e o número de nós/graus de liberdade; e $\{\hat{U}\}$ é o vetor dos deslocamentos e rotações globais dos pontos nodais nas três dimensões (U_i , V_i e W_i) definido por:

$$\{\hat{U}\}^T = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \dots \quad U_N V_N W_N] \quad (3.4)$$

Figura 3.6 – Corpo tridimensional geral com um elemento finito tridimensional de oito nós.



Fonte: Tavares (1998).

A malha do corpo em questão é interpretada como a união de um conjunto de elementos finitos discretos m agrupados pelos pontos nodais de forma a não existirem falhas entre os vários domínios de cada elemento. O elemento m utilizado é apenas um exemplo, na prática podem ser utilizados elementos com geometrias e ordens diferentes. Assumindo os deslocamentos da equação 3.3, determina-se as

deformações e tensões do elemento finito correspondentes:

$$\{\varepsilon^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}]_{(x,y,z)} \{\hat{U}\} \quad (3.5)$$

$$\{\sigma^{(m)}\} = [D^{(m)}] \{\varepsilon^{(m)}\} + \{\sigma^{I(m)}\} \quad (3.6)$$

Onde $[B^{(m)}]_{(x,y,z)}$ é a matriz de deformação que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações do elemento m , $[D^{(m)}]$ é a matriz de elasticidade para o elemento m e $\{\sigma^{I(m)}\}$ é o vetor das conhecidas tensões iniciais para o mesmo. As equações 3.3 e 3.5 foram obtidas para os deslocamentos e deformações desconhecidos e reais do elemento. Na utilização do princípio dos deslocamentos virtuais, pode-se utilizar as mesmas considerações para os deslocamentos e deformações virtuais:

$$\{\bar{u}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [N^{(m)}] \{\bar{U}\} \quad (3.7)$$

$$\{\bar{\varepsilon}^{(m)}\}_{(x,y,z)} = [B^{(m)}] \{\bar{U}\} \quad (3.8)$$

Reescrevendo a equação 3.2 como uma soma de integrações sobre o volume e áreas de todos os elementos finitos m utilizados na discretização do corpo em função dos deslocamentos e deformações virtuais encontrados nas equações 3.7 e 3.8:

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\} \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \right] \{\hat{U}\} &= \{\bar{U}\}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} \right] \\ &+ \left[\sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_m^{(m)}} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} \right] - \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{\sigma^{I(m)}\} dV^{(m)} \right] + \{R_C\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Onde as matrizes de interpolação dos deslocamentos na superfície $[N^{S(m)}]$ são obtidas a partir das matrizes de interpolação dos deslocamentos $[N^{(m)}]$ da equação 3.3 por adequada substituição das coordenadas da superfície do elemento m e $\{R_C\}$

é o vector das cargas concentradas aplicadas nos nós dos elementos agrupados.

Para obter a partir da equação 3.9 as equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o princípio dos deslocamentos virtuais m vezes impondo deslocamentos virtuais unitários a todas as componentes do vetor $\{\bar{U}\}$. Assim, obtém-se o sistema linear que governa o comportamento da estrutura, na forma:

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (3.10)$$

Onde $[K]$ é matriz de rigidez global, $\{U\}$ é o vector dos deslocamentos contendo todos os graus de liberdade associados aos pontos nodais e $\{R\}$ é o vector dos carregamentos nodais equivalentes. A matriz de rigidez global é definida pelo somatório das matrizes de rigidez dos elementos:

$$[K] = \sum_m [K^{(m)}] \quad (3.11)$$

$$[K] = \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dV^{(m)} \quad (3.12)$$

O vector de carregamentos nodais é definido pelo somatório dos vetores das forças de corpo $\{R_B\}$, das forças de superfície $\{R_S\}$, da tensão inicial $\{R_I\}$ e dos carregamentos concentrados $\{R_C\}$:

$$\{R\} = \{R_B\} + \{R_S\} - \{R_I\} + \{R_C\} \quad (3.13)$$

Onde:

$$\{R_B\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} [N^{(m)}]^T \{f^{B(m)}\} dV^{(m)} \quad (3.14)$$

$$\{R_S\} = \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_m^{(m)}} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS^{(m)} \quad (3.15)$$

$$\{R_I\} = \sum_m \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{\sigma^I(m)\} dV^{(m)} \quad (3.16)$$

Assim, para um problema de análise estática, os passos essenciais de uma solução numérica pelo método dos elementos finitos são os seguintes (TAVARES, 1998):

- 1º) Subdivisão do sistema global contínuo em elementos finitos;
- 2º) Para cada elemento finito m calcula-se a matriz de rigidez $[K^{(m)}]$;
- 3º) Determinação para o sistema global da matriz de rigidez $[K]$;
- 4º) Determinação do vetor das cargas aplicadas ao sistema global $\{R\}$;
- 5º) Estabelecimento das equações de movimento para o sistema global $[K]\{U\} = \{R\}$;
- 6º) Cálculo das variáveis do problema em questão; tais como: deslocamentos, velocidades, deformações e tensões.

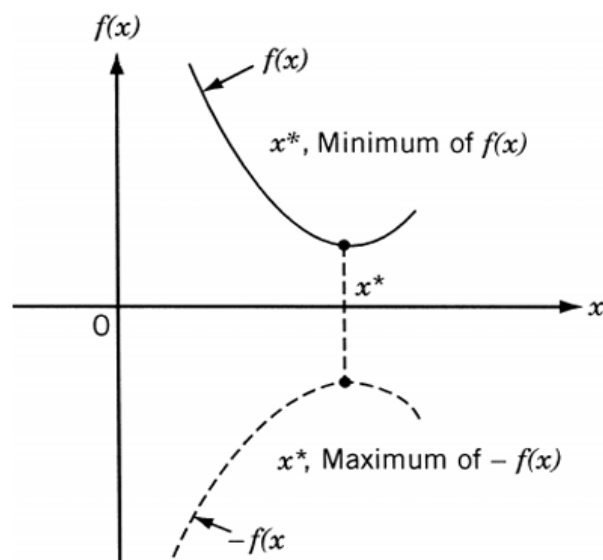
4 OTIMIZAÇÃO

A otimização assume um papel crucial na resolução de problemas complexos, permitindo a identificação da solução mais eficiente e eficaz para diversos desafios. Sua aplicação contribui para a otimização de recursos, redução de custos, aumento da produtividade e aprimoramento da qualidade em diversos setores. Neste capítulo é descrito o problema de otimização geral, os tipos de otimização estrutural, o software utilizado neste trabalho Ansys Workbench e, por fim, é descrito as etapas do processo de otimização usado no software tendo como base o próprio manual do ANSYS (2024).

4.1 Definição do problema de otimização

A essência da otimização reside na busca pelas condições que garantem o valor extremo de uma determinada função, seja máximo ou mínimo. Conforme ilustrado na Figura 4.1, um ponto x representa o mínimo valor da função $f(x)$. No entanto, esse mesmo ponto também corresponde ao máximo valor do negativo da função, $-f(x)$. Desta forma, a otimização pode significar minimização, desde que o máximo de função possa ser encontrado procurando o mínimo negativo da mesma função (RAO, 2009).

Figura 4.1 – Correspondência entre extremidades de $f(x)$ e $-f(x)$.



Fonte: Arora (2004).

A otimização se configura como uma ferramenta fundamental para a tomada de decisões em diversos campos do conhecimento. Segundo Haftka (1992), sua essência reside na busca pelo melhor resultado possível para uma determinada operação, considerando as restrições inerentes ao problema em questão. A função objetivo representa o que se deseja alcançar. Ela define o parâmetro que será utilizado para avaliar a qualidade da solução encontrada.

Arora (2004) propõe uma estruturação em cinco passos para a formulação de problemas de otimização. Essa estruturação facilita a compreensão do problema, a definição das variáveis e restrições, e a formulação matemática do problema, contribuindo para a obtenção de soluções satisfatórias.

1. Definição do Problema:

O primeiro passo crucial é a definição clara e concisa do problema a ser otimizado. Isso inclui a identificação dos objetivos a serem alcançados e das necessidades a serem satisfeitas pelo processo de otimização. Um problema mal definido pode levar a resultados não satisfatórios ou até mesmo à inviabilidade da solução.

2. Coleta de Informações:

Neste passo, é realizada a coleta de informações relevantes para o projeto. Isso inclui dados sobre custos e propriedades de materiais, limites dimensionais, performance requerida, entre outros aspectos. É importante ressaltar que, nesta etapa, nem todas as informações estarão completamente definidas, como as propriedades do material a ser utilizado, que podem depender das dimensões da peça. No entanto, é fundamental iniciar com dados que possam ser atualizados conforme a necessidade.

3. Definição das Variáveis:

O terceiro passo consiste na definição das variáveis de projeto que melhor representam o problema em questão. As variáveis de projeto são os elementos que podem ser manipulados para encontrar a solução ideal. A escolha adequada das variáveis é crucial para caracterizar corretamente o problema. Um número insuficiente de variáveis pode não capturar toda a complexidade do problema, enquanto um número excessivo pode aumentar significativamente o tempo de processamento e a dificuldade da resolução.

4. Definição da Função Objetivo:

A função objetivo é a expressão matemática que representa o que se deseja alcançar com o processo de otimização. Ela deve ser definida em função das variáveis de projeto e pode ser representada por uma função de minimização ou maximização. A definição precisa e clara da função objetivo é fundamental para direcionar a busca pela solução ideal.

5. Identificação das Restrições:

As restrições definem os limites do que é viável ou não no problema de otimização. Elas podem ser de igualdade ou de desigualdade. As restrições de igualdade definem condições que devem ser exatamente satisfeitas, enquanto as restrições de desigualdade definem limites superiores ou inferiores que não podem ser ultrapassados. A identificação precisa e completa das restrições é fundamental para garantir que a solução encontrada seja viável e atenda às necessidades do problema.

4.2 Definição matemática

Assim, segundo Arora (2004), a definição matemática de um problema geral de otimização é encontrar um vetor n -dimensional das variáveis de projeto

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

a fim de minimizar ou maximizar uma função objetivo

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

sujeita a p restrições de igualdade

$$h_j(x) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (j = 1, \dots, p) \quad (4.3)$$

e a m restrições de desigualdade

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.4)$$

Nos problemas de otimização estrutural, geralmente, as restrições de igualdade são as equações de equilíbrio da estrutura, garantindo que ela seja capaz de suportar as cargas aplicadas sem colapsar ou deformar excessivamente, e as restrições de

desigualdade são os valores limites admissíveis de tensão, deslocamento e frequência natural, assegurando que a estrutura atenda aos requisitos de segurança e desempenho do projeto (KUCKOSKI, 2013). Dessa forma, sendo A o conjunto dos reais, o conjunto de variáveis de projeto que atendem a todas as restrições de projeto é chamado de conjunto viável S definido como:

$$S = \{x | x \in A^n; h_j(x) = 0, (j = 1, \dots, p); g_i \leq 0, (i = 1, \dots, m)\} \quad (4.5)$$

4.3 Tipos de otimização estrutural

Através da busca por soluções que minimizem ou maximizem uma função objetivo, como o peso da estrutura ou o custo de material, a otimização permite alcançar resultados superiores e superar desafios complexos. No entanto, para garantir a viabilidade e o desempenho ideal das soluções otimizadas, é crucial escolher o tipo de otimização mais adequado ao problema em questão. A otimização estrutural se divide em três categorias distintas (STOLPE, 2003; BENDSØE, SIGMUND, 2003; STAINKO, 2006a):

1. Otimização Dimensional ou Paramétrica: neste tipo de otimização, não há alteração na geometria ou na topologia da estrutura. A busca se concentra na otimização de dimensões específicas. Essa abordagem é útil para problemas onde a forma da estrutura inicial já está definida e o objetivo é encontrar as dimensões ideais para otimizar o desempenho.
2. Otimização de Forma: a geometria da estrutura é parametrizada em função de variáveis, permitindo a busca pela configuração ideal do contorno. Assim como a Otimização Paramétrica, essa abordagem é eficaz em problemas com concentração de tensões, onde a forma da estrutura pode ser modificada para minimizar o estresse em áreas críticas.
3. Otimização Topológica: permite a mudança da conectividade da estrutura, ou seja, a continuidade do elemento estrutural não precisa ser preservada em determinadas regiões. Essa flexibilidade permite o aparecimento ou preenchimento de furos ao longo do domínio, abrindo um leque de possibilidades para a otimização estrutural.

4.4 Software de simulação estrutural

O uso de softwares de simulação estrutural desempenha um papel fundamental na análise e otimização de problemas estruturais complexos, proporcionando uma abordagem computacional poderosa que revolucionou a engenharia. Entre as ferramentas de simulação estrutural amplamente adotadas na indústria, destacam-se o ANSYS, ABAQUS, COMSOL Multiphysics, NASTRAN, SAP2000 e o Pro SolidWorks Simulation. Esses programas oferecem uma ampla gama de recursos e funcionalidades, tornando-os essenciais para engenheiros e projetistas que buscam entender e aprimorar o comportamento de estruturas sob diversas condições de carregamento.

O ANSYS é reconhecido por sua capacidade de lidar com problemas complexos de engenharia, proporcionando análises lineares e não lineares, análises de fadiga e térmicas, entre outras. É uma escolha comum para projetos que envolvem desafios de alta complexidade e é amplamente utilizado em setores como aeroespacial e automotivo (HILÁRIO *et al.*, 2019).

O ABAQUS, desenvolvido pela Dassault Systèmes, é conhecido por sua análise de elementos finitos avançada e é amplamente utilizado em aplicações multidisciplinares. Ele é empregado em uma ampla variedade de setores, desde engenharia civil até aeroespacial, para lidar com simulações complexas (BORTOLON, 2023).

O COMSOL Multiphysics se destaca por sua capacidade de realizar simulações multifísicas, permitindo a análise de acoplamento entre diferentes fenômenos físicos. Isso é particularmente útil em situações em que o comportamento simultâneo de vários campos físicos deve ser considerado (NUNES, 2021).

O NASTRAN, um dos pioneiros na análise estrutural por elementos finitos, continua sendo uma escolha sólida, especialmente na indústria aeroespacial. Ele oferece análise estática, dinâmica e térmica, e é respeitado por sua confiabilidade e precisão (MARIANO, 2022).

O SAP2000, com sua interface amigável e recursos avançados, é uma escolha popular para projetos de engenharia civil, como pontes e edifícios. Ele é altamente eficaz na análise e dimensionamento de estruturas (MACIEL E SANTOS, 2023).

O SolidWorks Simulation é integrado ao software de modelagem 3D SolidWorks e é uma escolha comum para análise de elementos finitos em engenharia mecânica,

permitindo a análise de cargas estáticas, dinâmicas e térmicas em componentes e montagens (SILVA, 2010).

Esses softwares de simulação estrutural oferecem às equipes de engenharia a capacidade de modelar, analisar e otimizar estruturas com eficiência e precisão. A escolha entre eles depende das necessidades específicas do projeto, da complexidade da análise e das preferências do usuário. Independentemente do software escolhido, a simulação estrutural desempenha um papel crucial na garantia de que as estruturas sejam projetadas com segurança, eficiência e confiabilidade, atendendo aos requisitos de desempenho necessários em uma ampla gama de aplicações na engenharia.

4.4.1 ANSYS Workbench

O ANSYS Workbench é uma plataforma integrada que reúne diversas soluções de simulação em um ambiente unificado e de fácil manuseio. Essa abordagem unificada permite aos engenheiros realizarem análises estruturais, térmicas, de fluidos, eletromagnéticas e multifísicas em um único software. Essa integração é fundamental para uma abordagem holística e eficiente na resolução de problemas de engenharia complexos (STOLARSKI, NAKASONE E YOSHIMOTO, 2018).

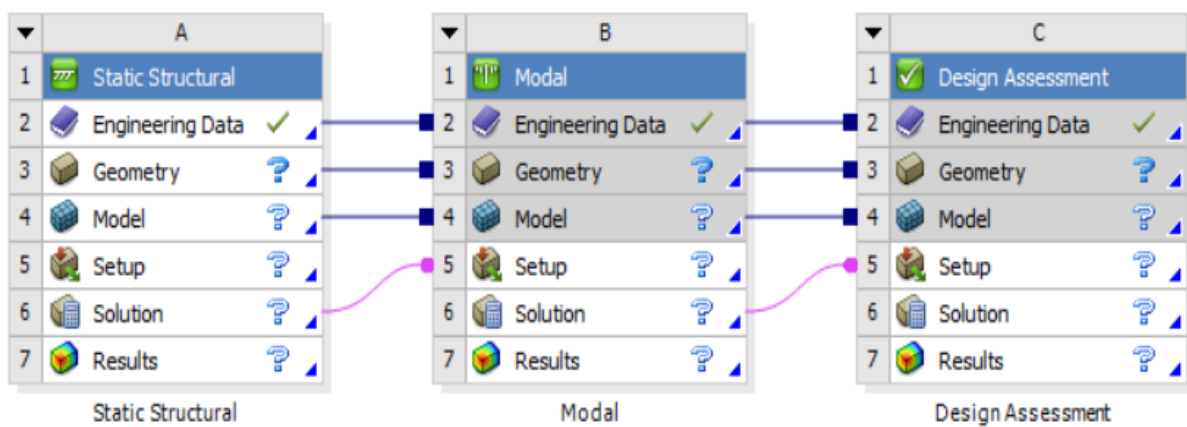
Uma das principais capacidades do ANSYS Workbench é sua gama de análises estruturais, incluindo análise linear e não linear. A análise não linear é particularmente valiosa ao lidar com materiais que apresentam comportamento não linear, como plásticos ou elastômeros. Além disso, o software oferece a possibilidade de realizar análises de fadiga, análise modal e análise de contato, elementos essenciais em projetos de engenharia do mundo real (SAPIETOVÁ *et al.*, 2019).

A versatilidade do ANSYS Workbench se destaca em sua aplicação em diversas indústrias, como aeroespacial, automotiva, petróleo e gás, engenharia civil, eletrônica, entre outras. Em aerodinâmica, por exemplo, o ANSYS Workbench é usado para simular o comportamento de aeronaves sob diferentes condições de voo, otimizando seu desempenho e eficiência (TODOROV, 2015).

O ANSYS Workbench oferece uma variedade de módulos especializados para diferentes áreas. O DesignModeler permite a criação e edição de geometrias, enquanto o Mechanical é utilizado para análises estruturais estáticas e dinâmicas. O Fluent é ideal para simulações de dinâmica dos fluidos computacional (CFD), e o

HFSS (High Frequency Structure Simulator) é voltado para análises eletromagnéticas. O módulo Project Schematic, por sua vez, é a espinha dorsal do Workbench, permitindo a integração e organização de todos os módulos em um fluxo de trabalho lógico e interconectado. Ele possibilita a visualização do processo de simulação, a parametrização de modelos, a automação de tarefas e a otimização de projetos. Os sistemas são adicionados da esquerda para a direita e de cima para baixo, conforme figura 4.2 (ANSYS, 2024).

Figura 4.2 – Project Schematic.



Fonte: ANSYS (2024).

Assim, o software é uma ferramenta poderosa para otimização e design paramétrico. Com a definição de parâmetros de design, como dimensões ou materiais, os engenheiros podem usar algoritmos de otimização para encontrar automaticamente a configuração mais eficiente que atenda a critérios específicos. Isso acelera o processo de projeto e resulta em produtos mais eficazes (STOLARSKI, NAKASONE E YOSHIMOTO, 2018).

4.5 Desing Of Experiments (DOE)

Design of Experiments (Planejamento de Experimentos) é uma técnica utilizada para determinar cientificamente a localização de pontos de amostragem. Existe uma ampla gama de algoritmos ou métodos de DOE disponíveis na literatura de engenharia. No entanto, todos eles possuem características comuns: tentam localizar os pontos de amostragem de maneira que o espaço dos parâmetros de entrada aleatórios seja explorado da forma mais eficiente possível, ou tentam obter as

informações necessárias com um mínimo de pontos de amostragem. Pontos de amostragem em locais eficientes não apenas reduzem o número necessário de amostras, como também aumentam a precisão da superfície de resposta derivada dos resultados dos pontos de amostragem. Por padrão, o método determinístico usa o Planejamento Composto Central, que combina um ponto central, pontos ao longo do eixo dos parâmetros de entrada e pontos determinados por um planejamento fatorial fracionário.

4.6 Optimal Space-Filling design (OSF)

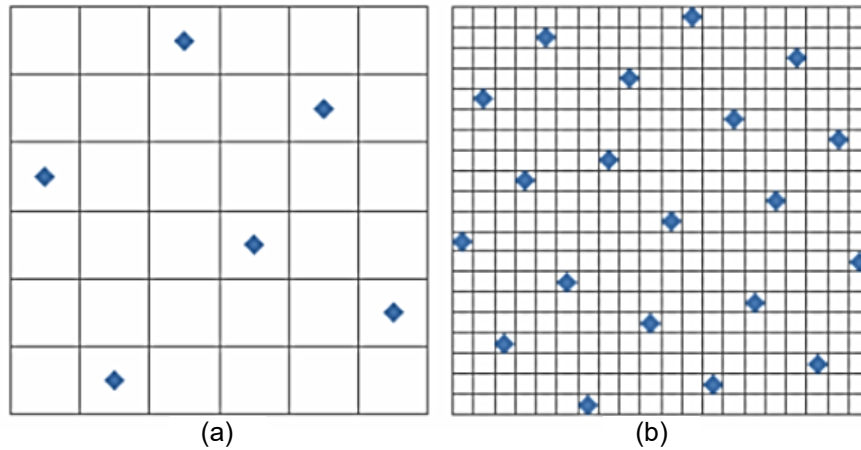
Optimal Space-Filling Design (Preenchimento Ótimo de Espaço) é um método DOE baseado na evolução da Amostragem por Hipercubo Latino (LHS). Basicamente ele divide o espaço dos parâmetros em um número igual de intervalos em cada dimensão. Dentro de cada divisão da grade, um único ponto de amostra é selecionado aleatoriamente. Isso garante que cada divisão seja representada, evitando que grandes áreas do espaço do parâmetro fiquem sem amostragem. O OSF é eficaz para técnicas de modelagem complexas que requerem um número relativamente grande de pontos (ANSYS, 2024).

O objetivo do OSF é maximizar a distância entre esses pontos, obtendo a melhor cobertura possível dentro dos limites. O preenchimento uniforme garante que todas as regiões do espaço de projeto tenham representatividade na amostra. Isso aumenta a eficiência na aquisição de informação. A figura 4.3 mostra um exemplo. Em um problema bidimensional com apenas dois parâmetros de entrada e seis pontos de planejamento, pode ser difícil construir uma superfície de resposta adequada. Ao aumentar o número de pontos para vinte no mesmo cenário, a qualidade da superfície de resposta resultante melhora (ANSYS, 2024). O OSF, com sua maximização da distância entre os pontos e distribuição mais uniforme, aborda os extremos com mais eficiência e fornece uma cobertura muito melhor do espaço do planejamento.

Possíveis desvantagens do planejamento OSF incluem a falta de cobertura dos extremos (como os cantos do espaço de planejamento), a seleção de poucos pontos podendo resultar em baixa qualidade na predição da resposta e a aleatoriedade na escolha do ponto inicial. Uma vantagem do planejamento OSF é poder especificar o número de pontos a serem gerados. Isso é especialmente útil quando o tempo de computação é limitado. Outra vantagem é sua capacidade de preencher o espaço do

planejamento, tornando-o apropriado quando técnicas mais complexas de metamodelagem são utilizadas, como Krigagem.

Figura 4.3 – (a) 6 Pontos de planejamento. (b) 20 Pontos de planejamento.



Fonte: ANSYS (2024).

4.7 Gaussian Process Regression (GPR)

Gaussian Process Regression (Regressão de Processo Gaussiano) ou Krigagem, como é mais conhecido, é amplamente popular, especialmente em estatísticas espaciais. É baseado nos primeiros trabalhos de Krige (1951). A estrutura matemática pode ser encontrada em Matheron (1963) e Stein (2012). É uma técnica de interpolação geoestatística para criar superfícies de resposta. Ela usa os dados dos pontos de projeto gerados pelo OSF e um modelo de variograma para estimar valores em posições não observadas dentro do domínio. A krigagem é baseada em um modelo polinomial combinado com desvios da seguinte forma:

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (4.6)$$

Onde:

- $y(x)$ representa a função de resposta desconhecida de interesse;
- $f(x)$ representa a função polinomial que fornece o modelo global do espaço de amostra;
- $Z(x)$ representa um processo aleatório Gaussiano normalmente distribuído com média zero, variância σ^2 e covariância não-nula.

Em simulações computacionais complexas, a krigagem e o OSF podem ser combinados para reduzir o número de simulações necessárias para obter resultados confiáveis. A krigagem gera estimativas de variância junto com as previsões. Essas estimativas de variância indicam as regiões do domínio onde a incerteza do modelo é maior. Se grandes áreas do domínio apresentam alta variância, pode ser uma boa escolha focar as novas iterações do OSF em uma sub-região para aumentar a precisão do modelo apenas onde seja necessário. Não é uma redução do domínio original, mas um redirecionamento dos esforços. Dessa forma, a variância da krigagem pode orientar o posicionamento de novos pontos no OSF, priorizando as áreas com maior incerteza.

4.8 Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming (MISQP)

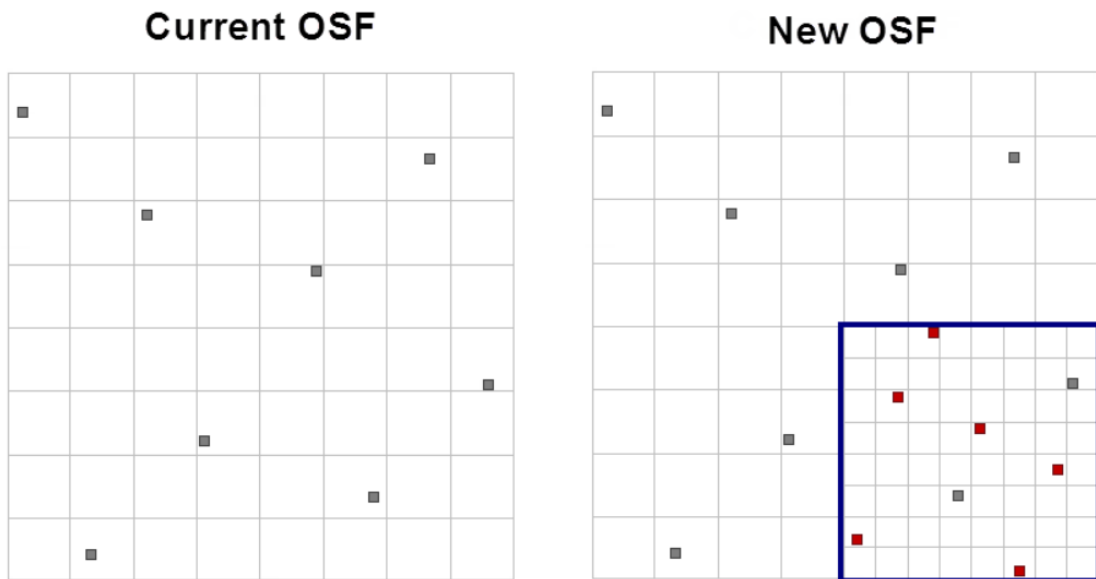
Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming (Programação Quadrática Sequencial Mista Inteira) é um algoritmo de otimização matemática desenvolvido por Oliver, Thomas, Lehmann e Schittkowski. É um algoritmo eficiente baseado na busca por gradientes e otimização multi-restrita de objetivo único, que resolve problemas de Programação Não Linear com Variáveis Inteiras e Contínuas (MINLP) utilizando uma abordagem modificada de Programação Quadrática Sequencial (SQP) (Exler et al., 2012). Graças ao uso de informações do gradiente e métodos de busca linear, o MISQP apresenta maior acurácia e eficiência na solução de problemas contínuos de objetivo único.

O MISQP, Krigagem e OSF são ferramentas poderosas que, quando combinadas, garantem uma otimização eficaz. O OSF define a melhor estratégia para distribuir os pontos de amostragem no espaço de projeto, garantindo que a informação coletada seja a mais útil possível para a otimização. A Krigagem constrói modelos de superfície de resposta baseada no OSF atual, fornecendo insights valiosos sobre a relação entre as variáveis e a função objetivo. Através da análise de variância da superfície de resposta, o MISQP pode identificar áreas promissoras no espaço de projeto, direcionando a busca por soluções otimizadas de forma mais eficiente.

Assim, O MISQP reduz o domínio à medida que direciona sua busca por soluções otimizadas para regiões com maior probabilidade de conter a solução ideal. No exemplo a seguir, o domínio original gerado pelo OSF possui oito divisões por eixo e contém oito pontos de projeto (Figura 4.4). Quando um novo OSF é gerado após

uma redução de domínio, o OSF reduzido tem o mesmo número de divisões que o original e mantém os pontos de projeto existentes dentro dos novos limites. Novos pontos de projeto são adicionados até que haja um ponto em cada divisão do domínio reduzido. No exemplo, o domínio reduzido também possui oito divisões por eixo e inclui dois pontos de projeto originais (ANSYS, 2024).

Figura 4.4 – Amostragem OSF após redução de domínio.



Fonte: ANSYS (2024).

4.9 Adaptive single-objective (ASO)

Adaptive Single-Objective (Otimização Adaptativa de Objetivo Único) é um método de otimização matemática que combina o DOE OSF, Kriging e MISQP. É um algoritmo que fornece um resultado refinado, global e otimizado. O ASO suporta um único objetivo e múltiplas restrições. Está disponível para parâmetros contínuos, inclusive aqueles com valores fabricáveis. Ele não suporta o uso de relacionamentos de parâmetros no domínio de otimização e está disponível apenas para um sistema de Otimização Direta (ANSYS, 2024). O fluxo de trabalho do ASO é representado no fluxograma da Figura 4.5. No contexto do software ANSYS, o ASO se destaca por sua capacidade de lidar com problemas complexos e multidimensionais, adaptando-se às características do espaço de projeto e convergindo para soluções de alta qualidade.

A etapa inicial envolve a definição clara do problema de otimização, identificando a função objetivo a ser otimizado e as variáveis de design (parâmetros)

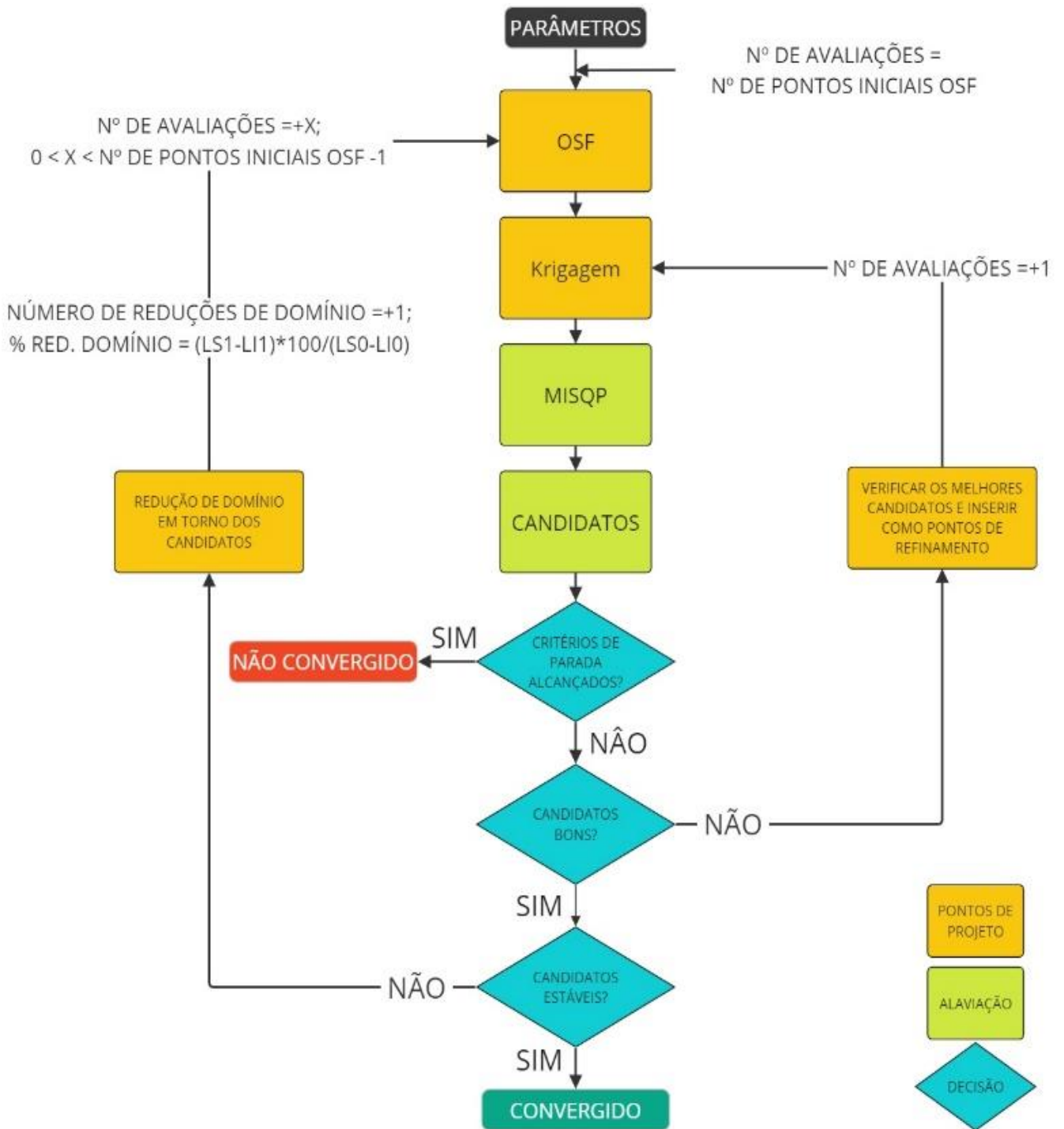
que podem ser alteradas para alcançar esse objetivo. As variáveis podem ser contínuas ou discretas, com restrições específicas definidas para garantir a viabilidade das soluções. Após a etapa inicial, é definido o tamanho da população inicial pelo método DOE OSF que é usado para a construção da Krigagem gerando uma superfície de resposta. O MISQP é executado na superfície de resposta para encontrar potenciais candidatos.

Todos os candidatos obtidos são validados ou não, com base no preditor de erros de Krigagem. Os critérios de parada são definidos no início do projeto, geralmente se limita ao número máximo de avaliações ou a tolerância de convergência da função objetivo. Após checar os critérios de parada, o ponto candidato é verificado para ver se um refinamento adicional da superfície de Krigagem altera a seleção deste ponto. Um candidato é considerado aceitável se não houver pontos, de acordo com esta previsão de erro, que o coloquem em dúvida. Se a qualidade do candidato não for questionada, os limites do domínio são reduzidos. Caso contrário, o candidato é calculado como ponto de verificação.

Quando um novo ponto de verificação é calculado, ele é inserido na superfície de resposta da Krigagem atual como um ponto de refinamento e o processo MISQP é reiniciado. Quando os candidatos são validados, novos limites de domínio devem ser calculados. Se todos os candidatos estiverem na mesma zona, os limites são reduzidos, centrados nos candidatos. Caso contrário, os limites são reduzidos como uma caixa inclusiva de todos os candidatos. A cada redução de domínio, um novo OSF é gerado (conservando os pontos de projeto entre os novos limites) e uma nova superfície de resposta de Krigagem é gerada com base neste novo OSF.

Quando um novo OSF é gerado após uma redução de domínio, o OSF reduzido tem o mesmo número de divisões que o original e mantém os pontos de projeto existentes dentro dos novos limites. Novos pontos de projeto são adicionados até que haja um ponto em cada divisão do domínio reduzido. O processo de otimização ASO é repetido até que um critério de convergência seja atendido. Critérios comuns incluem atingir o número máximo de iterações, obter a mudança mínima na função objetivo ou alcançar um nível predefinido de estabilidade na população.

Figura 4.5 – Fluxo de trabalho ASO.



Fonte: adaptado de ANSYS (2024).

5 METODOLOGIA

Este capítulo busca descrever como foi conduzido o presente trabalho. É abordado as características geométricas e mecânicas do modelo de análise, bem como das propostas geométricas de redução de concentração de tensão. O capítulo traz referências do método utilizado já abordado anteriormente e o passo-a-passo da análise que gerou os resultados que serão discutidos no capítulo 6.

5.1 Tipo de Otimização Estrutural

A otimização estrutural implementada no presente estudo se enquadra na categoria de otimização paramétrica, na qual se caracteriza pela busca dos valores ótimos para parâmetros predefinidos, mantendo a geometria base da estrutura inalterada. A análise considerou uma chapa fina submetida a um estado plano de tensões, com um furo central preexistente e dimensões fixas. O objetivo principal foi minimizar a concentração de tensões, através da introdução de furos de alívio.

A metodologia empregada consistiu em utilizar um software de elementos finitos para simular o comportamento da chapa sob diferentes combinações de valores para os parâmetros. Restrições foram impostas aos valores dos parâmetros, a fim de garantir a viabilidade da solução. O software, através de algoritmos de otimização, iterativamente avaliou o desempenho da estrutura para cada combinação de parâmetros, buscando aquela que minimizasse a tensão máxima na região do furo central.

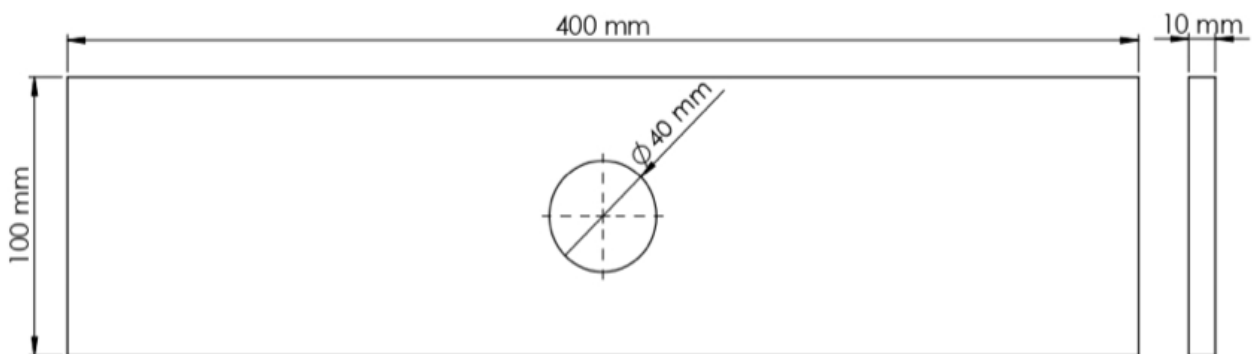
É importante salientar que a otimização de forma, que envolve a modificação da geometria da estrutura, não foi utilizada neste estudo. A escolha pela otimização paramétrica se justifica pela necessidade de manter a forma básica da chapa, incluindo o furo central, inalterada. A otimização de forma, que envolveria a modificação da geometria da chapa, não se adequava aos requisitos do problema em questão.

5.2 Configuração inicial

Na configuração da placa sem o uso de formas de alívio foi considerado como parâmetros iniciais o diâmetro do furo central (D), a altura da placa (W), o comprimento da placa (C) e sua espessura (h). Buscou-se adotar uma distância entre o furo central e a borda da placa suficiente para garantir a distribuição uniforme de tensão, conforme o Princípio de Saint-Venant, em que essa distância é, no mínimo, igual à maior dimensão da seção transversal carregada.

No mais, para garantir a aferição do critério de falha utilizado, foi modelado uma análise preliminar, com aspecto de malha e condições de contorno que serão discutidos posteriormente, mantendo W , D e h constantes enquanto se usava diferentes valores de C . A Figura 5.1 mostra o valor das dimensões usadas nesse estudo após a análise preliminar, todos em milímetros.

Figura 5.1 – Configuração Inicial.

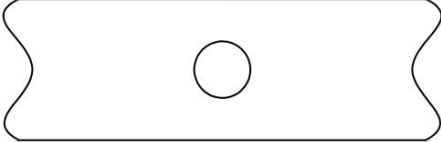
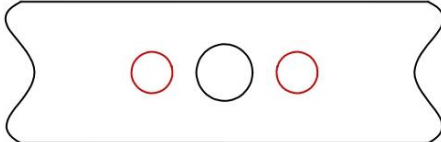
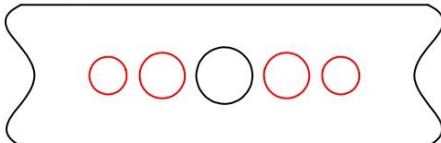
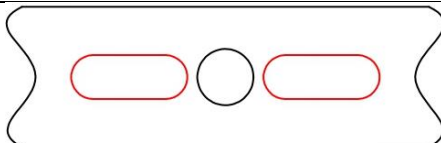
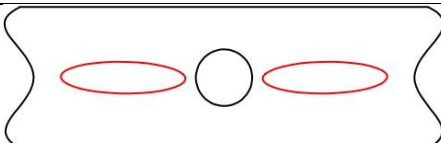
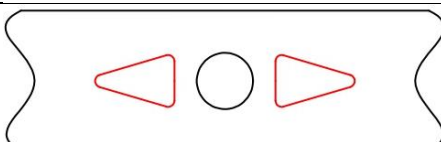


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.3 Configurações de alívio

Existem vários tipos de formas de alívio geométricas que podem ser aplicadas para a redução de concentração de tensão. Diante da gama de possibilidades, no presente estudo de caso foram levantadas as formas de alívio para uma placa plana sujeita a tração presentes na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Configurações geométricas de alívio usadas.

Configuração Inicial	Configuração de Alívio	Caso
		Furo Circular
		Dois Furos Circulares
		Furo Oval
		Furo Elíptico
		Furo Triangular

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

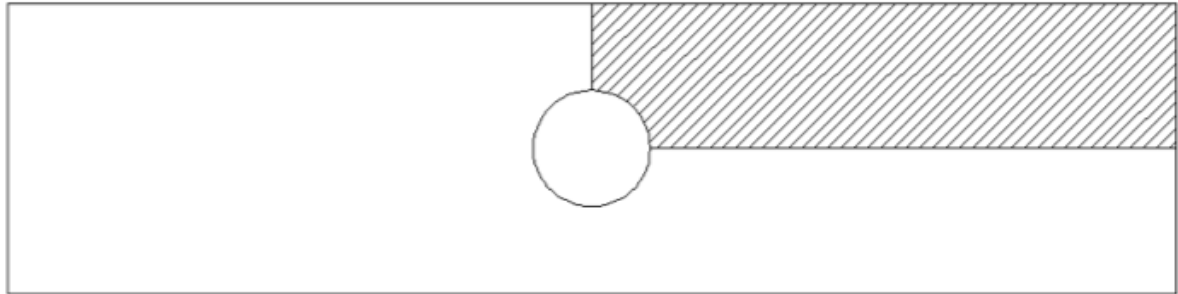
5.4 Redução do problema

Para a realização da análise numérica a placa foi modelada parcialmente sendo necessário apenas $\frac{1}{4}$ do modelo (Figura 5.2). Para isso, foram aplicadas condições de simetria nas linhas horizontais e verticais da redução do problema como mostra a Figura 5.3. A mesma figura indica a localização da pressão que também é simétrica em relação ao eixo horizontal de simetria. Essa abordagem reduz a quantidade de elementos e nós necessários para realizar o estudo diminuindo, assim, o esforço computacional e, conseqüentemente, o tempo de processamento, sem alterar os resultados.

Além disso, como o problema pode ser aproximado para o estado plano de tensões, foi desconsiderado a espessura da placa limitando a análise à duas dimensões. Assim, com base nas formas de alívio apresentadas na Tabela 5.1,

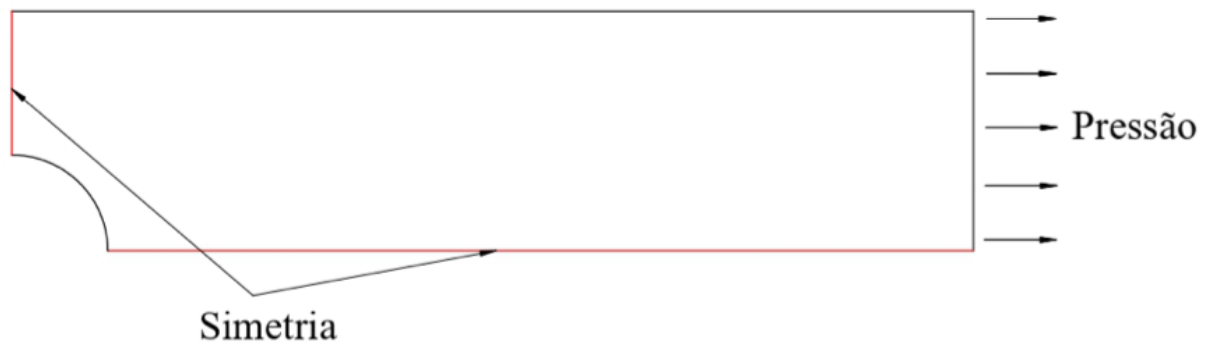
modelou-se cada forma de alívio em simetria utilizando as próprias ferramentas disponíveis no software Ansys WorkBench.

Figura 5.2 – Redução de problema.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 5.3 – Linhas de simetria.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.5 Condições de contorno

Na corrente análise as condições de contorno definem as restrições que limitam a deformação e o deslocamento da placa nas bordas, influenciando diretamente a distribuição de tensões no interior do material. Similar aos ensaios de tração, a força aplicada na placa no ponto de aplicação, indicada na Figura 5.3, é uniformemente distribuída ao longo de sua seção transversal, considerando a redução do problema, levando a um estado de tensão uniforme (tração pura). Além disso, as bordas da placa são fixas na direção perpendicular à superfície (simulando os mordentes rígidos das máquinas de tração). O aço estrutural foi o material empregado em todas as modelagens, admitindo suas propriedades constantes, tais como módulo de elasticidade do material ($E = 210 \text{ GPa}$) e o coeficiente de Poisson ($\nu = 0,3$).

5.6 Função objetivo

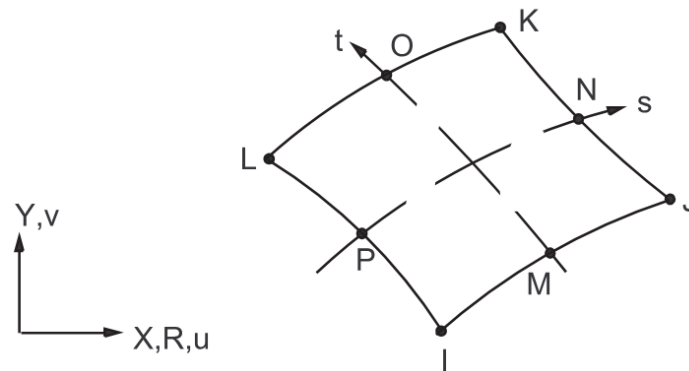
A função objetivo é baseada na equação 2.18 que define o problema. De acordo com essa equação a redução da tensão máxima da placa reflete na redução do coeficiente de concentração de tensão. Assim, a função objetivo é a redução da tensão máxima de von Mises (equação 2.16) na qual apresenta boa correlação com resultados experimentais de escoamento em diversos tipos de ensaios mecânicos. Para facilitar a visualização gráfica dos resultados, a tensão nominal calculada pelas equações de resistência dos materiais tem valor de 1Mpa em todos os casos. Dessa forma, foi manipulado a força de tração para que a máxima tensão de von Mises seja equivalente ao fator de concentração de tensão.

5.7 Discretização da malha

Admitindo o estado plano de tensões, foi usado o elemento PLANE183 (Figura 5.4) que é um elemento finito de alto desempenho projetado para a análise bidimensional sob diversas condições de carregamento e restrições. Sua natureza quadrática proporciona resultados altamente precisos (mesmo com malhas relativamente grosseiras) e pode lidar com geometrias complexas, incluindo furos. O elemento finito PLANE183 é um elemento quadrático quadrangular 2-D de oito nós (configuração completa) ou seis nós (configuração reduzida) e com dois graus de liberdade em cada nó. A presente análise se restringiu à utilização da configuração completa do elemento (alta ordem), se adaptando bem à tensão plana e às geometrias retangulares utilizadas neste estudo.

Para definição do tamanho do elemento finito foi executado um estudo de convergência da malha equilibrando a precisão e os recursos de computação. Primeiramente foi criada uma malha 2D usando o menor número razoável de elementos. Na borda do furo foi empregado uma densidade maior de elementos através da ferramenta Edge Sizing com o objetivo de registrar de maneira mais fiel o efeito da mudança de tensão e da concentração de tensão. Procurou-se adotar uma transição suave usando ferramentas avançadas de malha para evitar erros de discretização.

Figura 5.4 – Elemento PLANE183.



Fonte: ANSYS (2024).

5.8 Verificação numérica

Foi feita uma comparação dos coeficientes de concentração de tensão encontrado em ábacos presentes na literatura com a análise numérica desse estudo para validar o modelo adotado e aferir os erros relativos. Assim, foi utilizado o método de pesquisa baseado em um estudo de caso de estrutura comparativa, no qual se restringiu o universo do problema para a situação de concentração de tensão em chapas com furos centrados. Foi utilizado, como parâmetro de comparação, os ábacos de concentração de tensão apresentados nos livros de Hibbeler (2010) e Norton (2013) e as equações de Young e Budynas (2002), Heywood (1952) e Howland (1930). Para fins de comparação com o valor teórico da literatura definiu-se o erro como:

$$erro = 1 - \frac{K_t^{teórico}}{K_t^{FEM}} \quad (5.1)$$

Para determinar os valores intermediários, foi realizado um processo de ajuste de curva (curve fitting) utilizando o software Excel. Empregou-se o método dos mínimos quadrados para ajustar um polinômio de grau 4 aos dados obtidos pelo MEF, gerando uma expressão que representa qualquer valor de K_t^{FEM} dentro do intervalo estudado. A expressão resultante do MEF pode ser descrita da seguinte forma:

$$K_t^{FEM} = C_1 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + C_2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + C_3 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + C_4 \left(\frac{b}{a}\right) + C_5 \quad (5.2)$$

O coeficiente de determinação (R^2) também foi encontrado. Ele é uma medida estatística que indica a proporção da variância nos dados que é explicada pelo modelo de ajuste. Em outras palavras, ele mede o quão bem o modelo se ajusta aos dados observados. Interpretação do R^2 :

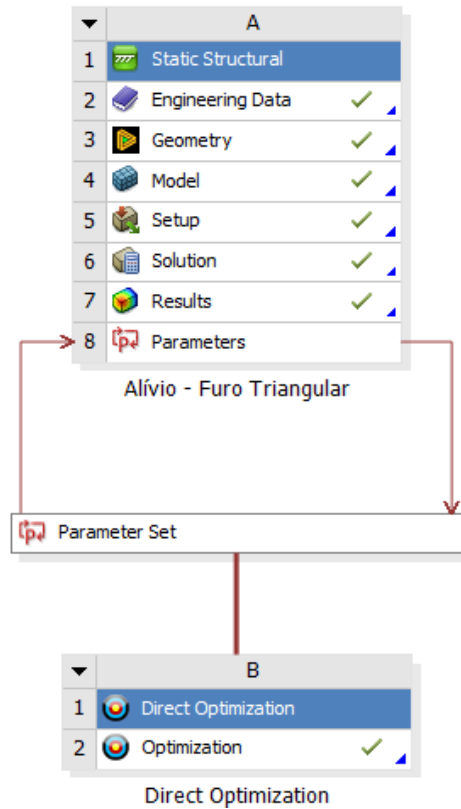
- $R^2 = 1$: Indica um ajuste perfeito. Todos os pontos dos dados estão exatamente sobre a curva do modelo, e toda a variância nos dados é explicada pelo modelo;
- $R^2 = 0$: Indica que o modelo não explica nenhuma variação nos dados. A curva do modelo não se ajusta aos dados e não é melhor do que uma linha horizontal traçada na média dos dados;
- $0 < R^2 < 1$: Indica que o modelo explica parte da variação nos dados, mas não toda. Quanto mais próximo de 1, melhor é o ajuste do modelo aos dados.

5.9 Metodologia de otimização

A metodologia adotada para solução do problema baseou-se na aplicação do método de otimização direta Adaptive Single-Objective do software ANSYS Workbench (apresentado no capítulo anterior) que é baseado em gradiente onde emprega refinamento inteligente automático para fornecer o ótimo global. A finalidade aqui é determinar candidatos estáveis para as variáveis definidas na sessão 5.10 onde é satisfeito a função objetivo.

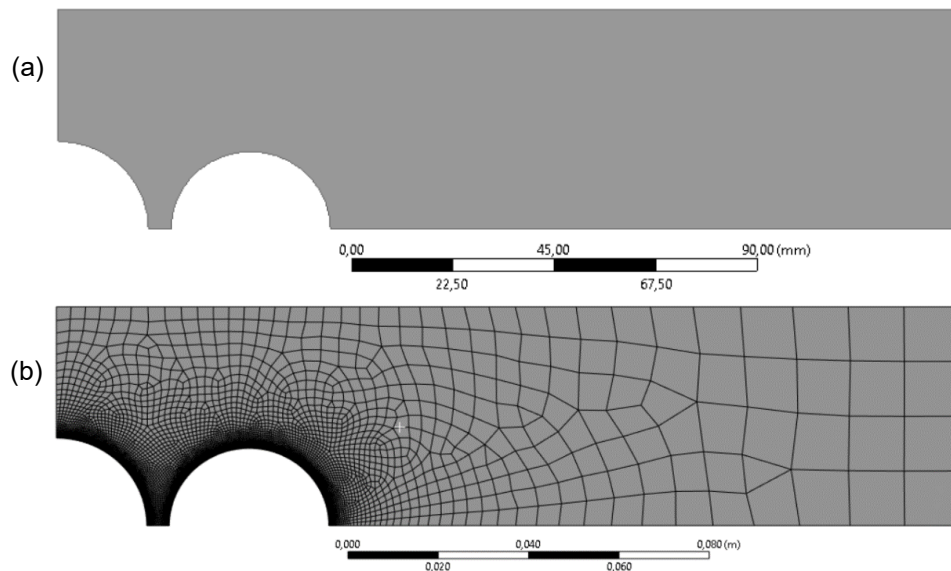
A figura 5.5 mostra o esquema geral do projeto. Primeiro foi definido, para uma Análise Estrutural Estática, as geometrias de cada caso, levando em consideração a redução do problema. Nesta etapa foi utilizado o módulo integrado Design Modeler (Figura 5.6a). Em cada análise é aplicado as condições de contorno citadas anteriormente e feito um estudo de convergência da malha, no módulo integrado Mechanical, definindo o tamanho do elemento finito na borda do furo e taxa de crescimento e, então, gerando a malha ideal (Figura 5.6b). Este processo é repetido em cada redução de domínio.

Figura 5.5 – Fluxo do Projeto.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 5.6 – (a) Modelo CAD no Design Modeler. (b) Malha convergida no Mechanical.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

A figura 5.7 demonstra algumas das variáveis (com seus limites) e função objetivo usadas, bem como as propriedades da otimização ASO para um caso. Em todas as análises é usado o número mínimo exigido de amostras geradas para a Krigagem inicial e de cada redução de domínio. Quanto maior o conjunto de amostras, maiores as chances de encontrar bons pontos verificados. No entanto, muitos pontos podem resultar em uma divergência na Krigagem.

Figura 5.7 – (a) Parâmetros de otimização. (b) Propriedades de otimização.

Table of Schematic B2: Optimization					
	A	B	C	D	
1	Input Parameters				
2	Name	Lower Bound	Upper Bound		
3	P1 - D1 (mm)	0,001	40		
4	P2 - D2 (mm)	0,001	40		
5	P3 - S (mm)	5	20		
6	P4 - H (mm)	0,001	20		
7	P5 - L (mm)	40,001	155		
Table of Schematic B2: Optimization					
	A	B	C	D	E
1	Name	Parameter	Objective		
2			Type	Target	Tolerance
3	Minimize P6	P6 - $\sigma=Kt$	Minimize	0	

Properties of Outline A13: Optimization		
	A	B
1	Property	Value
2	Design Points	
3	Preserve Design Points After DX Run	<input checked="" type="checkbox"/>
4	Retain Data for Each Preserved Design Point	<input checked="" type="checkbox"/>
5	Failed Design Points Management	
6	Number of Retries	0
7	Optimization	
8	Method Selection	Manual
9	Method Name	Adaptive Single-Objective
10	Estimated Number of Design Points	400
11	Tolerance Settings	<input checked="" type="checkbox"/>
12	Number of Initial Samples	21
13	Maximum Number of Evaluations	400
14	Convergence Tolerance	1E-06
15	Maximum Number of Candidates	1

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Por causa do fluxo de trabalho desse método (no qual um novo conjunto de amostra é gerado após cada redução de domínio), aumentar o número de amostras não melhora necessariamente a qualidade dos resultados e aumenta significativamente o número de avaliações, aumentando, assim, o tempo de análise. Dessa forma, o padrão adotado para a amostragem é:

$$Amostragem = \frac{(N_e + 1) * (N_e + 2)}{2} \quad (5.3)$$

Onde N_e é o número de parâmetros de entrada.

A discrepância do OSF é determinada pelo número de ciclos de otimização que o algoritmo precisa. A otimização é essencialmente combinatória, portanto, um grande número de ciclos torna o processo mais lento. No entanto, isso torna a discrepância

do OSF menor. O valor deve ser maior que 0. Para fins práticos, 10 ciclos geralmente são suficientes para até 20 variáveis. Assim, o padrão adotado é 10.

Outro fator que influi diretamente no processo de otimização e na qualidade do resultado é o valor da tolerância dos parâmetros de entrada e saída. Então, visando manter um padrão e resultados adequados, porém sem prejudicar o tempo de processamento, adotou-se um valor de 0,001, conforme demonstra a Figura 5.7. Esse valor é aplicado tanto na função objetivo quanto nas variáveis de projeto.

Os critérios de parada adotados na otimização foram:

- Número máximo de avaliações: número máximo de pontos de projeto que o algoritmo deve calcular. Se a convergência ocorrer antes que esse número seja alcançado, as avaliações param. Esse valor também fornece uma ideia do tempo máximo possível para executar a otimização. Foi definido como 400;
- Número máximo de reduções de domínio: número máximo de reduções de domínio para variação de entrada. O padrão é 20;
- Porcentagem de reduções de domínio: tamanho mínimo do domínio atual de acordo com o domínio inicial. Por exemplo, com uma entrada variando entre 0 e 100, o tamanho do domínio é igual a 100. A porcentagem de redução do domínio é 1%, então o tamanho do domínio de trabalho atual não pode ser menor que 1 (como uma entrada variando entre 5 e 6). O padrão é 0,1;
- Tolerância de convergência: diferença mínima permitida entre os valores de dois candidatos sucessivos. Se a diferença entre dois candidatos sucessivos for menor que o valor da Tolerância de Convergência multiplicado pela variação máxima do parâmetro, o algoritmo é interrompido. Um valor menor indica mais iterações de convergência e uma solução mais precisa (porém mais lenta). Um valor maior indica menos iterações de convergência e uma solução menos precisa (porém mais rápida). O padrão usado no projeto é 1E-06.

Após os cálculos numéricos, foram obtidos os valores da função objetivo e construída a superfície de resposta entre as variáveis de projeto e a função objetivo, utilizando o método Kriging. Em seguida, o algoritmo de otimização MISQP foi utilizado para encontrar os pontos candidatos sobre a superfície de resposta. Diferentes pontos candidatos podem ser obtidos devido à busca simultânea a partir de diferentes pontos iniciais.

De acordo com a predição de erros via Kriging, se houver questionamentos sobre os dados dos pontos candidatos, será feita uma nova rodada de cálculo numérico para verificação. A partir daí, a superfície de resposta Kriging será reconstruída com os pontos adicionais, e o MISQP será reiniciado na busca pela otimização até que todos os pontos de verificação estejam validados. Posteriormente, o espaço de otimização será reduzido de acordo com os pontos candidatos. Se os pontos candidatos estiverem no mesmo local, as fronteiras das variáveis de projeto serão reduzidas tendo estes pontos como centro. Caso contrário, a fronteira que contém os pontos candidatos é usada como limite de redução.

Após cada redução do espaço de otimização, novos pontos amostrais são gerados via Optimal Space-Filling para o novo espaço, e os cálculos numéricos correspondentes são realizados para obtenção dos valores de saída e geração de uma nova superfície de resposta Kriging. O processo de otimização se encerra quando um dos critérios de parada, que foram definidos, é atingido.

5.10 Variáveis de projeto

Nesta seção foram definidos os parâmetros e domínios para cada caso que variam de acordo com o número e formato da geometria de alívio. Em todos é imposta uma restrição mínima de 5 mm entre o furo central e a geometria de alívio, entre as geometrias de alívio (se houver mais de uma) e entre a geometria de alívio e a borda externa da placa afim de possibilitar a realidade de fabricação, embora neste trabalho não seja levado em conta uma análise experimental do mesmo.

Como o método ASO não permite o uso de relações entre parâmetros na otimização, a estratégia adotada foi garantir que o limite superior de cada parâmetro respeitasse a restrição de 5 mm. Dessa forma, a busca pelo ótimo global foi realizada em uma área maior, explorando um espaço de soluções mais amplo e aumentando a chance de encontrar a melhor configuração possível, mesmo sem considerar as relações entre os parâmetros.

Uma restrição fundamental imposta ao problema de otimização foi a limitação do diâmetro do furo de alívio, ou sua altura, em relação ao diâmetro central da chapa. Estabeleceu-se que o diâmetro, ou altura, da geometria de alívio nunca poderia exceder o diâmetro do furo central, garantindo assim a integridade estrutural da peça e evitando o enfraquecimento da região central. A imposição dessa restrição justifica-

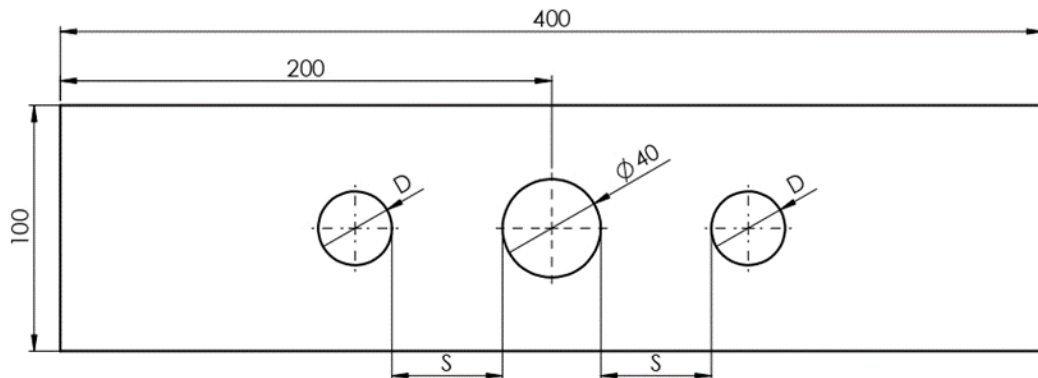
se pela necessidade de preservar a resistência da chapa, uma vez que um furo de alívio excessivamente grande poderia comprometer a capacidade da estrutura de suportar as cargas aplicadas, aumentando o risco de falha. A restrição foi implementada no modelo matemático do problema de otimização como uma desigualdade, assegurando que o algoritmo de otimização buscasse soluções que respeitassem essa condição.

5.10.1 Um furo de alívio

Para o caso de um furo circular de alívio as variáveis foram o diâmetro do furo D e o comprimento da parede S , Figura 5.8. Considerando que o diâmetro da geometria de alívio nunca deve exceder o diâmetro central e escrevendo o problema padrão de otimização para esse caso tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Função Objetivo: } f(x) = \sigma_{\text{máx}} \\ \text{Domínio: } \left\{ \begin{array}{l} 0 < D \leq 40 \\ 5 \leq S \leq 135 \end{array} \right\} \end{array} \right| \quad (5.4)$$

Figura 5.8 – Um furo de alívio.



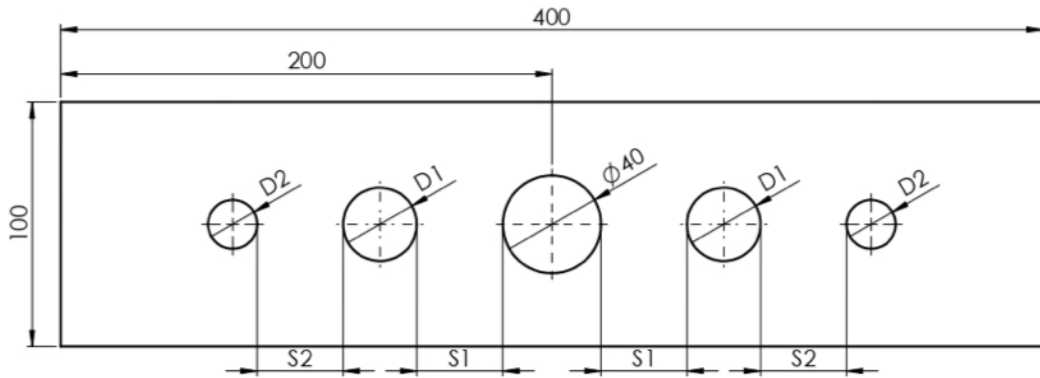
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.10.2 Dois furos de alívio

Semelhante ao caso anterior, no caso de dois furos circulares de alívio as variáveis de projeto foram os diâmetros D_1 e D_2 e os comprimentos das paredes correspondentes S_1 e S_2 , Figura 5.9. Assim, escrevendo o problema padrão de otimização têm-se:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Função Objetivo: } f(x) = \sigma_{\text{máx}} \\ \text{Domínio: } \left\{ \begin{array}{l} 0 < D_1 \leq 40 \\ 0 < D_2 \leq 40 \\ 5 \leq S_1 \leq 47,5 \\ 5 \leq S_2 \leq 47,5 \end{array} \right\} \end{array} \right| \quad (5.5)$$

Figura 5.9 – Dois furos de alívio.



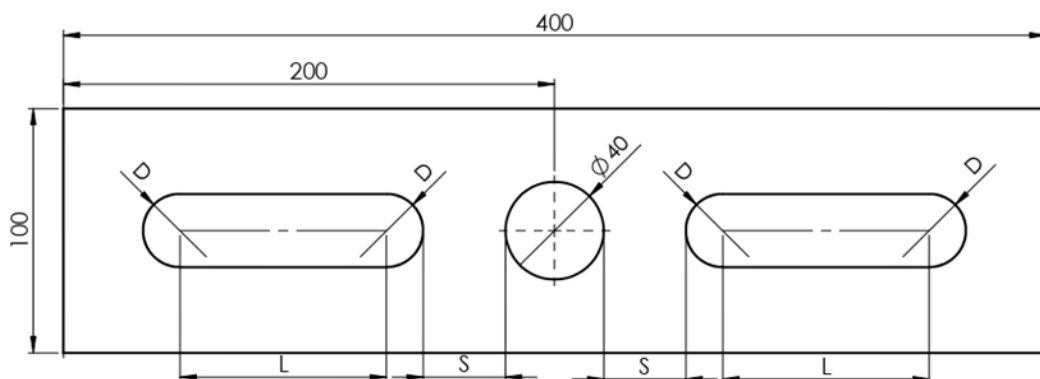
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.10.3 Furo oval de alívio

Já para o caso do furo oval os parâmetros adotados foram o diâmetro das bordas D , a distância entre centros L e a parede S , Figura 5.10. Escrevendo o problema padrão de otimização para o caso com furo oval tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Função Objetivo: } f(x) = \sigma_{\text{máx}} \\ \text{Domínio: } \left\{ \begin{array}{l} 0 < D \leq 40 \\ 0 < L \leq 95 \\ 5 \leq S \leq 40 \end{array} \right\} \end{array} \right| \quad (5.6)$$

Figura 5.10 – Furo oval de alívio.



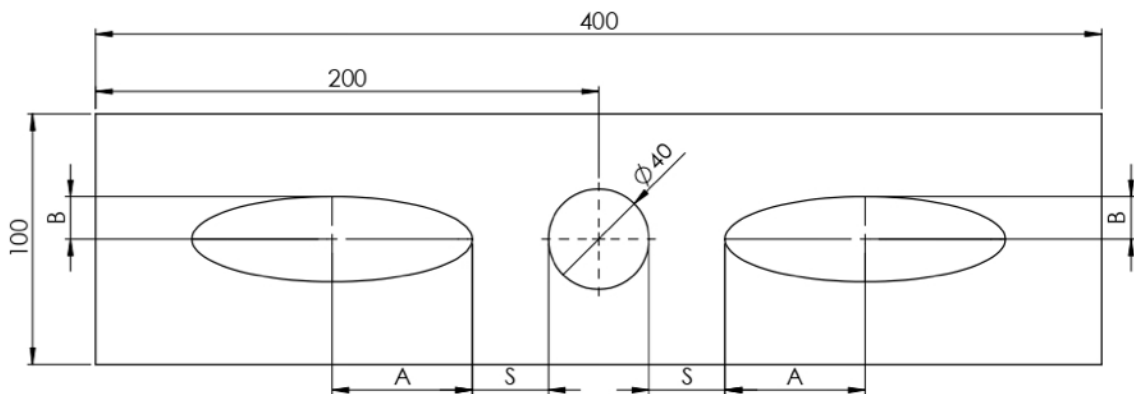
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.10.4 Furo elíptico de alívio

As variáveis de projeto usadas na geometria de alívio com um furo elíptico foram as dimensões da elipse A e B e a dimensão da parede S , Figura 5.11. Nota-se que o valor de B é estipulado de tal forma que a altura da elipse não ultrapasse o tamanho do furo central. Dessa forma, escrevendo o problema padrão de otimização para o caso com furo elíptico:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Função Objetivo: } f(x) = \sigma_{m\acute{a}x} \\ \text{Domínio: } \begin{cases} 0 < A \leq 60 \\ 0 < B \leq 20 \\ 5 \leq S \leq 40 \end{cases} \end{array} \right| \quad (5.7)$$

Figura 5.11 – Furo elíptico de alívio.



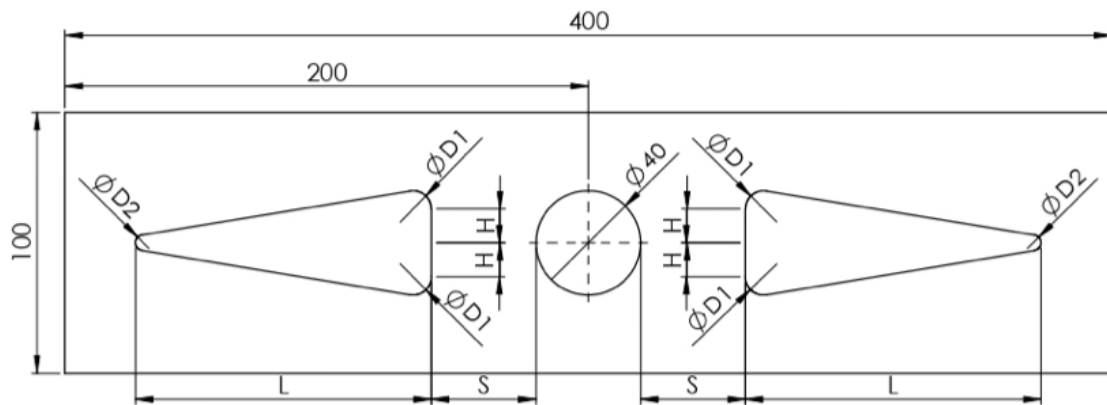
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

5.10.5 Furo triangular de alívio

Para o caso de furo triangular foram utilizadas como variáveis os diâmetros das bordas D_1 e D_2 , a distância entre centros L , a altura H e o comprimento de parede S , Figura 5.12. Assim como todos os casos é adotada uma restrição mínima de 5 mm entre o furo central e o elemento de alívio. Porém, neste caso, devido à complexidade de variáveis e o método não disponibilizar relacionamento de parâmetros, a altura da geometria de alívio pode exceder o diâmetro do furo central em alguns pontos de otimização, porém sem comprometer a estrutura. Escrevendo o problema padrão de otimização para o caso com furo triangular:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Função Objetivo: } f(x) = \sigma_{\text{máx}} \\ \text{Domínio: } \left\{ \begin{array}{l} 0 < D_1 \leq 40 \\ 0 < D_2 \leq 40 \\ 40 < L \leq 155 \\ 0 < H \leq 20 \\ 5 \leq S \leq 20 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Figura 5.12 – Furo triangular de alívio.



Fonte: Autoria própria.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta e discute os resultados obtidos na otimização. O objetivo é analisar a influência dos parâmetros geométricos dos furos adicionais na redução da concentração de tensões na região do furo central, visando identificar as configurações que maximizam a resistência da estrutura. Os resultados são apresentados em forma de tabelas, gráficos e figuras, comparando diferentes casos de estudo e validando as soluções encontradas através de análises adicionais. A discussão dos resultados visa interpretar o significado físico dos valores obtidos, relacioná-los com os objetivos da pesquisa e a literatura relevante, e identificar as principais conclusões e contribuições do estudo.

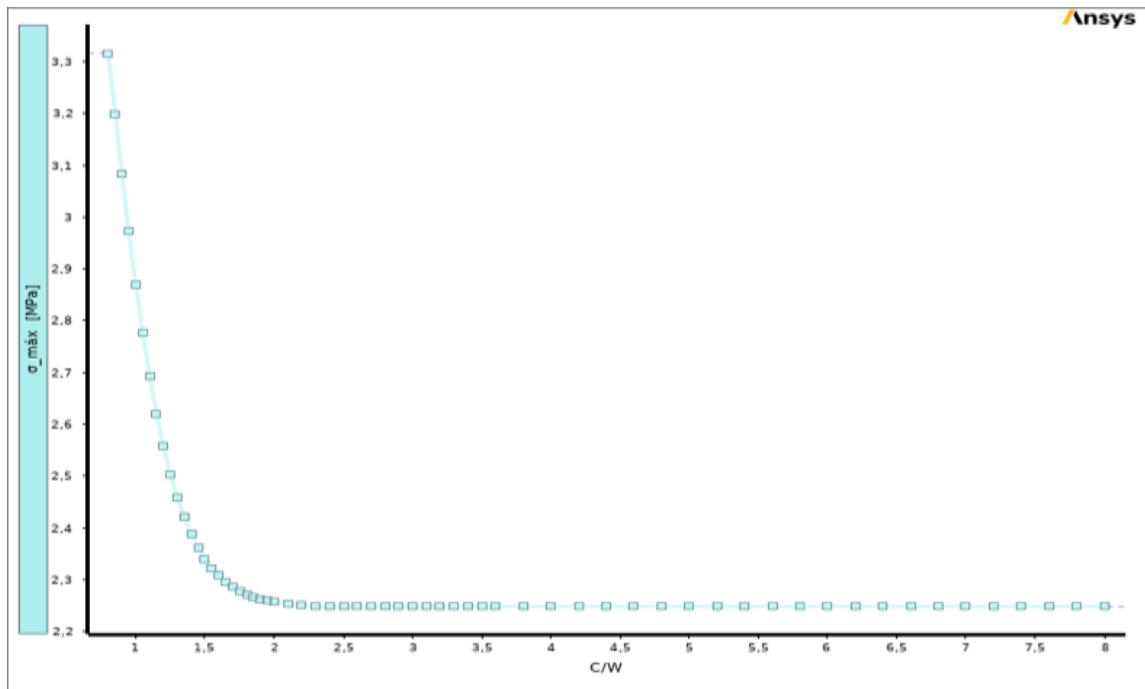
6.1 Comprimento da placa sem alívio

Conforme seção 5.2, foi modelado uma análise preliminar, com aspecto de malha e condições de contorno que foram discutidos anteriormente, mantendo W , D e h constantes enquanto se variava C . O objetivo foi projetar a chapa de forma que os efeitos da concentração de tensões, previstos por Saint-Venant, sejam minimizados ou controlados. Se a chapa for muito curta em relação ao diâmetro do furo central, a proximidade da borda da chapa com o furo pode influenciar significativamente a distribuição de tensões na região do furo. Isso ocorre porque a borda da chapa age como um ponto de restrição, alterando o fluxo natural das tensões que se concentrariam no furo.

O gráfico da Figura 6.1 mostra a difusão da máxima tensão de von Mises à medida que a placa cresce longitudinalmente tendendo à constância. Dessa forma, foi usado um comprimento de 400 mm correspondente à 4 vezes a altura da placa onde já não se nota mais a influência do princípio de Saint-Venant.

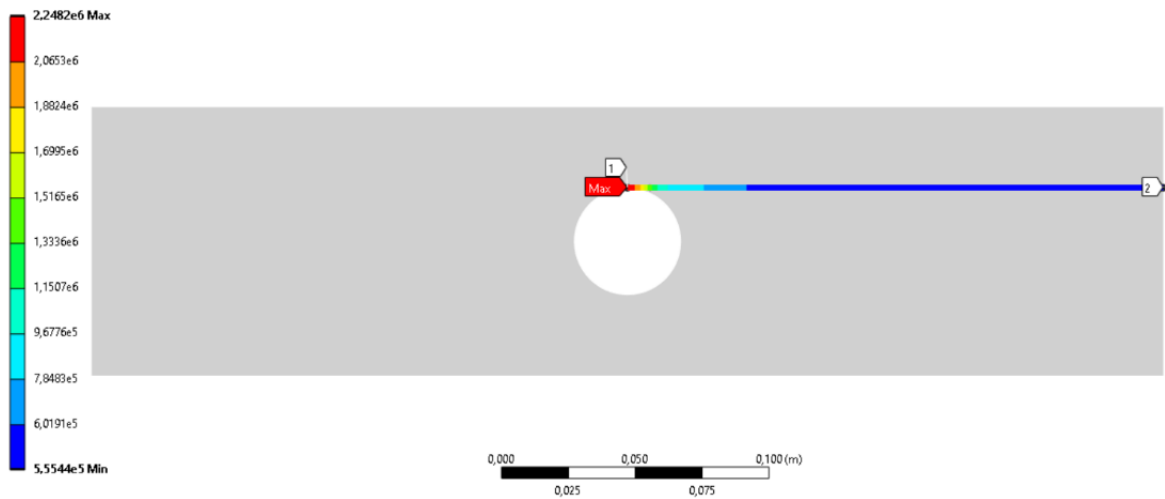
Já a Figura 6.2 mostra o nível superior de tensão na borda do furo decorrente da concentração de tensão decaindo ao valor médio de tensão nominal à medida que se afasta da região de descontinuidade e se aproxima da região de carregamento verificando, assim, o princípio. A partir dessa análise preliminar, definiu-se a geometria base para os estudos de otimização, buscando as configurações de furos adicionais que maximizassem a redução da concentração de tensões na região do furo central.

Figura 6.1 – Tensão de von Mises em função do comprimento da configuração inicial.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 6.2 – Gradiente de tensão ao longo do comprimento da configuração inicial.



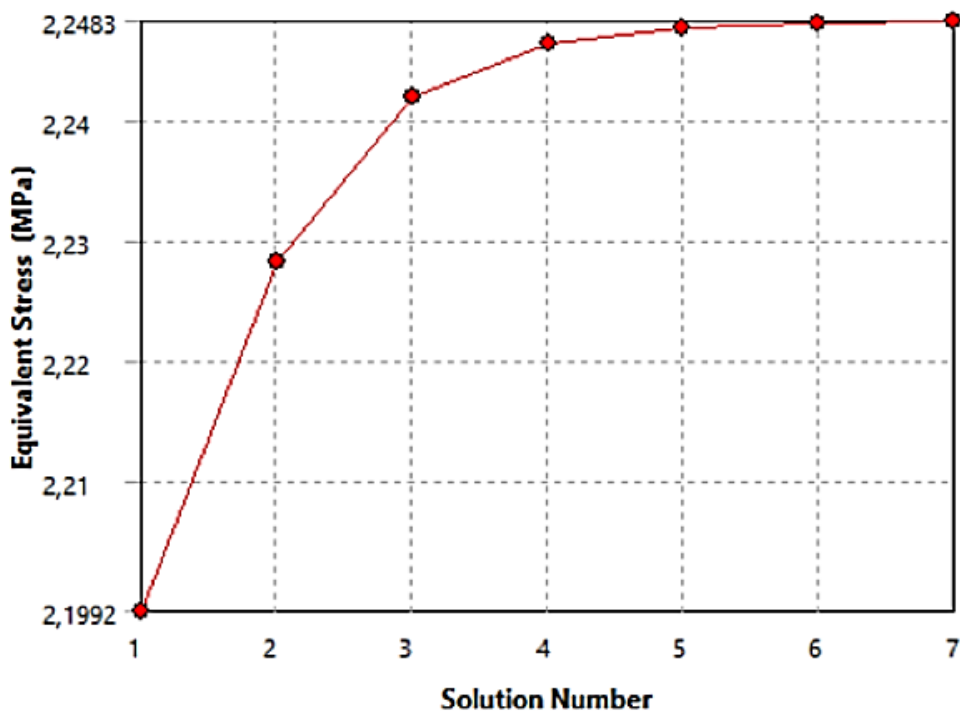
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

6.2 Discretização da malha

O gráfico da Figura 6.3 mostra o resultado de convergência para a placa sem o uso de geometria de alívio onde se utilizou a ferramenta de convergência do Ansys Mechanical com um passo de refinamento de 2 e um limite de convergência de 0,01%.

Assim, a malha foi sucessivamente refinada até que a diferença entre o valor da tensão máxima no ponto de interesse fosse menor do que 0.01% entre a última e a anterior. Com base nos resultados obtidos, após 7 refinamentos de malha, foi definido que o tamanho máximo do elemento global a ser utilizado seria de 12,5 mm sendo que a borda do furo seria refinada com elementos de até 0,1 mm para captar o gradiente de tensão no objeto principal de estudo que é o concentrador de tensão.

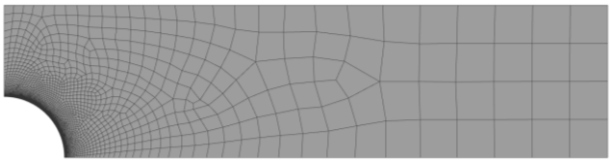
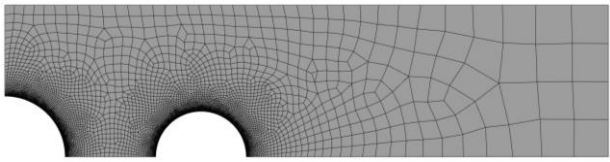
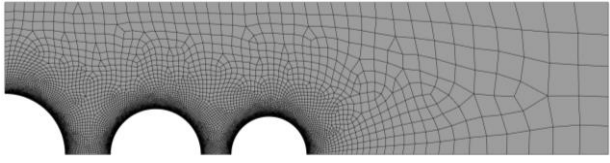
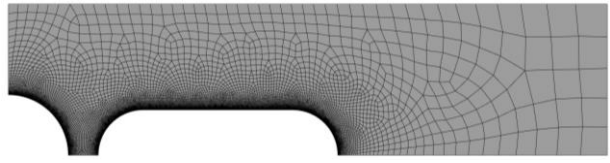
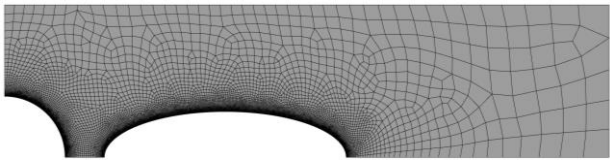
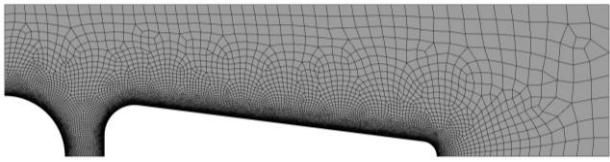
Figura 6.3 – Convergência de malha da configuração inicial.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

A taxa de crescimento na transição de malha é de 1,1. Essa razão permite um refinamento gradual da malha. Isso ajuda a evitar mudanças abruptas na rigidez dos elementos, reduzindo a probabilidade de erros numéricos e instabilidades na solução. No mais, uma transição suave entre elementos de diferentes tamanhos contribuiu para uma convergência mais rápida e estável da solução numérica à medida que contribuiu para um melhor condicionamento da matriz de rigidez, facilitando a sua solução numérica e reduzindo a probabilidade de erros numéricos. O aspecto de malha otimizado em todas as formas de alívio pode ser visualizado na Tabela 6.1. O número de elementos e de nós indicados na tabela não é constante, mas varia durante o processo de otimização, em função da geometria do elemento de alívio.

Tabela 6.1 – Malha convergida em cada caso de alívio

Caso	Nº Elementos	Nº Nós	Aspecto da Malha
Sem Alívio	4.543	14.024	
Um Furo Circular	10.613	32.692	
Dois Furos Circulares	15.560	47.865	
Furo Oval	16.667	51.254	
Furo Elíptico	15.239	46.876	
Furo Triangular	20.635	63.438	

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observa-se que o elemento finito usado é predominantemente PLANE 183, porém o programa utilizou de alguns elementos SURF 153, que é um elemento bidimensional de três nós e dois graus de liberdade por nó. A quantidade desses elementos é relativamente baixa comparado ao PLANE 183 (cerca de 0,04% em média). Assim, a presença de elementos SURF153 não indica necessariamente um erro na geração da malha. O SURF153 pode ser usado como um elemento de transição entre regiões com diferentes densidades de malha. Desta forma, como se refinou a malha em torno do furo central para capturar melhor a concentração de

tensões, o ANSYS inseriu elementos SURF153 para conectar a malha mais fina (próximo ao furo) com a malha mais grossa (no restante da placa). Essa transição gradual ajuda a evitar erros numéricos e garantir a continuidade da solução.

6.3 Verificação numérica

Assim, baseando-se na configuração inicial do problema e utilizando-se os elementos de malha descrito anteriormente, fez-se um levantamento dos fatores de concentração de tensão para cada relação de diâmetro e altura, Tabela 6.2. A mesma tabela também mostra o número de nós e de elementos bem como o valor da qualidade métrica da malha (valor médio Element Qualit) e seu desvio padrão. Por fim, os valores foram comparados com os dados presentes na literatura representado no gráfico da Figura 6.4.

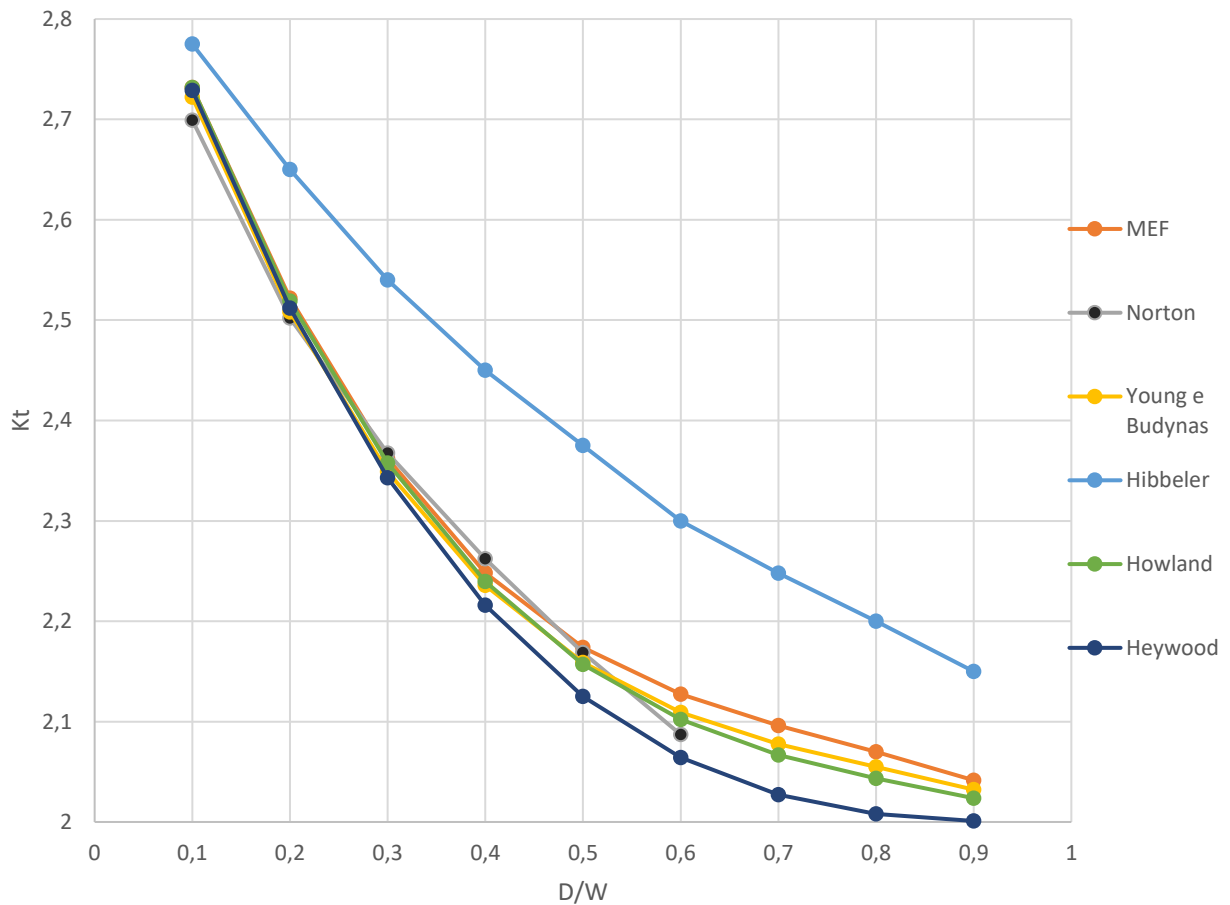
Percebeu-se que há uma divergência significativa quando comparados os resultados do MEF com o ábaco apresentado por Hibbeler (2010). Em contrapartida, os ábacos confeccionados com base nas equações apresentadas por Young e Budynas (2002), Norton (2013) e Howland (1930) apresentam resultados mais próximos dos obtidos pelo MEF. Dessa forma, com base na relação de diâmetro do furo e da altura da placa, determinou-se os erros conforme Tabela 6.3. Para o presente estudo o erro mínimo calculado é de 0,39% e o máximo é de 8,24%.

Tabela 6.2 – Levantamento dos fatores de K_t .

D/W	F[N]	$\sigma_{méd}$ [Mpa]	$\sigma_{máx}$ [Mpa] = K_t	Nº Nós	Nº Elementos	Qualidade	Desvio Padrão
0,1	900	1	2,73	4648	1487	0,94	0,05
0,2	800	1	2,52	7505	2420	0,95	0,05
0,3	700	1	2,36	10441	3376	0,96	0,05
0,4	600	1	2,25	14024	4543	0,95	0,05
0,5	500	1	2,17	16161	5234	0,95	0,05
0,6	400	1	2,13	18487	5990	0,95	0,05
0,7	300	1	2,10	20558	6651	0,96	0,04
0,8	200	1	2,07	23606	7651	0,95	0,05
0,9	100	1	2,04	25285	8188	0,95	0,05

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 6.4 – Gráfico de comparação entre os resultados.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Tabela 6.3 – Comparação dos resultados de K_t^{FEM} com a literatura.

D/W	MEF x Norton	MEF x Young e Budynas	MEF x Hibbeler	MEF x Howland	MEF x Heywood
0,1	1,20%	0,36%	-1,56%	0,00%	0,10%
0,2	0,80%	0,55%	-4,84%	0,11%	0,39%
0,3	-0,23%	0,55%	-7,01%	0,19%	0,81%
0,4	-0,62%	0,56%	-8,24%	0,39%	1,45%
0,5	0,23%	0,70%	-8,47%	0,78%	2,29%
0,6	1,93%	0,86%	-7,51%	1,20%	3,07%
0,7	-	0,89%	-6,76%	1,42%	3,41%
0,8	-	0,73%	-5,91%	1,30%	3,08%
0,9	-	0,46%	-5,04%	0,88%	2,03%

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Conforme os resultados MEF, foi aplicado o Curve Fitting gerando um polinômio de grau 4 (equação 6.1). O coeficiente de determinação do modelo igual a 1 indica que a curva do modelo se alinha perfeitamente com os dados observados, explicando completamente a variação presente neles.

$$K_t^{FEM} = -0,3834 \left(\frac{D}{W}\right)^4 - 0,8786 \left(\frac{D}{W}\right)^3 + 3,2843 \left(\frac{D}{W}\right)^2 - 3,0343 \left(\frac{D}{W}\right) + 3,0038 \quad (6.1)$$

$$R^2 = 1 \quad (6.2)$$

6.4 Redução da concentração de tensão

As tabelas dos apêndices A à E mostram todos os dados relevantes para cada caso de otimização e os resultados obtidos. Os apêndices também trazem os gráficos de convergência da função objetivo e de cada parâmetro empregado representando as reduções de domínio e o decorrer do processo. A análise detalhada dos resultados, apresentada nas tabelas e gráficos dos Apêndices, permite identificar as relações entre os parâmetros de projeto e a redução da concentração de tensão.

Em todas as análises foi convergido a função objetivo sendo que o critério de parada alcançado foi a tolerância de convergência que é o ideal para alcançar os resultados esperados. Logo, nenhuma análise atingiu o número máximo de iterações ou de reduções de domínio, indicando a eficiência do algoritmo ASO na busca pelo ótimo global.

A ausência de falhas na otimização das reduções de domínio demonstra a sinergia entre as técnicas de DOE OSF, Kriging e MISQP, que compõem o algoritmo ASO. A combinação dessas técnicas permitiu explorar o espaço de projeto de forma eficiente, identificando as regiões mais promissoras e reduzindo o domínio de busca de forma inteligente. Assim, A análise dos resultados demonstra que o método ASO se mostrou eficaz na otimização de problemas com múltiplas variáveis e restrições, convergindo para soluções ótimas em um número razoável de iterações.

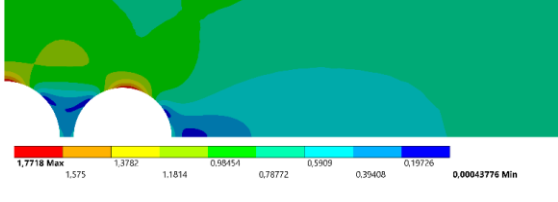
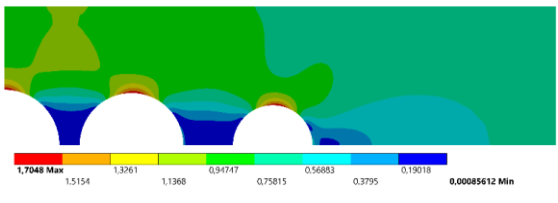
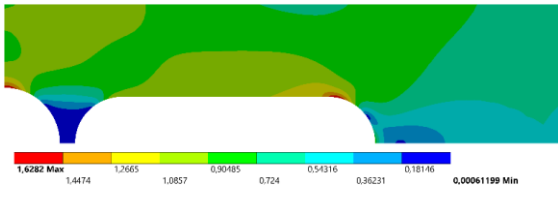
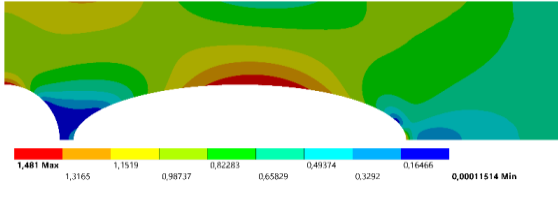
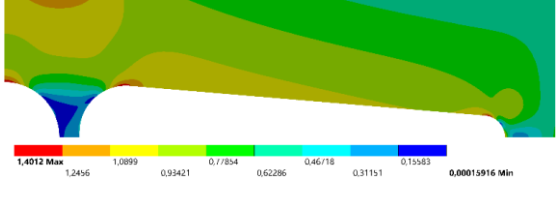
Observou-se que o número de iterações necessárias para a convergência da solução é proporcional ao número de variáveis de projeto e, conseqüentemente, ao número de amostras iniciais seguindo o critério pré-estabelecido. Essa relação indica que a complexidade do problema influencia diretamente o esforço computacional necessário para encontrar a solução ótima. No entanto, o número de reduções de

domínio não apresentou um padrão claro. Com exceção do último caso, o algoritmo ASO realizou um número similar de reduções de domínio, sugerindo que a topologia do espaço de projeto e a distribuição das amostras iniciais podem influenciar a estratégia de redução de domínio adotada pelo algoritmo.

A Tabela 6.4 contém uma síntese dos resultados com as configurações dos pontos de projetos finais, o estado plano de tensões de von Mises e a redução das concentrações de tensão. O valor máximo de tensão não ultrapassa o limite de escoamento do material, visto que as tensões nominais são baixas e o interesse do estudo é apenas demonstrar as localizações das concentrações de tensão e a redução obtida pela geometria de alívio.

Como já era esperado, os picos de tensão ocorrem nas bordas das descontinuidades geométricas. Percebe-se que em todos os casos o comprimento da parede entre o furo central e a geometria de alívio tendem ao valor mínimo de restrição, enquanto o diâmetro (ou altura) do furo de alívio possui um valor próximo ao furo central, incluindo o último caso em que as restrições permitiam um furo maior, porém a altura do furo otimizado se mostrou menor que o furo central da chapa, seguindo a mesma lógica que o restante dos casos. Isso ocorre devido à suavização de linhas de tensão, tornando sua trajetória mais suave e uniforme. Dessa forma, como era previsto, o caso de alívio envolvendo um furo triangular tem a maior redução da tensão, chegando à 38%.

Tabela 6.4 – Resultados de otimização.

Caso	K_t^{FEM}	Redução	Parâmetros (mm)		Estado de Tensões de Von Mises (MPa)
Um Furo Circular	1,772	21%	D	35,312	
			S	5	
Dois Furos Circulares	1,705	24%	D_1	37,618	
			D_2	28,867	
			S_1	7,34	
			S_2	17,973	
Furo Oval	1,628	28%	D	33,397	
			S	5,48	
			L	74,536	
Furo Elíptico	1,481	34%	A	60	
			B	19,949	
			S	5	
Furo Triangular	1,401	38%	D_1	33,647	
			D_2	15,748	
			S	7,329	
			H	1,854	
			L	154,42	

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

7 CONCLUSÃO

O presente estudo investigou a otimização da geometria de placas no estado plano de tensão com furos centrais submetidas à tração, visando a redução da concentração de tensões. A metodologia empregou o Método dos Elementos Finitos em conjunto com o algoritmo de otimização Adaptive Single-Objective. A utilização de malhas adequadas e a escolha de modelos teóricos consistentes foram fundamentais para a obtenção de soluções precisas e representativas do comportamento real da estrutura. Ao longo deste estudo, foram investigadas diferentes geometrias de furos de alívio (circular, dois furos circulares, oval, elíptico e triangular) para determinar a configuração que proporcionasse a maior redução na concentração de tensões.

Os resultados obtidos demonstraram a eficácia do MEF na análise da distribuição de tensões e a capacidade do algoritmo ASO em encontrar soluções ótimas, convergindo em um número razoável de iterações, mesmo em problemas com múltiplas variáveis e restrições. A ausência de falhas e a otimização das reduções de domínio evidenciaram a sinergia entre as técnicas DOE OSF, Kriging e MISQP, permitindo a exploração eficiente do espaço de projeto e a identificação das regiões mais promissoras, identificando geometrias de alívio que promovem a suavização das linhas de tensão e, conseqüentemente, a redução dos picos de tensão.

Os principais resultados obtidos demonstram que a inclusão de furos de alívio é uma técnica eficaz para reduzir a concentração de tensões em placas submetidas à tração uniaxial. Em particular, a geometria do furo triangular mostrou-se a mais eficiente, resultando em uma redução de 38% na tensão máxima ao redor do furo central corroborando a hipótese inicial de que essa geometria seria mais eficiente. Este achado é significativo, pois evidencia a importância de considerar diferentes configurações geométricas na otimização estrutural, com vistas a minimizar pontos críticos de concentração de tensão.

A análise da relação entre a granulometria da malha e a precisão da solução confirmou a importância de um refinamento adequado para capturar as nuances da distribuição de tensões, especialmente em regiões com alta concentração, mostrando como o aumento do número de elementos e o refinamento da malha na região do furo central levam a uma redução significativa do erro de aproximação geométrica. A utilização predominante do elemento PLANE183, com o auxílio de alguns elementos

SURF153 para transição de malha, mostrou-se adequada para a modelagem do problema, resultando em malhas de alta qualidade.

A comparação dos resultados do MEF com os dados da literatura revelou divergências significativas em relação ao ábaco de Hibbeler (2010). Em contrapartida, os ábacos baseados nas equações de Young e Budynas (2002), Norton (2013) e Howland (1930) apresentaram resultados mais próximos aos obtidos pelo MEF, com erros variando entre 0,39% e 8,24%. Este estudo demonstra a importância da verificação numérica e da comparação com dados da literatura para garantir a confiabilidade dos resultados obtidos.

O objetivo geral foi plenamente atingido, conforme demonstrado pela aplicação bem-sucedida do MEF e do algoritmo ASO para identificar as configurações geométricas ótimas de furos de alívio que resultaram em uma redução significativa das tensões máximas na placa. Em suma, este trabalho atingiu todos os objetivos propostos, avançando o conhecimento sobre a otimização paramétrica de alívio de tensões e fornecendo uma metodologia prática e validada para a engenharia mecânica.

Portanto, o estudo deste caso simples de concentração de tensão é fundamental para a compreensão de fenômenos mais complexos em engenharia e design de produtos. Ao analisar a distribuição das tensões ao redor de um furo central em uma placa, obtemos insights valiosos que podem ser extrapolados para estruturas mais complexas. Este conhecimento é essencial para validar modelos teóricos, aprimorar simulações numéricas e otimizar o design de componentes estruturais. Com uma melhor compreensão da distribuição de tensões, engenheiros podem desenvolver soluções mais eficientes e seguras, aplicáveis a uma ampla gama de contextos industriais, desde a fabricação de peças mecânicas até a construção de grandes estruturas.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar das significativas contribuições deste estudo, algumas limitações devem ser reconhecidas. Primeiramente, a pesquisa concentrou-se em um tipo específico de material, o que pode restringir a generalização dos resultados para outros materiais com diferentes propriedades mecânicas. Além disso, o estudo focou-se exclusivamente em condições de tração uniaxial, não abordando outras condições de carregamento, como flexão, torção ou compressão, que podem revelar comportamentos estruturais distintos e, possivelmente, influenciar a eficácia dos furos de alívio de maneiras não previstas neste estudo.

Ademais, a investigação restringiu-se a algumas geometrias específicas de furos de alívio, sugerindo que futuras pesquisas poderiam explorar uma maior diversidade de configurações geométricas para potencialmente obter reduções adicionais nas tensões. Também, o estudo utilizou simulações numéricas para validar os resultados, o que, embora seja uma abordagem poderosa, ainda precisa ser complementada com validações experimentais para assegurar a precisão e a aplicabilidade prática das conclusões obtidas.

Portanto, a necessidade de estudos complementares para validar e expandir a aplicabilidade da metodologia desenvolvida é evidente, abrindo um leque de possibilidades para pesquisas futuras em diferentes contextos da engenharia. Algumas sugestões para trabalhos futuros incluem:

1. Impacto da geometria inicial da placa: investigar como diferentes geometrias iniciais da placa (por exemplo, formas não circulares ou placas com bordas irregulares) afetam a distribuição de tensões e a eficácia dos furos de alívio, propondo configurações otimizadas para cada caso;
2. Exploração de novas geometrias de alívio: estudar o efeito de outras formas geométricas de alívio, como furos elípticos com diferentes excentricidades e entalhes em "U" ou "V", para identificar quais geometrias proporcionam melhores reduções de tensões;
3. Interações entre múltiplos furos: explorar a interação entre múltiplos furos de alívio e suas configurações ótimas, investigando como a disposição e o número de furos influenciam a distribuição de tensões;

4. Variação das condições de contorno e carregamento: analisar a influência de diferentes condições de contorno (apoios, engastes) e tipos de carregamento (flexão, torção) na eficácia das geometrias de alívio, verificando a robustez da metodologia em variadas situações de uso;
5. Estudo de efeitos térmicos: investigar como variações de temperatura afetam a distribuição de tensões e a eficácia dos furos de alívio em placas sujeitas a carregamentos térmicos, considerando a expansão e contração térmica dos materiais;
6. Modelagem dinâmica: avaliar o desempenho dos furos de alívio sob condições dinâmicas, como carregamentos cíclicos e impactos, para determinar a resistência à fadiga e a durabilidade das placas com diferentes geometrias de alívio;
7. Aplicação a outros materiais: estender a análise para outros materiais além do aço, como alumínio, titânio e materiais compósitos, considerando suas propriedades específicas e comportamentos sob diferentes condições de carregamento;
8. Otimização de Forma e Topológica: aplicar técnicas de otimização de Forma e Topológica, em conjunto com o MEF e o algoritmo ASO, para desenvolver novas configurações geométricas que maximizem a resistência e minimizem o peso da placa;
9. Validação experimental: realizar testes experimentais extensivos em laboratório, utilizando métodos avançados de medição, como Extensometria e Fotoelasticidade, para validar os resultados numéricos e ajustar os modelos de simulação conforme necessário;
10. Otimização Multiobjetivo: desenvolver uma abordagem de Otimização Multiobjetivo que considere não apenas a redução de tensões, mas também outros critérios de desempenho, como peso, custo de fabricação e rigidez estrutural;
11. Aplicações em estruturas complexas: aplicar a metodologia de otimização de alívio de tensão a estruturas mais complexas e reais, como componentes

aeronáuticos, automotivos e biomecânicos, avaliando a viabilidade e os benefícios em cenários de aplicação prática;

12. Otimização de processos industriais: investigar a utilização do método ASO na otimização de processos industriais, como fabricação, usinagem e conformação, visando a melhoria da eficiência e da qualidade dos produtos;
13. Otimização de sistemas energéticos: utilizar o método ASO para otimizar o desempenho de sistemas energéticos, como turbinas eólicas, painéis solares e sistemas de refrigeração, contribuindo para a redução do consumo de energia e mitigação dos impactos ambientais;
14. Utilização de diferentes técnicas de modelagem numérica: investigar a aplicação de outras técnicas de modelagem numérica, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), em conjunto com o algoritmo ASO, para comparar e potencialmente aprimorar os resultados obtidos.

Dessa forma, os resultados obtidos neste estudo não apenas validam a eficácia das técnicas de alívio de tensão investigadas, mas também destacam a importância contínua da pesquisa e desenvolvimento em Engenharia Estrutural. A continuidade das investigações nas direções sugeridas poderá ampliar ainda mais as aplicações e a eficiência das técnicas de alívio de tensão, contribuindo para a evolução e inovação no campo da Engenharia Estrutural.

REFERÊNCIAS

ANSYS, INC. **ANSYS Workbench User's Guide**. Release 2024. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2024.

ARORA, Jasbir S. **Introduction to optimum design**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2004.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

ARANHA, Norberto et al. **A lei de Hooke e as molas não-lineares, um estudo de caso**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, e4305, 2016.

ASKELAND, Donald R.; WRIGHT, Wendelin J. **Ciência e engenharia dos materiais**. São Paulo: Cengage Learning, 2023.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

BELIE, R. G.; APPL, F. J. **Stress concentration in tensile strips with large circular holes**. Experimental Mechanics, v. 12, p. 190, 1972. Discussão em v. 13, p. 255, 1973.

BEER, Ferdinand P. et al. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

BENDSØE, Martin P.; SIGMUND, Ole. **Topology optimization: theory, methods and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

BORTOLON, Victor Paz. **Análise de fatores intervenientes na propagação de trincas de cima para baixo em pavimentos asfálticos a partir do software ABAQUS**. 2023. 96 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2023.

BOTELHO, Manoel Henrique Campos. **Resistência dos materiais: para entender e gostar**. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2017. 264 p.

BUDYNAS, Richard G.; NISBETT, J. Keith. **Shigley's Mechanical Engineering Design**. 8th ed. New York: McGraw-Hill, 2008. 992 p.

CHANDRUPATLA, Tirupathi R.; BELEGUNDU, Ashok D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. 660 p.

COKER, E. G.; FILON, L. N. G. **A treatise on photoelasticity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. p. 486.

COLLINS, J. A.; BUSSEL, H. W.; STAPLETON, W. J. **Mechanical design of machine elements and machines: a failure prevention perspective**. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.

CHRISTIANSEN, S. **Determinação numérica de tensões em uma placa finita ou infinita com vários furos de forma arbitrária.** Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, v. 48, n. 8, p. T131-T134, 1968.

COURANT, R. **Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.** Bulletin of the American Mathematical Society, v. 49, n. 1, p. 1-23, 1943.

DHATT, G.; TOUZOT, G.; LEFRANÇOIS, E. **The finite element method for fluids.** Chichester: Wiley, 2012.

EXLER, Oliver; SCHITTKOWSKI, Klaus; LEHMANN, Thomas. **A comparative study of numerical algorithms for nonlinear and nonconvex mixed-integer optimization.** Mathematical Programming Computation, v. 4, n. 4, p. 383-412, 2012.

FARIA, Renan Monteiro de. **Minimização da concentração de tensão em componentes mecânicos via otimização estrutural.** 2023. 120 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A First Course in Finite Elements.** Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

GOMES, J. F. Silva. **Mecânica dos sólidos e resistência dos materiais.** Porto: INEGI-Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, 2004.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. (Ed.). **Elements of structural optimization.** 3. ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992.

HENNIG, A. **Polarisationsoptische Spannungsuntersuchungen am gelochten Zugstab und am Nietloch.** Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens Ausgabe A, v. 4, p. 53-63, 1933.

HERRERA, Pedro Henrique. **Análise de estruturas compósitas laminadas via dano progressivo.** 2022. 96 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2022.

HRENNIKOFF, A. **Solution of problems in elasticity by the framework method.** Journal of Applied Mechanics, v. 8, n. 4, p. A169-A175, 1941.

HEYWOOD, R. B. **Designing by photoelasticity.** London: Chapman & Hall, 1952.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HILÁRIO, Jean César et al. **Simulação do comportamento dinâmico de uma liga com memória de forma utilizando um algoritmo adaptado para o software ANSYS.** In: CONGRESSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA - CMN, 2019, Guimarães. Anais... Guimarães: Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, 2019.

HOWLAND, R. C. J. **On the stresses in the neighborhood of a circular hole in a strip under tension**. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, v. 229, p. 49-86, 1930.

ISIDA, M. **Form factors of a strip with an elliptic hole in tension and bending**. Scientific Papers of the Faculty of Engineering, Tokushima University, v. 4, p. 70, 1953.

KOMATSU, José Sergio; CHRISTOFORO, André Luis. **Resistência dos materiais**. São Carlos: EdUFSCar, 2022. (ePub)

KRIGE, D. G. **A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand**. Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, v. 52, n. 6, p. 119-139, 1951.

KOITER, W. T. **An elementary solution of two stress concentration problems in the neighborhood of a hole**. Quarterly of Applied Mathematics, v. 15, p. 303, 1957.

KUCKOSKI, Adriano. **Otimização de estruturas unifilares por programação inteira com restrições de falha**. 2013. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

LEE, H.-H. **Finite element simulations with ANSYS Workbench 17**. Mission (KS): Schroff Development Corporation, 2017.

MATHERON, G. **Principles of geostatistics**. Economic Geology, v. 58, n. 8, p. 1246-1266, 1963.

MACIEL, Leonardo Gomes; SANTOS, Pedro Vinicio dos. **Ferramenta para a otimização estrutural utilizando os algoritmos Enxame de Partículas (PSO) e Programação Quadrática Sequencial (SQP) integrados com o software SAP2000**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso.

MARIANO, M. A. **Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de modelos analíticos e numéricos utilizando Nastran**. 2022. 107 f., il. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Aeroespacial) — Universidade de Brasília, Brasília, 2022.

MASCIA, Nilson Tadeu. **Tração, compressão e lei de hooke**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2006.

MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K. **Princípios de Metalurgia Mecânica**. São Paulo: Edgard Blücher, 1982.

MORAES, Antônio Jorge. **O método dos elementos finitos e a engenharia civil**. Revista Especialize On-line IPOG, Goiânia, v. 1, n. 10, dez. 2015.

MUTHUKRISHNAN, S. N.; NAMBIAR, R. V.; LAWRENCE, K. L. **Refinamento de aplicações de malhas 3D em interseções de superfícies**. Computer Aided Design, Great Britain, v. 27, n. 8, p. 637-645, 1995.

NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013

NUNES, Daniel Ramos de Souza. **Modelagem e análise dinâmica estrutural de uma turbina eólica**. 2021. 75f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2021.

PORCARO, Rodrigo Rangel; ARAÚJO, Francisco Célio de; GODEFROID, Leonardo Barbosa; FARIA, Geraldo Lúcio de; SILVA, Luiz Leite da. **Simulação do processo de soldagem elétrica por centelhamento de um aço para trilhos ferroviários**. Parte 1: análise de tensões residuais via elementos finitos. Soldagem & Inspeção, São Paulo, v. 24, e2412, 2019.

PILKEY, Walter D. **Peterson's Stress Concentration Factors**. 3. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008.

RAO, Singiresu S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.

SADD, Martin H. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. New York: Elsevier Academic Press, 2005.

SADIKU, Matthew N.O. **Numerical Techniques in Electromagnetics**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2001.

SAPIETOVÁ, Alžbeta et al. **Dynamic and stress analysis of a locking mechanism in the Ansys Workbench software environment**. Advances in Science and Technology. Research Journal, v. 13, n. 1, p. 23-28, 2019.

SÁNCHEZ, Emil. **Elementos de Mecânica dos Sólidos**. Rio de Janeiro: Interciência, 2000.

SCHIAVON, J. A. **Aplicação da técnica da fotoelasticidade na análise de fundações por estacas helicoidais**. 2010.

SILVA, L. A. H. **Avaliação numérica do comportamento estrutural da bancada de um elevador**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2010.

SLOT, T. **Stress analysis of thick perforated plates**. Westport, CT: Technomic Publishing, 1972.

SOUZA, Remo Magalhães de. **O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor**. 2003. Apostila. Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.

SOUZA JÚNIOR, Marcelo Alexandre de. **Estudo hidrodinâmico da estaca torpedo através do software Ansys CFX®**. 2011. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química) - Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

- STAINKO, R. **Advanced Multilevel Techniques to Topology Optimization**. 2006a. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Johannes Kepler Universitat, Linz, 2006a.
- STEIN, M. L. **Interpolation of spatial data: some theory for kriging**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- STOLARSKI, T.; NAKASONE, Y.; YOSHIMOTO, S. **Engineering analysis with ANSYS software**. Butterworth-Heinemann, 2018.
- STOLPE, Mathias. **On models and methods for global optimization of structural topology**. 2003. 152 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2003.
- TAVARES, João Manuel R. S. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1988.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1976.
- TODOROV, M. D. **Determination of the aerodynamic characteristics of a light aircraft using ANSYS workbench and FLUENT software**. Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics, n. 48, p. 117, 2015.
- TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. **Stiffness and deflection analysis of complex structures**. Journal of the Aeronautical Sciences, v. 23, n. 9, p. 805-823, 1956.
- VERLIDEN, S. (ed.). **Stress concentration factors for welded joints**. Cambridge: Woodhead Publishing, 2018.
- WAHL, A. W.; BEEUWKES, R. **Stress concentration produced by holes and notches**. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, v. 56, p. 617, 1934.
- YOUNG, Warren C.; BUDYNAS, Richard G. **Roark's formulas for stress and strain**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 7. ed. Butterworth-Heinemann, 2013.

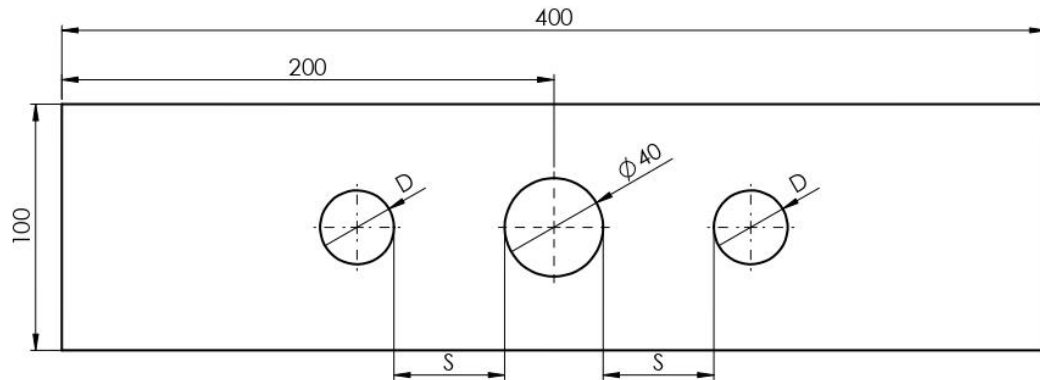
APÊNDICE A – UM FURO CIRCULAR DE ALÍVIO

Tabela A.1 – Dados de otimização para o caso de um furo circular de alívio.

Domínio				Otimização		Status de Otimização	
Var.	Limite Inf.	Limite Sup.	Tol.	Nome do Método	ASO	Convergiado	Sim
D	0,001	40	0,001	Nº de Amostras Iniciais	6	Número de Iterações	57
S	5	135	0,001	Máx. Nº de Iterações	400	Nº de Reduções de Domínio	8
				Máx. Nº de Redução de Domínio	20	Número de Falhas	0
				Tolerância de Convergência	1E-6		
				Função Objetivo	Redução da tensão máxima de Von Mises		
Resultado de Otimização							
	K_f	D	S				
	1,7718	35,312	5				

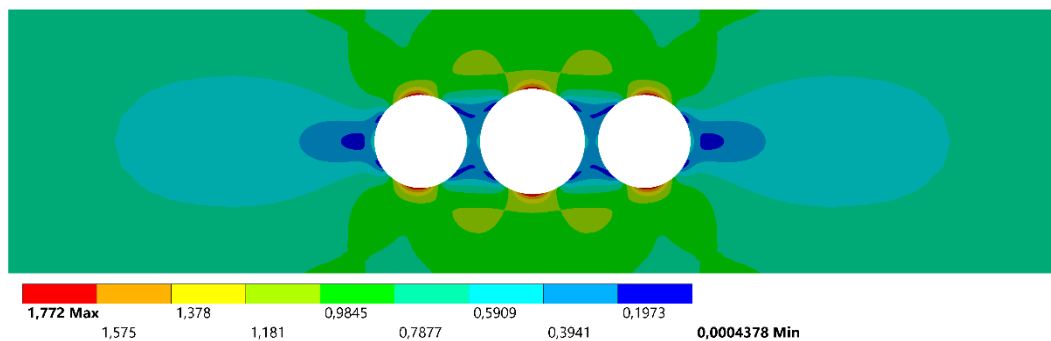
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura A.1 – Parâmetros para o caso de um furo circular de alívio.



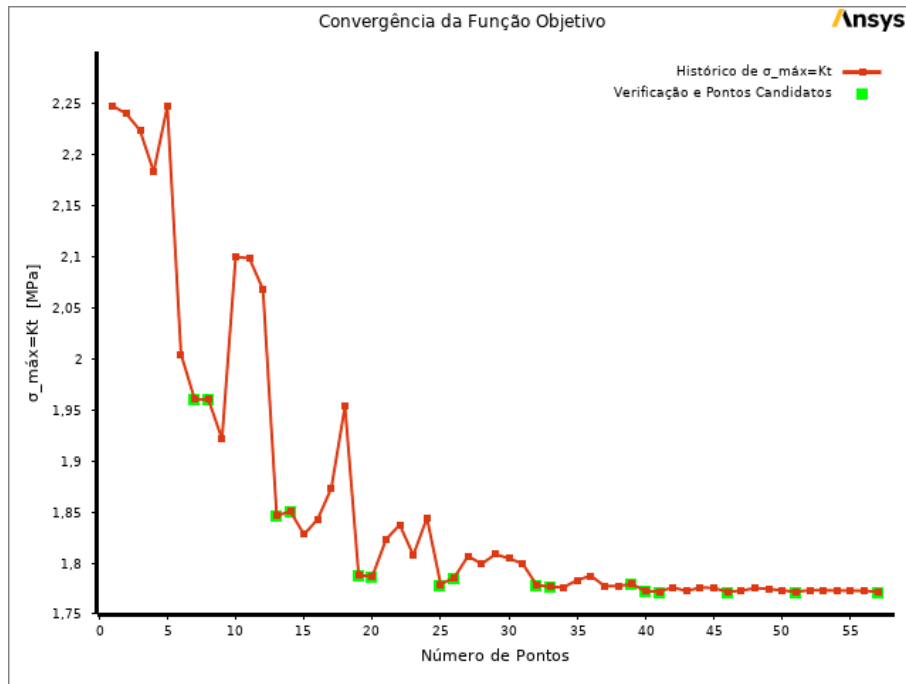
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura A.2 – Resultado para o caso de um furo circular de alívio.



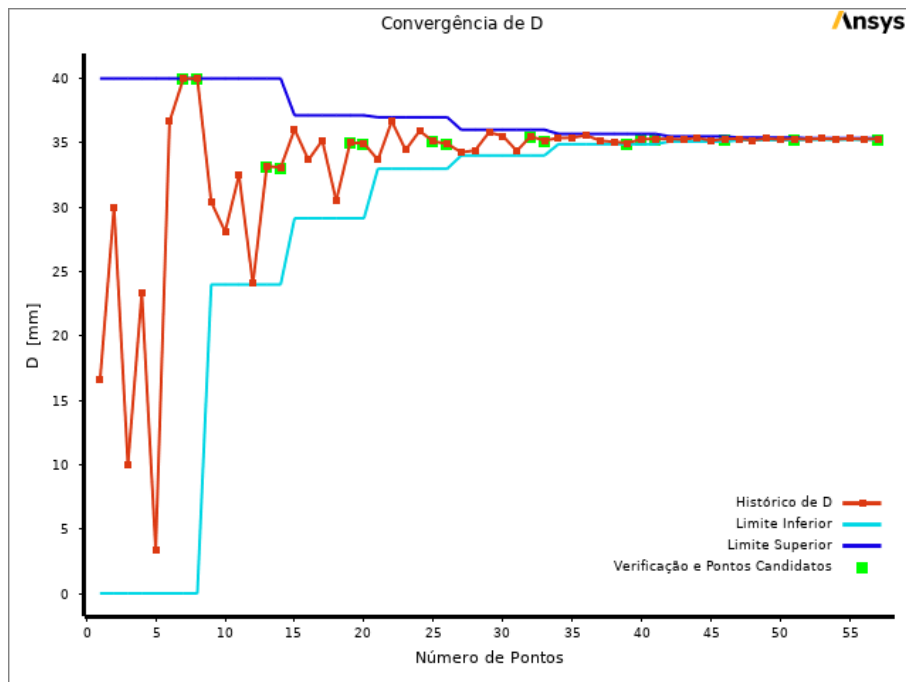
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura A.3 – Gráfico da convergência de K_t .

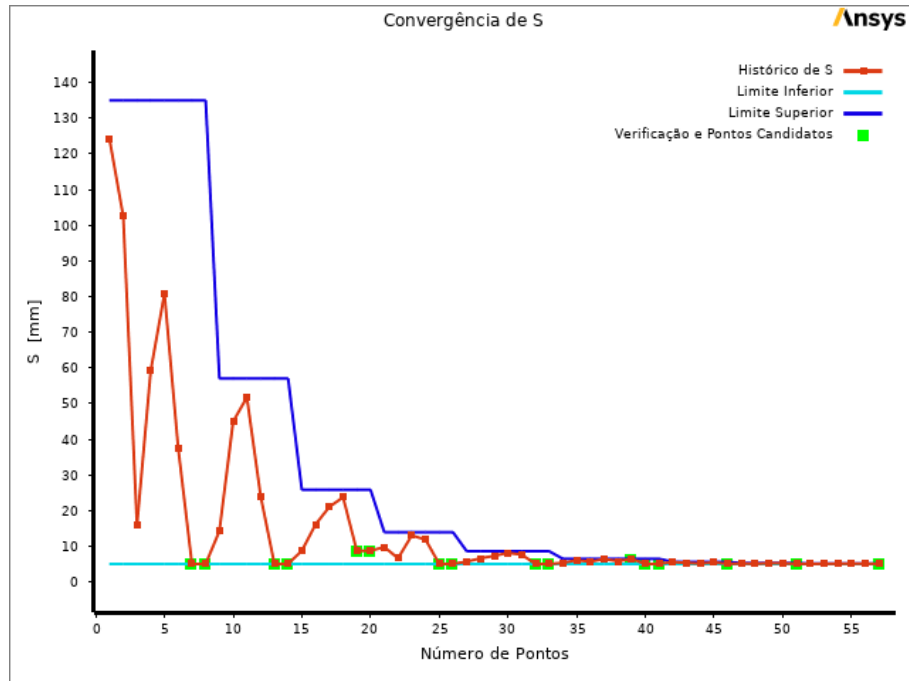


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura A.4 – Gráfico da convergência de D .



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura A.5 – Gráfico da convergência de S .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

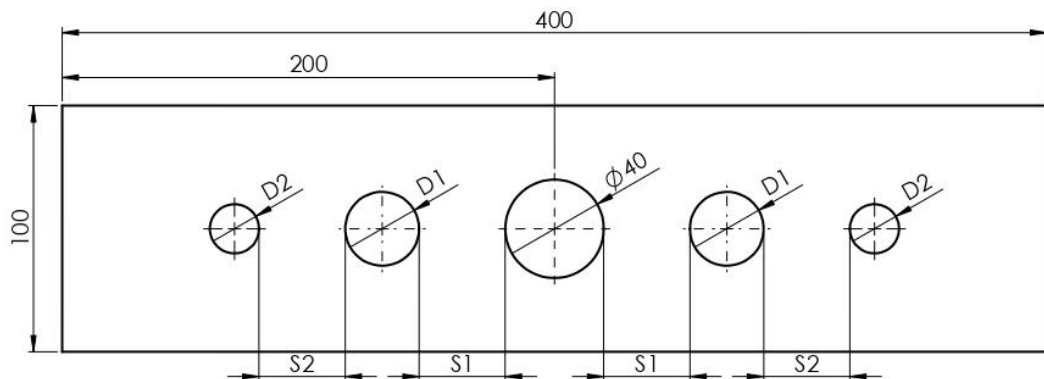
APÊNDICE B – DOIS FUROS CIRCULARES DE ALÍVIO

Tabela B.1 – Dados de otimização para o caso de dois furos circulares de alívio.

Domínio				Otimização		Status de Otimização	
Var.	Limit e Inf.	Limite Sup.	Tol.	Nome do Método	ASO	Convergiado	Sim
D_1	0,001	40	0,001	Nº de Amostras Iniciais	15	Número de Iterações	164
D_2	0,001	40	0,001	Máx. Nº de Iterações	400	Nº de Reduções de Domínio	9
S_1	5	47,5	0,001	Máx. Nº de Redução de Domínio	20	Número de Falhas	0
S_2	5	47,5	0,001	Tolerância de Convergência	1E-6		
				Função Objetivo	Redução da tensão máxima de Von Mises		
Resultado de Otimização							
		K_T	D_1	D_2	S_1	S_2	
		1,7048	37,618	28,867	7,34	17,973	

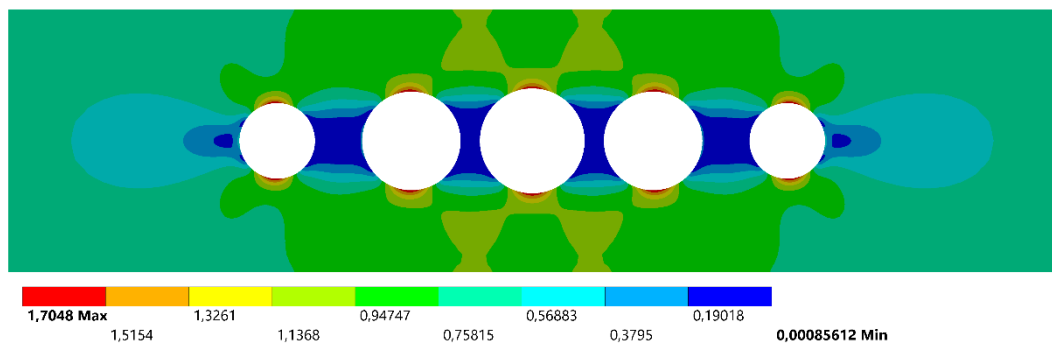
Fonte: elaborado pelo autor

Figura B.1 – Parâmetros para o caso de dois furos circulares de alívio.

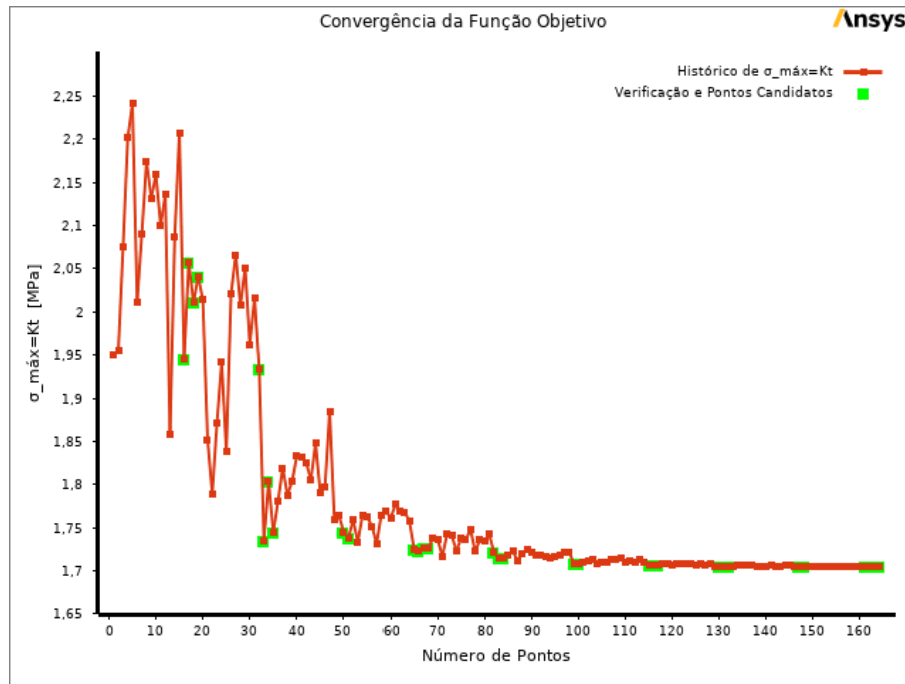


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

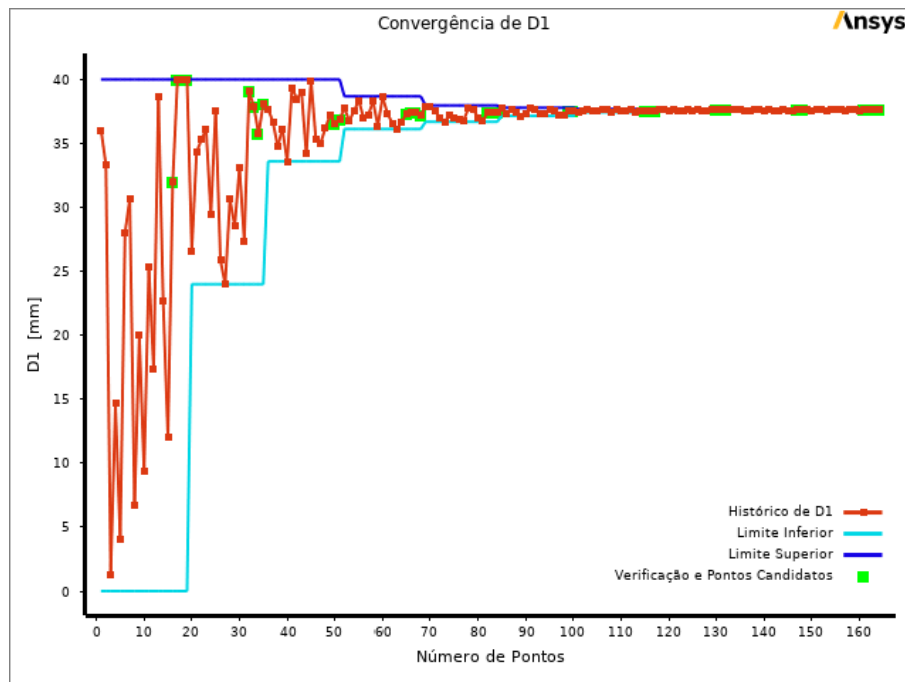
Figura B.2 – Resultado para o caso de dois furos circulares de alívio.



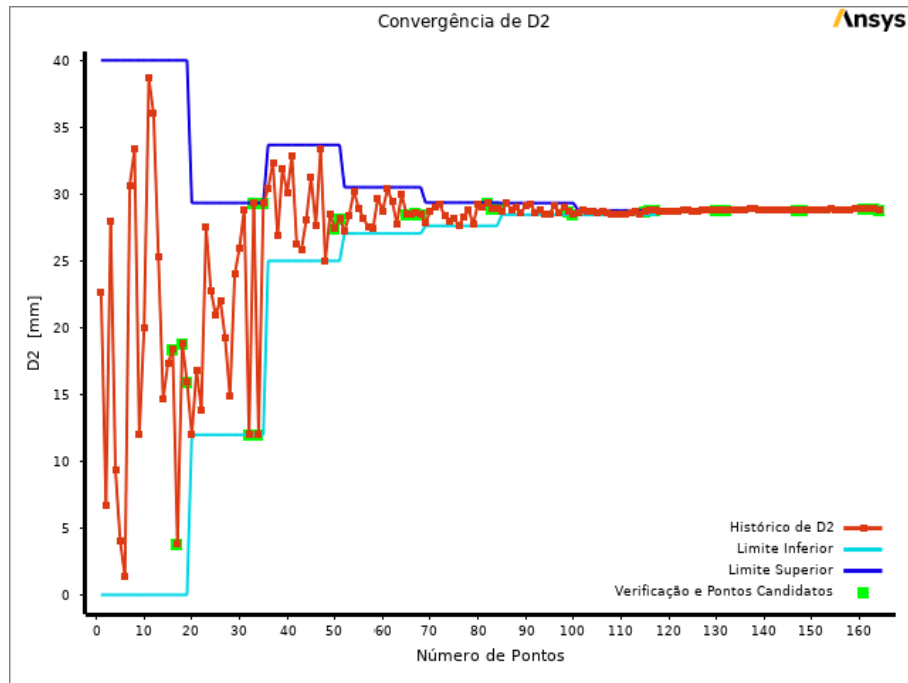
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura B.3 – Gráfico da convergência de K_t .

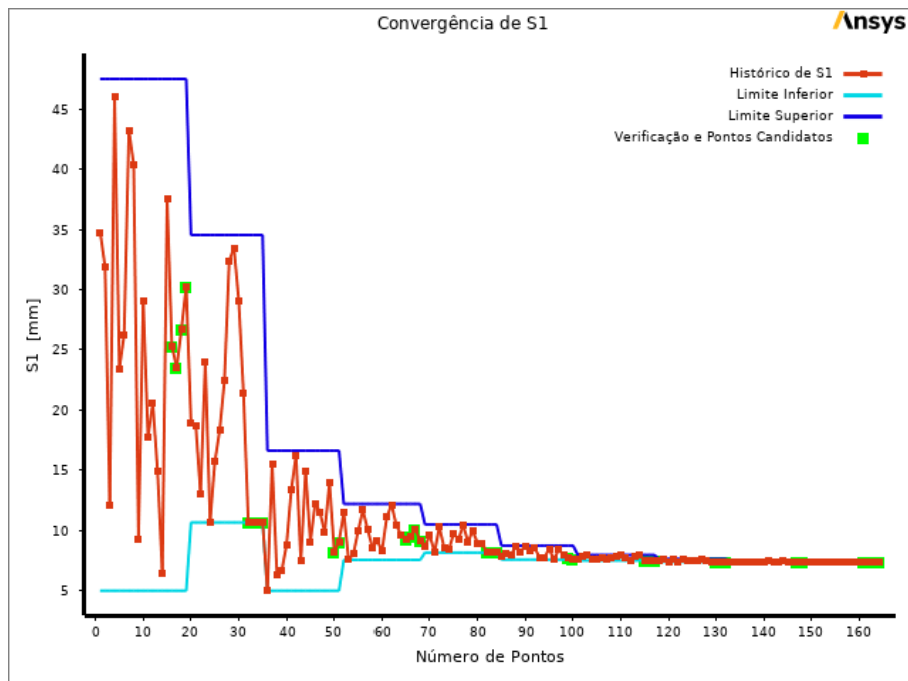
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura B.4 – Gráfico da convergência de D_1 .

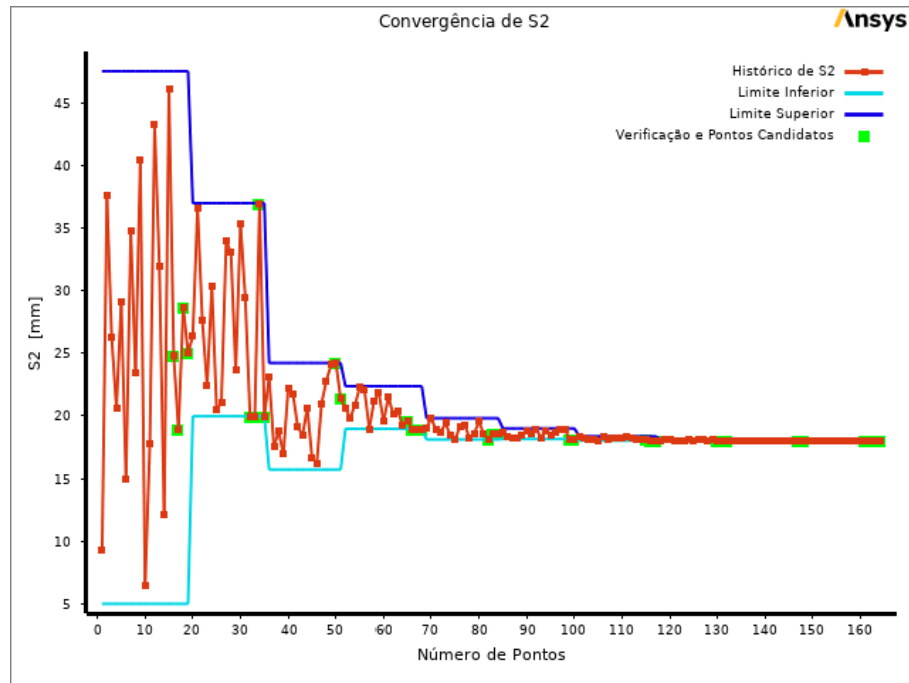
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura B.5 – Gráfico da convergência de D_2 .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura B.6 – Gráfico da convergência de S_1 .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura B.7 – Gráfico da convergência de S_2 .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

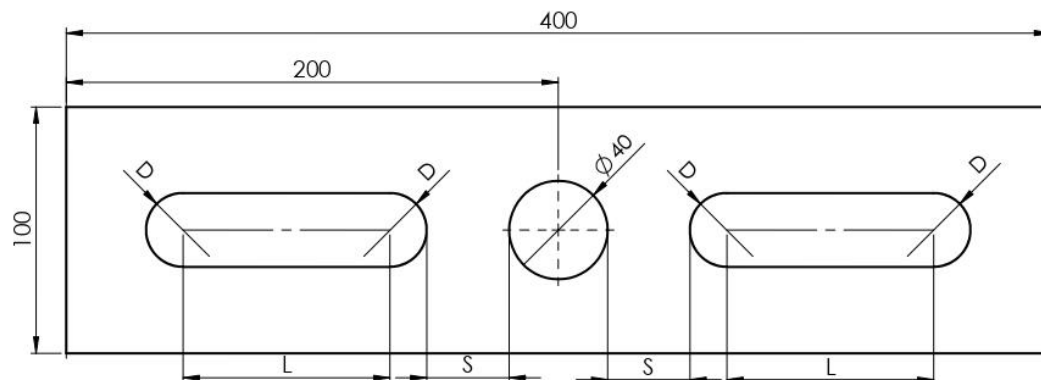
APÊNDICE C – FURO OVAL DE ALÍVIO

Tabela C.1 – Dados de otimização para o caso de furo oval de alívio.

Domínio				Otimização		Status de Otimização	
Var.	Limite Inf.	Limite Sup.	Tol.	Nome do Método	ASO	Convergiado	Sim
D	0,001	40	0,001	Nº de Amostras Iniciais	10	Número de Iterações	109
S	5	40	0,001	Máx. Nº de Iterações	400	Nº de Reduções de Domínio	9
L	0,001	95	0,001	Máx. Nº de Redução de Domínio	20	Número de Falhas	0
Tolerância de Convergência					1E-6		
Função Objetivo					Redução da tensão máxima de Von Mises		
Resultado de Otimização							
K_t	D	S	L				
1,6282	33,397	5,48	74,536				

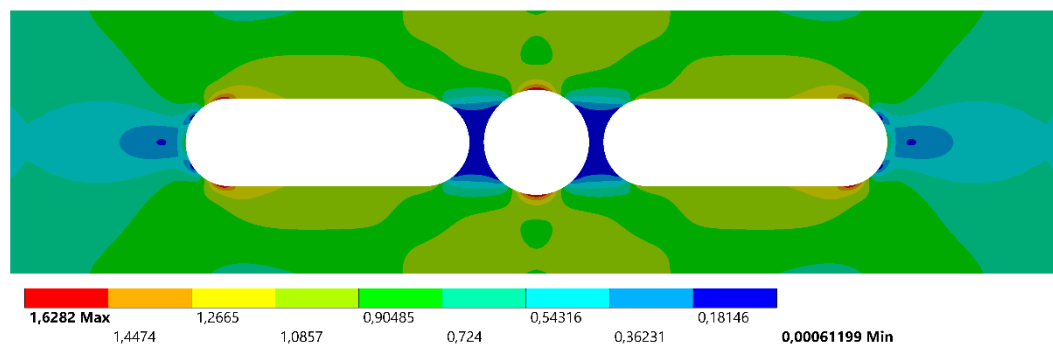
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura C.1 – Parâmetros para o caso de furo oval de alívio.

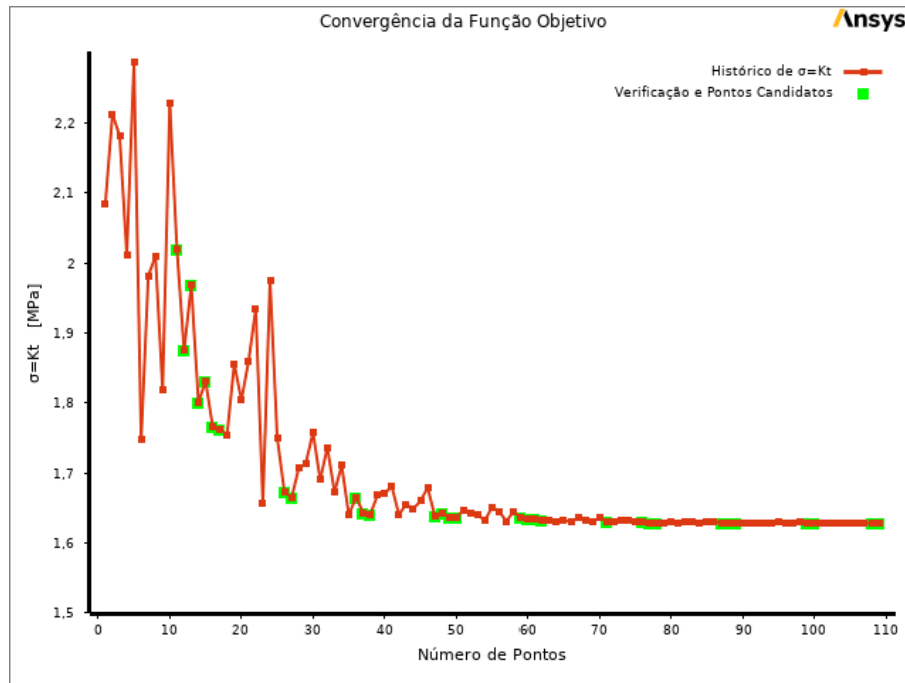


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

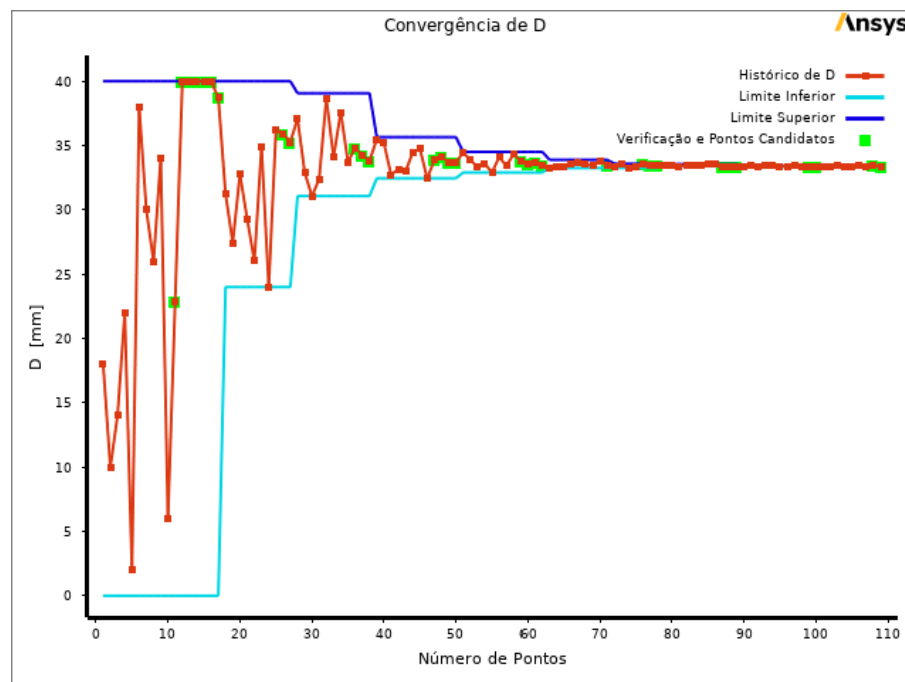
Figura C.2 – Resultado para o caso de furo oval de alívio.



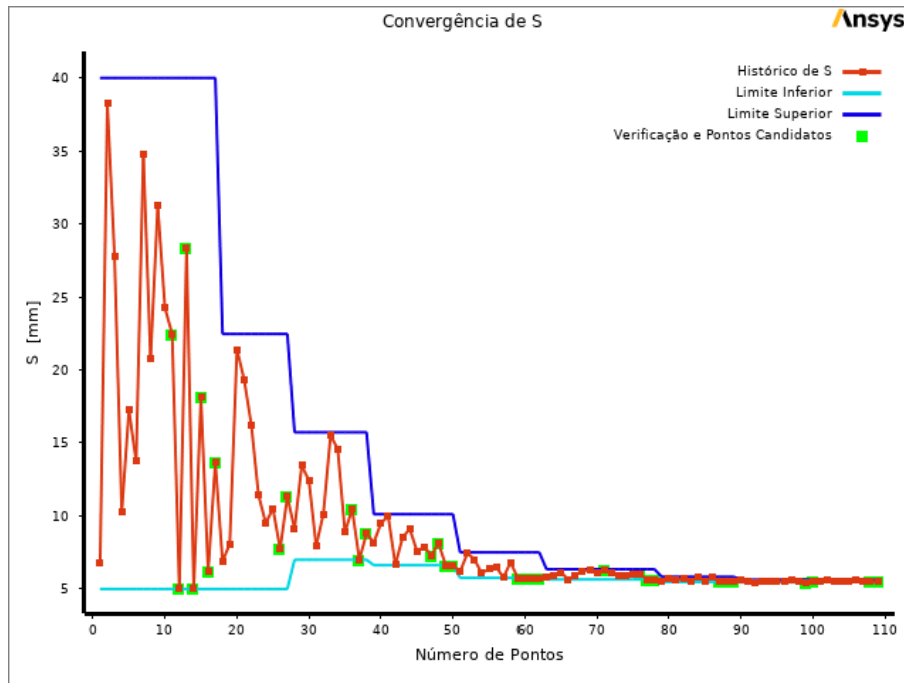
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura C.3 – Gráfico da convergência de K_t .

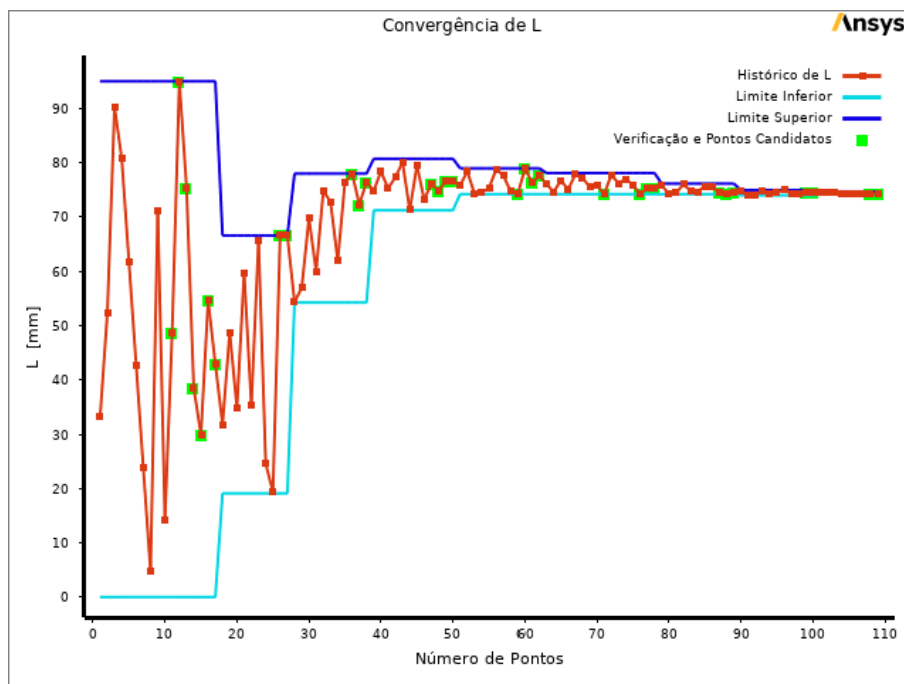
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura C.4 – Gráfico da convergência de D .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura C.5 – Gráfico da convergência de S .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura C.6 – Gráfico da convergência de L .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

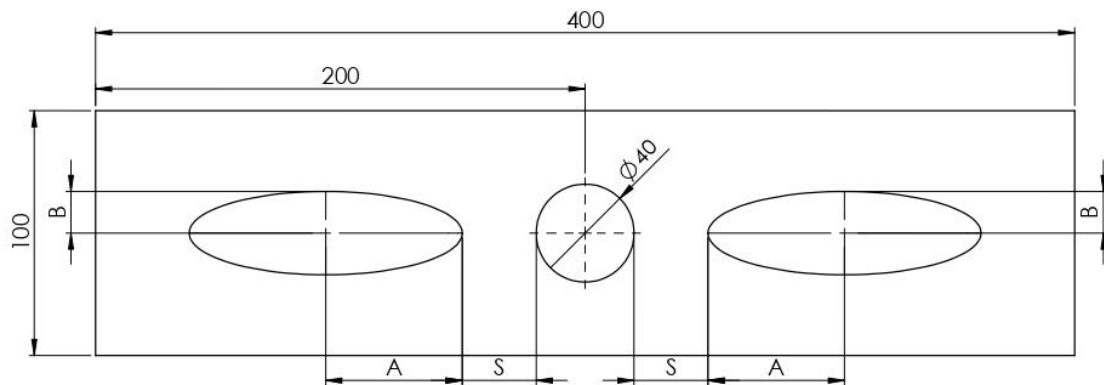
APÊNDICE D – FURO ELÍPTICO DE ALÍVIO

Tabela D.1 – Dados de otimização para o caso de furo elíptico de alívio.

Domínio				Otimização				Status de Otimização	
Var.	Limite Inf.	Limite Sup.	Tol.	Nome do Método	ASO	Convergição	Sim		
A	0,001	60	0,001	Nº de Amostras Iniciais	10	Número de Iterações	104		
B	0,001	20	0,001	Máx. Nº de Iterações	400	Nº de Reduções de Domínio	9		
S	5	40	0,001	Máx. Nº de Redução de Domínio	20	Número de Falhas	0		
Tolerância de Convergência					1E-6				
Função Objetivo					Redução da tensão máxima de Von Mises				
Resultado de Otimização									
K_T	A	B	S						
1,481	60	19,949	5						

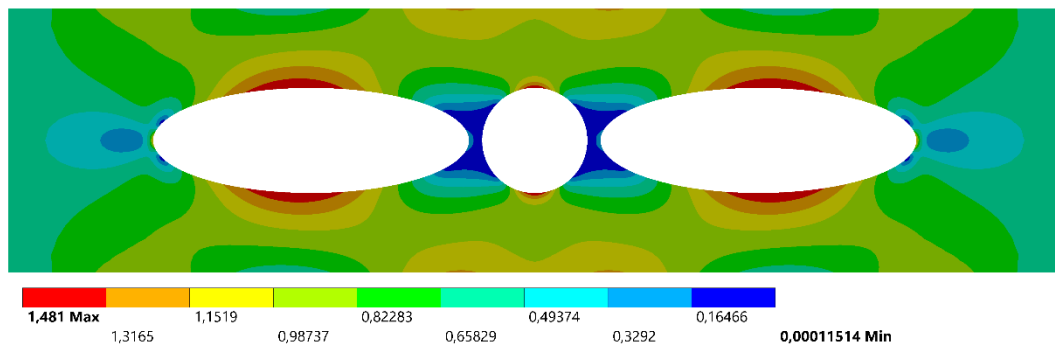
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura D.1 – Parâmetros para o caso de furo elíptico de alívio.

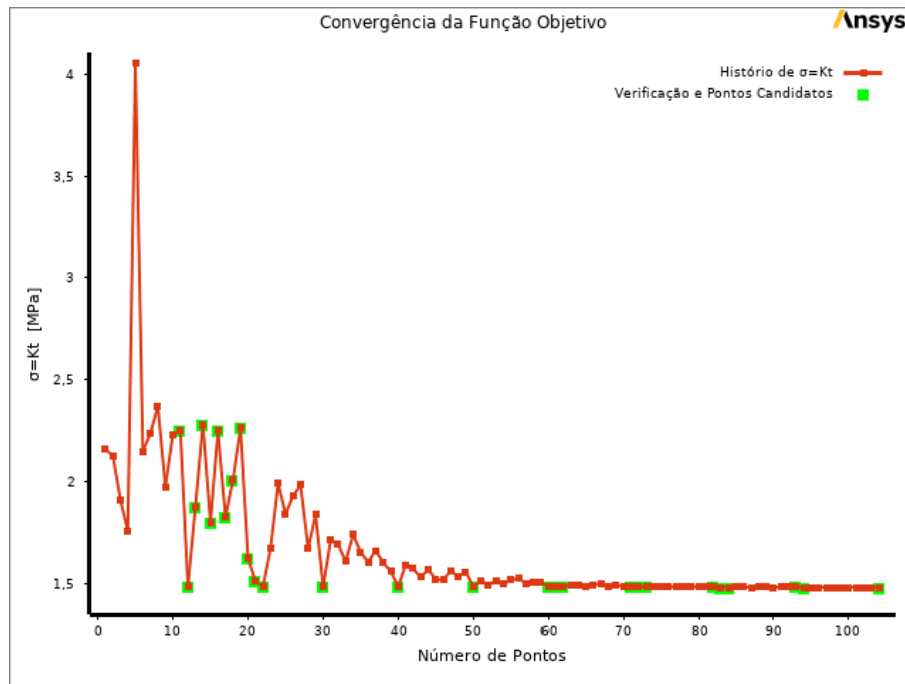


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

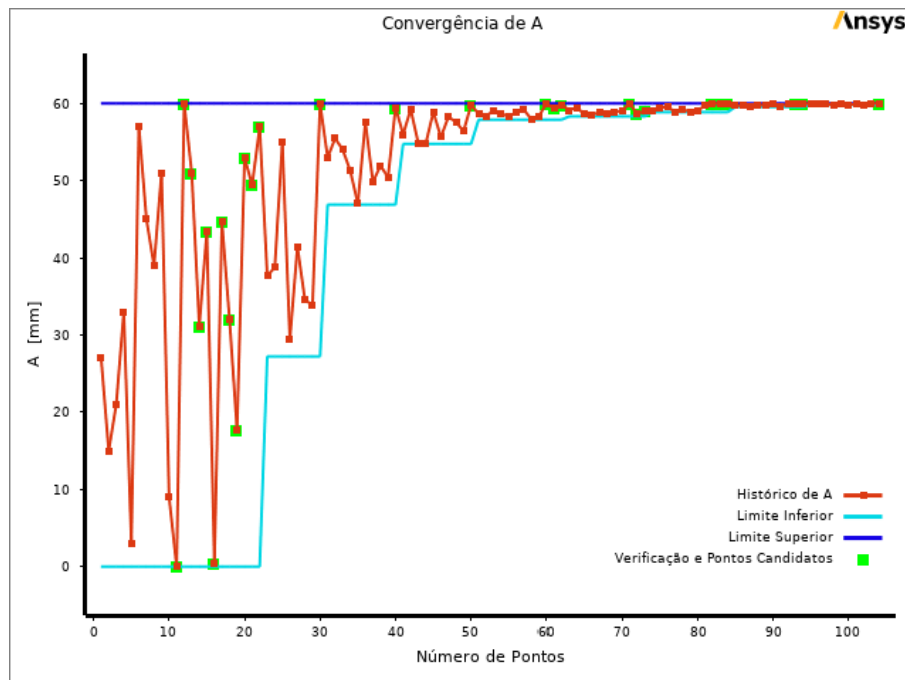
Figura D.2 – Resultado para o caso de furo elíptico de alívio.



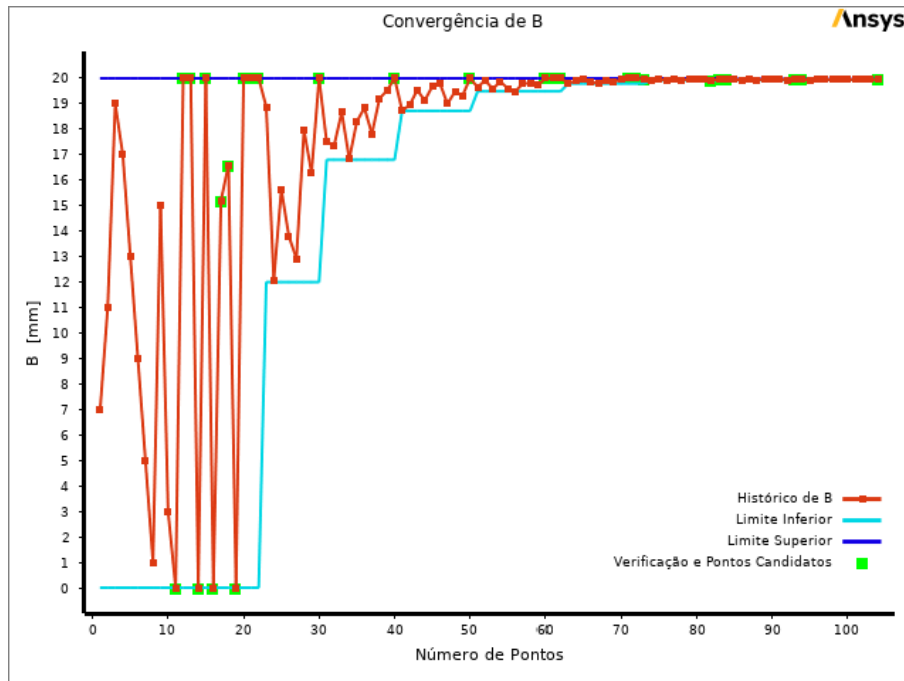
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura D.3 – Gráfico da convergência de K_t .

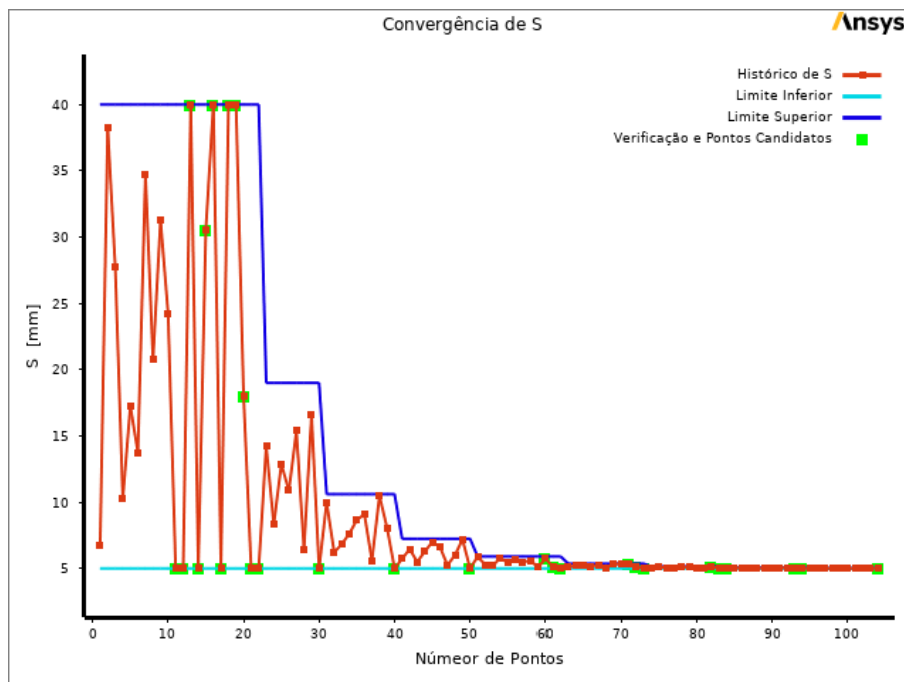
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura D.4 – Gráfico da convergência de A .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura D.5 – Gráfico da convergência de B .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura D.6 – Gráfico da convergência de S .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

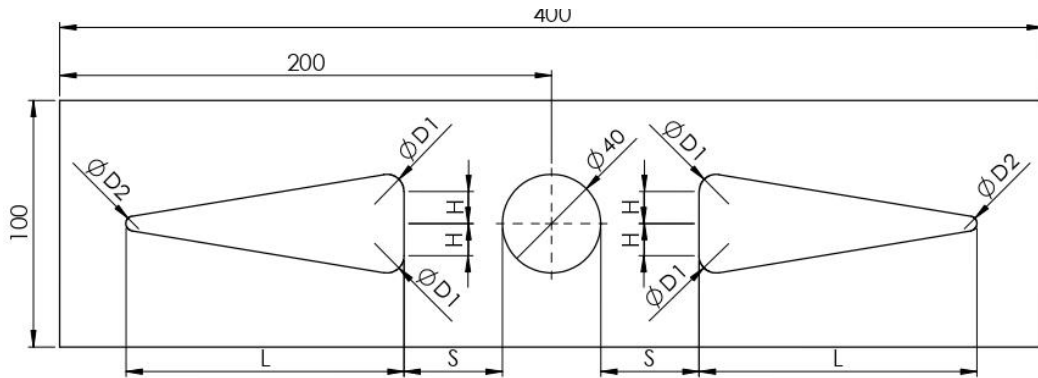
APÊNDICE E – FURO TRIANGULAR DE ALÍVIO

Tabela E.1 – Dados de otimização para o caso de furo triangular de alívio.

Domínio				Otimização			Status de Otimização	
Var.	Limite Inf.	Limite Sup.	Tol.	Nome do Método	ASO	Convergiado	Sim	
D_1	0,001	40	0,001	Nº de Amostras Iniciais	21	Número de Iterações	308	
D_2	0,001	40	0,001	Máx. Nº de Iterações	400	Nº de Reduções de Domínio	16	
S	5	20	0,001	Máx. Nº de Redução de Domínio	20	Número de Falhas	0	
H	0,001	20	0,001	Tolerância de Convergência	1E-6			
L	40,001	155	0,001	Função Objetivo	Redução da tensão máxima de Von Mises			
Resultado de Otimização								
K_t	D_1	D_2	S	H	L			
1,4012	33,647	15,748	7,329	1,854	154,42			

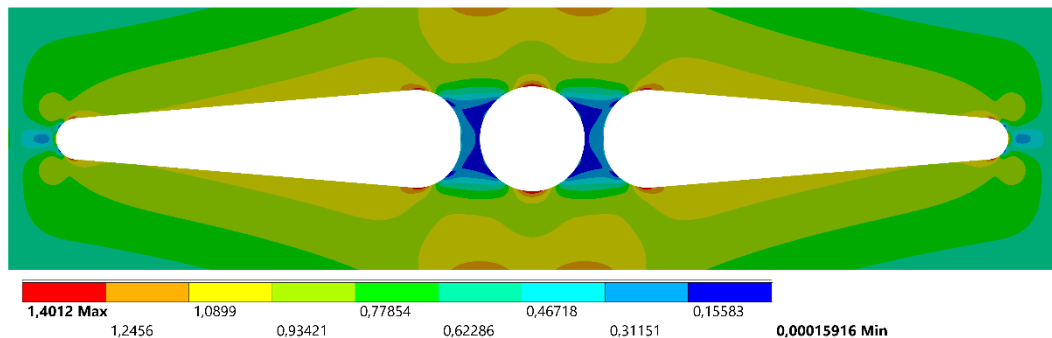
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.1 – Parâmetros para o caso de furo triangular de alívio.

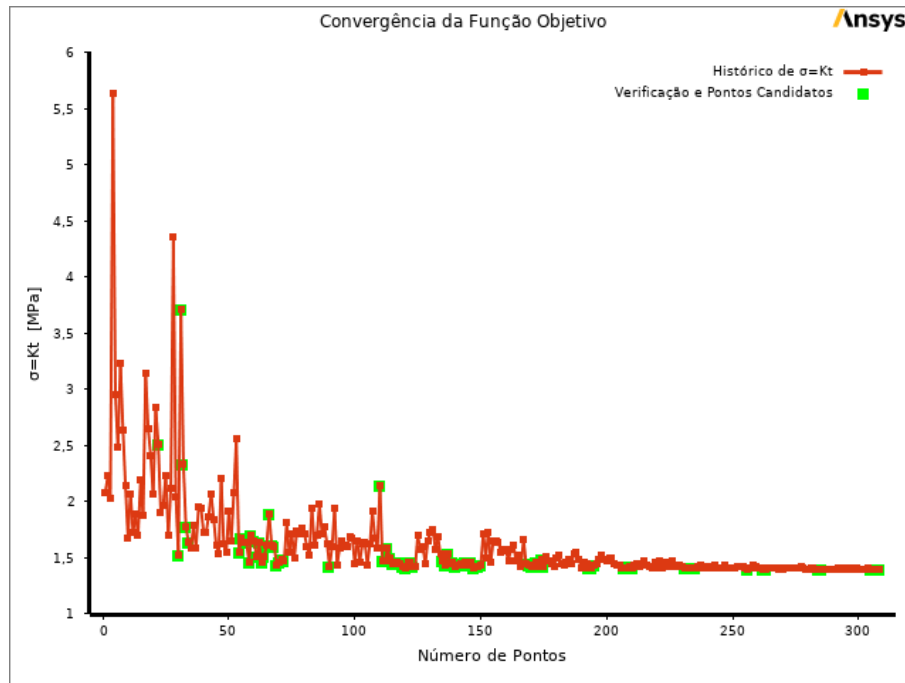


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

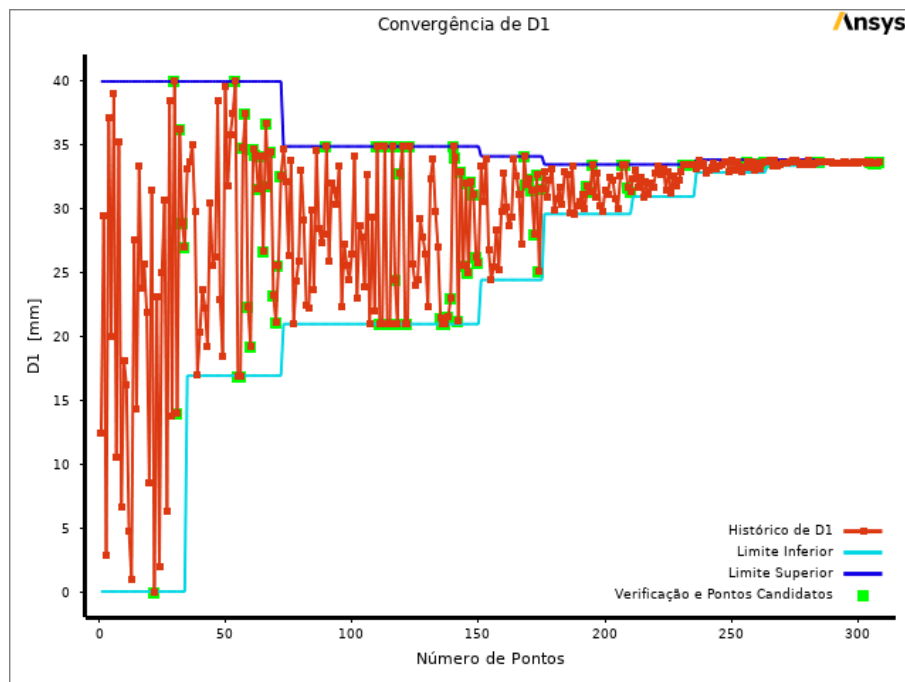
Figura E.2 – Resultado para o caso de furo triangular de alívio.



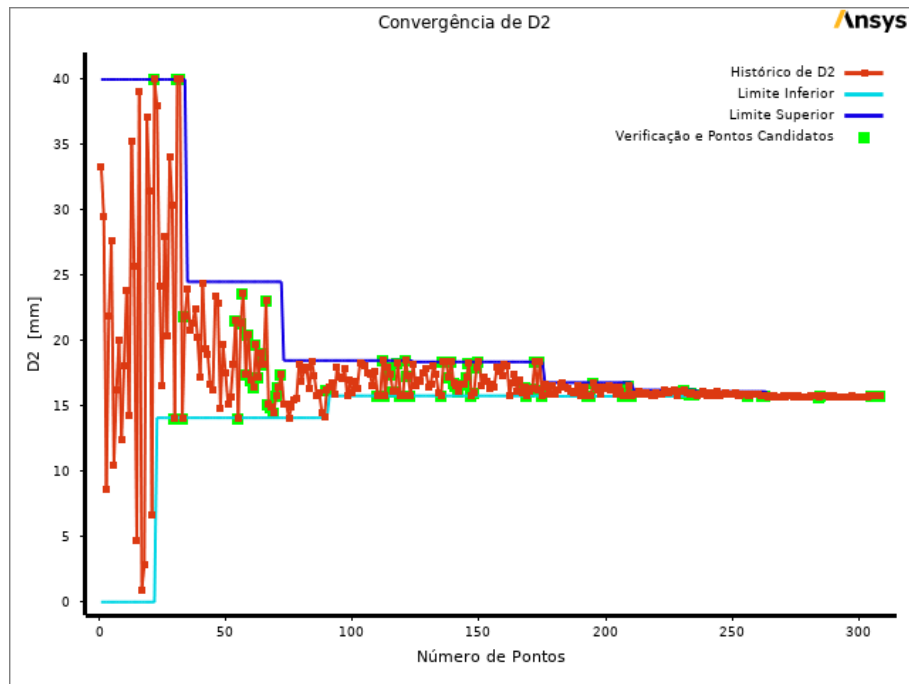
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.3 – Gráfico da convergência de K_t .

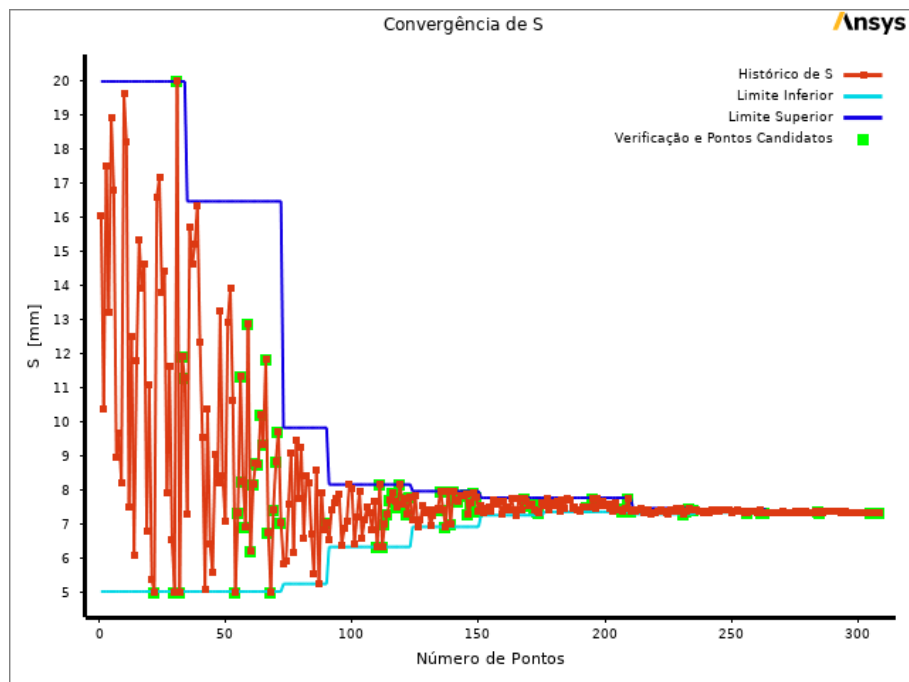
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.4 – Gráfico da convergência de D_1 .

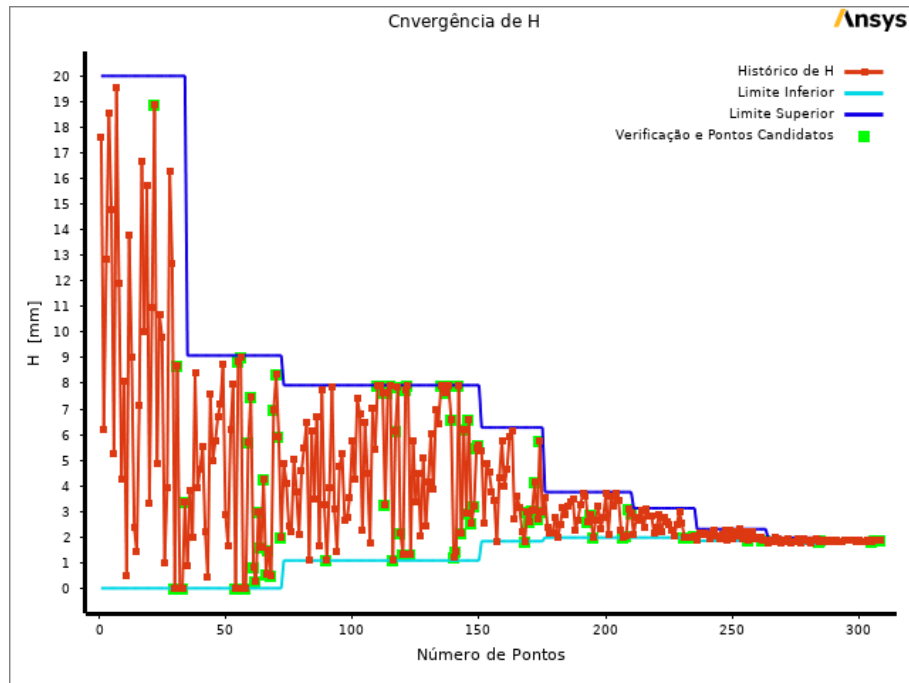
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.5 – Gráfico da convergência de D_2 .

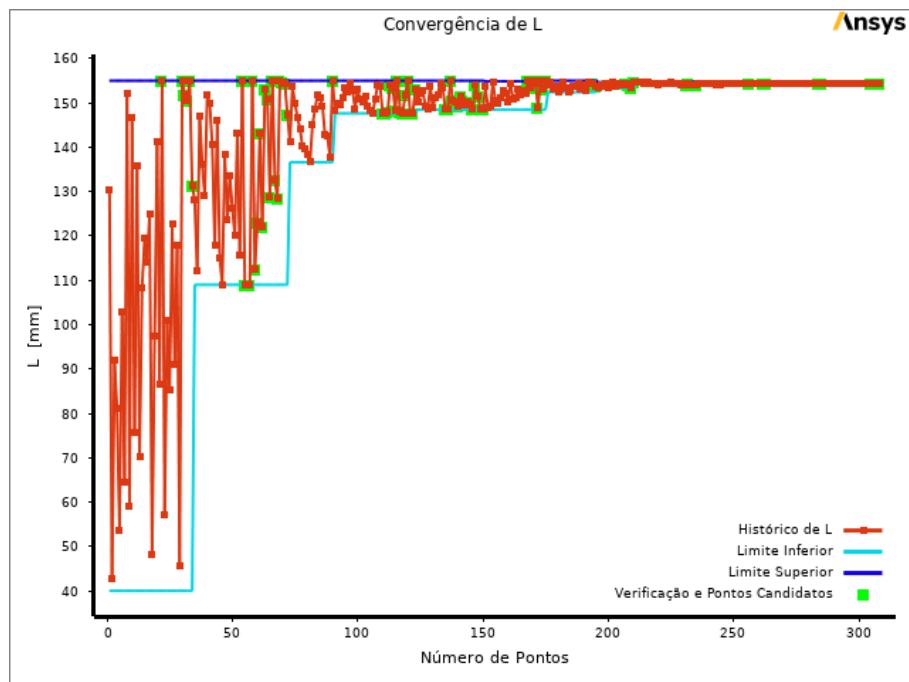
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.6 – Gráfico da convergência de S .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.7 – Gráfico da convergência de H .

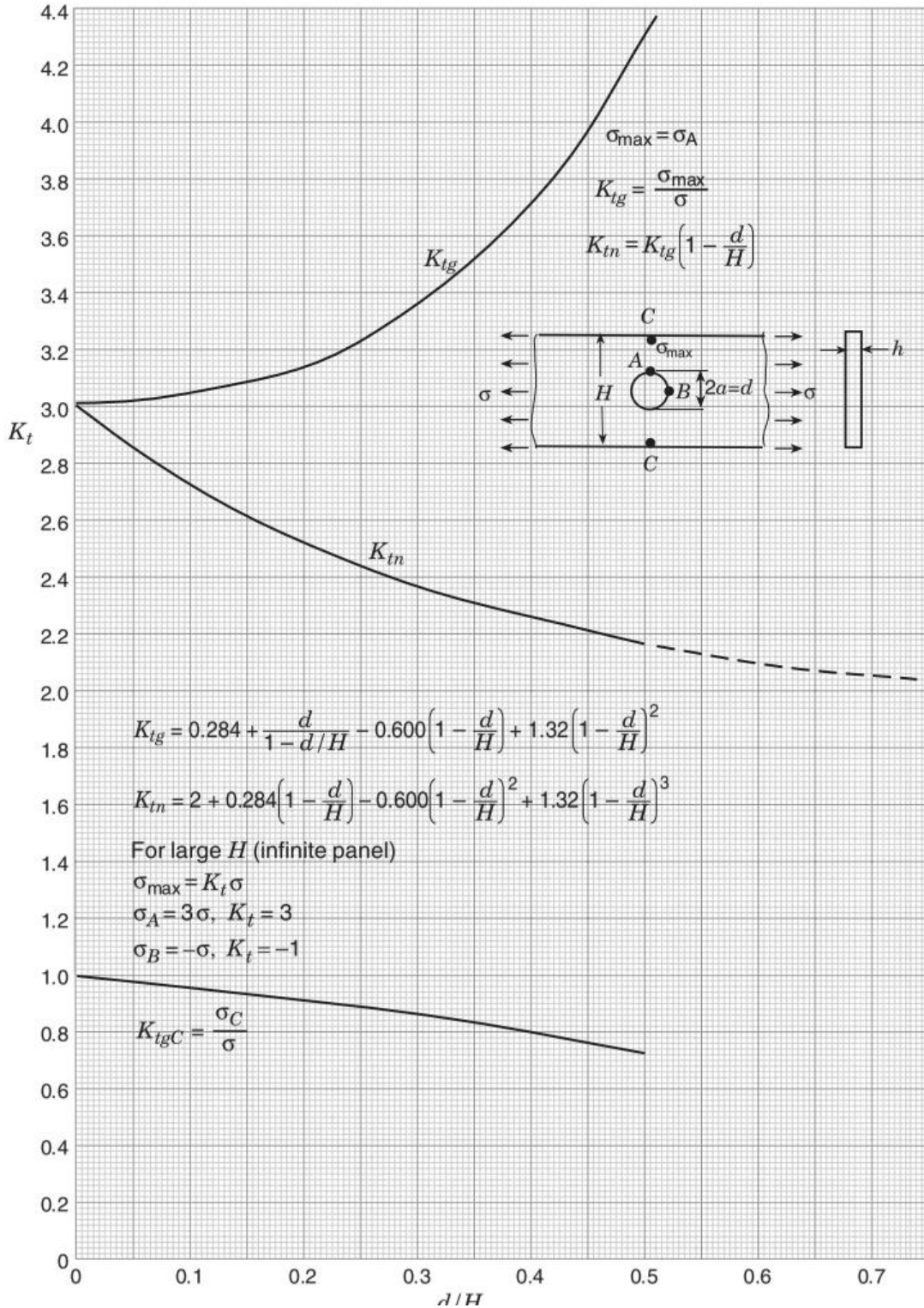
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura E.8 – Gráfico da convergência de L .

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

ANEXO A – FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

Anexo A.1 – Fatores de concentração de tensão K_{tg} e K_{tn} para a tensão de um elemento fino de largura finita com um furo circular.



Fonte: Rowland (1930).