



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**MAURO HENRIQUE SILVA LOBO**

**O MODELO RANDALL-SUNDRUM SOB MUDANÇA TIPO SIMPSON-VISSER**

**FORTALEZA  
2024**

MAURO HENRIQUE SILVA LOBO

O MODELO RANDALL-SUNDRUM SOB MUDANÇA TIPO SIMPSON-VISSER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.  
Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Júnior.

FORTALEZA  
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

L784m Lobo, Mauro Henrique Silva.

O Modelo Randall-Sundrum sob mudança tipo Simpson-Visser / Mauro Henrique Silva Lobo. - 2024.  
57 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientação: Prof. Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Júnior.

1. Métrica distorcida. 2. Dimensão extra. 3. Hierarquia. 4. Escalas de energia. I. Título.

CDD 530

---

MAURO HENRIQUE SILVA LOBO

O MODELO RANDALL-SUNDRUM SOB MUDANÇA TIPO SIMPSON-VISSER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.  
Área de Concentração: Física.

Aprovada em 12/08/2024.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Júnior (Coorientador)  
Universidade Estadual do Ceará (UECE-FECLESC)

---

Prof. Dr. Milko Estrada Cuadros  
Universidad Católica Silva Henríquez  
(UCSH - Facultad de Ingeniería y Empresa)

Dedico esse trabalho a meus pais:

Paulo Lobo dos Santos (Paulinho)

Ana Karine Silva Lobo

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me conceder assistência todos os dias.

A toda minha família, em especial meus pais e meu irmão Paulo Júnior.

Ao professor Dr. Geová Maciel de Alencar Filho pela paciência e sua disponibilidade em me ajudar.

Ao professor Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Júnior por sua disponibilidade e auxílio.

A todos os integrantes do LabGmc<sup>2</sup>: Arthur, Matheus, Roberta, Diana, Emmanoel, Genivaldo, João, Leandro, Letícia, Marcos, Pedro, Rodrigo, Tiago e Wendell, pelas discussões que me ajudaram em minha formação.

A coordenação do programa de Pós-Graduação em Física, por fornecer todo o material e apoio que precisei.

A todos os professores e funcionários do departamento que participaram, direta ou indireta, de minha formação.

A Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUN-CAP), pelo apoio financeiro.

## RESUMO

No presente trabalho serão abordados os Modelos Randall-Sundrum Tipos I e II ambos elaborados pelos autores: Lisa Randall e Raman Sundrum. No tipo I, discutiremos sobre uma solução para o problema da hierarquia: Uma discrepância existente entre a intensidade do campo gravitacional encontrado na escala  $TeV$  em comparação com o esperado na escala de Planck ( $10^{18} GeV$ ). Já no tipo II, discutiremos de forma detalhada como a gravidade se comportará e de que maneira esse campo gravitacional que experimentamos em nosso Universo emerge desse modelo. A fim de observar como alterações na função  $\sigma(y)$  do fator de distorção afetam a estrutura do sistema, iremos submeter esses modelos a uma transformação de variáveis tipo Simpson-Visser, e analisar como a nova métrica se comportará.

**Palavras-chave:** métrica distorcida; dimensão extra; hierarquia; escalas de energia.

## ABSTRACT

This paper will address the Randall-Sundrum Type I and Type II models, both developed by the authors: Lisa Randall and Raman Sundrum. In type I, we will discuss a solution to the hierarchy problem: a discrepancy between the intensity of the gravitational field found on the  $TeV$  scale compared to that expected on the Planck scale ( $10^{18} GeV$ ). In type II, we will discuss in detail how gravity will behave and how the gravitational field we experience in our Universe emerges from this model. In order to observe how changes in the  $\sigma(y)$  function of the warp factor affect the structure of the system, we will submit these models to a Simpson-Visser type transformation of variables, and analyze how the new metric will behave.

**Keywords:** warped metric; extra dimension; hierarchy energy scales.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – $S^1/\mathbb{Z}_2$ Orbifold. . . . .	13
Figura 2.2 – Configuração de Randall-Sundrum. . . . .	14
Figura 2.3 – Comportamento da função $\sigma(\phi)$ e suas derivadas. . . . .	18
Figura 2.4 – A geração de uma hierarquia exponencial . . . . .	22
Figura 3.1 – Esboço do potencial do gráviton . . . . .	28
Figura 3.2 – Localização do gráviton em torno da brana de Planck . . . . .	29
Figura 4.1 – Comportamento do fator de <i>warp</i> para diferentes valores de $b$ . . . . .	37
Figura 4.2 – Comparação entre fatores de <i>warp</i> que geram branas finas e espessas. . . . .	37
Figura 4.3 – Gráfico da função $A(z)$ e suas 1ª e 2ª derivadas, para diferentes valores de $b$ . . . . .	39
Figura 4.4 – Campo de Cuscuton (azul) e potencial associado (vermelho) em termos de $z$ . . . . .	43

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>MODELO RANDALL-SUNDRUM TIPO I</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Configuração e métrica do Modelo</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Equação de Einstein em 5-D</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Solução Clássica</b>	<b>17</b>
<b>2.4</b>	<b>Implicações Físicas</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>MODELO RANDALL-SUNDRUM TIPO II</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Modos do Gráviton</b>	<b>23</b>
<b>3.1.1</b>	<i>Métrica conformalmente plana</i>	<b>23</b>
<b>3.1.2</b>	<i>Equações de Einstein linearizadas</i>	<b>24</b>
<b>3.1.3</b>	<i>Equação tipo-Schrödinger</i>	<b>27</b>
<b>3.1.4</b>	<i>Condições de contorno</i>	<b>28</b>
<b>3.1.5</b>	<i>Modo-Zero</i>	<b>29</b>
<b>3.1.6</b>	<i>Modos de Kaluza-Klein</i>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Espectro do Gráviton</b>	<b>31</b>
<b>3.3</b>	<b>Limite Newtoniano</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>SIMPSON-VISSER EM MUNDO-BRANA</b>	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>Mudanças no RS-II</b>	<b>36</b>
<b>4.1.1</b>	<i>Métrica conformalmente plana</i>	<b>36</b>
<b>4.1.2</b>	<i>Breve análise da função</i>	<b>38</b>
<b>4.1.3</b>	<i>Influência dos campos</i>	<b>40</b>
<b>4.1.3.1</b>	<i>Campo Escalar</i>	<b>41</b>
<b>4.1.3.2</b>	<i>Campo Cuscuton</i>	<b>42</b>
<b>4.1.4</b>	<i>Equação tipo-Schrödinger</i>	<b>44</b>
<b>4.1.5</b>	<i>Modo-Zero</i>	<b>44</b>
<b>4.1.6</b>	<i>Alguns outros problemas</i>	<b>44</b>
<b>4.1.6.1</b>	<i>Condição de contorno</i>	<b>45</b>
<b>4.1.6.2</b>	<i>Modos massivos do gráviton</i>	<b>45</b>
<b>4.1.7</b>	<i>Regularização de Simpson-Visser no RS-I</i>	<b>45</b>

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO CONFORME DO TENSOR DE EINSTEIN . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE BESSEL DE SEGUNDA ESPÉCIE EM TERMOS DE SOMATÓRIOS . . . . .</b>	<b>54</b>
	<b>APÊNDICE C – LIMITE ASSINTÓTICO DA EQUAÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA ESPÉCIE . . . . .</b>	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Para que possamos compreender como o Universo funciona, que são as interações entre partículas e campos, tentamos representar a natureza de uma forma simples e completa, matematicamente falando. Por meio dessa ideia, elaboramos os chamados “modelos”.

Um dos modelos mais bem sucedidos para essa descrição é o Modelo Padrão de Partículas Elementares [1], e de acordo com o mesmo existem dois grandes grupos de partículas: Férmions, que são os constituintes da matéria, e as interações entre eles são dadas pelos Bósons, ou seja, transmitem as forças [1, 2], logo cada bóson é responsável por uma das seguintes interações existentes: Nuclear forte, Nuclear fraca, Eletromagnética e Gravitacional.

Ele também prevê a existência do Bóson de Higgs, responsável por dar massa as partículas. Assim, quanto maior for a interação de alguma partícula com ele, maior será a massa da mesma. Ainda que o Modelo Padrão seja bem sucedido na explicação de processos fundamentais da natureza, ele apresenta vários problemas, experimentais e teóricos, para os quais não conseguiu fornecer explicações plausíveis. Em [1], são fornecidos essas questões experimentais sem resposta:

- Não apresenta explicação quântica para a gravidade;
- Não prevê as oscilações de neutrinos, observadas experimentalmente;
- Não comenta sobre a assimetria entre matéria e antimatéria, gerada pelo Big Bang;
- Não discorre sobre a existência da matéria e energia escura;
- Não explica a inflação cósmica.

Um dos questionamentos teóricos presente no Modelo Padrão é o problema da hierarquia, que é o fato da gravidade ser muito mais fraca se comparada as outras forças, algo da ordem de  $10^{32}$ . Devido essa série de problemas, foram propostas extensões para o Modelo Padrão e modelos alternativos, e uma das maneiras encontradas para contornar o problema da hierarquia é considerar a existência de Dimensões Extras, ideia sugerida por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali [3].

Os autores anteriormente citados não foram os pioneiros nesse tipo de proposta, outros físicos já trabalharam com essa ideia na tentativa unificar os campos gravitacional e eletromagnético, como Theodor Kaluza [4] e Oskar Klein [5].

No Modelo de Dimensões Extras, consideramos os Universos como sendo  $(4 + n)$ -dimensionais, onde  $n$  é o número de dimensões extras. Neles, a escala de Planck quadridimensional efetiva, que tem escala de energia  $M_{PL} = 2 \cdot 10^{18} GeV$ , é determinada pela escala de Planck fundamental  $(4+n)$ -dimensional, denotada como  $M$  [6], enquanto que a escala de energia de nosso Universo quadridimensional é da ordem da escala eletrofraca,  $m_{EW} \sim TeV$  [3].

Segundo Pimenta (2013)[1], essas dimensões extras estão compactadas em comprimentos de Plank ( $10^{-33}cm$ ), o que torna difícil de ser observado. Já os grávitons, que são os intermediários da gravidade, se propagam nas dimensões extras, o que explica o fato da gravidade ser fraca em comparação às outras forças.

Nesse cenário, é interessante analisarmos como os campos se acoplam no modelo, já que desejamos que somente a gravidade se propague nas dimensões extras enquanto os demais campos devem ficar confinados nas branas, assim, o autor [7], estabelecendo a atuação de um campo escalar tipo salto (modelo de brana espessa) cuja solução concebe um fator de *warp* suave.

No presente trabalho, estudaremos a solução dada por Lisa Randall e Raman Sundrum, publicada em 1999. No modelo proposto por eles existem duas branas de escalas de energia diferente, uma na escala eletrofraca e a outra na escala de Planck. A hierarquia entre as escalas é fornecida por um fator exponencial presente na métrica no modelo, que será abordado no capítulo 2. Já no capítulo 3, iremos discutir sobre o comportamento da gravidade nesse modelo. Por fim, no capítulo 4 veremos como o modelo Randall-Sundrum se comporta quando submetido a uma mudança de variáveis do tipo Simpson-Visser.

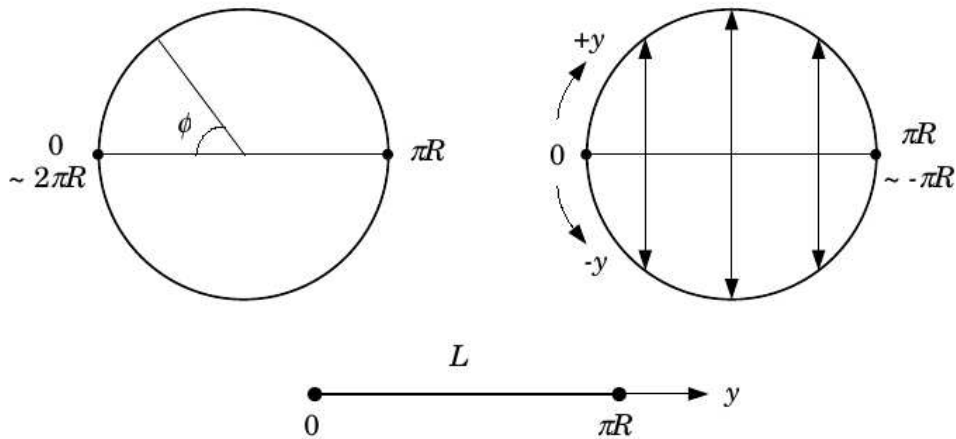
## 2 MODELO RANDALL-SUNDRUM TIPO I

Neste capítulo abordaremos o modelo de Randall-Sundrum tipo I (*RS-I*), proposto para resolver o problema da hierarquia. Nesse modelo a métrica possuirá um termo de distorção, ou *warp*, que atuará na métrica de Minkowski. Esse fator será responsável por gerar a hierarquia entre as escalas de energia.

### 2.1 Configuração e métrica do Modelo

O modelo de Randall-Sundrum propõe a existência de 5 dimensões, onde 4 são coordenadas espaciais e 1 temporal. Essa dimensão adicional é parametrizada por uma coordenada angular  $\phi$ , cujo valor abrange de  $-\pi$  a  $\pi$ , embora a métrica esteja bem definida em  $0 \leq \phi \leq \pi$ , ela é simétrica sob transformações de coordenadas  $(x, \phi) \rightarrow (x, -\phi)$ . Formalmente, o modelo é trabalhado no orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2$  [6], onde  $S^1$  representa um círculo e  $\mathbb{Z}_2$  é o grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$  [8], como mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1:  $S^1/\mathbb{Z}_2$  Orbifold.

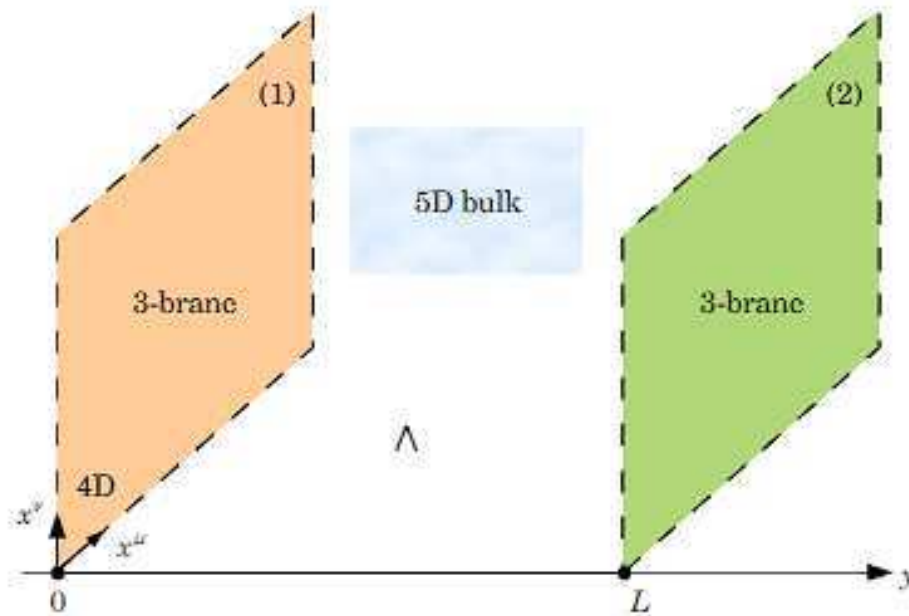


Fonte: Adaptado de Gabella [8].

Nela há a presença de duas branas bem localizadas, com (3+1) dimensões, onde uma representará o nosso Universo que está na escala de energia  $TeV$  situada no ponto  $\phi = \pi$  do orbifold, enquanto a outra representará um Universo paralelo ao nosso que está na escala de Planck e situa-se em  $\phi = 0$ . Podemos entender as 3-branas como sendo a fronteira do espaço-

tempo pentadimensional, como mostrado na Figura 2.2. Essas branas, ou 3-branas no nosso caso, suportam as teorias de campos (3+1)dimensional. Mediante a isso, os campos do modelo padrão estão totalmente contidos nas 3-branas, enquanto somente a gravidade consegue se propagar na 5ª dimensão.

Figura 2.2: Configuração de Randall-Sundrum.



Fonte: Adaptado de Gabella [8].

No parágrafo anterior foi discutido a ideia de como o modelo está estruturado. A partir de agora, necessitamos de informações sobre a métrica desse modelo. Seja uma métrica arbitrária em (4+1) dimensões, o elemento de linha poderá ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{MN}dx^M dx^N \\
 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\phi}dx^\mu d\phi + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 \\
 &= g_{00}(dt)^2 + g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j + g_{\mu\phi}dx^\mu d\phi + g_{\phi\phi}(d\phi)^2,
 \end{aligned}$$

onde  $x^M$  é o conjunto de coordenadas do espaço pentadimensional, os índices romanos maiúsculos se referem aos índices do *bulk* métrico ( $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$ ), os índices gregos minúsculos são as coordenadas do espaço-tempo quadridimensional ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) e os índices romanos minúsculos são as coordenadas do espaço tridimensional. Nossa métrica deverá ser diagonal,

pois ela obedecerá a seguinte regra de simetria:  $g_{MN} = g_{NM}$ . Por exemplo, se submetermos essa métrica a uma transformação de coordenadas do tipo  $x^i \rightarrow -x^i$ , parte dos termos cruzados mudaram de sinal.

Por isso, impomos que os termos cruzados sejam zero para que a métrica seja invariante sob transformações temporais e espaciais. As soluções que serão obtidas da equação de Einstein em 5D deverá usar uma métrica que satisfaça a invariância de Poincaré: espaço quadridimensional estático e plano. A métrica que satisfaz esse ansatz<sup>1</sup> tem a forma:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (2.1)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski, que descreve o espaço-tempo plano e possui somente termos na sua diagonal principal ( $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag} \{-1, 1, 1, 1\}$ ). Mais a frente será fornecido informações sobre  $r_c$ . A exponencial será o termo responsável por gerar a hierarquia entre os dois níveis de energia já mencionados.

O fato da exponencial depender da dimensão extra, faz com que a métrica não seja fatorável[8]. Pelas condições de contorno, as 3-branas possuíram as seguintes métricas em termos do *bulk*:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi) \equiv g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu), \quad g_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) \equiv g_{\mu\nu}^{hid}(x^\mu). \quad (2.2)$$

## 2.2 Equação de Einstein em 5-D

A ação que descreve a configuração do modelo é dado pela soma da ação da gravidade  $S_{grav}$ , e das duas 3-branas: visível  $S_{vis}$ , e oculta  $S_{hid}$ . A 3-brana visível é a brana onde habitamos, enquanto a brana oculta, ou "hidden", é a brana na outra escala de energia.

$$S = S_{grav} + S_{vis} + S_{hid}, \quad (2.3)$$

onde

---

<sup>1</sup>do alemão, significa abordagem.



$$\begin{aligned}
S_{grav} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} (-\Lambda + 2M^3 R), \\
S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}), \\
S_{hid} &= \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} (\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Os termos dentro das integrais são: o escalar de Ricci ( $R$ ), constante cosmológica ( $\Lambda$ ) e escala de massa fundamental ( $M$ ), todos em 5D; as Lagrangianas ( $\mathcal{L}$ ) e potenciais ( $V$ ) das respectivas branas, em 4D. A constante cosmológica  $\Lambda$  em 5D é diferente da constante cosmológica efetiva em 4D, que não precisará desaparecer ou ser considerada muito pequena.

Os potenciais que aparecem nas ações das 3-branas são os chamados potenciais de vácuo, que serão as fontes de gravidade. Segundo Randall e Sundrum (1999) [6], detalhes sobre as Lagrangianas não serão relevantes para determinar a métrica em 5D no estado fundamental, ou seja, na ausência de massa. Então, inicialmente faremos  $\mathcal{L}_{vis} = \mathcal{L}_{hid} = 0$ . Aplicando o princípio variacional de Hamilton em (2.4), obtemos as seguintes expressões para cada ação:

$$\begin{aligned}
\delta S_{grav} &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) (-\Lambda + 2M^3 R) + \sqrt{-g} (2M^3 \delta R) \\
\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int d^4x \sqrt{-g} &\left\{ \delta g^{MN} \left[ \frac{\Lambda}{2} g_{MN} + 2M^3 \left( R_{MN} - g_{MN} \frac{R}{2} \right) \right] \right. \\
&\left. + \underline{2M^3 \nabla_P (g^{MN} \delta \Gamma_{MN}^P - g^{MP} \delta \Gamma_{MN}^N)} \right\},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_{vis} &= - \int d^4x \frac{\sqrt{-g_{vis}}}{2} g_{\mu\nu}^{vis} \delta g^{MN} V_{vis} \\
\Rightarrow - \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int d^4x \frac{\sqrt{-g_{vis}}}{2} &g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta g^{MN} V_{vis} \delta(\phi - \pi),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_{hid} &= - \int d^4x \frac{\sqrt{-g_{hid}}}{2} g_{\mu\nu}^{hid} \delta g^{MN} V_{hid} \\
\Rightarrow - \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int d^4x \frac{\sqrt{-g_{hid}}}{2} &g_{\mu\nu}^{hid} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta g^{MN} V_{hid} \delta(\phi).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A integral sublinhada pode ser considerada como um termo de contorno, pois só contribuirá sobre o contorno do volume de integração. Por meio da exigência do princípio da ação estacionária, o termo sublinhado desaparecerá [9]. Nessas condições, aplicando as equações (2.5), (2.6) e (2.7) em (2.3), obtemos a equação de campo de Einstein em 5-D:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}(G_{MN}) = & -\frac{1}{4M^3} [\Lambda\sqrt{-g}g_{MN} + V_{vis}\sqrt{g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \\ & + V_{hid}\sqrt{g_{hid}} g_{\mu\nu}^{hid} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.3 Solução Clássica

A solução da equação de Einstein fornecerá informações que nos ajudarão a determinar a função  $\sigma(\phi)$ . O primeiro passo é visualizar a métrica, que pode ser expressa na seguinte forma:

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & r_c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{MN} = \begin{pmatrix} e^{2\sigma(\phi)}\eta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_c^2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

A constante  $r_c$  é um termo independente de  $\phi$ , e é chamado de "raio de compactificação" da dimensão extra. Conhecendo a métrica, devemos calcular as seguintes conexões:

$$\Gamma_{NP}^M, \quad \Gamma_{NP}^5, \quad \Gamma_{N5}^M, \quad \Gamma_{55}^M, \quad \Gamma_{5P}^5, \quad \Gamma_{55}^5. \quad (2.10)$$

Feito isso, basta aplicar esses valores no tensor de Ricci, e substituí-los em (2.8), que nos forneceram os seguintes resultados no lado esquerdo da igualdade:

$$G_{55} = 6\sigma'^2(\phi), \quad G_{\mu\nu} = \frac{6\sigma'^2(\phi) - 3\sigma''(\phi)}{r_c^2} g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Se comparados com a expressão do lado direito, obteremos as seguintes equações de movimento:

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3}, \quad (2.12)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{hid}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi). \quad (2.13)$$

Integrando (2.12) em relação a  $\phi$  e lembrando que a função é uma função par, como

definido na seção 2.1, teremos:

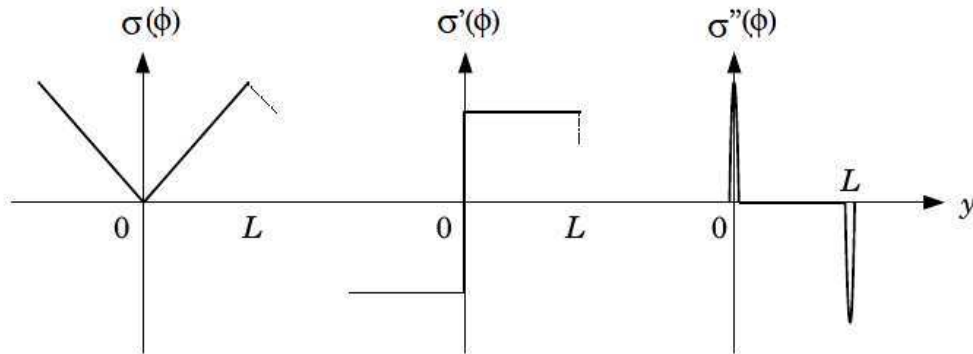
$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}. \quad (2.14)$$

Se derivarmos  $\sigma(\phi)$  duas vezes em relação a  $\phi$ , e lembrando da relação entre função sinal e função degrau, obteremos:

$$\sigma'' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} (\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)). \quad (2.15)$$

A 2ª delta de Dirac que aparece se deve ao fato da função ser periódica em  $\phi$  com período igual a  $\pi$ . A figura a seguir mostra como a função  $\sigma(\phi)$  e suas derivadas de 1ª e 2ª ordem se comportam:

Figura 2.3: Comportamento da função  $\sigma(\phi)$  e suas derivadas.



Fonte: Adaptado de Gabella [8].

Para simplificar termos, definiremos uma constante  $k \equiv \sqrt{-\Lambda/24M^3}$ , logo esta constante será um termo de energia da ordem da escala de Planck. Ao substituir a derivada de (2.14) em (2.12) e a (2.15) em (2.13), teremos as seguintes relações:

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3 k, \quad \Lambda = -24M^3 k^2. \quad (2.16)$$

As relações entre o limite cosmológico e os termos do *bulk* são necessários para obter uma solução que respeite a invariância quadridimensional de Poincaré.

Executando as substituições, temos a métrica:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 (d\phi)^2. \quad (2.17)$$

## 2.4 Implicações Físicas

Embora não existam experimentos que comprovem a existência de dimensões além das 4 já bem conhecidas [6], um detalhe interessante sobre o modelo é analisarmos a métrica fazendo  $r_c$  bem pequeno, mas que seja maior que  $1/k$ , o espaço-tempo resultante aparenta ser quadridimensional. Logo, faz sentido trabalharmos com uma descrição de campo quadridimensional efetiva. Vamos analisar o comportamento da solução (2.17) na presença de flutuações gravitacionais:

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|} \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + T^2(x) d\phi^2, \quad (2.18)$$

onde

$$\bar{g}_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.19)$$

O tensor  $h_{\mu\nu}$  representa tanto perturbação em torno da métrica de Minkowski, como também o gráviton físico da teoria efetiva quadridimensional [6]. Podemos perceber que nossa métrica (2.18) é localmente igual a (2.17), pois estamos trabalhando com uma métrica quadridimensionalmente suave<sup>2</sup>, e a função real suave  $T(x)$  é localmente constante. Na situação de vácuo, o valor esperado de  $T(x)$  é o raio de compactificação  $r_c$ . (Randall, Sundrum, 1999, p. 4, tradução nossa).

Para determinarmos nossa teoria efetiva quadridimensional, aplicaremos (2.18) em (2.4). Ao calcularmos nosso *bulk* escalar, que é dado pelo determinante da métrica  $\bar{g}_{MN}$ , podemos obter uma expressão em termos da métrica quadridimensional perturbada:

$$\bar{g}_{(bulk)} = e^{-8kr_c|\phi|} r_c^2 \bar{g}_{(brana)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\bar{g}_{(bulk)}} = e^{-4kr_c|\phi|} r_c \sqrt{-\bar{g}_{(brana)}}, \quad (2.20)$$

---

<sup>2</sup>significa dizer que ela possui derivadas de todas as ordens, segundo Warner (1983)[10], p. 5, definição 1.2

onde para  $\phi = 0$ , teremos o resultado para a 3-brana oculta, e  $\phi = \pi$  será para a 3-brana visível.

Focando nesse 2º caso, nosso tensor de Ricci pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{(bulk)} &= \bar{R}_{MN}\bar{g}^{MN} \\ \Rightarrow \bar{R}_{(bulk)} &\supset e^{2kr_c|\phi|}\bar{R}_{\mu\nu}\bar{g}^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \bar{R}_{(bulk)} &\supset e^{2kr_c|\phi|}\bar{R}_{(brana)}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Substituindo esses valores na ação gravitacional, e desprezando a presença da constante cosmológica, obteremos:

$$S_{grav} \supset 2M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R}.\tag{2.22}$$

Podemos integrar (2.22) em relação a  $\phi$  pois somente a exponencial será função da 5ª dimensão. A ação gravitacional efetiva quadridimensional pode ser escrita como:

$$S_{grav} \supset 2M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R}.\tag{2.23}$$

Comparando (2.22) e (2.23) podemos perceber a seguinte relação:

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2kr_c|\phi|} d\phi \Rightarrow M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}).\tag{2.24}$$

Queremos observar como o campo gravitacional, de baixa energia, se acopla com os campos de matéria. Para isso, devemos lembrar da relação entre o *bulk* e as métricas das 3-branas, dada por:

$$\begin{aligned}Em \phi = 0, \quad &\sqrt{-\bar{g}^{hid}} = \sqrt{-\bar{g}}. \\ Em \phi = \pi, \quad &\sqrt{-\bar{g}^{vis}} = e^{-4kr_c\pi} \sqrt{-\bar{g}}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Podemos determinar a massa física pela normalização de campos apropriada usando, por exemplo, o campo fundamental de Higgs. Segundo Das e Faizal (2018)[11] eq.(1), a ação do campo de Higgs é dada pela seguinte expressão geral:

$$S = \int d^{n+1}x \sqrt{-g} [f(R) + (D_\mu H)^\dagger D^\mu H - V(H^\dagger H)], \quad (2.26)$$

onde  $n$  é o número de dimensões do sistema e  $f(R)$  é um termo que incorpora as teorias gravitacionais de ordem elevada. O potencial do campo de Higgs é dado como:

$$V(H^\dagger H) = \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2, \quad (2.27)$$

onde  $v_0$  é um parâmetro de massa ([11], p. 2) . Aplicando (2.27) em (2.26) e aplicando  $n = 4$ , nossa ação de Higgs, na brana, pode ser escrita como:

$$S_{brana} \supset \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (D_\mu H)^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2]. \quad (2.28)$$

Assim, a ação do campo de Higgs na brana visível será:

$$S_{vis} \supset \int d^4x e^{-4kr_c\pi} \sqrt{-\bar{g}} [\bar{g}^{\mu\nu} e^{2kr_c\pi} (D_\mu H)^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2]. \quad (2.29)$$

Fazendo uma renormalização,  $H \rightarrow H e^{kr_c\pi}$ , nossa ação efetiva da brana pode ser reescrita como:

$$S_{efe}^{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} [\bar{g}^{\mu\nu} (D_\mu H)^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2]. \quad (2.30)$$

Aplicando (2.28) para o caso da brana oculta e se compararmos com a ação (2.30), veremos que as escalas de massas físicas são dadas por um parâmetro de quebra de simetria:

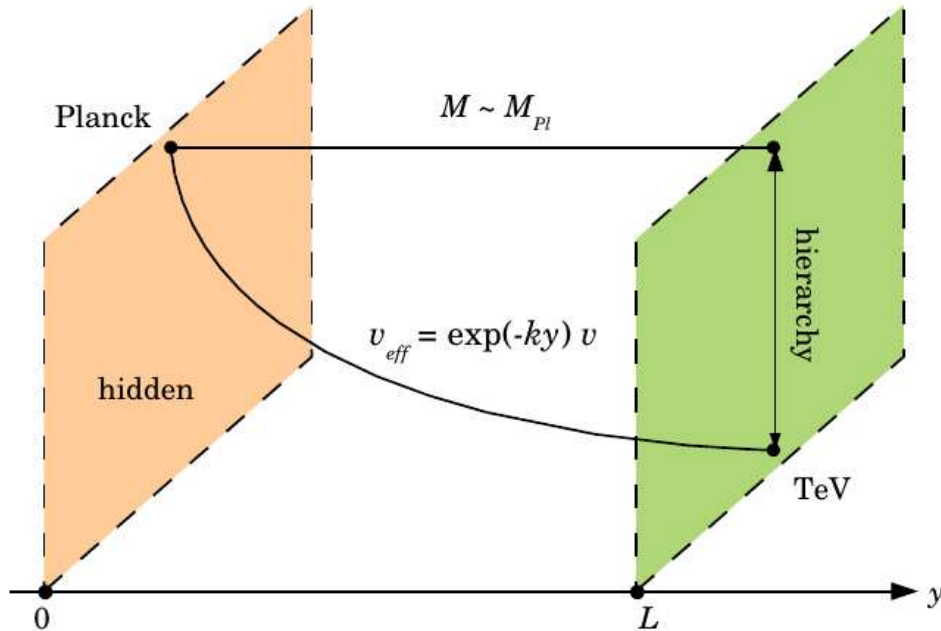
$$v \equiv e^{-kr_c\pi} v_0, \quad (2.31)$$

onde  $v_0$  e  $v$  são os parâmetros de massa nas 3-branas oculta e visível, respectivamente. Isso nos diz que qualquer parâmetro de massa na brana visível, na teoria de dimensões superiores, corresponde a:

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0. \quad (2.32)$$

Para visualizar melhor essa supressão exponencial que é mostrada em (2.31) e (2.32), basta analisarmos a figura a seguir:

Figura 2.4: A geração de uma hierarquia exponencial



Fonte: Adaptado de Gabella [8].

Podemos ver que pelo fato de haver essa exponencial, não é necessário um raio de compactificação muito grande para gerar a hierarquia. Mesmo que  $r_c$  fosse muito grande, é fácil ver que em (2.24),  $M_{Pl} \approx M$ .

Em síntese, vemos como o modelo de Randall-Sundrum fornece uma resposta ao problema da hierarquia, onde os parâmetros  $M, \Lambda, k$  e  $v_0$ , utilizados na teoria, são da ordem da escala de Planck. Já que estabelecemos as massas relevantes para os campos de matéria, trataremos dos chamados *modos gravitacionais*. Esse assunto será abordado no modelo de Randall-Sundrum tipo II. Para determinar os parâmetros desses modos com detalhes, é necessária uma decomposição explícita de Kaluza-Klein. Faremos isso no capítulo seguinte.

### 3 MODELO RANDALL-SUNDRUM TIPO II

Para entendermos como a gravidade funciona, que é o foco do modelo de Randall-Sundrum tipo II (*RS-II*)[12], trabalharemos com a forma explícita dos grávitons, que são expressos em termos das perturbações em torno do fundo métrico. Aqui consideramos o campo gravitacional em torno da brana  $\phi = 0$ , e veremos adiante que a gravidade sentida por nós corresponde ao modo-zero de Kaluza-Klein do gráviton. E no Limite Newtoniano, em 4D, o modelo reproduz o Potencial Newtoniano.

#### 3.1 Modos do Gráviton

Inicialmente, faremos a seguinte substituição:  $r_c \phi \rightarrow y$ . Assim, trabalharemos com o arco do orbifold, que será uma nova forma de nos referimos a dimensão extra:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.1)$$

A fim de obtermos as formas explícitas dos grávitons, usaremos as soluções para as equações de Einstein linearizadas.

##### 3.1.1 Métrica conformalmente plana

É conveniente trabalharmos com uma métrica proporcional ao espaço plano. Portanto, faremos a seguinte substituição:

$$dz^2 = e^{2k|y|} dy^2. \quad (3.2)$$

Integrando os dois lados da igualdade, podemos encontrar uma forma de reescrevermos a exponencial de  $y$  em termos de  $z$ :

$$e^{k|y|} = (k|z| + 1), \quad (3.3)$$

e se reescrevermos o lado direito da igualdade em termos de uma função exponencial, o valor



que irá potencia-la será uma função  $A(z) = \ln(k|z| + 1)$ . Logo, nosso elemento de linha pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{(k|z| + 1)^2} (\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + dz^2) \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{(k|z| + 1)^2} \eta_{MN} dx^M dx^N \\ &\Rightarrow ds^2 = e^{-2A(z)} \eta_{MN} dx^M dx^N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como  $A(z) = \ln(k|z| + 1)$ , as 1ª e 2ª derivadas dela serão:

$$A'(z) = \frac{k \operatorname{sgn}(z)}{k|z| + 1} \Rightarrow A''(z) = \frac{2k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{k|z| + 1} - \left( \frac{k}{k|z| + 1} \right)^2. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Equações de Einstein linearizadas

A fim de ter uma forma mais simplificada dos cálculos, usaremos uma expressão a respeito de métricas que se relacionam conformalmente. Seja uma métrica  $g_{MN}$  que é a transformação conforme de uma outra métrica  $\tilde{g}_{MN}$  por meio de:

$$g_{MN} = e^{-2A(z)} \tilde{g}_{MN}, \quad (3.6)$$

os respectivos tensores de Einstein dessas métricas, se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_{MN}(g_{MN}) &= \tilde{G}_{MN}(\tilde{g}_{MN}) + (n-2) [\tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_N A + \tilde{\nabla}_M A \tilde{\nabla}_N A \\ &\quad - \tilde{g}_{MN} (\tilde{\nabla}_P \tilde{\nabla}^P A - \frac{n-3}{2} \tilde{\nabla}_P A \tilde{\nabla}^P A)], \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o índice  $n$  diz respeito ao número de dimensões do espaço.

O cálculo que desenvolve o passo entre as equações (3.6) e (3.7) pode ser encontrado em [13] e no apêndice A. Estamos trabalhando com um espaço pentadimensional, então aplicaremos  $n = 5$ :

$$\begin{aligned} G_{MN} &= \tilde{G}_{MN} + 3[\partial_M \partial_N A + \partial_M A \partial_N A - \tilde{\Gamma}_{MN}^R \partial_R A \\ &\quad - \tilde{g}_{MN} (\partial_R \partial^R A - \partial_R A \partial^R A - \tilde{\Gamma}_{RS}^R \partial^S A)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A métrica  $\tilde{g}_{MN}$  é uma métrica com perturbações, então a expressão (3.6) pode ser

escrita como:

$$g_{MN} = e^{-2A(z)}(\eta_{MN} + h_{MN}). \quad (3.9)$$

Logo, pegando somente os termos de 1ª ordem, nossos símbolos de Christoffel correspondentes a ela serão:

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^R = \frac{1}{2}(\partial_M h_N^R + \partial_N h_M^R - \partial^R h_{MN}), \quad (3.10)$$

onde os  $\eta^{MN}$  serão usados para subir índices. Por conveniência, trabalharemos com um calibre onde as flutuações estejam contidas nas 3-branas, em outras palavras, não se propagam na dimensão extra. E as flutuações que produzem os gravitons devem ser perpendiculares a eles e com traço nulo:

$$h_{M5} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

Nessa simplificação, nosso tensor 5x5 que inicialmente possuía 15 graus de liberdade, agora terá somente 5. Ao aplicar (3.10) ajustado pelo calibre, no tensor  $\tilde{G}_{MN}$ , vemos que o 1º símbolo de Christoffel se reduz a  $-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{MN}$ , enquanto o outro desaparece. Isso nos permitirá escrever a parte quadridimensional de (3.8) como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{-1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2}h'_{\mu\nu}A' - 3(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(A'' - A'^2), \quad (3.12)$$

onde a linha é a derivada dos mesmos em relação a dimensão extra. Determinamos o lado esquerdo da equação de Einstein, que diz respeito a curvatura, agora nos resta calcular o tensor energia-momentum para a métrica perturbada.

Se a métrica é conformalmente plana, o determinante da métrica induzida sobre as branas pode ser escrito como:

$$g = g_i g_{55} = g_i e^{-2A(z)}, \quad (3.13)$$

onde  $i = 1, 2$ , que se referem a branas oculta e visível, respectivamente. As ações das branas

podem ser reescritas como:

- $S_{hid} = S_1 = - \int d^4x \sqrt{-g_1} V_{hid} \Rightarrow - \int dz \int d^4x \sqrt{-g} e^{A(z)} V_{hid} \delta(z)$
- $S_{vis} = S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g_2} V_{vis} \Rightarrow - \int dz \int d^4x \sqrt{-g} e^{A(z)} V_{hid} \delta(z - L_z)$

O tensor energia-momentum é definido como:

$$T_{MN} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{MN}}, \quad (3.14)$$

onde  $S_M (= S - S_H)$  é a ação da parte de matéria e energia do sistema,  $S$  a ação total do modelo e  $S_H$  a ação de Einstein-Hilbert. O respectivo tensor obtido de 3.14 para nosso caso é:

$$k^2 T_{MN} = \frac{-1}{4M^3} [\Lambda + V_{hid} e^{A(z)} \delta(z) + V_{vis} e^{A(z)} \delta(z - L_z)] g_{MN}, \quad (3.15)$$

então as componentes  $\mu\nu$  da expressão acima, que é onde as perturbações estão situadas, podem ser escritas como:

$$\Rightarrow k^2 T_{\mu\nu} = \frac{-1}{4M^3} [\Lambda e^{-2A(z)} + V_{hid} e^{-A(z)} \delta(z) + V_{vis} e^{-A(z)} \delta(z - L_z)] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \quad (3.16)$$

Aplicando as relações (2.16) e (3.5) na expressão (3.16), obteremos um tensor energia-momentum em termos das derivadas de  $A(z)$ :

$$\begin{aligned} k^2 T_{\mu\nu} &= 6[k^2 e^{-2A(z)} - k e^{-A(z)} (\delta(z) - \delta(z - L_z))] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= [6A'^2 - 3A'' - 3A'^2] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= 3[A'^2 - A''] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

sabendo que o tensor de Einstein está relacionado a um tensor de energia-momento, basta aplicarmos o tensor (3.17) no tensor de Einstein linearizado dado por (3.12):

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= k^2 T_{\mu\nu}, \\
\Rightarrow \frac{-1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2} h'_{\mu\nu} A' &= 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

### 3.1.3 Equação tipo-Schrödinger

Como o gráviton é uma partícula subatômica, uma forma alternativa para resolvermos a equação (3.18) é reescrevê-la na forma de uma equação tipo-Schrödinger. A fim de nos livrarmos da 1ª derivada de  $h_{\mu\nu}$ , faremos o seguinte reescalonamento:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow e^{\alpha A} h_{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Isso resultará em:

$$\frac{-1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} - \left( \frac{3}{2} - \alpha \right) A' h'_{\mu\nu} + \left[ \left( \frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) A'^2 - \frac{\alpha}{2} A'' \right] h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.20}$$

Se fizermos  $\alpha = 3/2$ , o termo  $h'_{\mu\nu}$  desaparecerá e nossa expressão se simplifica na forma:

$$\frac{-1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \left( \frac{9}{8} A'^2 - \frac{3}{4} A'' \right) h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.21}$$

Para obtermos as funções de onda do gráviton, devemos aplicar a decomposição de Kaluza-Klein, que é um processo de separação de variáveis. Por meio deste, poderemos escrever as flutuações em termos de uma combinação de funções de onda, dado como:

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(z), \tag{3.22}$$

com  $\square h_{\mu\nu}^n \equiv \partial_P \partial^P h_{\mu\nu}^n = m_n^2 h_{\mu\nu}^n$ :

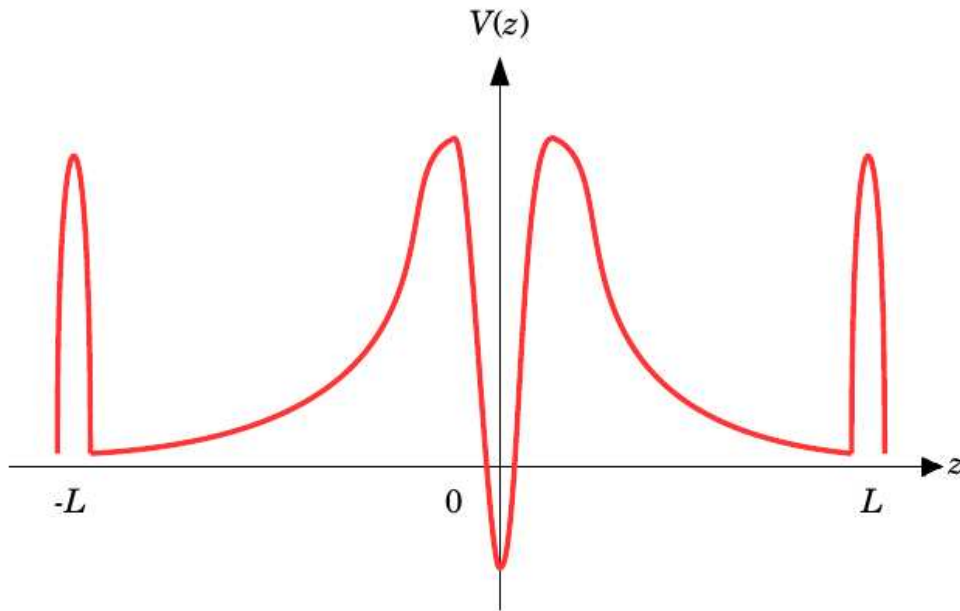
$$\Rightarrow -\psi_n''(z) + \left[ \frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \right] \psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z). \tag{3.23}$$

Se compararmos a expressão (3.23) com a equação de Schrödinger, percebe-se que o termo entre colchetes será o potencial. Por meio da expressão (3.5), o potencial poderá ser reescrito como:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{9}{4}A'^2(z) - \frac{3}{2}A''(z) \\ &= \frac{15k^2}{4(k|z|+1)^2} - \frac{3k[\delta(z) - \delta(z-L_z)]}{k|z|+1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

O gráfico do potencial (3.24) tem a seguinte forma:

Figura 3.1: Esboço do potencial do gráviton



Fonte: Adaptado de Gabella [8].

### 3.1.4 Condições de contorno

Para obter as condições de contorno da função de onda, basta integrar a expressão (3.23) em torno da vizinhança das branas. No caso de  $z = 0$ , teremos:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{0^+} [-\psi_n''(z) + V(z)\psi_n(z)] dz &= \int_{0^-}^{0^+} m_n^2 \psi_n(z) dz \\ \Rightarrow -\psi_n'(0^+) + \psi_n'(0^-) - 3k\psi_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se fizermos uma transformação de coordenadas  $z \rightarrow -z$ , vemos que a 1ª derivada da função de onda é uma função ímpar, nos fornecendo a relação  $-\psi_n'(0^+) = \psi_n'(0^-)$ . Assim,

a condição de contorno na brana, na escala de Planck, será:

$$\psi_n'(0) = -\frac{3k}{2}\psi_n(0), \quad (3.26)$$

e ao refazer os mesmos processos, mas dessa vez sobre a brana na escala de TeV, teremos o seguinte resultado:

$$\psi_n'(L_z) = -\frac{3k}{2(kL_z + 1)}\psi_n(L_z). \quad (3.27)$$

### 3.1.5 Modo-Zero

O modo-zero é assim chamado pois se trata da solução da equação tipo-Schrödinger com  $m_0 = 0$ .

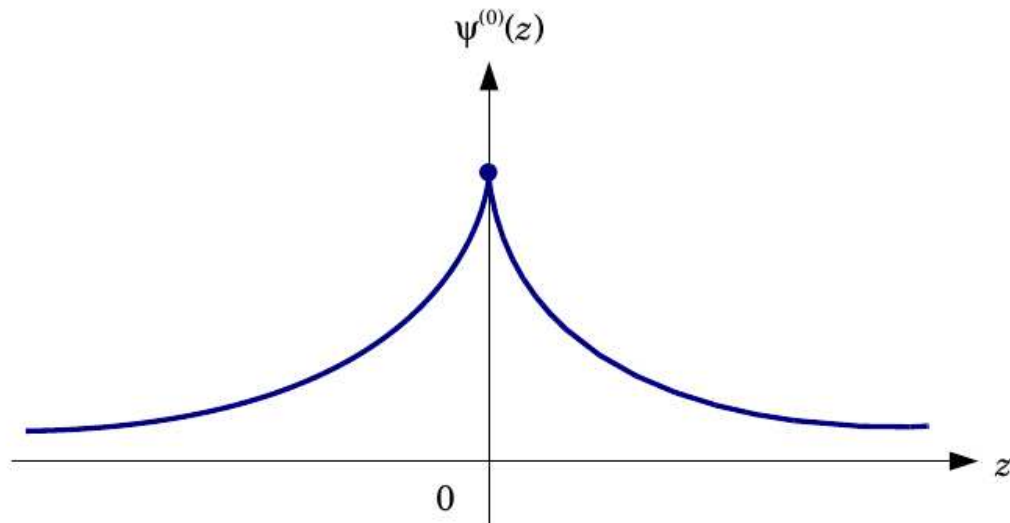
$$\Rightarrow -\psi_0''(z) + \left[ \frac{9}{4}A'^2(z) - \frac{3}{2}A''(z) \right] \psi_0(z) = 0, \quad (3.28)$$

ao fazer  $\psi_0(z) = e^{F(z)}$ , a resolução nos fornecerá:

$$\psi_0(z) = e^{-3A(z)/2} = (k|z| + 1)^{-3/2}, \quad (3.29)$$

logo percebe-se que essa expressão satisfaz as condições de contorno dadas por (3.26) e (3.27). É fácil ver que (3.29) possui um pico em  $z=0$ , como mostrado na figura a seguir:

Figura 3.2: Localização do gráviton em torno da brana de Planck



Fonte: Adaptado de Gabela [8].

### 3.1.6 Modos de Kaluza-Klein

Na região entre as branas, os modos massivos de Kaluza-Klein satisfazem a seguinte equação:

$$\psi_n''(z) + \left[ m_n^2 - \frac{15}{4(|z| + 1/k)^2} \right] \psi_n(z) = 0. \quad (3.30)$$

Os termos com Delta de Dirac foram desprezados pelo fato de serem pontualmente localizados. Segundo Abramowitz (1972)[14], equação (9.1.49), a expressão (3.30) é uma equação de Bessel, do tipo:

$$w'' + \left[ \lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{z^2} \right] w = 0 \Rightarrow w = z^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_\nu(\lambda z), \quad (3.31)$$

onde  $\mathcal{C}$  representa uma combinação linear de equações de Bessel de 1ª espécie, 2ª espécie, e funções de Hankel  $H^{(1)}$  e  $H^{(2)}$ . Assim, nossa solução poderá ser escrita como:

$$\psi_n(z) = (|z| + 1/k)^{1/2} [a_n J_2(m_n(|z| + 1/k)) + b_n Y_2(m_n(|z| + 1/k))], \quad (3.32)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes a determinar. Para encontrar os valores dessas constantes, devemos usar os limites assintóticos na expressão (3.32). Por meio da forma de somatório de  $J_\nu$  e  $Y_\nu$ , para  $m_n|z| \ll 1$ , teremos:

$$\begin{aligned} J_2(m_n(|z| + 1/k)) &\simeq \frac{m_n^2(|z| + 1/k)^2}{8}, \\ Y_2(m_n(|z| + 1/k)) &\simeq -\frac{4}{\pi m_n^2(|z| + 1/k)^2} - \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A forma de somatório de  $Y_n$  é calculada no apêndice B. Usando (3.33) e a condição de contorno (3.26), a expressão (3.32) poderá ser escrita como:

$$\psi_n(z) = N_n (|z| + 1/k)^{1/2} \left[ Y_2(m_n(|z| + 1/k)) + \frac{4k^2}{\pi m_n^2} J_2(m_n(|z| + 1/k)) \right]. \quad (3.34)$$

Para determinar o valor da constante de normalização  $N_n$ , usaremos o limite assintótico  $m_n|z| \gg 1$ . Nessa situação,  $J_2$  se torna predominante na expressão (3.34). Por meio da

equação de Bessel de 1ª espécie na forma integral, vemos que:

$$J_2(m_n(|z|)) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi m_n |z|}} \cos(m_n |z| - 5\pi/4). \quad (3.35)$$

A expressão acima é determinada no apêndice C. Aplicando a relação de normalização,

$$\int_{-L}^L |\psi|^2 dz = 1, \quad (3.36)$$

obteremos:

$$N_n = \sqrt{\frac{m_n \pi}{2L} \frac{m_n^2 \pi}{4k^2}}, \quad (3.37)$$

logo, nossa aproximação para as funções de onda dos estados de Kaluza-Klein, no limite de  $m_n |z|$  grande será:

$$\psi_n(z) = \frac{\cos(m_n |z| - 5\pi/4)}{\sqrt{L}}. \quad (3.38)$$

### 3.2 Espectro do Gráviton

A presença das branas irá induzir uma discretização nas massas dos modos de Kaluza-Klein, ou seja, assumiram valores discretos. Esse fato é evidenciado quando calcula-se a derivada de (3.32), dada por [14] eq. (9.1.29):

$$\begin{aligned} \psi'_n(z) = & m_n(|z| + 1/k)^{1/2} [a_n J_1(m_n(|z| + 1/k)) + b_n Y_1(m_n(|z| + 1/k))] \\ & - \frac{3}{2} (|z| + 1/k)^{-1/2} [a_n J_2(m_n(|z| + 1/k)) + b_n Y_2(m_n(|z| + 1/k))]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ao aplicarmos as condições de contorno (3.26) e (3.27), em (3.39), teremos o seguinte sistema de soluções:

$$\begin{aligned} a_n J_1(m_n/k) + b_n Y_1(m_n/k) &= 0, \\ a_n J_1(m_n(L_z + 1/k)) + b_n Y_1(m_n(L_z + 1/k)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$



Esse sistema só tem solução se seu determinante for zero, ou seja:

$$J_1(m_n/k) Y_1(m_n(L_z + 1/k)) - J_1(m_n(L_z + 1/k)) Y_1(m_n/k) = 0. \quad (3.41)$$

Retornando a nossa variável  $y$ , que representa a distância ao longo da dimensão extra. Pela relação (3.3), podemos fazer a seguinte substituição:

$$L_z = (e^{kL} - 1)/k. \quad (3.42)$$

Com isso, podemos escrever (3.41) como:

$$J_1(m_n/k) Y_1(m_n e^{kL}/k) - J_1(m_n e^{kL}/k) Y_1(m_n/k) = 0. \quad (3.43)$$

Numa aproximação para pequenas massas ( $m_n/k \ll 1$ ) e pela relação (3.39), vemos que  $Y_1(m_n/k) \gg J_1(m_n/k)$ . Mediante a isso, o 2º termo de (3.43) acaba sendo predominante, assim podemos reescrevê-la como:

$$J_1(m_n e^{kL}/k) = 0. \quad (3.44)$$

As equações de Bessel assumirão valor zero caso o termo dentro do parênteses seja um dos zeros dela, portanto:

$$\begin{aligned} J_1(j_n) &= J_1(m_n e^{kL}/k) = 0 \\ \Rightarrow m_n &= k e^{-kL} j_n, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $j_n$  são os zeros da função de Bessel de 1ª espécie. Como  $k$  é um termo da ordem da escala de Planck e o fator  $e^{-kL}$  na brana visível é fixado para resolver o Problema da Hierarquia, percebemos que as massas dos modos de KK são da escala de TeV.

Isso implica na possibilidade de observar ressonâncias individuais dos primeiros estados dos modos de Kaluza-Klein em colisores no futuro [15].

### 3.3 Limite Newtoniano

Precisamos verificar se as interações gravitacionais mediadas pelos modos gravitacionais encontrados estão de acordo com as Leis de Newton. Para isso, consideremos um acoplamento mínimo de matéria com a gravidade e procuremos os valores das constantes de acoplamento. Nossa ação total será dada pelas expressões (2.3) e (2.4), somado as Lagrangianas, e acrescidas de um termo de interações entre massa e gravidade:

$$S = S_g + \int d^4x dy \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}), \quad (3.46)$$

onde  $\Phi$  representa os campos que residem nas branas. Estamos interessados em observar como o 2º termo de (3.46) é afetado por pequenas perturbações em torno do fundo métrico:

$$g_{MN} = e^{-2A} \eta_{MN} \rightarrow g'_{MN} = e^{-2A} (\eta_{MN} + h_{MN}). \quad (3.47)$$

Portando, reescreveremos tanto a Lagrangiana quanto o invariante métrico em termos da métrica sem perturbações. Expandindo nossa Lagrangiana em série de Taylor até os termos de primeira ordem, nos fornecerá:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g'_{MN}) = \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}) + h_{\mu\nu} \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathbf{M}}}{\delta g'_{\mu\nu}} \right|_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.48)$$

Fazendo o processo análogo no invariante:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = e^{-A} \Rightarrow \sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \left[ 1 + \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2) \right], \quad (3.49)$$

onde  $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ . Usando (3.14) para calcular o tensor energia-momentum respectivo à ação do acoplamento mínimo de matéria,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left. \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathbf{M}})}{\delta g_{\mu\nu}} \right|_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{M}} g^{\mu\nu} - 2 \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathbf{M}}}{\delta g_{\mu\nu}} \right|_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

e aplicando (3.49) e (3.50) em (3.48), teremos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g'_{MN}) &= \sqrt{-g}(1+h/2) \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g'_{MN}) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \sqrt{-g} \left[ \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}) + h_{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathbf{M}}}{\delta g'_{\mu\nu}} \Big|_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}) \right] + \mathcal{O}(h^2) \\
\sqrt{-g'} \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g'_{MN}) &= \sqrt{-g} \left[ \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(h^2). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

É fácil notar que as perturbações afetam o escalar de Ricci da ação  $S_g$ , e caso venhamos a expandi-lo em série de Taylor até os termos de 2ª ordem, aparecerá o termo correspondente a parte gravitacional da ação de Fierz-Pauli ([16], eq. A.8). Como estamos trabalhando com o caso massivo, então podemos acrescentar o termo de massa correspondente, dado por [17] eq. (4.12) e (4.13). Assim, podemos reescrever (3.51) como:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g'_{MN}) = \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\Phi, g_{MN}) + M^3 \sum_n \mathcal{L}_{\mathbf{FP}}(h_{\mu\nu}^n(x)) - \sum_n \frac{e^{\frac{3}{2}A} \Psi_n(z)}{2} h_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu}. \tag{3.52}$$

Fazendo uma redefinição de campo para normalizar canonicamente a Lagrangiana de Fierz-Pauli:

$$h_{\mu\nu}^n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{M^3}} h_{\mu\nu}^n(x), \tag{3.53}$$

a expressão (3.52) se tornará:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\phi, g) = \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\phi, \eta) + \sum_n \mathcal{L}_{\mathbf{FP}}(h_{\mu\nu}^n(x)) - \sum_n \frac{e^{\frac{3}{2}A} \Psi_n(z)}{2\sqrt{M^3}} h_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu}, \tag{3.54}$$

onde o 3º termo da expressão acima nos fornecerá as constantes de acoplamento, na forma:

$$a_n = \frac{e^{\frac{3}{2}A} \Psi_n(z)}{2\sqrt{M^3}}. \tag{3.55}$$

Agora poderemos calcular o potencial gravitacional entre duas partículas com mas-

sas unitárias, na brana de TeV, que é o potencial estático gerado pelos modo-zero e massivos de Kaluza-Klein. No caso de uma “interação de Yukawa”<sup>3</sup> (veja [18] eq. 4.127), nosso potencial será dado por:

$$V(r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{4\pi} \frac{e^{-m_n r}}{r}. \quad (3.56)$$

Ao pegarmos o termo zero do potencial total,  $a_0$  receberá contribuição do modo-zero na forma dada por (3.29), resultando em:

$$\begin{aligned} V_0(r) &= - \frac{1}{16\pi M^3 r} \\ &= - \frac{G_N}{r}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde  $G_N$  é a constante de Newton. Claramente, isso reproduz a gravidade 4D que sentimos no nosso Universo. Com o auxílio da aproximação(3.38) para as funções de onda dos modos massivos de Kaluza-Klein, o potencial gravitacional mediado pelo  $n$ -ésimo gráviton terá a forma:

$$\begin{aligned} V_n(r) &= - \frac{k^3 L^2}{16\pi M^3} \cos^2(m_n L_z - 5\pi/4) \frac{e^{-m_n r}}{r} \\ &= - \frac{G_N k^3 L^2}{r} \cos^2(m_n L_z - 5\pi/4) e^{-m_n r}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

que segundo Gabella (2006)[8], as contribuições dos potenciais dados por (3.58) podem ser negligenciadas até distâncias da ordem dos fermi,  $r \lesssim 10^{-13} cm$ , por serem suprimidas exponencialmente. Portanto, a gravidade do modelo de Randall-Sundrum corresponde efetivamente a gravidade 4D percebida experimentalmente.

---

<sup>3</sup>O potencial dado por [18] eq. 4.127 foi a base para a teoria de Yukawa relacionada a força nuclear e usada para prever a massa do pión.

## 4 SIMPSON-VISSER EM MUNDO-BRANA

Em 1915, Karl Schwarzschild propôs uma solução para a equação de campo de Einstein, sugerindo uma distribuição de massa esfericamente simétrica e estática no tensor energia-momentum. Essa imposição gerou uma métrica que possui duas singularidades:  $r = 0$  e  $r = 2GM/c^2$  [19] [20]. Para eliminá-las, podemos recorrer a substituição  $r^2 \rightarrow r^2 + a^2$ , onde  $a$  é uma constante. Sem singularidades, a nova métrica descreve o chamado “buraco negro regular” e a partir dele são feitos estudos envolvendo buracos de minhoca [21].

O Modelo Randall-Sundrum não possui singularidades quando  $y = 0$  no RS-I, ou  $z = 0$  no RS-II, pelo contrário, são valores finitos como já evidenciado nas eq's (3.1) e (3.4). Porém, interessado em observar como a métrica do RS irá reagir, será executada uma transformação análoga no intuito de estudarmos seu comportamento e quais mudanças serão obtidas nos resultados se comparada com a métrica original.

### 4.1 Mudanças no RS-II

#### 4.1.1 Métrica conformalmente plana

Aplicando a substituição  $|z| \rightarrow \sqrt{z^2 + b^2}$  na eq.(3.4), obtemos:

$$ds^2 = \frac{1}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2] = (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^{-2} \eta_{MN} dx^M dx^N, \quad (4.1)$$

onde  $b \in \mathbb{R}_+$ , então o novo  $A(z)$  e suas 1ª e 2ª derivadas serão:

$$A(z) = \ln[(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)], \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow A'(z) = \frac{k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}}, \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow A''(z) = \frac{k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{k^2}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \cdot \frac{z^2}{z^2 + b^2}. \quad (4.4)$$

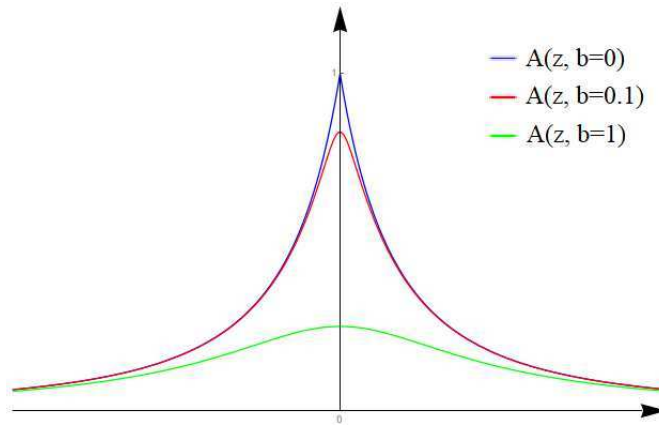
O tensor de Einstein associado a métrica (4.1) é facilmente determinado utilizando a eq.(3.8), onde  $\bar{g}_{MN} = \eta_{MN}$ . Suas componentes, de maneira geral, são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = \frac{6k^2 z^2 \cdot \sqrt{z^2 + b^2} - 3k b^2 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)}{(z^2 + b^2)^{3/2} \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \eta_{\mu\nu},$$

$$G_{55} = \frac{6k^2 z^2}{(z^2 + b^2) \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \eta_{55}. \quad (4.5)$$

Vamos observar o comportamento do fator de *warp* regularizado em comparação ao caso original:

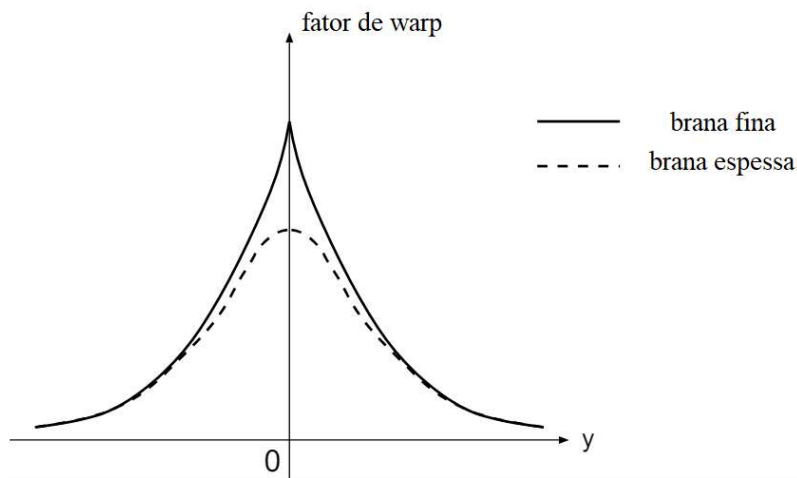
Figura 4.1: Comportamento do fator de *warp* para diferentes valores de  $b$ .



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível observar uma suavização na função exponencial, mediante a presença da constante  $b$ , e esse comportamento é um indicativo de que a brana pode adquirir uma espessura [22], como mostrado na figura a seguir:

Figura 4.2: Comparação entre fatores de *warp* que geram branas finas e espessas.



Fonte: Adaptado de Dzhunushaliev [22].

que se comparada com a figura (4.1), vemos que nossa métrica claramente satisfaz essa condição.

Segundo Dahia e Silva (2015)[23], as soluções de brana espessa são interessantes de se analisar pois “são consideradas versões regularizadas do modelo de brana que são infinitamente fina, já que recuperam a solução fina correspondente no limite quando a espessura chega a zero”. Porém, para verificarmos se de fato temos branas espessas e quantas o modelo possui, devemos estudar o comportamento da função  $A(z)$  da métrica regularizada.

#### 4.1.2 Breve análise da função

Vamos observar se  $A(z)$ , dado pela eq.(4.2) e suas derivadas apresentam um comportamento que lembra a função  $A(z)$  original e suas derivadas, ou se surgirá algo novo.

$$\lim_{b \rightarrow 0} A(z) = \lim_{b \rightarrow 0} \ln[(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)] = \ln[(k\sqrt{z^2} + 1)] = \ln[(k|z| + 1)]. \quad (4.6)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} A'(y) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} = \frac{k}{(k|z| + 1)} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{k \operatorname{sgn}(z)}{(k|z| + 1)}. \quad (4.7)$$

Como visto nas seções anteriores, ao calcular o tensor de Einstein do modelo, naturalmente surgem deltas de Dirac na derivada de 2ª ordem. Tal derivada fornece informações que caracterizaram o tipo de brana que estaremos trabalhando. Então, devemos verificar se o 1º termo de  $A''(z)$  satisfaz os seguintes comportamentos de uma delta de Dirac, que são:

- $\delta(z - a) \begin{cases} 0, & \text{se } z \neq a; \\ \infty, & \text{se } z = a; \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - a) dz = 1;$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z - a) dz = f(a);$

Verificando a 1ª propriedade:

- Quando  $z \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} A''(z \neq 0) &= \lim_{b \rightarrow 0} \left[ \frac{k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

- Quando  $z = 0$ :

$$\lim_{b \rightarrow 0} A''(z=0) = \lim_{b \rightarrow 0} \left[ \frac{k}{(k b + 1)} \cdot \frac{1}{b} \right] \quad (4.9)$$

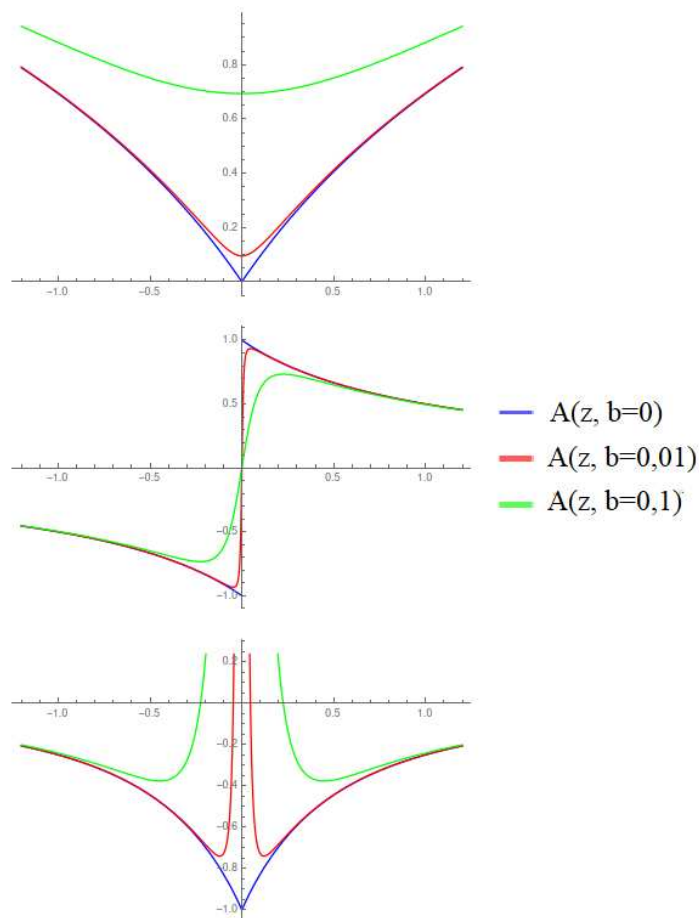
$$\Rightarrow \infty.$$

Comparando esses resultados, vemos que o termo  $b^2/(z^2 + b^2)^{3/2}$ , presente na eq.(4.4), se comporta como uma delta quando  $b \rightarrow 0$ , então, verificando a 2ª propriedade::

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} dy = \frac{k z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2k. \quad (4.10)$$

Em  $A''(z=0)$ , quando  $b \neq 0$ , vemos que ele possuirá um altura finita de tamanho  $k/b(k b + 1)$  e adquire espessura a medida que  $b$  aumentar, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 4.3: Gráfico da função  $A(z)$  e suas 1ª e 2ª derivadas, para diferentes valores de  $b$ .



Fonte: Elaborado pelo autor

Calculando ultima propriedade: Seja  $f(z)$  uma função arbitrária. Quando  $z$  é um valor elevado, o valor da função é desprezível, portanto a integração pode ser simplificada com



limites de integração finitos, centrado na origem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{k b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} dz \rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z) \frac{k b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} dz.$$

A medida que o valor de  $\varepsilon$  diminuir, a constante  $b$  torna-se mais influente, de tal maneira que não podemos dizer que  $f(z)$  é constante na vizinhança do ponto  $z = 0$  quando  $b \neq 0$ , visto que ela se comporta como uma distribuição normal, ao invés de bem localizada num ponto, como a delta de Dirac. Assim, de forma geral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{k b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} dz \neq f(b) \text{ se } b \neq 0 \quad (4.11)$$

Portanto, nossa função  $A(z)$  regularizado se comporta de maneira semelhante a  $A(z)$  da métrica original, assim como as 1ª e 2ª derivadas, embora ela não satisfaça uma das propriedades da delta de Dirac. Assim,  $A''(z)$  indica que trabalharemos somente com uma brana espessa.

### 4.1.3 Influência dos campos

Após a regularização efetuada na métrica, não discutimos sobre a ação das branas. Por isso, sabendo que a ação que as descreve são colocadas a mão, um mecanismo que pode utilizado para gerar branas é por meio da atuação de um campo do tipo escalar na ação gravitacional do modelo.

Na literatura, um caso onde vemos isso é mostrado em Kehagias (2001)[7], onde ao submeter a ação de um campo escalar tipo salto (ou *bounce*, no original) à ação gravitacional do Modelo Randall-Sundrum, obteve como solução um fator de *warp* suavizado.

Já que podemos substituir a ação usual das brana pela ação do campo, permitindo que, de maneira geral, a ação total seja escrita como:

$$\begin{aligned} S &= S_{grav} + S_C \\ &= \int d^4x \int dz \sqrt{-g} 2M^3 R + S_C, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $S_{grav}$  é fornecida pela eq(2.4) desprezando a constante cosmológica, e  $S_C$  é a ação do campo. Na busca pelo campo cuja solução fornece nossa métrica regularizada, iremos testar dois campos que dados em termos de  $\phi$ , submetendo-os um por vez à ação gravitacional descrita pela métrica. (4.1).

### 4.1.3.1 Campo Escalar

O ação que descreve o campo escalar é dada como:

$$S_{C.E.} = - \int d^4x \int dz \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + V(\phi) \right), \quad (4.13)$$

onde o 1º termo dentro do parênteses é o termo cinético do campo, enquanto  $V(\phi)$  é o potencial associado ao campo escalar  $\phi$ . Ao aplicarmos a eq.(4.13) em (4.12) e por meio do princípio variacional, obtemos uma equação em termos de  $\delta g^{MN}$ , que é o tensor de Einstein, e outra obtida em termos de  $\delta \phi$ :

$$G_{MN} = \frac{1}{4M^3} \left( \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left[ \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right] \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (4.15)$$

onde o traço “ ‘ ” simboliza a derivada em termos de  $z$ . Aplicando as eq's(4.5) em (4.14), obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{V(\phi)}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} = 12M^3 k \left[ \frac{b^2 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) - 2k z^2 \cdot \sqrt{z^2 + b^2}}{(z^2 + b^2)^{3/2} \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \right], \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{2} \phi'^2 - \frac{V(\phi)}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} = 24M^3 k^2 \frac{z^2}{(z^2 + b^2) \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2}. \quad (4.17)$$

Por meio de combinação linear entre elas, temos:

$$V(\phi) = 6M^3 k \left[ \frac{b^2 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) - 4k z^2 \cdot \sqrt{z^2 + b^2}}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \right], \quad (4.18)$$

$$\phi' = \left[ 12M^3 k \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2} \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \right]^{1/2}. \quad (4.19)$$

A eq.(4.19) não é integrável, o que não permite obter  $\phi(y)$ . Logo vemos que o campo escalar convencional não adequado como fonte de nossa métrica regularizada.

#### 4.1.3.2 Campo Cuscuton

Para encontrarmos a fonte, podemos recorrer a ação de campos que utilizam de termos cinéticos não canônicos [25] e um que se enquadra nessa descrição é o campo Cuscuton [26], cuja ação é dada por:

$$S_{C.C.} = \int d^4x \int dz \sqrt{-g} \left( \pm \mu^2 \sqrt{g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi} - V(\phi) \right), \quad (4.20)$$

onde  $\mu^2$  é uma constante arbitrária da própria teoria [27]. Aplicando a eq.(4.20) em (4.12), e utilizando o princípio variacional, obtemos as seguintes expressões:

$$G_{MN} = \frac{1}{4M^3} \left( \mp \mu^2 \frac{\partial_M \phi \partial_N \phi}{(g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi)^{1/2}} + g_{MN} \left[ \pm \mu^2 (g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi)^{1/2} - V(\phi) \right] \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{-g}} \partial_M \left( \frac{\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi}{(g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi)^{1/2}} \right) = \mp \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (4.22)$$

Aplicando as eq's (4.5) em (4.21), obtemos as seguintes expressões:

$$G_{55} = -\frac{V(\phi)}{4M^3 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \eta_{55} \Rightarrow \boxed{V(\phi(z)) = -24M^3 k^2 \frac{z^2}{z^2 + b^2}}, \quad (4.23)$$

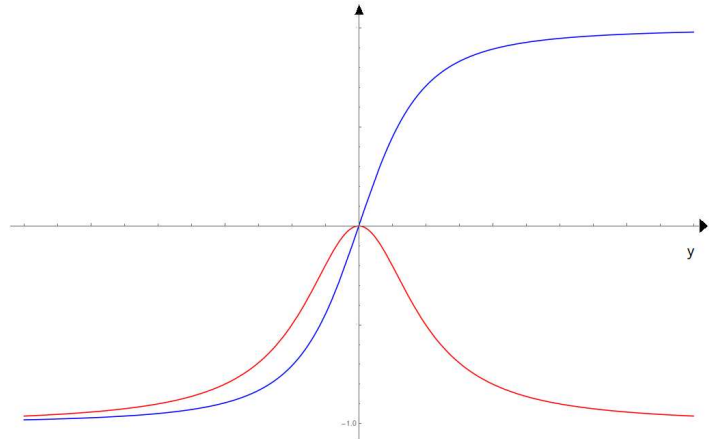
$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{4M^3 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2} \eta_{\mu\nu} \left[ \pm \mu^2 (g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi)^{1/2} - V(\phi) \right] \\ \Rightarrow \pm |\phi'| &= -\frac{12M^3 k}{\mu^2} \frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Como  $|\phi'|$  é um valor positivo, garantido pelo módulo, e o lado direito da igualdade é negativo, por questões de consistência usaremos o sinal  $(-)$  para nossa situação. Assim, ao integrarmos a igualdade acima, obtemos:

$$\Rightarrow \boxed{\phi(z) = \frac{12M^3 k}{\mu^2} \frac{z}{(z^2 + b^2)^{1/2}} + C}, \quad (4.24)$$

onde  $C$  é uma consante de integração.

Figura 4.4: Campo de Cuscuton (azul) e potencial associado (vermelho) em termos de  $z$ .



Fonte: Elaborado pelo autor

É fácil ver que esse campo converge a valores finitos, dados por  $\phi(z \rightarrow \pm\infty) = \pm 12M^3k/\mu^2 + C$ . A função inversa de (4.24), que fornece a variável  $z$  como dependente do campo  $\phi$ , tem a forma:

$$\boxed{z(\phi) = \frac{b(\phi - C)}{\sqrt{f^2 - (\phi - C)^2}}}, \quad (4.25)$$

onde  $f \equiv 12M^3k/\mu^2$ . Portanto, o potencial  $V(\phi)$  escrito em termos do campo escalar tem a seguinte forma:

$$V(\phi) = -\frac{\mu^4}{6M^3}(\phi - C)^2. \quad (4.26)$$

Substituindo as eq's(4.23) e (4.24) em (4.20), a ação é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{C.C.} &= -\int d^4x \int dz \sqrt{-g} \left[ \mu^2 e^{A(z)} |\phi'| + V(\phi) \right] \\ &= -\int d^4x \int dz \sqrt{-g} 12M^3k \left[ \frac{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) \cdot b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{2k z^2}{z^2 + b^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Podemos ver que o termo cinético do campo fornece o termo de brana, pois é mais influente a medida que nos aproximamos de  $z = 0$ , que é onde a brana espessa está situada, segundo métrica regularizada. Já  $V(\phi)$  contribuirá com o termo de *bulk*, pois torna-se mais influente a medida que nos deslocamos na dimensão extra.

Para verificarmos se nosso campo é consistente, basta resolvermos a equação de Klein-Gordon, que é obtida a partir do variacional em termos do campo [28]. Assim teremos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^2 \cdot e^{5A} \partial_M \left( \frac{e^{-4A} \eta^{55} \partial_5 \phi}{\phi'} \right) &= \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \\ \Rightarrow \mu^2 \cdot e^A \cdot (-4A') &= \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Aplicando as eq's(4.2, (4.3), (4.24) e (4.26) na expressão acima, obtemos:

$$-\mu^2 \cdot (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) \cdot \frac{4kz}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) \cdot \sqrt{z^2 + b^2}} = -\frac{4\mu^2 k z}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \frac{\mu^4 C}{6M^3}.$$

Assim, o campo será consistente quando  $C = 0$ .

#### 4.1.4 Equação tipo-Schrödinger

Após a linearização do tensor de Einstein, correspondente à métrica (4.1), a forma geral da equação que descreve o gráviton não se altera. Usando as expressões (4.3) e (4.4), o potencial pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \\ &= \frac{15}{4} \cdot \frac{z^2 k^2}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2 \cdot (z^2 + b^2)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{b^2 k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) \cdot (z^2 + b^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

#### 4.1.5 Modo-Zero

O modo zero pode ser encontrado usando o mesmo método descrito na seção (3.1.5), assim, fazendo  $\psi_0(z) = e^{F(z)}$ , a solução nos dará:

$$\psi_0(z) = e^{-3A(z)/2} = (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^{-3/2}. \quad (4.29)$$

É fácil ver que a equação acima tem um pico em  $z = 0$  que é inversamente proporcional a  $b$  e, graficamente, é a forma suavizada da função de onda mostrada na fig.(3.2).

#### 4.1.6 Alguns outros problemas

Nas seções a seguir serão brevemente explanadas alguns resultados obtidos durante os cálculos que são importantes para análise do modelo, mas que não puderam ser obtidos pois a própria estrutura da métrica modificada não permitiu.

#### 4.1.6.1 Condição de contorno

Para obter a condição de contorno em torno da brana em  $z = 0$ , basta aplicarmos eq.(4.28) em (3.23):

$$\begin{aligned}
 -\psi'_n(0^+) + \psi'_n(0^-) - \frac{3}{2} \int_{0^-}^{0^+} \left[ \frac{b^2 k \psi_n(z)}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{1}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \right] dz &= \int_{0^-}^{0^+} m_n^2 \psi_n(z) dz = 0. \\
 \Rightarrow \psi'_n(0) &= -\frac{3}{4} \int_{0^-}^{0^+} \left[ \frac{b^2 k \psi_n(z)}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)} \cdot \frac{1}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \right] dz, \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

pois  $\psi'(y)$  deve ser uma função ímpar, como citado na seção (3.1.4). O termo do lado esquerdo da igualdade não é integrável, pois não é um Delta de Dirac exato, mas sim aproximado.

Assim, não podemos obter uma condição de contorno em torno da brana  $z = 0$ , o que dificulta a obtenção dos modos massivos para essa métrica.

#### 4.1.6.2 Modos massivos do gráviton

Sabendo que nossa brana é espessa, não poderemos desprezar sua interferência na equação diferencial como foi feito na eq.(3.30), pois tratava-se de uma brana pontualmente localizada. Assim, aplicando a eq.(4.28) em (3.23), nossa expressão resultante é:

$$\begin{aligned}
 \psi''_n(z) + \left[ m_n^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{b^2 k}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1) \cdot (z^2 + b^2)^{3/2}} \right. \\
 \left. - \frac{15}{4} \cdot \frac{z^2 k^2}{(k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^2 \cdot (z^2 + b^2)} \right] \psi_n(z) &= 0. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Mesmo recorrendo ao autor [14] e ao software [29], infelizmente não foi possível encontrar uma solução que satisfizesse a eq.(4.30) a fim de obter uma solução analítica, logo não podemos calcular os modos massivos dos grávitons com a métrica (4.1), apenas o modo zero.

#### 4.1.7 Regularização de Simpson-Visser no RS-I

Sabemos que o Modelo Randall-Sundrum é dividido em duas partes, tipo I e tipo II, e nesse trabalho aplicamos a regularização de Simpson-Visser na métrica do RS-II. Mas por que não aplicar essa substituição para o RS-I?

Em Gibbons *et al* (2001)[30] são apresentadas condições de consistência que qual-

quer modelo, que aborde o cenário de mundo brana, deve obedecer: “a soma da tensão total das branas planas e a integral não negativa da energia gradiente dos escalares do *bulk* deve desaparecer”. Isso implica que o RS-I com duas branas finas satisfaz essa condição, mas não permite uma generalização com branas suaves.

Ainda que desejássemos migrar da coordenada  $z$  para  $y$ , não seria possível, pois a estrutura da métrica não permite, como mostrado a seguir: Suponha que exista uma função  $f(y)$ , tal que a métrica generalizada do RS-I seja escrita como:

$$ds^2 = e^{-2f(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.32)$$

e que sob uma transformação de coordenadas, podemos obter a métrica regularizada do RS-II dada pela eq.(4.1). Assim, se fizermos  $dy = (k\sqrt{z^2 + b^2} + 1)^{-1} dz$ , integrando de zero a um valor finito, teremos:

$$y = \frac{\ln[z + \sqrt{z^2 + b^2}]}{k} + \frac{\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{k^2 b^2 - 1} \sqrt{z^2 + b^2}}\right)}{k\sqrt{k^2 b^2 - 1}} - \frac{\arctan\left(\frac{kz}{\sqrt{k^2 b^2 - 1}}\right)}{k\sqrt{k^2 b^2 - 1}} - \frac{\ln(b)}{k}. \quad (4.33)$$

Embora seja integrável, não é possível determinar a função inversa da mesma, o que forneceria  $f(y)$ . Logo, com este tipo de fator de *warp* não é possível transitar entre  $y$  e  $z$ .

## 5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Vemos que o Modelo Randall-Sundrum Tipo I nos fornece uma solução para o problema da hierarquia, usando o fator de distorção aplicado na métrica de Minkowski. Por meio do bulk métrico e da ação que descreve o modelo, podemos ver uma relação entre as massas desses dois Universos de escalas de energia diferentes, já citados neste trabalho.

Já o Modelo de Randall-Sundrum Tipo II nos forneceu detalhes sobre a gravidade, que é dada por perturbações em torno do fundo métrico, que são os grávitons. Ao analisarmos as diferentes funções de onda dessas partículas elementares, vemos que o modo zero corresponde a gravidade que medimos experimentalmente. Os modos massivos de KK, embora sejam pouco perceptíveis na escala de energia que é trabalhada nos colisores atualmente, se detectados, poderam ser uma evidência das dimensões extras.

O modelo Randall-Sundrum sob mudança tipo Simpson-Visser é uma ideia interessante de se contemplar, embora apresente alguns problemas a serem resolvidos. Por meio dessa nova métrica, percebeu-se que a brana onde devemos trabalhar deverá ter espessura, devido a suavização presente no fator de *warp*, enquanto que a brana no modelo original é do tipo fina.

Como perspectiva futura, trabalharemos nessa nova métrica de maneira mais aprofundada, buscando por meio do acoplamento geométrico solucionar os problemas nele encontrados, pois tal método elaborado por [31, 32] resolveu o problema do acoplamento do campo de gauge, que apresenta problemas quando trabalhamos num espaço com 5 dimensões e em adição será analisado a localização de campos com essa métrica.



## REFERÊNCIAS

- [1] PIMENTA, J. J. M. *et al.* O bóson de Higgs. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 2, jun. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000200006>. Acesso em: 29 maio 2023.
- [2] TAHIM, M. O. **Aspectos clássicos de gravitação topológica e dimensões extras**. 2008. 115 f. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/12384>. Acesso em: 29 maio 2023.
- [3] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. **Physics Letters B**, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, jun. 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9803315>. Acesso em: 30 maio 2023.
- [4] KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )** 1921 (1921), pp. 966–972. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.08616>. Acesso em: 17 ago. 2024.
- [5] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). **Z. Phys.** 37 (1926). Ed. por J. C. Taylor, pp. 895–906. Disponível em: <https://cdn.psiket.com/ds01/894afcdf4b5ffd365140c3cb4fea49df.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2024.
- [6] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 17, p. 3370–3373, 25 out. 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9905221>. Acesso em: 13 maio 2023.
- [7] KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. **Physics Letters B**, v. 504, p. 38–46, abr. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0010112>. Acesso em: 05 mar. 2024.
- [8] GABELLA, M. The Randall-Sundrum Model. IPPC,EPFL, 2006. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/239928060\\_The\\_Randall-Sundrum\\_Model](https://www.researchgate.net/publication/239928060_The_Randall-Sundrum_Model). Acesso em: 02 maio 2023.
- [9] QUIROS, I. *et al.* Brans–Dicke Galileon and the variational principle. 10 ago. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1605.00326>. Acesso em: 19 maio 2023.
- [10] WARNER, F. W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 1983.

- [11] DAS, S.; FAIZAL, M. Dimensional reduction via a novel Higgs mechanism. **General Relativity and Gravitation**, v. 50, n. 7, 25 jun. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.07520>. Acesso em: 13. maio 2023.
- [12] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to Compactification. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 23, p. 4690–4693, 6 dez. 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/9906064>. Acesso em: 13 maio 2023.
- [13] WALD, R. M. **General Relativity**. The University of Chicago Press, 1984. Disponível em: [http://fma.if.usp.br/~mlima/teaching/PGF5292\\_2021/Wald\\_GR.pdf](http://fma.if.usp.br/~mlima/teaching/PGF5292_2021/Wald_GR.pdf). Acesso em: 13 maio 2023.
- [14] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. Dover Publications, 1972. Disponível em: [https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/abramowitz\\_and\\_stegun.pdf](https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf). Acesso em: 14 maio 2023.
- [15] AAD, G. *et al.* Measurement of the  $H \rightarrow \gamma\gamma$  and  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4\ell$  cross-sections in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 13.6 \text{ TeV}$  with the ATLAS detector. **Eur. Phys. J. C.**, 84.1 (2024), p. 78. Disponível: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.11379>. Acesso em: 14 ago. 2024
- [16] CAI, H. Effective Lagrangian and stability analysis in warped space. **Journal of High Energy Physics**, v. 2022, n. 9, 22 set. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.04053>. Acesso em: 13 maio 2023.
- [17] ARKANI-HAMED, N.; GEORGI, H.; SCHWARTZ, M. D. Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space. **Annals of Physics**, v. 305, n. 2, p. 96–118, jun. 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0210184>. Acesso em: 05 maio 2023.
- [18] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. An Introduction to Quantum Field Theory. [s.l.] Redwood City, Calif. : Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [19] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford, England: Clarendon Press, 1992.
- [20] SCHWARZSCHILD, K. **Gesammelte Werke Collected Works**. [s.l.] Springer, 1992.
- [21] SIMPSON, A.; VISSER, M. Black-bounce to traversable wormhole. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2019, n. 02, p. 042–042, 19 fev. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.07114>. Acesso em: 17 maio 2024.
- [22] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V; MINAMITSUJI, M. Thick brane solutions. **Reports on progress in physics**, v. 73, n. 6, p. 066901–066901, 20 maio 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.1775>. Acesso em: 20 jun. 24.

- [23] DAHIA, F.; SILVA, A. A. Classical tests of General Relativity in thick branes. **The European Physical Journal C**, v. 75, n. 2, 1 fev. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1410.5463>. Acesso em: 20 jun. 2024.
- [24] LANDIM, R. R. *et al.* A transfer matrix method for resonances in Randall-Sundrum models. **The Journal of high energy physics/The journal of high energy physics**, v. 2011, n. 8, 1 ago. 2011. Disponível em <https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.5573>. Acesso em: 05 mar. 2024.
- [25] ABDALLA, E. *et al.* Cosmological black holes from self-gravitating fields. **Physical Review D**, v. 89, n. 10, 12 maio 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.3682>. Acesso em: 19 ago. 2024.
- [26] BORUAH, S.S.; KIM, H. J.; GESHNIZJANI, G. Theory of cosmological perturbations with cusciton. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics** 2017.07 (jul. de 2017), pp. 022–022. ISSN: 1475-7516. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.01131>. Acesso em: 22 ago. 2024.
- [27] AFSHORDI, N. *et al.* Cusciton cosmology: Dark energy meets modified gravity. *Physical review*, v. 75, n. 12, 13 jun. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0702002>. Acesso em: 19 ago. 2024.
- [28] OLIVEIRA, J.; OLIVEIRA, C. E. P. Solutions for Klein-Gordon equation in Randall-Sundrum-Kerr scenario. **Brazilian Journal of Physics**, v. 35, n. 4b, p. 1127–1128, 1 dez. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0510071>. Acesso em: 30 ago. 2024.
- [29] WOLFRAM RESEARCH, INC. **Mathematica**. Versão 12.0. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2019.
- [30] GIBBONS, G.; KALLOSH, R.; LINDE, A. Brane world sum rules. **Journal of High Energy Physics**, v. 2001, n. 01, p. 022–022, 18 jan. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0011225>. Acesso em: 26 ago. 2024.
- [31] ALENCAR, G. *et al.* Gauge field localization on the brane through geometrical coupling. **Physics letters. B**, v. 739, p. 125–127, 1 dez. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.4396>. Acesso em: 20 maio 2024.
- [32] ZHAO, Z.-H.; XIE, Q.-Y.; ZHONG, Y. New localization method of U (1) gauge vector field on flat branes in (asymptotic) AdS 5 spacetime. **Classical and quantum gravity**, v. 32, n. 3, p. 035020–035020, 14 jan. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1406.3098>. Acesso em: 20 maio 2024.

## APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO CONFORME DO TENSOR DE EINSTEIN

Em [13], apêndice D, partimos de uma variedade n-dimensional com uma métrica arbitrária  $\tilde{g}_{ab}$ . Caso  $\Omega$  seja uma função suave e estritamente positiva, então diz-se que a métrica  $g_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab}$  surge de  $\tilde{g}_{ab}$  por meio de uma transformação conforme. Sejam  $\nabla_a$  e  $\tilde{\nabla}_a$  as derivadas covariantes associadas as métricas  $g_{ab}$  e  $\tilde{g}_{ab}$ , respectivamente, e sabendo que  $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{ab} = 0$ , temos:

$$\tilde{\nabla}_a g_{bc} = 2\Omega \tilde{g}_{bc} \tilde{\nabla}_a \Omega.$$

Então, se aplicarmos a derivada covariante  $\nabla_a$  num vetor  $\omega_b$ , obtemos a seguinte relação entre os "nablas":

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - \tilde{\Gamma}_{ab}^c \omega_c,$$

onde nosso símbolo de Christoffel terá a forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \frac{\Omega^{-2}}{2} \tilde{g}^{cd} [2\Omega \tilde{g}_{bd} \tilde{\nabla}_a \Omega + 2\Omega \tilde{g}_{ad} \tilde{\nabla}_b \Omega - 2\Omega \tilde{g}_{ad} \tilde{\nabla}_d \Omega] \\ &= \delta_a^c \tilde{\nabla}_b (\ln \Omega) + \delta_b^c \tilde{\nabla}_a (\ln \Omega) - \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \tilde{\nabla}_d (\ln \Omega). \end{aligned}$$

Num espaço sem torções, o transporte paralelo tem a seguinte forma:

$$[\lambda \nabla_a, \lambda \nabla_b] \omega_c = R_{abc}^d \omega_d,$$

onde

$$\lambda \nabla_a T_{c\dots}^{b\dots} = {}^0 \nabla_a T_{c\dots}^{b\dots} + \Gamma_{da}^b T_{c\dots}^{d\dots} + \dots - \Gamma_{ca}^d T_{d\dots}^{b\dots} - \dots,$$

onde o termo  ${}^0 \nabla_a$  se refere a outro espaço curvo, pois queremos relacionar o espaço descrito por  $g_{MN}$  e  $\tilde{g}_{MN}$  na eq.(3.6). Assim,

$$\begin{aligned}
[\lambda \nabla_a, \lambda \nabla_b] \omega_c &= [\tilde{\nabla}_a, \tilde{\nabla}_b] \omega_c - \tilde{\nabla}_a \tilde{\Gamma}_{cb}^d \omega_d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\Gamma}_{ca}^d \omega_d - \tilde{\Gamma}_{cb}^d (\tilde{\nabla}_a \omega_d) + \tilde{\Gamma}_{ca}^d (\tilde{\nabla}_b \omega_d) \\
&\quad - \tilde{\Gamma}_{ca}^e (\tilde{\nabla}_b \omega_e) + \tilde{\Gamma}_{cb}^e (\tilde{\nabla}_a \omega_e) + \tilde{\Gamma}_{ca}^e \tilde{\Gamma}_{eb}^d \omega_d - \tilde{\Gamma}_{cb}^e \tilde{\Gamma}_{ea}^d \omega_d \\
&\Rightarrow \boxed{R_{abc}^d = \tilde{R}_{abc}^d - 2\tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\Gamma}_{b]c}^d + 2\tilde{\Gamma}_{c[a}^e \tilde{\Gamma}_{b]e}^d}.
\end{aligned}$$

Aplicando a relação existente entre o símbolo de Christoffel e  $\Omega$ , obtemos o seguinte tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
R_{abc}^d &= \tilde{R}_{abc}^d - 2\delta_{[b}^d \tilde{\nabla}_{a]} \tilde{\nabla}_c \ln \Omega - 2\delta_c^d \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} \ln \Omega + 2\tilde{g}^{de} \tilde{g}_{c[b} \tilde{\nabla}_{a]} \tilde{\nabla}_e \ln \Omega \\
&\quad + 2\delta_{[b}^d (\tilde{\nabla}_{a]} \ln \Omega) \tilde{\nabla}_c \ln \Omega + 2\delta_c^d (\tilde{\nabla}_{[a} \ln \Omega) \tilde{\nabla}_{b]} \ln \Omega + 4\tilde{g}^{dh} \tilde{g}_{c[a} (\tilde{\nabla}_{b]} \ln \Omega) \tilde{\nabla}_h \ln \Omega \\
&\quad - 2\tilde{g}^{ef} \tilde{g}_{c[a} \delta_{b]}^d (\tilde{\nabla}_f \ln \Omega) \tilde{\nabla}_e \ln \Omega - 2\tilde{g}^{df} \tilde{g}_{c[a} (\tilde{\nabla}_f \ln \Omega) \tilde{\nabla}_{b]} \ln \Omega.
\end{aligned}$$

Por meio de uma contração entre os índices  $b$  e  $d$ , obtemos o tensor de Ricci  $R_{ac}$  associado a  $\tilde{R}_{ac}$ :

$$\begin{aligned}
R_{ac} &= \tilde{R}_{ac} - (n-2) \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c \ln \Omega - \tilde{g}_{ac} \tilde{g}^{de} \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_e \ln \Omega + (n-2) \tilde{\nabla}_a \ln \Omega \tilde{\nabla}_c \ln \Omega \\
&\quad - (n-2) \tilde{g}_{ac} \tilde{g}^{de} \tilde{\nabla}_d \ln \Omega \tilde{\nabla}_e \ln \Omega.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Então, nosso escalar de Ricci tem a forma:

$$R = \Omega^{-2} [\tilde{R} - 2(n-1) \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c \ln \Omega - (n-2)(n-1) \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a \ln \Omega \tilde{\nabla}_c \ln \Omega]. \tag{A.2}$$

Combinando as eq's (A.1) e (A.2), obtemos nosso tensor de Einstein associado a métrica  $g_{ab}$ , obtido por transformação conforme:

$$\begin{aligned}
G_{ab} &= \tilde{G}_{ab} - (n-2)\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\ln\Omega - \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{de}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_e\ln\Omega + (n-2)\tilde{\nabla}_a\ln\Omega\tilde{\nabla}_b\ln\Omega \\
&\quad - (n-2)\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{de}\tilde{\nabla}_d\ln\Omega\tilde{\nabla}_e\ln\Omega + \tilde{g}_{ab}\left[(n-1)\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\ln\Omega + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\ln\Omega\tilde{\nabla}_b\ln\Omega\right] \\
&= \tilde{G}_{ab} + (n-2)\left[-\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\ln\Omega + \tilde{\nabla}_a\ln\Omega\tilde{\nabla}_b\ln\Omega + \tilde{g}_{ab}\left(\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}^d\ln\Omega + \frac{(n-3)}{2}\tilde{\nabla}_d\ln\Omega\tilde{\nabla}^d\ln\Omega\right)\right]
\end{aligned}$$

Fazendo  $\Omega = e^{-A(z)}$  e renomeações de índices pois estamos trabalhando com índices maiúsculos, obtemos a eq.(3.7).

## APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE BESSEL DE SEGUNDA ESPÉCIE EM TERMOS DE SOMATÓRIOS

Em [14] eq. 9.1.2 , a equação de Bessel de 2ª espécie é dada por:

$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\text{sen}(n\pi)}$$

Reescrevendo a expressão acima como  $Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$ , poderemos usar a regra de L'Hospital, que resultará em:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - (-1)^\nu \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right]$$

As derivadas das equações de Bessel de 1ª espécie são calculadas usando a forma de somatória (veja [14] eq. 9.1.10), que forneceram o seguinte resultado:

$$\frac{dJ_{\pm\nu}(x)}{d\nu} = \pm J_{\pm\nu}(x) \ln(x/2) \mp \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{F(\pm\nu + s + 1)}{(\pm\nu + s)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu + 2s}$$

onde  $F(a)$  é chamada de função digamma, definida como:

$$\begin{aligned} F(a+1) &= \frac{d \ln(\Gamma(a+1))}{da} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln(n) - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \dots - \frac{1}{z+n} \right) \\ &= -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni. Substituindo essas expressões na regra de L'Hospital, e usando a relação de recorrência entre  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$ , teremos:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \left[ \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \ln(x/2) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{F(\nu + s + 1)}{(s + \nu)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu} - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+\nu} \frac{F(-\nu + s + 1)}{(s - \nu)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \right]$$

No 3º termo, deveremos quebrar o somatório em dois,  $\sum_{s=0}^{\nu-1}$  e  $\sum_{s=\nu}^{\infty}$ . Em  $\sum_{s=\nu}^{\infty}$ , faremos uma substituição para que ele se acople com o 2º termo de  $Y_n(x)$ , e em  $\sum_{s=0}^{\nu-1}$  deveremos usar a seguinte propriedade:

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{F(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n-1} n!$$

e aplicando o limite, a equação de Bessel de 2ª espécie pode ser escrita como:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln(x/2) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{F(s+1) + F(n+s+1)}{(s+n)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}$$

Essa expressão é exatamente a mesma dada em [14] eq.(9.1.11).



## APÊNDICE C - LIMITE ASSINTÓTICO DA EQUAÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Em [14] eq. (9.1.21), é dada a forma integral da equação de Bessel de 1ª espécie:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x\text{sen}(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [e^{i(\nu\theta - x\text{sen}(\theta))} + e^{-i(\nu\theta - x\text{sen}(\theta))}] d\theta \end{aligned}$$

Sabendo que a  $\text{Re}\{e^{i(\nu\theta - x\text{sen}(\theta))}\} = \text{Re}\{e^{-i(\nu\theta - x\text{sen}(\theta))}\}$ , podemos reescrever a expressão a cima como:

$$J_\nu(x) = 2\text{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i(\nu\theta - x\text{sen}(\theta))} d\theta\right\}$$

Fazendo  $\theta \rightarrow \theta' + \pi/2$ , teremos:

$$J_\nu(x) = 2\text{Re}\left\{\frac{e^{-i\nu\pi/2}}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\nu\theta'} e^{-ix\cos(\theta')} d\theta'\right\}$$

Como  $\cos(\theta') = 1 - 2\text{sen}^2(\theta'/2)$ , chamaremos  $u = 2\text{sen}(\theta'/2)$ , assim:

$$J_\nu(x) = 2\text{Re}\left\{\frac{e^{i(x-\nu\pi/2)}}{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2e^{i\nu \cdot \arccos(1-u^2/2)} e^{-ixu^2/2}}{\sqrt{4-u^2}} du\right\}$$

Se expandirmos  $\arccos(1 - u^2/2)$ ,  $e^{iv \cdot \arccos(1 - u^2/2)}$  e  $\sqrt{4 - u^2}$  em série de Taylor, os termos ímpares desapareceram, já que esses termos ímpare gerados por  $e^{i(v\theta - x \text{sen}(\theta))}$  se cancelam com os gerados por  $e^{-i(v\theta - x \text{sen}(\theta))}$ . Então teremos

$$J_\nu(x) = 2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{i(x - \nu\pi/2)}}{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{u^2(4\nu^2 - 1)}{8} + \mathcal{O}(u^4) \right) e^{-ixu^2/2} du \right\}$$

Por meio de uma "soma de zeros", e algumas substituições nessa soma, podemos alterar o limite da integral para  $]-\infty, \infty[$ :

$$J_\nu(x) = 2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{i(x - \nu\pi/2)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{u^2(4\nu^2 - 1)}{8} + \mathcal{O}(u^4) \right) e^{-ixu^2/2} du \right\}$$

Agora, podemos ver claramente um decaimento na exponencial no infinito. Fazendo a substituição na integral  $u = e^{-i\pi/4} \nu \Rightarrow u^2 = (e^{-i\pi/4} \nu)^2 = -i\nu^2$  e resolvendo-a obteremos:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) - \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} \frac{4\nu^2 - 1}{8} \text{sen}(x - \nu\pi/2 - \pi/4) + \mathcal{O}(x^{-5/2})$$

Por fim, para o caso onde  $x \gg 1$ , teremos:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4)$$