



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

HENRIQUE ALVES DE MELO

FÓRMULA DE EULER NO PLANO E PARA POLIEDROS

**FORTALEZA-CE
2013**

HENRIQUE ALVES DE MELO

FÓRMULA DE EULER NO PLANO E PARA POLIEDROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA-CE
2013

HENRIQUE ALVES DE MELO

FÓRMULA DE EULER NO PLANO E PARA POLIEDROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 3/08/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha Família, pai (em memória), mãe, em especial a minha querida esposa Luciana Melo, minhas filhas, irmão, àqueles que acreditam na força da educação..

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

A nossa Senhora pela sua divina providência.

A toda minha família, a minha querida, dedicada e companheira esposa Luciana Melo, de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

As minhas filhas Maria Rafaella e Carmem Luana, que embora não tivesse conhecimento, mas iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimento. Aos meus pais Raimundo Alves da Silva (in memoriam) e Florença Virginia de Melo, pela formação humana, caráter e valores que levarei por toda a minha vida.

A minha sogra Vânia Maria, pelo incentivo e apoio constante.

A meu irmão Heitor Melo, pelo incentivo, pela força, pela paciência e companheirismo, que sempre esteve ao meu lado e é um exemplo de dedicação aos estudos.

A Marta Aurea diretora da escola onde leciono, pelo apoio compreensão, confiança e motivação, que sempre me impulsionou em direção às vitórias dos meus desafios.

Ao meu professor e orientador Marcelo Ferreira de Melo, pelas aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram a distância nas disciplinas do mestrado.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em especial aos professores idealizadores Elon Lages Lima, Eduardo Wagner e Paulo César Pinto Carvalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este sonho se realizasse.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

Os poliedros são sólidos geométricos formados por uma quantidade finita de polígonos. Eles podem ser convexos ou não convexos, regulares ou não regulares. Neste trabalho fazemos três demonstrações do teorema de Euler para poliedros no plano, sendo uma utilizando grafos. Adotaremos definições preliminares de polígonos, poliedros e grafos e faremos um breve estudo do teorema antes das demonstrações analisado quando o teorema é válido em quais condições existem os poliedros, uma vez que o teorema é aceito. O trabalho traz algumas aplicações em forma de questões da teoria apresentada.

Palavras-chave: Poliedros, Teorema de Euler, Grafos.

ABSTRACT

Polyhedra are geometric solids formed by a finite number of polygons they can be convex or non-convex, regular or not regular. This work we make three demonstrations of Euler's theorem for polyhedra in one plane being used graphs. We will adopt preliminary definitions of polygons, polyhedra and graphs and make a brief study of the theorem before the demonstrations analysis when the theorem is valid and what conditions exist polyhedra, since the theorem is accepted. The work brings some applications in the form of questions in the theory presented.

Keywords: Keywords: Polyhedra, Euler's theorem, Graphs

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	POLÍGONOS	7
2.1	POLÍGONO CONVEXO	8
2.2	POLÍGONO NÃO CONVEXO	9
2.3	POLÍGONOS REGULARES	9
2.4	POLÍGONOS ESTRELADOS	10
3	POLIEDROS	13
3.1	POLIEDROS CONVEXOS	16
3.2	POLIEDROS NÃO CONVEXOS	17
3.3	POLIEDROS REGULARES	17
3.4	POLIEDROS DE PLATÃO	18
3.5	POLIEDROS ESPECIAIS	20
3.6	VERIFICANDO QUE SÓ EXISTEM CINCO POLIEDROS PLATÔNICOS	21
3.6.1	TETRAEDRO	22
3.6.2	OCTAEDRO	22
3.6.3	ICOSAEDRO	22
3.6.4	HEXAEDRO OU CUBO	23
3.6.5	DODECAEDRO	23
3.7	APRENDENDO A CONTAR VÉRTICE E FACES	24
3.8	EXISTE O POLIEDRO?	26
4	TEOREMA DE EULER	29
4.1	UM POUCO DA VIDA DE LEONARDO EULER	29
4.1.1	PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO	30
4.1.2	SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO	33
5	GRAFOS	37
5.1	PRÉ-LIMINARES SOBRE GRAFOS	38
5.2	DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER POR GRAFOS	40
6	APLICAÇÕES	43
7	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Como vivemos cercados por poliedros, é comum que os professores comecem suas aulas indicando figuras para exemplificar o que são poliedros. Sabendo que sólidos geométricos no formato de uma caixa de sapato, ou de um dado utilizado nos jogos de entretenimento, ou em embalagens de variados produtos consumidos diariamente, além das tão famosas pirâmides do Egito, dos “Arranha-céus” de grandes cidades, enfim, vários objetos presentes no nosso cotidiano, tem a forma de um poliedro, mas o que são poliedros?

Se procurarmos em um dicionário, encontraremos: Do grego *poly* (muitos) e *edro* (face), formado por muitas faces, poliedros são sólidos limitado por superfícies planas.

Se partirmos para autores matemáticos, encontraremos várias definições, algumas não muito claras outras dando liberdade para que vários sólidos sejam poliedros. Como saber se a definição está correta? Na verdade não temos uma definição mais ou menos correta, tudo depende de quais objetivos serão estudados. Os poliedros regulares convexos foram estudados pelos grandes filósofos da antiguidade e tomaram parte nas suas teorias o universo. Destacamos Platão (428 a 347 a.C.), Pitágoras (571/570 a 497/496 a.C.), Euclides (360 a 295 a.C.), Arquimedes (287 a 212 a.C.), entre outros.

Analizando a figura 1.1a) é com certeza um poliedro, mas a 1.1b) é um poliedro? Não podemos ficar na dúvida se é ou não poliedro, precisamos de uma definição, e isso foi o principal motivo pelo qual os matemáticos tiveram grandes dificuldades para demonstrar a fórmula de Euler (se V , A e F indicam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, então $V - A + F = 2$). O próprio Leonardo Euler nunca apresentou uma demonstração aceitável do teorema por não estabelecer uma definição compatível, com o que ele imaginava ser um poliedro. Ele nunca se preocupou em definir precisamente os poliedros.

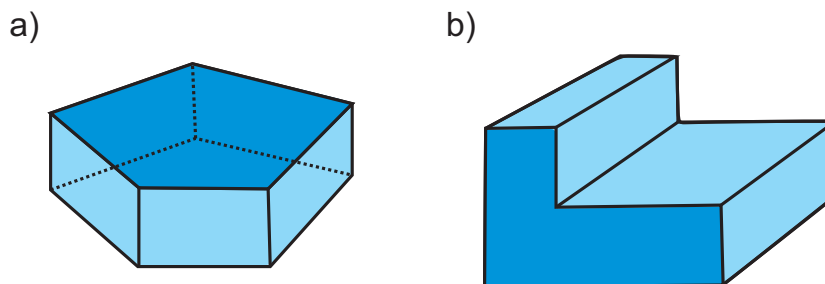


Figura 1.1: Poliedros.

Será que sua relação é válida para todos os poliedros? Para um grupo de poliedros chamados de convexos de fato ela é válida. Um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. Caso esta reta corte em mais pontos o poliedro é não convexo. Para não convexos faremos um pequeno estudo para verificar em quais condições existem poliedros não convexos que o teorema de Euler seja aceito.

Podemos observar facilmente que a figura 1.1a) é um poliedro convexo, com: 15 arestas, 7 faces e 10 vértices, portanto $V - A + F = 2$. Já a figura 1.1b) temos: 18 arestas, 8 faces e 12 vértices e como $V - A + F = 2$ o teorema também é válido mesmo o poliedro sendo não convexo.

Mas se o teorema não for aceito, o que isso nos revelaria? Vejamos a figura 1.2, a relação de Euler não é válida, pois $V - A + F = 0$. Qual será motivo? A figura não é um poliedro ou a relação de Euler não é verdadeira, ou seja, não está correta, o teorema afinal é falso? Qual é a justificativa para esse fato? Qual seria então o motivo da relação de Euler não ser válida para todos os poliedros?

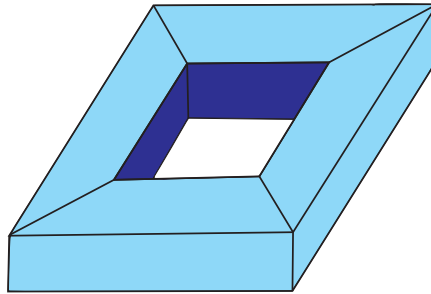


Figura 1.2: Poliedro que a relação de Euler não é válida.

As controvérsias relacionadas ao Teorema de Euler duraram mais de um século. Poincaré (1893) foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema da Topologia e não da Geometria.

Ele notou que $V - A + F$ é um invariante topológico, isto é, se P e Q são poliedros homeomorfos, então $V_P - A_P + F_P = V_Q - A_Q + F_Q$, onde V_P indica o número de vértices do poliedro P e V_Q o número de vértices de Q , o mesmo ocorre com o número de arestas e de faces.

Dois objetos P e Q (espaços topológicos, que podemos considerar aqui como subconjuntos de R^3), são homeomorfos se existe uma aplicação contínua $f : P \rightarrow Q$ cuja inversa $f^{-1} : Q \rightarrow P$ também é contínua.

Dado um poliedro P , o número $X(P) := V - A + F$, é chamado característica de Euler-Poincaré do poliedro P . Poincaré mostrou que $X(P)$ é um invariante topológico, ou seja, poliedros homeomorfos possuem mesma característica de Euler-Poincaré.

De fato a característica de Euler-Poincaré é até um invariante por mesmo tipo homotopia. (Grosseiramente falando, dois objetos tem mesmo tipo de homotopia, ou são homotopicamente equivalentes, se um pode ser deformado continuamente no outro). Agora, para um tetraedro T , tem-se $X(T) = V - A + F = 2$, e T é homeomorfo a esfera. Logo, para todo poliedro P homeomorfo a T e, portanto homeomorfo a esfera, vale $X(P) = X(T) = 2$ (isto é, tem-se a Relação de Euler).

O teorema só será verdadeiro se ao inflarmos o poliedro esse venha se tornar uma esfera ou algum que lembre uma esfera, a figura 1.2, se inflarmos, ela se torna uma rosquinha, um pneu, nesse caso o teorema não é verdadeiro, o valor de $V - A + F$ é diferente de 2.

Nos livros didáticos a fragilidade da definição traz curiosidades que nos leva a refletir. Não há uma preocupação em aprofundar ou alertar os alunos sobre a existência de outras possibilidades, os livros didáticos simplesmente definem poliedros convexos e a partir dessa definição é claro que a relação de Euler é válida. Portanto, sem muito rigor matemático, apresentam a relação de Euler. Na verdade, hoje se sabe que existe um grupo de poliedros que o teorema é verdadeiro e outro que não, tudo depende de como foi definido o poliedro, ou seja, existem várias maneiras de defini-los, e nós utilizamos a que melhor se aplica de acordo com nossos objetivos, que no caso é fazer um estudo do teorema de Euler.

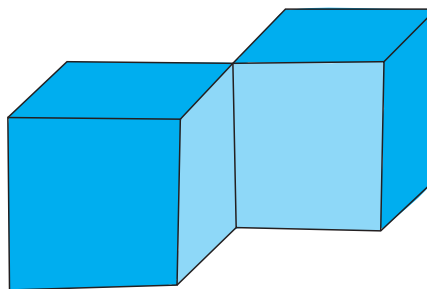


Figura 1.3: Poliedros.

É claro que inicialmente precisamos evitar certas situações. Veja a figura 1.3, dependendo da definição ela é um poliedro, a relação de Euler também é verdadeira. Num processo de aprendizagem, inicialmente evitamos situações semelhante a esta, contudo, não podemos omitir ao aluno a visão dessas possibilidades, sem a curiosidade humana estaríamos estagnados. Por isso, nós, educadores, precisamos nos preparar melhor para perguntas que os alunos possam elaborar. Nada impede que o aluno queira aprofundar os tópicos estudados e, portanto precisamos estar preparados para que possamos ser mediadores nessa aprendizagem.

A primeira parte deste trabalho é justificar uma definição para poliedros buscando um estudo apropriado do teorema de Euler. Definiremos poliedros convexos e não convexos. Os convexos são aqueles onde qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. Os não convexos são aquele onde está reta o corta em mais de dois pontos.

Dentro do grupo dos convexos, destacam-se, entre outros, os poliedros de Platão, de Arquimedes, de Catalan e de Johnson. Os poliedros de Platão possuem todas as faces com o mesmo número de lados e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Já os poliedros de Arquimedes, têm todos os vértices e arestas congruentes. No entanto, nem todas as faces têm o mesmo número de arestas. Apesar disso, todas são polígonos regulares.

Dentro do grupo dos poliedros não convexos, destacam-se os de Kepler-Poinsot, que também possuem todas as faces com o mesmo número de arestas e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Estudaremos os poliedros regulares dando uma atenção aos poliedros de Platão, em que verifica-se a existência de apenas cinco, mas dependendo da definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, ou infinitos.

“A partir da definição, Poliedro regular é todo poliedro convexo onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes”, existem apenas cinco poliedros regulares: os de Platão.

“Já, a partir da definição, Poliedro regular é todo poliedro onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes”, existem nove poliedros regulares: os cinco de Platão e os quatro de Kepler-Poinsot. Mas “se poliedro regular for considerado como

todo poliedro onde os vértices e as arestas são congruentes", então existem, além dos nove anteriores, os infinitos poliedros de Arquimedes.

Em seguida, o estudo será voltado para uma análise do teorema de Euler, faremos duas demonstrações do teorema, uma utilizando o resultado para poliedro juntamente com a projeção estereográfica e outra demonstração no plano. Apresentaremos aplicações para esse teorema. A ideia é, além de demonstrar e fazer estudo da fórmula, observar fatos históricos e buscar condições para existência de poliedros a partir do teorema de Euler. Em que condições um poliedro existe, dado que o teorema é verdadeiro.

A segunda parte do trabalho é um estudo dos grafos, como toda teoria matemática, a teoria dos grafos está repleta de nomenclaturas e termos técnicos. Vamos apresentar algumas definições importantes para provamos uma demonstração do teorema de Euler para poliedros através de grafos. Geralmente não é utilizado no ensino básico, porém poderia ser abordado e seria bastante simples de ser compreendido pelos estudantes dessas séries. A intenção é realizar uma demonstração simples, mas que não deixe dúvida da validade do teorema.

Finalmente os dois últimos capítulos serão: um para aplicações, exercícios utilizando questões sobre os conceitos apresentados no trabalho, curiosidades e dois problemas seculares. O outro, com considerações finais, trazem importantes anotações e conclusões sobre o estudo apresentado, destacando o que de mais importante se encontrou.

Capítulo 2

POLÍGONOS

Polígonos são regiões planas delimitadas por segmentos de reta que formam uma linha poligonal fechada. Linha poligonal fechada é um conjunto de segmentos consecutivos que não estão alinhados na mesma reta e que se fecham. Exemplos triviais de polígonos são os triângulos, os retângulos, quadrados etc. A seguir apresentaremos uma definição mais rigorosa.

Definição 2.1 *Uma linha poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados.*

Definição 2.2 *Um polígono é uma linha poligonal em que as seguintes 2 condições são satisfeitas:*

- a) $A_n = A_1$;
- b) *Os lados da poligonal podem se interceptar;*

Na figura 2.1 temos um polígono que ilustra a definição acima. Portanto os polígonos são formados por pontos que serão seus vértices, segmentos de retas que serão seus lados, e ângulos internos formados por dois segmentos consecutivos.

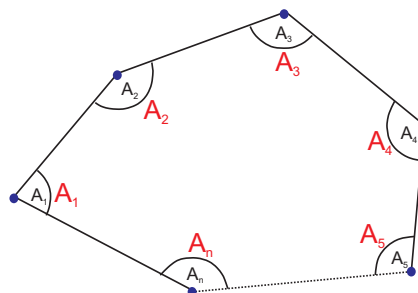


Figura 2.1: Polígono qualquer.

2.1 POLÍGONO CONVEXO

São polígonos onde quaisquer dois pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento de reta contido no polígono.

Definição 2.3 *Uma região do plano é convexa quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela.*

Definição 2.4 *Um polígono será convexo se, dados dois pontos A e B no interior do polígono, o segmento de reta AB estiver inteiramente contido no interior do polígono.*

A figura 2.2 ilustra a definição acima. Nela temos um polígono e todas as retas determinadas pelos seus vértices. Podemos observar que todas elas deixam todos os demais vértices num mesmo semiplano. Portanto, o polígono em questão é convexo.

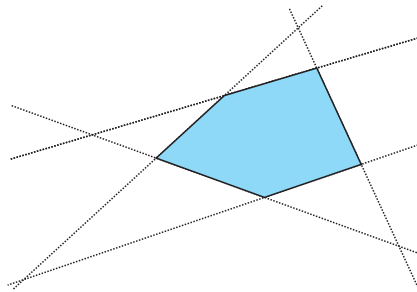


Figura 2.2: Polígono convexo.

A figura 2.3 ilustra as duas últimas definições dadas. Nela temos um polígono e os pontos A e B , ambos pertencentes ao seu interior, e os pontos C e D , ambos pertencentes ao polígono. Podemos observar que os segmentos de reta AB e CD estão contidos no interior do polígono, bem como qualquer outro segmento definido por dois pontos pertencentes a ele ou ao seu interior. Portanto, o polígono em questão é convexo.

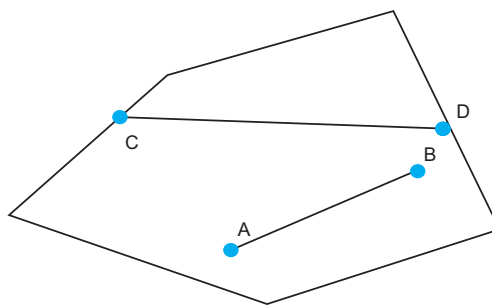


Figura 2.3: Polígono convexo.

2.2 POLÍGONO NÃO CONVEXO

São polígonos onde nem todos os pares de pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento que esteja contido no polígono ou no seu interior.

Definição 2.5 *Polígonos não convexos, a partir da definição de polígonos convexos, são polígonos que existem dois pontos A e B no interior do polígono, o segmento de reta AB não está inteiramente contido no seu interior.*

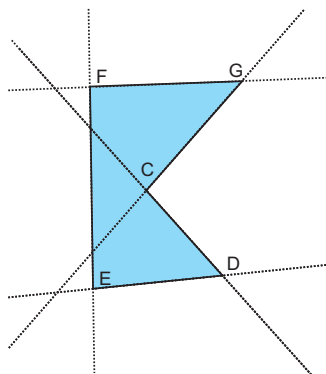


Figura 2.4: Polígono não-convexo.

Na Figura 2.5 temos um polígono e os pontos A e B , ambos pertencentes ao seu interior. Podemos observar que o segmento de reta AB não está contido no interior do polígono. Desta forma, não podemos garantir que qualquer segmento definido por dois pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior define um segmento que está todo no contido nesta região. Portanto, o polígono em questão não é convexo.

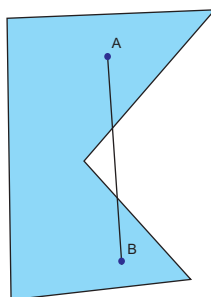


Figura 2.5: Polígono não-convexo.

2.3 POLÍGONOS REGULARES

Em geral os livros restringem a definição de polígonos regulares aos convexos: É todo polígono convexo que possui todos os lados e todos os ângulos com as mesmas medidas. Então podemos citar o triângulo equilátero, o quadrado, e todos os polígonos com lados congruentes e ângulos interno congruentes, mas os polígonos regulares não se resumem a apenas os convexos, existem perfeitamente polígonos que não são convexos mas são regulares . Observe a definição abaixo.

Definição 2.6 *Polígonos regulares são polígonos onde todos os lados são congruentes entre si e todos os ângulos também.*

Na figura 2.6, temos um exemplo de um polígono regular não convexo. Nela, podemos observar que os lados do polígono são segmentos congruentes e que todos os ângulos internos também são congruentes e, portanto é um polígono regular, no entanto não se trata de um polígono convexo.

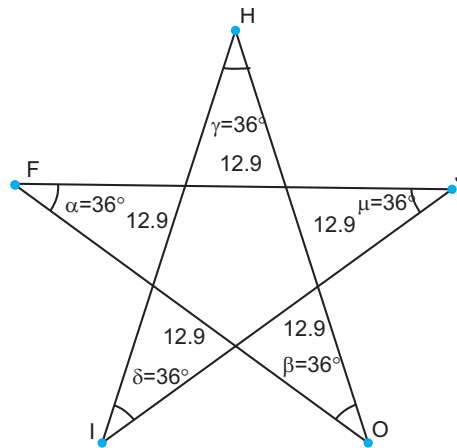


Figura 2.6: Polígono regular não-convexo.

2.4 POLÍGONOS ESTRELADOS

Ao prolongarmos os lados de um polígono, é possível obter ou não outro polígono. Por exemplo, as retas que contêm os lados de um triângulo qualquer, somente se intersectam nos vértices deste triângulo. O mesmo acontece com as retas que contêm os lados de um quadrado. No entanto, se prolongarmos os lados de um pentágono, que não tenha nenhum par de lados paralelos, haverá novas intersecções entre elas e será formado outro polígono famoso, não convexo, denominado pentagrama ou pentágono estrelado.

Definição 2.7 *Um polígono estrelado é polígono que é obtido a partir do prolongamento dos lados de um polígono onde o polígono gerado não é sobreposição de polígonos.*

Nem todo prolongamento gera um novo polígono. Uma maneira de verificar se o polígono é realmente estrelado é observar que é sempre possível ir caminhando por todos os lados do polígono sem passar duas vezes por um mesmo ponto, ou seja, saindo por uma das pontas e caminhando até a próxima e assim sucessivamente até percorrer por todas as pontas sem repetir nem lado do polígono então o polígono será estrelado .

Alguns polígonos podem gerar mais de um polígono estrelado, um exemplo é o heptágono. É fácil observar que os polígonos estrelados não são convexos , mas, podem ser regulares, sendo assim, abaixo temos algumas figuras que exemplificam polígonos estrelados.

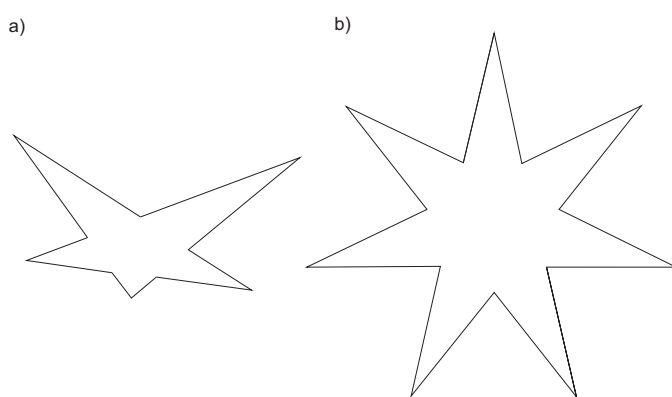


Figura 2.7: Polígonos estrelados.

Capítulo 3

POLIEDROS

Para fazemos um bom estudo dos poliedros é preciso determinar uma definição para ele; uma definição que não venha trazer nenhuma dúvida a quais figuras estamos nos referindo. Os poliedros foram objetivos de estudos de grandes filósofos da antiguidade e tomaram parte nas suas teorias sobre o universo. Posteriormente, foram estudados poliedros mais gerais. Hoje, vivemos cercados por eles, em embalagens de variados produtos consumidos diariamente, móveis projetados para ambientes domésticos, além das tão famosas pirâmides do Egito, dos “Arranha-céus” de grandes cidades.

Iremos fazer algumas restrições para que alguns sólidos não sejam considerados poliedros, mas vale ressaltar que em outros estudos estes sólidos seriam perfeitamente poliedros.

Observe a figura 3.1a), ela é com certeza um poliedro, mas a figura 3.1b), ela é um poliedro? Com poderíamos identificar se uma figura é ou não um poliedro? É por isso que precisamos ser bastante precisos.

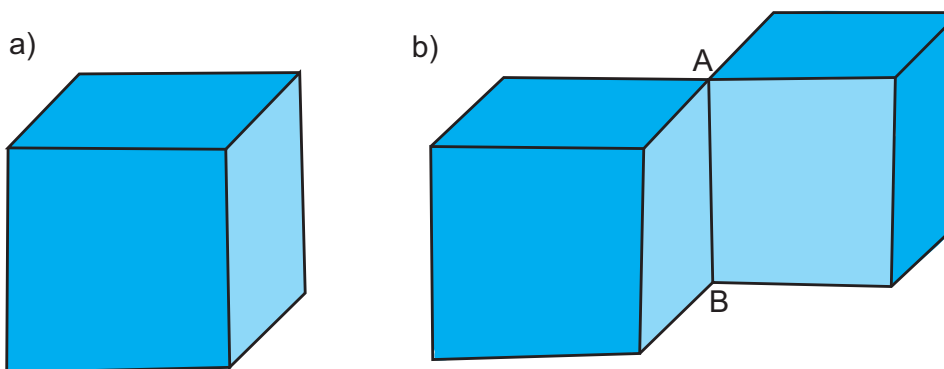


Figura 3.1: a) Poliedro, b) Não-poliedro.

Definição 3.1 *Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro. Além disso,*

- 1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
- 2. A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.*

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

3. *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).*

Quando dizemos na definição que um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos convexos, nós colocamos as figuras 3.1a) e 3.1b) em igualdade de condições, ou seja, elas são poliedros. Mas se queremos que a figura 3.1b) não seja um poliedro, faremos uma restrição.

Basta então dizer que cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono, com isso podemos observar que o lado AB é comum a quatro polígonos do poliedro (face), mas isso não é permitido pela restrição aqui imposta.

Já a figura 3.2, ela é perfeitamente um poliedro, porém quando dizemos que a interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Ela já não se enquadra e deixa de ser um poliedro.

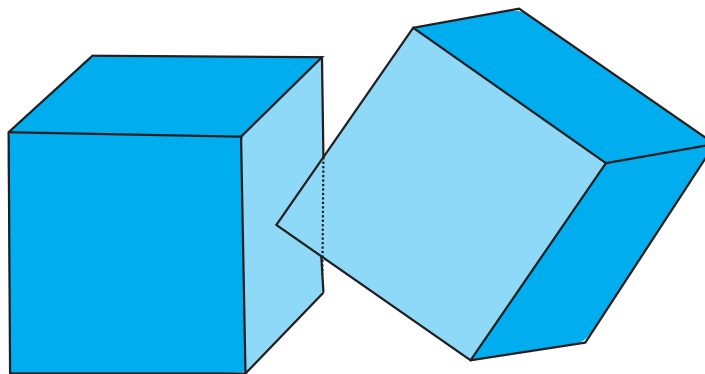


Figura 3.2: Não poliedro.

Analisando a figura 3.3, e considerando que é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice podemos afirmar que não se trata de um poliedro, sempre lembrando que de acordo com a definição apresentada neste trabalho.

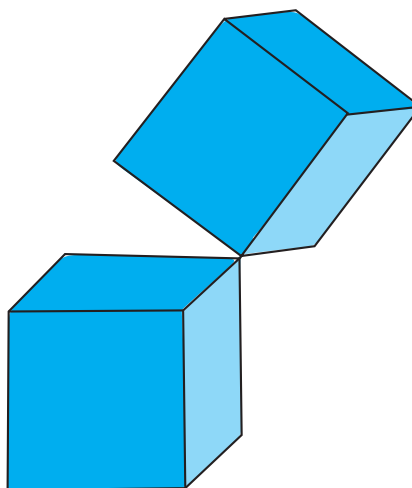


Figura 3.3: Não poliedro.

Agora podemos identificar se uma figura é ou não um poliedro, temos uma definição simples que não traz nenhuma dúvida do que significa poliedro. Faremos só uma observação, todo poliedro limita uma região do espaço chamada interior do poliedro. Também chamaremos de poliedro a união com seu interior. Vamos então apresentar alguns exemplos de poliedros.

Exemplo 3.1 Podemos citar todos os prismas e todas as pirâmides.

Os prismas são poliedros com duas bases geometricamente iguais. As suas faces laterais são sempre quadriláteros. Um prisma diz-se triangular, quadrangular, pentagonal,... conforme as suas bases são triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.









POLIEDRO								
POLÍGONO DA BASE	TRIÂNGULO	QUADRADO	PENTÁGONO	HEXÁGONO	TRIÂNGULO	QUADRADO	PENTÁGONO	HEXÁGONO
NOME DO POLIEDRO	PIRÂMIDE TRIANGULAR	PIRÂMIDE QUADRANGULAR	PIRÂMIDE PENTAGONAL	PIRÂMIDE HEXAGONAL	PRISMA TRIANGULAR	PRISMA QUADRANGULAR	PRISMA PENTAGONAL	PRISMA HEXAGONAL
NÚMERO DE FACES	4	5	6	7	5	6	7	8
NÚMERO DE ARESTAS	6	8	10	12	9	12	15	18
NÚMERO DE VÉRTICES	4	5	6	7	6	8	10	12

Figura 3.4: Prismas e Pirâmides.

As pirâmides são poliedros com uma só base. As suas faces laterais são triângulos. Uma pirâmide diz-se triangular, quadrangular, pentagonal, se a sua base é um triângulo, um quadrado, um pentágono etc.

Exemplo 3.2 As figuras abaixo são poliedro, seguindo a definição.

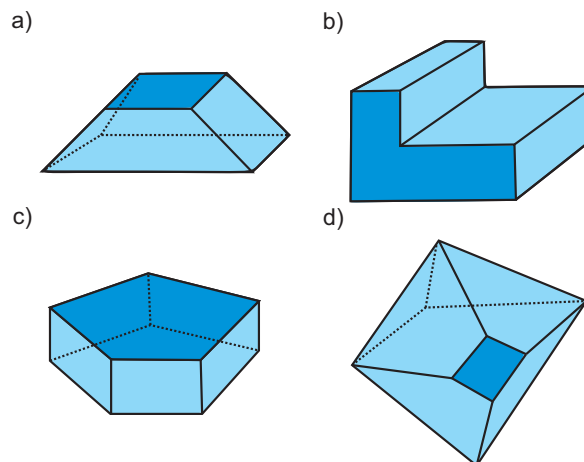


Figura 3.5: Poliedros

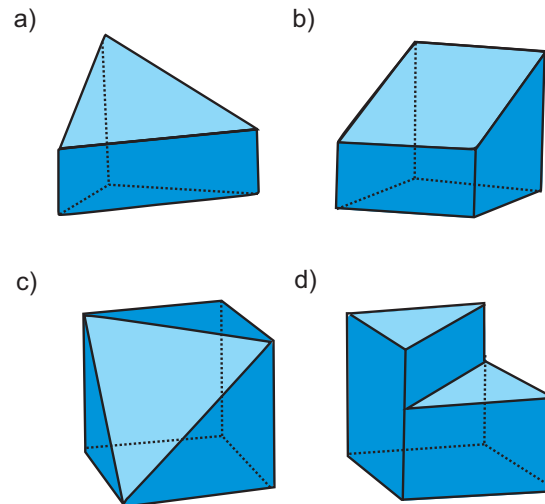


Figura 3.6: Poliedros

3.1 POLIEDROS CONVEXOS

Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo, ou seja, quando quaisquer dois pontos pertencentes ao seu interior de nem um segmento contido no seu interior. Um conjunto C do espaço ou do plano é chamado convexo se, para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a C , o segmento AB está inteiramente contido em C .

Definição 3.2 Um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.

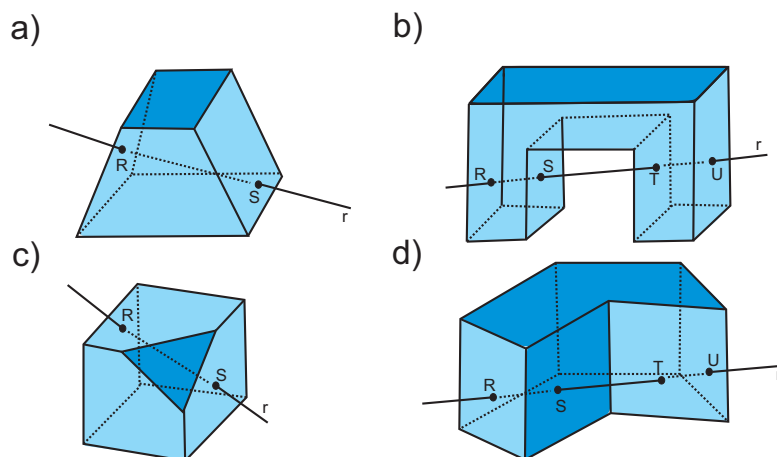


Figura 3.7: a) e c) Poliedros convexos, b) e d) Poliedro não-convexos.

Procurando uma maneira simples de explicar o que seria poliedro convexo em um vídeo postado no site www.videosimpa.br do dia 27 de maio de 2005, o professor Wagner foi bastante feliz em sua explicação ao dizer que “Temos um poliedro, imagine que atiramos nesse poliedro, observe quantos orifícios surgiram, se sempre que atiramos só surgirem dois orifícios, então o poliedro é convexo”.

Observando as figura 3.7a) e 3.7c) é fácil ver que o tiro suposto atingiu o poliedros apenas duas vezes em R e em S causando apenas dois orifícios, mesmo alterando a posição do tiro sempre atingirá apenas dois pontos. Já as figuras 3.7b) e 3.7d), observamos a formação de quatro orifícios os poliedros foi atingido nos pontos R, S, T e U pela definição tratam-se de poliedros não convexo.

3.2 POLIEDROS NÃO CONVEXOS

Como já observamos as figuras 3.7b) e 3.7d), e sabemos que não são convexas só precisamos agora definimos quando os poliedros não são convexas uma vez que já conseguimos diferenciar se é ou não convexa.

Definição 3.3 *Um poliedro é não convexo se existir pelo menos uma reta não paralela a nenhuma de suas faces que o corta em mais de dois pontos.*

3.3 POLIEDROS REGULARES

Dependendo da definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, ou infinitos. “A partir da definição Poliedro regular é todo poliedro convexo onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes”, existem apenas cinco poliedros regulares: os de Platão. “Já a partir da definição Poliedro regular é todo poliedro onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes”, existem nove poliedros regulares: os cinco de Platão e os quatro de Kepler-Poinsot. “Mas se poliedro regular for considerado como todo poliedro onde os vértices e as arestas são congruentes”, então existe, além dos nove anteriores, os infinitos poliedros de Arquimedes.

Já que os poliedros regulares não são então obrigatoriamente convexas, ou seja, existem poliedros regulares não convexas, faremos um breve comentário sobre a classificação dos poliedros sem grandes detalhes, uma vez que nosso interesse está mais voltado para poliedros convexas que podem ser regulares ou não.

Em geral os autores utilizam uma associação entre poliedros regulares e convexas, isso traz algumas vantagens para fazer demonstrações evitando situações mais complexas. No estudo inicial para jovens da educação básica não seria interessante trazer poliedros regulares não convexas, uma vez que estes alunos ainda não estariam preparados para essa situação. Sendo assim vamos adotar a seguinte definição.

Definição 3.4 *Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.*

Os poliedros regulares convexas são também conhecidos como platônicos. São assim chamados por terem sido estudados e divulgados por Platão. São também conhecidos como regulares, pois todas as faces, ângulos e ângulos entre as faces são sempre os mesmos.

Podemos separar então os poliedros regulares em grupos, os convexas e os não convexas. Nos convexas o destaque são os poliedros de Platã;, já nos não convexas temos os poliedros de Kepler-Poinsot e os de Arquimedes.

Veremos a seguir o porquê. Todo ângulo sólido tem que ter um mínimo de três faces, com ângulos de face cuja soma seja menor que 360° . Analisando os polígonos regulares vemos que os possíveis geradores de ângulos sólidos são os de ângulo interno menor que 120° , ou seja: o triângulo (60°), o quadrado (90°) e o pentágono (108°). Portanto, os polígonos regulares

que formam os (5) poliedros regulares são o triângulo, o quadrado e o pentágono. Os sólidos platônicos são encontrados na natureza: são as estruturas das radidarias (plarctons marinhos).

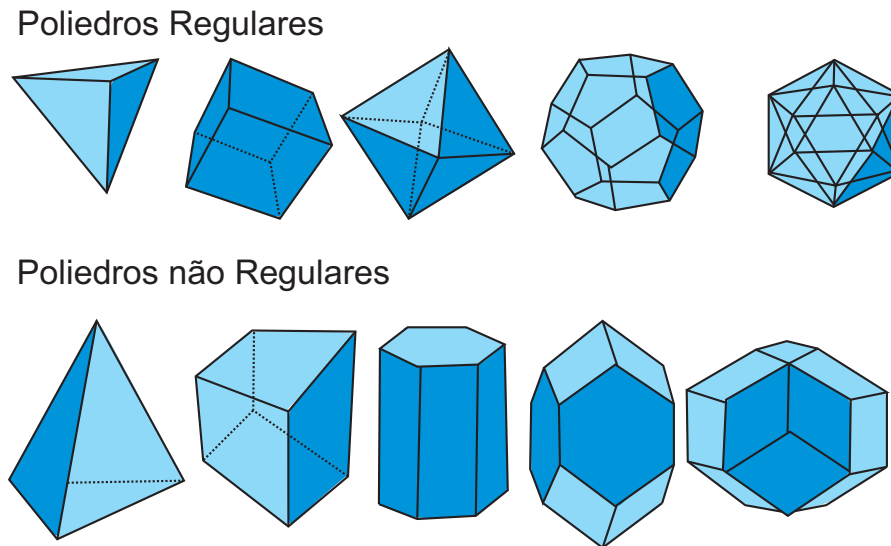


Figura 3.8: Poliedros Regulares e Poliedros não Regulares.

3.4 POLIEDROS DE PLATÃO

Platão nasceu em Atenas, provavelmente em 427 a.C. e morreu em 347 a.C. Por volta dos 20 anos, encontrou o filósofo Sócrates e tornou-se seu discípulo. Quando o filósofo Sócrates foi condenado à morte, em 399 a.C., pelo governo de Atenas (sob a acusação de “perverter a juventude” com seus ensinamentos filosóficos), Platão preferiu deixar a cidade. Passou, então, alguns anos percorrendo outras partes do mundo grego, desde o norte da África até a Itália e, nessas andanças, tomou contato com os ensinamentos pitagóricos. Em 388 a.C., quando já estava com quase quarenta anos, Platão viajou para a Magna Grécia com o intuito de conhecer mais de perto comunidades pitagóricas. Nesta ocasião, veio a conhecer Arquitas de Tarento. Ainda durante essa viagem, Dionísio I convidou Platão para ir à Siracusa, na Sicília. Platão partiu para Siracusa com a esperança de lá implantar seus ideais políticos.

No entanto, acabou desentendendo-se com o tirano local e retornou para Atenas. Em seu retorno, passou a dedicar-se inteiramente à filosofia, fundando uma escola chamada “Academia”. A instituição logo adquiriu prestígio e a ela acorriam inúmeros jovens em busca de instrução e até mesmo homens ilustres a fim de debater ideias. Platão permaneceu na direção da Academia até sua morte. A Academia manteve-se em funcionamento após sua morte. Ela só foi fechada oito séculos depois, por ordem do imperador Justiniano. A filosofia platônica, porém, continuou a ter influência sobre o pensamento da igreja até o século XIII, quando os conceitos de Aristóteles (384 a.C. - c. 322 a.C.) passaram a ser mais dominantes.

Definição 3.5 *Poliedro de Platão é um poliedro convexo em que todas as faces e todos os vértices são do mesmo tipo, ou seja, as faces são todas do mesmo gênero e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.*

Da definição observa-se que todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo o poliedro de Platão é poliedro regular, já que as faces podem não ser polígonos regulares ou podem não ser congruentes ou os ângulos sólidos ou diedros podem não ser congruentes.

Notemos que os poliedros de Platão são construídos usando múltiplas cópias de um único polígono regular e o mesmo número de faces poligonais é usado em torno de cada vértice: o tetraedro é obtido usando quatro triângulos, o cubo ou hexaedro utilizando seis quadrados, o octaedro, oito triângulos, o dodecaedro, doze pentágonos e o icosaedro, vinte triângulos.

Poliedro de Platão é um poliedro convexo em que todas as faces e todos os vértices são do mesmo tipo, ou seja, as faces são todas do mesmo gênero e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas. Da definição observa-se que todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo o poliedro de Platão é poliedro regular, já que as faces podem não ser polígonos regulares ou podem não ser congruentes ou os ângulos sólidos ou diedros podem não ser congruentes.

Tais poliedros são conhecidos como poliedros (ou sólidos) de Platão, pelo fato de Platão ter associado a eles os constituintes fundamentais da natureza. Ao Fogo associou o tetraedro, à Terra associou o cubo, ao Ar o octaedro, ao Cosmos o dodecaedro e à Água o icosaedro.

Podemos perceber que somente é possível formar ângulos poliédricos com três triângulos, com quatro triângulos, com cinco triângulos, com três quadrados e com três pentágonos. Concluindo que com maior número de polígonos em formato de triângulos, quadrados e pentágonos, e até mesmo com outros tipos de polígonos regulares não é possível formar ângulos poliédricos, já que a soma dos ângulos dos polígonos será superior a 360° , e que, para formar um ângulo poliédrico, é necessário, no mínimo, três polígonos.

Embora chamados Platônicos, Proclus atribuiu a construção destes poliedros a Pitágoras, supondo-se que é também a ele que se deve o teorema: Há somente cinco poliedros regulares. Hoje sabe-se que o teorema só é verdadeiro para os poliedros regulares convexos. Alguns séculos mais tarde, em 1597, Kepler (1571-1630) inspirou-se nos poliedros regulares para estudar o movimento dos seis planetas até então conhecidos (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio) e publicou a sua obra "*The Cosmographic Mystery*", na qual utilizou um modelo do sistema solar composto por esferas concêntricas, separadas umas das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro para explicar as distâncias relativas dos planetas ao sol.

Foi também Kepler, quem descobriu o primeiro poliedro regular não convexo, que é o dodecaedro estrelado, de faces regulares que resulta do prolongamento das faces do dodecaedro. Kepler no início do séc. XVII, sugeriu associar os Sólidos Platônicos aos planetas conhecidos nessa altura: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Temos conhecimento dos poliedros regulares presentes na natureza: os três primeiros sob a forma de cristais e os outros dois como esqueletos de animais marinhos microscópicos. Sua beleza e simetria instigaram o interesse do ser humano por eles através dos séculos.

Não há nenhuma disciplina matemática específica baseada nos cinco sólidos, mas muita coisa importante da matemática foi descoberta como subproduto do estudo dessas figuras. Depois dos gregos, o interesse pelo assunto diminuiu, e os sólidos nunca mais alcançaram o mesmo interesse e a mesma importância daquele período. As considerações atuais sobre os cinco sólidos tendem a ser topológicas, como se pode observar numa definição moderna, ou seja, de que um sólido é um poliedro convexo regular se todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si, se seus vértices são convexos e se em cada vértice incide o mesmo número de faces.

Platão (350 a.C.) foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram

esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como “poliedros de Platão”. O conhecimento destes sólidos parece ter sido desencadeado num encontro com Arquitas que, em viagem à Cecília, no sul de Itália, encontraria Platão. Para este, o Universo era formado por um corpo e uma alma, ou inteligência. Na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que diferiam entre si pela natureza da forma das suas superfícies periféricas. Em seu tempo, Platão misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir ? tetraedro, octaedro, icosaedro e o hexaedro ? com os quatro “elementos” primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais ? fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca, conforme figura 3.9, sólidos associados aos elementos primordiais.



Figura 3.9: Sólidos Associados aos elementos primordiais.

3.5 POLIEDROS ESPECIAIS

Poliedros de Arquimedes: Os poliedros arquimedianos ou semi-regulares (referidos no Poly como sólidos arquimedianos) são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de “mais” de um tipo. Existem treze poliedros arquimedianos e tais poliedros são obtidos por operações sobre os Poliedros de Platão, mais especificamente, podem ser obtidos efetuando cortes nos “sólidos” de Platão e considerando a superfície obtida. A figura seguinte ilustra o poliedro de Arquimedes “Tetraedro Truncado”, obtido efetuando cortes em um tetraedro.

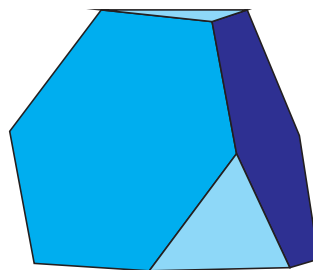


Figura 3.10: Poliedro de Arquimedes.

Os poliedros arquimedianos foram, historicamente, definidos por Arquimedes, mas seus escritos originais foram perdidos. Tais poliedros são uniformes, isto é, existe uma simetria do poliedro de tal forma que todo vértice pode ser transformado em um outro vértice. O cubo, por exemplo, tem as operações de simetria que consistem na rotação de 90 graus em torno de um eixo, e a reflexão através de um plano perpendicular a esse eixo. Assim, o cubo é um poliedro uniforme, que não é arquimediano, pois suas faces são poliedros regulares de um único tipo. Todos os vértices de um poliedro arquimediano são congruentes, isto é, a distribuição das faces em torno de cada vértice é a “mesma” para todos os vértices. Intuitivamente, num poliedro de

Arquimedes, em torno de cada vértice tem-se sempre a mesma aparência (a menos, é claro, de rotação).

Poliedros (ou sólidos) de Johnson: Um poliedro/sólido de Johnson é um poliedro convexo onde as faces são polígonos regulares e que não é um poliedro de Platão, nem um poliedro de Arquimedes, nem um prisma e em nem um antiprisma. Existem 92 poliedros de Johnson. Eles foram primeiro listados por Norman W. Johnson, em 1966. Em 1969, Vitor Zalgaller provou que realmente não existem outros.

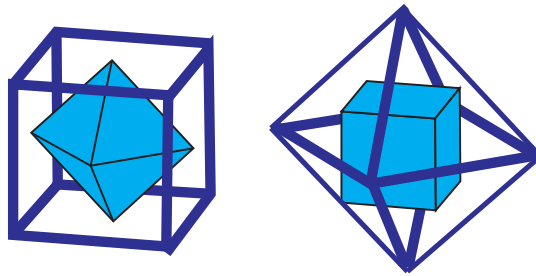


Figura 3.11: Dual do poliedro.

Poliedros (ou sólidos) de Catalan: Os poliedros/sólidos de Catalan são “duais” dos Arquimedianos. O poliedro dual de um poliedro dado é o poliedro que tem como faces os polígonos, com sua região interior, cujas arestas são obtidas ligando os centros de todos os pares de faces adjacentes do poliedro inicial. Brevemente falando, o dual é construído de um poliedro por “substituir cada face por um vértice, e cada vértice por uma face”, ou seja, os vértices de um correspondem às faces do outro. Por exemplo, o dual do cubo é um octaedro e o dual de um octaedro é um cubo (Figura 6). O dual de um dual é o poliedro original. Existem 13 sólidos de Catalan, obtidos dos 13 poliedros arquimedianos.

3.6 VERIFICANDO QUE SÓ EXISTEM CINCO POLIEDROS PLATÔNICOS

Os poliedros conhecidos como poliedros de Platão não são apenas os poliedros regulares, mas sim todos aqueles que:

1. são convexos;
2. têm o mesmo número de lados em todas as faces;
3. em todos os vértices chega o mesmo número de arestas.

Assim surge a pergunta: Será que existem apenas cinco poliedros de Platão?

Para ajudar a responder essa pergunta, encontramos no Livro XI de Os Elementos de Euclides, a proposição 21. Essa diz que “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360° ”. Apesar de intuitiva, a demonstração apresentada por Euclides é elaborada, sendo decorrente de uma sequência de resultados auxiliares. Nas tabelas a seguir, apresentaremos uma análise com as diversas possibilidades de união de faces em torno de cada vértice, lembrando que, em um sólido platônico, as faces são polígonos regulares congruentes e que são necessárias pelo menos três faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

1. As faces são triângulos equiláteros com ângulos internos de 60° . Temos as seguintes possibilidades:

Tabela 3.1: Poliedros formados a partir de triângulos.

Número de triângulos	Soma dos ângulos	Poliedro Formado
3	180°	Tetraedro
4	240°	Octaedro
5	300°	Icosaedro
6	360°	Não Existe

Conclusão: Com seis ou mais triângulos equiláteros é impossível formar um ângulo poliédrico.

3.6.1 TETRAEDRO

O tetraedro é sem dúvida o pai de toda a família de poliedro. A partir dele se fazem todos os demais. É o primeiro sólido regular, é um sólido nuclear pois não tem uma diagonal completa.

- Vértices = 4
- Arestas = 6
- Faces = 4 triângulos equiláteros

3.6.2 OCTAEDRO

O octaedro é composto de seis triângulos equiláteros. Pode ser visto como um antiprisma de base triangular, ou como duas pirâmides de base quadrada, acopladas pelas bases.

- Vértices = 6
- Arestas = 12
- Faces = 8 triângulos equiláteros

3.6.3 ICOSAEDRO

O icosaedro é composto de 20 triângulos equiláteros. O icosaedro é usado como base fundamental para geração da ampla maioria das coberturas geodésicas.

- Vértices = 12
- Arestas = 30
- Faces = 20 triângulos equiláteros

2. As faces são quadrados com ângulos internos de 90° . Temos as seguintes possibilidades:

Tabela 3.2: Poliedros formados a partir de quadrados.

Número de quadrados	Soma dos ângulos	Poliedro Formado
3	270°	Hexaedro
4	360°	Não Existe

Conclusão: Com quatro ou mais quadrados é impossível formar um ângulo poliédrico.

3.6.4 HEXAEDRO OU CUBO

O hexaedro é composto de 6 quadrados. O cubo é um sólido sociável. Ele pode ser aglomerado perfeitamente, isto é, podemos juntar cubos sem que sobrem espaços vazios. É a modulação básica das nossas construções atuais. Isso não quer dizer que seja a maneira mais econômica de aglomeração.

- Vértices = 8
- Arestas = 12
- Faces = 6 quadrados

3. As faces são pentágonos regulares com ângulos internos de 108° . Temos as seguintes possibilidades:

Tabela 3.3: Poliedros formados a partir de pentágonos.

Número de pentágonos	Soma dos ângulos	Poliedro Formado
3	324°	Dodecaedro
4	432°	Não Existe

Conclusão: Com quatro ou mais pentágonos regulares é impossível formar um ângulo poliédrico.

3.6.5 DODECAEDRO

O dodecaedro é composto de 12 pentágonos.

- Vértices = 12
- Arestas = 20
- Faces = 12 pentágonos

4. Se as faces são polígonos regulares com mais de 6 lados, então a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é maior que 360° . Sendo assim, não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais, etc. Assim, temos apenas cinco poliedros que são regulares, podendo então afirmar que todo poliedro regular é um poliedro de Platão. Porém nem todo poliedro de Platão é regular, ou seja, só existem cinco tipos de poliedros de Platão, regulares ou não, que são:

Teorema 3.1 (POLIEDROS DE PLATÃO) *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Vejam uma aplicação direta do teorema de Euler, para demonstramos o teorema acima, seja n o número de lados de cada face e seja p o número de aresta que concorrem em cada vértice. Temos então $2A = nF = pV$, ou

$$A = \frac{nF}{2} \quad (3.1)$$

$$V = \frac{nF}{p} \quad (3.2)$$

Como a relação de Euler é:

$$V - A + F = 2 \quad (3.3)$$

Substituindo Eq.3.1 e Eq.3.2 em Eq.3.3, obtemos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \quad (3.4)$$

Resolvendo para F , obtemos:

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn} \quad (3.5)$$

Como devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > p \quad (3.6)$$

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. As possibilidades são, então, as seguintes:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (cubo)} \quad (3.8)$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 2 \text{ (dodecaedro)} \quad (3.9)$$

3.7 APRENDENDO A CONTAR VÉRTICE E FACES

Dado um poliedro, vamos agora tratar do problema de contar as faces, os seus vértices e suas arestas. Representamos, então, por A , o número de arestas; por F , o número de faces e por V o número de vértices. Ainda, como as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por $F_n (n \geq 3)$, o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e, observe que, pelo item 2 da definição 3.1 do poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. Assim temos que:

$$F = F_3 + F_4 + \dots \quad (3.10)$$

$$V = V_3 + V_4 + \dots \quad (3.11)$$

Imagine agora que o poliedro foi desmontado e que todas as faces estão em cima de sua mesa. Quantos lados todos esses polígonos possuem? Não será difícil contar, basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5, e assim por diante, e depois somar os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \quad (3.12)$$

Podemos também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se, em cada vértice, contarmos quantas arestas nele concorrem, somando os resultados, obteremos também o dobro do número de aresta (por que cada aresta terá sido contada duas vezes: em um extremo e no outro). Portanto,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \quad (3.13)$$

Dessas primeiras relações entre os elementos dos poliedros podemos demonstrar duas desigualdades.

a) $2A \geq 3F$;

b) $2A \geq 3V$;

Para demonstrar o item a) observar que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \quad (3.14)$$

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots \quad (3.15)$$

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots \quad (3.16)$$

$$2A \geq 3F \quad (3.17)$$

Demonstrando o item b) observar que:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \quad (3.18)$$

$$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \dots) + V_4 + 2V_5 + \dots \quad (3.19)$$

$$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \dots \quad (3.20)$$

$$2A \geq 3V \quad (3.21)$$

Podemos observar que a igualdade só acontece se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. Na segunda desigualdade, a igualdade só acontece quando $V_4 = V_5 = \dots = 0$, ou seja, quando em todos os vértices concorrem 3 arestas.

3.8 EXISTE O POLIEDRO?

Dados três números naturais V , A e F tais que $V - A + F = 2$, existe sempre um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces?

Para nós professores do ensino básico esse fato é extremamente interessante e pode passar despercebido. A resposta à pergunta acima é NÃO, imagine que poderíamos achar que isso fosse verdade, pois a recíproca é verdadeira no entanto observe o exemplo abaixo:

Exemplo 3.3 $V = 7$, $A = 9$ e $F = 4$ satisfazem a relação de Euler $V - A + F = 2$, mas não são números de nenhum poliedro, uma vez que com 4 faces só existe o tetraedro, que tem 4 vértices e 6 arestas.

Portanto, que condições os números V , A e F devem satisfazer, além da relação de Euler, para que possamos garantir a existência de um poliedro com esses números de vértices, arestas e faces?

Imagine um poliedro P com todas as suas faces triangulares. Nesse caso, $3F = 2A$, uma vez que cada aresta é lado exatamente de duas faces. Entretanto, se P possui alguma face não triangular, então $3F < 2A$. Portanto a condição necessária é que:

$$3F \leq 2A \quad (3.22)$$

Agora se o poliedro P tem um ponto comum a três arestas. Nesse caso, $3V = 2A$, pois contando as arestas que incidem em cada vértice, teremos contado cada uma duas vezes. Entretanto, se P possui algum vértice onde incidem mais de 3 arestas, teremos $3V < 2A$. Portanto a condição necessária é que

$$3V \leq 2A \quad (3.23)$$

Seja P um poliedro convexo, então:

$$V - A + F = 2 \quad (3.24)$$

multiplicando a Eq. 3.24 por 3 temos:

$$6 = 3V - 3A + 3F \quad (3.25)$$

Substituindo a Eq. 3.25 em Eq. 3.22 temos:

$$6 = 3V - 3A + 3F \leq 3V - 3A - 2A = -A + 3V \quad (3.26)$$

Ou seja, $A + 6 \leq 3V$.

Substituindo em Eq. 3.2 temos: $A + 6 \leq 3F$.

Portanto, para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, é necessário que além da relação de Euler, e de que $A \geq 6$, teremos:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \text{ e } A + 6 \leq 3V \leq 2A. \quad (3.27)$$

Se o número de arestas é pequeno, podemos facilmente investigar o aspecto de alguns poliedros

Exemplo 3.4 *Como são os poliedros que possuem 10 arestas?*

Considerando as condições que acabamos de estabelecer, se $A = 10$, devemos ter $16 \leq 3F \leq 20$ e $16 \leq 3V \leq 20$. Logo, $F = 6$ e $V = 6$. Veja as figuras:

O primeiro é uma pirâmide pentagonal e o segundo possui duas faces quadrangulares e quatro faces triangulares.

Observe que não podemos construir um poliedro, com as características estabelecidas, somente com faces triangulares. Como vimos antes, se um poliedro possui apenas faces triangulares, então $3F = 2A$, o que não ocorre aqui.

Vamos prosseguir para encontrar condições suficientes para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces.

Representamos por (V, A, F) qualquer um dos poliedros da família de todos os poliedros que possuem V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $(6, 10, 6)$ representa um dos dois poliedros que estão ilustrados na figura anterior.

Teorema 3.2 *Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se somente se:*

$$A \geq 6 \tag{3.28}$$

$$V - A + F = 2 \tag{3.29}$$

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \tag{3.30}$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A \tag{3.31}$$

Esse teorema não será provado aqui, mas para o leitor interessado poderá encontrar a demonstração da referência [9]

Capítulo 4

TEOREMA DE EULER

4.1 UM POUCO DA VIDA DE LEONARDO EULER

Leonardo Euler nasceu em 1707 na Basileia, uma importante cidade suíça, filho de um pastor calvinista, é um dos maiores nomes da história da Matemática. É considerado pelos historiadores como a pessoa que mais produziu artigos matemáticos de todos os tempos, escrevendo sobre praticamente todos os ramos da Matemática, bem como sobre ramos da Física.

O pai de Euler tinha esperança que seu filho seguisse a carreira teológica, mas logo cedo percebeu seu grande potencial para as exatas. Foi o próprio pai de Euler, que tinha também formação nas áreas de exatas, que iniciou o filho pelos caminhos da lógica e, posteriormente, conseguiu que seu filho estudasse com Jean Bernoulli, o que lhe propiciou uma aproximação com a família Bernoulli.

A formação de Euler foi extremamente vasta, estudando matemática, teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Aos vinte anos mudou para a Rússia, em busca de uma vaga na área de medicina na recém-criada Academia de São Petersburgo. Nessa mesma Academia de São Petersburgo, dois jovens da família Bernoulli tinham ido para ocupar as cadeiras de matemática.

Na Academia de São Petersburgo foi criada uma revista especializada em Matemática, da qual Euler participou desde seu lançamento com artigos constantes. A Produção desse gênio era tão grande que mesmo depois da sua morte a revista continuou publicando artigos seus por mais de cinquenta anos.

O respeito e a admiração por Euler eram enorme e sua fama correu o mundo. Em 1741 foi convidado pelo Imperador Frederico o Grande para fazer parte da Academia de Berlim, onde ficou por vinte e cinco anos. A simplicidade do grande matemático incomodava o imperador que esperava uma postura mais requintada de uma pessoa tão ilustre.

Essa simplicidade de Euler acabou gerando descontentamentos por parte do Imperador e, em alguns episódios, constrangimentos ao matemático. Em 1766, a convite de Catarina a Grande, retorna Academia de São Petersburgo, onde vive até 1783, ano em que morre em sua casa o mestre da Matemática.

A história da vida de Leonardo Euler é riquíssima em contribuições para os diversos ramos da Matemática e das ciências, tendo produzido artigos em diversas áreas do conhecimento. Mesmo com tamanha sabedoria e profundidade ele era também conhecido por sua didática e simplicidade ao abordar temas trabalhados nos níveis escolares elementares, nesse sentido ele também produziu livros didáticos para esses níveis de ensino da Matemática para a Rússia.

De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avan-

çados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem-sucedido em todos os tempos.

Aos vinte e oito anos Euler perdeu a visão do seu olho direito, conta-se que devido a esforços excessivos da visão em um de seus estudos e aos sessenta anos começou a perder a visão do outro olho devido a uma catarata. Sabendo de sua cegueira inevitável ele mandou construir um quadro negro enorme, no qual treinou escrever sem olhar e dessa forma, ditando para seus olhos e escrevendo no quadro negro, continuou produzindo artigos na mesma dinâmica de antes devido à sua memória extraordinária e sua grande capacidade de concentração.

Em 1735 tinha perdido a visão do olho direito - por excesso de trabalho, ao que se diz - mas esta infelicidade não diminuiu em nada sua produção de pesquisa. Conta-se que ele disse que ao que parecia seu lápis o superava em inteligência, tão facilmente fluíam artigos; e ele publicou mais de 500 artigos durante sua vida. Por quase meio século depois de sua morte obras de Euler continuavam a aparecer nas publicações da Academia de S. Petersburgo.

Em 1766 Euler voltou à Rússia. Durante esse ano Euler soube que estava perdendo a visão do olho que restava devido a catarata, e preparou-se para a cegueira final praticando escrever com giz numa grande lousa e ditando para seus filhos. Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezesseis anos de sua vida na total cegueira.

A fórmula de Euler $V - A + F = 2$, válida para poliedros convexos, apareceu pela primeira vez em uma carta para Goldback em 1750. Existem várias provas para a fórmula. Na realidade, ela é válida para uma classe maior de poliedros: para saber se a fórmula vale para um determinado poliedro, imagine que ele seja feito de borracha. Se ao inflá-lo ele assumir a forma de uma esfera, então a fórmula de Euler é válida. Note que os poliedros das figuras 3.5b) e 3.6d) não são convexos, porém satisfazem essa condição.

Teorema 4.1 *Para todo poliedro convexo tem-se que $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.*

O número $V - A + F = 2$ é chamado característica de Euler, e, para poliedros como os que estamos estudando, vale a seguinte fórmula: $V - A + F = 2 - 2G$, sendo G o número de "túneis" do poliedro (chamado gênero do poliedro). Para entender melhor o que queremos dizer com "túneis", observe a figura 1.2 de um poliedro com um "túnel" (gênero 1).

4.1.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

A demonstração para Teorema de Euler para poliedros convexos, com um grau de abstração adequado ou Ensino Médio é feita a partir da soma dos ângulos internos das faces dos poliedros. Esta demonstração foi apresentada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, na terceira edição da Revista do Professor de Matemática - RPM e publicada no livro Meu professor de Matemática e outras histórias do Professor Elon Lages Lima. Seja P um poliedro convexo, logo suas faces são polígonos convexos e sejam os números n_1, n_2, \dots, n_k os gêneros dos polígonos correspondentes às faces, entende-se por gênero o tipo de polígono (triângulo $n = 3$, quadrilátero $n = 4$, pentágono $n = 5$, etc.), numerando as faces de 1 a F temos que $1 \leq k \leq F$. A soma dos ângulos de um polígono convexo é dada por

$$S = (n - 2)\pi \tag{4.1}$$

Então a soma dos ângulos internos de todas as faces será:

$$S = (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2\pi) + \dots + (n_f - 2)\pi \quad (4.2)$$

Colocando π em evidência e agrupando os números de faces e as parcelas 2 pode-se escrever:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \dots + n_f) - (2 + 2 + \dots + 2)] \quad (4.3)$$

Na expressão acima $(n_1 + n_2 + \dots + n_f)$ corresponde ao número total de lados de todas as faces, como cada lado é comum a duas faces então esse número é o dobro do número de arestas $2A$ e na expressão do segundo parênteses tem-se tantas parcelas 2 quanto o número de faces, logo é correspondente a $2F$, portanto:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \quad (4.4)$$

Em seguida será calculada a mesma soma de todos os ângulos internos das faces do poliedro, só que por outro caminho. Considere, agora, uma reta r , que não seja paralela e nenhuma face de P e um plano H , que não intersecte P e que seja perpendicular a r . O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r serão chamadas retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semi-espacos, chama-se espaço superior aquele que contém P e diz-se que seus pontos estão acima de H . A cada ponto X do espaço superior toma-se uma reta paralela a r que intersecta H no ponto X' , chamado sombra de X . A sombra de qualquer conjunto C , contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto C' , contido em H , formado pelas sombras dos pontos de C . Na figura 4.1 tem-se a representação de um poliedro e da sombra gerada pela interseção com o plano H .

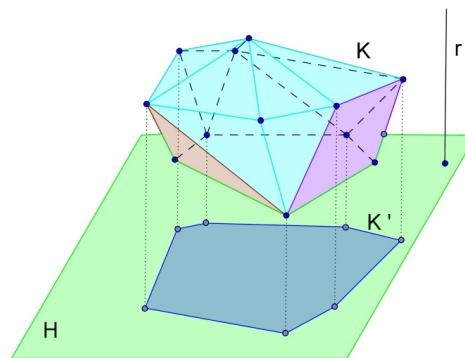


Figura 4.1: Projeção sobre o plano H.

Seja P' a sombra do poliedro P . Tem-se que os pontos de P' são sombra de um ou dois pontos de P , pois o poliedro P é convexo. O contorno K' , da sombra do poliedro, é um conjunto de pontos que são sombra de apenas um ponto do poliedro. K' é o conjunto das sombras dos segmentos de uma linha poligonal fechada K , dos pontos em que a reta paralela a r que passa por esse ponto não intersecta mais o poliedro. Chama-se de contorno iluminado a linha poligonal K . Note-se que todos os outros pontos da sombra do poliedro é sombra de dois pontos, um da parte iluminada e outro da parte escura do poliedro.

A partir dessas considerações procede-se o cálculo da soma dos ângulos internos de todas as faces. É importante notar que a sombra de uma face e um polígono do mesmo gênero, ou seja, com o mesmo número de lados, logo a soma dos ângulos internos do polígono é igual a soma dos ângulos internos da sua sombra. Sejam V_i , o número de vértices iluminados, V_s o número de vértices sombrios e V_c o número de vértices do contorno K , que é sombra de apenas

um ponto. Então $V = V_i + V_s + V_c$. Tem-se que V é o número de vértices e, logicamente, o número de lados da poligonal K' , contorno de P .

Considere a sombra da parte iluminada de P , essa sombra é um polígono convexo com V_c vértices e subdividido por V_i pontos interiores, que determinam as sombras dos polígonos iluminados, que são também polígonos com o mesmo número de lados. Para cada ponto V_i tem-se que a soma dos ângulos internos é 2π radianos, como se vê na figura 4.2 os vértices do contorno V_c são: V_1, V_2, \dots, V_7 e os vértices iluminados do interior V_i são: V_8 e V_9 . Logo a soma dos ângulos contidos na sombra da parte iluminada será:

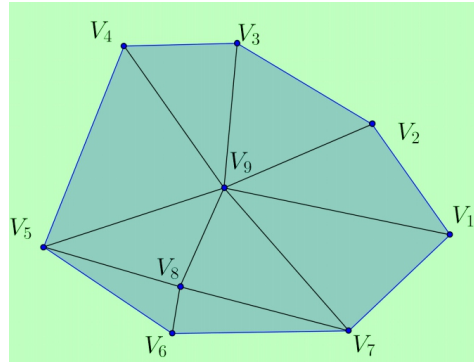


Figura 4.2: Contorno.

$$S_i = 2\pi V_i + \pi(V_c - 2) \quad (4.5)$$

Para se calcular a soma das medidas de todos os ângulos sombrios procede-se do mesmo modo e é fundamental lembrar que a essa soma envolve todos os vértices que estão no interior da região sombria assim como todos os vértices da poligonal K' , logo:

$$S_e = 2\pi V_e + \pi(V_c - 2) \quad (4.6)$$

Conclui-se, então, que a soma de todos os ângulos do poliedro será a soma entre todos os ângulos iluminados e todos os ângulos sombrios, então:

$$S = S_i + S + e = 2\pi V_i + \pi(V_c - 2) + 2\pi V_e + \pi(V_c - 2) \quad (4.7)$$

$$S = 2\pi V_i + 2\pi V_e + 2\pi(V_c - 2) \quad (4.8)$$

$$S = 2\pi(V_i + V_e + V_c - 2) \quad (4.9)$$

$$S = 2\pi(V - 2) \quad (4.10)$$

Como, pelo primeiro cálculo

$$S = 2\pi(A - F) \quad (4.11)$$

e, pelo segundo cálculo,

$$S = 2\pi(V - 2) \quad (4.12)$$

temos, então, que $2\pi(A - F) = 2\pi(V - 2)$ Dividindo-se os dois membros por 2:, temos:

$$V - 2 = A - F \quad (4.13)$$

ou

$$V - A + F = 2 \quad (4.14)$$

Ficando, assim, demonstrado o Teorema de Euler para Poliedros Convexos.

4.1.2 SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

A demonstração do caso plano do Teorema de Euler pode ser feita diretamente, ou seja, sem recorrer ao resultado obtido no espaço. Ainda, o leitor poderá perceber que a relação de Euler para o plano vale em situações mais gerais do que as que mostramos antes.

Consideremos, então, uma região R do plano dividida em outras regiões justapostas como mostra a figura a seguir.

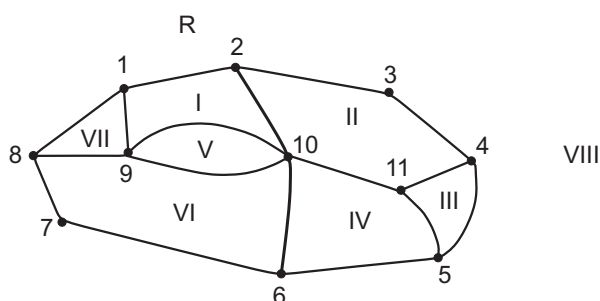


Figura 4.3: A divisão de uma região em outras justapostas.

Cada região (seja R ou uma da decomposição) é ilimitada por pelo menos duas arestas e um vértice é um ponto comum a pelos menos duas arestas. Devemos enfatizar que, aqui, o termo aresta não significa um segmento de reta, mas sim qualquer curva contínua, sem autointersecções, que liga um vértice a outro vértice. Uma boa ilustração do que estamos dizendo, consiste em observar o mapa do Brasil dividido nos seus estados. Cada estado é uma face e cada linha de fronteira é uma aresta. Devemos ainda exigir (e isso é muito importante) que nenhuma região fique completamente dentro de outra. Assim, decomposições como as que mostramos abaixo estão proibidas.

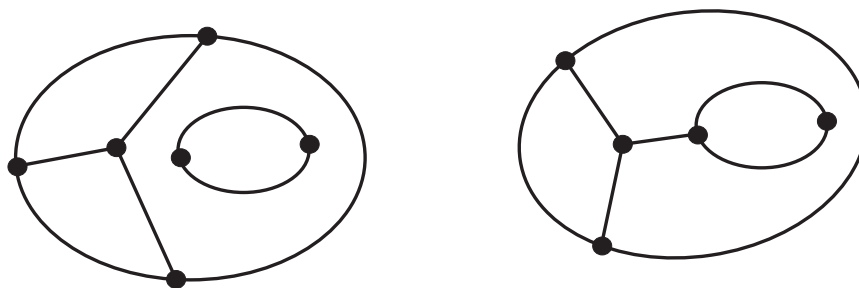


Figura 4.4: Decomposições proibidas.

É também conveniente considerar o exterior de R como uma região. Observando novamente a figura temos, então, o plano dividido em 8 regiões. As regiões numeradas de I a VII são ilimitadas e a região VIII é ilimitada, tendo o contorno de R como sua fronteira. A região ilimitada é comumente chamada de oceano.

Para ilustrar o que estamos dizendo e ainda observando a figura, o contorno da região R é formado pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices consecutivos de 1 a 8 e depois voltando a 1 (sem passar por 9). A região VIII, O oceano, é formado pelos pontos exteriores ao contorno de R . A região I é formada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices 1-2-10-9-1 e a região V é limitada apenas pelas duas arestas que ligam os vértices 9 e 10. Nas condições que descrevemos, consideremos agora o plano dividido em F regiões (sendo uma ilimitada através de A arestas que concorrem em V vértices). Afirmamos que:

$$V - A + F = 2 \quad (4.15)$$

A fórmula $V - A + F = 2$ vale no caso simples, em que apenas um polígono de n lados está desenhado no plano. Neste caso,

$$A = V = n, \quad F = 2 \quad (4.16)$$

Vamos usar indução para o caso geral, ou seja, vamos mostrar que, se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em F regiões, então ela ainda vale uma decomposição em $F + 1$ regiões. Uma determinada decomposição pode ser construída por etapas, onde, em cada uma delas, uma nova região é acrescentada no oceano das anteriores. Consideremos, então, uma decomposição do plano em F regiões através de A arestas que concorrem em V vértices (como mostra a parte em linhas cheias da figura) satisfazendo a relação de Euler. Acrescentamos, agora, uma nova região contida no oceano das regiões anteriores (como mostra a parte em linhas tracejadas da figura), desenhando uma sequência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior. Se acrescentarmos r arestas, então, acrescentamos $r - 1$ vértices e uma nova região.

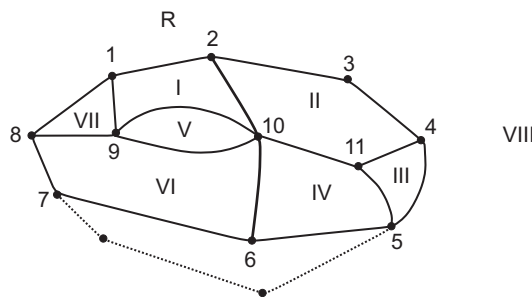


Figura 4.5: Acrescentando uma nova região.

Fica claro, no entanto que a relação de Euler permanece válida porque: $V - A + F = (V + r - 1) - (A + r) + (F + 1)$, o que conclui a demonstração.

O caso plano do Teorema de Euler é um resultado importante na teoria dos grafos. Um grafo é apenas um conjunto de pontos com linhas que unem alguns pares de pontos desse conjunto, é uma coisa simples, mas propicia uma imagem geométrica de uma relação entre os elementos de um conjunto. Para dar um exemplo elementar, suponha que, em uma reunião entre pessoas, alguns cumprimentos foram feitos. Podemos visualizar graficamente essa situação representando as pessoas por pontos do plano, onde, se a pessoa A cumprimentou a pessoa B, desenhamos uma linha ligando o ponto A ao ponto B. pode ser que uma certa pessoa tenha cumprimentado muitas outras (ou mesmo todas as outras) e pode ter ocorrido que algumas pessoas não tenham cumprimentado ninguém. A figura que mostra essa relação é um grafo.

Grafos são utilizados em inúmeras áreas do conhecimento humano, com o objetivo de visualizar relações ou conexões entre elementos de um conjunto. Se, por exemplo, você vê, em

um mapa, cidades ligadas por estradas, esses desenhos de moléculas mostrando ligação entre átomos são grafos etc.

Capítulo 5

GRAFOS

A literatura afirma que a teoria dos grafos começou na cidade de Königsberg em 1736 pelo grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). A cidade era cortada pelo rio Pregel, que possui duas ilhas. Como era muito complicado fazer o transporte de cargas e pessoas através de barcos, algumas pontes foram construídas para auxiliar neste deslocamento entre as ilhas e as duas margens. Após algum tempo as pessoas começaram a se perguntar se era possível sair de sua casa, passar por cada ponte exatamente uma vez e voltar para a segurança de seu lar.

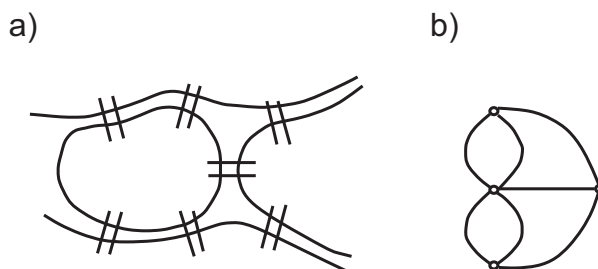


Figura 5.1: a) Mapa de Königsberg e b) diagrama de Euler.

Para resolver o problema, Euler montou um diagrama que representasse o mapa da cidade. Ele fez da seguinte forma: A cada ilha e margem ele associou a um ponto que chamaremos de vértice e a cada ponte de ligação que chamaremos de aresta. Com isso, ele obteve a figura 5.1b).

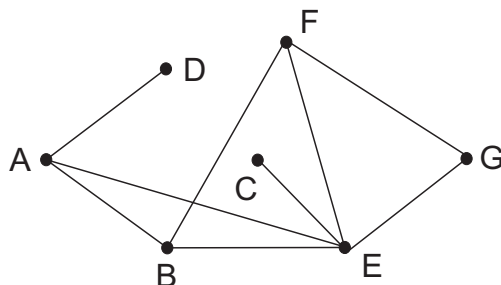


Figura 5.2: Exemplo de grafo

Essa figura com vários pontos (vértices) e algumas ligações (arestas) que denominamos um grafo. Para finalizar seu raciocínio, Euler percebeu que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes. Por outro lado, como os moradores queriam atravessar cada ponte apenas

uma vez, cada vértice deveria ter um número par de arestas. Logo, se tornaria impossível fazer um percurso seguindo as regras impostas pelos moradores.

5.1 PRÉ-LIMINARES SOBRE GRAFOS

Como toda teoria matemática, a teoria dos grafos está repleta de nomenclaturas e termos técnicos. Vamos apresentar algumas definições importantes para apresentamos uma demonstração de teorema de Euler para poliedros através de grafos.

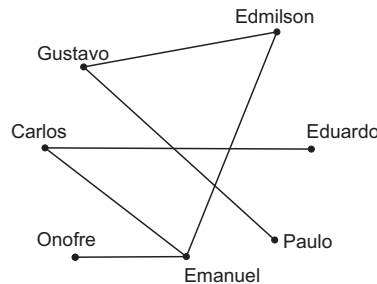


Figura 5.3: Exemplo de grafo.

Definição 5.1 *Grafo é um par de conjuntos (V, A) onde $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é um conjunto de vértices e $A \subset \{\{v_i, v_j\} / v_i, v_j \in V\}$ é um conjunto de arestas (na verdade uma aresta é um par de vértices).*

A representação mais comum de grafos é associar os vértices a pontos e as arestas a linhas que ligam os pares de vértices que as formam.

Exemplo 5.1 *Podemos construir um grafo que represente pessoas apertando mãos. Os vértices seriam as pessoas. Ligamos dois vértices (formando assim uma aresta) se duas pessoas se cumprimentaram.*

Definição 5.2 *O grau de um vértice v_i é o número de arestas ligadas a v_i . Denotamos o grau do vértice v_i como $g(v_i)$. No último exemplo, o grau de um vértice seria o número de apertos de mão que a pessoa correspondente deu.*

Definição 5.3 *Um caminho é um grafo cujos vértices são v_1, v_2, \dots, v_n e cujas arestas são $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$.*

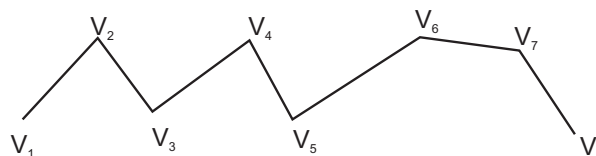


Figura 5.4: Exemplo de caminho.

Observe que o grau de todos os vértices é 2, com exceção das “pontas” do caminho. Diremos também que, num grafo, um caminho ligando dois vértices v e w é uma sequência de arestas que ligam v a w .

Definição 5.4 Um ciclo é um grafo cujos vértices são $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e cujas arestas são $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.

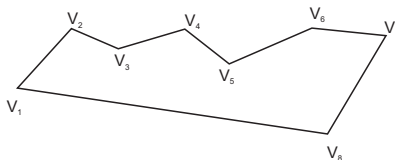


Figura 5.5: Exemplo de ciclo.

Note que o grau de todos os vértices é 2.

Definição 5.5 Um grafo n -completo ou n -clique é um grafo em que todos os pares de vértices estão ligados.

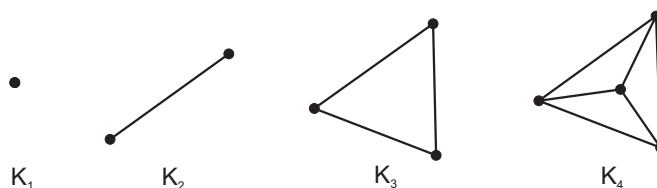


Figura 5.6: Grafo completo ou clique

Definição 5.6 Uma floresta é um grafo que não contém ciclos.

Definição 5.7 Um grafo é dito conexo (ou conectado) quando, para quaisquer dois de seus vértices, existe um caminho que os liga. Todo grafo pode ser particionado em um ou mais componentes conexos, ou seja, subgrafos conexos.

Definição 5.8 Uma árvore é um grafo que não contém ciclos e é conexo. Assim, uma floresta é uma união de árvores.

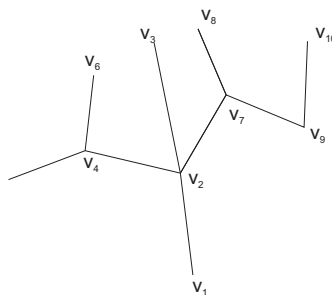


Figura 5.7: Exemplo de árvore

Teorema 5.1 *Em um grafo simples $G = (V, A)$, a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja; $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$.*

Prova. De cada vértice v saem $g(v)$ arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicadas por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (lembre-se de que cada aresta está associada a dois vértices).

Note que no exemplo acima, contamos de duas maneiras o número de arestas: uma maneira do ponto de vista dos vértices e outro do ponto de vista das arestas. Esse procedimento pode se tornar sistemático.

Normalmente, nos problemas de grafos que são resolvidos com contagem dupla, contamos algo envolvendo pares de vértices, para que apareçam graus e arestas mais naturalmente. Aliando isso ao teorema importante acima e eventualmente, a alguma desigualdade, chega-se aos resultados.

5.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER POR GRAFOS

Consideramos problemas que podem ser postos na linguagem da teoria dos grafos: se desenharmos alguns grafos especiais no plano, em quantas partes esses grafos dividem o plano? De fato, começamos com um conjunto de retas; consideramos as interseções das retas dadas como nós do grafo, e os segmentos que surgem sobre essas retas, como as arestas de nosso grafo. (por enquanto, vamos esquecer as semirretas infinitas. Retornaremos mais tarde á conexão entre os grafos e os conjuntos de retas.)

De forma mais geral, estudamos um mapa planar: um grafo que é desenhado no plano de modo que suas arestas são curvas contínuas não-intersectantes. Assumimos também que o grafo é conexo. Tal grafo divide o plano em certas partes, chamadas de países. Exatamente um país é infinito, os outros países são finitos.

Um resultado muito importante, descoberto por Euler, nos diz que podemos determinar o número de países em um mapa planar conexo, se sabemos o número de nós e arestas do grafo. A Fórmula de Euler é a seguinte:

Teorema 5.2 *Número de países + número de nós = número de arestas + 2.*

Prova. Para tornar a prova desse teorema mais plausível. Contaremos uma pequena estória. Isso não prejudica a correteza matemática de nossa prova.

Vamos considerar o dado mapa planar como o mapa de um sistema d'água de um planeta como um único continente muito baixo. Consideramos as arestas não como as fronteiras entre países, mas como barragens, com torres de observações nos nós. Portanto as áreas internas não são países, mas lagoas de retenção. A "lagoa" mais externa é o mar, e todas as outras "lagoas" estão secas. Uma vantagem dessa formulação é que podemos permitir uma aresta-de-corte no grafo, que podemos pensar como uma espécie de barragem ou píer; isso não poderia ser considerado como uma fronteira de entre países, pois em ambos os seus lados teríamos o mesmo "país"(o mar).

O inimigo ataca a ilha, por conseguinte os defensores têm que inundá-la com a água do mar explodindo certas barragens. Os defensores estão esperando repudiar o ataque, e retornar a sua ilha, portanto eles tentam explodir o número mínimo possível de barragens. Eles imaginaram o seguinte procedimento: explodir uma barragem por vez, e somente no caso em que um lado da barragem já esteja inundado, e o outro esteja seco. Após a destruição dessa barragem o

oceano enche de água do mar a lagoa anteriormente seca. Note que todas as outras barragens (arestas) em torno dessa lagoa estão intactas nesse estágio (porque sempre que uma barragem é explodida, as lagoas em ambos os lados dessa barragem são inundadas), portanto a água do mar enche apenas essa lagoa específica. Na indicamos pelos números uma possível ordem na qual as barragens possam ser explodidas para inundar a ilha inteira.

Vamos contar o número de barragens destruídas e intactas. Denotadas o número de torres de observações (nós) por v , o número de barragens (arestas) por a , e o número de lagoas, incluindo o oceano, por f (daremos uma explicação mais adiante por que estamos usando essas letras). Para inundar todas as $f - 1$ lagoas da ilha, tínhamos que destruir exatamente $f - 1$ barragens.

Para contar as barragens sobreviventes, vamos olhar para o grafo remanescente após as explosões. Primeiro pode-se notar que ele não contém ciclos, porque o interior de qualquer ciclo teria permanecido seco. Segunda observação: o sistema de barragens remanescentes forma um grafo conexo, pois toda barragem que foi explodida era uma aresta de um ciclo (a fronteira da lagoa que foi inundada por essa última explosão), e sabemos do exercício 7.12 que omitir tal aresta não destruiria a conectividade de nosso grafo. Portanto o grafo resultante após as explosões é conexo e não contém qualquer ciclo, por conseguinte ele é uma árvore.

Agora aplicamos o importante fato de que se uma árvore tem v nós então ela tem $v - 1$ arestas. Resumindo o que temos: $f - 1$ barragens foram explodidas e $v - 1$ barragens sobreviveram. Portanto o número de arestas é a soma desses dois números. Expressando esse fato como uma equação: $(v - 1) + (f - 1) = e$. Rearrumando, obtemos $f + v = e + 2$, e isso é exatamente a Fórmula de Euler.

Capítulo 6

APLICAÇÕES

Problema 1: Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares, cinco faces quadrangulares. Calcular o número de arestas e de vértices do poliedro:

Solução: Temos:

$$2A = 6F_3 + 5f_4 \rightarrow 2A = 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \rightarrow A = 19 \quad (6.1)$$

Do teorema de Euler temos:

$$V - A + F = 2 \rightarrow V - 19 + 11 = 2 \rightarrow V = 10 \quad (6.2)$$

Problema 2: Quantos vértices possui um poliedro com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais todas regulares?

Solução: Temos:

$$2A = 12F_5 + 20f_6 \rightarrow 2A = 12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 \rightarrow A = 60 \quad (6.3)$$

Do teorema de Euler temos:

$$V - A + F = 2 \rightarrow V - 90 + 32 = 2 \rightarrow V = 60 \quad (6.4)$$

Problema 3:

Um poliedro platônico, cujas faces são triangulares, tem 30 arestas. Determine o número de arestas que concorrem em cada vértice.

Solução:

Temos:

$$\begin{cases} A = 30 \\ F = F_3 \end{cases}$$

$$2A = 3F_3 \rightarrow 60 = 3F_3 \rightarrow F_3 = 20 \rightarrow F = 20 \quad (6.5)$$

Do teorema de Euler temos:

$$V - A + F = 2 \rightarrow V - 30 + 20 = 2 \rightarrow V = 12 \quad (6.6)$$

Problema 4:

Um poliedro convexo de 25 arestas tem faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces quadrangulares é o dobro do número de faces pentagonais e o número de faces triangulares excede o número de faces quadrangulares em 4 unidades. Pode-se afirmar que o número de vértice desse poliedro é?

Solução:

Temos:

$$\begin{cases} A = 25 \\ F_4 = 2F_5 \\ F_3 = F_4 + 4 \end{cases}$$

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \rightarrow 50 = 3(2F_5 + 4) + 4(2F_5) + 5F_5 \rightarrow F_5 = 2 \quad (6.7)$$

logo se $F_5 = 2$ temos que:

$$\begin{cases} F_3 = 8 \\ F_4 = 4 \end{cases}$$

como $F = F_3 + F_4 + F_5 \rightarrow V - 25 + 14 = 2 \rightarrow V = 13$.**Problema 5:**

Os átomos de uma molécula de determinada substância química se dispõem sobre os vértices de um poliedro convexo, cuja soma dos ângulos de todas as faces vale $2,088 \cdot 10^4$ graus. Sabendo que o poliedro tem 90 arestas, o menor natural que se deve somar ao número de faces para obter um quadrado perfeito é?

Solução:

Temos:

$$s_i = 2088 \rightarrow 360^\circ = (v - 2) \rightarrow V = 60 \quad (6.8)$$

como:

$$\begin{cases} A = 90 \\ V = 60 \end{cases}$$

Do teorema de Euler

$$V - A + F = 2 \rightarrow 60 - 90 + F = 2 \rightarrow F = 32. \quad (6.9)$$

Logo o menor número natural é 4, pois 36 é quadrado perfeito.

Problema 6: Verifique se existe um poliedro convexo com 14 faces, 26 arestas e 14 vértices.

Solução: Temos:

$$A \geq 6 \text{ pois } 26 \geq 6 \quad (6.10)$$

$$V + F - A = 2 \text{ pois } 14 + 14 - 26 = 2 \quad (6.11)$$

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \text{ pois } 32 \leq 42 \leq 52 \quad (6.12)$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A \text{ pois } 32 \leq 42 \leq 52 \quad (6.13)$$

Portanto o poliedro existe.

Problema 7:

Verifique se existe um poliedro convexo com 6 faces, 16 arestas e 12 vértices.

Solução:

Temos:

$$A \geq 6 \text{ pois } 16 \geq 6 \quad (6.14)$$

$$V + F - A = 2 \text{ pois } 12 + 6 - 16 = 2 \quad (6.15)$$

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \text{ pois } 22 \leq 18 \leq 32 \quad (6.16)$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A \text{ pois } 22 \leq 36 \leq 32 \quad (6.17)$$

Portanto o poliedro não existe.

Problema 8:

Verifique se o poliedro abaixo é euliano

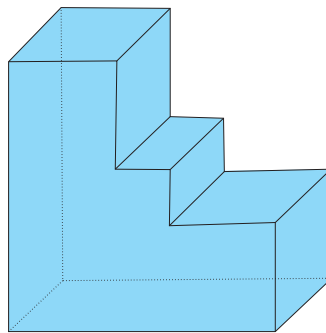


Figura 6.1: Poliedro euliano.

Solução:

$$V + F - A = 2 \text{ pois } 16 + 10 - 24 = 2 \quad (6.18)$$

Portanto é um poliedro euliano.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

O estudo aqui feito teve como objetivo comprovar a importância de realizar estudo para aprimorar o conhecimento de professores da educação básica brasileira, o PROFMAT não só melhorou meus conhecimentos matemáticos, mas trouxe oportunidades ímpares como, por exemplo, fazer este TCC sobre poliedros, grafos e o teorema de Euler. Antes desse trabalho eu sequer sabia da existência de grafos nem o que era nem para que servia, devido a má formação principalmente da educação básica a qual hoje sou professor e tenho com foco melhorar as condições de meus alunos para tanto preciso cada vez mais aprofundar meus conhecimentos. Podemos observar que o estudo sobre poliedros ultrapassa o que foi feito aqui mais para a educação básica brasileira serve de referência inicial para o estudante interessado em conhecer os temas aqui expostos. Precisamos de motivação e curiosidade para buscarmos aprendizagem. Poliedro pode ser definido de vários modos, aqui nós restringimos a definição para facilitar o estudo, mas ficar o desafio de realizar um estudo completo em outra oportunidade. Nosso interesse em estudarmos o poliedro era demonstrar a relação de Euler verificando se:

- A relação de Euler é válida para todos os poliedros?

Há grupos de poliedros que sim e outros que não, mas tudo depende de como definimos os poliedros. Usando a nossa definição verificamos que para poliedros convexos sempre é válido, como todo poliedro regular é convexo então é válido para poliedros regulares que são conhecidos como poliedros de Platão e só existem cinco: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Para prismas e pirâmides é válido, pois são poliedros convexos, mas existem poliedros não convexos que também é válido. Analisamos quais eram as condições necessárias para que o teorema fosse verdadeiro. Essa relação serve para caracterizar os poliedros se a relação for válida então dizemos que se trata de um poliedro euliano.

- Sempre existe um poliedro onde a relação de Euler é válida?

Chegamos à conclusão que não existem situações onde os valores referentes a V vértice, A arestas e F faces são verificados no teorema de Euler mas o poliedro simplesmente não existe. Usamos o exemplo $V = 7$, $A = 9$ e $F = 4$ que satisfazem a relação de Euler $V - A + F = 2$, mas não são números de nenhum poliedro, uma vez que com 4 faces só existe o tetraedro, que tem 4 vértices e 6 arestas. Fizemos uma análise do porque isso ocorre e quais condições eram necessárias para existir o poliedro. O professor da educação básica se não atento poderia passar despercebido dessa situação posta aqui para análise. Demonstramos que a condição necessária era:

$$A \geq 6 \quad (7.1)$$

$$V - A + F = 2 \quad (7.2)$$

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A \quad (7.3)$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2A \quad (7.4)$$

- O que é grafo?

Um aluno do ensino médio compreenderia a introdução dessa teoria e poderia usar esse conhecimento tanto em análise combinatória como raciocínio lógico e como fizemos para realizar uma demonstração da relação de Euler a riqueza de assunto impressiona o leitor principalmente nas aplicações na quantidade de questões que pode se resolver utilizando esse assunto além que é surpreendente como encaixa com a teoria dos poliedros não fizemos aqui, mas há uma demonstração dos poliedros de Platão utilizado apenas grafos, ou seja, um assunto que muitos educadores no Brasil não conhecer digo isso por que eu não conhecia e perguntando há vários colegas por que eu não conhecia e perguntando há vários colegas educadores eles não conhecem, foi bastante motivador realiza esse estudo de algum para mim novo. Na seção aplicações temos vários exemplos de utilização dos grafos.

- O teorema de Euler para poliedros

Fascinante o teorema pelas suas aplicações e dificuldades que causou durante todos esses anos até que alguém percebe-se onde estava o mistério que envolvia essa relação. Vale a pena estudar outras demonstrações inclusive as que contem erros para uma melhor compreensão, vale ressaltar que faz pouquíssimo tempo que apareceu uma demonstração completa correta desse teorema. Precisamos rever os métodos usados por nossos educadores nas minhas lembranças o professor simplesmente faz você memorizar a ?FORMULA?. No livro 4 da coleção TEMAS e METAS o autor na página 141 diz: Você pode memorizá-la escrevendo duas quantidades de cada lado, em ordem alfabética.

$$A + 2 = F + V \quad (7.5)$$

No livro 10 da coleção MATEMÁTICA ELEMENTAR, o autor faz a demonstração do teorema de Euler e da existência dos cinco poliedros regulares os poliedros de Platão, mas eu na época por falta de uma metodologia adequada não estava preparado para compreendê-la e hoje fazemos o mesmo com os jovens alunos que isso motive uma reflexão de que é preciso mudar o estudo de matemática no país e o PROFMAT é apenas o primeiro passo onde os professores não são preparados adequadamente para lecionar a disciplina mais apaixonante de todos os tempos.

Referências Bibliográficas

- [1] João Lucas Marques Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*, ISBN: 85-85818-02-6, 2000.
- [2] Nayara Longo Sartor, “ *O Universo dos Poliedros Regulares*”, Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Federal de Mato Grosso 2013.
- [3] Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, *A matemática do Ensino Médio*, ISBN: 85-85818-11-5, 6ª Edição, 2006.
- [4] Hamilton Soares Pereira, “ *Poliedros Platônicos*”, Monografia apresenta à Universidade Federal de Minas, 2011.
- [5] Genilson Valdez de Araújo , “ *A Utilização da Realidade Aumentada no Ensino dos Poliedros Convexos Regulares* ”, Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2013.
- [6] Elon Lages Lima, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, ISBN 978-85-85818-09-8, 6ª Edição, 2011.
- [7] Jorge Alcício Mascarenhas, “ *Uma Análise do Ensino de Geometria no Ensino Médio Através do Teorema de Euler para poliedros convexos*”, Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Federal da Bahia, 2013.
- [8] Flávia Renata Mialich, “ *Poliedros e Teorema de Euler*”, Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Estadual Paulista, 2013.
- [9] Eduardo Wagner, $V - A + F = 2$. *Existe o Poliedro?*, Revista do Professor de Matemática **47**, 2001. [3.8](#)
- [10] Elon Lages Lima, *Matemática e Ensino*, ISBN: 978-85-85818-15-9, 2002.
- [11] Aref Antar Neto, José Luiz Pereira Sampaio, Nilton Lapa e Sidney Luiz Carvallante, *Noções de Matemática*, volume 5, 2010.
- [12] L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi, *Matemática Discreta*, ISBN: 85-85818-28-X, 2003.
- [13] Polyanna Possani da Costa, *Teoria de Grafos e suas Aplicações*, Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Estadual Paulista, 2011.