UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO EDSON GAMA COUTINHO

MÓDULO DE CONTINUIDADE UNIVERSAL PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES

FORTALEZA
2013

FRANCISCO EDSON GAMA COUTINHO

MÓDULO DE CONTINUIDADE UNIVERSAL PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C896m Coutinho, Francisco Edson Gama
Módulo de continuidade universal para soluções de equações elípticas totalmente não lineares / Francisco Edson Gama Coutinho. – 2013.
73 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Análise Matemática
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Análise matemática. 2. Soluções de viscosidade. I. Título.

CDD 515

A Deus.

Aos meus pais Edilson e Iracilda, e a minha companheira Alsilene.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela a vida que me foi concedida, pela oportunidade que ele me deu em meio à tantas pessoas. Enfim, obrigado Deus por tudo que você fez e ainda fará por mim.

Aos meus pais Francisco Edilson Gama Coutinho e Maria Iracilda Reinaldo Gama pela educação que eles me passaram e pelo apoio que me deram ao longo de toda a minha vida, mesmo nos momentos de dificuldades. E também agradecer a todos os meus familiares que torceram por mim.

A minha companheira Alsilene de Castro Silva pela força e compreensão e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, me incentivando nas horas difícieis.

Ao meu grande professor do IFCE, Francisco Régis Vieira Alves, por acreditar em mim, ajudando muito na minha graduação e colaborando muito no meu ingresso no mestrado, pois, sem dúvida nenhuma, o caminho até o mestrado seria praticamente impossível sem o seu apoio.

Ao meu orientador de mestrado, Gleydson Chaves Ricarte, pela compreensão, paciência, dedicação e pela sua grande ajuda na Dissertação.

À grande pessoa que é o João Vítor da Silva, pela sua disposição e enorme contribuição no trabalho.

Ao Luiz Antônio Caetano Monte por participar da banca examinadora.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFC que participaram diretamente da minha formação, a quem eu destaco, pela sua grande simplicidade, o professor José Fábio Bezerra Montenegro.

Ao professor e amigo, Egnaldo Holanda Vale.

Aos meus colegas de mestrado pela convivência e amizade durante todo o curso, aos quais não citarei nomes, para não ser injusto ao esquecer alguém.

A Secretária da Pós-Graduação, Andrea Costa Dantas, pela competência e simplicidade.

À CAPES pelo apoio financeiro em todo o curso.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.” (René Descartes)

RESUMO

Neste trabalho fornecemos módulo de continuidade universal para soluções, no sentido da viscosidade, de equações elípticas totalmente não lineares da forma

$$F(X, D^2u) = f(X),$$

considerando propriedades de integrabilidade da função f em diferentes situações. Estabelecemos estimativa interior na norma $C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}$ de u baseada na norma $L^{n-\epsilon}$ da função f, onde $\epsilon = \epsilon(n, \lambda, \Lambda)$ é constante universal Escauriaza, e o expoente $\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}$ é ótimo. Quando a função f pertence a L^q, para $q \in (n-\epsilon, n)$, obtemos um melhoramento no expoente de Hölder continuidade. Estabelecemos também uma estimativa Log-Lipschitz em u baseada numa condição da norma L^n da função f, a qual corresponde a regularidade ótima. Regularidade ótima $C^{1,\alpha}$ é obtida quando $f \in L^q$, para $q > n$. Mostramos ainda que $u \in C^{1,\mathrm{Log-Lip}}$ quando f tem oscilação média limitada. Mais uma vez tal estimativa é ótima.

Palavras-chave: Regularidade. Estimativa ótima. Equações elípticas totalmente não lineares.

ABSTRACT

In this work we provides continuity moduli universal for viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations of the form

$$F(X, D^2u) = f(X),$$

based on integrability properties of f in different scenarios. We establish interior a $priori$ estimates on the $C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}$ norm of de u based on the $L^{n-\epsilon}$ norm of f, where $\epsilon = \epsilon(n, \lambda, \Lambda)$ is the Escauriaza universal constant, and the exponent $\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}$ is optimal. When the function f lies in L^q, $n - \epsilon < q < n$, we also obtain an improvement in the exponent of Hölder continuity. We also establish an estimate Log-Lipschitz on u based on the L^n norm of f, which corresponds to optimal regularity. Optimal $C^{1,\alpha}$ regularity estimates are delivered when $f \in L^q$, $q > n$. We also show that $u \in C^{1,\mathrm{Log-Lip}}$, provided f has bounded mean oscilation. Once more, such an estimate is optimal.

Keywords: Regularity. Estimate optimal. Fully nonlinear elliptic equations.

NOTAÇÕES

Em todo trabalho n denotará a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$,

- E denotará um espaço vetorial.
- $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$ é a bola aberta do $\mathbb{R}^n$ centrada em x_0 e raio r. $B_1 = B_1(0)$.
- $Q_r(x_0) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_0^i - \frac{r}{2}, x_0^i + \frac{r}{2}\right)$ é o cubo aberto do $\mathbb{R}^n$ centrado em x_0 e lado r. $Q_1 = Q_1(0)$.
- $\Omega_h := \{x \in \Omega;\ d(x, \partial\Omega) > h\}$
- $\mathrm{osc}_\Omega u := \sup_\Omega u - \inf_\Omega u$.
- Escrevemos $f = o(g)$ quando $x \to x_0$ para significar que $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.
- $⨍_{B_r(x_0)} u(x)dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx$.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ e $D^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ denotam o gradiente e a Hessiana de u, respectivamente.
- $D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é um vetor com cada componente $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $S(n)$ denota o espaço das matrizes simétricas $n \times n$.
- I_n denota a matriz identidade $n \times n$.
- $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn})\|$, onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ e $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :\ u$ é mensurável a Lebesgue, $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, onde
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :\ u$ é mensurável a Lebesgue, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$, onde
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|.$$

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Conteúdo

1.1 Teoria de Regularidade

Em 1979 Krylov e Safanov [9, 10] provaram a desigualdade de Harnack para equações elípticas de segunda ordem na forma não divergente com coeficientes mensuráveis. Isso abriu o caminho para o desenvolvimento de uma teoria de regularidade para equações totalmente não lineares. Crandall-Lions [17] e Evans [18,19] desenvolveram o conceito de solução fraca para equações lineares e não lineares, o chamado método de viscosidade, e essa noção de solução fraca é a correta para se trabalhar com equações não lineares. Em [4] é provado que soluções da equação

$$F(D^2h) = 0 \tag{1.1}$$

são $C^{1,\alpha}$. Com a hipótese adicional de F ser côncavo ou convexo [4] também mostra que soluções de (1.1) são $C^{2,\alpha}$. Sem essa hipótese adicional em F Nadirashvili e Vladut [13] mostraram que regularidade $C^{1,\alpha}$ é a melhor possível.

O principal objetivo desse trabalho é obter o melhor módulo de continuidade disponível para soluções de equações não homogêneas e de coeficientes variáveis da forma

$$F(X, D^2u) = f(X), \tag{1.2}$$

onde $F : B_1 \times S(n) \to \mathbb{R}$, sobre condições apropriadas nos coeficientes do operador F e propriedades de integrabilidade da função f. Vale apena relembrar a noção de módulo de continuidade de uma função $u : B_1 \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é um módulo de continuidade da função u se ρ é uma função contínua em 0, não-decrescente, com $\lim_{\delta \to 0} \rho(\delta) = 0$, tal que

$$|u(X) - u(Y)| \leq \rho(|X - Y|) \quad \forall X, Y \in B_1.$$

Seguindo a terminologia clássica, qualquer operador satisfazendo a condição de elipticidade (veja Definição 2.2.3) será chamado (λ, Λ)-elíptico. Nós iremos supor, em todo o trabalho, que o operador F é (λ, Λ)-elíptico. Também qualquer constante dependendo apenas da dimensão e parâmetros de elipticidade λ e Λ serão chamadas universais. Com propósito de normalização, assumimos em todo esse texto que $F(X, 0) = 0$, $\forall X \in B_1$ (veja a Observação 3.1).

L. Caffarelli, em [3], obtem estimativa $W^{2,p}$ para soluções de (1.2) quando a função f pertence ao espaço L^p para p maior que a dimensão n. Em [3] também é mostrado que para $p < n$, existe um operador uniformemente elíptico satisfazendo as hipóteses do Teorema de Caffarelli para o qual estimativa $W^{2,p}$ falha. Porém, Luiz Escauriaza, em [6], extende o Teorema de Caffarelli obtendo estimativa $W^{2,p}$ para soluções de (1.2) no caso em que a função f pertence ao espaço L^p, para $p > n - \epsilon$.

A idéia para se obter o módulo de continuidade para soluções de (1.2) é usar um método de compacidade, o qual consiste, essencialmente, em aproximar uma solução de (1.2) por uma solução de (1.1) com o objetivo de "herdar" a regularidade que essas equações homogêneas possuem. Para conseguirmos essa aproximação, nós usamos fortemente uma consequência da desigualdade de Harnack. Essa consequência afirma que soluções de (1.2) são C^α, para algum α dependendo apenas das constantes de elipticidade do operador F (veja Proposição 2.3.1). [6] prova a seguinte desigualdade de Harnack:

$$\sup_{B_{r/2}} \leq C \left\{ \inf_{B_{r/2}} u + r^{2-n/q} \|f\|_{L^q(B_r)} \right\},$$

para $q = n - \epsilon$, onde $\epsilon = \epsilon(n, \lambda, \Lambda)$ é chamada de constante Escauriaza. Essa é a razão de começarmos o nosso trabalho considerando a função f a partir do espaço $L^{n-\epsilon}$.

No capítulo 3 mostraremos que soluções de (1.2) são localmente $C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}$ quando $f \in L^{n-\epsilon}$ e tal estimativa é ótima, e para se conseguir esta regularidade nós aproximamos essas soluções por polinômios de grau zero. Para o caso quando $f \in L^n$, mostraremos, no capítulo 4, que soluções de (1.2) têm módulo de continuidade Log-Lipschitz, ou seja,

$$|u(X) - u(Y)| \lesssim -\log(|X - Y|) \cdot |X - Y|.$$

Segue da teoria desenvolvida em [3] que soluções de (1.2) quando $f \in L^q$, com $q > n$, são $a\ priori$ $C^{1,\mu}_{\text{loc}}$, para algum μ e, no capítulo 5, mostramos explicitamente o expoente α ótimo. Em ambos os capítulos 4 e 5, para se conseguir as regularidades desejadas, nós aproximamos as soluções de (1.2) por polinômios de grau 1. Finalmente, no capítulo 6 consideramos o caso em que $f \in BMO$ e mostramos que para equações com estimativa $C^{2,\epsilon}$ $a\ priori$, de funções F-harmônicas (ou seja, $F(D^2u) = 0$), soluções da equação de coeficientes constantes $F(D^2u) = f(X)$ são $C^{1,\text{Log}-\text{Lip}}$ no sentido de que

$$|u(X) - [u(Y) + \nabla u(Y) \cdot X]| \lesssim r^2 \log r^{-1}, \quad r = |X - Y|,$$

onde para se conseguir esta estimativa, nós aproximamos as soluções de $F(D^2u) = f$ por polinômios de grau 2.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Conteúdo

Neste capítulo, faremos uma breve descrição dos resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

2.1 Espaços de Hölder

A continuidade de Hölder é uma medida quantitativa de continuidade que é especialmente apropriada para o estudo de equações diferenciais parciais. Isso sugere uma ampliação dos espaços $C^k(\Omega)$, onde

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\gamma u \text{ é contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Como Ω é aberto, funções em $C^k(\Omega)$ (e suas derivadas) não precisam ser limitadas em Ω, por isso não podemos adotar a norma do sup para transformar $C^k(\Omega)$ em um espaço normado. Mas sabendo que funções limitadas e uniformente contínuas em Ω possuem uma única extensão contínua para $\bar{\Omega}$ podemos considerar o espaço

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \text{ é uniformemente contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}$$

com a norma $\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Definição 2.1.1. *Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser α-Hölder contínua em um ponto X_0, com $0 < \alpha < 1$, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u(X) - u(X_0)| \leq C|X - X_0|, \quad \textit{para todo} \quad X \in \Omega \quad \textit{diferente de} \quad X_0.$$

Quando $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é α-Hölder contínua em todo Ω, e escrevemos $u \in C^{\alpha}(\Omega)$, temos que

$$|u(X) - u(Y)| \leq C|X - Y|, \quad \text{para todo} \quad X \neq Y \in \Omega.$$

Definição 2.1.2. *Os espaços de Hölder* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *são subespaços de* $C^{k}(\Omega)$ *consistindo de funções cujas derivadas parciais até a ordem* k *são todas* α*-Hölder contínuas em* Ω*, ou seja,*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{k}(\Omega) : \, D^{\gamma}u \in C^{\alpha} \, \textit{para todo} \, |\gamma| \leq k\}.$$

Definimos também

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{k}(\bar{\Omega}) : \, D^{\gamma}u \in C^{\alpha}(\Omega) \, \text{para todo} \, |\gamma| \leq k\}$$

e consideramos a norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^{k}(\bar{\Omega})} + \max_{|\gamma| \leq k} [D^{\gamma}u]_{C^{\alpha}(\Omega)},$$

onde

$$[D^{\gamma}u]_{C^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{X,Y \in \Omega \\ X \neq Y}} \frac{|D^{\gamma}u(X) - D^{\gamma}u(Y)|}{|X - Y|^{\alpha}}.$$

Observação 2.1. *Um subconjunto* $A \subset C^{0}(\Omega)$ *do espaço* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *é um conjunto equicontínuo. Relembre que um conjunto de funções* $A \subset C^{0}(\Omega)$ *é dito ser equicontínuo se, dado* $\epsilon > 0$ *existir um* $\delta > 0$ *tal que, se* $x, y \in \Omega$ *e* $|y - x| < \delta$ *então* $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$ *para toda* $f \in A$.

O seguinte teorema será utilizado na demonstração do Lema 3.1.

Teorema 2.1.1 (Arzelá-Ascoli). *Seja* $\{f_n : \mathcal{K} \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções definida em um compacto* $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$*. Assuma que exista uma constante* M *tal que* $|f_n(x)| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e para todo* $x \in \mathcal{K}$*. Além disso, assuma que a sequência* $\{f_n : \mathcal{K} \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é equicontínua em todo ponto de* $\mathcal{K}$*. Então existe uma subsequência que converge uniformemente em* $\mathcal{K}$*.*

Proposição 2.1.1. *Se* $u : B_r \to \mathbb{R}$ *é* $C^{1,\alpha}$ *na origem, então existe um polinômio* ℓ *de grau* 1 *tal que*

$$|u(X) - \ell(X)| \leq C|X|^{1+\alpha}, \, \textit{para alguma constante} \, C > 0.$$

Demonstração. Sendo u de classe $C^{1,\alpha}$ na origem temos, por definição, que existem as funções $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} : B_r \to \mathbb{R}$ e $u, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ são C^{α} na origem, ou seja,

$$|u(X) - u(0)| \leq C|X|^{\alpha} \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(X) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(0)\right| \leq C|X|^{\alpha} \quad \text{para todo} \quad X \in B_r.$$

Por outro lado, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange nos permite escrever

$$u(X) = u(0) + \nabla u(\theta X) \cdot X, \quad \text{para todo} \quad X \in B_r,$$

e para algum $\theta \in (0,1)$. Agora, definindo $\ell(X) := u(0) + \nabla u(0) \cdot X$ temos que

$$\begin{aligned} |u(X) - \ell(X)| &= |(\nabla u(\theta X) - \nabla u(0)) \cdot X| \\ &\leq \|\nabla u(\theta X) - \nabla u(0)\| \cdot \|X\| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta X) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(0) \right| \right\} \|X\| \\ &\leq C\|\theta X\|^{\alpha} \|X\| \\ &\leq C\|X\|^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

onde estamos considerando a norma do máximo. Lembre-se que em um espaço de dimensão finita, qualquer duas normas são equivalentes. □

Proposição 2.1.2. *Se $u : B_r \to \mathbb{R}$ é de classe $C^{2,\alpha}$ na origem, então existe um polinômio $\wp$ de grau 2 tal que*

$$|u(X) - \wp(X)| \leq C|X|^{2+\alpha}, \quad \textit{para todo} \quad X \in B_r.$$

Demonstração. Temos por definição que $D^{\gamma}u$ é C^{α} na origem para todo $|\gamma| \leq 2$. Assim, temos que

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right| \leq C\|X\|^{\alpha}, \quad \text{para todo} \quad i,j = 1,...,n \quad \text{e} \quad \forall X \in B_r.$$

Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos

$$u(X) = u(0) + \nabla u(0) \cdot X + \frac{1}{2} X^t D^2 u(\theta X) X, \quad \text{para todo} \quad X \in B_r,$$

e para algum $\theta \in (0,1)$. Então, definindo $\wp(X) := u(0) + \nabla u(0) \cdot X + \frac{1}{2} X^t D^2 u(0) X$ obtemos

$$\begin{aligned} |u(X) - \wp(X)| &= \left| \frac{1}{2} X^t (D^2(\theta X) - D^2 u(0)) X \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|X\|^2 \|D^2 u(\theta X) - D^2 u(0)\| \\ &= \frac{1}{2} \|X\|^2 \max_{1 \leq i,j \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\theta X) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right| \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \|X\|^2 \cdot C\|\theta X\|^{\alpha} \\ &\leq C_0 \|X\|^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

□

2.2 Soluções no sentido da viscosidade

Nesta seção definimos o conceito de solução no sentido da viscosidade para a equação elíptica de segunda ordem totalmente não linear

$$F(X, D^2 u(X)) = f(X), \tag{2.1}$$

onde $X \in \Omega$ e u e f são funções definidas no domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Antes, relembramos algumas definições básicas.

Definição 2.2.1. *Dizemos que um operador linear* $A : E \to E$ *é não negativo, e escrevemos* $A \geq 0$, *quando* A *for auto-adjunto e, além disso,* $\langle Av, v\rangle \geq 0$ *para todo* $v \in E$.

Definição 2.2.2. *Dizemos que uma matriz* P *quadrada* $n \times n$ *é não negativa, e escrevemos* $P \geq 0$, *quando o operador* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dado por* $A(X) = PX$ *é não negativo.*

Definição 2.2.3. *Dizemos que o operador em (2.1) é uniformemente elíptico se existirem constantes positivas* $0 < \lambda \leq \Lambda$ *(chamadas de constantes de elipticidade) tais que, para quaisquer* $M \in S(n)$ *e* $X \in \Omega$ *tivermos*

$$\lambda\|P\| \leq F(X, M + P) - F(X, M) \leq \Lambda\|P\|, \quad \forall P \geq 0. \tag{2.2}$$

Observação 2.2. *A definição 2.2.3 nos diz que o operador* F *é monótono crescente e Lipschitz em* $M \in S(n)$.
De fato, sejam $M, N \in S(n)$ *tais que* $M \leq N$ *(isso significa que a matriz* $N - M$ *é positiva). A definição 2.2.3 nos permite escrever*

$$\lambda\|N - M\| \leq F(X, M + [N - M]) - F(X, M) \leq \Lambda\|N - M\|.$$

Então,

$$0 < \lambda\|N - M\| \leq F(X, N) - F(X, M) \Rightarrow F(X, M) \leq F(X, N).$$

Isso conclui a monotonicidade de $F(X, M)$ *em* $S(n)$.
Agora, sejam $A, B \in S(n)$. *A elipticidade uniforme do operador* F *nos dá que (veja Observação 3.2)*

$$\begin{aligned} F(X, B) - F(X, A) &= F(X, A + [B - A]) - F(X, A) \\ &\leq \Lambda\|(B - A)^+\| - \lambda\|(B - A)^-\| \\ &\leq \Lambda\|(B - A)^+\| \\ &\leq \Lambda\|B - A\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X, A) - F(X, B) &= F(X, B + [A - B]) - F(X, B) \\ &\leq \Lambda\|(A - B)^+\| - \lambda\|(A - B)^-\| \\ &\leq \Lambda\|(A - B)^+\| \\ &\leq \Lambda\|A - B\| \\ &= \Lambda\|B - A\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(X, B) - F(X, A)| = \max\{F(X, B) - F(X, A), F(X, A) - F(X, B)\} \leq \Lambda\|B - A\|,$$

ou seja, o operador F *é Lipschitz em* $S(n)$.

Definição 2.2.4. *Uma função* u *definida em* Ω *tem um máximo local em* $X_0 \in \Omega$ *quando* $u(X) \leq u(X_0)$ *para qualquer* X *em uma vizinhança de* X_0.

Agora definiremos solução no sentido da viscosidade para a equação (2.1).

Definição 2.2.5. *Uma função contínua* u *em* Ω *é uma subsolução no sentido da viscosidade para a equação* (2.1) *se sempre que* $u - \varphi$ *atingir máximo local em um ponto* $X_0 \in \Omega$, *onde* $\varphi \in C^2(\Omega)$, *tivermos*

$$F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \geq f(X_0).$$

Dizemos que uma função contínua u em Ω é uma supersolução no sentido da viscosidade para a equação (2.1) quando sempre que $u - \varphi$ atingir mínimo local em um ponto $X_0 \in \Omega$, onde $\varphi \in C^2(\Omega)$, tivermos

$$F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq f(X_0).$$

Finalmente, dizemos que u é solução no sentido da viscosidade para a equação (2.1) quando u for subsolução e supersolução no sentido da viscosidade para a equação (2.1).

A motivação para esta definição vem das seguintes observações:

Observação 2.3. *Suponha que* u *é uma supersolução da equação* (2.1) *no sentido clássico, ou seja,*

$$F(X, D^2u(X)) \leq f(X) \quad \textit{pontualmente.}$$

Assuma que $u - \varphi$ *atinge um mínimo local em um ponto* $X_0 \in \Omega$, *para alguma* $\varphi \in C^2(\Omega)$. *Do curso de Cálculo, segue que a matriz simétrica* $D^2(u - \varphi)(X_0)$ *é não negativa, ou seja,*

$$D^2\varphi(X_0) \leq D^2u(X_0).$$

A monotonicidade de F *nos dá que*

$$F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq F(X_0, D^2u(X_0)) \leq f(X_0).$$

Isso nos diz que u *é supersolução da equação* (2.1) *no sentido da viscosidade.*

Observação 2.4. *Reciprocamente, suponha que* $u \in C^2(\Omega)$ *é uma supersolução da equação* (2.1) *no sentido da viscosidade. Dado qualquer ponto* $X_0 \in \Omega$, *defina a função teste* $\varphi(X) = u(X) - \epsilon\|X - X_0\|^2$ (*claramente* φ *é de classe* C^2). *Então,*

$$(u - \varphi)(X_0) = 0 \leq \epsilon\|X - X_0\|^2 = (u - \varphi)(X).$$

Portanto, $u - \varphi$ *atinge mínimo local no ponto* X_0, *e sendo* u *uma supersolução de* (2.1) *no sentido da viscosidade, segue da definição que*

$$F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \leq f(X_0). \tag{2.3}$$

É fácil ver que

$$D^2\varphi(X) = D^2u(X) - 2\epsilon I_n.$$

Segue daí que

$$D^2\varphi(X_0) \to D^2u(X_0), \quad \textit{quando} \quad \epsilon \to 0.$$

Portanto, a continuidade de F *em* $M \in S(n)$ *nos dá que*

$$F(X_0, D^2\varphi(X_0)) \to F(X_0, D^2u(X_0)) \quad \textit{quando} \quad \epsilon \to 0. \tag{2.4}$$

Portanto, a partir de (2.3) *e* (2.4) *conclui-se que*

$$F(X_0, D^2u(X_0)) \leq f(X_0) \quad \textit{pontualmente (classicamente).}$$

2.3 Alguns resultados de regularidade

Iniciamos esta seção com alguns resultados preliminares a respeito do operador $F : \Omega \times S(n) \to \mathbb{R}$. Suponha que F é uma função de classe C^1. Podemos extender a função F ao espaço das matrizes $n \times n$ considerando o operador $\bar{F} := F\left(X, \frac{1}{2}(A + A^t)\right)$. Então podemos considerar F como uma função de $n \times n$ variáveis a_{ij} e X. Assim, faz sentido considerar as derivadas parciais

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(X, A).$$

Sendo F uniformemente elíptico (como na Definição 2.2.3) com constantes de elipticidade λ e Λ temos que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(X, M)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall M \in S(n) \quad \forall X \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Agora, $O(\lambda, \Lambda)$ denotará a classe dos operadores totalmente não linear $F(X, D^2u)$ satisfazendo, para algumas constantes positivas λ e Λ,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(X, M)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad F(X, 0) = 0, \quad \text{para todo } \ M \in S(n), \ \ X \ \text{ e } \ \xi \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Em [6] é provado o seguinte tipo de desigualdade de Harnack para soluções não negativas de (2.1):

$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C\left[\inf_{B_{r/2}} u + r^{2-n/q}\|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_r)}\right] \tag{2.7}$$

O seguinte resultado é uma consequência da desigualdade de Harnack.

Proposição 2.3.1 ([6], Lema 2). *Suponha que* $F \in O(\lambda, \Lambda)$ *e* u *satisfaz* $F(X, D^2u) = f(X)$ *em* B_1. *Então existe* $\alpha \in (0, 1)$ *e* $C > 0$ *dependendo de* Λ/λ *tal que*

$$\|u\|_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}\right\}. \tag{2.8}$$

As seguintes Proposições serão apresentadas sem demonstração. Apenas indicamos a referência onde elas podem ser encontradas. Demonstraremos apenas a Proposição 2.3.6, a qual utilizamos na demonstração do Lema 3.1. Mas antes daremos algumas definições.

Definição 2.3.1. *Dados* $0 < \lambda \leq \Lambda$, *definimos*

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = \mathcal{M}^-(M) = \lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i,$$

$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) = \mathcal{M}^+(M) = \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i,$$

onde e_i *são os autovalores de* $M \in S(n)$.

Definição 2.3.2. *Seja* f *uma função contínua em* Ω *e* $\lambda \leq \Lambda$ *duas constantes positivas. Então definimos*

$$\underline{S}(\lambda, \Lambda, f) := \left\{ u \in C^0(\Omega);\, \mathcal{M}^+(D^2 u, \lambda, \Lambda) \geq f(x) \quad \textit{em} \quad \Omega \quad \textit{no sentido da viscosidade} \right\};$$

$$\overline{S}(\lambda, \Lambda, f) := \left\{ u \in C^0(\Omega);\, \mathcal{M}^-(D^2 u, \lambda, \Lambda) \leq f(x) \quad \textit{em} \quad \Omega \quad \textit{no sentido da viscosidade} \right\}.$$

Definimos também

$$S(\lambda, \Lambda, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, f) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda, f),$$

$$S^*(\lambda, \Lambda, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, -|f|) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda, |f|).$$

Observe que $S(\lambda, \Lambda, f) \subset S^*(\lambda, \Lambda, f)$ e que $S(\lambda, \Lambda, 0) = S^*(\lambda, \Lambda, 0)$. Além disso, denotamos $\underline{S}, \overline{S}, S, S^*(\lambda, \Lambda, 0)$ por $\underline{S}, \overline{S}, S, S^*(\lambda, \Lambda)$.

Proposição 2.3.2. *Suponha que* u *satisfaz* $F(X, D^2 u) \geq f(X)$ $\left[\textit{resp.}\ F(X, D^2 u) \leq f(X)\right]$ *em* Ω *no sentido da viscosidade. Então,*

$$u \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(X) - F(X, 0)\right) \quad \left[\textit{resp.}\ \overline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(X) - F(X, 0)\right)\right].$$

Mais geralmente, para qualquer $\phi \in C^2(\Omega)$ *temos*

$$u - \phi \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(X) - F(X, D^2\phi(X))\right) \quad \left[\textit{resp.}\ u - \phi \in \overline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(X) - F(X, D^2\phi(X))\right)\right]$$

Demonstração. Veja Proposição 2.13 em [4]. □

Proposição 2.3.3. *Seja* $u \in S^*(\lambda, \Lambda, f)$ *em* Q_1. *Então,*

(1) Para uma constante universal $\mu < 1$

$$\mathrm{osc}_{Q_{1/2}} u \leq \mu\, \mathrm{osc}_{Q_1} u + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}.$$

(2) $u \in C^\alpha(\overline{Q}_{1/2})$ *e*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{Q}_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)}),$$

onde $0 < \alpha < 1$ *e* $C > 0$ *são constantes universais.*

Demonstração. Veja Proposição 4.10 em [4]. □

Proposição 2.3.4. *Seja* u *uma solução de* $F(D^2u) = 0$ *em* Ω *no sentido da viscosidade. Seja* $h > 0$ *e* $e \in \mathbb{R}^n$ *com* $|e| = 1$*. Então,*

$$u(X + he) - u(X) \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right) \quad \text{em} \quad \Omega_h.$$

Demonstração. Veja Proposição 5.5 em [4]. □

Proposição 2.3.5. *Seja* $\alpha \in (0, 1)$*,* $\beta \in (0, 1]$ *e* $K > 0$ *constantes. Suponha que* $u \in L^\infty([-1, 1])$ *satisfaz* $\|u\|_{L^\infty([-1,1])} \leq K$*. Defina, para* $h \in \mathbb{R}$ *com* $0 < |h| \leq 1$*,*

$$v_{\beta,h}(X) = \frac{u(X + h) - u(X)}{|h|^\beta}, \quad X \in I_h,$$

onde $I_h = [-1, 1-h]$ *se* $h > 0$ *e* $I_h = [-1-h, 1]$ *se* $h < 0$*. Assuma que* $v_{\beta,h} \in C^\alpha(I_h)$ *e* $\|v_{\beta,h}\|_{C^\alpha(I_h)} \leq K$*, para qualquer* $0 < |h| \leq 1$*. Então temos*
(1) Se $\alpha + \beta < 1$ *então* $u \in C^{\alpha+\beta}([-1, 1])$ *e* $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}([-1,1])} \leq CK$*;*
(2) Se $\alpha + \beta > 1$ *então* $u \in C^{0,1}([-1, 1])$ *e* $\|u\|_{C^{0,1}([-1,1])} \leq CK$*,*
onde a constante C *em (1) e (2) depende apenas de* $\alpha + \beta$*.*

Demonstração. Veja Lema 5.6 em [4]. □

Proposição 2.3.6 ([4], Corolário 5.7)**.** *Seja* u *uma solução de* $F(D^2u) = 0$ *em* B_1 *no sentido da viscosidade. Então* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})$ *e*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|),$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ *e* C *são constantes universais.*

Demonstração. Fixemos $e \in \mathbb{R}^n$ com $|e| = 1$ e $0 < h < 1/8$. Pela Proposição 2.3.4 temos para $0 < \beta \leq 1$ que

$$v_\beta(X) = \frac{1}{h^\beta}(u(X + he) - u(X)) \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right) \quad \text{em} \quad B_{7/8}.$$

Assim, pela Proposição 2.3.3 propriamente escalada temos que $v_\beta \in C^\alpha(\overline{B}_r)$ e

$$\|v_\beta\|_{C^\alpha(\overline{B}_r)} \leq C(r, s)\|v_\beta\|_{L^\infty(B_{(r+s)/2})} \leq C(r, s)\|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{B}_s)}, \tag{2.9}$$

onde $0 < r < s \leq 7/8$, $0 < h < (s - r)/2$, $\alpha \in (0, 1)$ é universal e $C(r, s)$ depende de n, λ, Λ, r e s. Existe um $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{i+1} < \alpha < \frac{1}{i}$, ou seja, $i\alpha < 1$ e $(i + 1)\alpha > 1$. Agora, pela Proposição 2.3.2 temos que $u \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, -F(0)\right)$ em B_1. Assim, pela Proposição 2.3.3 tem-se

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B}_{7/8})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|) = CK,$$

onde $K := \|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|$. Pondo $\beta = \alpha$ e $r = r_1 < s = 7/8$ temos a partir de (2.9) que

$$\|v_\alpha\|_{C^\alpha(\overline{B}_{r_1})} \leq C(r_1)\|u\|_{C^\alpha(\overline{B}_{7/8})} \leq C(r_1)K,$$

onde $0 < h < (7/8 - r_1)/2$ e $C(r_1)$ depende apenas de n, λ, Λ e r_1. Podemos agora aplicar (para qualquer e como acima) a Proposição 2.3.5 (reescalada e com$\beta = \alpha$) no segmento paralelo a e e obter que

$$\|u\|_{C^{2\alpha}(\overline{B}_{r_2})} \leq C(r_1, r_2)K \quad \text{para} \quad r_2 < r_1.$$

Agora aplicamos (2.9) e a Proposição 2.3.5 com $\beta = 2\alpha$ para obtermos $u \in C^{3\alpha}(\overline{B}_{r_4})$. Podemos repetir esse processo já que $i\alpha < 1$ e $(i+1)\alpha > 1$. Finalmente obtemos pela a parte (2) da Proposição 2.3.5 que

$$\|u\|_{C^{0,1}(\overline{B}_{3/4})} \leq CK.$$

Agora, aplicando (2.9) com $\beta = 1$ obtemos

$$\|v_1\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq C\|u\|_{C^{0,1}(\overline{B}_{3/4})} \leq CK, \quad \forall |e| = 1 \quad \forall 0 < h < 1/8.$$

Portanto, como $v_1(X) = \frac{u(X+he)-u(X)}{h}$, concluimos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq CK$. $\square$

Capítulo 3

REGULARIDADE C^{α}

Conteúdo

Neste Capítulo vamos estabelecer um resultado de regularidade ótima para soluções do problema não-homogêneo totalmente não-linear

$$F(X, D^2u) = f \quad \text{in } B_1 \tag{3.1}$$

via método de compacidade. Seguindo as ideais em [3], fixado $X_0 \in B_1$, medimos a oscilação dos coeficientes do operador F em torno de X_0 por

$$\beta(X_0, X) := \sup_{M \in S(n)\setminus\{0\}} \frac{|F(X, M) - F(X_0, M)|}{\|M\|}. \tag{3.2}$$

Para simplificar a notação vamos escrever

$$\beta(0, X) = \beta(X).$$

Nossa estratégia para provarmos estimativas de regularidade C^{α} ótima baseia-se num método de compacidade refinado baseado nas ideais em [3]. Na seção 3.1 iremos abordar este método que será fundamental para o objetivo final que é Hölder Regularidade ótima.

3.1 O Lema de Compacidade

Nesta seção, vamos estabelecer um resultado de compacidade para soluções para equação não-homogênea e totalmente não-linear

$$F(X, D^2u) = f \quad \text{em } B_1.$$

O método de compacidade baseia-se num fino controle de decaimento de oscilação baseado na teoria de regularidade da equação limite associado. Nosso próximo Lema é a chave de acesso para abordar o problema de regularidade ótima. Mas antes de apresentá-lo faremos algumas observações.

Observação 3.1. *Podemos assumir que* $F(X,0)=0$*, pois se não for esse o caso, consideramos o operador* $G(X,M):=F(X,M)-F(X,0)$*. Assim,*

$$G(X,0)=F(X,0)-F(X,0)=0$$

e além disso,

$$G(X,D^2u)=F(X,D^2u)-F(X,0)=f(X)-F(X,0)=:g(X), \quad \textit{no sentido da viscosidade.}$$

Observação 3.2. *Afirmamos que o operador* F *é limitado em subconjuntos compactos de* $S(n)$*. De fato, dada qualquer matriz* $N\in S(n)$ *podemos decompor-lá unicamente como* $N=N^+-N^-$*, onde* $N^+,N^-\geq 0$ *e* $N^+N^-=0$*. Agora utilizando essa decomposição e a elipticidade uniforme do operador* F *obtemos que*

$$\lambda\|N^-\|\leq F(X,[M-N^-]+N^-)-F(X,M-N^-)\leq \Lambda\|N^-\| \Leftrightarrow \lambda\|N^-\|\leq F(X,M)-F(X,M-N^-)\leq \Lambda\|N^-\|$$

$$\lambda\|N^+\|\leq F(X,[M-N^-]+N^+)-F(X,M-N^-)\leq \Lambda\|N^+\| \Leftrightarrow \lambda\|N^+\|\leq F(X,M+N)-F(X,M-N^-)\leq \Lambda\|N^+\|$$

Ou seja

$$\lambda\|N^+\|\leq F(X,M+N)-F(X,M-N^-)\leq \Lambda\|N^+\| \tag{3.3}$$

$$-\Lambda\|N^-\|\leq -F(X,M)+F(X,M-N^-)\leq -\lambda\|N^-\| \tag{3.4}$$

Portanto, somando as expressões (3.3) *e* (3.4) *obtemos*

$$\lambda\|N^+\|-\Lambda\|N^-\|\leq F(X,M+N)-F(X,M)\leq \Lambda\|N^+\|-\lambda\|N^-\| \tag{3.5}$$

para quaisquer matrizes $M,N\in S(n)$*. Assim, fazendo* $M=0$ *em* (3.5) *obtemos*

$$\lambda\|N^+\|-\Lambda\|N^-\|\leq F(X,N)\leq \Lambda\|N^+\|-\lambda\|N^-\|, \quad \forall N\in S(n) \tag{3.6}$$

onde estamos utilizando o fato de $F(X,0)=0$ *(veja a Observação 3.1). Então, a expressão* (3.6) *nos diz que o operador* F *é limitado em subconjunto compacto de* $S(n)$*.*

Lema 3.1 (Lema de Compacidade)**.** *Seja* $u\in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X,D^2u)=f \quad \textit{em } B_1$$

com $|u|\leq 1$ *em* B_1*. Dado* $\delta>0$*, existe constante universal* $\eta=\eta(n,\Lambda,\lambda,\delta)>0$ *tal que, se*

$$⨍_{B_1}\beta(X)^n dX\leq \eta^n \quad e \quad \int_{B_1}|f(X)|^{n-\epsilon}dX\leq \eta^{n-\epsilon} \tag{3.7}$$

então existe uma função contínua $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ *e um operador* (λ, Λ)*-elíptico com coeficientes constantes* $\mathcal{F} : S(n) \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\mathcal{F}(D^2 h) = 0 \quad \textit{em } B_{1/2}, \tag{3.8}$$

no sentido da viscosidade, com

$$\sup_{B_{1/2}} |u - h| \leq \delta. \tag{3.9}$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista um $\delta_0 > 0$ tal que o lema falhe. Assim podemos encontrar uma sequência de funções u_j, com $|u_j| \leq 1$, uma sequência de operadores (λ, Λ)-elíptico $F_j : B_1 \times S(n) \to \mathbb{R}$ e uma sequência de funções f_j tais que

$$F_j(X, D^2 u_j) = f_j \text{ em } B_1, \tag{3.10}$$

no sentido da viscosidade, com

$$⨍_{B_1} \beta_j(X)^n dx + \int_{B_1} |f_j(X)|^{n-\epsilon} dx = o(1), \text{ quando } j \to \infty, \tag{3.11}$$

porém

$$\sup_{B_{1/2}} |u_j - h| \geq \delta_0, \tag{3.12}$$

para qualquer $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ e para qualquer operador (λ, Λ)-elíptico $\mathcal{F} : S(n) \to \mathbb{R}$ de coeficientes constantes satisfazendo (3.8). Em (3.11), β_j é a oscilação média dos coeficientes do operador F_j como em (3.2). Por uma consequência da desigualdade de Harnack, veja [6], Lema 2, cada u_j é $C^{0,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0, 1)$. Portanto, $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções equicontínua. Assim o teorema de Arzela-Ascoli nos diz que a sequência u_j possui uma subsequência uniformemente convergente em subconjunto compacto de B_1. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$u_j \to u_0 \quad \text{localmente uniformemente em subconjunto compacto de } B_1.$$

Também pela elipticidade uniforme, para cada $X \in B_1$ fixado,

$$F_j(X, M) \to F_0(X, M) \quad \text{localmente uniformemente em subconjunto compacto de } S(n).$$

Finalmente, da Observação 3.3 abaixo, concluimos que

$$F_0(0, D^2 u_0) = 0 \quad \text{em } B_{\frac{1}{2}},$$

no sentido da viscosidade. Pondo $h = u_0$ e $\mathcal{F} = F_0$, temos que $u_j \to h$, o que contradiz (3.12). □

Observação 3.3. *Supondo* $u_j \to u_0$ *e* $F_j(X, M) \to F_0(X, M)$, *com* $F_j(X, D^2 u_j) = f_j(X)$ *no sentido da viscosidade, mostraremos que*

$$F_0(0, D^2 u_0) = 0 \quad \textit{em } B_1 \ (\textit{no sentido da viscosidade}).$$

De fato, para mostrar isso, é suficiente mostrar que u_0 *é uma subsolução no sentido da viscosidade (aplique o mesmo para* $-F_0(0, -D^2(-u_0)) = 0$ *para mostrar o caso em que* u *é uma supersolução). Para esse propósito, seja* P *uma parabolóide que toca* u_0 *por cima em uma vizinhança* A *de* $X_0 \in B_1$*. Devemos mostrar que* $F_0(0, D^2P(X_0)) \geq 0$*. Suporemos que*

$$F_0(0, D^2P(X_0)) = -\eta < 0$$

e chegaremos a uma contradição. Seja $\epsilon_j > 0$ *tal que*

$$F_j(0, D^2P) - F_0(0, D^2P) \leq \epsilon_j \quad \forall j, \quad \textit{com} \quad \epsilon_j \to 0 \quad \textit{quando} \quad j \to +\infty.$$

Agora, seja $\psi_j \in C^0(\overline{B_1})$ *uma solução no sentido da viscosidade (a qual é garantida pelo método de Perron) de*

$$\mathcal{M}^+(D^2\psi_j, \lambda^*, 1) = |f_j(X)| - |\beta_{F_j}(X)| - \epsilon_j =: g_j(X) \quad \textit{em} \quad B_1,$$

para algum $\lambda^* < 1$ *a ser escolhido depois. Desde que* $\mathcal{M}^+$ *é convexo (veja [4]) tem-se que* $\psi_j \in C^{2,\gamma}$ *em* B_1*, para algum* $\gamma \in (0,1)$*. Portanto,* $\psi_j \in C^2(B_1)$ *e satisfaz*

$$\frac{1}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) \leq \|(D^2\psi_j)^-\| \quad \textit{em} \quad B_1. \tag{3.13}$$

Agora, observe que

$$\frac{|F_j(X, D^2P) - F_j(0, D^2P)|}{\|D^2P\|} \leq \sup_{M \in S(n)\setminus\{0\}} \frac{|F_j(X, M - F_j(0, M)|}{\|M\|} = \beta_{F_j},$$

logo temos que

$$F_j(X, D^2P) - F_j(0, D^2P) \leq |F_j(X, D^2P) - F_j(0, D^2P)| \leq \|D^2P\|\beta_{F_j}. \tag{3.14}$$

Assim, usando (3.5) *e* (3.14) *temos*

$$
\begin{aligned}
F_j(X, D^2[P+\psi_j]) &\leq F_j(X, D^2P) + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\
&= F_j(X, D^2P) - F_0(0, D^2P) + F_0(0, D^2P) + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\
&\leq F_0(0, D^2P) + \|D^2P\|\beta_{F_j}(X) + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \lambda\|(D^2\psi_j)^-\| \\
&\leq F_0(0, D^2P) + \|D^2P\|\beta_{F_j}(X) + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) \\
&\leq F_0(0, D^2P) + \|D^2P\|\beta_{F_j}(X) + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\left(\|(D^2\psi_j)^+\| + |f_j| + |\beta_{F_j}| + \epsilon_j\right) + \epsilon_j \\
&= F_0(0, D^2P) + \epsilon_j - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j + \|D^2P\|\beta_{F_j}(X) - \frac{\lambda}{n\lambda^*}|\beta_{F_j}| + \Lambda\|(D^2\psi_j)^+\| - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi)^+\| \\
&\quad - \frac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\
&\leq F_0(0, D^2P) + \frac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\epsilon_j + \frac{\lambda}{n\lambda^*}\beta_{F_j}(X) - \frac{\lambda}{n\lambda^*}|\beta_{F_j}| \\
&\quad + \frac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi_j)^+\| - \frac{\lambda}{n\lambda^*}\|(D^2\psi)^+\| - \frac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\
&= F_0(0, D^2P) - \frac{\lambda}{n\lambda^*}|f_j| \\
&\leq F_0(0, D^2P) - |f_j(X)| \\
&= -\eta - |f_j(X)| \\
&\leq -\eta + f_j(X) \\
&< -\frac{\eta}{2} + f_j(X),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
F_j(X, D^2[P+\psi_j] < -\frac{\eta}{2} + f_j(X) \quad \forall j, \tag{3.15}
$$

onde $\lambda^* < 1$ *é escolhido suficientemente pequeno de tal forma que se tenha*

$$
\frac{\lambda}{n\lambda^*} \geq \max\{1, \Lambda, \|D^2P\|\}.
$$

Agora, como P *toca* $u_0 = \lim_{k\to+\infty} u_j$ *por cima em uma vizinhança* A *de* X_0*, segue que* $P + \psi_j + \eta\|X - X_0\|^2/(4\Lambda) + C$ *(para* k *suficientemente grande e para alguma constante* C*) toca* u_j *por cima em* A *em algum ponto* $a \in A$*. Portanto,*

$$
F_j(a, D^2P(a) + D^2\psi_j(a) + \frac{\eta}{2\lambda}I) \geq f_j(a)
$$

e assim

$$
F_j(a, D^2P(a) + D^2\psi_j(a)) \geq -\frac{\eta}{2} + f_j(a). \tag{3.16}
$$

Mas (3.16) *contradiz* (3.15) *aplicado no ponto* a.

3.2 Regularidade C^α ótima

Nesta seção voltaremos nossa atenção para regularidade ótima para soluções de viscosidade para a equação (3.1) quando a função f pertence a $L^{n-\epsilon}$

O resultado principal desta seção é o seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em} \ B_1.$$

Existe uma constante universal $\vartheta_0 > 0$ *tal que, se*

$$\sup_{Y \in B_{1/2}} \|\beta(Y, \cdot)\|_{L^n} \leq \vartheta_0,$$

então, para uma constante universal $C > 0$, *tem-se*

$$\|u\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}\right\},$$

onde ϵ *é a constante universal Escauriaza.*

Agora, enunciaremos e provaremos alguns resultados que serão utilizados na prova do Teorema 3.2.1.

Lema 3.2. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em} \ B_1,$$

com $|u| \leq 1$ *em* B_1. *Dado* $\gamma \in (0,1)$, *existem* $\eta > 0$ *e* $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ *dependendo apenas de n,* Λ, λ *e* γ, *tais que, se*

$$⨍_{B_1} \beta(X)^n dX \leq \eta^n \quad e \quad \int_{B_1} |f(X)|^{n-\epsilon} dX \leq \eta^{n-\epsilon}$$

então, existe uma constante universal limitada $\mu \in \mathbb{R}$ *com* $|\mu| \leq C(n, \Lambda, \lambda)$, *tal que*

$$\sup_{B_\rho} |u - \mu| \leq \rho^\gamma.$$

Demonstração. Para um $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente, o Lema 3.1 garante a existência de uma função $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ e um operador (λ, Λ)-elíptico de coeficientes constantes $\mathcal{F} : S(n) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathcal{F}(D^2h) = 0 \quad \text{em} \ B_{1/2},$$

no sentido da viscosidade, tal que

$$\sup_{B_{1/2}} |u - h| \leq \delta. \tag{3.17}$$

Da teoria de regularidade para soluções no sentido da viscosidade de equações com coeficientes constantes, temos que $h \in C^{1,\alpha}(\bar{B}_{1/4})$ para algum $\alpha \in (0,1)$(veja [4] Corolário 5.7). Pelo Teorema do Valor Médio existe um $\theta \in (0,1)$ tal que

$$h(X) - h(0) = \nabla h(\theta X) \cdot X, \quad \text{para todo} \quad X \in B_{1/4}.$$

Sendo $h \in C^1(\bar{B}_{1/4})$ temos que o gradiente ∇h é limitado em $\bar{B}_{1/4}$, logo existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|h(X) - h(0)| = |\nabla h(\theta X) \cdot X| \le \|\nabla h(\theta X)\| \cdot \|X\| \le C\|X\|, \quad \forall X \in B_{1/4}.$$

Tome agora $\gamma \in (0,1)$ e defina

$$\rho := \left(\frac{1}{2C}\right)^{1/(1-\gamma)} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{1}{2}\rho^{\gamma}. \tag{3.18}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor C de tal forma que

$$\rho := \left(\frac{1}{2C}\right)^{1/(1-\gamma)} < \frac{1}{4}.$$

Então, tem-se que

$$|h(X) - h(0)| \le C\|X\| \le C\rho, \quad para \ \ todo \ \ X \in B_{\rho}.$$

Portanto, obtemos que

$$\sup_{X \in B_{\rho}} |h(X) - h(0)| \le C\rho. \tag{3.19}$$

Defina a constante universalmente limitada $\mu = h(0)$ e para todo $x \in B_{\rho}$, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\rho}} |u - \mu| &\le \sup_{B_{\rho}} |u - h| + \sup_{B_{\rho}} |h - \mu| \\ &\le \delta + C\rho = \frac{1}{2}\rho^{\gamma} + \frac{1}{2}\rho^{\gamma-1} \cdot \rho = \rho^{\gamma}, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Nossa próxima etapa consiste em interagir o Lema 3.2 no escalonamento geométrico adequado.

Lema 3.3. *Nas condições do Lema 3.2, fixado um* $Y \in B_{1/2}$ *existe uma sequência convergente de números reais* $\{\mu_k\}_{k \ge 1}$ *com*

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \le C\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}(Y)} |u - \mu_k| \le \rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}.$$

Demonstração. A prova será feita por indução em $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, o resultado segue como no Lema 3.2, quando $\gamma = \frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}$. Suponha o resultado válido para k e mostraremos para $k+1$. Defina $v_k : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v_k(X) := \frac{u(Y + \rho^k X) - \mu_k}{\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}}$$

e $\quad F_k : B_1 \times S(n) \to \mathbb{R} \quad$ por

$$F_k(X, M) = \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}} M\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_k(X, D^2 v_k) &= \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} F\left(Y+\rho^k X, \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}} D^2 v_k\right) \\ &= \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} F\left(Y+\rho^k X, D^2 u(Y+\rho^k X)\right) \\ &= \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} f(Y+\rho^k X) =: f_k(X), \end{aligned}$$

no sentido da viscosidade. Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\int_{B_1} |f_k(X)|^{n-\epsilon} dX \leq \int_{B_1} |f(X)|^{n-\epsilon} \leq \eta^{n-\epsilon}.$$

Além disso, F_k é (λ, Λ)-elíptico e

$$⨍_{B_1} \beta_k(Y, \cdot)^n dX \leq ⨍_{B_1} \beta(Y, \cdot)^n dX \quad \text{(veja Observação 3.4).}$$

Utilizando a hipótese de indução, segue que

$$|v_k(X)| = \frac{1}{\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}} \cdot |u(Y+\rho^k X) - \mu_k| \leq \frac{1}{\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}} \cdot \rho^{k[\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} = 1.$$

Portanto, v_k satisfaz as hipóteses do Lema 3.2, o qual assegura a existência de uma constante universalmente limitada $\tilde{\mu}$, $|\tilde{\mu}| \leq C$, tal que

$$\sup_{B_\rho} |v_k - \tilde{\mu}| \leq \rho^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}.$$

Substituindo v_k na expressão acima, obtemos que

$$\sup_{B_\rho} \left| \frac{u(Y+\rho^k X) - \mu_k}{\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}} - \tilde{\mu} \right| \leq \rho^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}},$$

ou seja,

$$\sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - (\mu_k + \tilde{\mu}\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}})| \leq \rho^{(k+1)\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}.$$

Observe que dado qualquer $Z \in B_{\rho^{k+1}}(Y)$ podemos escrevê-lo como $Z = Y+\rho^k X$, onde $X = \frac{1}{\rho^k}(Z-Y) \in B_\rho$. Assim

$$\begin{aligned} |u(Z) - \mu_{k+1}| = |u(Y+\rho^k X) - \mu_{k+1}| &\leq \sup_{X \in B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \mu_{k+1}| \\ &\leq \rho^{[k+1][\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}, \end{aligned}$$

onde $\mu_{k+1} := \mu_k + \tilde{\mu}\rho^{k[\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}$. Portanto,

$$\sup_{B_{\rho^{k+1}}(Y)} |u(X) - \mu_{k+1}| \leq \rho^{[k+1][\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}.$$

Vale a pena observar que

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq C\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}.$$

□

Observação 3.4. *É fácil ver que o operador* F_k *é* (λ, Λ)*-elíptico e que*

$$⨍_{B_{1/2}} \beta_k(Y, \cdot)^n dy \leq ⨍_{B_{1/2}} \beta(Y, \cdot)^n dy. \tag{3.20}$$

De fato, vamos mostrar que F_k *é* (λ, Λ)*-elíptico. A prova de* (3.20) *é análoga a prova da observação 4.2. Desde que* F *é* (λ, Λ)*-elíptico temos:*

$$\begin{aligned} F_k(X, M+P) - F_k(X, M) &= \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} F(X, \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}}[M+P]) - \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]} F(X, \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}} M) \\ &= \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}[F(X, \tilde{M}+\tilde{P}) - F(X, \tilde{M})], \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{M} = \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}} M \quad e \quad \tilde{P} = \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}} P.$$

Vale apena observar que $\tilde{M} \in S(n)$ *e que* $\tilde{P} \geq 0$*. Então,*

$$\lambda\|\tilde{P}\| \leq F(X, \tilde{M}+\tilde{P}) - F(X, \tilde{M}) \leq \Lambda\|\tilde{P}\| \tag{3.21}$$

Multiplicando (3.21) *por* $\tau := \rho^{k[2-\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}]}$ *obtemos*

$$\lambda\|P\| \leq F_k(X, M+P) - F_k(X, M) \leq \Lambda\|P\|.$$

Observação 3.5. *A fim de provar o Teorema 3.2.1, é suficiente provar que*

$$\|v\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})} \leq C$$

onde

$$v(X) = \ell u(X) \quad com \quad \ell := \frac{\eta}{\eta\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}}$$

para alguma constante $\eta > 0$ *que depende somente de* n, λ, Λ*.*

De fato, seja u *uma função nas hipóteses do Teorema 3.2.1. Assim, a função escalonada* v *resolve a equação*

$$\tilde{F}(X, D^2v) = \tilde{f}(X) \quad em \quad B_1$$

onde

$$\tilde{F}(X, M) := \ell \cdot F\left(X, \frac{1}{\ell}M\right) \quad e \quad \tilde{f}(X) = \ell \cdot f(X).$$

É fácil ver que o operador $\tilde{F} : B_1 \times S(n) \to \mathbb{R}$ *possui às mesmas constantes de elipticidade de* F *(a* *verificação é análoga a da Observação 3.4). Além disso, obtemos que*

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1, \quad \|\tilde{f}\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)} \leq \eta \quad e \quad ⨍_{B_1} \beta_{\tilde{F}}(X)^n \leq ⨍_{B_1} \beta_F(X)^n,$$

$\beta_{\tilde{F}}$ *e* β_F *denotam, respectivamente, a oscilação média dos coeficientes de* $\tilde{F}$ *e* F *em torno do ponto 0. Portanto, se*

$$\|v\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})} \leq C$$

pelo reescalonamento acima teremos que

$$\|u\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})} \leq C\ell^{-1} \leq \frac{C}{\eta}(\eta\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}) \leq \overline{C}\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}\right\},$$

onde $\overline{C} = \frac{C}{\eta}$ *e* $\eta\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1)}$ *(pois* η *é pequeno).*

Agora, provaremos o resultado principal desse capítulo utilizando os resultados que temos.

Teorema 3.2.2. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad em \ B_1.$$

Existe uma constante universal $\vartheta_0 > 0$ *tal que, se*

$$\sup_{Y \in B_{1/2}} \|\beta(Y, \cdot)\|_{L^n} \leq \vartheta_0,$$

então, para uma constante universal $C > 0$*, tem-se*

$$\|u\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^{n-\epsilon}(B_1)}\right\},$$

onde ϵ *é a constante universal Escauriaza.*

Demonstração. Conforme vimos na Observação 3.5, a função $v(X) = \ell u(X)$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.2 com F substituido por $\tilde{F}$ e f por $\tilde{f}$. Considere $\vartheta_0 = \eta$, onde η é a constante universal do Lema 3.2 quando o γ é tomado para ser $(n-2\epsilon)/(n-\epsilon)$. Assim, Fixado $Y \in B_{1/2}$, pelo Lema 3.3, existem $\rho \in (0, 1/2)$ e uma sequência convergente de números reais $\{\mu_k\}$ satisfazendo:

$$\sup_{B_{\rho^k}(Y)} |v - \mu_k| \leq \rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}, \tag{3.22}$$

com

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq C\rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}. \tag{3.23}$$

Como

$$|v(Y) - \mu_k| \leq \sup_{B_{\rho^k(Y)}} |v - \mu_k| \leq \rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}},$$

segue que, $\mu_k \to v(Y)$. Vamos denotar $\alpha := \frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}$. Assim, tendo em vista (3.23) temos que, para todo

$d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\mu_k - \mu_{k+d}| &\leq |\mu_{k+d} - \mu_{k+d-1}| + |\mu_{k+d-1} - \mu_{k+d-2}| + \ldots + |\mu_{k+2} - \mu_{k+1}| \\ &\leq C\left(\rho^{(k+d-1)\alpha} + \rho^{(k+d-2)\alpha} + \ldots + \rho^{(k+1)\alpha} + \rho^{k\alpha}\right) \\ &\leq C\rho^{k\alpha}\left(\rho^{(d-1)\alpha} + \rho^{(d-2)\alpha} + \ldots + \rho^{\alpha} + 1\right) \\ &\leq C\frac{1}{1-\rho^{\alpha}}\rho^{k\alpha} \end{aligned}$$

isto é, fazendo $d \to \infty$ obtemos que

$$|v(Y) - \mu_k| \leq \frac{C}{1-\rho^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}} \cdot \rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}. \tag{3.24}$$

Finalmente, dado qualquer $0 < r < \rho$, seja k um inteiro positivo tal que $\rho^{k+1} < r \leq \rho^k$. Portanto, segue de (3.22) e (3.24) que

$$\begin{aligned} \sup_{X \in B_r(Y)} |v(X) - v(Y)| &\leq \sup_{X \in B_{\rho^k}(Y)} [|v(X) - \mu_k| + |v(Y) - \mu_k|] \\ &\leq \left(1 + \frac{C}{1-\rho^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}}\right) \cdot \rho^{k\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}} \\ &\leq \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{C}{1-\rho^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}}\right) r^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}. \end{aligned}$$

Isso nos diz que v é $C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}$ no ponto Y. Como $Y \in B_{1/2}$ foi fixado arbitrariamente, podemos concluir que $v \in C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}(B_{1/2})$, logo existe um $C > 0$ tal que $\|v\|_{C^{\frac{n-2\epsilon}{n-\epsilon}}} \leq C$. Conforme vimos na Observação 3.5, a prova do Teorema é concluída. □

Agora, consideremos o caso em que $f \in L^q(B_1)$, onde $q \in [n-\epsilon, n)$. Os resultados são de modo análogo aos anteriores.

Lema 3.4. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em} \quad B_1,$$

com $|u| \leq 1$ *em* B_1. *Dado* $\gamma \in (0,1)$, *existem* $\eta > 0$ *e* $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ *dependendo apenas de* n, Λ, λ *e* γ, *tais que, se*

$$⨍_{B_1} \beta(X)^n dX \leq \eta^n \quad \textit{e} \quad \int_{B_1} |f(X)|^q dX \leq \eta^q$$

então, existe uma constante universal limitada $\mu \in \mathbb{R}$ *com* $|\mu| \leq C(n, \Lambda, \lambda)$, *tal que*

$$\sup_{B_\rho} |u - \mu| \leq \rho^{\gamma}.$$

Demonstração. Análoga a prova do Lema 3.2 □

Teorema 3.2.3. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad em \quad B_1.$$

Existe uma constante universal $\vartheta_0 > 0$ *tal que, se*

$$\sup_{Y \in B_{1/2}} \|\beta(Y, \cdot)\|_{L^n} \leq \vartheta_0,$$

então, para uma constante universal $C > 0$, *tem-se*

$$\|u\|_{C^{\frac{2q-n}{q}}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\},$$

onde ϵ *é a constante universal Escauriaza.*

Demonstração. Inicialmente, defina

$$v(X) := \ell u(X) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(X, M) := \ell F\left(X, \frac{1}{\ell} M\right),$$

onde

$$\ell = \frac{\eta}{\|f\|_{L^q(B_1)} + \eta\|u\|_{L^\infty(B_1)}}$$

e η é a constante universal do Lema 3.4 quando $\gamma = \frac{2q-n}{q}$. Nessas condições temos que

$$\mathcal{F}(X, D^2v) = \ell F\left(X, \frac{1}{\ell} D^2 v\right) = \ell F(X, D^2u) = \ell f(X) =: g(X) \quad \text{em} \quad B_1, \quad \text{no sentido da viscosidade}$$

Além disso, temos também que

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} = \ell\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|g\|_{L^q(B_1)} = \ell\|f\|_{L^q(B_1)} \leq \eta.$$

Agora, fixado $Y \in B_{1/2}$ existe uma sequência de números reais $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}(Y)} |v - \mu_k| \leq \rho^{k\frac{2q-n}{q}}. \tag{3.25}$$

De fato, o caso $k = 1$ segue como no Lema 3.4. Suponha o resultado válido para k e mostraremos o caso $k+1$. Para isso defina

$$v_k(X) := \frac{v(Y + \rho^k X) - \mu_k}{\rho^{k\frac{2q-n}{q}}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_k(X, M) := \rho^{k[2-\frac{2q-n}{q}]}\mathcal{F}\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^{k[2-\frac{2q-n}{q}]}} M\right).$$

É fácil verificar que $\mathcal{F}_k$ é (λ, Λ)-elíptico (a verificação é análoga a Observação 3.4) e

$$\mathcal{F}_k(X, D^2v_k(X)) = \rho^{k[2-\frac{2q-n}{q}]} g(Y + \rho^k X) =: g_k(X), \quad \text{no sentido da viscosidade.}$$

Além disso, o Teorema de Mudança de Variáveis nos dá que

$$\int_{B_1} |g_k(X)|^q dX \leq \int_{B_1} |g(X)|^q \leq \eta^q.$$

Pela a hipótese de indução, segue que $|\nu_k| \leq 1$. Portanto, ν_k satisfaz as hipóteses do Lema 3.4, o qual assegura a existência de uma constante limitada $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \leq C$, tal que

$$\sup_{B_\rho} |\nu_k - \tilde{\mu}| \leq \rho^{\frac{2q-n}{q}}. \tag{3.26}$$

Agora defina

$$\mu_{k+1} := \mu_k + \rho^{k\frac{2q-n}{q}} \tilde{\mu}.$$

Substituindo a expressão de ν_k em (3.26) obtemos o passo de indução $k+1$. Observe que

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| = \rho^{k\frac{2q-n}{q}} |\tilde{\mu}| \leq C\rho^{k\frac{2q-n}{q}} \quad \text{e} \quad \mu_k \to \nu(Y). \tag{3.27}$$

Então utilizando as expressões em (3.27) obtemos

$$|\nu(Y) - \mu_k| \leq \frac{C}{1 - \rho^{\frac{2q-n}{q}}} \cdot \rho^{k\frac{2q-n}{q}}. \tag{3.28}$$

Finalmente, dado $r \in (0, \rho)$, seja m um inteiro positivo tal que $\rho^{m+1} < r \leq \rho^m$. Assim, utilizando as expressões em (3.25) e (3.28) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{X \in B_r(Y)} |\nu(X) - \nu(Y)| &\leq |\nu(Y) - \mu_m| + \sup_{X \in B_{\rho^m}(Y)} |\nu(X) - \mu_m| \\ &\leq \left(1 + \frac{C}{1 - \rho^{\frac{2q-n}{q}}}\right) \rho^{m\frac{2q-n}{q}} \\ &\leq \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{C}{1 - \rho^{\frac{2q-n}{q}}}\right) r^{\frac{2q-n}{q}}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\|\nu\|_{C^{\frac{2q-n}{q}}(B_{1/2})} \leq C$, logo obtemos que

$$\|u\|_{C^{\frac{2q-n}{q}}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\}.$$

$\square$

A seguinte observação mostra que o expoente $(2q-n)/q$ é ótimo (em particular, o expoente $(n - 2\epsilon)/(n-\epsilon)$, do Teorema 3.2.2, é ótimo).

Observação 3.6. *Considere a função* $u(X) = |X|^\alpha$. *É fácil ver que* u *satisfaz a equação* $\triangle u = f(X)$, *onde*

$$f(X) = (n\alpha + \alpha[\alpha - 2])\, |X|^{\alpha-2}.$$

Observe que $|f(X)|^q = C|X|^{(\alpha-2)q}$. *Agora, é conhecido que a função*

$$g_a(X) = \begin{cases} |X|^{-a}, & se \quad |X| \leq 1 \\ 0, & se \quad |X| > 1 \end{cases}$$

é integrável (á Lebesgue) quando $a < n$. *Portanto,* $f \in L^q$ *se a função* $|X|^{(\alpha-2)q} = |X|^{-\{(2-\alpha)q\}}$ *for integrável. Logo, para isso ocorrer, devemos ter*

$$(2-\alpha)q < n \Leftrightarrow \frac{2q-n}{q} < \alpha.$$

Isso nos diz que qualquer expoente α *maior do* $(2q-n)/q$ *deixa a função* f *no espaço* L^q, *porém não se pode atingi-lo, portanto, nesse sentido, dizemos que o expente* $(2q-n)/q$ *é ótimo. Em particular, o expoente* $(n-2\epsilon)/(n-\epsilon)$, *do Teorema 3.2.2, é ótimo (basta tomar* $q = n-\epsilon$*)).*

Observação 3.7. *Podemos também ver a otimalidade do expoente* $(2q-n)/q$ *da seguinte forma:*
No Teorema 3.2.3 definimos $g_k(X) = \rho^{k\left(2-\frac{2q-n}{q}\right)} g(Y+\rho^k X)$. *Ao invés disso, escreva* $g_k(X) = \rho^{2(2-\delta)} g(Y+\rho^k X)$. *Um cálculo simples nos dá que*

$$\int_{B_1} |g_k(X)|^q dX \leq \rho^{kq(2-\delta)-kn} \int_{B_1} |g(X)|^q dX.$$

Observe que queremos deixar g_k *nas hipóteses do Lema 3.4, ou seja,* $\int_{B_1} |g_k(X)|^q dX \leq \eta^q$. *Para isso, basta que*

$$\rho^{kq(2-\delta)-kn} \int_{B_1} |g(X)|^q dX \leq \int_{B_1} |g(X)|^q dX, \tag{3.29}$$

já que $\int_{B_1} |g(X)|^q dX \leq \eta^q$ *(por hipótese). Portanto, para ocorrer* (3.29) *devemos ter* $kq(2-\delta)-kn \geq 0$, *que é satisfeito para todo* $\delta \leq (2q-n)/q$.

Capítulo 4

ESTIMATIVA LOG-LIPSCHITZ

Conteúdo

Neste capítulo nos endereçamos a questão de encontrar o ótimo módulo de continuidade de soluções da equação uniformemente elíptica $F(X, D^2u) = f(X)$ quando a função f pertence ao espaço L^n. Nossa meta é provar que u tem um módulo de continuidade Log-Lipschitz.

4.1 Aproximação por funções lineares

Lema 4.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em } B_1,$$

com $|u| \le 1$ *em* B_1*. Existem constantes* $\eta > 0$ *e* $\rho \in (0, 1/2)$ *dependendo somente de* n, Λ, λ *e* δ*, tais que se*

$$⨍_{B_1} \beta(X)^n dX \le \eta^n \quad \textit{e} \quad \int_{B_1} |f(X)|^n dX \le \eta^n, \tag{4.1}$$

então, podemos achar uma função afim $\ell(X) := a + \langle b, X\rangle$*, com coeficientes universalmente limitados,*

$$|a| + \|b\| \le C(n, \lambda, \Lambda),$$

tal que

$$\sup_{B_\rho} |u(X) - \ell(X)| \le \rho. \tag{4.2}$$

Demonstração. Para um $\delta > 0$ a ser escolhido, aplicamos o Lema 3.1 para encontrarmos um $\eta = \eta(n, \lambda, \Lambda, \delta) > 0$ tal que se

$$⨍_{B_1} \beta(X)^n dX \le \eta^n \quad \text{e} \quad \int_{B_1} |f(X)|^n dX \le \eta^n,$$

então podemos achar uma função $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ e um operador $\mathcal{F} : S(n) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathcal{F}(D^2h) = 0 \quad \text{em} \quad B_{1/2},$$

no sentido da viscosidade, tal que

$$\sup_{B_{1/2}} |u - h| \leq \delta.$$

Da teoria de regularidade disponível para h (veja [4], Corolario 5.7) temos $h \in C^{1,\alpha}(\bar{B}_{1/4})$, para alguma constante universal $\alpha \in (0, 1)$. Em particular, h é $C^{1,\alpha}$ na origem, logo existem uma constante $C > 0$ e um polinômio de grau 1, $\ell(X) = a + \langle b, X\rangle$, tal que

$$|h(X) - \ell(X)| \leq C|X|^{1+\alpha}, \quad \text{para todo} \quad x \in \bar{B}_{1/4},$$

onde $a = h(0)$ e $b = \nabla h(0)$. Agora defina

$$\rho := \left(\frac{1}{2C}\right)^{1/\alpha} \quad \text{e} \quad \delta := \frac{1}{2}\rho.$$

Podemos supor C suficientemente grande de tal forma que $B_\rho \subset B_{1/4}$. Então,

$$|h(X) - \ell(X)| \leq C|X|^{1+\alpha} \leq C\rho^{1+\alpha}, \quad \text{para todo} \quad x \in B_\rho. \tag{4.3}$$

A partir de (4.3) temos que

$$\sup_{X \in B_\rho} |h(X) - \ell(X)| \leq C\rho^{1+\alpha}. \tag{4.4}$$

Observe também que $B_\rho \subset B_{1/4} \subset B_{1/2}$ nos diz que

$$\sup_{X \in B_\rho} |u(X) - h(X)| \leq \sup_{X \in B_{1/2}} |u(X) - h(X)| \leq \delta,$$

daí segue que

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho} |u(X) - \ell(X)| &\leq \sup_{B_\rho} |u(X) - h(X)| + \sup_{B_\rho} |h(X) - \ell(X)| \\ &\leq \delta + C\rho^{1+\alpha} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho^{-\alpha} \cdot \rho^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\sup_{B_\rho} |u(X) - \ell(X)| \leq \rho.$$

□

Lema 4.2. *Nas condições do Lema 4.1, para um* $Y \in B_{1/2}$ *fixado arbitrariamente, existe uma sequência de funções afins*

$$\ell_k(X) := a_k + \langle b_k, X - Y\rangle$$

com coeficientes satisfazendo

$$|a_k| + \|b_{k+1}\| \leq C_k(n, \lambda, \Lambda)$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}(Y)} |u(X) - \ell_k(X)| \leq \rho^k.$$

Demonstração. A prova será feita por indução em k. O passo $k = 1$ segue como no Lema 4.1. Suponha o resultado válido para k e mostraremos para $k+1$. Para isso defina

$$v_k(X) := \frac{(u - \ell_k)(Y + \rho^k X)}{\rho^k} \quad e \quad F_k(X, M) := \rho^k F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^k} M\right).$$

Então, F_k é (λ, Λ)-elíptico e

$$\begin{aligned}
F_k(X, D^2 v_k(X)) &= \rho^k F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^k} D^2 v_k(X)\right) \\
&= \rho^k F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^k} \rho^k D^2 u(Y + \rho^k X)\right) \\
&= \rho^k F(Y + \rho^k X, D^2 u(Y + \rho^k X)) \\
&= \rho^k f(Y + \rho^k X) =: f_k(X),
\end{aligned}$$

no sentido da viscosidade. Pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}
\rho^k |v_k(X)| &= |u(Y + \rho^k X) - \ell_k(Y + \rho^k X)| \\
&\leq \sup_{B_{\rho^k}(Y)} |u(X) - \ell_k(X)| \\
&\leq \rho^k.
\end{aligned}$$

Isso nos diz que,

$$|v_k(X)| \leq 1 \tag{4.5}$$

Portanto v_k satisfaz as hipóteses do Lema 4.1, o qual assegura a existência de uma função afim $\ell(X) = a + \langle b, X \rangle$ tal que

$$\sup_{B_\rho} |v_k - \ell| \leq \rho. \tag{4.6}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^k} \cdot \sup_{B_\rho} |u(Y + \rho^k X) - \ell_k(y + \rho^k X) - \rho^k \ell(X)| &= \sup_{B_\rho} \left| \frac{u(Y + \rho^k X) - \ell_k(Y + \rho^k X)}{\rho^k} - \ell(X) \right| \\
&= \sup_{B_\rho} |v_k(X) - \ell(X)| \\
&\leq \rho,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\sup_{B_\rho} |u(Y + \rho^k X) - \ell_k(Y + \rho^k X) - \rho^k \ell(X)| \leq \rho^{k+1}. \tag{4.7}$$

Agora, definindo

$$a_{k+1} := a_k + \rho^k a \quad e \quad b_{k+1} := b_k + b$$

e usando (4.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_{k+1}(Y+\rho^k X)| &= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_{k+1} - \langle b_{k+1}, [Y+\rho^k X] - Y\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_{k+1} - \langle b_{k+1}, \rho^k X\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - (a_k + \rho^k a) - \rho^k\langle b_k + b, X\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_k - \rho^k a - \rho^k\langle b_k, X\rangle - \rho^k\langle b, X\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_k - \langle b_k, \rho^k X\rangle - \rho^k a - \rho^k\langle b, X\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_k - \langle b_k, [Y+\rho^k X] - Y\rangle - \rho^k a - \rho^k\langle b, X\rangle| \\
&= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_k(Y+\rho^k X) - \rho^k \ell(X)| \\
&\leq \rho^{k+1},
\end{aligned}$$

onde

$$\ell_{k+1}(X) := a_{k+1} + \langle b_{k+1}, X - Y\rangle. \tag{4.8}$$

Pondo $Z = Y + \rho^k X$ tem-se que $z \in B_{\rho^k}(Y)$, logo

$$\sup_{X\in B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_{k+1}(Y+\rho^k X)| \leq \rho^{k+1} \Leftrightarrow \sup_{Z\in B_{\rho^{k+1}}(Y)} |u(Z) - \ell_{k+1}(Z)| \leq \rho^{k+1}.$$

□

Observação 4.1. *Observe que a hipótese de indução nos dá que* $|a_k| + \|b_k\| \leq C_k(n, \lambda, \Lambda)$. *Então,*

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}| + \|b_{k+1}\| &= |a_k + \rho^k a| + \|b_k + b\| \\
&\leq |a_k| + \rho^k |a| + \|b_k\| + \|b\| \\
&\leq |a_k| + \|b_k\| + |a| + \|b\| \\
&\leq C_k + C := C_{k+1},
\end{aligned}$$

onde $|a| + \|b\| \leq C(n, \lambda, \Lambda)$.

Observação 4.2. *Veja que a oscilação média* β_k *dos coeficientes do operador* F_k *satisfaz a desigualdade* *abaixo:*

$$\begin{aligned}\beta_k(Y,\cdot) &= \sup_{M\in S(n)\setminus\{0\}} \frac{|F_k(Y,M)-F_k(\cdot,M)|}{\|M\|}\\ &= \sup_{M\in S(n)\setminus\{0\}} \frac{|\rho^k F(Y,\frac{1}{\rho^k}M)-\rho^k F(\cdot,\frac{1}{\rho^k}M)|}{\|M\|}\\ &= \rho^k\cdot \sup_{M\in S(n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\rho^k}\cdot \frac{|F(Y,\frac{1}{\rho^k}M)-F(\cdot,\frac{1}{\rho^k}M)|}{\|\frac{1}{\rho^k}M\|}\\ &\le \beta(Y,\cdot).\end{aligned}$$

4.2 Modulo de Continuidade Universal Log-Lipschitz

Agora, com a aproximação por funções lineares apresentadas na seção 4.1, estamos prontos para apresentar e provar o teorema principal desse capítulo.

Teorema 4.2.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em } B_1.$$

Existe uma constante $\vartheta_0 > 0$ *tal que, se*

$$\sup_{Y\in B_{1/2}} \|\beta(Y,\cdot)\|_{L^n} \le \vartheta_0$$

então, para uma constante $C > 0$*, tem-se*

$$|u(X)-u(Y)| \le C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^n(B_1)}\right\}\cdot \omega(|X-Y|)$$

para quaisquer $X, Y \in B_{1/2}$*, onde*

$$\omega(t) := -t\log t.$$

Demonstração. Inicialmente observe que, como feito na Observação 3.5, $v(X) = \ell u(X)$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2 com F substituido por $\tilde{F}$ e f substituida por $\tilde{f}$. Agora considere $\vartheta_0 = \eta$, onde η é a constante universal do Lema 4.1. Fixado $Y \in B_{1/2}$, pelo Lema 4.2, existe sequência de funções afins

$$\ell_k(X) := a_k + \langle b_k, X - Y\rangle$$

satisfazendo

$$|a_{k+1} - a_k| \le C\rho^k \quad \text{e} \quad \|\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k\| \le C. \tag{4.9}$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k(Y)}} |v(X) - \ell_k(X)| \le \rho^k. \tag{4.10}$$

Agora, observe que

$$|v(Y) - \ell_k(Y)| \leq \sup_{B_{\rho^k}(y)} |v(X) - \ell_k(X)| \leq \rho^k \quad \text{pois } \; Y \in B_{\rho^k}(Y),$$

e que

$$\ell_k(Y) = a_k.$$

Assim,

$$|v(Y) - a_k| = |v(Y) - \ell_k(Y)| \leq \rho^k.$$

Logo $a_k \to v(Y)$, quando $k \to +\infty$. Ademais, tendo em vista (4.9) temos que, para todo $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|a_{k+d} - a_k| &\leq |a_{k+d} - a_{k+d-1}| + |a_{k+d-1} - a_{k+d-2}| + \ldots + |a_{k+1} - a_k| \\
&\leq C(\rho^{k+d-1} + \rho^{k+d-2} + \ldots + \rho^{k+1} + \rho^k) \\
&\leq C\rho^k(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{d-1}) \\
&\leq \frac{C}{1-\rho} \cdot \rho^k.
\end{aligned}$$

Fazendo agora $d \to \infty$ obtemos que

$$|v(Y) - a_k| \leq \frac{C\rho^k}{1-\rho}. \tag{4.11}$$

A sequêcia de vetores $\{b_k\}_{k\geq 1}$ não necessariamente converge, porém a partir de (4.9) obtemos que

$$\|b_k\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|b_j - b_{j+1}\| \leq Ck. \tag{4.12}$$

Agora, dado qualquer $r \in (0, \rho)$ podemos encontrar um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho^{k_0+1} < r \leq \rho^{k_0} \tag{4.13}$$

(isso é possível visto que $\rho^k \to 0$, quando $k \to \infty$). Isso nos diz que $B_r(Y) \subset B_{\rho^{k_0}}(Y)$. Observe que

$$\begin{aligned}
|v(X) - v(Y)| &= |v(X) - \ell_{k_0}(X) + \ell_{k_0}(X) - v(Y)| \\
&\leq |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |\ell_{k_0}(X) - v(Y)| \\
&= |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |a_{k_0} + \langle b_{k_0}, X - Y\rangle - v(Y)| \\
&\leq |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |a_{k_0} - v(Y)| + |\langle b_{k_0}, X - Y\rangle| \\
&\leq |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |a_{k_0} - v(Y)| + \|b_{k_0}\| \cdot \|X - Y\|.
\end{aligned}$$

(aqui utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle b_{k_0}, X - Y\rangle| \leq \|b_{k_0}\| \cdot \|X - Y\|$). Portanto,

$$\begin{aligned}
|v(X) - v(Y)| &\leq |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |v(Y) - a_{k_0}| + \|b_{k_0}\| \cdot \|X - Y\| \\
&\leq |v(X) - \ell_{k_0}(X)| + |v(Y) - a_{k_0}| + \|b_{k_0}\|\rho^{k_0} \quad \forall X \in B_{\rho^{k_0}}(Y).
\end{aligned}$$

Tendo em vista (4.10), (4.11) e (4.12), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{X\in B_r(Y)} |v(X)-v(Y)| &\leq \sup_{X\in B_{\rho^{k_0}}(Y)} |v(X)-v(Y)| \\
&\leq \sup_{X\in B_{\rho^{k_0}}(Y)} \left(|v(X)-\ell_{k_0}(X)| + |v(Y)-a_{k_0}| + \|b_{k_0}\|\rho^{k_0}\right) \\
&\leq \left(\sup_{X\in B_{\rho^{k_0}}(Y)} |v(X)-\ell_{k_0}(X)|\right) + |v(Y)-a_{k_0}| + \|b_{k_0}\|\rho^{k_0} \\
&\leq \left(1+\frac{C}{1-\rho}\right)\rho^{k_0} + Ck_0\rho^{k_0}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pondo $C_0 = max\left\{\left(1+\frac{C}{1-\rho}\right), C\right\}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{X\in B_r(Y)} |v(X)-v(Y)| &\leq C_0\left(\rho^{k_0} + k_0\rho^{k_0}\right) \\
&= \frac{C_0}{\rho}\left(\rho^{k_0+1} + k_0\rho^{k_0+1}\right).
\end{aligned}
$$

Ora, como $\rho^{k_0+1} < r \leq \rho^{k_0}$ e a função $x \mapsto \log x$ é crescente, temos que $\log r \leq \log \rho^{k_0}$, ou seja,

$$
\log r \leq k_0 \log \rho. \tag{4.14}
$$

Por outro lado, como $0 < \rho < 1$, temos que $\log \rho < 0$, donde segue que $\frac{1}{\log \rho} < 0$. Daí, multiplicando a desigualdade (4.14) por $\frac{1}{\log \rho} < 0$, o sinal da desigualdade é invertido, isto é,

$$
\frac{\log r}{\log \rho} \geq k_0. \tag{4.15}
$$

Assim, usando (4.15) e o fato de $\rho^{k_0+1} < r$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\sup_{X\in B_r(Y)} |v(X)-v(Y)| &\leq \frac{C_0}{\rho}\left(\frac{1}{k_0}+1\right)k_0\rho^{k_0+1} \\
&\leq Ck_0\rho^{k_0+1} \\
&\leq C\frac{\log r}{\log \rho} r \\
&\leq -\left(-\frac{C}{\log \rho}\right) r \log r \\
&\leq -Cr\log r,
\end{aligned}
$$

onde estamos agregando todas as constantes e chamando de C. □

Para finalizarmos esse capítulo, analisemos a regularidade ótima para o caso em que a função $f \in L^n$.

Observação 4.3. *Considere a função* $u(X) = -|X|^{\delta}\log|X|$. *É fácil ver que* u *satisfaz a equação*

$$
\triangle u = \left(-\delta \log|X|[n+\delta-2] - 2\delta - n + 2\right)|X|^{\delta-2} := f(X).
$$

Queremos que a função f *pertença ao espaço* L^n. *Como a função* $\log$ *pertence a* L^p *para qualquer* p, *segue* *que para* $f \in L^n$ *basta que a função* $|X|^{\delta-2}$ *pertença ao espaço* L^n*. Portanto, para isso ocorrer devemos ter*

$$\delta > 1 \quad (\textit{veja a Observação 3.6}).$$

Isso nos diz que qualquer δ *maior do que* 1 *deixa a função* $f \in L^n$*, porém* δ *não pode ser exatamente* 1*. Assim, como na Observação 3.6, dizemos que* $\delta = 1$ *faz o módulo de continuidade* $\omega(t) = -t\log t$ *ser ótimo.*

Nossa próxima observação mostra que, se uma solução u é Log-Lip, então $u \in C^\alpha$ para todo $\alpha < 1$.

Observação 4.4. *Suponha que*

$$|u(X) - u(Y)| \leq C|X - Y| \log |X - Y|^{-1},$$

ou seja, u *é Log-Lip no ponto* Y*. Agora, dado qualquer* $\alpha < 1$*, considere a função* $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $g(t) = t^{1-\alpha} \log t^{-1}$*. É fácil ver, usando a Regra de L'Hospital, que*

$$\lim_{t \to 0} g(t) = 0,$$

ou seja, $|g(t)| \leq M \quad \forall t \in (0, \delta)$*, para algum* $\delta > 0$ *e para algum* $M > 0$*. Agora, dado qualquer* $X \in B_\delta(Y)$ *tem-se que* $|X - Y| \in (0, \delta)$ *e, portanto,*

$$|g(|X - Y|)| = |X - Y|^{1-\alpha} \log |X - Y|^{-1} \leq M. \tag{4.16}$$

Agora, escrevendo

$$|u(X) - u(Y)| \leq C|X - Y| \log |X - Y|^{-1} = C|X - Y|^\alpha \cdot |X - Y|^{1-\alpha} \log |X - Y|^{-1},$$

temos, por (4.16)*, que*

$$|u(X) - u(Y)| \leq C_0 |X - Y|^\alpha \quad \forall X \in B_\delta(Y),$$

onde $C_0 = CM$*. Isso mostra que* u *é* C^α *para todo* $\alpha < 1$*.*

Capítulo 5

REGULARIDADE INTERIOR $C^{1,\nu}$

Conteúdo

Neste capítulo, dedicamos a estimativa de regularidade $C^{1,\nu}$, obtida por um ajuste na abordagem do capítulo 4. Iniciamente, segue a partir da teoria desenvolvida em [3] que quando $f \in L^q(B_1)$, onde $q > n$, soluções no sentido da viscosidade da equação

$$F(X, D^2u) = f(X) \tag{5.1}$$

estão em $L^{1,\mu}_{loc}$, para algum μ. Como uma consequência da nossa análise do capítulo 4, obtemos uma prova simples do fato que estimativa de regularidade ótima disponível para a equação (5.1) quando $f \in L^q$, com $q > n$, é $C^{1,\nu}_{loc}$, onde ν é dado por

$$\nu := \min\left\{\frac{q-n}{q}, \bar{\alpha}^-\right\} \tag{5.2}$$

e $\bar{\alpha}$ é o expoente ótimo da teoria de regularidade $C^{1,\bar{\alpha}}$ para soluções de operadores (λ, Λ)-elíptico homogêneos com coeficientes constantes. A expressão em (5.2) tem o seguinte significado:

$$\begin{cases} \text{Se} \quad \frac{q-n}{q} < \bar{\alpha} \quad \text{então} \quad u \in C^{1,\frac{q-n}{q}}_{loc}. \\ \text{Se} \quad \frac{q-n}{q} \geq \bar{\alpha} \quad \text{então} \quad u \in C^{1,\beta}_{loc}, \quad \text{para qualquer} \quad \beta < \bar{\alpha}. \end{cases} \tag{5.3}$$

5.1 Aproximação por funções lineares

Lema 5.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \textit{em } B_1,$$

com $|u| \leq 1$ *em* B_1*, e seja também* $\alpha < \bar{\alpha}$ *qualquer fixado. Existem constantes* $\eta(n, \lambda, \Lambda, \delta) = \eta > 0$ *e* $\rho(n, \lambda, \Lambda, \delta, \alpha) = \rho \in (0, 1/2)$*, tal que se*

$$\fint_{B_1} \beta(X)^n dX \leq \eta^n \quad e \quad \int_{B_1} |f(X)|^q dX \leq \eta^q, \tag{5.4}$$

então, podemos achar uma função afim $\ell(X) := a + \langle b, X \rangle$*, com coeficientes universalmente limitados,*

$$|a| + \|b\| \leq C(n, \lambda, \Lambda),$$

tal que

$$\sup_{B_\rho} |u(X) - \ell(X)| \leq \rho^{1+\alpha}. \tag{5.5}$$

Demonstração. Para um $\delta > 0$ a ser escolhido, aplicamos o Lema 3.1 para encontrarmos um $\eta = \eta(n, \lambda, \Lambda, \delta) > 0$ tal que se

$$\fint_{B_1} \beta(X)^n dX \leq \eta^n \quad \text{e} \quad \int_{B_1} |f(X)|^q dX \leq \eta^q,$$

então podemos achar uma função $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ e um operador $\mathcal{F} : S(n) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathcal{F}(D^2 h) = 0 \quad \text{em} \quad B_{1/2},$$

no sentido da viscosidade, tal que

$$\sup_{B_{1/2}} |u - h| \leq \delta. \tag{5.6}$$

Da teoria de regularidade disponível para h (veja [4], Corolario 5.7) temos $h \in C^{1,\bar{\alpha}}(\bar{B}_{1/4})$, para alguma constante universal $\bar{\alpha} \in (0, 1)$. Em particular, h é $C^{1,\bar{\alpha}}$ na origem, logo existem uma constante $C > 0$ e um polinômio de grau 1, $\ell(X) = a + \langle b, X \rangle$, tal que

$$|h(X) - \ell(X)| \leq C|X|^{1+\bar{\alpha}}, \quad \text{para todo} \quad x \in \bar{B}_{1/4},$$

onde $a = h(0)$ e $b = \nabla h(0)$. Então, fixando arbitrariamente um $r \in (0, \frac{1}{4})$ tem-se que

$$|h(X) - \ell(X)| \leq C|x|^{1+\bar{\alpha}} \leq Cr^{1+\bar{\alpha}}, \quad \text{para todo} \quad X \in B_r. \tag{5.7}$$

A partir de (5.7) temos que

$$\sup_{B_r} |h(X) - \ell(X)| \leq Cr^{1+\bar{\alpha}}. \tag{5.8}$$

Agora, defina

$$\rho := \left(\frac{1}{2C}\right)^{1/(\bar{\alpha}-\alpha)} \quad \text{e} \quad \delta := \frac{1}{2}\rho^{1+\alpha}, \tag{5.9}$$

onde $\alpha < \bar{\alpha}$ é fixado arbitrariamente. Sem perda de generalidade, podemos supor $C > 0$ de tal forma que

$$\left(\frac{1}{2C}\right)^{1/(\bar{\alpha}-\alpha)} < \frac{1}{4} \tag{5.10}$$

De (5.8) e (5.10) podemos escrever

$$\sup_{B_\rho} |h(X) - \ell(X)| \leq C\rho^{1+\bar{\alpha}}. \tag{5.11}$$

Portanto, a partir de (5.6) e (5.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{B_\rho} |u(X) - \ell(X)| &\leq \sup_{B_\rho} |u(X) - h(X)| + \sup_{B_\rho} |h(X) - \ell(X)| \\
&\leq \delta + C\rho^{1+\bar{\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{2}\rho^{1+\alpha} + \frac{1}{2}\rho^{\alpha-\bar{\alpha}} \cdot \rho^{1+\bar{\alpha}} \\
&= \rho^{1+\alpha},
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 5.2. *Nas condições do Lema 5.1, para um* $Y \in B_{1/2}$ *fixado arbitrariamente, existe uma sequência de funções afins*

$$\ell_k(X) := a_k + \langle b_k, X - Y\rangle$$

com coeficientes satisfazendo

$$|a_k| + \|b_{k+1}\| \leq C_k(n, \lambda, \Lambda)$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}(Y)} |u(X) - \ell_k(X)| \leq \rho^{k(1+\nu)},$$

onde ν *é como em* (5.2).

Demonstração. A prova será feita por indução em k. Para $k = 1$ o resultado segue do Lema 5.1. Suponha o resultado válido para k e mostraremos para $k+1$. Para isso, defina

$$w_k(X) := \frac{(u - \ell_k)(Y + \rho^k X)}{\rho^{k(1+\nu)}} \quad \text{e} \quad F_k(X, M) := \rho^{k(1-\nu)} F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^{k(1-\nu)}} M\right).$$

Então F_k é (λ, Λ)-elíptico e

$$\begin{aligned}
F_k(X, D^2 w_k(X)) &= \rho^{k(1-\nu)} F\left(Y + \rho^k X, \frac{1}{\rho^{k(1-\nu)}} D^2 w_k\right) \\
&= \rho^{k(1-\nu)} F(Y + \rho^k X, D^2 u(Y + \rho^k X)) \\
&= \rho^{k(1-\nu)} f(Y + \rho^k X) =: f_k(X),
\end{aligned}$$

no sentido da viscosidade. Pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}\rho^{k(1+\nu)}|w_k(X)| &= |u(Y+\rho^k X) - \ell_k(Y+\rho^k X)| \le \sup_{B_{\rho^k}(Y)} |u(X) - \ell_k(X)| \\ &\le \rho^{k(1+\nu)}.\end{aligned}$$

Isso nos diz que

$$|w_k| \le 1. \tag{5.12}$$

Portanto w_k satisfaz as hipóteses do Lema 5.1, o qual assegura a existência de uma função afim $\ell(X) = a + \langle b, X\rangle$ tal que

$$\sup_{B_\rho} |w_k - \ell| \le \rho^{1+\nu}. \tag{5.13}$$

Observe que podemos escrever (5.13) pelo o fato de $\nu < \bar{\alpha}$ (veja a demonstração do Lema 5.1). Então segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{k(1+\nu)}} \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_k(Y+\rho^k X) - \rho^{k(1+\nu)}\ell(X)| &= \sup_{B_\rho} |w_k - \ell| \\ &\le \rho^{1+\nu},\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_k(Y+\rho^k X) - \rho^{k(1+\nu)}\ell(X)| \le \rho^{(k+1)(1+\nu)}. \tag{5.14}$$

Agora, definindo

$$a_{k+1} := a_k + \rho^{k(1+\nu)} a \quad \text{e} \quad b_{k+1} := b_k + \rho^{k\nu} b \tag{5.15}$$

e usando (5.14) obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_{k+1}(Y+\rho^k X)| &= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - (a_k + \rho^{k(1+\nu)} a) - \langle b_k + \rho^{k\nu} b, \rho^k X\rangle| \\ &= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - a_k - \langle b_k, \rho^k X\rangle - \rho^{k(1+\nu)} a - \rho^{k(1+\nu)}\langle b, X\rangle| \\ &= \sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_k(Y+\rho^k X) - \rho^{k(1+\nu)}\ell(X)| \\ &\le \rho^{(k+1)(1+\nu)},\end{aligned}$$

onde

$$\ell_{k+1}(X) := a_{k+1} + \langle b_{k+1}, X - Y\rangle.$$

Pondo $Z = Y + \rho^k X$ tem-se que $Z \in B_{\rho^{k+1}}(Y)$, logo

$$\sup_{B_\rho} |u(Y+\rho^k X) - \ell_{k+1}(Y+\rho^k X)| \le \rho^{(k+1)(1+\nu)} \Leftrightarrow \sup_{B_{\rho^{k+1}}(Y)} |u(Z) - \ell_{k+1}(Z)| \le \rho^{(k+1)(1+\nu)}.$$

□

5.2 Regularidade ótima

Agora, com os resultados da seção 5.1 estamos aptos para provar a estimativa de regularidade interior $C^{1,\nu}$, onde ν é como em (5.2).

Teorema 5.2.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(X, D^2u) = f(X) \quad \text{em } B_1.$$

Existe uma constante universal $\vartheta_0 > 0$ *tal que, se*

$$\sup_{Y \in B_{1/2}} \|\beta(Y, \cdot)\|_{L^n} \leq \vartheta_0,$$

então, para uma constante universal $C > 0$, *tem-se*

$$\|u\|_{C^{1,\nu}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\},$$

onde ν *é como em* (5.2).

Demonstração. Considere a função $w(X) = \ell u(X)$ como na Observação 3.5. Assim, fixado um $Y \in B_{1/2}$ arbitrariamente, o Lema 5.2 nos diz que existe uma sequência de funções afins

$$\ell_k(X) := a_k + \langle b_k, X - Y\rangle,$$

com coeficientes satisfazendo a relação

$$a_{k+1} = a_k + \rho^{k(1+\nu)}a \quad e \quad b_{k+1} = b_k + \rho^{k\nu}b, \tag{5.16}$$

tal que

$$\sup_{X \in B_{\rho^k}(Y)} |w(X) - \ell_k(X)| \leq \rho^{k(1+\nu)}. \tag{5.17}$$

Observe que

$$\begin{aligned} |w(Y) - a_k| &= |w(Y) - \ell_k(Y)| \\ &\leq \sup_{X \in B_{\rho^k}(Y)} |w(X) - \ell_k(X)| \\ &\leq \rho^{k(1+\nu)}. \end{aligned}$$

Então,

$$a_k \to w(Y). \tag{5.18}$$

Agora, a partir de (5.16) obtemos

$$\begin{aligned}
|a_{k+d} - a_k| &\leq |a_{k+d} - a_{k+d-1}| + |a_{k+d-1} - a_{k+d-2}| + \cdots + |a_{k+1} - a_k| \\
&= |a|\rho^{(k+d-1)(1+\nu)} + |a|\rho^{(k+d-2)(1+\nu)} + \cdots + |a|\rho^{k(1+\nu)} \\
&\leq |a|\rho^{k(1+\nu)}(1 + \cdots + \rho^{d-2} + \rho^{d-1} + \cdots) \\
&= \frac{|a|\rho^{k(1+\nu)}}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $d \to \infty$ obtemos que

$$|w(Y) - a_k| \leq \frac{|a|\rho^{k(1+\nu)}}{1-\rho}. \tag{5.19}$$

De modo análogo, temos que

$$\begin{aligned}
\|b_{k+d} - b_k\| &\leq \|b_{k+d} - b_{k+d-1}\| + \|b_{k+d-1} - b_{k+d-2}\| + \cdots + \|b_{k+1} - b_k\| \\
&= \|b\|\rho^{(k+d-1)\nu} + \|b\|\rho^{(k+d-2)\nu} + \cdots + \|b\|\rho^{k\nu} \\
&\leq \|b\|\rho^{k\nu}(1 + \cdots + \rho^{d-2} + \rho^{d-1} + \cdots) \\
&= \frac{\|b\|\rho^{k\nu}}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $d \to \infty$ obtemos que

$$\|\nabla w(Y) - b_k\| \leq \frac{\|b\|\rho^{k\nu}}{1-\rho}. \tag{5.20}$$

Finalmente, dado qualquer $r \in (0, \rho)$, seja j o inteiro positivo tal que $\rho^{j+1} < r \leq \rho^j$. Assim, usando as estimativas (5.19) e (5.20) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{X\in B_r(Y)} |w(X) - [w(Y) + \langle \nabla w(Y), X-Y\rangle]| &\leq \sup_{X\in B_{\rho^j}(Y)} |w(X) - [w(Y) + \langle \nabla w(Y), X-Y\rangle]| \\
&\leq \sup_{X\in B_{\rho^j}(Y)} |w(X) - \ell_j(X)| + \sup_{X\in B_{\rho^j}(Y)} |\ell_j(X) - [w(Y) + \langle \nabla w(Y), X-Y\rangle]| \\
&\leq \rho^{j(1+\nu)} + |a_j - w(Y)| + \sup_{X\in B_{\rho^j}(Y)} \|b_j - \nabla w(Y)\| \cdot \|X-Y\| \\
&\leq \rho^{j(1+\nu)} + |a_j - w(Y)| + \|b_j - \nabla w(Y)\| \cdot \rho^j \\
&\leq \rho^{j(1+\nu)} + \frac{|a|\rho^{j(1+\nu)}}{1-\rho} + \frac{\|b\|\rho^{j\nu}}{1-\rho} \cdot \rho^j \\
&= \rho^{j(1+\nu)} + \frac{|a|\rho^{j(1+\nu)}}{1-\rho} + \frac{\|b\|\rho^{j(1+\nu)}}{1-\rho} \\
&= \rho^{j(1+\nu)} + \frac{\rho^{j(1+\nu)}}{1-\rho}(|a| + \|b\|) \\
&\leq \rho^{j(1+\nu)} + \frac{C\rho^{j(1+\nu)}}{1-\rho} \\
&= \left(1 + \frac{C}{1-\rho}\right)\rho^{j(1+\nu)} \\
&= \frac{1}{\rho^{1+\nu}}\left(1 + \frac{C}{1-\rho}\right)\rho^{(j+1)(1+\nu)} \\
&\leq \frac{1}{\rho^{1+\nu}}\left(1 + \frac{C}{1-\rho}\right) r^{1+\nu}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $w \in C^{1,\nu}(B_{1/2})$, ou seja, $\|w\|_{C^{1,\nu}(B_{1/2})} < +\infty$. Assim, existe um $C > 0$ tal que

$$\|w\|_{C^{1,\nu}(B_{1/2})} \leq C,$$

e substituindo a expressão de w obtemos

$$\|u\|_{C^{1,\nu}(B_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\}.$$

$\square$

Conforme fizemos nas Observações 3.6 e 4.3, considerando a função $u(X) = |X|^{\alpha+1}$, verificamos facilmente que u satisfaz a equação

$$\triangle u = (n[\alpha+1] + [\alpha+1][\alpha-1])\,|X|^{\alpha-1} =: f(X).$$

Então, para que a função $f \in L^q$ $(q > n)$ devemos ter

$$\alpha > 1 - \frac{n}{q}.$$

Portanto, como anteriormente, $1 - n/q$ é ótimo. De (5.2) segue ν é a "briga"de dois expoentes ótimos.

Capítulo 6

REGULARIDADE $C^{1,\text{Log-Lip}}$

Conteúdo

6.1 Funções BMO

Relembrando,

$$\mathrm{BMO} = \left\{ f \ \text{ localmente integrável; } \fint_B |f(x) - (f)_B|\, dx \le M, \ \ \text{para toda bola B no domínio de } \ f \right\},$$

onde a expressão

$$\fint_B |f(x) - (f)_B|$$

é a oscilação média da função f e

$$(f)_B := \fint_B f(x) dx.$$

Então definimos

$$\|f\|_{BMO} := \inf \left\{ M; \ \ \fint_B |f(x) - (f)_B| \le M, \ \ \forall \text{bola } \ B \right\}.$$

Ou seja,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B \subset D(f)} \left\{ \fint_B |f - (f)_B| \right\},$$

onde $D(f)$ denota o domínio da função f.

Observe que qualquer função limitada está no espaço BMO.

É conhecido que se $f \in \mathrm{BMO}$ então $f \in L^p_{loc}$ para qualquer $p < \infty$ e vale

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - (f)_B|^p \, dx \le c_p \|f\|^p_{BMO}, \tag{6.1}$$

para toda bola $B \in D(f)$ (Veja [16] para a teoria de BMO).

6.2 Estimativa Log-Lipschitz

Nesta seção fechamos a teoria de regularidade para a equação totalmente não-linear

$$F(X, D^2u) = f(X)$$

abordando a ótima estimativa de regularidade disponível para o caso em que $f \in L^\infty$, ou melhor ainda quando $f \in BMO$. Por simplicidade trabalharemos apenas com equações com coeficientes constantes. Resultado semelhante pode ser mostrado sobre hipótese de continuidade adequada sobre os coeficientes, por exemplo, $C^{0,\bar{\epsilon}}$ é suficiente.

Agora, apresentaremos e provaremos o seguinte teorema, o qual estabelece regularidade interior $C^{1,\text{Log-Lip}}$.

Teorema 6.2.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(D^2u) = f(X) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Assuma que para qualquer matriz $M \in S(n)$, *com* $F(M) = 0$, *as soluções de*

$$F(D^2h + M) = 0$$

satisfazem

$$\|h\|_{C^{2,\epsilon}(B_r)} \leq \Theta r^{-(2+\epsilon)} \|h\|_{L^\infty(B_1)}, \tag{6.2}$$

para algum $\Theta > 0$. *Então, para uma constante* $C > 0$, *dependendo apenas de* Θ, ϵ *e parâmetros universais, é assegurado que*

$$|u(X) - [u(0) + \langle \nabla u(0), X \rangle]| \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{BMO(B_1)} \right\} \cdot |X|^2 \log |X|^{-1}. \tag{6.3}$$

Antes de provarmos o Teorema 6.2.1 apresentaremos alguns resultados.

Observação 6.1. *Se, para qualquer* $M \in S(n)$ *e operador* F, *com* $F(M) = 0$, *soluções de* $F(D^2h + M) = 0$ *têm estimativa interior* $C^{2,\epsilon}$, *o mesmo ocorre com soluções de* $F(D^2h + M) = c$, *para qualquer* $M \in S(n)$ *com* $F(M) = c$.
De fato, para ver isso defina $\tilde{F} := F - c$. *Assim, se* $F(D^2h + M) = c$ *então*

$$\tilde{F}(D^2h + M) = 0. \tag{6.4}$$

Portanto, soluções de (6.4) *satisfaz a estimativa interior*

$$\|h\|_{C^{2,\epsilon}(B_r)} \leq \tilde{\Theta} r^{-(2+\epsilon)} \|h\|_{L^\infty(B_1)}$$

para algum $\tilde{\Theta} > 0$. *Mas soluções de* $\tilde{F}(D^2h + M) = 0$ *são soluções de* $F(D^2h + M) = c$. *Portanto, podemos concluir que soluções de* $F(D^2h + M) = c$ *têm estimativa interior* $C^{2,\epsilon}$ *para qualquer matriz* $M \in S(n)$

com $F(M) = c$.

Lema 6.1. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(D^2u) = f(X) \quad em \quad B_1,$$

com $|u| \le 1/2$ *em* B_1. *Assuma que para qualquer matriz* $M \in S(n)$, *com* $F(M) = 0$, *as soluções de*

$$F(D^2h + M) = 0$$

satisfazem (6.2). *Então, existe uma sequência de polinômios quadráticos*

$$\wp_k(X) := a_k + \langle b_k, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle$$

onde

$$\wp_0 = \wp_{-1} = \frac{1}{2}\langle QX, X\rangle \quad F(Q) = \fint_{B_1} f(Y)dY, \quad com \quad \|Q\| \le 1, \tag{6.5}$$

tal que

$$\left.\begin{array}{r} F(M_k) = \fint_{B_1} f(Y)dY \\ \sup_{B_{\rho^k}} |u - \wp_k| \le \rho^{2k} \\ |a_k - a_{k-1}| + \rho^{k-1}|b_k - b_{k-1}| + \rho^{2(k-1)}|M_k - M_{k-1}| \le C\rho^{2(k-1)} \end{array}\right\}. \tag{6.6}$$

onde

$$\rho := \left(\frac{10}{\Theta}\right)^{1/\epsilon} < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. A prova será feita por indução em k. Para verificar o passo de indução $k = 0$ é só observar que (6.5) nos dá que

$$a_0 = 0 = a_{-1} \quad b_0 = 0 = b_{-1} \quad e \quad M_0 = Q = M_{-1}$$

onde

$$\wp_0 = a_0 + \langle b_0, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_0 X, X\rangle \quad e \quad \wp_{-1} = a_{-1} + \langle b_{-1}, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_{-1} X, X\rangle.$$

Portanto,

$$|a_0 - a_{-1}| + \rho^{0-1}|b_0 - b_{-1}| + \rho^{2(0-1)}|M_0 - M_{-1}| \le C\rho^{2(0-1)},$$

para qualquer que seja a constante $C > 0$. Além disso,

$$F(M_0) = F(Q) = \fint_{B_1} f(Y)dY.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} |u(X) - \wp_0| &\leq |u(X)| + |\wp_0(X)| \\ &= |u(X)| + \frac{1}{2}|\langle M_0 X, X\rangle| \\ &\leq |u(X)| + \frac{1}{2}\|M_0\|\|X\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sup_{X\in B_{\rho^0}} |u - \wp_0| &\leq \sup_{X\in B_1} |u(X)| + \frac{1}{2}\sup_{X\in B_1} \|M_0\|\|X\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|M_0\| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|Q\|, \end{aligned}$$

e como $\|Q\| \leq 1$, segue que

$$\sup_{B_{\rho^0}} |u - \wp_0| \leq \rho^{2\cdot 0}.$$

Isso conclui o passo de indução $k = 0$. Agora suponha que o resultado válido para k e mostraremos para $k+1$. Para isso defina $v : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(X) := \frac{(u - \wp_k)(\rho^k X)}{\rho^{2k}}.$$

Um cálculo simples nos dá que

$$D^2 v(X) = D^2 u(\rho^k X) - D^2 \wp_k(\rho^k X) = D^2 u(\rho^k X) - M_k.$$

Assim,

$$F(D^2 v(X) + M_k) = F(D^2 u(\rho^k X)) = f(\rho^k X) =: f_k(X),$$

no sentido da viscosidade. Agora observe que, como no Lema 3.1, sobre a hipótese pequenez de $\|f\|_{BMO(B_1)}$, podemos encontrar uma função h, solução de

$$F(D^2 h + M_k) = \fint_{B_1} f(Y)dY =: c \tag{6.7}$$

tal que

$$\sup_{B_{1/2}} |h - v| \leq \delta, \tag{6.8}$$

para um $\delta > 0$ a ser escolhido. Agora observe que a hipótese de indução nos diz que

$$F(M_k) = \fint_{B_1} f(Y)dY = c.$$

Conforme vimos na Observação 6.1 temos, em particular, que h é $C^{2,\epsilon}$ na origem. Portanto, existe um

$C > 0$ e um polinômio quadrático

$$\wp(X) = a + \langle b, X\rangle + \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle$$

tal que

$$|h(X) - \wp(X)| \leq C|X|^{2+\epsilon}, \tag{6.9}$$

onde

$$a = h(0), \quad b = \nabla h(0) \quad e \quad A = D^2 h(0).$$

Então, de (6.8) e (6.9) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{X\in B_\rho} |\nu(X) - \wp(X)| &\leq \sup_{X\in B_\rho} |\nu(X) - h(X)| + \sup_{X\in B_\rho} |h(X) - \wp(X)| \\ &\leq \delta + C\rho^{2+\epsilon}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $\Theta > 20C$, pois se não for esse o caso, basta tomarmos um $\bar{\Theta} > \Theta$ com essa propriedade, e passamos a considerar agora a constante $\bar{\Theta}$, já que essa ainda satisfaz (6.2). Isso nos diz que $C \cdot \frac{10}{\Theta} < \frac{1}{2}$, donde segue que

$$C\rho^2 \cdot \frac{10}{\Theta} < \frac{1}{2}\rho^2 \tag{6.10}$$

Então escolhendo

$$\delta = \frac{1}{2}\rho^2 \tag{6.11}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho} |\nu(X) - \wp(X)| &\leq \delta + C\rho^2 \cdot \rho^\epsilon \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 + C\rho^2 \cdot \frac{10}{\Theta} \\ &< \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= \rho^2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |\nu(X) - \wp(X)| &= \left| \frac{u(\rho^k X) - \wp_k(\rho^k X)}{\rho^{2k}} - \wp(X) \right| \\ &= \left| \frac{u(\rho^k X) - \wp_k(\rho^k X) - \rho^{2k}\wp(X)}{\rho^{2k}} \right|, \end{aligned}$$

segue que

$$\frac{1}{\rho^{2k}} \cdot \sup_{B_\rho} |u(\rho^k X) - \wp_k(\rho^k X) - \rho^{2k}\wp(X)| = \sup_{B_\rho} |\nu(X) - \wp(X)| < \rho^2.$$

Portanto,

$$\sup_{X\in B_\rho} |u(\rho^k X) - \wp_k(\rho^k X) - \rho^{2k}\wp(X)| < \rho^{2(k+1)}. \tag{6.12}$$

Pondo $Z = \rho^k X$ podemos escrever

$$\sup_{Z\in B_{\rho^{k+1}}} |u(Z) - \wp_k(Z) - \rho^{2k}\wp(\rho^{-k}Z)| < \rho^{2(k+1)}. \tag{6.13}$$

Então, definindo

$$\wp_{k+1}(X) := \wp_k(X) + \rho^{2k}\wp(\rho^{-k}X)$$

temos

$$\sup_{B_{\rho^{k+1}}} |u(X) - \wp_{k+1}(X)| < \rho^{2(k+1)}. \tag{6.14}$$

Para finalizar o passo de indução $k+1$, observe que

$$\begin{aligned}
\wp_{k+1}(X) &= \wp_k(X) + \rho^{2k}\wp(\rho^{-k}X) \\
&= \left(a_k + \langle b_k, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle\right) + \rho^{2k}\left(a + \langle b, \rho^{-k}X\rangle + \frac{1}{2}\langle A[\rho^{-k}X], [\rho^{-k}X]\rangle\right) \\
&= \left(a_k + \langle b_k, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle\right) + \left(\rho^{2k}a + \rho^k\langle b, X\rangle + \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle\right) \\
&= (a_k + \rho^{2k}a) + \langle b_k + \rho^k b, X\rangle + \frac{1}{2}\langle (M_k + A)X, X\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left.\begin{aligned}
a_{k+1} = a_k + \rho^{2k}a = a_k + \rho^{2k}h(0) \\
b_{k+1} = b_k + \rho^k b = b_k + \rho^k\nabla h(0) \\
M_{k+1} = M_k + A = M_k + D^2h(0)
\end{aligned}\right\}. \tag{6.15}$$

A partir de (6.7) temos que

$$F(M_{k+1}) = ⨍_{B_1} f(Y)dY \tag{6.16}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
|a_{k+1} - a_k| + \rho^{(k+1)-1}|b_{k+1} - b_k| \quad + &\quad \rho^{2([k+1]-1)}|M_{k+1} - M_k| \\
= &\quad \rho^{2k}|h(0)| + \rho^{2k}|\nabla h(0)| + \rho^{2k}|D^2h(0)| \\
= &\quad \rho^{2k}\left(|h(0)| + |\nabla h(0)| + |D^2h(0)|\right).
\end{aligned}$$

Sendo $h \in C^{2,\epsilon}$, a teoria clássica de EDP nos dá que

$$|h(0)| + |\nabla h(0)| + |D^2h(0)| \leq C_0,$$

para alguma constante $C_0 > 0$. Portanto,

$$|a_{k+1} - a_k| + \rho^k |b_{k+1} - b_k| + \rho^{2k} |M_{k+1} - M_k| \leq C_0 \rho^{2k} = C_0 \rho^{2([k+1]-1)} \tag{6.17}$$

Os resultados (6.14), (6.16) e (6.17) conclui o passo de indução $k+1$. $\square$

Agora, vamos reescrever e provar o Teorema 6.2.1.

Teorema 6.2.2. *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução, no sentido da viscosidade, da equação*

$$F(D^2 u) = f(X) \quad em \quad B_1.$$

Assuma que para qualquer matriz $M \in S(n)$, *com* $F(M) = 0$, *as soluções de*

$$F(D^2 h + M) = 0$$

satisfazem

$$\|h\|_{C^{2,\epsilon}(B_r)} \leq \Theta r^{-(2+\epsilon)} \|h\|_{L^\infty(B_1)}, \tag{6.18}$$

para algum $\Theta > 0$. *Então, para uma constante* $C > 0$, *dependendo apenas de* Θ, ϵ *e parâmetros universais, é assegurado que*

$$|u(X) - [u(0) + \langle \nabla u(0), X \rangle]| \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{BMO(B_1)} \right\} \cdot |X|^2 \log |X|^{-1}. \tag{6.19}$$

Demonstração. Primeiramente, defina $v(X) = \ell u(X)$, onde

$$\ell := \frac{\eta}{2(\eta \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{BMO(B_1)})}.$$

É fácil ver que v satisfaz as hipóteses do Lema 6.1 o qual assegura a existência de um polinômio

$$\wp_k(X) = a_k + \langle b_k, X \rangle + \frac{1}{2} \langle M_k X, X \rangle,$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}} |v - \wp_k| \leq \rho^{2k}.$$

Além disso, a partir da teoria desenvolvida em [3] é conhecido que soluções (no sentido da viscosidade) de $F(X, D^2 u) = f(X)$ são $C^{1,\mu}_{loc}$, para algum μ, desde que a função $f \in L^q$, para $q > n$. Mas $f \in BMO(B_1)$, logo a partir da seção 6.1 tem-se que $f \in L^q$ para todo $q < \infty$. Em particular, $f \in L^q$ com $q > n$ e, portanto, localmente, existe o gradiente de v. Agora observemos que

$$
\begin{aligned}
|v(X) - v(0) - \langle \nabla v(0), X\rangle| &= |v(X) - a_k + a_k - v(0) - \langle b_k, X\rangle + \langle b_k, X\rangle - \langle \nabla v(0), X\rangle \\
&- \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle| \\
&= |v(X) - \wp_k(X) + a_k - v(0) + \langle b_k - \nabla v(0), X\rangle + \frac{1}{2}\langle M_k X, X\rangle| \\
&\leq |v(X) - \wp_k(X)| + |v(0) - a_k| + |\langle b_k - \nabla v(0), X\rangle| + \frac{1}{2}|\langle M_k X, X\rangle| \\
&\leq |v(X) - \wp_k(X)| + |v(0) - a_k| + |b_k - \nabla v(0)||X| + \frac{1}{2}|\langle M_k X, X\rangle|.
\end{aligned}
$$

onde estamos utilizando a desiguladade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle b_k - \nabla v(0), X\rangle| \leq \|b_k - \nabla v(0)\|\|X\|.$$

Note que dado qualquer $r \in (0, \rho)$, podemos encontrar um $j \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^{j+1} < r \leq \rho^j$. Isso nos diz que $B_r \subset B_{\rho^j}$, logo temos

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_r} |v(X) - v(0) - \langle \nabla v(0), X\rangle| &\leq \sup_{B_{\rho^j}} |v(X) - v(0) - \langle \nabla v(0), X\rangle| \\
&\leq \sup_{B_{\rho^j}} (|v(X) - \wp_j(X)| + |v(0) - a_j| \\
&+ |b_j - \nabla v(0)||X| + \frac{1}{2}|\langle M_j X, X\rangle|) \\
&\leq \sup_{B_{\rho^j}} (|v(X) - \wp_j(X)|) + |v(0) - a_j| \\
&+ |b_j - \nabla v(0)| \sup_{B_{\rho^j}} |X| + \frac{1}{2} \sup_{B_{\rho^j}} |\langle M_j X, X\rangle|.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como

$$
\begin{aligned}
|v(0) - a_k| &= |v(0) - \wp_k(0)| \\
&\leq \sup_{B_{\rho^k}} |v(x) - \wp_k(x)| \\
&\leq \rho^{2k}
\end{aligned}
$$

segue que $a_k \to v(0)$. Ademais, tendo em vista (6.6) temos

$$
\begin{aligned}
|a_{j+d} - a_j| &\leq |a_{j+d} - a_{j+d-1}| + |a_{j+d-1} - a_{j+d-2}| + \cdots + |a_{j+1} - a_j| \\
&\leq C\rho^{2(j+d-1)} + C\rho^{2(j+d-2)} + \cdots + C\rho^{2(j)} \\
&\leq C\rho^{2j}(1 + \cdots + \rho^{d-2} + \rho^{d-1} + \cdots) \\
&= \frac{C\rho^{2j}}{1-\rho}.
\end{aligned}
$$

Portanto, fazendo $d \to \infty$ obtemos

$$|v(0) - a_j| \leq \frac{C\rho^{2j}}{1-\rho}. \tag{6.20}$$

Analogamente, a partir de (6.6), temos

$$\begin{aligned}\|b_{j+d} - b_j\| &\leq \|b_{j+d} - b_{j+d-1}\| + \|b_{j+d-1} - b_{j+d-2}\| + \cdots + \|b_{j+1} - b_j\| \\ &\leq C\rho^{j+d-1} + C\rho^{j+d-2} + \cdots + C\rho^j \\ &\leq C\rho^j(1 + \cdots + \rho^{d-2} + \rho^{d-1} + \cdots) \\ &= \frac{C\rho^j}{1-\rho}.\end{aligned}$$

Como $b_k \to \nabla v(0)$, fazendo $d \to \infty$, obtemos

$$\|\nabla v(0) - b_j\| \leq \frac{C\rho^j}{1-\rho}. \tag{6.21}$$

Então, de (6.6), (6.20) e (6.21) temos

$$\begin{aligned}\sup_{B_r}|v(X) - v(0) - \langle \nabla v(0), X\rangle| &\leq \sup_{B_{\rho^j}}(|v(X) - \wp_j(X)|) + |v(0) - a_j| + \|b_j - \nabla v(0)\| \sup_{B_{\rho^j}}|X| + \frac{1}{2}\sup_{B_{\rho^j}}|\langle M_j X, X\rangle| \\ &\leq \rho^{2j} + \bar{C}\rho^{2j} + \bar{C}\rho^j \cdot \rho^j + \frac{1}{2}\rho^{2j}|M_j|,\end{aligned}$$

onde $\bar{C} = \frac{C}{1-\rho}$. Agora, observe que de (6.6) temos

$$|M_j| \leq |M_j - M_{j-1}| + |M_{j-1} - M_{j-2}| + \cdots + |M_1 - M_0| \leq C + C + \cdots + C = Cj. \tag{6.22}$$

Além disso, observe também que $\log r \leq j \log \rho$, daí, como $\log \rho < 0$, obtemos que

$$j \leq \frac{\log r}{\log \rho}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{B_r}|v(X) - v(0) - \langle \nabla v(0), X\rangle| &\leq \rho^{2j} + 2\bar{C}\rho^{2j} + \frac{1}{2}\rho^{2j} \cdot Cj \\ &\leq \left(\frac{1}{j} + \frac{2\bar{C}}{j} + \frac{1}{2}C\right) j\rho^{2j} \\ &\leq Cj\rho^{2j} \\ &\leq C\rho^{2j}\frac{\log r}{\log \rho} \\ &\leq \frac{C}{\rho^2 \log \rho}\rho^{2(j+1)}\log r \\ &\leq -\left(-\frac{C}{\rho^2 \log \rho}\right) r^2 \log r \\ &\leq -Cr^2 \log r,\end{aligned}$$

onde $C = -\frac{C}{\rho^2 \log \rho}$ é a constante positiva agregada. □

Conforme fizemos nos capítulos anteriores, para verificar que o módulo de continuidade $\omega(t) =$

$-t^2 \log t$ é ótimo, considere a função u da Observação 4.3. Então, vimos que

$$\triangle u = f,$$

onde $f(X) = (-\delta \log |X|[n + \delta - 2] - 2\delta - n + 2)\, |X|^{\delta - 2}$. Portanto, $f \in BMO(B_1)$ se $\delta = 2$ ($\delta = 2$ faz a função $|X|^{\delta-2} = 1$, logo f é essencialmente a função logarítmo, a qual é BMO). Ou seja, o expoente $\delta = 2$ é ótimo.

Observação 6.2. *Supondo* $|u(X) - u(Y)| \leq |X - Y|^2 \log |X - Y|^{-1}$, *podemos escrever* $|u(X) - u(Y)| \leq |X - Y|^{1+\alpha} |X - Y|^{1-\alpha} \log |X - Y|^{-1}$. *Na Observação 4.4 vimos que a função* $g(t) = t^{1-\alpha} \log t^{-1}$ *é limitada numa vizinhança do zero, logo argumentando de maneira análoga a Observação 4.4, concluimos que se* u *é* $C^{1,\mathrm{Log-Lip}}$ *então é* $C^{1,\alpha}$ *para todo* $\alpha < 1$.

REFERÊNCIAS

[1] TEIXEIRA, Eduardo V. Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations. Preprint available at **http://arxiv.org/abs/1111.2728**

[2] CABRÉ, Xavier; CAFFARELLI, Luis A. Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations. **J. Math. Pures Appl.**, v. 82, p. 573–612, 2003.

[3] CAFFARELLI, Luis A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. **Annals of Mathematics**, v. 130, n. 1, p. 189–213, 1989.

[4] CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. Fully nonlinear elliptic equations. **American Mathematical Society Colloquium Publications**, v. 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[5] EVANS, L. C.. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. **Comm. Pure Appl. Math.** v. 35, p. 333–363, 1982.

[6] ESCAURIAZA, L.. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear elliptic equations. **Indiana Univ. Math.** v. 42, n. 2, p. 413–423, 1993.

[7] KRYLOV, N. V.. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. **Izv. Akad. Nak. SSSR Ser. Mat.**, v. 46, p. 487–523, 1982; **English transl. in Math USSR Izv.**, v. 20, p. 459–492, 1983.

[8] KRYLOV, N. V.. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. **Izv. Akad. Nak. SSSR Ser. Mat.**, v. 47, p. 75–108, 1983; **English transl. in Math USSR Izv.**, v. 22, p. 67–97, 1984.

[9] KRYLOV, N. V.; SAFONOV, M. V.. An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure. **Dokl. Akad. SSSR**, v. 245, p. 235–255, 1979; **English translation in Soviet Math Dokl.**, v. 20, p. 235–255, 1979.

[10] KRYLOV, N. V.; SAFANOV, M. V.. Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients. **Izvestia Akad Nauk. SSSR** v. 40, p. 161–175, 1980.

[11] U. MENNE. Decay estimates for the quadratic tilt-excess of integral varifolds. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 204, p. 1–83, 2012.

[12] N. NADIRASHVILI; S. VLADUT. Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Geom. Funct. Anal.**, v. 17, n. 4, p. 1283–1296, 2007.

[13] N. NADIRASHVILI; S. VLADUT. Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations. **J. Math. Pures Appl.**, v. 89, n. 2, p. 107–113, 2008.

[14] N. NADIRASHVILI; S. VLADUT. Nonclassical Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Equations II. Hessian Equations and Octonions. **Geom. Funct. Anal.**, v. 21, p. 483–498, 2011.

[15] A. SWIECH. $W^{1,p}$-Interior estimates for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations. **Adv. Differential Equations**, v. 2, n. 6, p. 1005–1027, 1997.

[16] E. STEIN. **Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, And Oscillatory Integrals.** Princeton University Press, 1993.

[17] CRANDALL, M. G.; LIONS, P. L.. Viscosity slolutions of Hamilton-Jacobi equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 277, n. 1, p. 1–42, 1983.

[18] EVANS, L. C.. A convergence theorem for solutions of nonlinear second-order elliptic equations. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 27, p. 875–887, 1978.

[19] EVANS, L. C.. On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. **Israel J. Math.**, v. 36, p. 225–247, 1980.