



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

CONVEXIDADE EM GRAFOS ORIENTADOS E CONVEXIDADE DE CICLOS

FORTALEZA

2024

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

CONVEXIDADE EM GRAFOS ORIENTADOS E CONVEXIDADE DE CICLOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo

Coorientadora: Profa. Dra. Ana Karolinna Maia

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M44c Medeiros, Pedro Paulo de.
Convexidade em grafos orientados e convexidade de ciclos / Pedro Paulo de Medeiros. – 2024.
90 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo.
Coorientação: Profa. Dra. Ana Karolinna Maia .
1. Convexidade em grafos. 2. Grafos orientados. 3. Número de envoltória. 4. Convexidade de ciclos. 5. Tempo de percolação. I. Título.

CDD 510

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

CONVEXIDADE EM GRAFOS ORIENTADOS E CONVEXIDADE DE CICLOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Aprovada em: 12/07/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Ana Karolinnna Maia (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vinícius Fernandes dos Santos
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, principalmente à minha esposa Lais que sempre esteve comigo em todos os momentos desde que chegou. Muito obrigado.

Aos meus camaradas de trabalho que sempre apoiaram minha caminhada: Rogério, Skene, Pleima, Helem, Rafael, William e todos os outros. Vocês me inspiram a melhorar a cada dia. Muito obrigado.

De forma mais ampla, agradeço ao grupo ParGO por ter garantido um ambiente propício para minha pesquisa. Agradeço aos meus orientadores Júlio e Karol pelos inúmeros ensinamentos, sempre exemplificando como ser excelentes profissionais e pesquisadores. Além disso, aos meus companheiros de pesquisa Lúcia, Carlos Vinícius e Thiago. Muito obrigado.

RESUMO

O foco principal deste trabalho é o estudo da complexidade computacional de determinação de alguns parâmetros de otimização definidos no contexto de Convexidade em Grafos orientados e não orientados. Esta tese pode ser dividida em duas partes. A primeira corresponde ao estudo de problemas de convexidade em grafos orientados. Observamos que estes problemas foram pouco estudados na literatura. A maioria dos nossos resultados são relacionados à complexidade computacional dos parâmetros número de intervalo e número de envoltória para classes de grafos orientados, em três convexidades: convexidade geodésica, convexidade de caminhos de comprimento dois e convexidade de caminhos mínimos de comprimento dois. Mostramos resultados que exibem a dificuldade de determinação destes parâmetros mesmo quando o grafo subjacente do grafo orientado dado está restrito a subclasses particulares como, por exemplo, de grafos split, bipartidos, cordais bipartidos. Do lado positivo, demonstramos para estes dois parâmetros, na convexidade de caminhos de comprimento dois e de caminhos mínimos de comprimento dois, a existência de algoritmos em tempo cúbico para determiná-los quando a entrada é um grafo orientado com largura em clique limitada, obtido pela aplicação do Teorema de Courcelle. Apresentamos também alguns limitantes superiores para estes parâmetros com relação ao número de vértices do grafo orientado dado. Na segunda parte desta tese, estudamos a convexidade de ciclos em grafos não orientados. Esta convexidade foi definida recentemente e tem motivação na Teoria de Nós. Os parâmetros que trabalhamos foram o número de convexidade e tempo de percolação. Mostramos que o problema de determinar o número de convexidade é NP-difícil e $W[1]$ -difícil, quando parametrizado pelo tamanho da solução. Por fim, na busca por uma dicotomia relativa ao tempo de percolação de um grafo, primeiro mostramos que determinar se o tempo de percolação em um grafo é pelo menos dois pode ser calculado em tempo polinomial. Por outro lado, provamos determinar se o tempo de percolação é pelo menos nove é NP-completo.

Palavras-chave: convexidade em grafos; grafos orientados; número de intervalo; número de envoltória; convexidade de ciclos; tempo de percolação.

ABSTRACT

The main focus of this work is the study of the computational complexity of determining some optimization parameters defined in the context of Convexity in directed and undirected Graphs. This thesis can be divided into two parts. The first part corresponds to the study of convexity problems in directed graphs. We observed that these problems have been little studied in the literature. Most of our results are related to the computational complexity of the interval number and hull number parameters for classes of directed graphs, in three convexities: geodesic convexity, two path convexity, and minimum two path convexity. We show results that exhibit the difficulty of determining these parameters even when the underlying graph of the given directed graph is restricted to particular subclasses such as split graphs, bipartite graphs, and chordal bipartite graphs. On the positive side, two path convexity and minimum two path convexity, the existence of cubic-time algorithms to determine them when the input is a directed graph with bounded clique-width, obtained by applying Courcelle's Theorem. We also present some upper bounds for these parameters concerning the number of vertices of the given directed graph. In the second part of this thesis, we study the convexity of cycles in undirected graphs. This convexity was recently defined and is motivated by Knot Theory. The parameters we worked on were the convexity number and percolation time. We show that the problem of determining the convexity number is NP-complete and $W[1]$ -hard parameterized by the size of the solution. Finally, in the search for a dichotomy regarding the percolation time of a graph, we first show that determining whether the percolation time in a graph is at least two can be computed in polynomial time. On the other hand, we prove that determining whether the percolation time is at least nine is NP-complete.

Keywords: graph convexity; oriented graphs; interval number; hull number; cycle convexity; percolation time.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de um polígono não convexo A e um polígono convexo B	11
Figura 2 – Um grafo G	14
Figura 3 – Um grafo orientado D	15
Figura 4 – Exemplo de um grafo simples	22
Figura 5 – À esquerda, um grafo orientado D e à direita seu respectivo grafo subjacente.	24
Figura 6 – Representação de G_i para $u_i \in U$, os vértices cinzas possuem um arco chegando no vértice x ou um arco saindo em direção a x'	43
Figura 7 – Representação do dispositivo G_i para $u_i \in U$	45
Figura 8 – Exemplo de construção do grafo orientado D para uma dada instância do problema de cobertura por vértices	49
Figura 9 – Número de intervalo de uma orientação sendo maior que do grafo subjacente	54
Figura 10 – Número de intervalo do grafo subjacente maior do que o número de intervalo de uma orientação	54
Figura 11 – Exemplo de grafo atingindo limitante da Proposição 4.2.2	56
Figura 12 – Exemplo de grafo atingindo limitante da Proposição 4.2.3	58
Figura 13 – Exemplificando a construção do grafo D	63
Figura 14 – Exemplificando a construção do grafo $T_k(T)$, sendo T um torneio transitivo com 3 vértices e $k = 2$. Observe que as cores indicam os vértices correlatos de $T_2^1(T)$ e $T_2^2(T)$	65
Figura 15 – Torneio T_D	66
Figura 16 – Grafo G' construído a partir de um grafo G com apenas dois vértices u e v .	71
Figura 17 – Exemplo de cacto G , conjunto de envoltória S , vértices v_1, v_2 e v_3 , e ciclos da sequência C_2, C_1, C_0 . Os vértices em cinza estão em S	73
Figura 18 – Exemplo com a sequência de ciclos C_0, C_1, \dots, C_k , para $k = 2$, os vértices v e v' , e os conjuntos S', L_G e Q representados pelos vértices coloridos com a cor preta, contornados de vermelho e coloridos com a cinza respectivamente . .	74
Figura 19 – Exemplo do caso onde v possui exatamente um vizinho no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C está denotado pelas arestas em azul, o ciclo C' pelas arestas em vermelho e S pelos vértices com a cor cinza	75

Figura 20 – Exemplo do caso onde v não possui vizinhos no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C está denotado pelas arestas em azul, o ciclo C' pelas arestas em vermelho e S pelo vértices coloridos de preto	76
Figura 21 – Um exemplo do caso em que v não tem vizinhos em $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C é denotado pelas arestas azuis, o ciclo C' pelas vermelhas e S pelos vértices cinzas	77
Figura 22 – Um exemplo para o caso em que $w \notin V(D)$. O conjunto S contém os vértices coloridos em cinza. O ciclo C é denotado pelas arestas azuis, o ciclo D pelas arestas vermelhas e o ciclo C' pelas arestas tracejadas	77
Figura 23 – Exemplo de grafo com o vértice v e os conjuntos Q , com seus vértices com a cor cinza, $H(Q), R_3$ e $S = Q \cup T$	78
Figura 24 – Dispositivo de perpetuação	80
Figura 25 – Dispositivo da cláusula C_i . Cada laço representa o dispositivo da Figura 24 com o vértice p da Figura 24 sendo o vértice visível no grafo	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos resultados de complexidade de acordo com as classes de grafo estudadas nas convexidades geodésica, \vec{P}_3 e \vec{P}_3^*	21
Tabela 2 – Resultados de complexidade em grafos não orientados na convexidade de ciclo	21
Tabela 3 – Perguntas	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Convexidade geodésica	13
1.2	Convexidade de caminhos de comprimento dois	16
1.3	Convexidade de caminhos mínimos de comprimento dois	17
1.4	Convexidade de Ciclos	18
1.5	Nossas contribuições e organização do texto	19
2	CONCEITOS BÁSICOS	22
2.1	Noções gerais e notações	22
2.2	Teoria da complexidade parametrizada	26
2.3	3-SAT e a Hipótese do Tempo Exponencial	27
2.4	Lógica monádica de segunda ordem, largura em clique e o Teorema de Courcelle	28
3	CONVEXIDADES GEODÉSICA, \vec{P}_3 E \vec{P}_3^*: LIMITANTES E COMPLEXIDADE	31
3.1	Preliminares	31
3.2	Limitantes para o número de envoltória	34
3.2.1	<i>Convexidade geodésica</i>	34
3.2.2	<i>Convexidade geodésica e de caminhos de comprimento dois</i>	35
3.3	Resultados de dificuldade	39
3.3.1	<i>Sobre a convexidade geodésica em bipartidos</i>	39
3.3.2	<i>Dificuldade do número de envoltória orientada de caminhos de comprimento dois</i>	41
3.3.3	<i>Complexidade do número de intervalo</i>	46
3.3.4	<i>Algoritmos para grafos com largura em clique limitada</i>	51
4	CONVEXIDADES GEODÉSICA, \vec{P}_3 E \vec{P}_3^*: OUTROS LIMITANTES E DIFICULDADE EM TORNEIOS	53
4.1	Orientações em grafos	54
4.2	Limitantes	55
4.3	Calculando número de intervalo de torneios na convexidade de caminhos de comprimento dois	59

4.4	Dificuldade do número de intervalo a distância dois em torneios	62
5	CONVEXIDADE DE CICLOS	69
5.1	Número de convexidade	69
5.2	Tempo de Percolação	71
5.2.1	<i>Polinomial para Cactos</i>	72
5.2.2	<i>Polinomial quando $k=2$</i>	75
5.2.3	<i>NP-Dificuldade para todo k maior ou igual a 9 fixo</i>	80
6	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	87

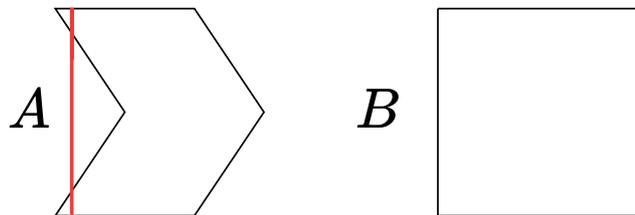
1 INTRODUÇÃO

A partir da década de 1970, as noções de convexidade foram trazidas para o contexto da teoria de grafos, motivando pesquisadores a estudar esse tema (Erdős, 1972; Farber; Jamison, 1986; Duchet, 1988). Neste trabalho, investigamos parâmetros de convexidades em grafos orientados e não orientados.

Os problemas relativos à convexidade em grafos podem modelar diversas aplicações práticas que vão desde o processo de contaminação de doenças infecciosas (Miller, 2009) à difusão de informações em redes sociais (Dreyer; Roberts, 2009).

Apresentamos a seguir os conceitos básicos da *geometria convexa*, como visto em (Araujo *et al.*, 2023). Para um aprofundamento sobre o assunto, recomenda-se a leitura de (Vel, 1993). Para um dado $d \geq 1$ inteiro e sendo \mathbb{R}^d o espaço euclidiano d -dimensional, um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito *convexo* se, dados quaisquer dois pontos distintos de S , o conjunto S contém o segmento que une estes pontos, vide Figura 1 para um exemplo em \mathbb{R}^2 . Ressaltamos que este conceito pode ser estendido para outros espaços, diferentes do euclidiano (Gruber; Wills, 1993).

Figura 1 – Exemplo de um polígono não convexo A e um polígono convexo B



Fonte: elaborado pelo autor.

Observamos que propriedades de conjuntos convexos em espaços euclidianos são utilizadas para definirmos convexidades abstratas em outras topologias. Veja (Vel, 1993) e (Pelayo, 2013). Seja V um conjunto não vazio. Definimos uma convexidade \mathcal{C} sobre V como uma família de subconjuntos de V tal que:

- 1) $\emptyset, V \in \mathcal{C}$;
- 2) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, então $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$;
- 3) Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ e \mathcal{B} é totalmente ordenada pela relação de inclusão, então $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$.

A propriedade 3) é chamada *união aninhada*. Veja que esta propriedade pode ser descartada quando consideramos V finito. Se $C \in \mathcal{C}$, dizemos então que C é *convexo*. A definição acima é bem abrangente. Como observado em (Araujo *et al.*, 2023), dado o conjunto $V = \{0, 1\}$,

podemos encontrar as seguintes convexidades $C_1 = \{\emptyset, V\}$, $C_2 = \{\emptyset, \{0\}, V\}$, $C_3 = \{\emptyset, \{1\}, V\}$ e $C_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, V\}$. Veja que cada uma destas famílias satisfaz à definição de convexidade sobre V .

Por outro lado, nem toda família constitui uma convexidade. Por exemplo, a família $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, V\}$ não é uma convexidade sobre $V = \{1, 2, 3\}$, pois a interseção de $\{1, 2\}$ e $\{1, 3\}$ não pertence à \mathcal{F} .

Vamos definir a *envoltória convexa* de maneira abstrata. Seja \mathcal{C} uma convexidade sobre um conjunto V finito e não vazio. A envoltória convexa de $S \subseteq V$ na convexidade \mathcal{C} é o conjunto convexo mínimo $H_{\mathcal{C}}(S)$ contendo S . Veja que o $H_{\mathcal{C}}(S)$ tem as seguintes propriedades para todo $S, S' \subseteq V$:

- i) $S \subseteq H_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade);
- ii) se $S \subseteq S'$, então $H_{\mathcal{C}}(S) \subseteq H_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade);
- iii) $H_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização);
- iv) $H_{\mathcal{C}}(H_{\mathcal{C}}(S)) = H_{\mathcal{C}}(S)$ (idempotência).

Estas propriedades definem $H_{\mathcal{C}}(S)$ como um *operador fecho*.

Se $S \subseteq V$ é convexo em \mathcal{C} , onde \mathcal{C} é uma família de subconjuntos de V , dizemos que $x \in S$ é um *vértice extremo* de S , em \mathcal{C} , se $x \notin H_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\})$. Denotamos por $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(S)$ o conjunto de pontos extremos de S .

Dizemos que $I : 2^V \rightarrow 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$, vale:

- a) $S \subseteq I(S)$ (extensividade);
- b) se $S \subseteq S'$, então $I(S) \subseteq I(S')$ (monotonicidade);
- c) $I(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

Esta definição de função de intervalo generaliza a definição de função de intervalo mostrada em (Calder, 1971). Dizemos que uma função de intervalo I sobre V *induz* a família de conjuntos $S \subseteq V$ tais que $I(S) = S$. Quando $S \subseteq V$ atende à condição de $I(S) = S$, dizemos que S é um *ponto fixo* da função I .

Proposição 1.0.1 ((Calder, 1971; Vel, 1993)). *Dado um conjunto finito V e uma função de intervalo I sobre V , a família \mathcal{C} de subconjuntos de V formada pelos pontos fixos de I é uma convexidade.*

A proposição anterior indica que toda função de intervalo induz uma única convexidade. No entanto, uma convexidade pode ser induzida por uma ou mais funções de intervalo.

Observe que a envoltória convexa é um exemplo de uma função de intervalo.

Seja G um grafo (orientado), onde $V(G)$ são seus vértices e seja \mathcal{C} uma convexidade sobre $V(G)$, ou seja, \mathcal{C} tem subconjuntos de vértices de G como elementos, definidos a partir dos pontos fixos de uma dada função de intervalo. Tal convexidade \mathcal{C} é dita *convexidade (de intervalo) em grafos (orientados)*. Observe que podemos encontrar a envoltória de S através da função de intervalo. Defina, para qualquer natural k e $S \subseteq V(G)$:

$$I^k(S) = \begin{cases} I(I^{k-1}(S)) & , \text{ se } k \geq 1; \\ S & , \text{ se } k = 0. \end{cases}$$

Note que $H(S) = I^k(S)$, para algum $k \leq n = |V(G)|$. Desse modo, para obter a envoltória de S , podemos utilizar iteradamente a função de intervalo. Para $k \geq 1$, enquanto houver vértice $v \in I^k(S) \setminus I^{k-1}(S)$, saberemos que $I^{k-1}(S)$ ainda não é convexo, então adicionamos v ao conjunto de envoltória de S e dizemos que o vértice v em questão é infectado (ou contaminado ou gerado) no passo k .

Sendo S um conjunto de envoltória de G com cardinalidade mínima, denominamos por *número de envoltória* tal cardinalidade, denotando-a por $hn(G)$ (do inglês “*hull number*”). Um subconjunto de vértices S é dito *conjunto de intervalo*, se $I(S) = V(G)$. De maneira análoga, definimos o *número de intervalo* de G , denotado por $in(G)$, como a cardinalidade de um conjunto de intervalo mínimo de G .

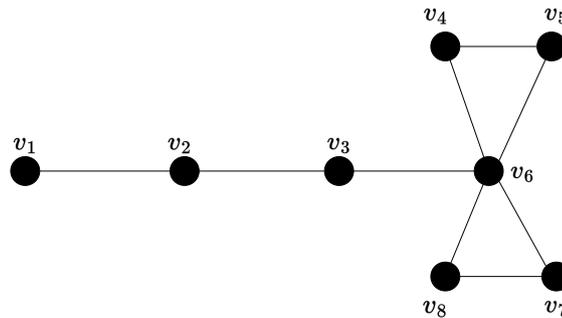
As convexidades em grafos mais estudadas são convexidades de intervalo cujas funções de intervalo são definidas a partir de um conjunto de caminhos P . Neste caso, um conjunto C é convexo quando contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de P cujos vértices extremos estão também em C . Deixamos como referência o livro (Araujo *et al.*, 2023), texto em português que se aprofunda sobre convexidade em grafos.

1.1 Convexidade geodésica

A convexidade *geodésica* (Harary, 1981; Pelayo, 2013) é definida quando trabalhamos sobre o conjunto P formado por todos os caminhos mínimos em um grafo G . Nesta convexidade, para um par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, definimos a função de intervalo na convexidade geodésica como I_g , assim $I_g(\{u, v\})$ contém todos os vértices de G que pertencem à algum caminho mínimo cujas extremidades são u e v . Um subconjunto $C \subseteq V(G)$ será portanto (geodesicamente) convexo se, para quaisquer $u, v \in C$ distintos, temos que todos os vértices em

caminhos mínimos de u a v também pertencem à C . Para um grafo G , a convexidade então é formada pelo par ordenado $(V(G), \mathcal{C})$, onde \mathcal{C} é a família que contém todos os conjuntos (geodesicamente) convexos de G . Vamos ilustrar o conceito de função de intervalo na convexidade geodésica a partir do grafo G na Figura 2.

Figura 2 – Um grafo G



Fonte: elaborado pelo autor.

Temos um único caminho mínimo entre v_1 e v_4 , formado por $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_4)$. Logo, $I_g(\{v_1, v_4\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$. Observe que devemos considerar *todos* os caminhos mínimos. Veja que $\{v_5, v_7, v_8\} \not\subseteq I_g(\{v_1, v_4\})$, então o subconjunto $\{v_1, v_4\}$ não é um conjunto de intervalo. Além disso, note que $I_g^2(\{v_1, v_4\}) = I_g(v_1, v_4)$ e, portanto, $I_g(\{v_1, v_4\})$ é um conjunto convexo. Pode-se argumentar que este é o conjunto convexo mínimo que contém $\{v_1, v_4\}$ e, por conseguinte, na convexidade geodésica $H(\{v_1, v_4\}) = I_g(v_1, v_4) \subsetneq V(G)$. Consequentemente, $\{v_1, v_4\}$ também não é um conjunto de envoltória do grafo representado na Figura 2.

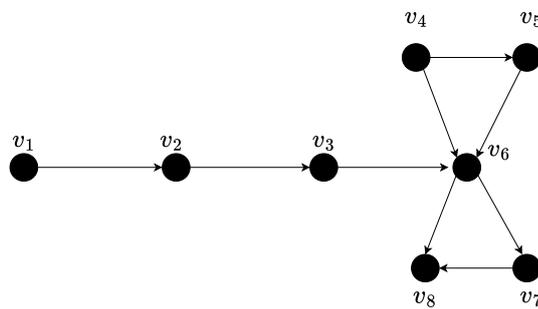
A função de intervalo $\vec{I}_g(\{u, v\})$ para um par de vértices distintos $u, v \in V(G)$ de um grafo orientado G , retorna o subconjunto que contém todos os vértices em caminhos mínimos orientados de u para v e também todos os vértices em caminhos mínimos orientados de v para u . As demais definições são análogas.

Discriminaremos a convexidade sobre um grafo G nos parâmetros número de envoltória e número de intervalo, através de um subíndice adequado. Denotamos o número de intervalo e o número de envoltória, respectivamente, para a convexidade geodésica em grafos não orientados como $hn_g(G)$ e $in_g(G)$. Analogamente, quando G for um grafo *orientado*, escreveremos o número de envoltória e número de intervalo, respectivamente, na convexidade geodésica como $\vec{hn}_g(G)$ e $\vec{in}_g(G)$.

Vamos utilizar o grafo orientado D da Figura 3 para exemplificar o cálculo do número de intervalo e do número de envoltória na convexidade geodésica em grafos orientados. Note que não há nenhum caminho mínimo orientado em que os vértices v_1 , v_4 e v_8 são vértices

internos de caminhos com extremidades em $V(D) \setminus \{v_1, v_4, v_8\}$. O mesmo argumento se aplica a v_5 e v_7 já que estes vértices podem ser vértices internos de algum caminho orientado P entre dois outros vértices de D , porém tal caminho P não pode ser mínimo pela existência dos arcos (v_4, v_6) e (v_6, v_8) . Portanto, veja que precisamos selecionar os vértices v_1, v_4, v_5, v_7 e v_8 para pertencerem a qualquer conjunto de intervalo e qualquer conjunto de envoltória de D . Observe que $\vec{I}_g(\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}) = V(D)$. Obtemos assim um conjunto de envoltória e um conjunto de intervalo mínimo. Logo, concluímos que $\vec{in}_g(D) = \vec{hn}_g(D) = 5$.

Figura 3 – Um grafo orientado D



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que o grafo simples não orientado G da Figura 2 possui várias possíveis orientações de suas arestas, sendo um exemplo a orientação representada na Figura 3. Devemos notar que as convexidades g e \vec{g} se diferem em consequência da orientação dada às arestas. De fato, como visto, lembre que $I_g(\{v_1, v_4\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ com respeito ao grafo não orientado representado na Figura 2. Por outro lado, aplicando a função de intervalo na convexidade geodésica orientada no grafo orientado da Figura 3, obteremos $\vec{I}_g(\{v_1, v_4\}) = \{v_1, v_4\}$.

Tendo em vista as diferenças entre o caso orientado e o não orientado, o parâmetro *número de envoltória orientado superior* $hn^+(G)$ é definido por (Chartrand *et al.*, 2003b). Representa o valor máximo de $\vec{hn}(D)$ dentre todas as orientações possíveis D de um grafo simples G . Podemos concluir que $hn^+(G) = n(G)$ se, e somente se, houver uma orientação D de G tal que todo o conjunto $V(D) \setminus \{v\}$ seja convexo, ou seja, $v \in V(D)$ é extremo. Os autores também definem o *número de envoltória orientado inferior* $hn^-(G)$, como o valor mínimo de $\vec{hn}(D)$ entre todas as orientações possíveis D de um grafo simples G . Assim, os números de intervalo orientador inferior e superior (respectivamente, $in^-(G)$ e $in^+(G)$), são definidos analogamente (Chartrand; Zhang, 2000). Note que as definições destes parâmetros foram dadas na convexidade geodésica, mas os conceitos podem ser aplicados às outras convexidades

encontradas neste texto, respeitando a definição da respectiva convexidade.

1.2 Convexidade de caminhos de comprimento dois

Quando o conjunto P é formado por todos os caminhos de comprimento dois, é definida a convexidade \vec{P}_3 . Tal convexidade foi estudada primeiramente em (Erdős, 1972), para o caso orientado, mas a maior parte dos trabalhos na literatura foca no caso não orientado. A formação da envoltória de um conjunto na convexidade P_3 também é denominada como percolação de 2-vizinhos (Chalupa *et al.*, 1979) ou processo limiar 2-irreversível (Dreyer; Roberts, 2009).

Em grafos orientados, a função de intervalo \vec{I}_{P_3} na convexidade \vec{P}_3 aplicada a um par de vértices distintos u e v retorna todos os vértices em caminhos orientados de u para v e também em caminhos orientados de v para u , contendo exatamente três vértices, incluindo u e v .

Quando formos nos referir aos parâmetros nesta convexidade, o número de envoltória e o número de intervalo na convexidade P_3 serão denotados por $hn_{P_3}(G)$ e $in_{P_3}(G)$, respectivamente. Já para grafos orientados, a convexidade será denotada por \vec{P}_3 , e os parâmetros serão denotados por $\vec{hn}_{P_3}(G)$ e $\vec{in}_{P_3}(G)$.

Vamos revisitar o exemplo apresentado na Figura 3 para exemplificar o cálculo do número de intervalo e do número de envoltória na convexidade \vec{P}_3 . Veja que todo conjunto de intervalo S deve conter o subconjunto de vértices $\{v_1, v_4, v_8\}$, já que eles não são vértices internos de caminhos orientados com comprimento dois, uma vez que tem grau de entrada igual a zero ou tem grau de saída igual a zero. Defina $S = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_8\}$. Veja que $\vec{I}_{P_3}(S) = V(D)$, pois cada vértice em $V(D) \setminus S$ é um vértice interno de um caminho de comprimento dois com extremidades em vértices de S . Vamos provar que S é um conjunto de intervalo de cardinalidade mínima, ou seja, $\vec{in}_{P_3}(D) = 5$. Por contradição, suponha que existe um conjunto de intervalo $S' \subset V(D)$ com $|S'| \leq 4$. Como argumentamos $\{v_1, v_4, v_8\} \subseteq S'$, logo existe apenas um vértice $v \in S' \cap \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}$. Primeiramente, se $v = v_2$, logo S' não forma caminhos de comprimento dois com extremidades em S' , então $\vec{I}_{P_3}(S') = S'$. Se $v = v_3$, assim $\vec{I}_{P_3}(S') = S' \cup \{v_2\}$. Analogamente, se $v = v_5$ ou $v = v_7$ então $\vec{I}_{P_3}(S') = S' \cup \{v_6\}$. Caso $v = v_6$, temos que $I_{P_3}(S') = \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \neq V(D)$. Analisando cada um dos casos, vemos que $\vec{I}_{P_3}(S') \neq V(D)$, portanto S' não é um conjunto de intervalo.

Vamos agora considerar o número de envoltória. Novamente devemos selecionar os vértices extremos $\{v_1, v_4, v_8\}$. Note que $\vec{I}_{P_3}(\{v_1, v_4, v_8\}) = \{v_1, v_4, v_6, v_8\}$. Já no segundo

passo, note que $\vec{I}_{P_3}^2(\{v_1, v_4, v_8\}) = \{v_1, v_4, v_8, v_6, v_5, v_7\}$, já que contaminamos os vértices v_5 e v_7 graças aos vértices v_4 , v_6 e v_8 . Perceba que este conjunto é convexo. Portanto, estes três vértices v_1 , v_4 e v_8 devem pertencer a qualquer conjunto de envoltória, mas não formam um. Portanto, é necessário e suficiente selecionar um vértice dentre $\{v_2, v_3\}$ para formar um conjunto de envoltória na convexidade \vec{P}_3 de D . Concluimos então que $\vec{hn}_{P_3}(D) = 4$.

1.3 Convexidade de caminhos mínimos de comprimento dois

Quando o conjunto de caminhos P é formado por caminhos induzidos de comprimento dois, temos a convexidade P_3^* (Araujo *et al.*, 2018). Note que, neste caso, para que $w \in I_{P_3^*}(\{u, v\})$, é necessário que haja um caminho $P = (u, w, v)$ em G e que u e v não sejam adjacentes. Nós definimos a convexidade \vec{P}_3^* (Araujo *et al.*, 2023), quando P é formado por todos os caminhos *orientados mínimos* de comprimento dois num grafo orientado D . Ou seja, neste caso para que $w \in \vec{I}_{P_3^*}(\{u, v\})$, é necessário que haja um caminho *orientado* $P = (u, w, v)$ em D e que não haja o arco (u, v) ou que exista um caminho $P' = (v, w, u)$ em D e que não exista o arco (v, u) em D . Observe que para o caso de existência do caminho $P = (u, w, v)$, pode haver o arco (v, u) ou simplesmente não existir arco entre u e v . Analogamente, pode-se deduzir o mesmo para o caso de existência do caminho orientado $P' = (v, w, u)$.

Esta é a diferença entre as convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* . Com relação ao número de envoltória e o número de intervalo na convexidade P_3^* em grafos (não orientados) os denotaremos, respectivamente, por $\vec{hn}_{P_3^*}(G)$ e $\vec{in}_{P_3^*}(G)$. Para a convexidade \vec{P}_3^* em grafos orientados os denotamos como $\vec{hn}_{P_3^*}(G)$ e $\vec{in}_{P_3^*}(G)$.

Inicialmente, vamos determinar o conjunto de intervalo mínimo no grafo da Figura 3 na convexidade \vec{P}_3^* . Devemos selecionar os vértices $\{v_1, v_4, v_8\}$, já que eles não são vértices internos de caminhos orientados com exatamente 3 vértices. Observe que em consequência de v_5 e v_7 serem *vértices transitivos*, ou seja, há um arco partindo de cada vizinho de entrada, para cada vizinho de saída destes, estes dois vértices devem pertencer a todo conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3^* , assim como ocorre no caso da convexidade geodésica. Veja que o conjunto $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ contamina o vértice v_6 , tendo em vista que ele é um vértice interno de um caminho mínimo, de comprimento 2, entre v_4 e v_8 . Por fim, para contaminarmos todo o grafo, basta selecionarmos um dentre os vértices v_2 ou v_3 . Portanto, temos um conjunto de intervalo, por exemplo, $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_2\}$. Vejamos que este é um conjunto de intervalo de tamanho mínimo. Suponha, por absurdo que temos um conjunto de intervalo com no máximo cinco vértices. Este

conjunto com cinco vértices obrigatoriamente deve ser formado por $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}$, o que acarreta na não contaminação dos vértices v_2 e v_3 . Logo, concluímos que $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ é um conjunto de intervalo de tamanho mínimo, e temos $\overrightarrow{\text{in}}_{P_3^*}(D) = 6$.

Vamos agora determinar o número de envoltória na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$. Pelo mesmo argumento dado no parágrafo anterior, devemos selecionar os vértices $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}$. Assim $\overrightarrow{I}_{P_3^*}(\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}) = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_6\}$. Veja que o conjunto $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_6\}$ é convexo. Portanto, é necessário e suficiente selecionar um vértice dentre $\{v_2, v_3\}$ para formar um conjunto de envoltória na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$ de D . Podemos então concluir que $\overrightarrow{\text{hn}}_{P_3^*}(D) = 6$.

1.4 Convexidade de Ciclos

Esta tese traz contribuições com relação a outros parâmetros e uma convexidade em grafos não orientados. A *convexidade de ciclos* foi definida em (Araujo *et al.*, 2018), motivados por aplicações em teoria de nós (Araujo *et al.*, 2020). Nesta convexidade, dado um grafo G e um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, dizemos que um vértice $v \notin S$ pertence à imagem da função de intervalo na convexidade de ciclos, definida como I_{cc} , se v pertence a um ciclo em $G[S \cup \{v\}]$.

Os artigos (Araujo *et al.*, 2018) e (Araujo *et al.*, 2024) apresentam resultados, respectivamente, para o número de intervalo e o número de envoltória na convexidade de ciclos. Nesta tese consideramos outros parâmetros, contudo, estreitamente relacionados.

O *número de convexidade* (Chartrand *et al.*, 2002) é definido como o tamanho do maior subconjunto convexo próprio de um grafo G . Escrevemos cn para representar este parâmetro. Na Figura 2, veja que $V \setminus \{v_1\}$ é um conjunto convexo próprio máximo de G na convexidade de ciclos. Já o *tempo de percolação*, como visto em (Benevides; Przykucki, 2013) para a convexidade P_3 , é o tempo máximo $k \geq 1$ onde existe $S \subseteq V(G)$, tal que $I^k(S) = V(G)$ e $I^k(S) \setminus I^{k-1}(S) \neq \emptyset$. Em outras palavras, o tempo de percolação é o maior tempo de infecção dentre todos os conjuntos de envoltória. Escrevemos pt para representar parâmetro tempo de percolação. Para o grafo G na Figura 2, se tomarmos $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$, temos que $I_{cc}(S) = S \cup \{v_6\}$, enquanto que $I_{cc}^2(S) = V(G)$. O tempo de percolação de G é ao menos 2. Suponha, por contradição, que existe um subconjunto S' com tempo de percolação 3. Note que $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq S'$ já que os vértices deste conjunto não estão em nenhum ciclo do grafo. Pode-se verificar que no subgrafo induzido por $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, ocorre $|S' \cap \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}| \geq 3$. Lembre que S' é um conjunto de envoltória na convexidade de ciclos. Se $S' \cap \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \supseteq \{v_4, v_6, v_8\}$, então $I_{cc}(S') = V(G)$. Caso $S' \cap \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \supseteq \{v_4, v_7, v_8\}$, temos $I_{cc}^2(S') =$

$V(G)$. Analisando os outros possíveis casos, concluímos que S' tem tempo de percolação no máximo 2. Contradizendo a hipótese.

1.5 Nossas contribuições e organização do texto

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos para o entendimento da tese. Dedicamos o Capítulo 3 à apresentação dos resultados referentes ao trabalho apresentado no *XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* (LAGOS 2023), pode ser vista em (Araujo *et al.*, 2023). A versão completa (Araujo *et al.*, 2024) do trabalho foi submetido à *Discrete Applied Mathematics* feito em coautoria com os orientadores desta tese e L. Penso.

Para um grafo orientado fortemente conexo D , provamos que o número de envoltória $\vec{hn}_g(D) \leq |A(D)| - |V(D)| + 2$ e que existe um grafo orientado forte que tem $\vec{hn}_g(D) = |A(D)| - |V(D)|$. Determinamos valores exatos para o número de envoltória na convexidade geodésica e na convexidade \vec{P}_3^* para torneios. Estas fórmulas mostram que existe um algoritmo com tempo polinomial para estes parâmetros em torneios. Apresentamos uma prova mais curta para $\vec{hn}_{P_3}(T) \leq 2$ quando T é um torneio, este problema já havia sido demonstrado em (Haglin; Wolf, 1996). Usamos este resultado para deduzir que $\vec{hn}_{P_3}(D)$ pode ser calculado em tempo polinomial, mesmo que o grafo subjacente seja cobipartido ou split.

Além disso, provamos resultados sobre a complexidade computacional destes problemas nas convexidades \vec{g} , \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* . Fornecemos uma demonstração de que dados um grafo orientado D e um inteiro positivo k como entrada, caso decidir se $\vec{in}_g(D) \leq k$ ou se $\vec{hn}_g(D) \leq k$ for um problema da classe NP-difícil ou $W[i]$ -difícil parametrizado em k , para algum $i \in \mathbb{Z}_+^*$, então vale o mesmo sob a hipótese adicional do grafo subjacente de D ser bipartido. Provamos que decidir se $\vec{hn}_{P_3}(D) \leq k$ é $W[2]$ -difícil parametrizado em k mesmo se o grafo D é acíclico e seu grafo subjacente é bipartido. Mostramos que $\vec{hn}_g(D) \leq k$ é $W[2]$ -difícil parametrizado em k mesmo quando D é acíclico. Em seguida, provamos que decidir se $\vec{in}_{P_3}(D) \leq k$ parametrizado em k é NP-completo, mesmo se D não tem ciclos orientados e seu grafo subjacente é bipartido cordal. Por fim, mostramos que decidir se $\vec{in}_{P_3}(D) \leq k$ e $\vec{in}_{P_3^*}(D) \leq k$ é $W[2]$ -difícil parametrizado em k , mesmo que o grafo orientado D seja split. No final deste capítulo provamos que o número de intervalo e o número de envoltória podem ser calculados em tempo polinomial para grafos com largura em clique limitada usando o Teorema de Courcelle.

No Capítulo 4, apresentamos contribuições obtidas em coautoria com os orientadores e T. Marcilon. O parâmetro $in^-(G)$ é o número de intervalo mínimo, numa dada convexidade,

dentre todas as orientações possíveis das arestas de um grafo não orientado G . Primeiramente, provamos que $\text{in}_{\vec{P}_3}(G) = \text{in}_{P_3}(G)$. Com relação a limitantes, provamos que para um grafo não orientado G com subconjunto de vértices com grau 1 definido como V_1 e com n vértices, vale $\text{in}_{P_3}(G) \leq |V_1| + \left\lceil \frac{2(n-|V_1|)}{3} \right\rceil$. Mostramos que para um grafo orientado D com n vértices e com conjunto de vértices extremos $\text{Ext}(D)$ na convexidade correspondente, vale $\vec{\text{in}}_{P_3}(D) \leq \left\lceil \frac{2(n-|\text{Ext}(D)|)}{3} \right\rceil + |\text{Ext}(D)|$ e $\vec{\text{in}}_{P_3^*}(D) \leq \left\lceil \frac{2(n-|\text{Ext}(D)|)}{3} \right\rceil + |\text{Ext}(D)|$. Seja $D = (K, S)$ um grafo split orientado, onde K é um torneio, S é um conjunto independente e $\text{Ext}(D)$ o conjunto de vértices extremos de D na convexidade correspondente, mostramos que vale o limitante $\vec{\text{hn}}_{P_3^*}(D) \leq \vec{\text{hn}}_{P_3^*}(D[K]) + |\text{Ext}(D) \cap S|$. Provamos ainda que um conjunto de intervalo mínimo na convexidade \vec{P}_3 em um torneio T com n vértices pode ser encontrado em tempo $\mathcal{O}(n^{\log n})$. Além disso, demonstramos que decidir se $\vec{\text{in}}_{P_3^*}(T) \leq k$ é $W[2]$ -difícil parametrizado em k .

Abaixo indicamos os resultados de complexidade provados para os parâmetros número de intervalo e número de envoltória nas convexidades geodésica, \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* . Complementamos o estudo apresentado em (Araujo; Arraes, 2021) do ponto de vista computacional de determinação dos parâmetros número de intervalo e número de envoltória quando o grafo subjacente do grafo orientado dado como entrada é bipartido, cobipartido ou split. A Tabela 1 faz um resumo dos resultados de complexidade que demonstramos para o número de intervalo e número de envoltória nas convexidades geodésica, \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* . Ressaltamos que na tabela temos resultados provados por (Haglin; Wolf, 1996) e (Araujo; Arraes, 2021).

No Capítulo 5, apresentamos resultados de trabalho em coautoria com T. Marcilon e C. V. G. Lima submetido à *Discrete Applied Mathematics* e pode ser encontrado em (Lima *et al.*, 2024). Provamos que decidir se $\text{cn}_{cc}(G) \geq k$ é NP-completo e $W[1]$ -difícil parametrizado em k . Se G é um cacto, mostramos que seu tempo de percolação $\text{pt}_{cc}(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial. Demonstramos que podemos determinar em tempo cúbico se um conjunto de envoltória S de um grafo G tem $I_{cc}(S) \neq V(G)$ ou que tal conjunto não existe, o que implica em um algoritmo polinomial para decidir se $\text{pt}_{cc}(G) \geq 2$. Por fim, provamos que decidir se o tempo de percolação de um grafo não orientado G é pelo menos k , com $k \geq 9$ fixo, é NP-completo. Resumimos nossos resultados na convexidade de ciclos para grafos não orientados na Tabela 2.

Tabela 1 – Resumo dos resultados de complexidade de acordo com as classes de grafo estudadas nas convexidades geodésica, \vec{P}_3 e \vec{P}_3^*

Classe	Parâmetros	Complexidade
Torneios	$\vec{hn}_g, \vec{hn}_{P_3^*}, (\vec{hn}_{P_3} \text{ (Haglin; Wolf, 1996)})$	P
Acíclico	$\vec{in}_{P_3^*}$ \vec{hn}_g	W[2]-difícil em k W[2]-difícil em k
Acíclico com subjacente bipartido	$(\vec{hn}_g \leq k \text{ (Araujo; Arraes, 2021)})$ $(\vec{in}_g, \vec{in}_{P_3}, \vec{in}_{P_3^*} \leq k \text{ (Araujo; Arraes, 2021)})$	NP-completo W[2]-difícil em k
Subjacente bipartido cordal	$\vec{hn}_{P_3}, \vec{hn}_{P_3^*} \leq k$ $\vec{in}_{P_3}, \vec{in}_{P_3^*} \leq k$	W[2]-difícil em k NP-completo
Subjacente split	$(\vec{in}_g \leq k \text{ (Araujo; Arraes, 2021)})$ $\vec{in}_{P_3}, \vec{in}_{P_3^*} \leq k$	W[2]-difícil em k W[2]-difícil em k
Subjacente cobipartido	\vec{hn}_{P_3} $(\vec{in}_g, \vec{in}_{P_3^*} \leq k \text{ (Araujo; Arraes, 2021)})$	P W[2]-difícil em k
Grafos orientados em geral	$\vec{in}_{P_3}, \vec{in}_{P_3^*}, \vec{hn}_{P_3}, \vec{hn}_{P_3^*}$	P <i>FPT</i> pela largura em clique k .

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Resultados de complexidade em grafos não orientados na convexidade de ciclo

Classe	Parâmetros	Complexidade
Grafos não orientados	cn_{cc}	NP-completo e W[1]-difícil em k
	$pt_{cc} \geq 2$	P
Cactos	$pt_{cc} \geq 9$	NP-completo
	pt_{cc}	P

Fonte: elaborado pelo autor.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Noções gerais e notações

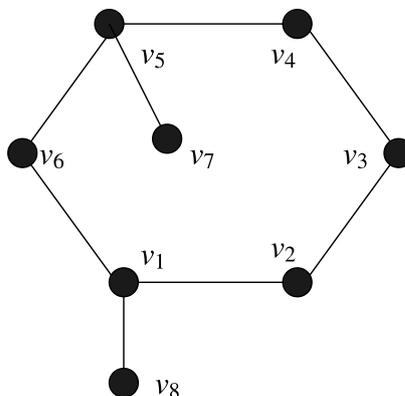
Inicialmente, vamos apresentar conceitos básicos para uma boa leitura do nosso trabalho. Um *grafo* $G = (V, E)$ é formado por um conjunto de *vértices* V , um conjunto de *arestas* E e uma função que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices não necessariamente distintos. Esta função, denotada por φ , é chamada de *função de incidência*. Sejam $u, v \in V$ e $e \in E$ tais que a função $\varphi(e)$ associa a e o par u, v . Dizemos que a aresta e tem u e v como suas *extremidades*. Além disso, dizemos que e *incide* em u e v e que u e v são *adjacentes*.

Se G é um grafo e existe uma aresta e cujas extremidades são ambas um mesmo vértice, então e é um *laço*. Quando o grafo possui arestas distintas com as mesmas extremidades, dizemos que possui *arestas múltiplas*. Um grafo é dito *multigrafo* se tem arestas múltiplas e *simples* quando não tem laços nem arestas múltiplas. Para um exemplo, veja a Figura 4.

Neste texto, todos os grafos estudados são simples, a menos que explicitamente seja dito o contrário. Portanto, usamos a notação usual de $e = uv$ para indicar que as extremidades da aresta e são u e v e não nos referiremos a função de incidência φ . Além disso, as definições a seguir também são simplificadas, tendo em vista que os grafos estudados são simples.

Para cada $v \in V(G)$, definimos $N_G(v) = \{x \in V(G) \mid vx \in E(G)\}$ como a *vizinhança* do vértice v . Neste contexto, definimos o grau de um vértice $v \in V(G)$, $d_G(v)$ ou $d(v)$, como o número de incidências de arestas em v . Escrevemos $\delta(G)$ para representar o grau mínimo e $\Delta(G)$ o grau máximo dentre todos os vértices de G . Quando $\delta(G) = \Delta(G)$ dizemos que o grafo

Figura 4 – Exemplo de um grafo simples



Fonte: elaborado pelo autor.

G é regular.

Dizemos que G e H são *isomorfos*, se existe uma função $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Quando isto ocorre, f é um *isomorfismo*. Uma *classe de isomorfismo* de grafos é uma classe de equivalência sob a relação de isomorfismo. Assim sendo, a noção informal de *grafos não rotulados* se refere a grafos que representam suas classes de equivalência da relação de isomorfismo. Neste texto, como de costume na área de Teoria dos Grafos, os rótulos de vértices e arestas não são relevantes e, portanto, todas as definições e resultados, neste trabalho se aplicam a grafos não rotulados.

Um *digrafo* D é também uma tripla formada por um conjunto de vértices $V(D)$, um conjunto de *arcos* $A(D)$ e uma função que associa a cada arco de D um par ordenado de vértices (não necessariamente distintos). Seja $a \in A(D)$ tal que $a = (x, y)$, onde a é o arco que tem início em x e segue para y . Dizemos que x é chamado de *cauda* e y é chamado de *cabeça* de a . Sendo $x, y \in V(D)$ vértices de um digrafo, quando não existir perigo de ambiguidade, escrevemos $(x, y) \in A(D)$ indicando que existe um arco partindo de x e indo em direção a y .

Analogamente à definição para um grafo, definimos um *laço* em um digrafo. A noção de arestas múltiplas tem também sua versão equivalente no contexto de grafos direcionados. Dois arcos $a_1 = (x_1, y_1)$ e $a_2 = (x_2, y_2)$ são ditos *arcos múltiplos* em D se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Além disso, dado um vértice $v \in V(D)$, definimos como $d_D^-(v)$ como grau de entrada de v em D , que é a quantidade de arcos que tem v como cabeça. De modo análogo, $d_D^+(v)$ é o grau de saída de v em D que corresponde à quantidade de arcos que tem v como cauda. Define-se também a *vizinhança de saída* de v em D como $N_D^+(v) = \{y \in V(G) \mid \exists a \in A(D)(\varphi(a) = (v, y))\}$. A *vizinhança de entrada* $N_D^-(v)$ é definida analogamente.

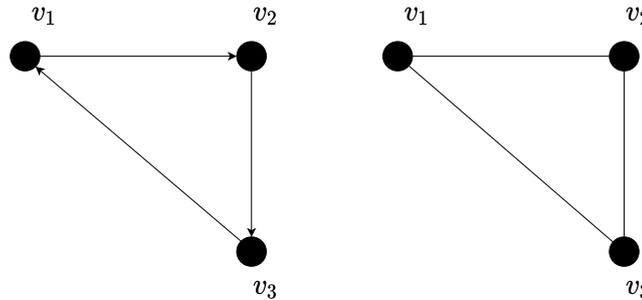
Definimos um *grafo orientado* D como um digrafo obtido da orientação de um grafo simples G , ou seja, convertendo cada aresta de G em um arco com mesmas extremidades. Note que D não possui laços e nem arcos múltiplos, tampouco arcos (u, v) e (v, u) , simultaneamente, para dois vértices distintos $u, v \in V(G)$.

Seja D um digrafo e $v \in V(D)$ um vértice de D . Se v tem grau de entrada igual a zero, denominamos v como *fonte*. Se v possui grau de saída igual a zero, dizemos que v é um *sumidouro*. Finalmente, v é dito *transitivo* se, para quaisquer $u, w \in V(D)$ tais que $(u, v), (v, w) \in A(D)$, então existe o arco (u, w) .

Um *torneio* é a orientação de um grafo completo. Dado um digrafo D , seu grafo *subjacente* G é o grafo não orientado obtido a partir de D desconsiderando a orientação dos

arcos, ou seja, tem o mesmo conjunto de vértices e exatamente uma aresta para cada arco de D com as mesmas extremidades. Veja que o digrafo D é uma orientação do grafo não orientado G . Um exemplo é apresentado na Figura 5.

Figura 5 – À esquerda, um grafo orientado D e à direita seu respectivo grafo subjacente.



Fonte: elaborado pelo autor.

Dizemos que H é um subgrafo de um grafo G , denotado por $H \subseteq G$, quando H é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Quando $H \subseteq G$, dizemos que G contém H . H é *subgrafo induzido* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e as arestas em H são exatamente as arestas entre estes vértices em G , i.e., para quaisquer $u, v \in V(H)$, se $uv \in E(G)$, então $uv \in E(H)$.

Para um grafo simples G , definimos \bar{G} como o seu *complementar*, onde $V(\bar{G}) = V(G)$ e $uv \in E(\bar{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$. Dizemos que uma *clique* é um conjunto de vértices de um grafo, onde estes vértices são dois a dois adjacentes. Um conjunto *independente*, ou conjunto *estável*, é um conjunto de vértices onde estes são dois a dois não adjacentes. Definimos o parâmetro $\alpha(G)$ (resp. $\omega(G)$) como a cardinalidade máxima de um conjunto independente (resp. de uma clique) no grafo G .

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido*, se podemos particionar V em dois conjuntos distintos $V = A \cup B$, onde A e B são conjuntos independentes. Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *split*, se pudermos particionar $V = C \cup I$, onde C é um grafo completo e I é um conjunto independente. Um *grafo cobipartido* é um grafo que é o complemento de um grafo bipartido.

Um *passeio* em um grafo (orientado) G é uma sequência $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$, tal que $v_0, \dots, v_k \in V(G)$ $e_1, \dots, e_k \in E(G)$, com $e_i = v_{i-1}v_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. O comprimento de um passeio $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$ é igual a k . Um *passeio fechado* é um passeio, tal que $v_0 = v_k$. Uma *trilha* é um passeio no qual você pode repetir vértices, mas não pode repetir aresta.

Definimos um *caminho* num grafo simples (orientado), como um passeio em que não há repetição de vértice. Denotaremos um caminho com n vértices como P_n . Chamaremos

de uv -caminho em um grafo, um caminho $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$, onde $v_0 = u$ e $v_k = v$. Quando temos um grafo orientado, dizemos que temos um *caminho orientado*. A *distância* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é comprimento do uv -caminho mínimo no grafo. Dois caminhos P^1 e P^2 entre $u, v \in V(G)$ distintos num grafo, são ditos *internamente disjuntos*, se $P^1 \cap P^2 = \{u, v\}$.

Um *ciclo* com três ou mais vértices é um grafo cujos vértices podem ser ordenados de maneira cíclica de modo que estes vértices são adjacentes se, e somente se, são consecutivos nesta ordem. Utilizamos a notação C_n ou n -ciclo, para um ciclo com n vértices. A *cintura* de um grafo G é o tamanho do ciclo mínimo que está contido em G .

Dizemos que um grafo G é *conexo*, se dados quaisquer $x, y \in V(G)$, existe um xy -caminho em G , ligando x e y . Caso contrário, o grafo é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* ou *componente* é um subgrafo conexo maximal (com relação à ordem parcial de subgrafo). Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$, definimos $G - S$ como o subgrafo formado pela remoção do conjunto S . Analogamente, seja $F \subseteq E(G)$, definimos como $G - F$ o subgrafo de G formado a partir da remoção de todas as arestas no conjunto F . Definimos um *cacto* como um grafo conexo no qual dois ciclos distintos do grafo compartilham no máximo um vértice.

Dizemos que um digrafo D é *fortemente conexo* se, para todo par de vértices distintos u e v de D , existe um caminho orientado de u para v e um caminho de v para u . Os subgrafos maximais fortemente conexos do digrafo D são denominados como *componentes fortes* ou *fortemente conexas*.

Seja G um grafo. Escrevemos $G - v$ ou $G - S$ para representar o subgrafo obtido a partir de G deletando, respectivamente, o vértice v ou o subconjunto de vértices S . Para um grafo G conexo, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *separador* ou um *corte de vértices* se $G - S$ tem mais de uma componente. Um *vértice de corte*, ou *articulação*, é definido como um vértice $v \in V(G)$, onde $G - v$ tem mais de uma componente.

Um *bloco* de um grafo G é um subgrafo maximal conexo de G que não possui vértice de corte. Se o próprio G é um grafo maximal conexo sem vértice de corte, dizemos que G é um bloco.

Definimos como uma *floresta* F um grafo que não possui ciclos. Uma floresta T conexa é uma *árvore*. Se $v \in V(T)$ e $d_T(v) = 1$, dizemos que v é uma *folha*. Dizemos que um subgrafo G' de um grafo G é *gerador*, se G' é formado a partir de uma dada remoção de arestas de G . Assim, uma *árvore geradora* é um subgrafo gerador que é também uma árvore.

Dizemos que um subconjunto de vértices S , em um grafo orientado D , é um *conjunto*

dominante se, para todo $u \in V(D) \setminus S$, ocorre $u \in N^+(v)$, para algum $v \in S$. Definimos $\gamma^+(D)$ como o tamanho de um menor conjunto dominante no grafo orientado D . Analogamente, definimos um subconjunto de vértices S de um grafo G , como conjunto dominante (não orientado) se, para todo $u \in V(D) \setminus S$, temos $u \in N(v)$, para algum $v \in S$. O parâmetro $\gamma(G)$ define o tamanho de um menor conjunto dominante (não orientado) no grafo G .

Seja G um grafo não orientado. Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é *k-dominante* se cada vértice $v \in V(G) \setminus S$ é adjacente a k vértices em S . A cardinalidade de um conjunto *k-dominante* mínimo de um grafo G é denotada por $\gamma_k(G)$.

Para um grafo orientado D , um *conjunto de dominação gêmea* $S \subseteq V(D)$ é tal que todo vértice $v \in V(D) \setminus S$ possui um vizinho de entrada e um vizinho de saída em S . O *número de dominação gêmea*, denotado por $\gamma^*(D)$, é a cardinalidade de um conjunto de dominação gêmea mínimo de D .

2.2 Teoria da complexidade parametrizada

A teoria da complexidade parametrizada foi introduzida por Downey e Fellows nos artigos (Downey *et al.*, 1995; Downey; Fellows, 1995a; Downey; Fellows, 1995b). Sugerimos (Downey; Fellows, 2013; Cygan *et al.*, 2005) para mais detalhes sobre complexidade parametrizada. Um *problema parametrizado* é uma linguagem $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$, onde Σ é um alfabeto fixo. Para uma instância $I = (x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, denominamos k como parâmetro. Dado um problema de decisão clássico $L_c \subseteq \Sigma^*$ e uma função $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, denotamos por $L_c / \kappa = \{(x, \kappa(x)) \mid x \in L_c\}$ o problema parametrizado associado.

Um problema parametrizado L é *tratável a parâmetro fixo* ou *fixed-parameter tractable* (FPT) se existe um algoritmo \mathcal{A} , uma função computável f e uma constante c , tal que, dada uma instância $I = (x, k)$, decide corretamente se $I \in L$ em tempo limitado por $f(k) \cdot |I|^c$.

Uma *redução parametrizada* de um problema parametrizado P_1 para um problema P_2 é um algoritmo que, dada uma instância (x, k) de P_1 retorna uma instância (x', k') de P_2 tal que:

- (x, k) é uma instância SIM de P_1 se, e somente se, (x', k') é uma instância SIM de P_2 ;
- $k' \leq g(k)$ para alguma função computável g ;
- o tempo de execução é limitado por $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$ para alguma função computável f .

Um *circuito Booleano* é um grafo acíclico orientado onde os vértices são rotulados da seguinte forma:

- todo vértice com grau de entrada 0 é um *vértice de entrada*;
- todo vértice com grau de entrada 1 é um *vértice negação*;
- todo vértice com grau de entrada pelo menos 2 é um *e-vértice* ou um *ou-vértice*.

Adicionalmente, exatamente um dos vértices com grau de saída 0 é rotulado como *vértice de saída*. A *profundidade* do circuito é o comprimento máximo de um caminho a partir de um vértice entrada para um vértice de saída.

Atribuímos valores 0 – 1 para os vértices de entrada. Se o valor da porta de saída é 1 nas atribuições dos vértices de entrada, dizemos que o circuito é satisfativo. O *peso* de uma atribuição é o número de portas de entrada que recebem o valor 1.

Para um dado circuito C e um inteiro k , definimos como SATISFATIBILIDADE DO CIRCUITO PONDERADO, do inglês WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY (WCS), o problema de se decidir se C tem uma atribuição satisfatível com peso exatamente k .

Seja \mathcal{C} uma classe de circuitos. Definimos $WCS[\mathcal{C}]$ como a restrição do problema onde o circuito de entrada C pertence a \mathcal{C} . Definimos *vértices pequenos* como vértices com grau no máximo dois (no grafo subjacente do digrafo). Por outro lado, dizemos que temos *vértices grandes* quando eles têm grau pelo menos três (idem). O *entrelaçamento* de um circuito é o número máximo de vértices grandes em um caminho de um vértice de entrada para o vértice de saída. Denotamos por $\mathcal{C}_{t,d}$ a classe de circuitos com entrelaçamento no máximo t e profundidade no máximo d

A classe $W[t]$ para todo $t \geq 1$ é formada por todos os problemas parametrizados que possuem uma redução parametrizada para o problema $WCS[\mathcal{C}_{t,d}]$, para algum $d \geq 1$. A classe $W[t]$ -difícil é formada pelo conjunto de problemas para os quais existe uma redução parametrizada a partir de todos os problemas em $W[t]$. A classe $W[t]$ -completo é formada pela interseção das duas primeiras classes definidas neste parágrafo.

Sabe-se que $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subset \dots$, contudo, não sabemos se $FPT = W[1]$. Porém, há forte suspeita de que $FPT \neq W[1]$, sendo que é fortemente difundido que provar que um problema é $W[1]$ -difícil é um forte indicativo que o problema não é FPT. Deve-se observar que se $FPT \neq W[1]$, então $P \neq NP$.

2.3 3-SAT e a Hipótese do Tempo Exponencial

Um *literal* é uma variável booleana ou a sua negação, as quais respectivamente indicamos por x ou \bar{x} . Uma *cláusula* é disjunção de literais, como, por exemplo, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

Uma fórmula proposicional está na *forma normal conjuntiva*, chamada de fórmula CNF, se é uma conjunção de cláusulas, como abaixo

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2).$$

Uma fórmula é denominada por *3CNF-fórmula* se cada cláusula tem exatamente três literais. A fórmula acima é uma 3CNF-fórmula. Lembramos que uma fórmula booleana é satisfatível se alguma atribuição de valor-verdade às variáveis faz a fórmula ser verdadeira. Assim o problema 3-SAT tem como entrada uma 3CNF-fórmula e queremos saber se esta é satisfatível.

Por (Impagliazzo *et al.*, 2001), a *hipótese do tempo exponencial* ou, em inglês, *exponential time hypothesis* (ETH) supõe que existe uma constante $c_3 > 0$ tal que, para um polinômio p e uma constante $c < c_3$, o problema 3-SAT não pode ser decidido em tempo $O(2^{cn} p(n))$, onde n representa o número de variáveis na instância do 3-SAT. É bem conhecido que o problema 3-SAT é NP-completo (Karp, 1972).

Por fim, assumindo verdadeira a ETH, podemos tirar conclusões com relação a limites inferiores para o tempo de problemas NP-difíceis, W[1]-difíceis e FPT. Caso seja de fato verdadeira, a hipótese do tempo exponencial implicaria que $P \neq NP$.

2.4 Lógica monádica de segunda ordem, largura em clique e o Teorema de Courcelle

Vamos iniciar com uma revisão sobre as fórmulas monádicas de segunda ordem em grafos. Para mais detalhes, veja (Courcelle; Engelfriet, 2012). Vamos usar as variáveis minúsculas x, y, z, \dots (respectivamente, as variáveis maiúsculas X, Y, Z, \dots) para denotar vértices (resp. subconjuntos de vértices) de grafos. As fórmulas atômicas são $x = y$ e $x \in X$. O predicado $\text{arc}(x, y)$ define um arco de x para y . O conjunto MSO_1 de lógica monádica de segunda ordem é o conjunto de fórmulas formado por fórmulas atômicas com conectivos Booleanos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, quantificações de elementos $\exists x$ e $\forall x$ e quantificações de conjuntos $\exists X$ e $\forall X$. Uma variável que não é associada a um quantificador é denominada elemento livre. Escrevemos $\varphi(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_q)$ para expressar a fórmula sobre as variáveis livres $x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_q$. Um (di)grafo G *modela* φ se ao substituirmos as variáveis elementares por vértices de G e definimos as variáveis por subconjuntos de vértices de G , então φ é sempre verdade. Quando isto ocorre, denotamos $G \models \varphi(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_q)$. Para uma dada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_q)$

em MSO_1 , seja $opt_\varphi \in \{\min, \max\}$ o problema de determinar o valor $opt_\varphi (\sum_{i=1}^q |Z_i|)$ tal que $G \models \varphi(x_1, \dots, x_m, Z_1, \dots, Z_q)$, dentre todas as possíveis escolhas de $Z_1, \dots, Z_q \subseteq V(G)$.

Segundo (Fellows *et al.*, 2009), vamos definir largura em clique. Seja k um inteiro positivo. Um k -grafo é um grafo onde seus vértices são rotulados por inteiros de $\{1, \dots, k\}$. Desta forma um grafo é um k -grafo onde cada vértice do grafo é rotulado por 1. Dizemos que um k -grafo é um k -grafo inicial se possui apenas um vértice v rotulado por $i \in \{1, \dots, k\}$ e escrevemos $i(v)$ para representá-lo.

A largura em clique de um grafo G é o menor inteiro k tal que G pode ser construído de k -grafos iniciais por repetidas aplicações das operações:

1. União disjunta (denotado por \oplus);
2. Rerotulação: trocar todos os rótulos i para j (denotado por $\rho_{i \rightarrow j}$);
3. Inserção de arestas: conectar todos os vértices rotulados por i com todos os vértices rotulados por j , com $i \neq j$ (denotado por $\eta_{i,j}$ ou $\eta_{j,i}$); as arestas existentes não são duplicadas.

Uma construção de um k -grafo usando as operações acima pode ser representado por um termo algébrico composto por $\oplus, \rho_{i \rightarrow j}$ e $\eta_{i,j}$ (com $i, j \in \{1, \dots, k\}$ e $i \neq j$). Este termo é chamado de expressão para largura em clique definindo G . Uma k -expressão é uma expressão para largura em clique no qual no máximo k rótulos diferentes ocorrem. Portanto, a largura em clique de um grafo G é o menor inteiro k , tal que G pode ser definido a partir de uma k -expressão. Por exemplo, o grafo completo K_4 com vértices u, v, w, x é definido pela expressão para largura em clique abaixo:

$$\rho_{2 \rightarrow 1}(\eta_{1,2}(\rho_{2 \rightarrow 1}(\eta_{1,2}(\rho_{2 \rightarrow 1}(\eta_{1,2}(2(u) \oplus 1(v))) \oplus 2(w))) \oplus 2(x))).$$

Note que a largura em clique do grafo K_4 é no máximo dois. De modo geral, todo grafo completo com pelo menos dois vértices tem largura em clique igual a dois.

Teorema 2.4.1. (Courcelle; Engelfriet, 2012) *Seja k uma constante fixada. Para toda fórmula MSO_1 escrita como $\varphi(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_q)$, o problema $opt_\varphi \in \{\min, \max\}$ pode ser resolvido em tempo linear para grafos com largura em clique no máximo k , quando é dada uma expressão para largura em clique. Se não possuímos tal expressão, podemos calcular uma expressão usando no máximo 2^{k+1} rótulos em tempo cúbico.*

Enfatizamos que o Teorema de Courcelle 2.4.1 é válido para o caso de grafos orientados com grafo subjacente com largura em clique limitada. A definição de grafo nos termos de MSO1 tem as arestas como pares ordenados de vértices e podemos considerar os arcos como arestas.

3 CONVEXIDADES GEODÉSICA, \vec{P}_3 E \vec{P}_3^* : LIMITANTES E COMPLEXIDADE

O trabalho encontrado neste capítulo foi aprovado como *brief announcement* no simpósio *LAGOS-Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization 2023*. O artigo correspondente a este capítulo foi submetido à *Discrete Applied Mathematics*, em coautoria com a professora da Universidade de Ulm, Lucia Penso e meus orientadores Júlio César Silva Araújo e Ana Karolinna Maia. A seguir, apresentamos contribuições para os parâmetros número de intervalo e número de envoltória de grafos orientados nas convexidades \vec{g} , \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* .

3.1 Preliminares

Seja D um grafo orientado. Se $S \subseteq V(D)$ é convexo em uma convexidade \mathcal{C} , dizemos que $x \in S$ é um vértice extremo de S se $x \notin H_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\})$. Denotamos por $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(S)$, o conjunto de vértices extremos de S na convexidade \mathcal{C} . Quando não for ambíguo, omitiremos o subíndice indicando qual a convexidade estamos considerando. Seja $S \subseteq V(D)$, dizemos que S é co-convexo numa dada convexidade se $V(D) \setminus S$ é convexo.

Proposição 3.1.1. *Seja D um grafo orientado e seja $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3, \vec{P}_3^*\}$. Se $S \neq \emptyset$ é co-convexo em \mathcal{X} , então todo conjunto de intervalo e todo conjunto de envoltória em \mathcal{X} contém pelo menos um vértice de S . Em particular, se $v \in V(D)$ e é uma fonte ou um sumidouro, então v necessariamente pertence a qualquer conjunto de intervalo e qualquer conjunto de envoltória em \mathcal{X} de D . Além disso, se $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3^*\}$, e $v \in V(D)$ é transitivo, então v pertence a qualquer conjunto de intervalo e conjunto de envoltória na convexidade \mathcal{X} em D .*

Demonstração. Se S for co-convexo na convexidade \mathcal{X} , por definição, S deve intersectar qualquer conjunto de intervalo e qualquer conjunto de envoltória na convexidade \mathcal{X} de D . Se v é uma fonte ou um sumidouro, nenhum (u, w) -caminho orientado, para algum $u, w \in V(D) \setminus \{v\}$, tem v como vértice interno. Analogamente, se v for transitivo, nenhum (u, w) -caminho mínimo orientado tem v como vértice interno. \square

Para um grafo orientado D e um vértice $v \in V(D)$, definimos a *seção de entrada* (resp. *seção de saída*) de v em D , como o conjunto de vértices u tendo um (u, v) -caminho (resp. (v, u) -caminho) em D e denotamos por $S_D^-(v)$ (resp. $S_D^+(v)$). Em particular, se $u \in S_D^+(v)$, dizemos que u é alcançável por v em D .

Dizemos que D é um grafo orientado forte ou fortemente conexo se, para cada par u, v de vértices distintos de D , há um caminho de u para v e um caminho de v para u em D . Os subgrafos fortemente conexos maximais de um grafo orientado D são suas *componentes fortes*. O conjunto de vértices de todo grafo orientado podem ser particionados em subconjuntos que induzem suas componentes fortemente conexas. Além disso, há uma ordem acíclica destas componentes. Tal ordem acíclica pode ser vista através de um digrafo auxiliar acíclico D' construído da seguinte forma: temos um vértice em D' para cada componente forte de D e um arco em D' sempre que houver pelo menos um arco entre as componentes correspondentes a estes vértices em D na mesma direção. Veja (Bang-Jensen; Gutin, 2008) para mais detalhes. Diremos que uma componente forte C de D é uma *componente forte fonte* (resp. *componente forte sumidouro*) se todo arco de D com uma extremidade $u \in V(C)$ e a outra $v \in V(D) \setminus V(C)$ é orientado de u para v (resp. de v para u), ou seja, o vértice correspondente no digrafo auxiliar acíclico D' mencionado acima é uma fonte (resp. sumidouro) de D' . Já uma *componente forte transitiva* C de D é tal que, para cada $u, v, w \in V(D)$ satisfazendo $v \in V(C)$, com $u, w \in V(D) \setminus V(C)$, arcos $(u, v), (v, w) \in A(D)$, então implica que há um arco $(u, w) \in A(D)$ (em particular, note que u e w não podem pertencer à mesma componente forte de D). Ou seja, neste caso o vértice correspondente em D' à componente C é um vértice transitivo de D' .

Podemos fazer uma observação:

Proposição 3.1.2. *Seja D um grafo orientado não fortemente conexo com grafo subjacente conexo. Seja $u \in V(D)$ um vértice que não está contido em uma componente forte sumidouro (resp. fonte) de D , então existe uma componente forte sumidouro $C \subseteq D$ (resp. fonte) tal que $V(C) \subseteq S_D^+(u)$ (resp. $V(C) \subseteq S_D^-(u)$).*

Demonstração. É suficiente tomar um caminho orientado maximal P em D , começando em u . Note que a outra extremidade w de P distinta de u é um sumidouro ou está em uma componente forte sumidouro C de D . Além disso, como C é forte, qualquer vértice de C é alcançável a partir de w . Logo, $V(C) \subseteq S_D^+(w)$. A demonstração para o caso de uma componente forte fonte é análoga. \square

Seja $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3^*\}$ e seja $S \subseteq V(D)$ um conjunto co-convexo na convexidade \mathcal{X} em um grafo orientado D . Logo, nenhum (u, v) -caminho mínimo P (de comprimento dois no caso de $\mathcal{X} = \vec{P}_3^*$) contém um vértice interno de P em S , quando os vértices $u, v \notin S$. Isto ocorre em três situações:

- não existe arco $(u, w) \in A(D)$, tais que $u \in V(D) \setminus S$ e $w \in S$, neste caso, dizemos que S é um conjunto co-convexo fonte em \mathcal{X} ;
- não existe arco $(w, u) \in A(D)$, tais que $u \in V(D) \setminus S$ e $w \in S$, dizemos que S é um conjunto co-convexo sumidouro em \mathcal{X} ;
- existem arcos $(u, w), (z, v) \in A(D)$, tais que $u, v \in V(D) \setminus S$, $u \neq v$, $w, z \in S$ (w pode ser igual a z), mas nenhum caminho orientado mais curto (u, v) (de comprimento dois, no caso $\mathcal{X} = \vec{P}_3^*$) contém w , neste caso, dizemos que S é um conjunto co-convexo transitivo na convexidade \mathcal{X} .

Se $D' \subseteq D$ é uma componente forte fonte, sumidouro ou transitiva de D , então dizemos que D' é uma *componente forte extrema* de D . Consequentemente, se $S \subseteq V(D)$ é tal que $D[S]$ é uma componente forte fonte (resp. sumidouro ou transitivo), então S é um *conjunto co-convexo fonte* (resp. sumidouro, transitivo) em \mathcal{X} do grafo orientado D . Uma consequência direta da Proposição 3.1.1:

Corolário 3.1.1. *Se D for um grafo orientado e $D' \subseteq D$ for uma componente forte fonte ou sumidouro de D , então qualquer conjunto de intervalo e qualquer conjunto de envoltória em \mathcal{X} contém pelo menos um vértice de D' , para $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3, \vec{P}_3^*\}$. Se $D' \subseteq D$ for uma componente forte transitiva de um grafo orientado D , então qualquer conjunto de intervalo e qualquer conjunto de envoltória em \mathcal{X} contém pelo menos um vértice de D' , para $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3^*\}$.*

Um grafo orientado D , tal que $V(D) \geq 2$ é fortemente conexo se, e somente se, D admite uma decomposição em orelhas, formando a sequência (P_0, P_1, \dots, P_k) , para algum $k \geq 0$, tal que:

- P_0 é um ciclo orientado em D ;
- para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, P_i é um caminho orientado de comprimento pelo menos um ou um ciclo orientado em D , chamado de *orelha*, ou *alça*, de modo que se $P_i = (u, \dots, v)$ é um caminho orientado, então $V(P_i) \cap (V(P_0) \cup \dots \cup V(P_{i-1})) = \{u, v\}$, caso contrário $|V(P_i) \cap (V(P_0) \cup \dots \cup V(P_{i-1}))| = 1$;
- A família $\{A(P_0), \dots, A(P_k)\}$ é uma partição de $A(D)$.

Uma orelha P_i contendo um único arco é dita *trivial*, independentemente de ser um laço ou um caminho de comprimento um, caso contrário, uma outra orelha é dita *não trivial*. Abaixo apresentamos uma versão mais forte para decomposição em orelhas: uma decomposição em orelhas orientadas de *comprimento mínimo*. Para mais detalhes veja o livro (Bang-Jensen; Gutin, 2008) onde também pode ser encontrada a prova do próximo lema.

Lema 3.1.1. *Um grafo orientado D tal que $V(D) \geq 2$ é fortemente conexo se, e somente se, tem uma decomposição em orelhas (P_0, P_1, \dots, P_k) tal que*

1. P_0 é o ciclo orientado mínimo;
2. Existe $j \in \{0, \dots, k\}$ tal que P_1, \dots, P_j são orelhas não triviais, enquanto P_{j+1}, \dots, P_k são triviais.
3. Se $P = (u, w, \dots, v)$ é uma orelha não trivial, então P_{wv} é um (w, v) -caminho mínimo em D ; onde P_{wv} representa o (w, v) -caminho contido em P .

3.2 Limitantes para o número de envoltória

3.2.1 Convexidade geodésica

Proposição 3.2.1. *Seja D um grafo orientado forte, então $\overrightarrow{\text{hn}}_g(D) \leq |A(D)| - |V(D)| + 2$. Esse limitante é apertado.*

Demonstração. Seja (P_0, \dots, P_k) uma decomposição em orelhas como no Lema 3.1.1. Vamos construir um conjunto de envoltória geodésico S de D da seguinte forma: adicione a S dois vértices do ciclo mais curto P_0 e, para cada orelha não trivial $P_p = (u_p, w_p, \dots, v_p)$, adicione w_p a S , para cada $p \in \{1, \dots, j\}$. Como (P_0, \dots, P_k) é uma decomposição em orelha de D , então $k = |A(D)| - |V(D)|$. Isto ocorre pois temos exatamente um arco extra (em comparação com o número de vértices) por orelha P_1, \dots, P_k . Assim, segue-se que $|S| \leq |A(D)| - |V(D)| + 2$, já que escolhemos exatamente dois vértices no ciclo inicial, mais um vértice por orelha não trivial restante.

Afirmamos que S é um conjunto de de envoltória na convexidade \overrightarrow{g} de D . Como P_0 é o ciclo mínimo, segue que $V(P_0) \subseteq \overrightarrow{\Gamma}_g(S)$, pois adicionamos dois vértices, digamos x e y de P_0 a S . O (x, y) -caminho e o (y, x) -caminho que formam P_0 , são caminhos orientados mais curtos. Seja $V_p = V(P_0) \cup \dots \cup V(P_p)$, para cada $p \in \{0, \dots, k\}$. Agora, por indução em $p \in \{1, \dots, j\}$, observe que $V_p \subseteq \overrightarrow{\Gamma}_g^{p+1}(S)$. Pois, por hipótese, sabemos que $V_{p-1} \subseteq \overrightarrow{\Gamma}_g^p(S)$, e temos que $P_p = (u_p, w_p, \dots, v_p)$, onde $w_p \in S$, $v_p \in \overrightarrow{\Gamma}_g^p(S)$ e o (w_p, v_p) -subcaminho de P_p é um caminho orientado mais curto em D , pelo Lema 3.1.1. Consequentemente, $V(D) = V_0 \cup \dots \cup V_k = \overrightarrow{H}_g(S)$. Veja que um ciclo orientado C tem $\overrightarrow{\text{hn}}_g(C) = |A(C)| - |V(C)| + 2 = 2$. \square

Conjecturamos que o limitante apresentado na Proposição 3.2.1 pode ser melhorado para grafos orientados D não isomorfos a um ciclo orientado. A seguir, argumentamos que, se

tal fato for verdade, este limitante só pode ser melhorado em no máximo duas unidades.

Proposição 3.2.2. *Sejam D um grafo orientado e $P = (u, w_1, \dots, w_q, v)$ um (u, v) -caminho orientado, onde P não é um caminho mínimo em D , para algum $q \geq 1$. Além disso, com $d_D^-(w_i) = d_D^+(w_i) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$. Então todo conjunto de envoltória mínimo na convexidade \vec{g} em D , contém pelo menos um vértice interno de P .*

Demonstração. Observe que em consequência de P não ser um (u, v) -caminho mínimo e com $d_D^+(w_i) = d_D^-(w_i) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$, ocorre que $W = \{w_1, \dots, w_q\}$ é co-convexo na convexidade geodésica. Isto ocorre, pois não há (x, y) -caminhos mínimos orientados contendo vértices de W , para qualquer $x, y \notin W$. Então, pela Proposição 3.1.1 qualquer conjunto de envoltória na convexidade \vec{g} de D contém pelo menos um vértice de W . \square

Corolário 3.2.1. *Existe um grafo orientado fortemente conexo D , tal que*

$$\vec{hn}_g(D) = |A(D)| - |V(D)|.$$

Demonstração. Seja D um grafo orientado obtido a partir de um triângulo orientado (u, v, w) e em sequência adicionamos $k \geq 2$ caminhos orientados $P_i = (u, z_1^i, z_2^i, v)$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Pela Proposição 3.2.2, devemos ter pelo menos um vértice interno de cada P_i num conjunto de envoltória de D . Condição suficiente para construirmos um conjunto de envoltória de D . \square

3.2.2 Convexidade geodésica e de caminhos de comprimento dois

Em sequência, vamos determinar valores exatos para o número de envoltória de um torneio na convexidade geodésica \vec{g} e na convexidade \vec{P}_3^* . Vamos argumentar que, para um torneio forte não trivial, é sempre suficiente dois vértices para obtermos um conjunto de envoltória.

Proposição 3.2.3. *Se T é um torneio forte não trivial, então*

$$\vec{hn}_g(T) = \vec{hn}_{P_3^*}(T) = 2.$$

Demonstração. Suponha que T é um torneio forte. Como T é fortemente conexo e não trivial, T possui pelo menos três vértices e qualquer conjunto de envoltória na convexidade \vec{P}_3^* (resp. na convexidade geodésica \vec{g}) tem que conter pelo menos dois vértices.

Por outro lado, perceba que qualquer conjunto de envoltória na convexidade \vec{P}_3^* é um conjunto de envoltória na convexidade \vec{g} , logo é suficiente provar que $\vec{hn}_{P_3^*}(T) \leq 2$.

Sejam $u, v \in V(T)$, tais que u e v estão contidos em um ciclo orientado C_3 e que $|\vec{H}_{P_3^*}(\{u, v\})|$ é máximo (dentre todos os pares de vértices $u, v \in V(T)$). Definamos $H = \vec{H}_{P_3^*}(\{u, v\})$. Queremos mostrar que $H = V(T)$. Por contradição, suponha que $\bar{H} = V(T) \setminus H \neq \emptyset$ e assuma, sem perda de generalidade, que o arco $(u, v) \in A(T)$.

Como u, v estão contidos em um C_3 orientado, H induz um forte sub-torneio de T . De fato, existe um caminho (v, u) -caminho P orientado (mais curto) de comprimento dois em T . Qualquer outro vértice w que é adicionado a H pode ser visto como a adição de uma orelha à decomposição em orelhas anterior ao tínhamos antes da inclusão de w .

Vamos provar que não há vértice $w \in \bar{H}$ tal que $N_T^-(w) \cap H \neq \emptyset$ e $N_T^+(w) \cap H \neq \emptyset$. De fato, como T é um torneio, qualquer vértice de H é a cabeça ou a cauda de um arco com w . Consequentemente, $\{N_T^-(w) \cap H \neq \emptyset, N_T^+(w) \cap H \neq \emptyset\}$ seria uma partição de H em dois subconjuntos não vazios e qualquer aresta ligando tais subconjuntos deve ser orientada em direção à extremidade em $N_T^+(w) \cap H$, pois H é convexo em \vec{P}_3^* e $w \notin H$. Contradizendo o fato de que H induz um subtorneio forte de T .

Consequentemente, \bar{H} pode ser particionado em dois subconjuntos $\bar{H}^+ = \{v \in V(T) \mid v \in \bar{H} \text{ e } H \subseteq N_T^+(v)\}$ e $\bar{H}^- = \{v \in V(T) \mid v \in \bar{H} \text{ e } H \subseteq N_T^-(v)\}$. Nem \bar{H}^+ nem \bar{H}^- podem ser vazios, pois T é forte. Note que a existência de um arco $(w, z) \in A(T)$, tal que $w \in \bar{H}^-$ e $z \in \bar{H}^+$ implicaria que $\vec{H}_{P_3^*}(\{w, z\}) \supseteq \{w, z\} \cup H$, contradizendo a maximalidade de H , já que w, z estariam em um C_3 orientado tendo uma envoltória convexa em \vec{P}_3^* máxima. Assim, cada aresta tendo uma extremidade em \bar{H}^+ e a outra em $V(T) \setminus \bar{H}^+$ é orientada em direção à extremidade em $V(T) \setminus \bar{H}^+$, contradizendo a hipótese de que T é forte. \square

Proposição 3.2.4. *Se T é um torneio, D_1, \dots, D_k são componentes fortes de T , para algum inteiro positivo k , e $\mathcal{X} \in \{\vec{g}, \vec{P}_3^*\}$ então:*

$$\vec{\text{in}}_{\mathcal{X}}(T) = \sum_{i=1}^k \vec{\text{in}}_{\mathcal{X}}(D_i) \text{ e } \vec{\text{hn}}_{\mathcal{X}}(T) = \sum_{i=1}^k \vec{\text{hn}}_{\mathcal{X}}(D_i).$$

Em particular, se existem $l \leq k$ componentes fortes não triviais, então

$$\vec{\text{hn}}_{P_3^*}(T) = \vec{\text{hn}}_g(T) = |\text{Ext}_{\mathcal{X}}(T)| + 2l.$$

Demonstração. Perceba que em um torneio T , todas as componentes fortes são extremas, ou seja, são fontes, sumidouros ou transitivas. Pelo Corolário 3.1.1, precisamos incluir pelo menos um vértice de cada uma dessas componentes a todo conjunto de intervalo ou conjunto de envoltória de T nas convexidades \vec{g} e \vec{P}_3^* . Além disso, se w pertence a um (u, v) -caminho mínimo orientado,

com $u \neq w \neq v$ em T , então todos devem pertencer a mesma componente forte de T . Portanto, o resultado segue da Proposição 3.2.3, já que dois vértices são suficiente para cada componente forte não trivial. □

A prova da Proposição 3.2.3 pode ser usada para mostrarmos o mesmo resultado para $\vec{\text{hnp}}_3(T)$ em torneios fortes. Em (Haglin; Wolf, 1996), os autores estudaram subconjuntos convexos para um dado torneio T na convexidade $\vec{\text{P}}_3$. Como seu foco era obter todos os subconjuntos convexos de um dado torneio, eles fizeram uma análise profunda da estrutura destes subconjuntos convexos dos quais eles deduziram a Proposição 3.2.5.

Proposição 3.2.5. (Haglin; Wolf, 1996) *Se T é um torneio não trivial, então $\vec{\text{hnp}}_3(T) = 2$.*

Demonstração. Se T é um torneio forte já sabemos pela Proposição 3.2.3 que o resultado é válido. Agora suponhamos que T não é um torneio forte. Isto implica, que com relação às suas componentes fortemente conexas, existe uma ordem total. Ou seja, existe uma ordenação (T_1, \dots, T_k) com $k \geq 2$, tal que $\{T_1, \dots, T_k\}$ é a família de componentes fortes de T e, para todos $1 \leq i < j \leq k$, se $u_i \in V(T_i)$ e $u_j \in V(T_j)$, então $(u_i, u_j) \in A(T)$. Em particular, perceba que T_1 é uma componente forte fonte e T_k é uma componente forte sumidouro no torneio T . Sejam t_1 e t_k vértices em T_1 e T_k , respectivamente. Vamos provar que $\{t_1, t_k\}$ formam um conjunto de envoltória mínimo na convexidade $\vec{\text{P}}_3$ de T .

Seja C uma componente forte de T com $C \notin \{T_1, T_k\}$. Portanto, para todo $v \in V(C)$, existem arcos $(t_1, v) \in A(T)$ e $(v, t_k) \in A(T)$. Então, $V(C) \subseteq \vec{\text{I}}_{\text{P}_3}(\{t_1, t_k\})$. Resta-nos provar que $V(T_1) \cup V(T_k) \subseteq \vec{\text{H}}_{\text{P}_3}(\{t_1, t_k\})$.

Assim, seja $t'_1 \in V(T_1) \setminus \{t_1\}$. Como T_1 é fortemente conexo, existe um caminho orientado $P = (t_1, u_1, \dots, u_k, t'_1)$. Como afirmado anteriormente, perceba que $(u_i, t_k) \in A(T)$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Consequentemente, observe que $u_i \in \vec{\text{I}}_{\text{P}_3}^i(\{t_1, t_k\})$. Portanto, temos que $t_k \in \vec{\text{I}}_{\text{P}_3}^{k+1}(\{t_1, t_k\})$ e nós deduzimos que $V(T_1) \subseteq \vec{\text{H}}_{\text{P}_3}(\{t_1, t_k\})$. A prova para T_k é análoga. □

Observamos que ao calcularmos $\vec{\text{hnp}}_3(D)$ em um digrafo D , nós apenas selecionamos no máximo dois vértices de qualquer subtorneio $D' \subseteq D$. Vamos agora provar um resultado mais forte:

Proposição 3.2.6. *Se D' é um subdigrafo de D e S é um conjunto de envoltória mínimo de D na convexidade $\vec{\text{P}}_3$, então $|S \cap V(D')| \leq \vec{\text{hnp}}_3(D')$.*

Demonstração. Observe que na convexidade \vec{P}_3 ter vizinhos extras em D não muda o fato de que se u e v pertencem a um conjunto $S \subseteq V(D')$ e há um (u, v) -caminho orientado de comprimento dois passando por w em D' , então $w \in \vec{T}_{P_3}(\{u, v\})$, não apenas em D' , mas também em D . Assim, nenhum conjunto de envoltória mínimo de D pode conter mais de $\vec{hnp}_3(D')$ vértices em D' .

Por contradição, sejam D' um subdigrafo de D e S um conjunto de envoltória mínimo de D na convexidade \vec{P}_3 , tal que $|S \cap V(D')| > \vec{hnp}_3(D')$. Seja S' um conjunto de envoltória mínimo de D' na convexidade \vec{P}_3 , ou seja, $|S'| = \vec{hnp}_3(D')$. Defina $S^* = (S \setminus (S \cap V(D'))) \cup S'$. Perceba que, D' é um subdigrafo de D , com $S' \subseteq S^*$ e S' um conjunto de envoltória de D' na convexidade \vec{P}_3 . Então $V(D') \subseteq \vec{H}_{P_3}(S^*)$ e, como S é um conjunto de envoltória de D , deduzimos que, pela construção de S^* , também é um conjunto de envoltória de D na convexidade \vec{P}_3 . No entanto, ocorre $|S^*| < |S|$ e $|S \cap V(D')| > \vec{hnp}_3(D') = |S'|$, contradizendo minimalidade de S . \square

Em consequência das Proposições 3.2.5 e 3.2.6, obtemos os corolários a seguir.

Corolário 3.2.2. *Se T é um torneio e um subdigrafo de um grafo orientado D , então para qualquer conjunto de envoltória mínimo S de D na convexidade \vec{P}_3 , ocorre $|S \cap V(T)| \leq 2$.*

Lembramos que um grafo cobipartido é um grafo que é o complemento de um grafo bipartido. Podemos estabelecer algumas consequências diretas deste fato.

Corolário 3.2.3. *Se D é um grafo orientado tal que o grafo subjacente é o complemento de um grafo k -partido, então $\vec{hnp}_3(D) \leq 2k$. Em particular, se D é um grafo orientado tal que o grafo subjacente é cobipartido, então $\vec{hnp}_3(D)$ pode ser calculado em tempo polinomial.*

Lembre que um grafo $G = (V, E)$ é *split*, se pudermos particionar $V = C \cup I$, onde C é um grafo completo e I é um conjunto independente.

Corolário 3.2.4. *Se D é um grafo orientado, tal que o grafo subjacente G é um grafo split, então $\vec{hnp}_3(D)$ pode ser obtido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $\{S, K\}$ uma partição de $V(G)$, onde K é uma clique maximal e S um conjunto independente. Perceba que tal partição pode ser obtida em tempo linear.

Seja S_s e S_t , respectivamente, os conjuntos formados por sumidouros e fontes de G em S . Vamos provar que se X é um conjunto de envoltória mínimo de D na convexidade \vec{P}_3 , então X tem exatamente os vértices em $S_s \cup S_t$, além de no máximo outros dois vértices.

Se $|K| = 1$, então cada vértice de S é um sumidouro ou uma fonte, o resultado segue diretamente. Suponha então que $|K| \geq 2$. Pela Proposição 3.2.5, sejam $\{u, v\}$ um conjunto de envoltória mínimo de $D[K]$. Pela prova da Proposição 3.2.6, percebemos que $K \subseteq \overrightarrow{H}_{P_3}(\{u, v\})$ em D . Além disso, cada vértice que não é nem um sumidouro nem uma fonte em S , tem que ter pelo menos um vizinho de entrada e pelo menos um vizinho de saída em K .

Consequentemente, cada vértice que não é nem uma fonte e nem um sumidouro também pertence a $\overrightarrow{H}_{P_3}(\{u, v\})$. Então $S_S \cup S_t \cup \{u, v\}$ é um conjunto de envoltória na convexidade \overrightarrow{P}_3 de D . Pela Proposição 3.1.1, sabemos que $S_S \cup S_t$ tem que pertencer a qualquer conjunto de envoltória de D na convexidade \overrightarrow{P}_3 . Assim, resta-nos verificar se no máximo dois outros vértices são necessários, o que pode ser feito em tempo polinomial. \square

3.3 Resultados de dificuldade

3.3.1 Sobre a convexidade geodésica em bipartidos

Seja D um grafo orientado. Seja também B_D um grafo orientado, tal que B_D tem dois vértices v^i e v^o para cada vértice $v \in V(D)$, o grafo B_D tem os seguintes arcos: (v^i, v^o) para cada $v \in V(D)$; (u^o, v^i) , para cada $(u, v) \in A(D)$.

Teorema 3.3.1. *Para qualquer grafo orientado conexo D , tal que $n(D) \geq 2$, temos $\overrightarrow{\text{in}}_g(D) = \overrightarrow{\text{in}}_g(B_D)$ e $\overrightarrow{\text{hn}}_g(D) = \overrightarrow{\text{hn}}_g(B_D)$.*

Demonstração. Seja $P = (u, w_1, \dots, w_q, v)$ o menor (u, v) -caminho orientado em D , para algum $q \geq 0$. Perceba que:

- $P^{ii} = (u^i, u^o, w_1^i, w_1^o, \dots, w_q^i, w_q^o, v^i)$,
- $P^{io} = (u^i, u^o, w_1^i, w_1^o, \dots, w_q^i, w_q^o, v^i, v^o)$,
- $P^{oi} = (u^o, w_1^i, w_1^o, \dots, w_q^i, w_q^o, v^i)$,
- $P^{oo} = (u^o, w_1^i, w_1^o, \dots, w_q^i, w_q^o, v^i, v^o)$.

são os menores caminhos em B_D , chamaremos de *caminhos correspondentes* em B_D para P . Perceba que se temos caminho orientado em B_D que contém w^i como um vértice interno, este caminho tem que conter também w^o e vice-versa, para $w \in V(D)$.

Vamos provar que se S_B é um conjunto de intervalo (resp. conjunto de envoltória) na convexidade \overrightarrow{g} de B_D , então $S = \{v \in D \mid v^o \in S_B \text{ ou } v^i \in S_B\}$ é um conjunto de intervalo (resp. conjunto de envoltória) na convexidade \overrightarrow{g} em D . Seja $w \in V(D)$, tal que $w \notin S$. Implica que

$w^o, w^i \notin S_B$. Portanto, existe $u^x, v^y \in S_B$ (resp. $u^x, v^y \in \vec{\Gamma}_g^k(S_B)$ para algum $k \geq 0$) para algum $x, y \in \{i, o\}$ e um menor (u^x, v^y) -caminho P , onde w^o e w^i pertencem a $V(P)$. Consequentemente, $u, v \in S$ (resp. $u, v \in \vec{\Gamma}_g^k(S)$, para algum $k \geq 0$), além disso w pertence a um menor (u, v) -caminho em D . Então S é um conjunto de intervalo (resp. de envoltória) na convexidade \vec{g} em D .

Reciprocamente, suponha que S é um conjunto de intervalo (resp. de envoltória) na convexidade \vec{g} em D . Seja $S_B = \{f(v) \mid v \in S\}$ onde $f : V(S) \rightarrow V(B_D)$ é definido como abaixo:

$$f(v) = \begin{cases} v^i & , \text{ se } v \text{ não pertence a uma componente forte sumidouro de } D; \\ v^o & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $w^x \in V(B_D)$, tal que $w^x \notin S_B$, para algum $x \in \{i, o\}$. Além disso, suponha que $w \notin S$. Isso implica que $w^o, w^i \notin S_B$. Como S é um conjunto de intervalo (resp. conjunto de envoltória) na convexidade \vec{g} em D , existem $u, v \in S$ (resp. $u, v \in \vec{\Gamma}_g^k(S)$, para algum $k \geq 0$), e um menor (u, v) -caminho P , onde w pertencem a $V(P)$. Em consequência dos caminhos correspondentes em B_D , nós deduzimos que $w \in \vec{\Gamma}_g(S)$ (resp. $w \in \vec{\Gamma}_g^{k+1}(S)$).

Suponha que w e w^x pertençam a S , para algum $x \in \{i, o\}$, mas $w^y \notin S$, onde $y = \{i, o\} \setminus \{x\}$. Nós precisamos argumentar que $w^y \in \vec{\Gamma}_g(S)$ (resp. $\vec{H}_g(S)$). Se D é fortemente conexo, então $n(D) \geq 3$ e $|S| \geq 2$. Seja $u^z \in S_B \setminus \{w^x\}$. Como D é fortemente conexo, existe um menor (w^i, u^z) -caminho e um menor (u^z, w^o) -caminho. Isto implica que $w^y \in \vec{\Gamma}_g(S)$ (resp. $\vec{H}_g(S)$), não considerando $y = i$ ou $y = o$.

Suponha que D não é fortemente conexo. Suponha inicialmente que w não pertence a uma componente forte sumidouro de D . Isto implica que $w^i \in S$. Pela Proposição 3.1.2, existe uma componente forte sumidouro C' de D , tal que $w_i \notin C'$ e $C' \subseteq S_D^+(w^i)$. Pelo Corolário 3.1.1, existe um vértice $u^z \in C' \cap S_B$, para algum $z \in \{i, o\}$. Consequentemente w^o está contido em algum menor (w^i, u^z) -caminho orientado. Analogamente, suponha que w está contido em uma componente forte fonte C . Então $w^o \in S_B$ e pela Proposição 3.1.2 existe uma componente forte fonte C' de D , onde $w^o \notin C'$ e $C' \subseteq S_D^-(w^o)$. Pelo Corolário 3.1.1 existe um vértice $u^z \in C' \cap S_B$, para algum $z \in \{i, o\}$. Consequentemente, w^i está contido em algum menor (u^z, w^o) -caminho orientado. \square

Corolário 3.3.1. *Dados um grafo orientado D e um inteiro positivo k como entrada, caso decidir se $\vec{\text{in}}_g(D) \leq k$ ou se $\vec{\text{hn}}_g(D) \leq k$ for um problema da classe NP-difícil ou W[i]-difícil*

parametrizado em k , para algum $i \in \mathbb{Z}_+^*$, então vale o mesmo sob a hipótese adicional do grafo subjacente de D ser bipartido.

Demonstração. Perceba que B_D é um grafo orientado bipartido, dada qualquer orientação de D , pois cada ciclo dobra seu comprimento, logo B_D não possui ciclos ímpares. Note que do Teorema 3.3.1, obtemos a redução requisitada. \square

Sabemos, como visto em (Araujo; Arraes, 2021), que decidir se $\vec{\text{in}}_g(D) \leq k$ é $W[2]$ -difícil parametrizado em k , e decidir se $\vec{\text{hn}}_g(D) \leq k$ é NP-difícil, mesmo se o grafo subjacente de D é bipartido.

3.3.2 Dificuldade do número de envoltória orientada de caminhos de comprimento dois

Nesta seção, trataremos da dificuldade de determinação do seguinte problema:

NÚMERO DE ENVOLTÓRIA \vec{P}_3 PARAMETRIZADO

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .

Parâmetro: k .

Pergunta: $\vec{\text{hn}}_{P_3}(D) \leq k$?

Teorema 3.3.2. NÚMERO DE ENVOLTÓRIA \vec{P}_3 PARAMETRIZADO é $W[2]$ -difícil mesmo se D é um grafo orientado acíclico, cujo grafo subjacente é bipartido.

Demonstração. Fizemos uma modificação da redução feita em (Nichterlein *et al.*, 2013), a partir do problema HITTING SET PARAMETRIZADO para provar que o NÚMERO DE ENVOLTÓRIA \vec{P}_3 PARAMETRIZADO, é $W[2]$ -difícil em grafos orientados acíclicos com grafo subjacente bipartido.

Dado um conjunto $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, uma família de subconjuntos $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_m\}$ sobre os elementos de U e um inteiro positivo $k' \geq 0$, o problema HITTING SET PARAMETRIZADO, consiste em decidir se existe $U' \subseteq U$, com $|U'| \leq k'$ e $U' \cap W_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. No caso afirmativo, dizemos que U' é um *transversal* ou, em inglês, *hitting set* de \mathcal{W} . Sabemos que este problema é $W[2]$ -difícil com respeito ao parâmetro k' , vide (Downey; Fellows, 2012).

Vamos construir um grafo orientado acíclico $D_I = (V, A)$ a partir de uma instância $I = (\mathcal{W}, U, k')$ de HITTING SET PARAMETRIZADO. Suponha que inicialmente $V(D_I) = \emptyset$ e

$A(D_I) = \emptyset$. Para cada $W_j \in \mathcal{W}$, nós adicionamos um vértice correspondente w_j a $V(D_I)$, para $1 \leq j \leq m$.

Para cada $u_i \in U$, com $1 \leq i \leq n$, seja $s(i)$ o número de conjuntos de \mathcal{W} tais que u_i pertence. Chamemos $w_i^1, \dots, w_i^{s(i)}$ os vértices correspondentes de tais conjuntos. Construimos dois dispositivos G_i^1 e G_i^2 para representar u_i e sua relação com os conjuntos de \mathcal{W} . Veja Figura 6.

Para G_i^1 , nós adicionamos os vértices $u_i^1, \dots, u_i^{s(i)}$ para $V(D_I)$ e os vértices a_i^j, b_i^j, c_i^j , com $1 \leq j \leq s(i) - 1$. Concluimos a construção de G_i^1 adicionando os arcos (a_i^j, u_i^j) , (a_i^j, u_i^{j+1}) , (u_i^j, b_i^j) , (u_i^{j+1}, b_i^j) , (c_i^j, u_i^j) , (u_i^{j+1}, c_i^j) , para cada $1 \leq j \leq s(i) - 1$.

Para G_i^2 adicionamos os vértices $p_i^2, \dots, p_i^{s(i)}$ e $q_i^2, \dots, q_i^{s(i)}$ a $V(D_I)$, adicionamos os arcos (q_i^j, p_i^j) , para $2 \leq j \leq s(i)$, e os arcos (q_i^j, p_i^{j+1}) , com $2 \leq j \leq s(i) - 1$. Conectamos G_i^1 e G_i^2 com $w_i^1, \dots, w_i^{s(i)}$, pela adição dos arcos (u_i^j, w_i^j) para $1 \leq j \leq s(i)$, com arcos (p_i^j, w_i^j) para $2 \leq j \leq s(i)$ e os arcos (w_i^1, p_i^2) e $(q_i^{s(i)}, u_i^1)$ a $A(D_I)$.

Por fim, adicionamos dois vértices x, x' ao conjunto $V(D_I)$, com arcos:

- b_i^j, c_i^j para x' , para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq s(i)$;
- w_j para x' , para cada $1 \leq j \leq m$;
- x em direção aos vértices a_i^j , para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq s(i) - 1$;
- x em direção aos vértices q_i^j , para cada $1 \leq i \leq n$ e $2 \leq j \leq s(i)$.

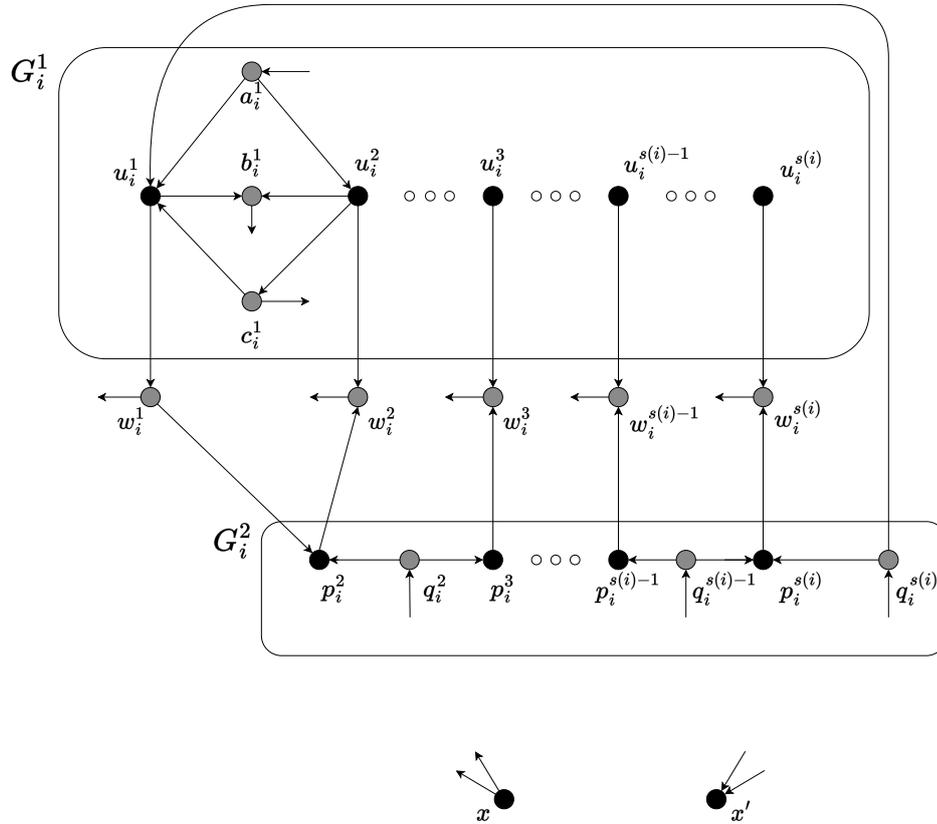
Por construção, D_I não tem ciclos orientados e seu grafo subjacente é bipartido (os vértices x, x', u_i^j e p_i^j pertencem a uma partição e os vértices $a_i^j, b_i^j, c_i^j, q_i^j$ e w_i^j pertencem a outra). Vamos mostrar que dada uma instancia $I = (\mathcal{W}, U, k')$ do problema HITTING SET PARAMETRIZADO, existe um conjunto transversal U' de \mathcal{W} com no máximo k' elementos se, e somente se, D_I tem um conjunto de envoltória S na convexidade \vec{P}_3 com cardinalidade $k = k' + 2$.

Afirmção 1. *Seja $S \subseteq V(D_I)$ tal que $x, x' \in S$. Se $u_i^1 \in \vec{H}_{P_3}(S)$, então $V(G_i^1) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$.*

Seja $l \geq 1$ o menor l inteiro, tal que $u_i^1 \in \vec{T}_{P_3}^l(S)$. Como $x, x' \in S$, ao considerarmos as adjacências de a_i^1 e b_i^1 , estes vértices são internos a (u_i^1, x') -caminhos ou (x, u_i^1) -caminhos de comprimento dois, implicando que $a_i^1, b_i^1 \in \vec{T}_{P_3}^{l+1}(S)$. Como u_i^2 também é um vértice interno de um (a_i^1, b_i^1) -caminho de comprimento dois, $u_i^2 \in \vec{T}_{P_3}^{l+2}(S)$. Por fim, c_i^1 é um vértice interno de um caminho de comprimento dois entre u_i^1 e u_i^2 , portanto $c_i^1 \in \vec{T}_{P_3}^{l+3}(S)$. Usando o mesmo argumento iteradamente para u_i^j , para $2 \leq j \leq s(i)$, obtemos que todos os vértices de G_i^1 pertencem a $\vec{H}_{P_3}(S)$.

Afirmção 2. *Seja $S \subseteq V(D_I)$ tal que $x' \in S$. Se $V(G_i^1) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$, então $w_i^1, \dots, w_i^{s(i)} \in \vec{H}_{P_3}(S)$.*

Figura 6 – Representação de G_i para $u_i \in U$, os vértices cinzas possuem um arco chegando no vértice x ou um arco saindo em direção a x'



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que cada w_i^j é um vértice interno de um (u_i^j, x') -caminho de comprimento dois, para cada $1 \leq j \leq s(i)$. Logo, $w_i^1, \dots, w_i^{s(i)} \in \vec{H}_{P_3}(S)$.

Afirmção 3. *Seja $S \subseteq V(D_I)$ tal que $x \in S$. Se $w_i^1, \dots, w_i^{s(i)} \in \vec{H}_{P_3}(S)$, então $V(G_i^2) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$.*

Como $w_i^1, w_i^2 \in \vec{H}_{P_3}(S)$, obtemos $p_i^2 \in \vec{H}_{P_3}(S)$. Além disso, como $x, p_i^2 \in \vec{H}_{P_3}(S)$, concluímos que $q_i^2 \in \vec{H}_{P_3}(S)$. Analogamente, como $q_i^2, w_i^3 \in \vec{H}_{P_3}(S)$, o vértice $p_i^3 \in \vec{H}_{P_3}(S)$. Aplicando o mesmo argumento iteradamente a $p_i^j, q_i^j \in \vec{H}_{P_3}(S)$, para $3 \leq j \leq s(i)$, concluímos que $V(G_i^2) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$.

(\Rightarrow) Seja U' um transversal de \mathcal{W} com no máximo k' elementos. Vamos construir um conjunto de envoltória S na convexidade \vec{P}_3 para D_I com no máximo $k = k' + 2$ elementos. Começamos com $S = \{x, x'\}$, pois x e x' são vértices extremos na convexidade \vec{P}_3 . Para cada $u_i \in U'$, adicionamos o vértice u_i^1 a S . Logo, $|S| \leq k' + 2 = k$. Afirmamos que S é um conjunto de envoltória na convexidade \vec{P}_3 para o grafo orientado D_I . Para cada $u_i \in U'$, pela Afirmção 1 sabemos que $V(G_i^1) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$. Pela Afirmção 2, temos $w_i^j \in \vec{H}_{P_3}(S)$, para cada $u_i \in U'$ e para cada $1 \leq j \leq s(i)$.

No entanto, como U' é transversal de \mathscr{W} , temos que $w_j \in \vec{H}_{P_3}(S)$, para todo $1 \leq j \leq m$. Além disso, utilizando a Afirmação 3, verificamos que $V(G_i^2) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Em particular, $q_i^{s(i)} \in \vec{H}_{P_3}(S)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Como $q_i^{s(i)}, w_i^1 \in \vec{H}_{P_3}(S)$, mesmo para $u_i \notin U'$, concluímos que os u_i^1 correspondentes a tais elementos estão em $\vec{H}_{P_3}(S)$, uma vez que u_i^1 é um vértice interno de um $(q_i^{s(i)}, w_i^1)$ -caminho de comprimento dois, para cada $1 \leq i \leq n$. Portanto, $V(G_i^1) \subseteq \vec{H}_{P_3}(S)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Consequentemente, S é um conjunto envoltória de D_I .

(\Leftarrow) Suponhamos que existe um conjunto de envoltória S na convexidade \vec{P}_3 para D_I com cardinalidade $|S| \leq k = k' + 2$. Observe que x', x são, respectivamente, fonte e sumidouro de D_I . Logo, estes vértices devem pertencer a S .

Primeiramente, se um vértice $v \in V(G_i^1) \setminus \{u_i^1\}$ pertence a S , note que $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{u_i^1\}$, também é conjunto de envoltória de D_I na convexidade \vec{P}_3 pela Afirmação 1. Logo, podemos assumir que $u_i^1 \in S \cap V(G_i^1)$, para $1 \leq i \leq n$.

Suponha que w_j pertença a S , para $1 \leq j \leq m$. Pela Afirmação 2, perceba que $S' = (S \setminus \{w_j\}) \cup \{u_i^1\}$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $u_i \in W_j$, também é conjunto de envoltória de D_I na convexidade \vec{P}_3 . Então $S \cap \{w_1, \dots, w_m\} = \emptyset$.

Se $v \in V(G_i^2)$ e pertence a S , para algum $1 \leq j \leq m$, note que $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{u_i^1\}$, também é conjunto de envoltória de D_I na convexidade \vec{P}_3 , em consequência das Afirmações 1, 2 e 3. Logo, podemos assumir que $S \cap V(G_i^2) = \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, sem perda de generalidade, assumimos que $S' \setminus \{x, x'\} \subseteq \{u_i^1 \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Então se S é um conjunto de envoltória de D_I , existe outro conjunto de envoltória S' , com mesma cardinalidade, de modo que $S' \setminus \{x, x'\} \subseteq \{u_i^1 \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Argumentaremos que o conjunto $U' = \{u_i \in U \mid u_i^1 \in S\}$ é um transversal de \mathscr{W} . Tendo em vista que os vértices x' e x pertencem a S , onde $|U'| \leq k - 2 = k'$.

Suponha, por contradição, que existe $W_l \in \mathscr{W}$, tal que $U' \cap W_l = \emptyset$. Isto implica que nenhum u_i^j , que tem $w_i^j \in N^+(u_i^j)$, pertence a S' . Lembre que não existem vértices $p_i^j, q_i^j, a_i^j, b_i^j, c_i^j$ em S' . Então u_i^j só pode ser adicionado a $\vec{H}_{P_3}(S')$ a partir de um caminho de comprimento dois contendo w_i^j como uma de suas extremidades.

Seja u_i^j um vértice adicionado a $\vec{H}_{P_3}(S')$ e $w_i^j \in N^+(u_i^j)$, para cada $1 \leq j \leq s(i)$. Como w_i^j foi adicionado a $\vec{H}_{P_3}(S')$ antes de u_i^j em $\vec{T}_{P_3}^l(S')$, para algum $l \geq 1$. No entanto, w_i^j foi adicionado a $\vec{H}_{P_3}(S')$ em consequência de p_i^j e x' , digamos em $\vec{T}_{P_3}^\alpha(S')$, com $\alpha \geq 1$. Se p_i^j foi adicionado em $\vec{T}_{P_3}^{\alpha-1}(S')$, isto ocorreu em consequência de w_i^j e q_i^{j-1} . Contradizendo a

construção de D_I .

□

ENVOLTÓRIA \vec{P}_3^* ORIENTADA PARAMETRIZADA

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .

Parâmetro: k .

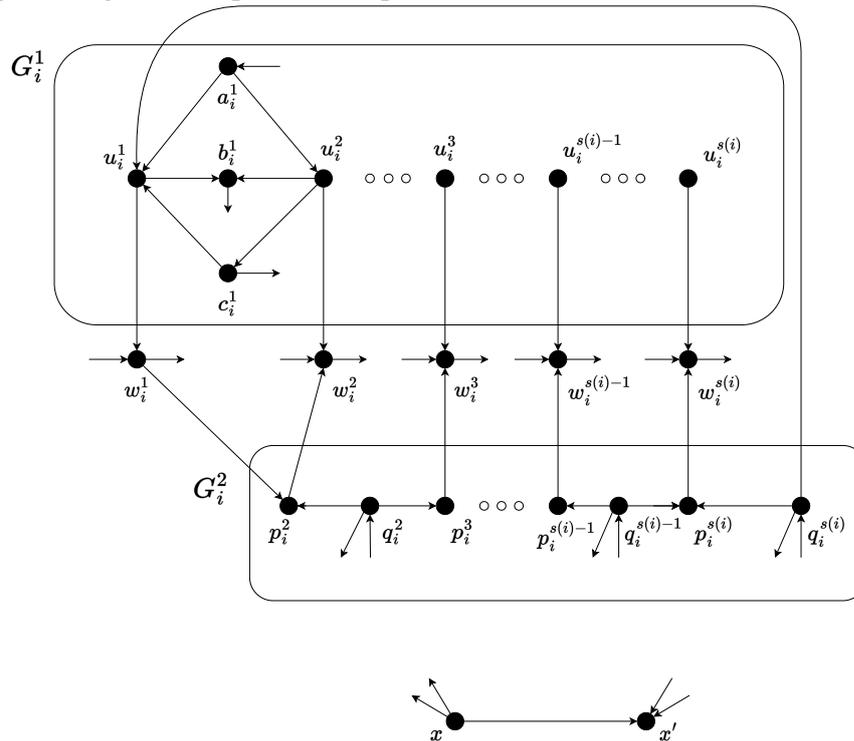
Pergunta: $\vec{hn}_{P_3^*}(D) \leq k$?

Como grafos bipartidos não tem ciclos com três vértices, obtemos o corolário a seguir em consequência do Teorema 3.3.2 para a convexidade \vec{P}_3^* .

Corolário 3.3.2. *ENVOLTÓRIA \vec{P}_3^* ORIENTADA PARAMETRIZADA é $W[2]$ -difícil em DAG.*

Fazendo uma pequena modificação na Figura 6, podemos mostrar que para um dado inteiro k e um grafo orientado acíclico, determinar se $\vec{hn}_g \leq k$ é $W[2]$ -difícil.

Figura 7 – Representação do dispositivo G_i para $u_i \in U$



Fonte: elaborado pelo autor.

ENVOLTÓRIA \vec{g} ORIENTADA PARAMETRIZADA

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .
 Parâmetro: k .
 Pergunta: $\vec{hn}_g(D) \leq k$?

Corolário 3.3.3. ENVOLTÓRIA \vec{g} ORIENTADA PARAMETRIZADA é $W[2]$ -difícil mesmo de D é acíclico.

Demonstração. A prova é análoga ao apresentado no Teorema 3.3.2, então vamos omitir os detalhes. Veja a Figura 7, observe as modificações na construção: um arco de x para x' , arcos de q_i^j para x' , para todo $j \in \{2, \dots, s(i)\}$ e de x para w_i^j , para $j \in \{1, \dots, s(i)\}$. \square

3.3.3 Complexidade do número de intervalo

Um grafo G é bipartido cordal, se G é bipartido e qualquer ciclo sem corda tem tamanho quatro. Perceba que, apesar do nome, esta classe de grafos não é uma subclasse de grafos cordais. Recapitulando, um conjunto de dominação $S \subseteq V(D)$ em um grafo G satisfaz que cada $v \in V(D) \setminus S$ tem um vizinho em S . O número de dominação de G , denotado por $\gamma(G)$, é a cardinalidade mínima de um conjunto de dominação de G .

CONJUNTO DE DOMINAÇÃO

Entrada: Um grafo G e um inteiro positivo k .
 Problema: $\gamma(G) \leq k$?

Sabemos que o problema CONJUNTO DE DOMINAÇÃO é NP-completo para grafos bipartidos cordais (Muller; Brandstadt, 1987). Vamos reduzir este problema para o problema do INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO.

INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .
 Problema: $\vec{in}_{P_3}(D) \leq k$?

Teorema 3.3.3. O problema INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO é NP-completo, mesmo se a entrada é um grafo orientado acíclico D e seu grafo subjacente é um grafo bipartido cordal.

Demonstração. Esta prova é similar a (Centeno *et al.*, 2009). Sabemos que o problema do CONJUNTO DE DOMINAÇÃO é NP-completo mesmo se a entrada é um grafo bipartido cordal (Muller; Brandstadt, 1987).

Perceba que o problema do INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO pertence a classe NP já que dado como certificado um subconjunto de vértices S de um grafo orientado bipartido cordal D , é possível determinar em tempo linear, se ele tem tamanho apropriado e se, para todo vértice $v \in V(G) \setminus S$, existem arcos (v_1, v) e (v, v_2) , para $v_1, v_2 \in S$.

Seja $I = (G, k)$ uma instância arbitrária do problema CONJUNTO DE DOMINAÇÃO, onde $G = (A \cup B, E(G))$ é um grafo bipartido cordal com n vértices. Vamos construir uma instância $(D, k + n)$ do INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO. Primeiramente adicionamos a D todos os vértices e arestas de G e orientamos todas as arestas de A para B . Em sequência, para cada $v \in V(G)$, nós criamos em D um vértice auxiliar z_v e adicionamos a aresta vz_v . Se $v \in A$ orientamos o arco (z_v, v) , se $v \in B$ então orientamos (v, z_v) . Seja $Z = \{z_v \mid v \in V(D)\}$.

Perceba que o grafo subjacente de D é um grafo bipartido cordal, pois a adição dos vértices de grau um não cria ciclos. Além disso, observe que D não tem ciclos orientados, portanto é um grafo orientado acíclico (DAG). Vamos provar que $\gamma(G) \leq k$ se, e somente se, $\vec{\text{in}}_{P_3}(D) \leq k + n$.

Suponha que S seja um conjunto de dominação de G com no máximo k vértices. Afirmamos que $U = S \cup Z$ é um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 de D . Onde $|Z| = n$ e $|S| \leq k$, então que $\vec{\text{in}}_{P_3} \leq k + n$. Seja $v \in V(D)$, tal que $v \notin U$. Como $Z \subseteq U$, perceba que $v \in A \cup B$. Veja que S é um conjunto de dominação, existe $x \in S$, tal que $vx \in E(G)$. Se $v \in A$, então $(z_v, v), (v, x) \in A(D)$, com $z_v, x \in U$. Portanto, $v \in \vec{I}_{P_3}(U)$. Analogamente, se $v \in B$, existem arcos $(x, v), (v, z_v) \in A(D)$, tais que x, z_v pertencem a U . Portanto, $v \in \vec{I}_{P_3}(U)$.

Reciprocamente, seja U um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 com cardinalidade no máximo $n + k$. Pela Proposição 3.1.1, segue que $Z \subseteq U$. Consequentemente, $S = U \setminus Z \subseteq A \cup B$ tem no máximo k vértices. Como U é um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 , todo vértice $v \in A \setminus U$ deve ter um vizinho de saída $x \in B \cap U$. Analogamente, todo vértice $v \in B \setminus U$ deve ter um vizinho de entrada $x \in A \cap U$. Portanto, S é um conjunto dominante de G . □

INTERVALO \vec{P}_3^* ORIENTADO

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .

Problema: $\vec{\text{in}}_{P_3^*}(D) \leq k$?

Corolário 3.3.4. *o problema de INTERVALO \vec{P}_3^* ORIENTADO é NP-completo, mesmo se tem como entrada um grafo orientado D sem ciclos e seu grafo subjacente é bipartido cordal.*

Para o resultado a seguir, lembramos que os autores (Araujo; Arraes, 2021) provam que decidir se $\vec{\text{in}}_g(D) \leq k$ é NP-difícil para grafos split, além disso, é conhecido que calcular $\text{in}_{P_3}(G)$ é NP-difícil para um grafo cordal G (Centeno *et al.*, 2009).

COBERTURA POR CONJUNTOS PARAMETRIZADO

Entrada: Um conjunto U , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ e $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

Parâmetro: k .

Pergunta: Existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\bigcup \mathcal{F}' = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$?

INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO PARAMETRIZADO

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .

Parâmetro: k .

Pergunta: $\vec{\text{in}}_{P_3}(D) \leq k$?

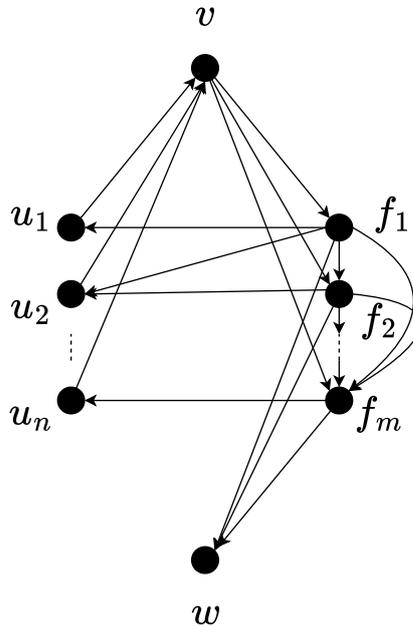
Proposição 3.3.1. *O problema de INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO PARAMETRIZADO é $W[2]$ -difícil, mesmo se o grafo orientado D tem grafo subjacente split.*

Demonstração. Sabemos que o COBERTURA POR CONJUNTO PARAMETRIZADO é $W[2]$ -difícil (Cygan *et al.*, 2005). Faremos a redução do problema COBERTURA POR CONJUNTO PARAMETRIZADO para INTERVALO \vec{P}_3 ORIENTADO PARAMETRIZADO. Seja $\mathcal{I} = (U, \mathcal{F}, k)$ uma entrada para o COBERTURA POR CONJUNTO PARAMETRIZADO tal que $U = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$.

Primeiramente, perceba que cada elemento em U deve pertencer a pelo menos um subconjunto $F_i \in \mathcal{F}$ já que, caso contrário, a instância é trivialmente NÃO. Então, assumamos que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = U$.

Consequentemente, se $|U| \leq k$, então a instância é trivialmente SIM, já que podemos escolher arbitrariamente um elemento de \mathcal{F} para cada elemento em U . Analogamente, se

Figura 8 – Exemplo de construção do grafo orientado D para uma dada instância do problema de cobertura por vértices



Fonte: elaborado pelo autor.

$|U| = k + 1$, podemos responder facilmente em tempo linear se (U, \mathcal{F}, k) é uma instância SIM para o problema de COBERTURA POR CONJUNTO PARAMETRIZADO, checando se existe um elemento em \mathcal{F} contendo pelo menos dois elementos em U . Portanto, também podemos assumir que $|U| \geq k + 2$.

Nós iremos construir um grafo D , tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, k)$ é uma instância SIM se, e somente se, $\vec{\text{in}}_{P_3}(D) \leq k + 2$.

Em D , construímos o conjunto de vértices da forma:

$$V(D) = \{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{v, w\}.$$

Vamos definir o conjunto de arcos de D da seguinte forma, adicionamos os arcos (f_i, u_j) se $j \in F_i$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \in \{1, \dots, m\}$. Então adicionamos os arcos (f_i, w) e (v, f_i) , para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Nós construímos um torneio transitivo induzido por $\{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ pela adição dos arcos $(f_i, f_{i'})$ sempre que $1 \leq i < i' \leq m$. Finalmente, incluímos os arcos (u_j, v) , para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Perceba que, por construção, $C = \{v\} \cup \{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ é uma clique e $S =$

$\{w\} \cup \{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ é um conjunto estável, portanto o grafo subjacente de D é um grafo split. Veja a Figura 8. Vamos provar que \mathcal{I} é uma instância SIM se e, só se $\overrightarrow{\text{in}}_{\mathbb{P}_3}(D) \leq k + 2$.

Suponha que \mathcal{I} é uma instância SIM e seja $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}' = \{F_i \mid i \in I\}$, $\cup \mathcal{F}' = U$ e $|I| \leq k$. Seja $S \subseteq V(D)$, tal que $S = \{v, w\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$. Afirmamos que S é um conjunto de intervalo no grafo orientado D na convexidade $\overrightarrow{\mathbb{P}_3}$. Inclusive, perceba que todos os vértices em $\{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ pertence a um (v, w) -caminho com comprimento dois em D . Além disso, como $\mathcal{F}' = \{F_i \mid i \in I\}$ cobrem todos os elementos em U , para todo $u \in \{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$, u pertence a um (f_i, v) -caminho orientado para algum $f_i \in S$, pois existe $F_i \in \mathcal{F}'$, com $u \in F_i$.

Suponha que S é um conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{\mathbb{P}_3}$ em D , tal que $|S| \leq k + 2$. Como w é um sumidouro, w pertence a todo conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{\mathbb{P}_3}$. Então $w \in S$ e conseqüentemente, no máximo $k + 1$ vértices de S pertencem a U .

Por hipótese, temos que $|U| \geq k + 2$ e existe pelo menos um vértice de U que não pertence a S . Veja que $N_D^+(u_j) = \{v\}$ e S é um conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{\mathbb{P}_3}$ em D , concluímos que $v \in S$. Como $v, w \in S$, qualquer vértice em $\{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ pertence a um (v, w) -caminho orientado.

Podemos construir um conjunto de intervalo S' a partir de S , tal que, $S' \subseteq \{f_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{v, w\}$ pela troca de cada vértice $u \in S \cap \{u_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ por um vértice f_i , com $j \in F_i$. Relembrando que $\cup \mathcal{F}' = U$. Além disso, S' é um conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{\mathbb{P}_3}$ de D , pois $v \in S$ e $|S'| \leq k + 2$. Seja $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i \in S'\}$. Onde $\mathcal{F}' = \{F_i \mid i \in I\}$, satisfaz $\cup \mathcal{F}' = U$ e $|\mathcal{F}'| \leq k$. Portanto, \mathcal{I} é uma instância SIM. \square

INTERVALO $\overrightarrow{\mathbb{P}_3^*}$ ORIENTADO PARAMETRIZADO

Entrada: Um grafo orientado D e um inteiro positivo k .

Parâmetro: k .

Pergunta: $\overrightarrow{\text{in}}_{\mathbb{P}_3^*}(D) \leq k$?

Corolário 3.3.5. O problema INTERVALO $\overrightarrow{\mathbb{P}_3^*}$ ORIENTADO PARAMETRIZADO é $\mathcal{W}[2]$ -difícil, mesmo se D possui como grafo subjacente um grafo split.

Demonstração. Perceba que na prova da Proposição 3.3.1, todo caminho com comprimento dois usado na redução é também um caminho mínimo. \square

3.3.4 Algoritmos para grafos com largura em clique limitada

Nesta seção, vamos definir o conjunto de intervalo e o conjunto de envoltória nas convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* , em um grafo orientado D , nos termos de lógica monádica de segunda ordem. Em função disto, obteremos algoritmos com tempo polinomial para se calcular $\vec{\text{in}}_{P_3}(D)$, $\vec{\text{in}}_{P_3^*}(D)$, $\vec{\text{hn}}_{P_3}(D)$ e $\vec{\text{hn}}_{P_3^*}(D)$ em grafos com largura em clique limitada.

Sabemos que o Teorema de Courcelle é válido para o caso de grafos orientados com grafo subjacente com largura em clique limitada, veja Teorema 2.4.1 na Seção 2.4. Como pode ser visto em (Courcelle; Engelfriet, 2012), a definição de grafo nos termos de MSO_1 tem as arestas como pares ordenados de vértices e os autores enfatizam que podemos considerar os arcos como arestas.

Os exemplos a seguir são fórmulas monádicas que expressam que existe um caminho de comprimento dois que une os vértices x e y ; também mostramos quando os vértices x e y estão a distância dois, com o caminho (x, y, z) no grafo orientado D :

$$2\text{path}(x, z, y) := \text{arc}(x, z) \wedge \text{arc}(z, y);$$

$$\text{Ind}2\text{path}(x, z, y) := \text{arc}(x, z) \wedge \text{arc}(z, y) \wedge \neg \text{arc}(x, y).$$

Lema 3.3.1. *Podemos descrever um conjunto de intervalo orientado de um dado grafo orientado D nas convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* com MSO_1 .*

Demonstração. Pela definição, S é um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 se todo vértice $z \in V(D) \setminus S$ está contido entre dois vértices de S em um caminho orientado de comprimento dois. Assim podemos escrever explicitamente como:

$$\text{IntervalSet}_{\vec{P}_3}(S) := \forall z(z \in S \vee \exists x \exists y(x \in S \wedge y \in S \wedge 2\text{path}(x, z, y))).$$

Analogamente podemos escrever usando lógica monádica de segunda ordem o problema na convexidade \vec{P}_3^* , como:

$$\text{IntervalSet}_{\vec{P}_3^*}(S) := \forall z(z \in S \vee \exists x \exists y(x \in S \wedge y \in S \wedge \text{ind}2\text{path}(x, z, y))).$$

□

Lema 3.3.2. *Podemos descrever o problema do conjunto de envoltória de um dado grafo orientado D nas convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* com MSO_1 .*

Demonstração. Inicialmente, perceba que $X \subseteq Y$ e $X \subsetneq Y$ podem ser representados como $\forall x(x \in X \implies x \in Y)$ e $X \subseteq Y \wedge \exists y(y \in Y \wedge y \notin X)$, respectivamente. Vamos apresentar fórmulas para representar que um dado conjunto S é convexo. No caso da convexidade \vec{P}_3 apresentamos tal propriedade por:

$$\text{Closed}_{\vec{P}_3}(X) := \forall x, y(x \in X \wedge y \in X \implies \neg \exists z(2\text{path}(x, z, y) \wedge z \notin X)).$$

Analogamente, apresentamos a fórmula que representa um conjunto convexo na convexidade \vec{P}_3^* como:

$$\text{Closed}_{\vec{P}_3^*}(X) := \forall x, y(x \in X \wedge y \in X \implies \neg \exists z(\text{Ind2path}(x, z, y) \wedge z \notin X)).$$

Por fim, apresentamos a seguir as fórmulas que representam um conjunto de envoltória S , o único convexo contendo S é $V(D)$, já que sua envoltória convexa está em $V(D)$.

$$\text{HullSet}_{\vec{P}_3}(S) := \forall Z(S \subseteq Z \wedge Z \subsetneq V(D) \implies \neg \text{Closed}_{\vec{P}_3}(Z))$$

$$\text{HullSet}_{\vec{P}_3^*}(S) := \forall Z(S \subseteq Z \wedge Z \subsetneq V(D) \implies \neg \text{Closed}_{\vec{P}_3^*}(Z)).$$

□

Proposição 3.3.2. *Dado um grafo orientado D com n vértices, com largura em clique do seu grafo subjacente igual a k , então existe um algoritmo que calcula $\vec{\text{in}}_{P_3}(D)$, $\vec{\text{in}}_{P_3^*}(D)$, $\vec{\text{hn}}_{P_3}(D)$ e $\vec{\text{hn}}_{P_3^*}(D)$ em tempo cúbico.*

Demonstração. Observe que o resultado segue diretamente do Lema 3.3.1, Lema 3.3.2 e Teorema 2.4.1. □

4 CONVEXIDADES GEODÉSICA, \vec{P}_3 E \vec{P}_3^* : OUTROS LIMITANTES E DIFICULDADE EM TORNEIOS

Continuamos pesquisando sobre os parâmetros número de intervalo e número de envoltória nas convexidades \vec{g} , \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* e obtivemos resultados complementares e novos limitantes. Os resultados a seguir foram obtidos em coautoria com os orientadores e o professor Thiago Marcilon.

Na Seção 4.1, fazemos uma breve observação sobre relação do número de intervalo na convexidade geodésica de um grafo G não orientado e o menor valor do número de intervalo orientado dentre todas as orientações de G .

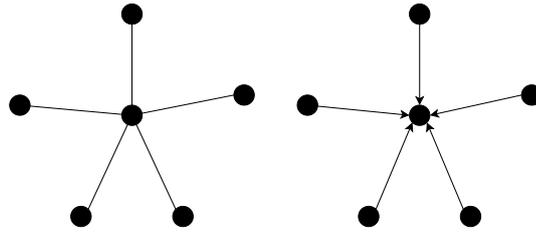
Em seguida, mostramos que existe um limitante superior apertado para $\text{in}_{P_3}(G)$, no caso de grafos não orientados, em função do conjunto de vértices com grau 1. Provamos também a existência de limitantes superiores apertados para $\vec{\text{in}}_{P_3}$ e $\vec{\text{in}}_{P_3^*}$ em função do conjunto de vértices extremos. Adicionalmente, para grafos split orientados, provamos que existe limitante superior para $\vec{\text{hn}}_g$ e $\vec{\text{hn}}_{P_3^*}$ em função do número de componentes fortes não triviais e do conjunto de vértices extremos.

Pesquisamos também sobre o número de intervalo em torneios na convexidade \vec{P}_3 , encontrando sua relação com o número de dominação em torneios. Assim como o problema de dominação em torneios, demonstramos que sempre há um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 com $\mathcal{O}(\log n)$ vértices de qualquer torneio T com n vértices. Utilizando um resultado creditado a Paul Erdős (vide (Megiddo; Vishkin, 1988)) sobre o número de dominação em torneios, percebemos também que há torneio T com n vértices cujo número de intervalo na convexidade \vec{P}_3 é $\Omega(\log n)$. Estudamos ainda complexidade de se determinar $\vec{\text{in}}_{P_3}(T)$ quando T é um torneio. Pela observação anterior, sabe-se que há algoritmo de tempo subexponencial de tempo $\mathcal{O}(n^{\log n})$ para encontrar $\vec{\text{in}}_{P_3}(T)$, para um dado torneio T com n vértices. Usando um resultado de (Megiddo; Vishkin, 1988), argumentamos que, sob a Hipótese do Tempo Exponencial, não há algoritmo polinomial para se determinar $\vec{\text{in}}_{P_3}(T)$. Mostramos ainda que, para um dado torneio T e um inteiro não negativo k , determinar se T possui um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3^* com tamanho no máximo k é $W[2]$ -difícil, quando parametrizado em k . Para tanto, provamos que o problema de dominação em torneios, parametrizado pelo valor da solução, é $W[2]$ -difícil, resultado que não encontramos na literatura.

4.1 Orientações em grafos

Podemos observar que nem sempre os valores do número de intervalo e do número de envoltória de um grafo G não orientado coincidem com seus correspondentes orientados para uma dada orientação de G .

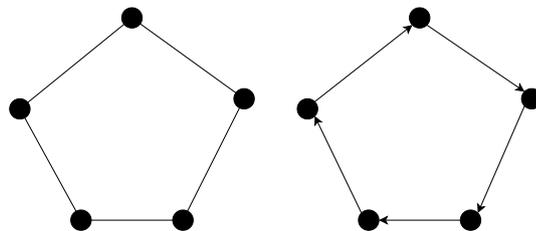
Figura 9 – Número de intervalo de uma orientação sendo maior que do grafo subjacente



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe a Figura 9. O grafo não orientado a esquerda tem número de intervalo na convexidade geodésica igual a 5, tendo em vista que é necessário e suficiente a seleção de suas folhas para termos como imagem na função de intervalo desta convexidade todo o conjunto de vértices do grafo. Por outro lado, quando fazemos a orientação indicada na figura, é necessário e suficiente escolhermos os 6 vértices na convexidade \vec{g} , já que todos os vértices são extremos. Este valor não necessariamente é sempre estritamente maior, pode ocorrer de quando orientamos um grafo o número de intervalo orientado na convexidade geodésica é menor do que para o caso não orientado. Na Figura 10, observe que o número de intervalo no ciclo ímpar não orientado na convexidade geodésica é igual a 3, enquanto que o número de intervalo geodésico de um ciclo ímpar orientado é igual a 2.

Figura 10 – Número de intervalo do grafo subjacente maior do que o número de intervalo de uma orientação



Fonte: elaborado pelo autor.

Seja G um grafo simples, definimos como $\text{in}_{\vec{P}_3}(G)$ o número de intervalo mínimo na convexidade \vec{P}_3 dentre todas as orientações das arestas de G .

Proposição 4.1.1. *Seja G um grafo simples, então $\text{in}_{\overrightarrow{P_3}}(G) = \text{in}_{P_3}(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grafo e S um conjunto de intervalo de G na convexidade P_3 tal que $|S| = \text{in}_{P_3}(G)$. Mostraremos que este conjunto é um conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{P_3}$ para uma dada orientação D de G . Veja que, para cada $w \notin S$, existem $u, v \in S$ tais que $w \in \text{Ip}_3(\{u, v\})$. Então, para cada $w \notin S$, fixamos uma escolha de $u, v \in S$ tais que $w \in \text{Ip}_3(\{u, v\})$ e orientamos (u, w) e (w, v) em D . Quaisquer arestas não orientadas no procedimento acima, podem ser orientadas arbitrariamente em D . Pela definição, note que S seria também um conjunto de intervalo na convexidade $\overrightarrow{P_3}$ desta orientação D de G . Obtemos então que $\overrightarrow{\text{in}}_{\overrightarrow{P_3}}(G) \leq |S| = \overrightarrow{\text{in}}_{P_3}(G)$.

Reciprocamente, seja D uma orientação de G tal que $\overrightarrow{\text{in}}_{\overrightarrow{P_3}}(D) = \overrightarrow{\text{in}}_{\overrightarrow{P_3}}(G)$. Considere S um conjunto de intervalo de tamanho mínimo de D , ou seja, $|S| = \overrightarrow{\text{in}}_{\overrightarrow{P_3}}(G)$. Veja que, por definição, para cada $w \notin S$, existem arcos (u, w) e (w, v) em D tais que $u, v \in S$. Logo, S é conjunto de intervalo para o grafo subjacente G e, portanto, $\text{in}_{P_3}(G) \leq |S| = \overrightarrow{\text{in}}_{\overrightarrow{P_3}}(G)$. Por conseguinte, a igualdade foi provada. \square

Deve-se observar que a Proposição 4.1.1 implica, do ponto de vista de Complexidade Computacional, que resultados de NP-dificuldade e W-dificuldade para o número de intervalo na convexidade P_3 no caso não direcionado, podem ser imediatamente traduzidos em resultados similares no caso direcionado. Note que, por exemplo, o Teorema 3.3.3 é uma adaptação de uma demonstração similar do caso não direcionado (Centeno *et al.*, 2009). Se removida a hipótese mais forte do grafo orientado D ser um DAG do enunciado do Teorema 3.3.3, tal resultado seria um corolário da Proposição 4.1.1.

4.2 Limitantes

Seja G um grafo não orientado. Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é k -dominante se cada vértice $v \in V(G) \setminus S$ é adjacente a k vértices em S . A cardinalidade de um conjunto k -dominante mínimo de um grafo G é denotada por $\gamma_k(G)$. Note que determinar um conjunto de intervalo na convexidade P_3 num grafo G é equivalente a encontrar um conjunto 2-dominante. Os autores (Caro; Roditty, 1990) mostraram o seguinte limitante para um k -conjunto dominante mínimo $\gamma_k(G)$ num grafo G .

Proposição 4.2.1. (Caro; Roditty, 1990) *Seja G um grafo com $|V(G)| = n$ e $\delta(G)$ o grau mínimo do grafo G . Se $\delta(G) \geq k$, então $\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k+1}$.*

Em particular, para $k = 2$, eles deduzem que $\gamma_2(G) = \overrightarrow{\text{in}}_{P_3}(G) \leq \frac{2n}{3}$ para um grafo G com n vértices tal que $\delta(G) \geq 2$. Abaixo, mostramos uma prova distinta para um resultado análogo com relação ao número de intervalo na convexidade P_3 que obtivemos.

Proposição 4.2.2. *Se G é um grafo simples com n vértices e V_1 é o conjunto de vértices de grau 1 de G , então $\text{in}_{P_3}(G) \leq |V_1| + \left\lceil \frac{2(n-|V_1|)}{3} \right\rceil$. Esse limitante é apertado.*

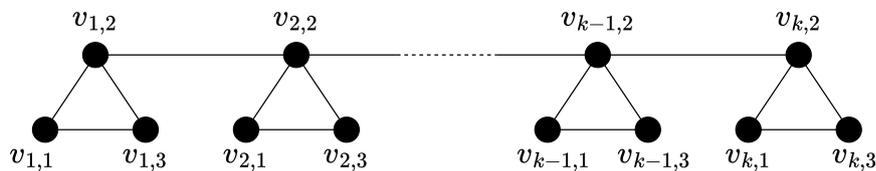
Demonstração. Vamos construir um conjunto de intervalo S que tem no máximo $|V_1| + \left\lceil \frac{2(n-|V_1|)}{3} \right\rceil$ vértices. Inicialmente adicione V_1 a S . Aplique $\text{I}_{P_3}(S)$. Iteradamente, enquanto houver vértice $v \in V(G) \setminus \text{I}_{P_3}(S)$ (lembrando que v tem grau pelo menos dois), atualizaremos o conjunto S em função da seguinte análise de casos:

- i) se existe $w \in N_G(v) \cap S$, como $v \notin \text{I}_{P_3}(S)$ e $d_G(v) \geq 2$, existe um outro vizinho de v , digamos $u \in V(G) \setminus S$. Neste caso, adicionamos u a S . Note que agora $v \in \text{I}_{P_3}(S)$.
- ii) Se $N_G(v) \cap S = \emptyset$, então existem ao menos dois vizinhos de v , digamos $u, w \in N_G(v)$, que não pertencem a $\text{I}_{P_3}(S)$. Neste caso, adicionamos u e w a S e, a partir de então, tem-se que $v \in \text{I}_{P_3}(S)$.

Observe que a cada etapa após a inclusão de V_1 a S , selecionam-se no máximo $2/3$ dos vértices remanescentes para pertencer à S . Conclui-se que S é um conjunto de intervalo na convexidade P_3 e $|S| \leq |V_1| + \left\lceil \frac{2(n-|V_1|)}{3} \right\rceil$.

Veja que o limitante é alcançado na classe de grafos exemplificada na Figura 11. Note que este grafo G não tem vértices de grau 1. Observe que para cada triângulo $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$, para $i = 1, \dots, k$, é necessário e suficiente selecionarmos dois vértices para obtermos um conjunto de intervalo para G na convexidade P_3 .

Figura 11 – Exemplo de grafo atingindo limitante da Proposição 4.2.2



Fonte: elaborado pelo autor.

□

Para um grafo direcionado D , um *conjunto de dominação gêmea* $S \subseteq V(D)$ é tal que todo vértice $v \in V(D) \setminus S$ possui um vizinho de entrada e um vizinho de saída em S (Chartrand

et al., 2003a). O número de dominação gêmea, denotado por $\gamma^*(D)$, é a cardinalidade de um conjunto de dominação gêmea mínimo de D . Note que, portanto, $\gamma^*(D) = \overrightarrow{\text{in}}_{P_3}(D)$.

Os autores em (Chartrand *et al.*, 2003a) provaram o resultado análogo ao que apresentamos seguir para o número de dominação gêmea. Abaixo apresentamos uma demonstração mais simples e válida também para a convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$.

Proposição 4.2.3. *Seja D um grafo orientado com n vértices e denote por $\text{Ext}(D)$ o conjunto de vértices extremos na convexidade $\mathcal{X} \in \{\overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_3^*}\}$. Então, $\text{in}_{\mathcal{X}}(D) \leq \left\lceil \frac{2(n-|\text{Ext}(D)|)}{3} \right\rceil + |\text{Ext}(D)|$. Além disso, este limitante é apertado.*

Demonstração. Vamos construir um conjunto de intervalo S que tem no máximo $\left\lceil \frac{2(n-|\text{Ext}(D)|)}{3} \right\rceil + |\text{Ext}(D)|$ vértices. Inicialmente, adicione $\text{Ext}(D)$ a S . Lembre que no caso da convexidade $\overrightarrow{P_3}$ tais vértices são apenas fontes e sumidouros, enquanto que, na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$, além destes há também os transitivos. Aplique $\overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(S)$. Iteradamente, enquanto existir vértice $v \in V(D) \setminus \overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(S)$ atualizaremos o conjunto S da seguinte forma.

Como v não é extremal, existem portanto $u \in N^+(v)$ e $w \in N^-(v)$ em $V \setminus \overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(S)$. No caso da convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$, podemos ainda assumir a existência de tais u e w de modo que $(w, u) \notin A(D)$ já que v não é transitivo. Adicionamos u e w a S , caso já não pertençam (note que no máximo um deles já pertence a S , uma vez que $v \notin \overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(S)$). Note que, em ambas convexidades, $v \in \overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(S)$.

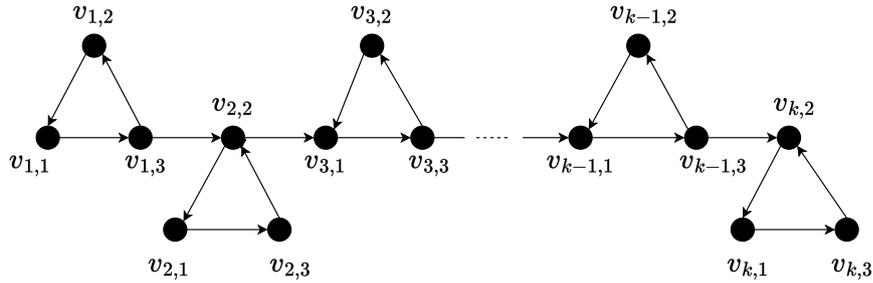
Perceba que cada etapa seguinte a adicionarmos $\text{Ext}(D)$ a S estamos selecionando no máximo $\frac{2}{3}$ dos vértices remanescentes para pertencer a S . Concluímos que S é um conjunto de intervalo na convexidade \mathcal{X} com no máximo $\left\lceil \frac{2(n-|\text{Ext}(D)|)}{3} \right\rceil + |\text{Ext}(D)|$ vértices.

Este limitante é apertado, como mostrado no grafo D da Figura 12. Inicialmente, perceba que este grafo orientado não possui vértices extremos. Para cada triângulo orientado $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$, com $i = 1, \dots, k$, é necessário e suficiente que selecionemos dois vértices quaisquer $\{u, v\} \subseteq \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$, para termos $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\} \subseteq \overrightarrow{\text{I}}_{\mathcal{X}}(\{u, v\})$.

□

Existe limitante análogo para o número de envoltória em grafos orientados na convexidade geodésica (Araujo; Arraes, 2021), onde há fator constante de $2/3$, como na Proposição 4.2.3. Notemos que existe uma diferença deste para o limitante superior análogo correspondente ao número de envoltória geodésico quando consideramos o caso não orientado (Araujo *et al.*, 2013),

Figura 12 – Exemplo de grafo atingindo limitante da Proposição 4.2.3



Fonte: elaborado pelo autor.

com fator constante $3/5$. Observamos que no caso da convexidade P_3 , tal diferença não ocorre entre os casos não orientado e orientado, como visto nas Proposições 4.2.2 e 4.2.3.

Lembramos que um grafo G é dito *split* se podemos particionar seus vértices em dois subconjuntos S e K de modo que K é uma clique e S é um conjunto independente de G . Para representar tal partição, denota-se G por $G = (K \cup S, E)$.

Proposição 4.2.4. *Sejam D uma orientação de um grafo split $G = (K \cup S, E)$ e $\text{Ext}(D)$ os vértices extremos de D . Então, $\overrightarrow{\text{hn}}_{P_3^*}(D) \leq \overrightarrow{\text{hn}}_{P_3^*}(D[K]) + |\text{Ext}(D) \cap S|$.*

Demonstração. Vamos construir um conjunto de envoltória X na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$ para D . Primeiramente, note que um vértice extremal de D em K é também extremal em $D[K]$. Inicialmente, adicionamos a X um conjunto de envoltória mínimo de $D[K]$. Em particular, note que tal conjunto deve conter todos os extremos de D pertencentes a K . Em seguida, adicionamos a X os vértices de $S \cap \text{Ext}(D)$, os quais devem estar contidos em todo conjunto de envoltória de D .

Note que $\overrightarrow{H}_{P_3}(X) \supseteq K$, uma vez que X contém um conjunto de envoltória de $D[K]$ e a inclusão dos vértices em S não altera o comportamento da função de intervalo com respeito aos vértices em K , uma vez que são apenas considerados caminhos mínimos de comprimento 2.

Agora observe que, para todo vértice $v \in S \setminus \text{Ext}(D)$, existem vértices $u, w \in K$ tais que temos $(u, v), (v, w) \in A(D)$ e $(u, w) \notin A(D)$. Ora, isto implica que S é um conjunto de envoltória na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$ de D . \square

Com respeito a Proposição 4.2.4 há duas observações a serem feitas. Primeiramente, deve-se lembrar que sabemos o valor exato do número de envoltória de $D[K]$, pela Proposição 3.2.4. Ressalta-se porém que tal valor depende dos vértices extremos de $D[K]$ que não necessariamente são vértices extremos de D . A segunda observação é que todo conjunto de envoltória na convexidade $\overrightarrow{P_3^*}$ é também um conjunto de envoltória na convexidade \overrightarrow{g} , assim

como ambas tem os mesmos conjuntos de vértices extremos. Portanto tal limitante também é válido para a convexidade \vec{g} .

4.3 Calculando número de intervalo de torneios na convexidade de caminhos de comprimento dois

Nesta seção, mostramos uma relação muito próxima entre o número de intervalo na convexidade \vec{P}_3 e o número de dominação para torneios. Como visto na página 26, um subconjunto de vértices S , em um grafo orientado D , é um *conjunto dominante* se, para todo $u \in V(D) \setminus S$, ocorre $u \in N^+(v)$, para algum $v \in S$. Definimos $\gamma^+(D)$ como o tamanho de um menor conjunto dominante no grafo orientado D .

Dado um torneio T , vamos definir $T^s(T) = (V', A')$ como o torneio obtido a partir de T pela adição de um vértice sumidouro, ou seja $V(T^s(T)) = V(T) \cup \{s\}$ e $A(T^s(T)) = A(T) \cup \{(u, s) \mid u \in V(T)\}$. A proposição a seguir é simples, mas tem consequências bastante relevantes como será visto ao longo desta seção.

Proposição 4.3.1. *Seja $T = (V, E)$ um torneio e k um inteiro positivo. Então, $\gamma^+(T) = k$ se, e somente se, $\vec{\text{in}}_{P_3}(T^s(T)) = k + 1$.*

Demonstração. Suponha que S é um conjunto de dominação de T de cardinalidade mínima, ou seja $|S| = \gamma^+(T) = k$. Sendo s o vértice sumidouro adicionado a T em $T^s(T)$, observe que $S \cup \{s\}$ é um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 em $T^s(T)$. Logo, $\vec{\text{in}}_{P_3}(T^s(T)) \leq k + 1$. Suponha que existe um conjunto S' , tal que $|S'| < |S \cup \{s\}| = k + 1$ e S' é um conjunto de intervalo em $T^s(T)$ na convexidade \vec{P}_3 . Como s é um sumidouro, temos que $s \in S'$. Observe que para cada $v \notin S'$, existe $u \in S'$, tal que v é um vértice interno de um caminho de comprimento dois que inicia em u . Por outro lado, isto implica que $u, v \in V(T)$ e $(u, v) \in A(T)$. Segue que $S' \setminus \{s\}$ é um conjunto de dominação de T , contradizendo a minimalidade do conjunto de dominação S com relação a T .

Reciprocamente, suponha que $\vec{\text{in}}_{P_3}(T^s(T)) = k + 1$. Como s é sumidouro, seja $S \cup \{s\}$ um conjunto de intervalo mínimo na convexidade \vec{P}_3 de $T^s(T)$. Pela mesma argumentação anterior, note que S é conjunto de dominação de T . Afirmamos que S é um conjunto de dominação mínimo de T . Observe que se S não é um conjunto de dominação mínimo em T , existe um conjunto de dominação S' tal que $|S'| < |S|$. Nesse caso, veja que existe um conjunto de intervalo

com cardinalidade menor que $S \cup \{s\}$, que seria o conjunto $S' \cup \{s\}$. Isto é uma contradição, pois $S \cup \{s\}$ é um conjunto de intervalo mínimo de $T^s(T)$ na convexidade \vec{P}_3 . \square

No caso de dominação em torneios, há um limitante superior cuja demonstração é creditada a Paul Erdős. Tal demonstração pode ser encontrada no artigo seguinte:

Proposição 4.3.2. (Megiddo; Vishkin, 1988) *Se T um torneio com $n \geq 2$ vértices, então*

$$\gamma^+(T) \leq \lceil \log_2 n \rceil.$$

Adaptando esta demonstração, conseguimos um limitante similar para o número de intervalo na convexidade \vec{P}_3 .

Proposição 4.3.3. *Seja T um torneio com $n \geq 4$ vértices, então $\vec{\text{in}}_{P_3}(T) \leq \left\lceil 2 \log_{\frac{4}{3}} n \right\rceil$.*

Demonstração. Vamos construir um conjunto de intervalo S para T na convexidade \vec{P}_3 iterativamente. Seja v um vértice do torneio T com $n \geq 4$ vértices. Observe que $\sum_{v \in V(T)} d_T^+(v) = \frac{n(n-1)}{2}$. Isto implica que existe ao menos um vértice $v \in V(T)$ tal que $d_T^+(v) \geq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$. Assim, seja v_1 um vértice tal que $d_T^+(v_1) \geq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$. Seja $T_1 = T[\{v \in V(T) \mid v \in N^+(v_1)\}]$. Analogamente, existe um vértice $v_2 \in V(T_1)$, tal que $d_{T_1}^-(v_2) \geq \left\lceil \frac{(n-3)}{4} \right\rceil$, já que $|T_1| \geq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$. Observe que existem ao menos uma quantidade igual a $\left\lceil \frac{(n-3)}{4} \right\rceil$ de (v_1, v_2) -caminhos de comprimento dois. Adicionamos os vértices v_1, v_2 a S . Note que, após essa primeira adição, $|\vec{I}_{P_3}(S)| \geq \left\lceil \frac{(n-3)}{4} \right\rceil + 2$. Enquanto houver vértices em $V(T) \setminus \vec{I}_{P_3}(S)$, aplicamos a ideia anterior ao subtorneio de T formado pelos vértices não pertencentes a $\vec{I}_{P_3}(S)$. Conseguimos deste modo um conjunto de intervalo S na convexidade \vec{P}_3 com no máximo $\left\lceil 2 \log_{\frac{4}{3}} n \right\rceil$. \square

Deve-se ressaltar que há um resultado similar ao apresentado na Proposição 4.3.3 em (Osula; Zuazua, 2019), onde foi demonstrado um limitante superior logarítmico para o número de dominação gêmea de torneios. Como mencionado previamente, o número de dominação gêmea é um parâmetro equivalente ao número de intervalo na convexidade \vec{P}_3 . Porém acreditamos que este trabalho ainda não foi publicado em periódicos ou anais de conferências.

Corolário 4.3.1. *Seja k um inteiro positivo. Se D é uma orientação do complemento de um grafo k -partido G , cada parte possuindo ao menos 4 vértices, então $\vec{\text{in}}_{P_3}(D) \leq k \left\lceil 2 \log_{\frac{4}{3}} n \right\rceil$.*

Demonstração. Note que os vértices de D são particionados em k subconjuntos que induzem torneios. É suficiente observar que a união de conjuntos de intervalo na convexidade \vec{P}_3 de cada um destes torneios é um conjunto de intervalo para D . O resultado segue da Proposição 4.3.3. \square

Corolário 4.3.2. *Um conjunto de intervalo mínimo na convexidade \vec{P}_3 de um torneio T com n vértices pode ser encontrado em tempo $\mathcal{O}(n^{\log n}) = \mathcal{O}(2^{\log^2 n})$ vértices.*

Demonstração. Veja que, em consequência da Proposição 4.3.3, um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3 com cardinalidade mínima pode ser encontrado analisando todos os subconjuntos não vazios de $V(T)$ com cardinalidade até no máximo $\left\lceil 2 \log_{\frac{4}{3}} n \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{2-\log 3} \log n \right\rceil$. Verificar se um dado conjunto é de intervalo na convexidade \vec{P}_3 pode ser feita em tempo polinomial, uma vez que é suficiente analisar, para cada vértice não escolhido, se o mesmo possui um vizinho de entrada e um de saída no conjunto dado. \square

Note que o Corolário 4.3.2 implica na existência de um algoritmo subexponencial para decidir se $\vec{\text{in}}_{P_3}(T) \leq k$, dados um torneio T e um inteiro positivo k . Portanto, assumindo como verdadeira a Hipótese do Tempo Exponencial (vide Seção 2.2), este problema não deve ser NP-difícil, uma vez que uma redução polinomial de 3-SAT para este problema implicaria na existência de um algoritmo subexponencial para 3-SAT. Por outro lado, ainda sob a mesma hipótese, não se deve esperar um algoritmo polinomial para resolver este problema como veremos a seguir.

Proposição 4.3.4 ((Megiddo; Vishkin, 1988)). *Se existir algoritmo de tempo polinomial para decidir se $\gamma^+(T) \leq k$, dados um torneio T e um inteiro positivo k , então há algoritmo para decidir SAT em instâncias com n variáveis e m cláusulas que executa em tempo $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})} m^K$, para alguma constante K .*

Corolário 4.3.3. *Assumindo a Hipótese do Tempo Exponencial, não há algoritmo polinomial para decidir se $\vec{\text{in}}_{P_3}(T) \leq k$, dados um torneio T e um inteiro positivo k .*

Demonstração. Note que a existência de um algoritmo polinomial para o problema de número de intervalo em torneios na convexidade \vec{P}_3 implica na existência de um algoritmo polinomial para resolver o problema de dominação em torneios, devido à Proposição 4.3.1. Pela Proposição 4.3.4 implicaria em algoritmo subexponencial para SAT, contradizendo a Hipótese do Tempo Exponencial. \square

Ainda com respeito ao limitante provido pela Proposição 4.3.2, Erdős também provou que, ao menos em ordem de grandeza, este limitante é preciso, usando o Método Probabilístico.

Teorema 4.3.1 ((Erdős, 1963)). *Para cada constante $\varepsilon > 0$, existe uma constante K , tal que, para todo $k \geq K$, existe um torneio T_k com não mais do que $2^k k^2 \log(2 + \varepsilon)$ vértices satisfazendo $\gamma^+(T_k) > k$.*

Uma outra consequência direta da Proposição 4.3.1 é a seguinte.

Corolário 4.3.4. *Para cada constante $\varepsilon > 0$, existe uma constante K , tal que, para todo $k \geq K$, existe um torneio T_k com não mais do que $2^k k^2 \log(2 + \varepsilon) + 1$ vértices satisfazendo $\vec{\text{in}}_{P_3}(T_k) > k + 1$.*

Demonstração. Basta tomar o torneio obtido do Teorema 4.3.1 e adicionar um vértice sumidouro. O resultado segue da Proposição 4.3.1. \square

A demonstração do Teorema 4.3.1 é probabilística. Entretanto, os autores em (Graham; Spencer, 1971) apresentaram uma construção explícita de um torneio T'_k satisfazendo $\gamma^+(T'_k) > k$ como segue.

Definição 1. *Sejam k um inteiro positivo e n o menor primo tal que $n \equiv 3 \pmod{4}$ e $n > 2^{2k-2}k^2$. Definimos o torneio T'_k com n vértices da seguinte forma: $V(T'_k) = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ e se $u, v \in \mathbb{Z}_n$ com $u \neq v$, dizemos que $(u, v) \in A(T'_k)$ se, e somente se, $u - v \equiv a^2 \pmod{n}$, para algum $a \in \mathbb{Z}_n$.*

Como respeito ao “menor número primo n tal que $n > 2^{2k-2}k^2$ ”, deve-se observar que se p_1 e p_2 são números primos congruentes a $3 \pmod{4}$, então $2p_1p_2 + 1$ também o é. Isto implica que T'_k tem não mais do que $n \leq 2(2^{2k-2}k^2)^2 + 1 = 2^{4k-3}k^4$ vértices. Pela Definição 1, note que cada arco de T'_k pode ser decidido em tempo linear em n e temos $\binom{n}{2}$ arcos. Portanto, T'_k pode ser construído em $\mathcal{O}(n^3)$ sendo $n \leq 2^{4k-3}k^4$. Tais informações serão úteis na seção seguinte.

4.4 Dificuldade do número de intervalo a distância dois em torneios

Nesta seção, vamos provar que determinar o número de intervalo na convexidade \vec{P}_3^* em torneios pertence à classe $W[2]$ -difícil, quando parametrizado pelo valor da solução. Lembrando do que foi visto na Página 26, o problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA tem como entrada um grafo G não orientado e um inteiro k não negativo, k é o parâmetro, o interesse é saber se ocorre $\gamma(G) \leq k$. Este é um dos mais conhecidos exemplos de problema

$W[2]$ -difícil (Cygan *et al.*, 2005). Vamos provar um resultado similar que não encontramos na literatura para o problema de dominação em grafos orientados.

DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA

Entrada: Um grafo orientado $D = (V, A)$.

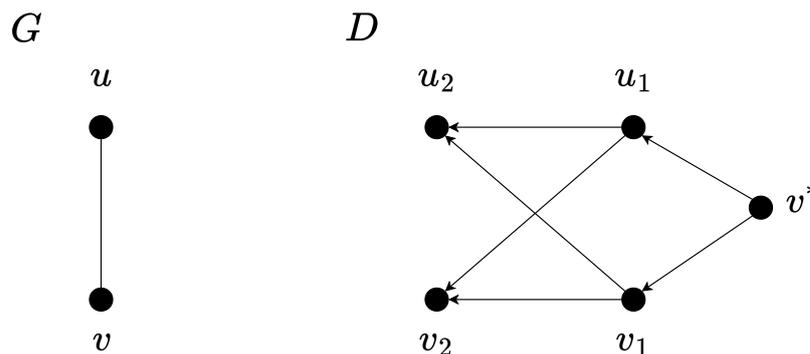
Parâmetro: Um inteiro $k \geq 0$.

Pergunta: $\gamma^+(D) \leq k$?

Proposição 4.4.1. *O problema DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA é $W[2]$ -difícil.*

Demonstração. Vamos provar que o problema DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA é $W[2]$ -difícil. Faremos a redução a partir do problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA. Seja (G, k) uma instância do problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA. Vamos construir um grafo orientado D a partir de G da seguinte forma. Seja $V(D) = V_1 \cup V_2 \cup \{v^*\}$, sendo V_i , para cada $i \in \{1, 2\}$, uma cópia dos vértices de G . Criamos o conjunto de arcos de D de modo que se $uv \in E(G)$ escolhemos a cópia $u_1 \in V_1$ de u e a cópia $v_2 \in V_2$ de v , e adicionamos o arco $(u_1, v_2) \in A(D)$. Para cada vértice $u_1 \in V_1$ adicionamos o arco $(u_1, u_2) \in A(D)$, onde $u_2 \in V_2$ é a cópia do mesmo vértice u de G que u_1 . Adicionamos também, para cada $v \in V_1$, o arco $(v^*, v) \in A(D)$.

Figura 13 – Exemplificando a construção do grafo D



Fonte: elaborado pelo autor.

Vamos provar que (G, k) é instância positiva do problema DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA se, e somente se, (D, k') é instância positiva do problema DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA, onde $k' = k + 1$. Note que a construção é feita em tempo polinomial, uma vez que $|V(G')| = 2|V(G)| + 1$, e que o parâmetro da instância criada, k' , depende exclusivamente do parâmetro da instância (G, k) .

Suponha que temos uma instância (G, k) positiva para o problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA. Seja S um conjunto dominante de G de modo que $|S| \leq k$. Observe que o único vértice que pode dominar o conjunto de vértices V_1 é v^* , logo todo conjunto dominante em D deve ter v^* . Além disso, como S é um conjunto de dominação de G , pela construção de D , as cópias de S em V_1 , dominam V_2 . Concluimos que $S' = \{u_1 \in V_1 \mid u \in S\} \cup \{v^*\}$ é um conjunto dominante em D com $|S'| \leq k' = k + 1$.

Reciprocamente, suponha que o grafo orientado D possui um conjunto dominante S' com no máximo $k' = k + 1$ vértices. Como v^* é uma fonte, podemos afirmar que v^* está em todo conjunto dominante de D . Além disso, a vizinhança de saída de v^* são vértices de V_1 . Para cada $v \in V_2$, sabemos que $d^+(v) = 0$, então podemos assumir que $S' \setminus \{v^*\} \subseteq V_1$. Considere $S = \{u \in V(G) \mid u_1 \in S' \setminus \{v^*\}\}$. Como para cada cópia $u_1 \in V_1$ tem na sua vizinhança de saída os mesmos vértices da vizinhança de $u \in V(G)$, concluimos que S é um conjunto dominante de G e $|S| = |S'| - 1 \leq k$. \square

Em posse do teorema anterior, provaremos o resultado principal desta seção. Entretanto, precisamos ainda de mais uma ferramenta.

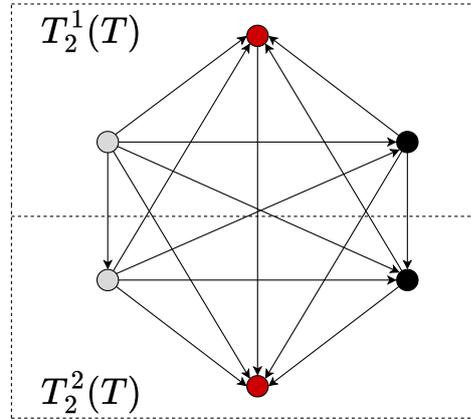
Definição 2. (Megiddo; Vishkin, 1988) Dado um torneio $T = (V, E)$ e um inteiro positivo k , nós definimos outro torneio $T_k(T) = (V', E')$ como segue. Seja $V' = V \times \{1, \dots, k\}$. Para todo i, j com $1 \leq i, j \leq k$ e $u \neq v$ em V , se u domina v em T , o vértice (u, i) domina (v, j) em $T_k(T)$. Para $i \neq j$ com $u \in V$, se $i < j$, o vértice (u, i) domina (u, j) em $T_k(T)$. Denotamos por $T_k^i(T)$ o subtorneio $T_k(T)[V \times \{i\}]$, que é isomorfo a T , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Veja a Figura 14.

Lema 4.4.1. (Megiddo; Vishkin, 1988) Dados um torneio $T = (V, E)$, um inteiro positivo k e inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$, se S é um conjunto de vértices de $T_k(T)$ o qual domina todos os vértices do subtorneio $T_k^i(T)$ de $T_k(T)$, então $|S| \geq \gamma^+(T)$.

Demonstração. Seja S um conjunto de vértices de $T_k(T)$ que domina os vértices em $V \times \{i\}$. Logo, para todo vértice $u \in V$, ou existe um $j \leq i$ tal que $(u, j) \in S$, ou existe um $v \in V$ tal que $(v, j) \in S$, para algum j com $1 \leq j \leq k$, e v domina u em T . Seja S' a projeção de S em V , ou seja, o conjunto de vértices $v \in V$ onde $(v, j) \in S$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Observe que S' é um conjunto de dominação em T . O resultado está provado, pois $\gamma^+(T) \leq |S'| \leq |S|$. \square

Na redução a seguir, combinaremos o Lema 4.4.1 com o torneio apresentado ao final da Seção 4.3. Ou seja, tomaremos T para ser o torneio $T = T'_k$ com não mais do que $n \leq 2^{4k-3}k^4$

Figura 14 – Exemplificando a construção do grafo $T_k(T)$, sendo T um torneio transitivo com 3 vértices e $k = 2$. Observe que as cores indicam os vértices correlatos de $T_2^1(T)$ e $T_2^2(T)$



Fonte: elaborado pelo autor.

vértices, cujo número de dominação é maior do que k , e que pode ser construído em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Utilizaremos $T_k(T)$ como subtorneio na redução. Desse modo, pelo Lema 4.4.1, note que para dominarmos os vértices de uma cópia $T_k^i(T)$ de T , usando apenas vértices pertencentes a $T_k(T)$, é necessário usarmos ao menos $k + 1$ vértices.

Lembramos que a definição do problema INTERVALO \vec{P}_3^* ORIENTADO PARAMETRIZADO foi apresentada na Página 50.

Teorema 4.4.1. *O problema INTERVALO \vec{P}_3^* ORIENTADO PARAMETRIZADO é $W[2]$ -difícil em torneios.*

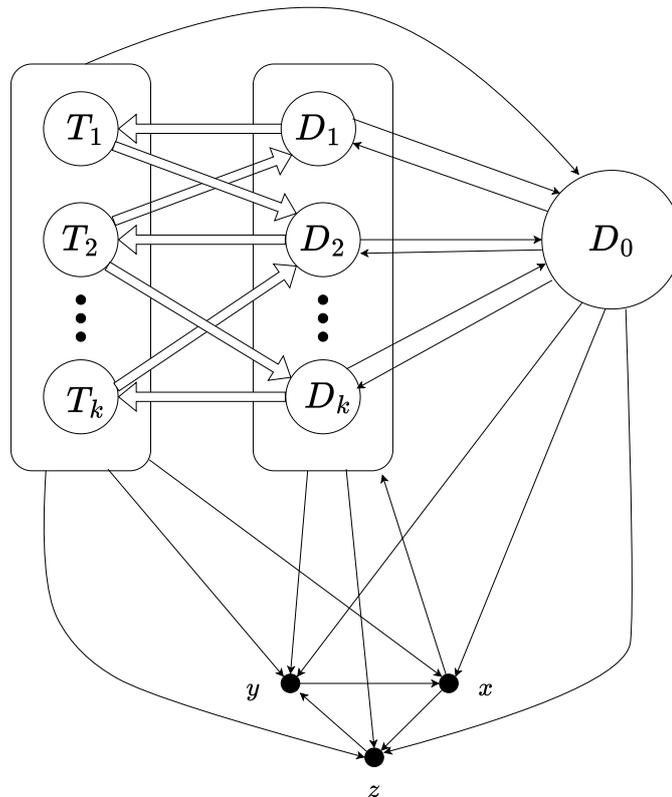
Demonstração. Sabemos que o problema DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA é $W[2]$ -difícil pelo Proposição 4.4.1. Vamos mostrar que há uma redução parametrizada deste problema para o problema de INTERVALO \vec{P}_3^* ORIENTADO PARAMETRIZADO. Seja (D, k) uma instância do problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA.

Vamos construir um torneio T_D a partir do grafo orientado D da instância dada do problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA usando na construção o torneio $T_k(T)$, apresentado na Definição 2.

Para construir T_D , iniciamos com $k + 1$ cópias do grafo orientado D : D_0, D_1, \dots, D_k . Além disto, adicionamos uma cópia do torneio $T_k(T)$ como na Definição 2. Lembre que $T = T_k'$ não possui mais do que $2^{4k-3}k^4$ vértices e tem número de dominação maior do que k , como visto na Definição 1. Além destes vértices, adicionamos a T_D outros três vértices x, y e z . Vide Figura 15.

Desse modo, observe que $V(T_D) = \left(\bigcup_{i=0}^k V(D_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k V(T_i)\right) \cup \{x, y, z\}$, onde aqui abreviamos para T_i a notação correspondente ao subtorneio $T_k^i(T)$ de $T_k(T)$ que, como mencionado previamente, é isomorfo a T . Também já se pode observar que a construção poderá ser realizada em tempo FPT em k , uma vez que $|V(T_D)| \leq (k+1)n + 2^{4k-3}k^5 + 3$, sendo n o número de vértices do grafo orientado D da instância de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA.

Figura 15 – Torneio T_D



Fonte: elaborado pelo autor.

Além dos arcos já existentes no torneio $T_k(T)$ e nas cópias de D (lembre que D não é necessariamente um torneio), precisamos descrever quais são os demais arcos existentes em T_D .

Trataremos primeiro dos arcos entre vértices de $\left(\bigcup_{i=0}^k D_i\right) \cup \{x, y, z\}$. Para cada arco $(u, v) \in A(D)$, se v_0 é o vértice correspondente a v em D_0 , pomos $(u_i, v_0) \in A(T_D)$, para cada cópia $u_i \in V(D_i)$ de u , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Caso contrário, se $(u, v) \notin A(D)$, adicionamos $(v_0, u_i) \in A(T_D)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Se $u \in V(D_i)$ e $v \in V(D_j)$ com $1 \leq i < j \leq k$, adicionamos (u, v) à $A(T_D)$. Para os demais pares de vértices não adjacentes em D_0, D_1, \dots, D_k , já que D não é necessariamente um torneio, adicionamos arbitrariamente um arco de modo

que $V(T_D)[\bigcup_{i=0}^k V(D_i)]$ seja um torneio. Para cada vértice $v \in V(D_0)$, adicionamos os arcos $(v, y), (v, x), (v, z)$ à $A(T_D)$. Se $u \in \bigcup_{i=1}^k V(D_i)$ criamos os arcos $(u, y), (x, u), (u, z)$, adicionando-os à $A(T_D)$. Por fim, pomos $(y, x), (x, z), (z, y)$ em $A(T_D)$.

Adicionaremos agora os arcos remanescentes, que tem exatamente uma extremidade em $\bigcup_{i=1}^k T_i$, uma vez que, por definição, a cópia de $T_k(T)$ já é um torneio. Para cada vértice $u \in V(T_k(T)) = V(T_1) \cup \dots \cup V(T_k)$ e para cada vértice de $v \in V(D_0) \cup \{x, y, z\}$, adicionamos o arco (u, v) em $A(T_D)$. Para cada $u \in V(T_i)$ e $v \in V(D_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, criamos arcos (v, u) e adicionamos à $A(T_D)$. Se $u \in V(T_i)$ e $v \in V(D_j)$, com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \dots, k\}$, então (u, v) é adicionado em $A(T_D)$. Estes arcos completam a construção de T_D . Observe que T_D é portanto um torneio. Além disso, pelo Lema 4.4.1, lembre que qualquer subconjunto de vértices S de $T_k(T)$ que domine os vértices de T_i satisfaz $|S| \geq \gamma^+(T_k(T)) = \gamma^+(T_i) = \gamma(T) \geq k + 1$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Vamos provar que uma instância (D, k) é uma instância positiva para o problema de DOMINAÇÃO PARAMETRIZADA ORIENTADA, ou seja, existe um conjunto de dominação $S \subseteq V(D)$ com no máximo k vértices se, e somente se, em T_D existe um conjunto de intervalo S com tamanho no máximo $k' = k + 2$ na convexidade \overrightarrow{P}_3^* .

(\Rightarrow) Suponha que S é um conjunto de dominação de D tal que $|S| \leq k$. Sem perda de generalidade, assuma na verdade que $|S| = k$, pela adição, se necessário, de outros vértices de D a S . Seja $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V(D)$. Seja v_i o vértice correspondente a s_i em D_i . Defina $S' = \{v_1, \dots, v_k, x, y\}$. Note que $|S'| = k + 2$. Afirmamos que S' é um conjunto de intervalo na convexidade \overrightarrow{P}_3^* em T_D .

Veja, pela construção de T_D e sabendo que S é um conjunto dominante de D , que para todo $v \in V(D_0)$, existe $u \in S'$, tal que v é vértice interno de um (u, x) -caminho mínimo de comprimento dois, sendo u uma cópia de um vértice do conjunto dominante S , tal que u domina o vértice correspondente a v em D , e, para todo $v \in V(D_0)$, existe o arco $(v, x) \in A(T_D)$. Observe que se $w \in V(T_i)$ e $u \in V(D_i) \cap S$ (lembre que como tomamos $|S| = k$, há exatamente um vértice escolhido em cada D_i para pertencer a S'), para cada $1 \leq i \leq k$, w é vértice interno do (u, x) -caminho mínimo de comprimento dois. Além disso, por construção, cada vértice $v \in V(D_i)$ para cada $1 \leq i \leq k$, é um vértice interno de (x, y) -caminho de comprimento dois. Por fim, z é um vértice interno do (x, y) -caminho mínimo de comprimento dois. Portanto S' é um conjunto de intervalo na convexidade \overrightarrow{P}_3^* em T_D .

(\Leftarrow) Suponha agora que $S' \subseteq V(T_D)$ é um conjunto de intervalo na convexidade \overrightarrow{P}_3^*

tal que $|S'| \leq k + 2$. Inicialmente, vamos provar que é necessário e suficiente que dois vértices dentre o trio $\{x, y, z\}$ estejam em S' .

Note primeiro que não é possível que $|S' \cap \{x, y, z\}| = 0$, uma vez que só há um arco que parte do vértice z , em direção ao vértice y , o qual, por sua vez, também só tem um arco de saída para x . Portanto, z só pertence a um C_3 direcionado, (x, y, z) . Logo, como S' é conjunto de intervalo \vec{P}_3^* de T_D e T_D é um torneio, temos que $z \in S'$ ou $\{x, y\} \subseteq S'$, caso contrário $z \notin \vec{I}_{P_3^*}(S')$. Pela mesma argumentação, se $|S' \cap \{x, y, z\}| = 1$, seria necessário que $S' \cap \{x, y, z\} = z$. Porém, uma vez que $x \notin S'$, veja que $y \notin \vec{I}_{P_3^*}(S')$, já que o único arco de saída de y segue para x .

Portanto, é necessário termos pelo menos dois vértices selecionados em $\{x, y, z\}$ para S' . Veja que $\vec{I}_{P_3^*}(\{x, y\}) = \vec{I}_{P_3^*}(\{x, y, z\})$, já que $z \in \vec{I}_{P_3^*}(\{x, y\})$ e, como dito, o único triângulo direcionado a que z pertence é exatamente (x, y, z) . Assim sem perda de generalidade, podemos supor que $\{x, y, z\} \cap S' = \{x, y\}$.

Agora defina $S = S' \setminus \{x, y\}$ e observe portanto que $|S| \leq k$. Vamos primeiro provar que $|S| = k$, já que, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, deve ocorrer que $V(D_i) \cap S \neq \emptyset$. Suponha, por contradição, que existe D_i tal que $S \cap V(D_i) = \emptyset$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Como S' é um conjunto de intervalo na convexidade \vec{P}_3^* de T_D , então, pela construção de T_D , observe que cada vértice de T_i que não pertence a S , deve ser vértice interno de um (u, w) -caminho mínimo de comprimento dois, porém u deve necessariamente pertencer a $\bigcup_{j=1}^k T_j$. Ou seja, S é um conjunto de dominação de T_i . Portanto, pelo Lema 4.4.1 e pela escolha de T , que é isomorfo a T_i , temos que $|S| \geq k + 1$, contradizendo a hipótese.

Desse modo, observe que $|S' \cap V(D_i)| = 1$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ e que $|S| = k$. Consequentemente, $S' \cap V(D_0) = \emptyset$. Afirmamos que o conjunto formado pelas respectivas cópias dos vértices de S em D , formam um conjunto dominante de D . De fato, como S' é um conjunto de intervalo \vec{P}_3^* de T_D e S' é formado exatamente por um vértice de cada D_i , para $i \in \{1, \dots, k\}$, além dos vértices x e y , note que cada vértice $d \in V(D_0)$ deve ser vértice interno de um (u, w) -caminho mínimo de comprimento dois, sendo que u deve pertencer a $\left(\bigcup_{j=1}^k V(D_j)\right) \cap S'$ (e $w \in S'$, podendo, por exemplo, ser considerado como o vértice x). Tal arco (u, d) só existe em T_D caso os vértices correspondentes em D também possuam tal arco. Desse modo, $\gamma^+(D) \leq k$. \square

5 CONVEXIDADE DE CICLOS

Este capítulo é resultado do trabalho do autor com os pesquisadores Carlos V. G. C. Lima e Thiago Marcilon, ambos professores da Universidade Federal do Cariri, uma versão deste trabalho pode ser encontrada em (Lima *et al.*, 2024).

Na convexidade de ciclos, dado um grafo G não orientado e um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, dizemos que um vértice $v \notin S$ pertence a imagem da função de intervalo, se v pertence a um ciclo em $G[S \cup \{v\}]$. A função de intervalo na convexidade de ciclos é denotada por I_{cc} .

Neste capítulo, trabalhamos com parâmetros que, apesar de distintos, têm uma relação com os conceitos e parâmetros que estudamos nos capítulos anteriores. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Como descrito no Capítulo 1, o parâmetro número de convexidade, definido inicialmente em (Chartrand *et al.*, 2002), denotado por $cn(G)$, é a cardinalidade máxima de um conjunto convexo próprio $S \subsetneq V$. Na Seção 5.2, o problema NÚMERO DE CONVEXIDADE, consiste em determinar se existe um subconjunto de vértices $S \subsetneq V$ convexo na convexidade de ciclos, tal que $|S| \geq k$. Provamos que este problema é NP-completo e $W[1]$ -difícil quando parametrizado pelo valor da solução na convexidade de ciclos.

Estudamos também o parâmetro tempo de percolação, como visto na convexidade P_3 em (Benevides; Przykucki, 2013) e denotado por $pt(G)$. Lembre que tal parâmetro é o tempo máximo $k \geq 1$ onde $S \subseteq V(G)$ temos $I^k(S) = V(G)$ e $I^k(S) \setminus I^{k-1}(S) \neq \emptyset$. Em outras palavras, o tempo de percolação é o maior tempo de infecção dentre todos os conjuntos de envoltória. Dados um grafo G e um inteiro positivo k , o problema TEMPO DE PERCOLAÇÃO consiste em determinar se $pt(G) \geq k$. Mostramos que o problema TEMPO DE PERCOLAÇÃO na convexidade de ciclos pode ser resolvido em tempo linear quando o grafo G dado como entrada é um cacto. Além disso, demonstramos que dado um grafo G com n vértices, decidir se $pt_{cc}(G) \geq 2$ pode ser feito em $\mathcal{O}(n^3)$. Provamos também que o problema do tempo de percolação é NP-completo mesmo quando $k \geq 9$ é constante.

5.1 Número de convexidade

Dados um grafo G e um inteiro $k > 0$, o problema de NÚMERO DE CONVEXIDADE consiste em determinar se existe um subconjunto de vértices $S \subsetneq V$ convexo na convexidade de ciclos, tal que $|S| \geq k$.

NÚMERO DE CONVEXIDADE

Entrada:	Um grafo $G = (V, E)$.
Parâmetro:	Um inteiro $k \geq 0$.
Pergunta:	$\text{cn}(G) \geq k$

Teorema 5.1.1. *O problema NÚMERO DE CONVEXIDADE na convexidade de ciclos é NP-completo e $W[1]$ -difícil quando parametrizado em k .*

Demonstração. Dados um grafo G e um inteiro positivo k , checar se um dado subconjunto de vértices S de um grafo G é convexo na convexidade de ciclos e se $|S| \geq k$ pode ser feito em tempo polinomial. De fato, suponha que o grafo $G = (V, E)$ tem n vértices. Seja $S \subseteq V(G)$. Para verificarmos se S é convexo na convexidade de ciclos, aplicamos $I_{\text{cc}}(S)$ e verificamos se $I_{\text{cc}}(S) = S$. Para obter-se $I_{\text{cc}}(S)$, é suficiente incluir a $I_{\text{cc}}(S)$ os vértices de S e todos os vértices em $V(G) \setminus S$ que tenham dois vizinhos em S que pertençam a uma mesma componente conexa de $G[S]$. Portanto, é um problema em NP.

Para provarmos que o problema NÚMERO DE CONVEXIDADE é NP-completo e $W[1]$ -difícil quando parametrizado em k , vamos fazer uma redução parametrizada, porém também de tempo polinomial, a partir do problema do CONJUNTO INDEPENDENTE, que é decidir se $\alpha(G) \geq k'$, parametrizado em k' , o qual é NP-completo (Karp, 1972) e $W[1]$ -completo (Cygan *et al.*, 2005).

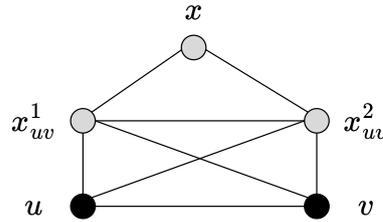
Seja (G, k) uma instância do problema CONJUNTO INDEPENDENTE. Vamos construir um grafo $G' = (V', E')$ a partir do grafo $G = (V, E)$, como apresentado abaixo:

- Fazemos $V \subseteq V'$ e $E \subseteq E'$;
- Adicionamos um vértice x a V' e, para cada $uv \in E$, adicionamos um par de vértices x_{uv}^1, x_{uv}^2 a V' e as arestas $ux_{uv}^1, vx_{uv}^1, ux_{uv}^2, vx_{uv}^2$ à E' . Seja X o conjunto de todos os vértices adicionados neste passo;
- Finalmente, adicionamos arestas em E' de modo que os vértices em X formem uma clique em G' .

A construção acima tem complexidade polinomial, vide Figura 16, visto que a quantidade de vértices e arestas é polinomial. De fato, se G tem n vértices e m arestas, observe que o grafo G' é simples, contendo exatamente $n + 2m + 1$ vértices e $5m + \binom{2m+1}{2}$ arestas. Note que $G'[V]$ é isomorfo a G .

Vamos provar que (G, k) é uma instância SIM do problema CONJUNTO INDEPEN-

Figura 16 – Grafo G' construído a partir de um grafo G com apenas dois vértices u e v



Fonte: elaborado pelo autor.

DENTE se, e somente se, (G', k') é uma instância SIM do problema NÚMERO DE CONVEXIDADE na convexidade de ciclos, onde $k' = k + 1$.

Suponha que G possui um conjunto independente S com pelo menos k elementos. Assim, $S' = S \cup \{x\}$ é um conjunto, diferente de V' , com pelo menos $k + 1$ vértices. Temos também que S' é um conjunto convexo na convexidade de ciclos visto que S' é um conjunto independente em G' e, portanto, $I_{cc}(S') = S'$.

Reciprocamente, suponha que temos um conjunto convexo $S' \neq V'$ em G' tal que $|S'| \geq k' = k + 1$. Suponha por contradição que S' possui dois vértices u e v em X . Como temos que $I_{cc}^2(u, v) = V'$, observe que S' só pode ser convexo caso $S' = V'$, absurdo. Logo S' não pode possuir dois vértices em X .

Como S' tem no máximo um vértice em X , então S' possui pelo menos k vértices em V . Suponha por contradição que S' possui dois vértices adjacentes $u, v \in V$. Como $I_{cc}(u, v) \supseteq \{x_{uv}^1, x_{uv}^2\}$, temos que, conseqüentemente, $I_{cc}^3(S') = V'$. Por conseguinte, temos novamente que S' só pode ser convexo caso $S' = V'$, um absurdo. Logo S' não pode possuir dois vértices adjacentes em V . Com isso, concluímos que o conjunto $S = S' \setminus X$ é um conjunto independente de ambos os grafos G e G' de tamanho pelo menos k . \square

5.2 Tempo de Percolação

Seja $G = (V, E)$, lembre que o *tempo de percolação* de um grafo G na convexidade de ciclos, denotado por $pt_{cc}(G)$, é o tempo máximo $k \geq 1$, onde existe $S \subseteq V(G)$, tal que $I_{cc}^k(S) = V(G)$ e $I_{cc}^k(S) \setminus I_{cc}^{k-1}(S) \neq \emptyset$. Definimos o seguinte problema de decisão e omitiremos o subscrito da notação $pt_{cc}(G)$.

TEMPO DE PERCOLAÇÃO

Entrada: Um grafo $G = (V, E)$.

Parâmetro: Um inteiro $k \geq 0$.

Pergunta: $\text{pt}(G) \geq k$?

5.2.1 Polinomial para Cactos

Lembrando da definição dada na página 25, seja G um cacto com pelo menos um ciclo. Definimos o grafo $T_G = (\mathcal{C}, A)$ a partir de G de forma que cada nó em \mathcal{C} é um ciclo de G e temos uma aresta entre dois nós C_1 e C_2 de T se, e somente se, C_1 e C_2 compartilham um vértice em G . Dizemos que um ciclo é folha se ele possui no máximo uma articulação. Defina ainda $\text{lp}(G)$ como o comprimento de um caminho máximo do grafo G .

Lema 5.2.1. *Dado um cacto $G = (V, E)$, podemos calcular $\text{lp}(T_G)$ em tempo linear no tamanho de G .*

Demonstração. Sejam \mathcal{C} os ciclos de G e $T'_G = (\mathcal{C} \cup V, A)$ a floresta formada quando ligamos cada vértice $w \in V$ a outro vértice $C \in \mathcal{C}$ se, e somente se, C contém w em G . Portanto, temos que os caminhos de T'_G alternam entre vértices em V e vértices em \mathcal{C} e que um caminho máximo em T'_G inicia e termina em um vértice em V . Também temos que o tamanho de T'_G é linear no tamanho de G visto que o número de ciclos em G é linear na sua quantidade de vértices, já que G é um cacto.

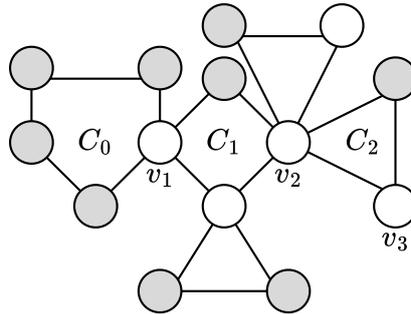
Temos que $v_0, C_0, v_1, C_1, \dots, C_k, v_{k+1}$ é um caminho de T'_G se, e somente se, ocorre de C_0, C_1, \dots, C_k ser um caminho em T_G . Assim, se k é o comprimento de um caminho máximo de T'_G , temos $\text{lp}(T_G) = \frac{k-1}{2}$. Portanto, como T'_G é uma floresta, podemos calcular o comprimento do seu caminho máximo e, conseqüentemente, $\text{lp}(T_G)$ em tempo linear. Adicionalmente, como podemos calcular todos os ciclos de um cacto em tempo linear, podemos construir T'_G também em tempo linear no tamanho de G . \square

Lema 5.2.2. *Seja $G = (V, E)$ um cacto com pelo menos um ciclo. Temos que $\text{pt}(G) = \text{lp}(T_G) + 1$.*

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ um cacto com pelo menos um ciclo e $k \geq 0$ um inteiro. Vamos provar que $\text{pt}_{cc}(G) \geq k + 1$ se, e somente se, existe um caminho de comprimento k em T_G .

Primeiramente, suponha que existe um conjunto de envoltória S de G e um vértice v_{k+1} tal que $v_{k+1} \in I_{cc}^{k+1}(S) \setminus I_{cc}^k(S)$ para $k \geq 0$. Pela definição de um conjunto de envoltória

Figura 17 – Exemplo de cacto G , conjunto de envoltória S , vértices v_1, v_2 e v_3 , e ciclos da sequência C_2, C_1, C_0 . Os vértices em cinza estão em S



Fonte: elaborado pelo autor.

na convexidade de ciclos, temos que, se $w \in I_{cc}^x(S) \setminus I_{cc}^{x-1}(S)$, então existe um ciclo contendo w tal que todos os outros vértices do ciclo estão em $I_{cc}^{x-1}(S)$, e, se $x > 1$, pelo menos um dos vértices deve estar em $I_{cc}^{x-1}(S) \setminus I_{cc}^{x-2}(S)$.

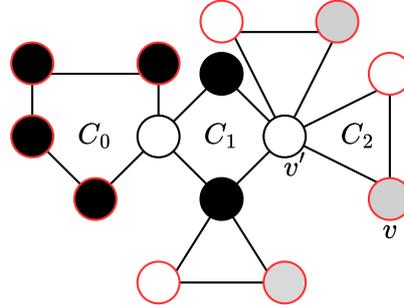
Com isso, podemos definir a seguinte sequência de ciclos em G : para todo $i = k, k-1, \dots, 0$, seja C_i um ciclo que contém o vértice v_{i+1} tal que todos os outros vértices de C_i estão em $I_{cc}^i(S)$, e, se $i > 0$, existe um vértice v_i em $I_{cc}^i(S) \setminus I_{cc}^{i-1}(S)$. A Figura 17 ilustra um exemplo de cacto G e de vértices v_1, v_2 e v_3 baseados em um conjunto de envoltória S , com cada ciclo da sequência C_2, C_1, C_0 destacado. Note que quaisquer dois ciclos consecutivos C_j e C_{j-1} dessa sequência compartilham o vértice v_j e quaisquer dois ciclos não consecutivos dessa sequência não compartilham vértices visto que G é um cacto. Portanto, essa mesma sequência de ciclos denota também um caminho de comprimento k em T_G .

Agora, vamos provar que, se existe um caminho de comprimento k em T_G , $pt_{cc}(G) \geq k+1$. Se G é um cacto, definimos L_G como sendo o conjunto de vértices que pertencem a apenas um ciclo e esse ciclo é extremidade de algum caminho máximo de T_G e, portanto, folha. Para demonstrar o que queremos, vamos provar por indução em k que, para qualquer cacto G tal que $lp(T_G) = k$ e $v \in L_G$, existe um conjunto de envoltória S de G tal que $v \in I_{cc}^{k+1}(S) \setminus I_{cc}^k(S)$.

Sejam G um cacto tal que $lp(T_G) = 0$ e $v \in L_G$. Como $lp(T_G) = 0$, G possui exatamente um ciclo e v está neste ciclo e, portanto, o conjunto $S = V(G) \setminus \{v\}$ é um conjunto de envoltória tal que $v \in I_{cc}(S) \setminus S$.

Agora, para $k \geq 1$, suponha que para qualquer cacto G tal que $lp(T_G) = k-1$ e $v \in L_G$, existe um conjunto de envoltória S de G tal que existe $v \in I_{cc}^k(S) \setminus I_{cc}^{k-1}(S)$. Seja G um cacto tal que $lp(T_G) = k$ e $v \in L_G$. Sejam C_k o ciclo ao qual v pertence, C_0, C_1, \dots, C_k um caminho máximo de T_G , e v' o único vértice comum aos ciclos C_k e C_{k-1} . Finalmente, seja $G' = G - (L_G \setminus V(C_0))$. Note que nem o ciclo C_k e nem o vértice v estão em G' , porém v' está.

Figura 18 – Exemplo com a sequência de ciclos C_0, C_1, \dots, C_k , para $k = 2$, os vértices v e v' , e os conjuntos S', L_G e Q representados pelos vértices coloridos com a cor preta, contornados de vermelho e coloridos com a cinza respectivamente



Fonte: elaborado pelo autor.

Pelas definições de L_G e C_0 , temos que $\text{lp}(T_{G'}) = k - 1$ e, portanto, o caminho C_0, C_1, \dots, C_{k-1} é máximo em $T_{G'}$. Logo, invocando a hipótese indutiva, temos que existe um conjunto de envoltória S' de G' tal que $v' \in \text{I}_{\text{cc}}^k(S') \setminus \text{I}_{\text{cc}}^{k-1}(S')$. Faça $S = S' \cup (L_G \setminus (V(C_0) \cup Q))$, onde Q é um conjunto de vértices formado quando escolhemos um vértice de cada ciclo de G que não está em G' e que não seja articulação em G , nos certificando de escolher o vértice v , o qual pertence a C_k , para fazer parte de Q . A Figura 18 ilustra um exemplo com a sequência de ciclos C_0, C_1, \dots, C_k , para $k = 2$, os vértices v e v' , e os conjuntos S', L_G e Q representados pelos vértices coloridos com a cor preta, contornados com a cor vermelha e coloridos com a cor cinza respectivamente.

Como $V(C_0) \subseteq V(G')$, para mostrar que S é conjunto de envoltória de G , basta mostrarmos que os vértices em Q estão em $H(S)$, o que de fato acontece, pois, para cada $w \in Q$, considerando C_w como o ciclo que contém w em G , temos que (i) existe um vértice em C_w que está em $H(S')$ e, conseqüentemente, está em $H(S)$, que é o único vértice que também é vértice de G' ; e (ii) todos os outros vértices de C_w , com exceção de w , estão no próprio conjunto S . Logo, S é um conjunto de envoltória de G .

Seja R o conjunto de vértices de Q que compartilham um ciclo com v' . Note que $v \in R$. Temos que todos os ciclos aos quais v' pertence, exceto C_{k-1} , são folhas em T_G tais que exatamente um de seus vértices além do próprio v' não está em S , que são exatamente os vértices em R . Isso, juntamente com o fato de que $v' \in \text{I}_{\text{cc}}^k(S') \setminus \text{I}_{\text{cc}}^{k-1}(S')$, implica que $v' \in \text{I}_{\text{cc}}^k(S) \setminus \text{I}_{\text{cc}}^{k-1}(S)$. Conseqüentemente, todos os vértices em R , incluindo o vértice v , estão no conjunto $\text{I}_{\text{cc}}^{k+1}(S) \setminus \text{I}_{\text{cc}}^k(S)$. \square

Corolário 5.2.1. *O parâmetro $pt(G)$ pode ser computado em tempo linear quando G é um cacto.*

Demonstração. O corolário segue diretamente do Lemas 5.2.1, Lema 5.2.2 e do fato de que $pt(G) = 0$ se, e somente se, G não tem ciclos, o que pode ser verificado em tempo linear. \square

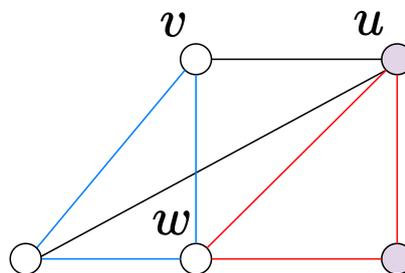
5.2.2 Polinomial quando $k=2$

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $v, w \in V$ vértices vizinhos em G . Definimos $R_G(v, w)$ como o conjunto de todos os subgrafos de G induzidos por um conjunto $A \cup B$, onde $G[A]$ é um ciclo sem cordas que contém a aresta vw e $G[B]$ é um ciclo sem cordas que contém w e não contém v tal que v tem no máximo um vizinho no conjunto $B \setminus \{w\}$.

Lema 5.2.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Existem vértices v e w vizinhos em G tais que $R_G(v, w) \neq \emptyset$ se, e somente se, existe um conjunto $S \subseteq V$ tal que $I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S) \neq \emptyset$. Adicionalmente, dados $G = (V, E)$ e dois vértices vizinhos $v, w \in V$ tais que $R_G(v, w) \neq \emptyset$, um conjunto S pode ser computado em tempo linear.*

Demonstração. Sejam $v, w \in V(G)$ vizinhos, além disso, seja $G[R] \in R_G(v, w)$ um subgrafo induzido de G . Consideramos um subconjunto de vértices $R = V(C) \cup V(C')$, definimos C como um ciclo induzido de G que contém a aresta vw e C' é um ciclo que contém w e não contém v tal que, v tem no máximo um vizinho no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$.

Figura 19 – Exemplo do caso onde v possui exatamente um vizinho no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C está denotado pelas arestas em azul, o ciclo C' pelas arestas em vermelho e S pelos vértices com a cor cinza

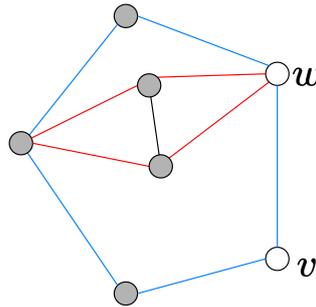


Fonte: elaborado pelo autor.

Se v tem exatamente um vizinho $u \in V(C') \setminus \{w\}$, seja $S = V(C') \setminus \{w\}$, então $v \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$. Isso acontece porque (i) v tem apenas um vizinho em S e, portanto, $v \notin I(S)$; (ii) $v \in I_{cc}^2(S)$, pois $w \in I_{cc}(S)$, há um caminho de u para w através de C' e ambos os vértices são adjacentes a v . Um exemplo desse caso é ilustrado na Figura 19.

Se v não tem vizinhos no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$, seja $S = R \setminus \{v, w\}$. Já que, $V(C') \setminus \{w\} \subseteq S$, então $w \in I_{cc}(S)$, o que implica que $v \in I_{cc}^2(S)$. Por outro lado, como v tem apenas um vizinho em S , este sendo seu vizinho em C e diferente de w , concluímos que $v \notin I_{cc}(S)$. Um exemplo desse caso é ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Exemplo do caso onde v não possui vizinhos no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C está denotado pelas arestas em azul, o ciclo C' pelas arestas em vermelho e S pelo vértices coloridos de preto



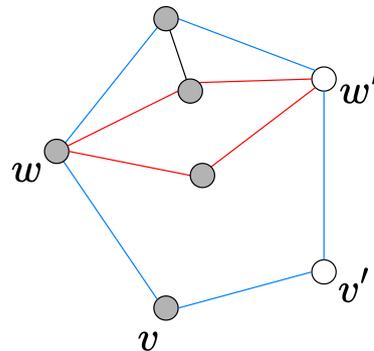
Fonte: elaborado pelo autor.

Suponha que exista um vértice $v' \in V(G)$ e um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $v' \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$. Portanto, há um ciclo contendo v' . Seja C um ciclo mínimo de G que contém v' tal que, para todo $q \in V(C) \setminus \{v'\}$, temos que $q \in I_{cc}(S)$ e, além disso, existe $w' \in V(C) \setminus \{v'\}$ tal que $w' \in I_{cc}(S) \setminus S$. Seja D um ciclo que contém w' tal que, para todo $q \in V(D) \setminus \{w'\}$, ocorre $q \in S$. Como $v' \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$, v' tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$. Observe que os ciclos C e D existem, pois $v' \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$ e $w' \in I_{cc}(S) \setminus S$. Além disso, como C é o ciclo mínimo de G que contém v' tal que, para todo $q \in V(C) \setminus \{v'\}$, temos $q \in I_{cc}(S)$.

Podemos ver o ciclo induzido C como dois caminhos disjuntos em vértices ambos com extremidades em v' e w' , um deles vamos chamar de P . Defina v como o primeiro vértice que não está em D e tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$ que encontramos quando passamos por P começando por w' , onde w é vizinho mais próximo de w' em P . Como v' não está em D e tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$, note que o par de vértices v e w está bem definido.

Suponha que $w \in V(D)$. Se, $w' = w$, v tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w\}$, assim como v tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$. Se $w' \neq w$, v tem exatamente um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$, que é w . Portanto, v tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w\}$. Assim, de qualquer forma, v tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w\}$ e $v \notin V(D)$, o que implica que $G[V(C) \cup V(D)] \in R(v, w)$. A Figura 21 ilustra este caso.

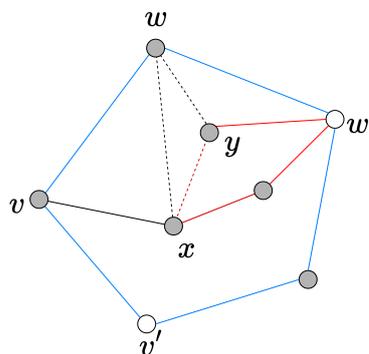
Figura 21 – Um exemplo do caso em que v não tem vizinhos em $V(C') \setminus \{w\}$. O ciclo C é denotado pelas arestas azuis, o ciclo C' pelas vermelhas e S pelos vértices cinzas



Fonte: elaborado pelo autor.

Se $w \notin V(D)$. Então, por definição, w tem dois ou mais vizinhos em $V(D) \setminus \{w'\}$ porque, caso contrário, w seria v . Sejam x e y vizinhos de w em $V(D) \setminus \{w'\}$. Como D é um ciclo (não necessariamente sem corda), existe um caminho P com extremidades em x e y que evita w' . Seja C' o ciclo formado por P e o vértice w . Perceba que $V(P) \subseteq V(D)$, o que implica que $V(C') \setminus \{w\} \subseteq V(D)$. Então, como v tem no máximo um vizinho em $V(D) \setminus \{w'\}$ e $w' \notin V(C')$, então v também tem no máximo um vizinho em $V(C') \setminus \{w\}$. Concluimos então que v tem no máximo um vizinho em $V(C') \setminus \{w\}$ e $v \notin V(D)$, o que implica que $G[V(C) \cup V(C')] \in R(v, w)$. A Figura 22 exemplifica este caso.

Figura 22 – Um exemplo para o caso em que $w \notin V(D)$. O conjunto S contém os vértices coloridos em cinza. O ciclo C é denotado pelas arestas azuis, o ciclo D pelas arestas vermelhas e o ciclo C' pelas arestas tracejadas



Fonte: elaborado pelo autor

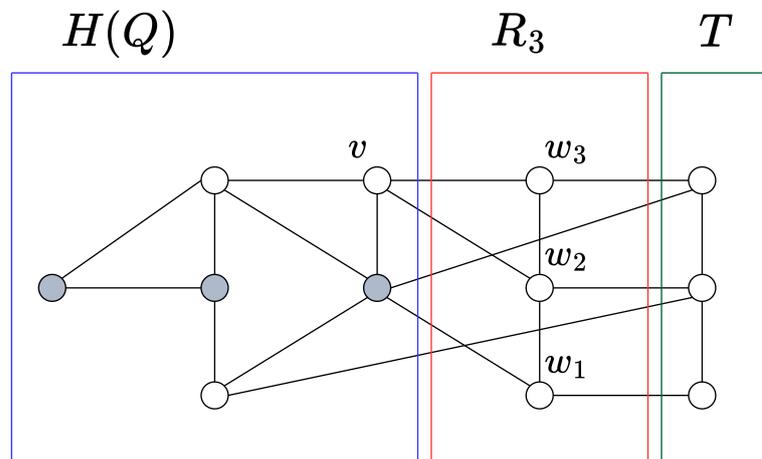
Dados os vizinhos $v, w \in V$, para determinar se $R(v, w) \neq \emptyset$ ou não e, se de fato $R(v, w) \neq \emptyset$, para construir um subgrafo no conjunto $R(v, w)$, precisamos apenas construir, se

existir, um ciclo induzido C que contenha a aresta vw e então construir, se existir, um ciclo C' que contenha w e não contenha v tal que v tenha no máximo um vizinho no conjunto $V(C') \setminus \{w\}$. Se houver tais C e C' , $G[V(C) \cup V(C')] \in R(v, w)$, caso contrário, $R(v, w) = \emptyset$. A verificação da existência de C e C' pode ser feita de forma independente e em tempo linear. \square

Lema 5.2.4. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo, $v \in V$ e $Q \subseteq V$. Se $v \in I_{cc}^2(Q) \setminus I_{cc}(Q)$, então existe um conjunto de envoltória $S \supseteq Q$ de G tal que $v \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$. Além disso, este conjunto de envoltória pode ser calculado em tempo cúbico.*

Demonstração. Suponha que $v \in I_{cc}^2(Q) \setminus I_{cc}(Q)$. Sejam $R_0 = \{v\}$ e $V' = \{v\} \cup Q \cup (V \setminus H(Q))$, ou seja, V' é o conjunto de vértices formado pelo vértice v juntamente com todos os vértices que não estão em $H(Q) \setminus Q$. Defina, para $i > 0$, w_i como sendo um vértice em $V \setminus H(Q)$ que pertence a algum ciclo C de $G[V' \setminus R_{i-1}]$ que também contém v . Se tal ciclo C existir, seja $R_i = R_{i-1} \cup \{w_i\}$. Se, para um determinado valor de $i = k + 1$, tal ciclo C não existir, a sequência de conjuntos R_i acaba no índice k e definimos $S = V' \setminus (\{v\} \cup R_k)$. A Figura 23 ilustra um exemplo com o vértice v e os conjuntos Q , $H(Q)$, R_k e S .

Figura 23 – Exemplo de grafo com o vértice v e os conjuntos Q , com seus vértices com a cor cinza, $H(Q)$, R_3 e $S = Q \cup T$



Fonte: elaborado pelo autor.

Perceba que $Q \subseteq S$, o que implica que $H(Q) \subseteq H(S)$. Isso também implica que $v \in I_{cc}(S)$ ou $v \in I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S)$, já que $v \notin S$ e $v \in I_{cc}^2(Q) \setminus I_{cc}(Q)$. Portanto, precisamos mostrar que S é um conjunto de envoltória e $v \notin I_{cc}(S)$.

Vamos mostrar que S é um conjunto de envoltória. Para isso, basta mostrar que $V \setminus H(Q) \subseteq H(S)$, visto que $Q \subseteq S$ implica que $H(Q) \subseteq H(S)$. Seja k o último índice da sequência dos conjuntos R_i tal que $R_k = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Cada vértice em $V \setminus H(Q)$ ou está em R_k ou em S ,

assim, na verdade, basta mostrarmos que $R_k \subseteq H(S)$. Lembrando que $V' = \{v\} \cup Q \cup (V \setminus H(Q))$, este conjunto é formado por todo vértice que não está em $H(Q)$, com exceção de v e os vértices do subconjunto Q . Defina $T = V \setminus (H(Q) \cup R_k)$ e assim $V' \setminus R_k = \{v\} \cup Q \cup T$. Como $T \cup Q \subseteq S$ e $v \in H(S)$, então $V' \setminus R_k \subseteq H(S)$.

Vamos provar por indução em $i = k, k-1, \dots, 0$, que $V' \setminus R_i \subseteq H(S)$, o que implica que $R_k \subseteq H(S)$, já que $R_k \subseteq V' \setminus R_0$. Note que provamos que $V' \setminus R_k \subseteq H(S)$. Assim sendo, seja $0 \leq i \leq k-1$ e assumamos que $V' \setminus R_{i+1} \subseteq H(S)$. Como w_{i+1} está em um ciclo no subgrafo $G[V' \setminus R_i]$ e $V' \setminus R_{i+1} \subseteq H(S)$, ocorre que $w_{i+1} \in H(S)$, o que implica que $V' \setminus R_i \subseteq H(S)$. Portanto, S é um conjunto de envoltória.

Perceba também que v não pertence a nenhum ciclo composto somente de elementos de S , assim como v não pertence a nenhum ciclo composto somente dos vértices do subgrafo $G[V' \setminus R_k]$, já que R_k é o último de sua sequência. Portanto, concluímos que $v \notin I_{cc}(S)$, como queríamos.

Dados G , v e Q , podemos calcular $H(Q)$ em tempo cúbico, calculando, para cada $k > 0$ e $q \notin I_{cc}^{k-1}(Q)$, se $q \in I_{cc}^k(Q)$ em tempo linear com *busca em profundidade*. Finalmente, podemos calcular R_k , e conseqüentemente S , com um tempo quadrático adicional fazendo inicialmente $R = \emptyset$ e sucessivamente calculando se há um ciclo no subgrafo $G[V' \setminus R]$ que tem um vértice $v \in V \setminus H(Q)$ com busca em profundidade. Se houver tal ciclo, adicionamos v a R . Caso contrário, o algoritmo para e retorna $S = Q \cup (V \setminus (H(Q) \cup R))$. Cada iteração pode ser feita em tempo linear devido à busca em profundidade, temos $O(|V(G)|)$ tais iterações. Este procedimento calcula S de v , Q e G em tempo cúbico. \square

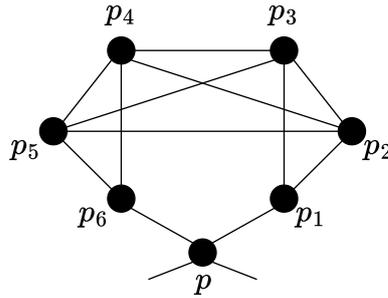
Teorema 5.2.1. *Dado um grafo G com n vértices, decidir se $pt_{cc}(G) \geq 2$ pode ser feito em $\mathcal{O}(n^3)$.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ o grafo de entrada. O algoritmo que calcula um conjunto de envoltória S de um grafo G tal que $I_{cc}(S) \neq V(G)$, se tal conjunto existir, consiste inicialmente em verificar se existe um par de vértices v e w , tal que $R_G(v, w) \neq \emptyset$ em tempo cúbico. Se não houver tal par de vértices, o algoritmo para de indicar que não há conjunto de envoltória S de G tal que $I_{cc}(S) \neq V(G)$. Caso contrário, o algoritmo calcula em tempo linear um conjunto S tal que $I_{cc}^2(S) \setminus I_{cc}(S) \neq \emptyset$, e, finalmente, em tempo cúbico, estende este conjunto S em um conjunto de envoltória $S' \supseteq S$ tal que $I_{cc}(S') \neq V(G)$. \square

5.2.3 NP-Dificuldade para todo k maior ou igual a 9 fixo

Nesta subseção, provaremos que o problema TEMPO DE PERCOLAÇÃO é NP-completo mesmo quando $k \geq 9$ é constante. Antes, vamos provar um fato sobre o dispositivo da Figura 24.

Figura 24 – Dispositivo de perpetuação



Fonte: elaborado pelo autor.

Lema 5.2.5. *Seja G um grafo contendo um subgrafo induzido H isomorfo ao grafo da Figura 24 tal que todos os vértices de H , exceto possivelmente por p , não possuem vizinhos em $V(G) \setminus H$. Para qualquer conjunto de envoltória S de G , ocorre $V(H) \subseteq I_{cc}^4(S)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que S é um conjunto de envoltória minimal de G , isto é, qualquer subconjunto próprio de S não é um conjunto de envoltória de G e seja $S' = S \cap (V(H) \setminus \{p\})$. Sejam ainda $A = \{p_1, p_2, p_3\}$, $B = \{p_4, p_5, p_6\}$ e $C = \{p_2, p_3, p_4, p_5\}$, onde os vértices p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 estão indicados na Figura 24.

Temos que $|S'| > 1$, pois, se $|S'| \leq 1$, como não existe nenhum K_3 em H que contém p , jamais poderíamos ter que $V(H) \subseteq H(S)$. Temos ainda que, para quaisquer $u \neq v$ em $V(H)$, se $u, v \in A$, ou $u, v \in B$, então $H(\{u, v\}) = V(H)$.

Especificamente, se escolhemos $\{p_1, p_2\} \subset A$. Veja que $I_{cc}(\{p_1, p_2\}) = \{p_1, p_2, p_3\}$, pois p_3 é o único vértice que forma um ciclo com os vértices selecionados. Em sequência, $I_{cc}^2(\{p_1, p_2\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Na etapa seguinte ainda precisamos infectar os vértices p_6 e p , contudo, $I_{cc}^3(\{p_1, p_2\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, já que o vértice p não forma um ciclo induzido com os vértices p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 . Concluindo que $I_{cc}^4(\{p_1, p_2\}) = V(H)$. Por simetria, se considerarmos os vértices $\{p_5, p_6\} \subset B$, é análogo.

Se escolhemos $\{p_2, p_3\} \subset A$, temos $I_{cc}(\{p_2, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3\}$, em consequência do K_3 induzido por $\{p_1, p_2, p_3\}$. Em sequência, $I_{cc}^2(\{p_2, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Seguindo,

temos $I_{cc}^3(\{p_2, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ e finalizamos com $I_{cc}^4(\{p_2, p_3\}) = V(H)$. Por simetria, se considerarmos os vértices $\{p_4, p_5\} \subset B$, faremos uma análise similar.

Se escolhermos $\{p_1, p_3\} \subset A$, temos $I_{cc}(\{p_1, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3\}$, pois existe um K_3 induzido pelos vértices $\{p_1, p_2, p_3\}$. Seguindo, $I_{cc}^2(\{p_1, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Ainda nos falta infectar os vértices p_6 e p , mas na etapa seguinte, aplicando a função de intervalo $I_{cc}^3(\{p_1, p_3\}) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, já que p_6 forma um K_3 induzido com os vértices p_4 e p_5 . Finalizamos com $I_{cc}^4(\{p_2, p_3\}) = V(H)$. Por simetria, se considerarmos os vértices $\{p_4, p_6\} \subset B$, é análogo.

Se $|S'| \geq 3$, S não seria minimal, visto que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, ou $|S \cap A| \geq 2$ ou $|S \cap B| \geq 2$ e, portanto, o conjunto $S \setminus B$ se $|S \cap A| \geq 2$, ou $S \setminus A$ se $|S \cap B| \geq 2$, também seria conjunto de envoltória de G .

Portanto, podemos inferir que $|S'| = 2$. Seja então $S' = \{u, v\}$. Com isso, temos que ou $u, v \in A$, ou $u, v \in B$, ou ainda $u, v \in C$, pois apenas assim temos que $V(H) \subset H(S)$. Desta forma, independentemente de quem são os vértices u e v , temos que aplicar a função de intervalo iteradamente e obtemos $V(H) \subseteq I_{cc}^4(S')$. \square

Dado que o vértice p e dois de seus vizinhos u e v formam um K_3 em G , o propósito de um gadget de perpetuação é simplesmente garantir que, para qualquer $k \geq 4$, se $v \in I_{cc}^k(S) \setminus I_{cc}^{k-1}(S)$, então $u \in I_{cc}^{k+1}(S)$.

Como definido na Seção 2.2, vamos fazer a redução seguinte a partir do problema 3-SAT, o qual sabemos ser NP-completo por (Karp, 1972).

Teorema 5.2.2. *O problema TEMPO DE PERCOLAÇÃO é NP-completo para todo $k \geq 9$ fixo.*

Demonstração. O problema está em NP, pois um conjunto de envoltória S de um grafo G tal que $I_{cc}^8(S) \neq V(G)$ é um certificado válido para a instância (G, k) do problema, o qual pode ser verificado em tempo polinomial.

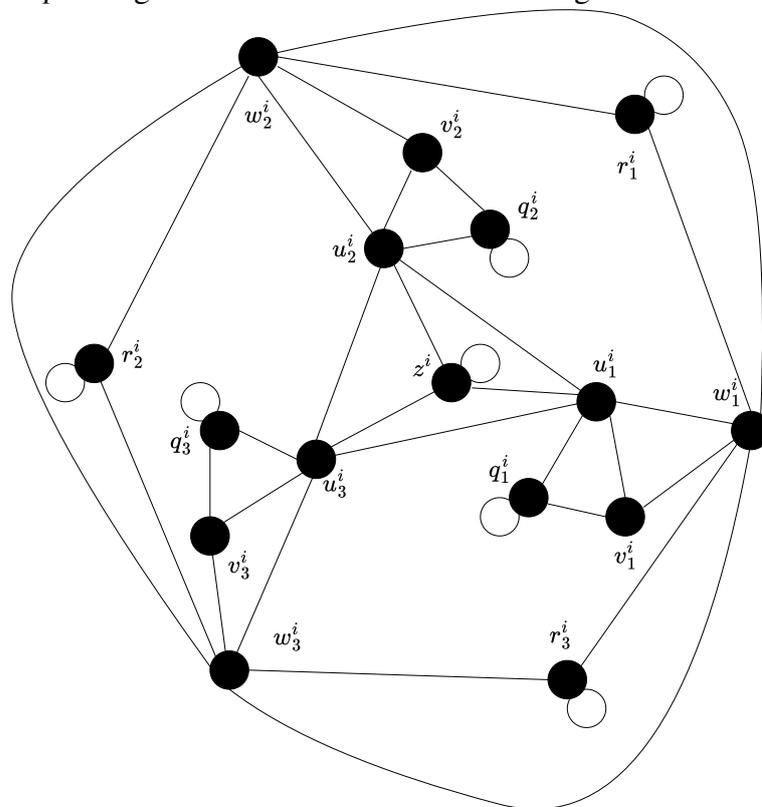
Vamos mostrar uma redução polinomial a partir do problema 3-SAT para decidir se $pt_{cc}(G) \geq 9$. No final mostramos como generalizar esta redução para qualquer $k > 9$ fixo. Esta redução utiliza ideias encontradas em (Benevides *et al.*, 2013), onde os autores mostram que o problema do tempo de percolação é NP-completo para qualquer $k \geq 4$ fixo na convexidade P_3 .

Seja φ uma instância de 3-SAT, podemos assumir sem perda de generalidade que cada variável ocorre ao menos uma vez positivamente e uma negativamente. Vamos denotar o conjunto de cláusulas de φ por $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, onde $C_i = \{\ell_1^i, \ell_2^i, \ell_3^i\}$ é o conjunto de

literais da i -ésima cláusula de φ e o conjunto de variáveis de φ por $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Considere a construção a seguir para obter uma instância (G, k) do problema TEMPO DE PERCOLAÇÃO, definido na Página 72, a partir de φ .

- Para cada cláusula C_i , construímos o dispositivo da Figura 25, onde os laços nos vértices $q_1^i, q_2^i, q_3^i, r_1^i, r_2^i, r_3^i$ e z^i representam o dispositivo de perpetuação da Figura 24, com cada um desses vértices na posição do vértice p da Figura 24. Seja V_i o conjunto de vértices no dispositivo da cláusula C_i ;
- Para cada par de literais ℓ_a^i e ℓ_b^j opostos de uma mesma variável, adicione os vértices $y_{i,a,j,b}$ e $y'_{i,a,j,b}$. Forme um K_3 com os vértices w_a^i, w_b^j e $y_{i,a,j,b}$ e adicione um dispositivo da Figura 24 com $y'_{i,a,j,b}$ na posição do vértice p da Figura 24. Seja Y o conjunto dos vértices $y_{i,a,j,b}$ e Y' o conjunto dos vértices $y'_{i,a,j,b}$ adicionados nesse passo;
- Adicione um vértice x e, para cada par de vértices $y_{i,a,j,b}$ e $y'_{i,a,j,b}$, forme um K_3 com os vértices $y_{i,a,j,b}, y'_{i,a,j,b}$ e x .

Figura 25 – Dispositivo da cláusula C_i . Cada laço representa o dispositivo da Figura 24 com o vértice p da Figura 24 sendo o vértice visível no grafo



Fonte: elaborado pelo autor.

A construção possui um número polinomial de vértices e arestas em relação ao tamanho de φ e, pela definição acima, a construção tem complexidade polinomial. Vamos

provar que φ é satisfatível se, e somente se, existe um conjunto de envoltória S de G tal que $I_{cc}^8(S) \neq V(G)$.

Suponha que φ é satisfatível. Dada uma atribuição que satisfaz φ , seja S o conjunto de vértices de G contendo todos os vértices p_1 e p_2 de cada dispositivo de perpetuação e composto pelos vértices u_a^i para cada literal l_a^i avaliado como verdadeiro na cláusula C_i , porém exatamente um para cada i , com $1 \leq i \leq m$. Pela definição de S , para cada $1 \leq i \leq m$, temos que cada vértice $\{q_1^i, q_2^i, q_3^i, r_1^i, r_2^i, r_3^i, z^i\} \subseteq I_{cc}^4(S) \setminus I_{cc}^3(S)$ e $Y' \subseteq I_{cc}^4(S)$. Assim, temos que os vértices $\{u_1^i, u_2^i, u_3^i\} \subseteq I_{cc}^5(S)$, $\{v_1^i, v_2^i, v_3^i\} \subseteq I_{cc}^6(S)$ e, conseqüentemente $\{w_1^i, w_2^i, w_3^i\} \subseteq I_{cc}^7(S)$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Perceba que para todo $1 \leq a \leq 3$, ocorre $w_a^i \in I_{cc}^7(S) \setminus I_{cc}^6(S)$ se $u_a^i \notin S$ ou $w_a^i \in I_{cc}^6(S) \setminus I_{cc}^5(S)$ se $u_a^i \in S$. Como para quaisquer dois literais opostos l_a^i e l_b^j , temos exatamente um deles como verdadeiro, então no máximo um dos vértices u_a^i e u_b^j está em S . Isto implica que para quaisquer dois literais opostos l_a^i e l_b^j , no máximo um dos vértices w_a^i e w_b^j pertence a $I_{cc}^6(S) \setminus I_{cc}^5(S)$ e o outro pertence a $I_{cc}^7(S) \setminus I_{cc}^6(S)$. Isto implica que todo vértice $y_{i,a,j,b} \in I_{cc}^8(S) \setminus I_{cc}^7(S)$. Portanto, $Y \subseteq I_{cc}^8(S) \setminus I_{cc}^7(S)$ e, conseqüentemente, como $Y' \subseteq I_{cc}^4(S) \setminus I_{cc}^3(S)$ e $x \in I_{cc}^9(S) \setminus I_{cc}^8(S)$. Concluindo que $pt_{cc}(G) \geq 9$.

Reciprocamente, seja S um conjunto de envoltória de G tal que $I_{cc}^8(S) \neq V(G)$. Vamos provar que φ é satisfatível. Pelo Lema 5.2.5, $\{q_1^i, q_2^i, q_3^i, r_1^i, r_2^i, r_3^i, z^i\} \subseteq I_{cc}^4(S)$ para todo i e $Y' \subseteq I_{cc}^4(S)$. Seja $U_i = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i, v_1^i, v_2^i, v_3^i\}$, para cada i , com $1 \leq i \leq m$. Observe que o conjunto $V(G) \setminus U_i$ é um conjunto convexo, assim U_i é co-convexo, isto é, em consequência da construção do grafo, para qualquer $s \in U_i$, não existe nenhum caminho em $G - U_i$ cujas extremidades são ambas adjacentes a um mesmo vértice em U_i . Isso implica portanto que pelo menos um dos vértices em U_i está em S , para cada $1 \leq i \leq m$.

Perceba que se $S \subseteq S'$ e $v \in I_{cc}^k(S) \setminus I_{cc}^{k-1}(S)$, então $v \in I_{cc}^k(S')$. Da estrutura do dispositivo na Figura 25, podemos ver que, para qualquer $d \in U_i$, $V_i \subseteq I_{cc}^7(\{d\} \cup P)$, onde P é o conjunto de vértices de S , escolhidos em cada dispositivo de perpetuação. Isso implica que $V_i \subseteq I_{cc}^7(S)$, já que $S \cap U_i \neq \emptyset$. Portanto, $Y \subseteq I_{cc}^8(S)$ e, conseqüentemente, $V(G) \setminus \{x\} \subseteq I_{cc}^8(S)$. Entretanto, já que assumimos inicialmente que $I_{cc}^8(S) \neq V(G)$, concluímos que $x \in I_{cc}^9(S) \setminus I_{cc}^8(S)$.

Como $x \in I_{cc}^9(S) \setminus I_{cc}^8(S)$, deduzimos que $Y \subseteq I_{cc}^8(S) \setminus I_{cc}^7(S)$, já que a existência de qualquer vértice $y_{i,a,j,b} \in I_{cc}^7(S)$, implicaria que $x \in I_{cc}^8(S)$. Portanto, para cada $y_{i,a,j,b} \in Y$, pelo menos um de seus vizinhos, w_a^i e w_b^j , está em $I_{cc}^7(S) \setminus I_{cc}^6(S)$, ou seja, não podemos ter

$w_a^i, w_b^j \in I_{cc}^6(S)$.

Definimos a seguinte atribuição para as variáveis em \mathcal{X} : para cada $w_a^i \in I_{cc}^6(S)$, definimos a variável X_k como verdadeiro se, e somente se, ℓ_a^i for o literal positivo de X_k . Em outras palavras, para cada $w_a^i \in I_{cc}^6(S)$, definimos X_k como um valor para que ℓ_a^i seja avaliado como verdadeiro. Após fazer essas atribuições, se ainda houver variáveis restantes sem um valor atribuído, definimos todas elas como verdadeiro.

Afirmamos que nossa atribuição é bem definida, pois atribuímos um valor a todas as variáveis e, se for atribuído a uma dada variável tanto verdadeiro quanto falso, então haveria dois vértices $w_a^i, w_b^j \in I_{cc}^6(S)$ tais que ℓ_a^i e ℓ_b^j são literais opostos, o que implicaria que $y_{i,a,j,b} \in I_{cc}^7(S)$, uma contradição já que $Y \subseteq I_{cc}^8(S) \setminus I_{cc}^7(S)$.

Por fim, para conseguirmos uma redução para qualquer $k > 9$ fixo, basta repetir $k - 9$ vezes a seguinte operação: adicionar mais um dispositivo da Figura 24 e mais um vértice t , e fazer um K_3 com os vértices x , t e o vértice p do novo dispositivo adicionado da Figura 24, fazendo t ser o novo vértice x . □

6 CONCLUSÃO

Esta tese iniciou seus estudos apenas com perguntas relativas à convexidades geodésica \vec{g} , caminhos de comprimento dois \vec{P}_3 e caminhos mínimos de comprimento dois \vec{P}_3^* nos parâmetros número de intervalo e número de envoltória. Com o desenvolvimento dos resultados e a familiaridade com a convexidade em grafos e variações dos parâmetros iniciais, buscamos desenvolver resultados na convexidade de ciclos, nos parâmetros número de convexidade e o tempo de percolação.

Nosso texto seguiu a ideia de que os capítulos 3, 4 e 5 representam, cada um, um artigo. No Capítulo 3, dentre outros resultados, mostramos que o número de envoltória nas convexidades \vec{g} , \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* é polinomial para torneios fortes não triviais. Dentre outros resultados, demonstramos que o problema de determinar o número de envoltória na convexidade \vec{P}_3^* é $W[2]$ -difícil, parametrizado em k , para grafos orientados acíclicos com grafo subjacente bipartido. O problema de determinar o número de envoltória na convexidade \vec{g} é $W[2]$ -difícil, parametrizado em k , para grafos orientados acíclicos. Em adição, mostramos que o problema de número de intervalo na convexidade \vec{P}_3 é NP-completo mesmo se a entrada é um grafo bipartido cordal. Provamos que existem algoritmos que calculam o número de intervalo e o número de envoltória nas convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* em tempo cúbico para grafos orientados com largura em clique limitada.

No Capítulo 4, dentre outros resultados, mostramos que existe um limitante superior para o número de intervalo na convexidade P_3 em função do conjunto de vértices de grau um do grafo, sendo este limite apertado. Em adição, mostramos que existe um limitante superior para as convexidades \vec{P}_3 e \vec{P}_3^* em função do conjunto de vértices extremos, sendo este limitante também apertado. Como visto na Seção 4.3, seja T um torneio, $T^s(T)$ um torneio obtido a partir de T com a adição de um vértice sumidouro e $\gamma^+(T)$ o tamanho do conjunto dominante mínimo no torneio T . Provamos que, para k um inteiro positivo, $\gamma^+(T) = k$ se, e somente se, $\vec{\text{in}}_{P_3}(T^s(T)) = k + 1$. Demonstramos que se T é um torneio com $n \geq 4$ vértices, então $\vec{\text{in}}_{P_3}(T) \leq \left\lceil 2 \log_{\frac{4}{3}} n \right\rceil$. Além disso, demonstramos que um conjunto de intervalo mínimo na convexidade \vec{P}_3 em um torneio T com n vértices pode ser encontrado em tempo $\mathcal{O}(n^{\log n})$. No resultado principal deste capítulo, mostramos que o número de intervalo na convexidade \vec{P}_3^* é $W[2]$ -difícil, parametrizado em k , para torneios.

No Capítulo 5, demonstramos que o problema do número de convexidade na convexidade de ciclos é NP-completo e $W[1]$ -difícil quando parametrizado pelo valor da solução.

Mais ainda, mostramos que o problema tempo de percolação na convexidade de ciclos é linear quando consideramos cactos. Finalmente, provamos que o problema do tempo de percolação é NP-completo mesmo quando $k \geq 9$ é constante, porém é polinomial para $k \geq 2$.

Há várias perguntas em aberto quando consideramos grafos orientados. Lembrando que a convexidade \vec{P}_3^* foi definida primeiramente em (Araujo *et al.*, 2023), um caminho natural é buscar determinar se os parâmetros em caminhos mínimos orientados de comprimento dois são equivalentes a outros já conhecidos, além de estudar outros parâmetros para esta convexidade.

Com relação à convexidade geodésica não sabemos sobre a complexidade do número de intervalo na convexidade \vec{g} em torneios. O que podemos afirmar sobre a complexidade do $\vec{hn}_g(D)$ e $\vec{hn}_{P_3^*}(D)$ quando D é um grafo split orientado ou cobipartido orientado?

Com relação à convexidade de ciclos, convexidade recentemente definida (Araujo *et al.*, 2018). Primeiramente, seria possível traduzir os resultados de complexidade existentes em outras convexidades para a convexidade de ciclos para grafos não orientados? Uma pergunta direta: podemos apertar o intervalo entre dois e nove no problema de tempo de percolação? Ainda deve-se pensar sobre o caso da convexidade de ciclos orientado, que não foi estudada na literatura. Abaixo adicionamos na Tabela 3 algumas perguntas.

Tabela 3 – Perguntas

Classe	Convexidade	Pergunta
Grafos Orientados	\vec{P}_3^*	Podemos traduzir os resultados de P_3^* para \vec{P}_3^* ?
Torneios	\vec{g} e \vec{P}_3^*	Qual a complexidade nos parâmetros \vec{in}_g e $\vec{in}_{P_3^*}$?
Split orientado	\vec{g} e \vec{P}_3^*	Qual a complexidade nos parâmetros \vec{hn}_g e $\vec{hn}_{P_3^*}$?
Cobipartido orientado	\vec{g} e \vec{P}_3^*	Qual a complexidade nos parâmetros \vec{hn}_g e $\vec{hn}_{P_3^*}$?
Grafos não orientados	cc	Podemos apertar o intervalo entre 2 e 9 em pt_{cc} ?

Fonte: elaborado pelo autor.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, J.; ARRAES, P. Hull and geodetic numbers for some classes of oriented graphs. **Discrete Applied Mathematics**, [S.l.], v. 323, p. 14–27, 2021.
- ARAUJO, J.; CAMPOS, V.; GIROIRE, F.; NISSE, N.; SAMPAIO, L.; SOARES, R. On the hull number of some graph classes. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v. 475, p. 1–12, 2013.
- ARAUJO, J.; CAMPOS, V.; GIRÃO, D.; NOGUEIRA, J.; SALGUEIRO, A.; SILVA, A. Cycle convexity and the tunnel number of links. **arXiv**, [S.l.], 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.05656>. Acesso em 12 jul. 2024.
- ARAUJO, J.; CAMPOS, V.; GIRÃO, D.; NOGUEIRA, J.; SALGUEIRO, A.; SILVA, A. On the hull number on cycle convexity of graphs. **Information Processing Letters**, [S.l.], v. 183, p. 106420, 2024.
- ARAUJO, J.; DOURADO, M.; PROTTI, F.; SAMPAIO, R. **Uma introdução à convexidade em grafos**. 1st. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2023.
- ARAUJO, J.; DUCOFFE, G.; NISSE, N.; SUCHAN, K. On interval number in cycle convexity. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**, [S.l.], v. 20, n. 1, p. 1–28, 2018.
- ARAUJO, J.; MAIA, A.; MEDEIROS, P.; PENSO, L. On the hull and interval numbers of oriented graphs (brief announcement). **Procedia Computer Science**, [S.l.], v. 223, p. 397–399, 2023.
- ARAUJO, J.; MAIA, A. K.; MEDEIROS, P. P.; PENSO, L. On the hull and interval numbers of oriented graphs. **arXiv**, [S.l.], 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.01598>. Acesso em 12 jul. 2024.
- ARAUJO, R. T.; SAMPAIO, R.; SZWARCFITER, J.; SANTOS, V. F. dos; SZWARCFITER, J. L. The convexity of induced paths of order three and applications: Complexity aspects. **Discrete Applied Mathematics**, [S.l.], v. 237, p. 33–42, 2018.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. Z. **Digraphs**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- BENEVIDES, F.; CAMPOS, V.; DOURADO, M. C.; SAMPAIO, R. M.; SILVA, A. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: algorithmic aspects. **European Journal of Combinatorics**, [S.l.], p. 88–89, 2013.
- BENEVIDES, F.; PRZYKUCKI, M. On slowly percolating sets of minimal size in bootstrap percolation. **Electronic Journal of Combinatorics**, [S.l.], p. 24–87, 2013.
- CALDER, J. R. Some elementary properties of interval convexities. **Journal of London Mathematical Society**, London, v. 2, n. 3, p. 422–428, 1971.
- CARO, Y.; RODITTY, Y. A note on the k-domination number of a graph. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, [S.l.], v. 13, 1990.
- CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, [S.l.], v. 32, p. 11 – 18, 2009.

CHALUPA, J.; LEATHI, P. L.; REICH, G. R. Bootstrap percolation on a Bethe lattice. **Journal of Physics C: Solid State Physics**, [S.l.], v. 12, p. L31, 1979.

CHARTRAND, G.; DANKELMANN, P.; SCHULTZ, M.; SWART, H. Twin domination in digraphs. **Ars Combinatoria**, [S.l.], v. 67, 2003.

CHARTRAND, G.; FINK, J. F.; ZHANG, P. The hull number of an oriented graph. **International journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, [S.l.], n. 36, p. 2265–2275, 2003.

CHARTRAND, G.; WALL, C. E.; ZHANG, P. The convexity number of a graph. **Graphs and Combinatorics**, [S.l.], v. 18, p. 209–217, 2002.

CHARTRAND, G.; ZHANG, P. The geodetic number of an oriented graph. **European Journal of Combinatorics**, [S.l.], v. 21, n. 2, p. 181–189, 2000.

COURCELLE, B.; ENGELFRIET, J. **Graph Structure and Monadic Second-Order Logic: A Language-Theoretic Approach**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications).

CYGAN; FOMIN; KOWALIK; LOKSHTANOV; MARX; PILIPCZUK; SAURABH. **Parameterized Algorithms**. [S. l.]: Springer Cham, 2005.

DOWNEY, R. G.; ABRAHAMSON, K. A.; FELLOWS, M. R. Fixed-parameter tractability and completeness IV: On completeness for W[P] and PSPACE analogues. **Annals of Pure and Applied Logic**, [S.l.], v. 73, n. 3, p. 235–276, 1995.

DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. **SIAM Journal on Computing**, [S.l.], v. 24, n. 4, p. 873–921, 1995.

DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. Fixed-parameter tractability and completeness II: On completeness for W[1]. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v. 141, n. 1, p. 109–131, 1995.

DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. **Parameterized complexity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. **Fundamentals of Parameterized Complexity**. London: Springer London, 2013.

DREYER, P. A.; ROBERTS, F. S. Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. **Discrete Applied Mathematics**, [S.l.], v. 157, n. 7, p. 1615–1627, 2009.

DUCHET, P. Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. **Journal of Combinatorial Theory**, [S.l.], v. 44, n. 3, p. 307–316, 1988.

ERDŐS, P. On a problem in graph theory. **The Mathematical Gazette**, [S.l.], v. 47, n. 361, p. 220–223, 1963.

ERDŐS, P. Some remarks on simple tournaments. **Algebra Universalis**, [S.l.], v. 2, p. 238–245, 1972.

FARBER, M.; JAMISON, R. Convexity in graphs and hypergraphs. **Siam Journal on Algebraic and Discrete Methods**, [S.l.], v. 7, p. 433–444, 1986.

- FELLOWS, M. R.; ROSAMOND, F. A.; ROTICS, U.; SZEIDER, S. Clique-width is np-complete. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, [S.l.], v. 23, n. 2, p. 909–939, 2009.
- GRAHAM, R. L.; SPENCER, J. H. A constructive solution to a tournament problem. **Canadian Mathematical Bulletin**, [S.l.], v. 14, n. 1, p. 45–48, 1971.
- GRUBER, P.; WILLS, J. **Handbook of Convex Geometry**. North Holland: Elsevier, 1993.
- HAGLIN, D. J.; WOLF, M. J. On convex subsets in tournaments. **SIAM J. Discret. Math.**, [S.l.], v. 9, p. 63–70, 1996.
- HARARY, J. N. F. Convexity in graphs. **Journal of Differential Geometry**, [S.l.], v. 16, p. 185–190, 1981.
- IMPAGLIAZZO, R.; PATURI, R.; ZANE, F. Which problems have strongly exponential complexity? **Journal of Computer and System Sciences**, [S.l.], v. 63, n. 4, p. 512–530, 2001.
- KARP, R. M. **Complexity of Computer Computations**. New York: Springer US, 1972.
- LIMA, C. V. G. C.; MARCILON, T.; MEDEIROS, P. P. de. On the complexity of some cycle convexity parameters. **arXiv**, [S.l.], p. 1–19, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.09236>. Acesso em 12 jul. 2024.
- MEGIDDO, N.; VISHKIN, U. On finding a minimum dominating set in a tournament. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v. 61, n. 2, p. 307–316, 1988.
- MILLER, J. C. Percolation and epidemics in random clustered networks. **Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics**, [S.l.], v. 80, p. 020901, 2009.
- MULLER, H.; BRANDSTADT, A. The np-completeness of steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v. 53, n. 2, p. 257 – 265, 1987.
- NICHTERLEIN, A.; NIEDERMEIER, R.; UHLMANN, J.; WELLER, M. On tractable cases of target set selection. **Social Network Analysis and Mining**, [S.l.], v. 3, n. 2, p. 233–256, 2013.
- OSULA, D.; ZUAZUA, R. Twin domination number of tournaments. **ArXiv**, [S.l.], 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1702.00646>. Acesso em 12 jul. 2024.
- PELAYO, I. M. **Geodesic Convexity in Graphs**. 1st. ed. New York: Springer New York, 2013.
- VEL, M. L. J. van de. **Theory of convex structures**. Amsterdam: Elsevier, 1993. v. 50.