



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA PERCORRÍVEIS GERADOS PELA
ENERGIA DE CASIMIR

FORTALEZA

2024

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA PERCORRÍVEIS GERADOS PELA
ENERGIA DE CASIMIR

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física.

Linha de Pesquisa: Física de Partículas, Campos e Gravitação.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O49s Oliveira, Pedro Henrique Ferreira de.
Soluções de buracos de minhoca percorráveis gerados pela energia de Casimir / Pedro Henrique Ferreira de Oliveira. – 2024.
89 f. : il.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
Coorientação: Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim.
1. Buracos de minhoca. 2. Energia de Casimir. 3. Relatividade Geral. 4. Fator de Yukawa. 5. Dimensões arbitrarias. I. Título.

CDD 530

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA PERCORRÍVEIS GERADOS PELA
ENERGIA DE CASIMIR

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física.

Linha de Pesquisa: Física de Partículas, Campos e Gravitação.

Aprovada em 26/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Esta tese é dedicada a todas as pessoas que, por falta de oportunidade ou por traumas pedagógicos, foram privadas dos incontáveis prazeres que a Física e a Matemática podem proporcionar.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos, em primeiro lugar, aos meus pais, Raimundo Ferreira de Oliveira (*in memoriam*) e Joana D'arc de Oliveira, cujo amor incondicional e dedicação à nossa formação moral, ética e acadêmica foram fundamentais em nossas vidas. Em especial, à minha mãe, cuja incansável determinação e sacrifícios garantiram que meu irmão e eu pudéssemos seguir nossos caminhos com confiança e determinação. Poucas mães têm o privilégio de ver seus dois filhos alcançarem o doutorado. É difícil expressar em palavras o quanto sou grato por tudo que você fez por nós.

Ao meu querido irmão caçula, Rodolfo Ferreira de Oliveira, uma constante fonte de inspiração não apenas na esfera acadêmica, mas também em minha vida pessoal. Suas visões e ideias enriqueceram nossas discussões ao longo dos anos, fortalecendo nosso vínculo fraternal. Agradeço sinceramente por cada momento compartilhado e por todo o apoio incondicional que você sempre oferece. Além disso, suas paixões, como os animes que tanto apreciamos, tornam nossa jornada ainda mais memorável. Obrigado, mano, por ser uma presença tão significativa em minha vida.

À minha amada esposa, Vanesca Almeida de Oliveira, minha companheira de vida e amor eterno, dedico uma gratidão que transborda meu coração. Em cada passo da minha jornada acadêmica (desde o início da graduação), você foi minha rocha e inspiração constante. Mesmo nos momentos mais desafiadores, seu apoio inabalável e compreensão profunda me sustentaram. Com cada conquista, é você quem eu celebro primeiro, porque ao seu lado encontro forças que jamais imaginei possuir. Vanesca, você não é apenas minha esposa, é minha musa e meu maior motivo para seguir em frente. Meu amor por você só cresce a cada dia. Eu te amo!

Aos meus queridos sogros, Valdir Pinto de Oliveira e Maria Rosenira Souza Almeida, minha profunda gratidão por todo o apoio e carinho ao longo desta jornada. Suas palavras de encorajamento e compreensão foram essenciais para que eu pudesse me dedicar plenamente aos meus estudos. Agradeço por acolherem-me como parte da família e por toda a força que me deram ao longo dos anos.

Aos meus verdadeiros amigos, Joel Lopes Castro, Ícaro Daniel Dias Carvalho, Antônio Israel Paz Pires e Wellisson Pires Lima, que ao longo dessa trajetória se mostraram não apenas companheiros, mas também fontes constantes de motivação e inspiração. Suas presenças tornaram os dias mais leves e os desafios mais amenos. Agradeço por cada momento compartilhado, por cada palavra de incentivo e por cada risada compartilhada. Vocês são parte essencial desta jornada, e sou profundamente grato por tê-los ao meu lado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho, cuja orientação não apenas moldou meu trabalho de pesquisa, mas também inspirou meu crescimento acadêmico e profissional. Agradeço pela paciência, orientação e apoio ao longo desta jornada, que foi fundamental para meu desenvolvimento.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim, ou simplesmente “Brother”, cuja disponibilidade e sabedoria foram essenciais para este estudo. Suas reuniões no Meet e *insights* sempre atentos foram de imensurável valor para meu progresso.

Ao Prof. Dr. Geová Alencar Maciel Filho, que, mesmo sem vínculo direto de orientação, continuou a me desafiar a avançar e a “correr contra os prazos”. Esta pesquisa não teria se tornado realidade sem seu apoio incansável e suas cobranças incisivas. Agradeço sinceramente por sua orientação e pelo impacto significativo que teve no desenvolvimento deste estudo.

Ao Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto, agradeço não apenas por sua participação na banca e pelos valiosos comentários que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho, mas também por ser um exemplo de professor dedicado e inspirador.

Ao Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim, cujas sugestões desde os tempos do mestrado têm sido uma constante fonte de direção e enriquecimento para minhas pesquisas. Sua participação como membro avaliador da banca é um marco importante neste caminho acadêmico que percorri.

Aos membros do Grupo de Física Teórica, especialmente aos colegas do Laboratório de Gravitação, Modelos de Campos e Cordas (LabGmc²), agradeço por todas as conversas enriquecedoras ao longo dos anos e pelos seminários que foram de imenso valor para o meu desenvolvimento acadêmico.

Gostaria de agradecer a todo o elenco de profissionais que convivi (dentro e fora de sala de aula) nesses anos de Doutorado, em especial aos doutores pelos quais tive a grande oportunidade de ser estudante, Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho (Mecânica Quântica II e Eletrodinâmica Clássica II), Dr. Carlos Lenz César (Econofísica), Dr. Nildo Dias (Estágio II e III), Dr. Geová Alencar (Tópicos de TQC1). É com uma satisfação da ordem do indescritível que posso afirmar que aprendi muito com vocês, obrigado!

Agradeço ainda a todo o corpo de funcionários do Departamento de Física, sem os quais, todo o trabalho de pesquisa e desenvolvimento não seria possível. Em especial agrago à Rejane Ramos Coelho (Secretária) e ao Rubens Carlos Rodrigues (Técnico de Laboratório) por todo o apoio fornecido ao longo dos últimos anos.

Agradeço a todos os trabalhadores brasileiros que, através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), financiaram minha bolsa de pós-graduação ao longo de todo o período.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, expresso minha gratidão a você, leitor, que se dispõe a explorar este trabalho e aprender comigo. Foi pensando em você que me empenhei em redigir com tantos detalhes, plenamente consciente das grandes dificuldades que a jornada do conhecimento impõe. Nesse espírito, compartilho um pensamento do físico teórico Richard Feynman: “Estude muito o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível”. Mesmo nos momentos de incerteza, lembre-se de que alguém pode estar se inspirando em seu exemplo. Entretanto, é prudente considerar as palavras de Kentaro Miura: “Se tu buscas por algo por tanto tempo, é de certo que tu perderás outras coisas no teu caminho... É assim que é a vida”. Encontre equilíbrio em sua busca, sem perder de vista outras coisas importantes ao longo do caminho.

A Física é muito mais do que a mera resolução de equações e interpretação de dados. Até arrisco dizer que existe poesia na Física, que a Física é uma expressão profundamente humana da nossa reverência à beleza da natureza. Física é, também, um processo de autodescoberta, que acontece quando tentamos transcender as limitações da vida diária através da contemplação de questões de natureza mais profundas.

— Autor desconhecido

RESUMO

Buracos de minhoca (do inglês *wormholes*, WH) requerem energia negativa e, portanto, uma fonte de matéria exótica. Como a energia de Casimir é negativa, ela foi especulada como uma boa candidata a fonte desses objetos há muito tempo. No entanto, apenas muito recentemente uma solução completa para $D = 4$ foi encontrada por Garattini[1], indicando que a energia de Casimir pode ser uma fonte de WHs atravessáveis. Logo em seguida, Alencar, Bezerra e Muniz[2] mostraram que isso não é verdade em $D = 3$. Nesta tese, demonstramos que a energia de Casimir pode ser uma fonte de buracos de minhoca do tipo Morris-Thorne para todo espaço-tempo com $D > 3$. Além disso, ao introduzirmos a constante cosmológica, descobrimos que, para $D = 3$, WHs de Casimir são possíveis, mas o espaço-tempo deve ser sempre AdS. Para $D > 3$, mostramos que a constante cosmológica inverte o sinal com o aumento do tamanho da garganta. Por fim, estruturamos uma maneira mais consistente de generalizar os buracos de minhoca de Casimir através de correções do tipo Yukawa, revelando critérios para restrições em seus parâmetros e a possibilidade de uma categoria mais ampla de objetos astrofísicos, como os buracos de minhoca levemente repulsivos.

Palavras-chave: buracos de minhoca; energia de Casimir; relatividade geral; fator de Yukawa; dimensões arbitrárias.

ABSTRACT

Wormholes (WH) require negative energy and thus an exotic matter source. Because Casimir energy is negative, it has long been speculated as a good candidate source for these objects. However, only very recently a complete solution for $D = 4$ was found by Garattini[1], indicating that Casimir energy can be a source of traversable WHs. Shortly thereafter, Alencar, Bezerra e Muniz[2] showed that this is not true in $D = 3$. In this thesis, we demonstrate that Casimir energy can be a source of Morris-Thorne type wormholes for all spacetimes with $D > 3$. Additionally, by introducing the cosmological constant, we find that for $D = 3$, Casimir WHs are possible but the spacetime must always be AdS. For $D > 3$, we show that the cosmological constant reverses sign with increasing throat size. Finally, we outline a more consistent way to generalize Casimir wormholes through Yukawa-type corrections, revealing criteria for constraints on their parameters and the possibility of a broader category of astrophysical objects, such as slightly repulsive wormholes.

Keywords: wormholes; Casimir's energy; general relativity; Yukawa factor; arbitrary dimensions.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do raio de Schwarzschild para alguns corpos celestes.	32
Tabela 2 – As principais condições de energia pontuais resumidas. Aqui t^μ e ξ^μ são vetores tipo tempo co-orientados e k^μ é um vetor nulo. Fonte: Modificada da Ref. [3]	43
Tabela 3 – Alguns valores para o parâmetro de Garattini e o tamanho da garganta dos buracos de minhoca de Casimir para dimensões específicas.	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Karl Schwarzschild. Fonte: Modificado do link.	28
Figura 2 – Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild. Fonte: Adaptado da Ref. [4].	33
Figura 3 – Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Fonte: Adaptado da Ref. [4].	34
Figura 4 – Escalar de Kretschmann para a geometria de Schwarzschild para os corpos celestes da Tabela 1.	34
Figura 5 – Diagrama de mergulho (esquemático) do buraco de minhoca de Morris-Thorne. Fonte: Adaptado de Muller[5].	49
Figura 6 – Condições satisfeitas pela função de <i>shape</i> (4.20a) (para $r_0 = 1$). Em (a), (c) and (d) temos $D = 4$ (linha sólida), 5 (linha longa tracejada), 6 (linha tracejada) and 10 (linha pontilhada).	56
Figura 7 – Comparação dos buracos de minhoca de Casimir para $D = 4$ (linha tracejada) and $D = 5$ (linha sólida).	57
Figura 8 – Relação entre a constante cosmológica, Λ , e o tamanho da garganta do buraco de minhoca de Casimir, r_0 , para $D = 3$ (linha tracejada) e $D > 3$ (linha sólida).	59
Figura 9 – Condições satisfeitas pela função de <i>shape</i> (4.33) (para $r_0 = 1$). Em (a), (c) and (d) temos $ \Lambda = 10^2$ (linha sólida), 10^1 (linha longa tracejada), 10^0 (linha tracejada), 10^{-1} (linha tracejada-pontilhada) e 10^{-2} (linha pontilhada).	61
Figura 10 – Comportamento da condição de <i>flare-out</i> e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação global. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).	66
Figura 11 – Em (a), temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.276$ (linha tracejada), $\mu = 0.5$ (linha pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (b), são utilizadas as mesmas notações da Figura 10	67
Figura 12 – Comportamento da condição de <i>flare-out</i> e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação constante. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).	68

Figura 13	– Em (a) , temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.28646$ (linha tracejada), $\mu = 0.5$ (linha pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (b) , são utilizadas as mesmas notações da Figura 10	69
Figura 14	– Comportamento da condição de <i>flare-out</i> e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação no termo variável. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).	71
Figura 15	– Em todos os gráficos temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.5$ (linha tracejada) e $\mu = 1.0$ (linha pontilhada).	72
Figura 16	– Gráfico de $v_s^2(r)$ versus r . Em todos os gráficos, temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.5$ (linha tracejada e pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (a) , temos $\mu = 2.56$ (linha tracejada) e $\mu = 3.0$ (linha pontilhada). Em (b) , temos $\mu = 1.01$ (linha tracejada) e $\mu = 1.5$ (linha pontilhada). Em (c) , temos $\mu = 1.5$ (linha tracejada) e $\mu = 3.0$ (linha pontilhada).	73
Figura 17	– Comportamento da função de <i>redshift</i> modificada de segunda ordem em relação ao parâmetro μ para o buraco de minhoca Yukawa-Casimir.	75
Figura 18	– Verificação da Condição de Energia Fraca Quântica (QWEC). Em todos os gráficos, temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.5$ (linha tracejada) e $\mu = 1.0$ (linha pontilhada).	78

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidade da luz no vácuo, $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$
G	Constante da gravitação universal, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
\hbar	Constante de Planck reduzida, $\hbar \approx 1,054 \cdot 10^{-34} J s$
A_μ, A^μ	Vetor covariante e contravariante, respectivamente
$\partial_j A_i$	Derivada ordinária
$D_j A_i$	Derivada covariante
$\Gamma_{\mu\nu\rho}$	Símbolo de Christoffel do 1º tipo
$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$	Símbolo de Christoffel do 2º tipo
$R^\lambda_{\mu\nu\alpha}$	Tensor de Riemann (tensor de curvatura)
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
ρ	Densidade de energia
p_r, P_r	Pressão radial
p_t, P_t	Pressão tangencial
ω, Ω	Parâmetros das equações de estado
R	Escalar de Ricci
K	Escalar de Kretschmann
Λ	Constante cosmológica
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo
$d\Omega$	Elemento de ângulo sólido
\mathcal{L}	Densidade lagrangiana
D	Dimensão do espaço-tempo, $D = d + 1$
$SO(3)$	Grupo das rotações
v_s^2	Quadrado da velocidade do som

LISTA DE SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DEC	<i>Dominant Energy Condition</i> (Condição dominante de energia)
EB	Solução de Ellis-Bronnikov
ECE	Equações de Campo de Einstein
EoS	<i>Equation of State</i> (Equação de Estado)
LabGmc ²	Laboratório de Gravitação, Modelos de Campos e Cordas
NEC	<i>Null Energy Condition</i> (Condição nula de energia)
QWEC	<i>Quantum Weak Energy Condition</i> (Condição fraca quântica de energia)
RG	Relatividade Geral
RR	Relatividade Restrita
SEC	<i>Strong Energy Condition</i> (Condição forte de energia)
SET	<i>Stress Energy Tensor</i> (Tensor energia-momento)
SSS	<i>Spherically Symmetric Spacetime</i> (Espaço-tempo esfericamente simétrico)
WEC	<i>Weak Energy Condition</i> (Condição fraca de energia)
WH	<i>Wormhole</i> (Buraco de minhoca)
ZTC	<i>Zero Tidal Condition</i> (Condição de ausência de forças de maré)

LISTA DE NOTAÇÕES/CONVENÇÕES

- Índices latinos em minúsculos (i, j, k) variam sobre as 3 coordenadas espaciais, usualmente 1, 2, 3 ou x, y, z .
- Índices gregos ($\mu, \nu, \lambda, \kappa$) variam sobre os 4 índices de coordenadas gerais (espaço-tempo).
- Índices latinos em maiúsculo (M, N, L) variam sobre todas as coordenadas em um espaço-tempo D -dimensional.
- A métrica em um sistema de coordenadas inercial é a de Bjorken-Drell, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- 3-vetores cartesianos são representados com uma seta em cima, \vec{v} .
- A base de sistemas de coordenadas será tomada dextrogira (isto é, que satisfaz a Regra da Mão Direita), por padrão, salvo se for mencionado explicitamente no texto de que será usada uma base sinistrogira.
- Será adotada a convenção de Einstein da soma, isto é, índices repetidos indicam soma implícita: $A^\mu B_\mu = \sum_\mu A^\mu B_\mu$.
- Propositamente manteremos alguns termos em inglês (italicizados), devido a sua recorrência na literatura.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Sobre as hipóteses e objetivos	18
1.2	Sobre a construção desta tese	18
2	A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	20
2.1	Uma descrição geométrica da gravidade	20
2.1.1	<i>Movimento sob o campo gravitacional</i>	20
2.2	Aspectos da Curvatura	22
2.3	As Equações de Campo de Einstein	24
2.3.1	<i>Derivação via Princípio Variacional</i>	24
2.4	Primeiras soluções obtidas	27
2.4.1	<i>Soluções Estáticas e Esfericamente Simétricas</i>	27
2.4.2	<i>Solução de Schwarzschild</i>	30
2.5	Testes clássicos da Relatividade Geral	34
2.5.1	<i>Precessão do periélio de Mercúrio</i>	36
2.6	Efeitos da constante cosmológica: A solução de Kottler	40
2.7	Condições de Energia em Relatividade Geral	41
3	SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA PERCORRÍVEIS	44
3.1	Condições desejadas para um buraco de minhoca	44
3.2	Solução de Morris-Thorne	45
3.2.1	<i>As Equações de Einstein</i>	47
3.2.2	<i>Aspectos Geométricos</i>	48
4	BURACOS DE MINHOCA DE CASIMIR	51
4.1	A Energia de Casimir	51
4.2	Solução em D dimensões	52
4.3	Efeitos da Constante Cosmológica	58
4.3.1	<i>Buracos de Minhoca de Casimir em $2 + 1$ dimensões</i>	60
5	BURACOS DE MINHOCA DE YUKAWA-CASIMIR	62
5.1	Descrição do problema	62
5.1.1	<i>A modificação global</i>	63
5.1.2	<i>A modificação no termo constante</i>	65
5.1.3	<i>A modificação no termo variável</i>	69
5.1.4	<i>Análise de Estabilidade</i>	70

5.1.5	<i>Correção para pequenos parâmetros</i>	71
5.1.5.1	<i>Correção de primeira ordem</i>	72
5.1.5.2	<i>Correção de segunda ordem</i>	74
6	CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS	76
6.1	Considerações Finais	76
6.1.1	<i>Buracos de minhoca de Casimir</i>	76
6.1.2	<i>Buracos de minhoca de Yukawa-Casimir</i>	77
6.2	Perspectivas futuras	79
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A - SIMPLIFICAÇÃO DA MÉTRICA ESFERICAMENTE SIMÉTRICA	86
	APÊNDICE B - ARTIGOS CIENTÍFICOS PUBLICADOS E EM PREPARAÇÃO	88

1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral (RG), proposta por Albert Einstein em 1915, procura descrever a interação gravitacional como um efeito geométrico do espaço-tempo em resposta a uma fonte de matéria [6, 7]. Ao longo dos anos tem se mostrado bastante assertiva, garantindo previsibilidade de diversos fenômenos [8–11]. Ainda em 1916, Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução analítica não trivial para as equações de campo de Einstein, que descreve a influência gravitacional de uma matéria estática, descarregada e esfericamente simétrica localizada [12]. Além disso, a solução de Schwarzschild exibe uma singularidade removível em um ponto regular, denominado horizonte de eventos, dando origem à ideia do buraco negro, que foi recentemente confirmada e fotografada [13, 14].

Ao estudar o interior do horizonte de eventos, uma extensão analítica das coordenadas de Schwarzschild revela uma ligação com outra região assintoticamente plana além da singularidade fundamental, $r = 0$ [15]. Essas estruturas foram denominadas “Pontes de Einstein-Rosen”, e conectam essas duas regiões separadas em um único ponto, inviabilizando a passagem [16, 17].

Buracos de minhoca, por outro lado, são soluções previstas pelas Equações de Einstein e representam estruturas topológicas com uma garganta conectando duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo [18], sendo previstas inicialmente por Ellis e Bronnikov [19, 20], com ausência de forças de maré e sem uma discussão efetiva sobre o conceito de atravessabilidade e, posteriormente estudadas em 1988, por Morris e Thorne [21] em um modelo atravessável. Para governar a atravessabilidade de um buraco de minhoca, duas condições geométricas são impostas, a condição de *flare-out* [22], que está relacionada à minimização da garganta, e a condição de *redshift* finito. Contudo, em geral, tais soluções não satisfazem as condições energéticas da Relatividade Geral, sendo necessário algum tipo de matéria exótica como fonte [23, 24].

A partir do procedimento de incorporação em coordenadas cilíndricas, Kim [24] mostrou que uma densidade de energia negativa satisfaz a condição de *flare-out* forte para o tipo de buraco de minhoca de Morris-Thorne, embora não seja necessário para a condição fraca [25]. A compreensão de tais soluções tornou-se o tema de intensa pesquisa nos últimos anos [26], incluindo a descoberta de buracos de minhoca atravessáveis humanamente por Maldacena e Milekhin [27].

1.1 Sobre as hipóteses e objetivos

A necessidade de densidades de energia negativas é satisfeita ao se trabalhar com setores específicos de campos quânticos. No campo eletromagnético, por exemplo, o efeito Casimir envolve energias negativas [28]. Os efeitos do espaço-tempo curvo nesta energia do vácuo é atualmente objeto de discussão na literatura [29–31], tendo chamado a atenção desde a proposta de investigação observacional, no experimento de peso do vácuo de Arquimedes[32].

Pelo perfil de energia negativa, a energia de Casimir foi pensada como um candidato para produzir um buraco de minhoca atravessável há muito tempo por Morris e Thorne e algum tempo depois por Morris, Thorne e Yurtsever; Visser[18, 33]. No entanto, apenas muito recentemente uma solução completa foi encontrada por Garattini[1]. O autor encontrou uma função de *redshift* apropriada e provou que no espaço-tempo quadridimensional a energia de Casimir pode ser uma fonte de buracos de minhoca atravessáveis.

Após este trabalho seminal, muitas consequências foram estudadas [2, 34–38]. Nesse sentido Alencar, Bezerra e Muniz[2] mostraram que, diferentemente do caso com $D = 4^1$, em $D = 3$ a energia de Casimir, isoladamente, não pode ser fonte de buracos de minhoca e fontes adicionais devem ser adicionadas. Isso levanta a questão se a energia de Casimir pode ser uma fonte no caso de dimensões arbitrárias. Isso se torna particularmente importante no caso $D = 5$, onde a energia de Casimir é um ingrediente necessário para os buracos de minhoca humanamente atravessáveis anteriormente mencionados[27].

Nesta tese, propomos estudar a influência da dimensionalidade do espaço-tempo sobre o Buraco de Minhoca de Casimir, determinando uma condição geral de sua atravessabilidade. Faremos essa análise resolvendo as equações de Einstein para o caso estático e esfericamente simétrico em D dimensões, considerando a energia e a pressão de Casimir como fontes. Nesse mesmo contexto, discutiremos as implicações de considerar a constante cosmológica como uma fonte adicional do buraco de minhoca de Casimir.

Por fim, consideraremos um efeito de blindagem do tipo Yukawa no cenário $D = 4$, proposto por Garattini[39] inicialmente sem levar em consideração a relação entre pressão e densidade de energia de Casimir. Ao considerar isto, obtemos uma classe de objetos astrofísicos mais intrigantes, a de buracos de minhoca gravitacionalmente repulsivos.

1.2 Sobre a construção desta tese

Para atingir os objetivos aqui propostos o trabalho foi dividido em capítulos, com organização própria e sequencial, de modo que é recomendada a leitura deste texto na ordem

¹Neste trabalho serão trabalhadas dimensões de espaço-tempo, com $D = d + 1$, sendo d dimensões espaciais e uma dimensão temporal.

apresentada. No capítulo 2, intitulado “Tópicos de Relatividade Geral” discutimos alguns pontos fundamentais da teoria geométrica da gravidade e conseqüentemente das alguns conceitos relevantes para o entendimento deste texto. Um leitor familiarizado² com a Relatividade Geral pode optar por ignorar este capítulo.

No capítulo 3, denominado “Soluções de buracos de minhoca atravessáveis” discutimos os pontos principais da solução padrão de Morris-Thorne, enfatizando as características físicas e geométricas que garantem a sua atravessabilidade.

O capítulo 4, “Buracos de minhoca de Casimir”, engloba os resultados originais da pesquisa publicada pelos autores [40], os quais buscaram aferir os impactos da dimensionalidade do espaço-tempo na solução de buracos de minhoca atravessáveis produzidos unicamente pela energia e pressão de Casimir.

O capítulo 5, “Buracos de minhoca de Yukawa-Casimir”, contém os resultados de se considerar uma blindagem do tipo Yukawa que preserve o perfil da energia e pressão de Casimir. Tais resultados, foram contemplados em uma segunda publicação pelos autores [41].

Por fim, no capítulo 5, realizamos as considerações finais, bem como as perspectivas futuras desta linha de pesquisa.

²Este capítulo não terá como objetivo ensinar Relatividade Geral dos fundamentos ao avançado, apenas realizar uma construção lógica de algumas das ideias mais importantes que são a base desta pesquisa. A um leitor completamente iniciante fica a recomendação de buscar a literatura padrão listada ao final desta tese.

2 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo buscaremos discutir os principais elementos da Teoria da Relatividade Geral, em particular aqueles necessários para a compreensão dos resultados obtidos. Esperamos que esta introdução seja completa e didática¹ ao ponto que um leitor leigo, mas com boas habilidades matemáticas, possa compreendê-la. Excelentes livros-texto para estudos iniciais em Relatividade Geral são Schutz[42], Rindler[15], Carroll[43] e Cheng[44]. Já para estudos mais aprofundados ficam como recomendações Padmanabhan[6], Weinberg[45] e Wald[46].

2.1 Uma descrição geométrica da gravidade

A Teoria da Relatividade Geral (RG) constitui uma teoria geométrica da gravidade, ao considerar que os fenômenos gravitacionais são causados por deformações no espaço-tempo curvo [44]. O fundamento geral de uma teoria geométrica se baseia na forma de se determinar distâncias, em particular entre dois pontos suficientemente próximos,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Os índices gregos², nesse caso, são tais que $\mu, \nu \in [0, 3]$, sendo o índice zero para representar a coordenada temporal, $x^0 = ct$, e os demais para as coordenadas espaciais. O termo $g_{\mu\nu}(x)$ é denominado métrica, sendo representada por uma matriz quadrada de ordem 4 não degenerada, isto é, num dado sistema de coordenadas, $g_{\mu\nu}(x)$ deve ser inversível. No caso particular de um espaço-tempo plano, a métrica é a de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

2.1.1 Movimento sob o campo gravitacional

Uma partícula livre³ se move sob a seguinte ação

$$S[x^\mu] = \alpha \int ds, \quad (2.2)$$

¹Sempre que um desenvolvimento mais explícito de algo faltar, será realizada a complementação com materiais externos citados nas notas de rodapé.

²Destaca-se que índices repetidos indicam soma implícita (denominada convenção de Einstein), portanto

$$A_\mu A^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu A^\mu = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3.$$

³Considere o termo “livre” fazendo menção à outros campos e/ou potenciais. Uma partícula livre no contexto da Relatividade Geral se move sob influência do campo gravitacional através da curvatura do espaço-tempo.

em que a constante α é genérica, não havendo relevância física devido ao processo de extremização,

$$\delta S = \alpha \int \delta(ds) = 0, \quad (2.3)$$

A última igualdade é devido ao Princípio de Hamilton, que determina que, dentre todas as trajetórias que um sistema dinâmico pode evoluir consistentemente com seus vínculos, a escolhida é aquela que minimiza⁴ a ação.

A partir do elemento de linha (2.1) temos que

$$2ds\delta(ds) = (\delta g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}dx^\mu \delta(dx^\nu), \quad (2.4)$$

no referencial da partícula, $u^\mu = \dot{x}^\mu$ é a 4-velocidade, assim $dx^\mu = u^\mu d\tau = u^\mu(ds/c)$, daí

$$\delta(ds) = \frac{1}{2c}\delta(g_{\mu\nu})u^\mu u^\nu d\tau + \frac{g_{\mu\nu}}{c}u^\mu d(\delta x^\nu), \quad (2.5)$$

em que foi usado que $\delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu)$. Assim, como $\delta(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda$, a Eq. (2.3) se torna

$$0 = \int \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}u^\mu u^\nu \delta x^\lambda d\tau + g_{\mu\lambda}u^\mu d(\delta x^\lambda) \right], \quad (2.6)$$

o último termo pode, via Integração por Partes, ser escrito como

$$\int g_{\mu\lambda}u^\mu d(\delta x^\lambda) = g_{\mu\lambda}u^\mu \delta x^\lambda \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\lambda}u^\mu) \delta x^\lambda d\tau, \quad (2.7)$$

por hipótese $\delta x^\lambda(\tau_1) = \delta x^\lambda(\tau_2) = 0$, assim, como

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\mu\lambda}u^\mu) = g_{\mu\lambda,\nu}u^\mu u^\nu + g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (2.8)$$

por outro lado, note que $u^\mu u^\nu$ é simétrico na permutação $\mu \Leftrightarrow \nu$ então apenas a parte simétrica de $g_{\mu\lambda,\nu}$ contribui [49]. Portanto, como $d\tau \delta x^\lambda$ é arbitrário e não nulo, obtemos

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) u^\mu u^\nu = 0 \quad (2.9)$$

definindo os Símbolos de Christoffel (do segundo tipo),

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \quad (2.10)$$

e escrevendo em termos de x^μ , obtemos a Equação Geodésica

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.11)$$

⁴A rigor, o Princípio de Hamilton se refere à extremização do funcional, de modo que uma análise de mínimos e máximos deve ser feita a partir de variações de segunda ordem [47]. Entretanto, do ponto de vista físico, a maior parte dos sistemas evolui de modo a minimizar a ação, de tal forma que é frequentemente referido na literatura como “Princípio da Mínima Ação” [48].

No caso sem gravitação, isto é, nos domínios da Relatividade Restrita a equação acima se reduz à $\ddot{x}^\sigma = 0$, representando linhas retas no espaço-tempo de Minkowski. Assim sendo, a presença da gravitação está contida nos símbolos de Christoffel, os quais desempenham o papel do termo da força gravitacional⁵, de tal modo que os componentes da métrica desempenham o papel do potencial gravitacional⁶.

2.2 Aspectos da Curvatura

Uma das bases da Física Clássica é o conceito de realidade objetiva, ou seja, de que o objeto existe além da observação. Em outras palavras, o observador não afeta a realidade física, o que permite uma descrição completamente equivalente entre dois observadores [51]. Do ponto de vista matemático os diferentes observadores num espaço-tempo curvo devem ser conectados via transformação geral de sistemas de coordenadas [50]. Quando passamos de um sistema de coordenadas x^μ para outro x'^μ , seus elementos diferenciais transformam-se como,

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.12)$$

dessa maneira qualquer conjunto de quatro quantidades A^μ que se transforme da mesma maneira é dito ser um vetor contravariante (ou apenas vetor). Por outro lado, pela regra da cadeia, e dado uma certa quantidade escalar⁷ ϕ , observa-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}, \quad (2.13)$$

se transforma com a inversa. Todo conjunto de quatro quantidades que se transforme dessa maneira é dito vetor covariante (ou covetor).

Um ponto intrigante é de que embora o objeto A^μ se transforme como um vetor⁸ e o operador diferencial ∂_μ se transforme como um covetor [52], a derivada $\partial_\nu A^\mu$ não se transforma como um tensor

$$\partial'_\nu A'^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} (\partial_\lambda A^\rho) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\nu \partial x^\rho} A^\rho, \quad (2.14)$$

pois há o termo extra relacionado à variação da base ao longo do espaço-tempo curvo. Isso é resolvido através do transporte paralelo, em que o vetor $A_\mu(x)$ é transportado de x para $x + dx$, via [50]

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) A_\lambda(x) dx^\nu, \quad (2.15)$$

⁵Veremos, ao longo do capítulo, que os Símbolos de Christoffel assumem particular importância não apenas na equação geodésica, mas também para definir os operadores diferenciais em espaços-tempo curvos.

⁶A verificação explícita dessa conexão entre geometria e gravitação encontra-se na Ref. [50].

⁷Isto é, invariante sob transformações de coordenadas.

⁸Devido à assinatura da métrica não ser positivamente definida é possível classificar os vetores de três formas: $A^\mu A_\mu > 0$ (vetor tipo tempo), $A^\mu A_\mu = 0$ (vetor nulo) e $A^\mu A_\mu < 0$ (vetor tipo espaço), similarmente ao que se observa do sinal do elemento de linha ds^2 .

o que leva à definição de derivada covariante [6]

$$D_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda, \quad (2.16)$$

que pode ser resumida seguindo a notação usual dos livros de RG, no qual $\partial_\mu A_\nu = A_{\nu,\mu}$ e $D_\mu A_\nu = A_{\nu;\mu}$. Embora a conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ não seja um tensor [52] a derivada $D_\mu A_\nu$ se transforma como um tensor [50].

Uma vez que, no espaço-tempo curvo, o conceito de derivada precisa ser redefinido já que o deslocamento do vetor depende da curvatura do próprio espaço-tempo, o que se observa é que a derivada covariante perde a propriedade comutativa, isto é, $[D_\nu, D_\alpha]A_\mu \neq 0$, de modo que se obtém

$$[D_\nu, D_\alpha]A_\mu = R^\lambda_{\mu\nu\alpha} A_\lambda + 2\Gamma^\lambda_{[\alpha\nu]} D_\lambda A_\mu, \quad (2.17)$$

em que $T^\lambda_{\alpha\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{[\alpha\nu]}$ é a denominada torção⁹ do espaço-tempo [53], e

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha}, \quad (2.18)$$

é o Tensor de Riemann (ou Tensor de Curvatura). Algumas propriedades do tensor de Riemann são

- Antissimetria:

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} = -R^\lambda_{\mu\alpha\nu}. \quad (2.19)$$

- Primeira identidade de Bianchi:

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} + R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\alpha\mu} = 0. \quad (2.20)$$

- Segunda identidade de Bianchi:

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha;\sigma} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\alpha} + R^\lambda_{\mu\alpha\nu;\sigma} = 0. \quad (2.21)$$

Além disso, é possível construir dois objetos particularmente importantes, o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\nu\lambda}, \quad (2.22)$$

que é simétrico, e o escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

afinal eles fornecem a medida global da curvatura do espaço-tempo.

⁹A priori, Einstein desenvolveu sua teoria sem considerar efeitos de torção e, portanto, consideraremos apenas os casos de conexões simétricas, isto é, $T^\lambda_{\alpha\nu} = 0$.

A partir da segunda identidade de Bianchi é possível mostrar¹⁰ que o tensor simétrico

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

denominado tensor de Einstein é uma constante covariante, isto é, $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$, indicando que o tensor é conservado¹¹.

2.3 As Equações de Campo de Einstein

Como discutimos, o cerne da Teoria da Relatividade Geral é considerar o próprio espaço-tempo como parte da solução, onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ deve satisfazer o que são conhecidas como Equações de Campo de Einstein (ECE). Embora não haja uma dedução rigorosa dessas equações, uma derivação heurística pode ser encontrada na Ref. [54].

2.3.1 Derivação via Princípio Variacional

Uma maneira elegante de determinar a dinâmica de um campo surge do Princípio Variacional, onde se postula uma lagrangiana que inclui os campos e suas simetrias, e por meio da extremização da ação, obtemos as equações de movimento¹². Assim, pelo Princípio da Covariância Geral, a ação para a métrica $g_{\mu\nu}$ deve assumir a forma funcional

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}(x)), \quad (2.25)$$

onde $\mathcal{L}_g(g_{\mu\nu})$ é uma densidade lagrangiana (escalar de Lorentz) construída com a métrica. A partir dos objetos geométricos discutidos ao longo deste capítulos pode-se construir uma grande possibilidade de escalares, a exemplo

$$\mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}) = \alpha_0 R + \alpha_1 R^2 + \alpha_3 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_4 R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \dots, \quad (2.26)$$

em que os coeficientes α_i 's são constantes dimensionais. Contudo, muitos desses termos possuem derivadas de alta ordem na métrica e/ou não-linearidades, sendo particularmente importantes no contexto de Altas Energias¹³, mas igualmente irrelevantes para o contexto usual. A ação mais simples (no sentido de haver apenas derivadas de primeira ordem no campo) e elegante

¹⁰A demonstração consta no livro-texto do professor Cheng[44], na Seção 13.3.2.

¹¹Essa simetria está associada, como veremos, à conservação do tensor momento-energia.

¹²A construção do Modelo Padrão é conduzida de maneira análoga, buscando-se a lagrangiana mais simples possível com os campos e simetrias.

¹³Um modelo com especial importância é a lagrangiana de Gauss-Bonnet, dada por [6]

$$\mathcal{L}_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

que embora não contribua na dinâmica em $D = 4$ por ser um termo de derivada total na ação, possui ampla relevância em modelos de dimensão extra [55].

que gera as Equações de Campo de Einstein é (tomando $c = 1$)

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.27)$$

denominada ação de Einstein-Hilbert, pela proximidade temporal de suas publicações. A constante $1/16\pi G$ é introduzida de modo a reproduzir o limite Newtoniano quando considerarmos fontes de matéria.

Para obter as equações de movimento pode-se usar o Princípio de Hamilton, $\delta S = 0$ [56], em que δ representa a variação funcional em relação à algum campo específico. Assim sendo, é conveniente definir por meio de proposição as variações de alguns objetos geométricos em relação à métrica.

Proposição 1. *Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade pseudo-Riemanniana. Sob uma variação $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, então $g^{\mu\nu}$, g e $R_{\mu\nu}$ se transformam via*

$$i) \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta g_{\kappa\lambda},$$

$$ii) \quad \delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

$$iii) \quad \delta R_{\mu\nu} = D_\kappa \delta \Gamma^\kappa_{\nu\mu} - D_\nu \delta \Gamma^\kappa_{\kappa\mu}. \quad (\text{Identidade de Palatini})$$

Demonstração. i) Partindo de $g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\kappa^\nu$, obtemos que

$$0 = \delta(g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu}) = \delta g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu} + g_{\kappa\lambda} \delta g^{\lambda\nu},$$

assim, multiplicando ambos os lados por $g^{\mu\kappa}$, obtemos

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta g_{\kappa\lambda}.$$

ii) Uma vez que $g_{\mu\nu}$ é um tensor de *rank*-2 podemos associar uma representação matricial, de modo que vale a identidade [42]

$$\ln g = \text{Tr} \ln g_{\mu\nu},$$

efetuando a variação funcional, obtemos

$$g^{-1} \delta g = \text{Tr}(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}),$$

assim, como a métrica é um tensor simétrico, podemos escrever

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

iii) Por fim, para mostrar a Identidade de Palatini, partiremos da variação explícita do tensor de

Ricci em termos dos símbolos de Christoffel (2.10)

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\ &= (\partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}) - (\partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}),\end{aligned}$$

embora a conexão não seja um tensor, o termo não homogêneo da transformação é o mesmo para quaisquer duas conexões $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ e, portanto, a diferença $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ é sempre um tensor [50]. Dessa maneira, a variação $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é também um tensor e podemos escrever sua derivada covariante,

$$D_\alpha \delta \Gamma^\mu_{\nu\rho} = \partial_\alpha \delta \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \delta \Gamma^\mu_{\nu\lambda},$$

assim

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\kappa \delta \Gamma^\kappa_{\nu\mu} - D_\nu \delta \Gamma^\kappa_{\kappa\mu},$$

o que encerra a demonstração. ■

Variando a ação de Einstein-Hilbert, obtemos

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R) = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (2.28)$$

o termo entre parênteses é o Tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} (\equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2)$. A segunda integral, por outro lado, uma vez que $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ [57] nos permite escrever

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - D_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\nu_{\mu\lambda}) \\ &= D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \\ &= D_\lambda U^\lambda,\end{aligned}\quad (2.29)$$

em que $U^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}$, assim

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} D_\lambda U^\lambda,\quad (2.30)$$

contudo, para todo 4-vetor vale a identidade [50]

$$\sqrt{-g} D_\lambda U^\lambda = \partial_\lambda (\sqrt{-g} U^\lambda).\quad (2.31)$$

Dessa forma, o segundo termo torna-se uma divergência total, não contribuindo na variação¹⁴

¹⁴Embora esse seja o roteiro seguido nos livros-texto de Teoria de Campos e Gravação, essa afirmação não é

e, portanto, ao impormos $\delta S_{EH} = 0$ obtemos

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.32)$$

que são as Equações de Campo de Einstein (no vácuo). No caso em que há campos de matéria incluídos no problema, isto é

$$S = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_m, \quad (2.33)$$

em que S_m é o termo da ação que representa a matéria (como bósons ou férmions), de tal forma que construímos o tensor momento-energia através de sua variação funcional em relação à métrica [6]

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.34)$$

Portanto as Equações de Campo de Einstein com fonte são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

em que $\kappa (= 8\pi G/c^4)$ é a constante de acoplamento que faz com que, no caso limite newtoniano, as ECE's se tornem a Equação de Poisson [7].

2.4 Primeiras soluções obtidas

Embora as ECE's aparentem simplicidade, isto se dá pela capacidade de compactificação que a notação provém. As ECE's representam um total de 10 Equações Diferenciais Parciais acopladas, uma para cada componente da métrica¹⁵. Além disso, as ECE's são totalmente não lineares, de modo que o Princípio da Superposição¹⁶, em geral, não é válido, ao contrário do que ocorre na Gravitação Newtoniana, via Equação de Poisson. Mesmo Einstein ao propor as ECE's em 1915 considerou que seria difícil, e até impossível, resolvê-las analiticamente (mesmo a solução de vácuo). No entanto, algumas semanas depois, o físico alemão Karl Schwarzschild encontrou essa solução de vácuo enquanto servia na Primeira Guerra Mundial [12], e posteriormente encontrou a solução na presença de matéria.

2.4.1 Soluções Estáticas e Esfericamente Simétricas

Nesta subseção buscaremos construir a motivação para a métrica de Espaço-tempo Esfericamente Simétrico (SSS, do inglês *Spherically Symmetric Spacetime*), que são amplamente utilizadas. Para uma leitura complementar sobre essa condição de fronteira e suas limitações, consulte o artigo na Ref. [58].

¹⁵Note que há liberdade de escolha no sistema de coordenadas, de modo que temos 6 graus de liberdade.

¹⁶O Princípio da Superposição garante que, quando é válido, se f_1, f_2, \dots, f_n forem soluções linearmente independentes de uma equação diferencial, então uma combinação linear $F = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ também é solução. Esse aspecto se mostra fundamental nos estudos de Eletrostática, por exemplo.



Figura 1: Karl Schwarzschild. Fonte: Modificado do link.

mente utilizadas para obter soluções analíticas e numéricas das ECE's para fontes de matéria-energia em movimento radial, sendo assim a base para o estudo de espaços-tempo desta tese. Um espaço-tempo esfericamente simétrico é aquele cujo grupo de isometria contém um subgrupo que é isomórfico ao grupo de rotação $SO(3)$. Soluções desse tipo devem ser então caracterizadas pelos invariantes de rotação.

Consideremos um conjunto de coordenadas $x^\mu = (ct, \vec{r})$, assim o intervalo infinitesimal invariante deve ser quadrático em $d\vec{r}$ e em dt . A priori podemos fazer com que

$$ds^2 = Ad\vec{r} \cdot d\vec{r} + B(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 + Cdt(\vec{r} \cdot d\vec{r}) + Ddt^2, \quad (2.36)$$

em que A, B, C, D são funções escalares de t e $\vec{r} \cdot \vec{r}$. O vetor \vec{r} é colocado explicitamente já que a métrica é uma função do espaço e do tempo, isto é, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\vec{r}, t)$. Podemos então tomar um sistema de coordenadas que possua a simetria desejada, o sistema de coordenadas polares esféricas, dada por

$$(x^1, x^2, x^3) = r(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (2.37)$$

e através de redefinições de coordenadas¹⁷ obtemos que

$$ds^2 = g_{00}(r, t)c^2 dt^2 + g_{11}(r, t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.38)$$

assim um SSS possui apenas duas funções escalares desconhecidas.

É comum, em livros-texto de Relatividade Geral, considerar um sistema de unidades naturais¹⁸ com $c = 1$ e expressar os termos da métrica como exponenciais de outras funções,

¹⁷O desenvolvimento explícito consta no Apêndice D.1.

¹⁸A introdução de unidades naturais oferece a vantagem de uma notação mais compacta, eliminando a neces-

com $g_{00}(r, t) = -e^{f(r,t)}$ e $g_{11}(r, t) = e^{g(r,t)}$. Assim, os símbolos de Christoffel não nulos são¹⁹ em que o ponto simboliza derivada com relação à $x^0 = ct$ e o apóstrofo com relação à r .

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= -\frac{\dot{f}}{2}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{g}}{2}e^{g-f}, & \Gamma^0_{01} &= \frac{f'}{2}, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{f'}{2}e^{f-g}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{g'}{2}, & \Gamma^1_{01} &= \frac{g}{2}, \\ \Gamma^1_{22} &= -re^{-g}, & \Gamma^1_{33} &= -r \operatorname{sen}^2\theta e^{-g}, & \Gamma^2_{33} &= -\operatorname{sen}\theta \cos\theta, \\ \Gamma^2_{12} &= r^{-1}, & \Gamma^3_{32} &= \cot\theta, & \Gamma^3_{13} &= r^{-1}, \end{aligned}$$

Consequentemente as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = -\left(\frac{f''}{2} + \frac{f'^2}{4} - \frac{f'g'}{4} + \frac{f'}{r}\right)e^{f-g} + \left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4} - \frac{\dot{f}\dot{g}}{4}\right), \quad (2.39a)$$

$$R_{11} = \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'^2}{4} - \frac{f'g'}{4} - \frac{g'}{r}\right) - \left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4} - \frac{\dot{f}\dot{g}}{4}\right)e^{g-f}, \quad (2.39b)$$

$$R_{01} = -\frac{\dot{g}}{r}, \quad (2.39c)$$

$$R_{22} = \left[1 + \frac{r}{2}(f' - g')\right]e^{-g} - 1, \quad (2.39d)$$

$$R_{33} = R_{22} \operatorname{sen}^2\theta. \quad (2.39e)$$

Note que, mesmo soluções de vácuo, isto é para $R_{\mu\nu} = 0$, as equações permanecem complexas de serem resolvidas. Uma maneira de contornar isto é considerar soluções estáticas, isto é, que não dependam explicitamente do tempo. Esta saída foi utilizada por Schwarzschild²⁰. Embora possa se questionar da validade dessa premissa, e que Schwarzschild desconhecesse, alguns anos depois, Birkhoff demonstrou um teorema mostrando que a solução de Schwarzschild é, na realidade, válida também para estrelas esféricas explodindo, colapsando ou pulsando [44].

Teorema 1 (Teorema de Birkhoff). *Toda solução de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$) esfericamente simétrica é estática.*

Demonstração. A solução esfericamente simétrica depende unicamente de duas funções inicialmente arbitrárias, $f = f(\vec{r}, t)$ e $g = g(\vec{r}, t)$. Assim sendo, ao considerar a solução de vácuo, isto é $R_{\mu\nu} = 0$, devemos obter $\dot{f} = 0 = \dot{g}$ para demonstrar o Teorema. Para g é imediato, haja

sidade de constantes explícitas nas equações. As unidades padrão podem ser restauradas por análise dimensional para obter resultados numéricos, se necessário [59].

¹⁹Um método alternativo para calcular os símbolos de Christoffel via equação geodésica é apresentado no livro-texto do Rindler[15], na seção 10.2.

²⁰Note, contudo, que soluções estáticas não possuem interesse apenas em soluções de vácuo, mas para soluções gerais, uma vez que ao considerar $\dot{f} = 0 = \dot{g}$, o tensor de Ricci torna-se diagonal e, portanto, a fonte de matéria-energia também.

vista que $R_{01} = -\dot{g}/r = 0$. Por outro lado, note que, ao fazer $R_{22} = 0$, observamos que

$$\left[1 + \frac{r}{2}(f' - g')\right] e^{-g} - 1 = 0, \quad (2.40)$$

como g não depende explicitamente do tempo, então g' não depende, e conseqüentemente f' também. Assim sendo, podemos decompor $f(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}) + f_2(t)$, por outro lado, o termo temporal do invariante ds^2 nos permite absorver a dependência temporal na própria coordenada, assim

$$-e^{f(\vec{r}, t)} c^2 dt^2 = -e^{f_1(\vec{r})} e^{f_2(t)} c^2 dt^2 \equiv -e^{f_1(\vec{r})} c^2 d\tilde{t}^2, \quad (2.41)$$

portanto, nessas coordenadas, as funções da métrica são independentes do tempo, portanto a solução é estática. ■

2.4.2 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata para as Equações de Campo de Einstein²¹. Esta solução, também denominada solução de vácuo, descreve o campo gravitacional no exterior de um corpo esférico, massivo em que efeitos de rotação e de carga são desprezados²². Nesse sentido, esta solução torna-se uma boa aproximação para corpos cuja rotação é lenta, como é o caso do Sol. Como veremos, a solução de Schwarzschild apresenta duas “singularidades”, uma singularidade física na origem e uma singularidade coordenada denominada raio de Schwarzschild. Todo corpo massivo, sem carga e sem rotação (ou com rotação suficientemente lenta) que tenha um raio menor que o raio de Schwarzschild é denominado como um buraco negro.

Considerando que a solução de vácuo deve ser estática, isto é $\dot{f} = 0 = \dot{g}$, podemos tomar $e^{g-f} R_{00} + R_{11} = 0$ e obter

$$f' + g' = 0 \longrightarrow f(r) = -g(r), \quad (2.42)$$

a constante de integração pode ser absorvida em uma redefinição da coordenada temporal. Uma vez que f e g são exponenciados na métrica, essa condição implica em

$$-g_{00} = \frac{1}{g_{11}}. \quad (2.43)$$

Além disso, tomando $R_{22} = 0$, com essa condição podemos escrever

$$(1 - rg')e^{-g} = 1, \quad (2.44)$$

²¹Com exceção da já conhecida solução para o espaço-tempo plano de Minkowski.

²²É importante destacar que, devido ao *Teorema No-hair*, a solução para buracos negros massivos e estacionários foi estendida para incluir as outras duas únicas grandezas físicas independentes (rotação e carga elétrica) na solução de Kerr-Newman. Para um estudo dessa solução consulte o Box 13.1 do livro dos Professores Guidry e Guidry[59].

uma maneira de resolver essa EDO é tomar uma nova variável $\lambda(r) = g_{11}^{-1} = e^{-g}$, assim

$$\frac{d\lambda}{dr} + \frac{\lambda}{r} = \frac{1}{r}, \quad (2.45)$$

cuja solução geral é $\lambda(r) = \lambda_0(r) + \lambda_1$ em que $\lambda_0(r)$ é solução da EDO homogênea

$$\frac{d\lambda_0}{dr} = -\frac{\lambda_0}{r}, \quad (2.46)$$

e λ_1 é a solução particular. Imediatamente obtém-se que

$$\ln \lambda_0 r = C, \quad (2.47)$$

em que C é uma constante de integração. Portanto o produto $\lambda_0 r$ é uma constante denominada raio de Schwarzschild, $\lambda_0 r = -R_S$. Assim, $\lambda_1 = 1$ e, portanto

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.48)$$

A solução 2.48 é então completamente determinada por um único parâmetro, o raio de Schwarzschild. Note que, no limite $R_S/r \rightarrow 0$ a métrica de Schwarzschild se torna a de Minkowski, assim é esperado que no limite clássico isto retorne a Gravitação Newtoniana. De fato, para campos pouco intensos²³,

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) = -1 + \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (2.49)$$

em que Φ é o potencial gravitacional, fazendo com que a solução de vácuo das ECE's dependa unicamente da massa da fonte e da distância em que um observador se encontre do objeto compacto. Por comparação direta, tem-se que

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx M \cdot 1.48 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{kg}}, \quad (2.50)$$

dando significado físico ao parâmetro R_S . A Tabela 1 contém o valor numérico aproximado de R_S para alguns corpos celestes. Note que, para que a Terra se transformasse em um buraco negro, seria necessário comprimir toda a sua massa (inclusive as florestas, oceanos, prédios e seres vivos) em uma esfera com apenas 9 *mm* de raio, ilustrando a extrema densidade desses objetos astrofísicos.

A métrica de Schwarzschild possui dois problemas aparentes, em $r = 0$ e $r = R_S$. Em $r = 0$ há indeterminação na métrica, enquanto que para $r = R_S$ a parte temporal da métrica desaparece e a parte radial cresce indefinidamente. A esses pontos²⁴ dá-se o nome de

²³Para uma discussão acerca desse tópico em detalhes, consulte a Seção 6.4 do livro-texto do Professor Padmanabhan[6].

²⁴O termo ponto não deve ser entendido literalmente, mas sim a casca esférica de raio r tal que aparecem diver-

Corpo celeste	Massa M (kg)	Raio de Schwarzschild R_S (m)
Terra	$6.0 \cdot 10^{24}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$
Júpiter	$1.9 \cdot 10^{27}$	$2.8 \cdot 10^0$
Sol	$2.0 \cdot 10^{30}$	$3.0 \cdot 10^3$
<i>Sagittarius A*</i>	$8.6 \cdot 10^{36}$	$1.3 \cdot 10^{10}$

Tabela 1: Valores do raio de Schwarzschild para alguns corpos celestes.

“singularidades”. Entretanto, como veremos, a singularidade em $r = R_S$ não é física, isto é, dar-se-á por uma má escolha do sistema de coordenadas²⁵. Para verificar isso devemos estudar o comportamento das geodésicas de raios luminosos que caem em direção ao buraco negro. Devido a simetria esférica podemos desprezar as coordenadas angulares tomando $d\theta = 0 = d\varphi$, assim (tomemos $c = 1$)

$$ds^2 = -\frac{r - R_S}{r} dt^2 + \frac{r}{r - R_S} dr^2, \quad (2.51)$$

como os cones de luz são definidos pelo vínculo $ds^2 = 0$, então

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r}{r - R_S}, \quad (2.52)$$

cuja solução é direta e dada por

$$\Delta t = \pm (r + R_S \ln|r - R_S|), \quad (2.53)$$

este resultado²⁶ gera o gráfico 2. Note que em $r = R_S$ obtemos um intervalo Δt infinito para que os raios de luz atinjam o horizonte (ficando presos lá), como o esperado é de que os raios caiam até atingir $r = 0$ então é um indicio de que a singularidade é devido ao sistema de coordenadas.

Se analisarmos o movimento do ponto de vista do tempo próprio da partícula em queda livre a partir da equação da geodésica 2.11 obtemos que, para a componente $\sigma = 0$ [4],

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Cr}{r - R_S}, \quad (2.54)$$

em que C é uma constante de integração que pode ser fixada $C = 1$ para que em $r \rightarrow \infty$ tenhamos t igual à τ . Assim, como $d\tau^2 = -ds^2$ [15], obtemos que os raios luminosos que caem

gências na métrica.

²⁵Um exemplo didático de que a escolha equivocada do sistema de coordenadas leva à divergências na métrica é o caso do plano em coordenadas polares, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, note que se tomarmos uma nova coordenada \bar{r} tal que $r \rightarrow \bar{r} = a^2/r$, o que leva à

$$ds^2 = \frac{a^4}{\bar{r}^4} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\varphi^2),$$

que claramente diverge na origem $\bar{r} = 0$. Note, contudo, que o espaço continua sendo plano, essa “singularidade” ocorre devido à uma má escolha de coordenadas, em que os pontos no infinito foram mapeados para a origem.

²⁶O sinal positivo é para as ondas de saída (*outgoing*), enquanto o negativo é para as ondas de entrada (*ingoing*).

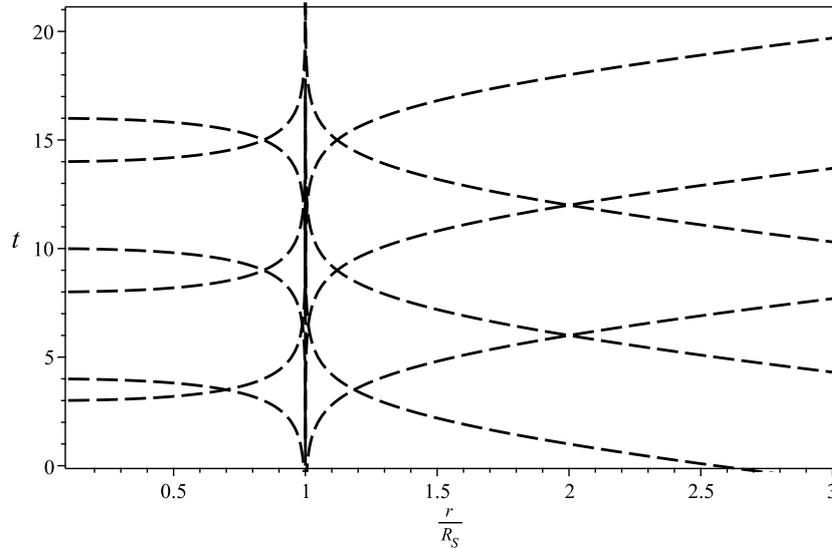


Figura 2: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild. Fonte: Adaptado da Ref. [4].

obedecem à

$$\Delta\tau = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{r^3 - r_0^3}{R_S}}, \quad (2.55)$$

que é finito no horizonte $r = R_S$. Assim sendo deve existir um sistema de coordenadas que elimine essa “singularidade”. Devido ao problema se dar nas ondas “*ingoing*”, eliminemos a função logaritmo com uma mudança de coordenadas,

$$t \rightarrow T = t + R_S \ln|r - R_S|, \quad (2.56)$$

assim

$$t = -r + \text{cte}, \quad (2.57)$$

essas coordenadas (T, r) são denominadas coordenadas de Eddington-Finkelstein, e fazem com que o diagrama de espaço-tempo se torne a Figura 3. Nestas coordenadas, os raios “*ingoing*” são retas em direção à $r = 0$ enquanto os raios “*outgoing*” ficam presos no horizonte.

Nas coordenadas adequadas a solução de Schwarzschild se torna

$$ds^2 = -\frac{r - R_S}{r}dT^2 + \frac{2R_S}{r}drdT + \frac{r + R_S}{r}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.58)$$

que não diverge mais em $r = R_S$.

A maneira pragmática de se determinar quais são as singularidades físicas é calcular os escalares a partir do tensor de curvatura (R , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$, entre outros), pois todos independem da escolha de coordenadas. O raio de Schwarzschild define a escala de curvatura

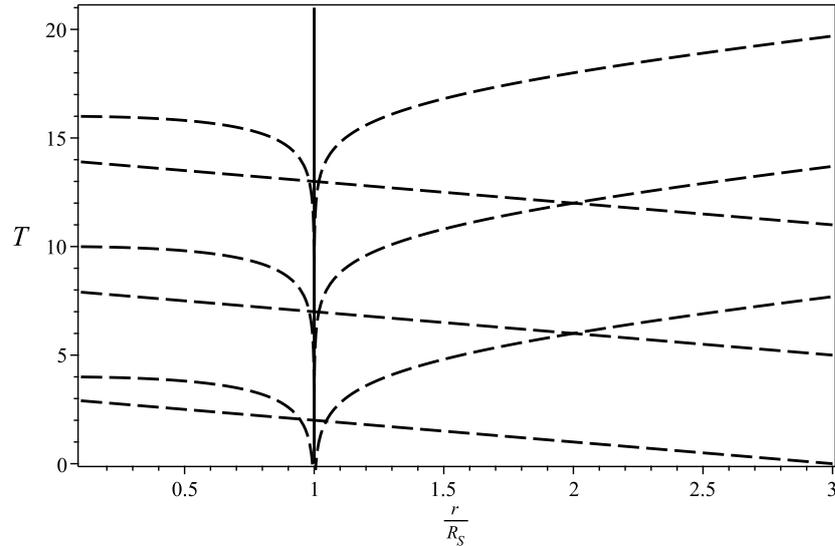


Figura 3: Diagrama de espaço-tempo para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Fonte: Adaptado da Ref. [4].

dessa geometria, via escalar de Kretschmann²⁷ temos que,

$$K \equiv R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{R_S^2}{r^6}, \quad (2.59)$$

de fato, o escalar de curvatura apenas diverge na origem $r = 0$, de modo que esta é a única singularidade física da solução. A figura 4 ilustra o comportamento do escalar de Kretschmann para alguns corpos celestes.

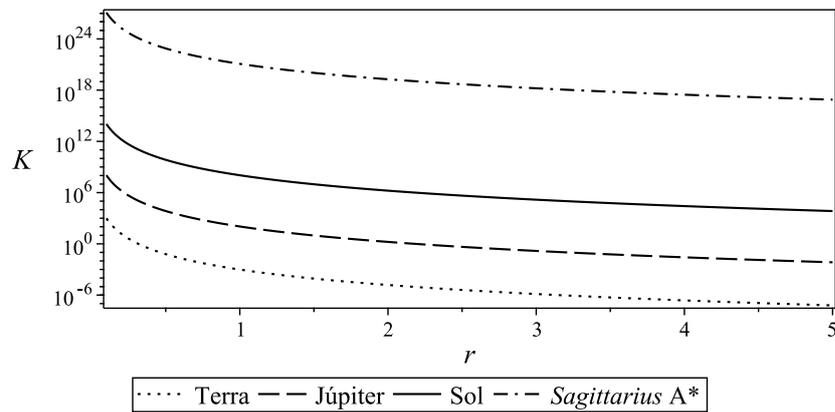


Figura 4: Escalar de Kretschmann para a geometria de Schwarzschild para os corpos celestes da Tabela 1.

2.5 Testes clássicos da Relatividade Geral

O êxito da Teoria da Relatividade Geral de Einstein é notável não apenas por sua descrição geométrica das interações gravitacionais, mas também por sua capacidade de pre-

²⁷Neste caso não podemos usar o escalar de Ricci pois estamos estudando a solução de vácuo, isto é $R = 0$.

ver com precisão fenômenos observacionais anteriormente considerados inconciliáveis com o formalismo newtoniano²⁸. Ao reformular a natureza da gravidade como a curvatura do espaço-tempo induzida pela presença de matéria e energia, esta teoria revela-se capaz de explicar desde o lenteamento gravitacional até a dilatação temporal em regiões de intensa gravidade. Sua consistente confirmação por meio de experimentos e observações estabelece a Teoria da Relatividade Geral como um pilar fundamental da física moderna, transcendendo os confins da Física clássica para desvendar os mistérios mais profundos do universo através de um formalismo elegantemente concebido e empiricamente sustentado.

Os testes clássicos são experimentos e/ou observações que corroboram as previsões teóricas da teoria em situações cotidianas ou em condições extremas. No caso da Relatividade Geral são três os testes mais relevantes:

1. *Precessão do periélio*: A precessão do periélio de Mercúrio, isto é, a lenta mudança na orientação do ponto mais próximo de sua órbita ao redor do Sol, é um dos primeiros triunfos observacionais da Relatividade Geral. Enquanto a teoria newtoniana da gravitação não conseguia explicar completamente essa anomalia, a Relatividade Geral prevê precisamente esse deslocamento devido à curvatura do espaço-tempo causada pela presença massiva do Sol [60,61]. Os cálculos relativísticos correspondem de forma notável às observações astronômicas, corroborando assim a validade desta teoria em escalas planetárias;
2. *Deflexão da luz*: O desvio gravitacional da luz, também conhecido como lenteamento gravitacional, é uma previsão fundamental da Relatividade Geral. Quando a luz de uma estrela distante passa perto de um objeto massivo, como uma estrela ou um buraco negro, sua trajetória é curvada devido à deformação do espaço-tempo em torno do objeto massivo [62]. Esse fenômeno foi observado em várias ocasiões, como em Sobral-CE no Brasil no dia 29 de maio de 1919²⁹, confirmando a precisão das previsões relativísticas e oferecendo evidências convincentes da existência e da natureza da gravidade;
3. *Redshift gravitacional*: O *redshift* gravitacional é outro fenômeno previsto pela Relatividade Geral. Segundo esta teoria, a luz emitida por objetos em campos gravitacionais intensos, como estrelas, sofre um deslocamento para o vermelho quando se afasta desses campos [64]. Esse efeito foi observado em estrelas próximas a buracos negros supermassivos e em sistemas estelares binários, fornecendo uma confirmação adicional da validade da Relatividade Geral em escalas cósmicas [65].

²⁸Toda teoria física possui um escopo de validade, isto é, um conjunto de condições e situações sob o qual suas previsões são assertivas. No caso de campos gravitacionais intensos as leis newtonianas desviam significativamente do observacional, devendo ser substituída pela Teoria da Relatividade Geral.

²⁹Um compilado das fotografias da expedição pode ser encontrada no artigo da Ref. [63].

Embora cada teste³⁰ tenha sua importância histórica, neste texto, concentraremos nossa análise nos cálculos subjacentes à precessão do periélio de Mercúrio, uma vez que a predição newtoniana falha completamente em sua descrição. Esta discrepância é particularmente notável e serve como um ponto focal para a compreensão das implicações revolucionárias da Relatividade Geral de Einstein. Enquanto os detalhes dos outros testes podem ser facilmente encontrados na literatura padrão de Relatividade, discutidos na teoria e/ou exercícios, a precessão do periélio de Mercúrio destaca-se como um exemplo singular que ilustra vividamente as limitações do paradigma newtoniano e a necessidade premente de uma nova teoria gravitacional para explicar fenômenos observacionais precisos. Portanto, dedicaremos nossa análise a esse fenômeno específico, delineando os fundamentos teóricos e os cálculos meticulosos que sustentam a predição relativística.

2.5.1 *Precessão do periélio de Mercúrio*

O movimento planetário descrito pela força gravitacional de Newton aliado das três leis de Kepler, revelam que os planetas executam órbitas fechadas no perfil de elipses limitadas em um plano³¹. Contudo, ao observar a trajetória de Mercúrio constata-se um desvio não previsto pela mecânica newtoniana. O que se observa é que a órbita não se fecha, mas executa um sutil movimento de precessão. Tal movimento não é previsto pelas leis newtonianas e ocorre devido à proximidade do planeta ao centro atrator do Sistema Solar.

Neste caso, como o interesse é para um movimento na região exterior de um corpo massivo, pode-se empregar a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.60)$$

em que $2m = R_S$ e $c = 1$. Note que a assinatura da métrica não condiz com a utilizada previamente nesse texto (2.48), esta mudança temporária será empregada com o único propósito de tornar a verificação destas aplicações suficientemente próxima das utilizadas em artigos da área. Contudo é importante frisar que os resultados de natureza física não são alterados pela escolha da assinatura³².

³⁰A rigor, o desvio gravitacional para o vermelho (*redshift*) da luz é um teste do princípio da equivalência de Einstein, enquanto os outros dois são testes da Relatividade Geral (solução de Schwarzschild) no limite do campo fraco.

³¹Isto sendo consequência imediata da conservação do momento angular.

³²Para uma leitura acerca da assinatura da métrica, mas em um contexto de Relatividade Restrita, leia o artigo [66] recentemente publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física.

As equações de movimento para cada coordenada são

$$\frac{dt}{ds} = \kappa e^{-\lambda}, \quad (2.61a)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda-\nu} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\nu'}{2} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-\nu} \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (2.61b)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (2.61c)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = h, \quad (2.61d)$$

em que κ e h são constantes, com a última sendo relacionada ao momento angular. Os termos exponenciais são notações compactas e muito empregadas na literatura para descrever os termos da métrica esféricamente simétrica, em que $e^\lambda = g_{tt}$ e $e^\nu = g_{rr}$. Se fixarmos as seguintes condições iniciais

$$\theta \Big|_{t=0} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.62a)$$

$$\frac{d\theta}{ds} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.62b)$$

na Eq. (2.61c) revela que

$$\frac{d\theta}{ds} = \text{constante} = 0, \quad (2.63)$$

e, portanto, θ não varia, fazendo com que a órbita esteja confinada em um plano. Uma vez que o sistema de referência sempre pode ser ajustado para satisfazer (2.62a), então este resultado pode sempre ser obtido. Sistemas dessa natureza são conhecidos por terem o momento angular como constante de movimento.

O desenvolvimento seguinte consiste em aplicar as equações (2.61a), (2.61d) e (2.63) em (2.61b) e obter a trajetória $r = r(\phi)$. Uma outra forma é partir do elemento de linha (2.60), “dividindo-o” por ds^2 e utilizar os resultados obtidos nessa subseção, bem como o fato de

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}, \quad (2.64)$$

que é uma aplicação da regra da cadeia, para obtermos

$$\kappa^2 - h^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{h^2}{r^2} + 1\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (2.65)$$

além disso, note que,

$$\frac{d}{d\phi} \left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}, \quad (2.66)$$

e tomando uma mudança de variável³³ $u = 1/r$, obtemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{h^2} + \left(u^2 + \frac{1}{h^2}\right)(2mu - 1). \quad (2.67)$$

Por fim, diferenciando a equação em relação à variável angular ϕ , obtemos a equação diferencial que descreve o movimento de uma massa ao redor de um centro atrator segundo a Relatividade Geral,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2, \quad (2.68)$$

um resultado extremamente similar ao obtido pelo formalismo newtoniano, exceto pela presença do termo quadrático ($3mu^2$), que torna a equação não linear. Nesse sentido, é esperado que o termo quadrático seja o responsável pela correção relativística no movimento planetário.

O método para resolver esta equação diferencial é tomar a solução newtoniana como uma primeira aproximação ($u^{(0)}$) e, então, tomar uma série perturbativa,

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots, \quad (2.69)$$

em que $u^{(j)}$ é obtido pelo termo imediatamente anterior $u^{(j-1)}$. Como $u^{(0)}$ é a solução não relativística, então deve ser a solução da equação

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{h^2}, \quad (2.70)$$

cujas solução é conhecida, a equação da elipse em coordenadas polares

$$u^{(0)} = \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)], \quad (2.71)$$

em que $e = h^2/r_0 m - 1$, com r_0 sendo o periélio. Como a posição angular inicial ϕ_0 do periélio pode sempre ser ajustada por mudança de coordenadas, fixemos $\phi_0 = 0$, assim

$$u^{(0)} = \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\phi)], \quad (2.72)$$

sendo esta a solução de grau zero.

O termo de primeira ordem será então solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} &= 3m (u^{(0)})^2 \\ \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} &= \frac{3m^3}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4} e \cos \phi + \mathcal{O}(e^2), \end{aligned} \quad (2.73)$$

como a excentricidade das órbitas planetárias assumem valores pequenos, então $\mathcal{O}(e^2) \rightarrow 0$. Além disso, no aspecto dinâmico a constante $3m^3/h^4$ não é relevante, pois pode ser absorvida

³³Esta mudança de variável é muito comum em problemas esfericamente simétricos.

através de uma mudança de coordenadas, dessa forma a EDO se torna

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4} e \cos \phi, \quad (2.74)$$

cuja solução deve ser linearmente independente à $u^{(0)}$, portanto

$$u^{(1)} = A\phi \operatorname{sen}\phi, \quad (2.75)$$

em que a constante A pode ser determinada substituindo a solução (2.75) na (2.74), assim

$$u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4} e\phi \operatorname{sen}\phi. \quad (2.76)$$

O próximo passo é tomar a solução de 1ª ordem para construir a de 2ª ordem, contudo para o caso de Mercúrio, considerar até 1ª ordem é suficiente diante dos dados observacionais.

Portanto,

$$u = \frac{m}{h^2} \left(\frac{3m^2}{h^2} \phi e \operatorname{sen}\phi + 1 + e \cos \phi \right). \quad (2.77)$$

A presença de termos aditivos das funções trigonométricas nos convida à definir um novo parâmetro

$$\Delta\phi \equiv \frac{3m^2}{h^2} \phi, \quad (2.78)$$

de modo que como $m \propto G/c^2$ e $h \propto r^2$, então $\Delta\phi \ll 1$, de modo que valem as relações,

$$\Delta\phi \operatorname{sen}\phi \approx \operatorname{sen}\Delta\phi \operatorname{sen}\phi, \quad (2.79a)$$

$$\cos \phi \approx \cos \Delta\phi \cos \phi, \quad (2.79b)$$

portanto, como $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$,

$$u = \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \Delta\phi)], \quad (2.80)$$

note que esta solução é análoga à obtida pelo método newtoniano, contudo como $\Delta\phi \propto \phi$ então $\Delta\phi$ é uma variável dinâmica³⁴ e, portanto, agrega com o tempo. Fisicamente, isso faz com que o periélio de Mercúrio execute um movimento de precessão e, portanto, a órbita do planeta não é fechada, um resultado não previsto usando as leis newtonianas da gravitação.

O planeta encontra-se no periélio quando r é mínimo e, por consequência, quando u é máximo, assim $\phi - \Delta\phi = 2\pi$, portanto

$$\phi = 2\pi \left(1 - \frac{3m^2}{h^2} \right) = 2\pi - \delta\phi, \quad (2.81)$$

³⁴Caso $\Delta\phi$ não fosse uma variável dinâmica o termo corretivo não teria importância do ponto de vista físico, representando apenas uma mudança geométrica da posição inicial do periélio.

em que $\delta\phi$ é a variação no periélio, dado por

$$\delta\phi = 6\pi \frac{m^2}{h^2} = 6\pi GM \frac{GM}{h^2}, \quad (2.82)$$

definindo o *semi-latus rectum* (parâmetro elíptico³⁵)

$$\Upsilon \equiv \frac{h^2}{GM} = (1 - e^2)a, \quad (2.83)$$

em que a é o semi eixo maior da órbita, então

$$\delta\phi = 6\pi \frac{GM}{\Upsilon}. \quad (2.84)$$

Para o caso da órbita de Mercúrio, temos que $GM \approx 1475$ km e $\Upsilon \approx 55,3 \cdot 10^6$ km, então

$$\delta\phi \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{rad (por revolução)}, \quad (2.85)$$

para um melhor dimensionamento desse valor, é usual considerar sua medida dada em segundos de arco. Além disso, como cada revolução leva 0,241 anos, então em um século a órbita precessiona apenas

$$\delta\phi_{\text{século}} \approx 43''. \quad (2.86)$$

2.6 Efeitos da constante cosmológica: A solução de Kottler

Inicialmente proposta como uma forma de contrabalançar a gravidade e permitir um universo estático [67], a constante cosmológica Λ foi posteriormente reinterpretada no contexto da expansão acelerada do universo, descoberta em observações de supernovas distantes [45]. Este termo adicional nas equações de Einstein é associado à energia do vácuo ou energia escura [68], uma forma de energia que permeia todo o espaço e influencia a dinâmica do universo em grande escala [69]. Assim, as ECE's se tornam

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.87)$$

a qual, seguindo os mesmos passos³⁶ da Seção 2.4 fornece, como solução das equações de vácuo,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)} + r^2 d\Omega, \quad (2.88)$$

³⁵O *semi-latus rectum* de uma elipse é definido como o segmento de reta perpendicular ao semi eixo maior, que conecta um dos focos à elipse.

³⁶Uma maneira alternativa de se obter a solução com constante cosmológica é apresentada na Seção 9.1 do livro-texto do Professor Cheng[44], ao definir a constante cosmológica em termos de um tensor energia-momento do vácuo, em que a pressão é negativa.

que na literatura é conhecida como solução de Kottler [70]. Vale ressaltar que quando a constante cosmológica é positiva ($\Lambda > 0$) o espaço é chamado de “Espaço de Sitter” e quando ela é negativa ($\Lambda < 0$) o espaço é dito “Espaço anti-de Sitter” [6].

A solução para o caso com constante cosmológica revela algumas importantes propriedades:

- A solução de Schwarzschild é imediatamente recuperada quando $\Lambda = 0$;
- A métrica deixa de ser assintoticamente plana no infinito ($r \rightarrow \infty$) e, portanto, não é possível garantir a unicidade da solução via Teorema de Birkhoff;
- Experimentalmente os dados da radiação cósmica de fundo indicam Λ muito pequeno (da ordem de $10^{-47} GeV^4$) e, portanto, as soluções de Schwarzschild e de Schwarzschild-de Sitter são suficientemente próximas para pequenos valores de r ;
- À medida que r cresce as diferenças se tornam perceptíveis, por exemplo nos cones de escape dos fótons e nos diagramas de mergulho [71];
- A solução de Schwarzschild-de Sitter apresenta dois horizontes de eventos

$$R_{SdS\pm} = \frac{3 \pm 3\sqrt{1 - \frac{8\Lambda GM}{3}}}{2\Lambda}, \quad (2.89)$$

em que R_{SdS+} e R_{SdS-} são os horizontes “cosmológico” e de “Schwarzschild”.

No desenvolvimento final do Capítulo 4 veremos os efeitos dessas propriedades nas soluções de buracos de minhoca com constante cosmológica, em particular a existência de um horizonte de eventos do tipo de Sitter.

2.7 Condições de Energia em Relatividade Geral

Um último tópico fundamental a ser abordado neste capítulo introdutório sobre fundamentos da Relatividade Geral são as condições de energia. Estas são de suma importância para garantir que a teoria respeite comportamentos físicos coerentes em relação à matéria e à energia³⁷. As condições de energia impõem restrições ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, assegurando que a energia seja sempre não negativa e que a causalidade seja preservada no universo físico. As principais condições incluem [3]:

³⁷A rigor, as condições de energia não são demonstráveis, pois são essencialmente restrições no tensor energia-momento que se consideram válidas para toda matéria fisicamente plausível. Elas representam uma suposição sobre a definição precisa de ‘razoabilidade física’.

- Condição fraca de energia (*Weak Energy Condition*, WEC) expressa a suposição de que a densidade de energia medida por qualquer observador em uma curva temporal deve ser não-negativa:

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (2.90)$$

em que t^μ é um conjunto de vetores tipo tempo.

- Condição forte de energia (*Strong Energy Condition*, SEC) exige a positividade de uma densidade de energia efetiva medida por qualquer observador em uma curva temporal:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{D-2} g_{\mu\nu} \right) t^\mu t^\nu \geq 0. \quad (2.91)$$

- Condição de energia dominante (*Dominant Energy Condition*, DEC) exige que o fluxo de energia-momento medido por um observador seja causal e na direção do tempo próprio do observador:

$$T_{\mu\nu}t^\mu \xi^\nu \geq 0, \quad (2.92)$$

em que t^μ e ξ^μ são vetores tipo tempo co-orientados.

- Condição nula de energia (*Null Energy Condition*, NEC) é uma variação da WEC, com o vetor tipo tempo sendo substituído por um vetor nulo k^μ :

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (2.93)$$

Embora essas condições possam parecer inicialmente desconectadas, é crucial destacar que há relações de causalidade: uma vez que uma delas é atendida, isso implica na outra que a segue. No contexto das condições discutidas, observamos que a Condição de Energia Dominante (DEC) implica na Condição Fraca de Energia (WEC), que por sua vez implica na Condição Nula de Energia (NEC). Além disso, a Condição Forte de Energia (SEC) implica na NEC³⁸. Portanto, a NEC é considerada a condição mais fraca entre as quatro, sendo sua violação relevante em certas soluções específicas como será evidenciado nos próximos capítulos.

As equações ilustradas em cada caso acima representam o que a literatura denomina por forma física das condições de energia, pois envolvem o tensor energia-momento. Alternativamente, é possível escrevê-las em termos dos tensores de Ricci $R_{\mu\nu}$ e de Einstein $G_{\mu\nu}$ em uma forma denominada geométrica. A tabela abaixo sumariza as condições de energia citadas da RG, em suas formas física e geométrica, bem como as condições aplicadas ao caso do fluido perfeito, isto é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (2.94)$$

³⁸Apesar do nome, a SEC não implica a WEC, embora seja geralmente mais facilmente violada [3].

Condição	Forma física	Forma geométrica	Fluido perfeito
WEC	$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$	$G_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$	$\rho \geq 0$ e $\rho + P \geq 0$
SEC	$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{D-2}g_{\mu\nu}\right)t^\mu t^\nu \geq 0$	$R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$	$\rho + P \geq 0$ e $(D-3)\rho + (D-1)P \geq 0$
DEC	$T_{\mu\nu}t^\mu \xi^\nu \geq 0$	$G_{\mu\nu}t^\mu \xi^\nu \geq 0$	$\rho \geq P $
NEC	$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$	$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$	$\rho + P \geq 0$

Tabela 2: As principais condições de energia pontuais resumidas. Aqui t^μ e ξ^μ são vetores tipo tempo co-orientados e k^μ é um vetor nulo. Fonte: Modificada da Ref. [3]

em que ρ é a densidade de energia, P é a pressão e u^μ é a 4-velocidade do fluido, satisfazendo $u^\mu u_\mu = -1$. Nos capítulos seguintes, será mostrado que uma classe específica de soluções da Relatividade Geral infringe todas as condições de energia previamente discutidas, exigindo a apresentação de novas condições para descrever adequadamente o tipo de matéria exótica necessária.

3 SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCAS PERCORRÍVEIS

Neste capítulo buscaremos discutir os principais elementos do artigo seminal de Morris e Thorne[21] sobre os buracos de minhoca percorríveis¹. Buracos de minhoca são soluções para as Equações de Einstein e representam estruturas topológicas com uma garganta conectando duas regiões assintoticamente planas² do espaço-tempo [18].

3.1 Condições desejadas para um buraco de minhoca

Em síntese, algumas condições são desejadas para que se tenha um buraco de minhoca dito atravessável, a saber [21]

1. Critérios básicos:

- (a) A métrica deve ser esféricamente simétrica e estática (independente do tempo). Este requisito é imposto apenas para simplificar os cálculos;
- (b) A solução deve obedecer em todos os lugares às equações de campo de Einstein. Nós assumimos a validade da teoria da Relatividade Geral;
- (c) Para ser um buraco de minhoca a solução deve ter uma garganta que conecte duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo;
- (d) Não devem haver horizontes de eventos, pois caso contrário a viagem de mão dupla não seria permitida;

2. Critérios de usabilidade:

- (a) As forças gravitacionais de maré experimentadas por um viajante devem ser suportavelmente pequenas, garantindo a sobrevivência do mesmo;
- (b) Um viajante deve ser capaz de atravessar o buraco de minhoca em um tempo adequado finito e razoavelmente pequeno (por exemplo, menos de um ano), medido não apenas por ele mesmo, mas também por observadores que ficam para trás ou que o esperam fora do buraco de minhoca;

3. Critérios extras:

¹Na literatura, também é comum o uso do termo “atravessáveis”.

²Essa condição do limite minkowskiano no infinito pode ser relaxada em alguns cenários, como veremos no próximo capítulo.

- (a) A matéria e os campos que geram a curvatura do espaço-tempo do buraco de minhoca devem ter um tensor de tensão-energia fisicamente razoável³;
- (b) A solução deve ser perturbativamente estável, especialmente quando uma nave espacial passa;
- (c) Deve ser possível criar o buraco de minhoca, isto é, a criação deve exigir muito menos do que a massa do universo e muito menos tempo do que a idade do universo.

Assim sendo, uma solução que obedeça aos “critérios básicos” é, por construção um buraco de minhoca atravessável. Os “critérios de usabilidade”, por outro lado, fornecem um aspecto favorável (no contexto fisiológico) à travessia por humanos. Os demais critérios são colocados como extras⁴, em particular o critério (3a) fornece uma maneira estética de ajustarmos os parâmetros do buraco de minhoca com a finalidade de tornar o material de sua construção o mais compatível possível com os preceitos atuais sobre as formas de matéria permitidas pelas leis da Física.

3.2 Solução de Morris-Thorne

Com base nos critérios estabelecidos anteriormente, Morris e Thorne[21] obtiveram uma solução compatível. Tal solução, como veremos, apresentará dois parâmetros inicialmente arbitrários⁵.

A primeira condição desejada a solução de buracos de minhoca é de que a mesma seja estática e esfericamente simétrica, assim (considerando $c = 1$)

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

em que $\Phi(r)$ e $b(r)$ são funções inicialmente arbitrárias que obedeçam às Equações de Einstein, denominadas função de *redshift* (por determinar o *redshift* gravitacional) e de *shape* (por determinar a forma geométrica - do inglês, *shape* - do buraco de minhoca).

No aspecto histórico, é importante destacar que a solução de Ellis-Bronnikov (EB) foi a primeira solução conhecida de buracos de minhoca, anterior à solução de Morris-Thorne. A solução EB é caracterizada pela escolha específica das funções de *redshift* e de *shape* [19,20]

³Veremos, ao longo deste capítulo, que as condições anteriores restringem a forma do tensor-momento energia, de modo que o mesmo viola o que geralmente se entende por “fisicamente razoável” [72].

⁴É importante destacar que, em seu trabalho original, Morris e Thorne[21] não estabelecem a categoria dos critérios extras.

⁵Lembre-se que a métrica esfericamente simétrica (2.38) possui essas duas funções que caracterizam g_{00} e g_{11} , respectivamente.

$$\Phi(r) = 0, \quad (3.2a)$$

$$b(r) = \frac{r_0^2}{r}, \quad (3.2b)$$

no entanto, não foi realizada uma análise detalhada da atravessabilidade desses buracos de minhoca. É importante notar que os buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov são uma classe particular que não apresenta forças de maré (*redshift* nulo), tornando-os distintos de outras soluções conhecidas. No próximo capítulo, será explorada uma conexão entre essa solução e os buracos de minhoca de Casimir.

Com a métrica proposta podemos obter os símbolos de Christoffel não nulos

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \Phi', & \Gamma^1_{00} &= \frac{e^{2\Phi}\Phi'}{r}(r-b), & \Gamma^1_{11} &= \frac{rb' - b}{2r^2(r-b)}, \\ \Gamma^1_{22} &= b - r, & \Gamma^1_{33} &= -(r-b)\text{sen}^2\theta, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\text{sen}\theta \cos\theta, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \cot\theta. \end{aligned}$$

Assim, as componentes do tensor de Ricci não triviais são

$$R_{00} = \frac{e^{2\Phi}}{2r^2} [2(r-b)(r\Phi'' + \Phi'(r\Phi' + 2)) - (rb' + b)\Phi'], \quad (3.3a)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2r^2(r-b)} [2r^2(r-b)(\Phi'^2 + \Phi'') - (rb' - b)(2 - r\Phi')], \quad (3.3b)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2r} [rb' + b - 2r(r-b)\Phi'], \quad (3.3c)$$

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2\theta. \quad (3.3d)$$

O desenvolvimento matemático, bem como as interpretações físicas podem ser mais facilmente obtidos escrevendo as quantidades em termos de uma base vetorial ortonormal (o quadro de referência próprio), em que [73]

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r \text{sen}\theta)^{-1}\mathbf{e}_\phi, \quad (3.4)$$

portanto, nessa base as componentes não nulas do tensor de Einstein são escritas como [21]

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{b'}{r^2}, \quad (3.5a)$$

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r}, \quad (3.5b)$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = G_{\hat{3}\hat{3}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right), \quad (3.5c)$$

assim, dada uma distribuição de matéria, será possível formar um buraco de minhoca se a solução

de $b(r)$ e $\Phi(r)$ for condizente com as condições desejadas.

3.2.1 As Equações de Einstein

Como discutimos ao longo do Capítulo 2, o Teorema de Birkhoff garante que a solução esfericamente simétrica é a mesma do vácuo, a de Schwarzschild. Conseqüentemente não é possível gerar buracos de minhoca atravessáveis em que $T_{\mu\nu} = 0$ ⁶. Uma vez que a métrica é diagonal isso se espelha nos tensores obtidos a partir dela e, como $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$ pelas ECE's, então $T_{\mu\nu}$ é diagonal, além disso $T_{22} = T_{33}$. Por estarmos trabalhando em uma base em que o observador permanece estático, então [18]

$$T_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

em que $\rho(r)$ denota a densidade de energia⁷, $\tau(r)$ denota a tensão radial⁸ e $p(r)$ denota a pressão tangencial⁹. Portanto, as ECE's são escritas como

$$b' = \kappa\rho r^2, \quad (3.7a)$$

$$\Phi' = \frac{1}{2r(r-b)} [b - \kappa\tau r^3], \quad (3.7b)$$

$$\tau' = (\rho - \tau)\Phi' - \frac{2}{r}(\tau + p), \quad (3.7c)$$

esta última equação pode ser interpretada como a lei de conservação do fluido, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ [6]. Essa última equação torna-se relativamente mais simples se comparado à forma padrão de G_{22} que depende das derivadas de $b(r)$ e $\Phi(r)$.

Um ponto a se destacar é de que as ECE's constituem um conjunto de três EDO's envolvendo cinco funções da posição, a função de *shape* $b(r)$, a função de *redshift*, a densidade de energia $\rho(r)$, a tensão radial $\tau(r)$ e a pressão tangencial $p(r)$. A priori não é possível determinar todas as funções em termos de r . A maneira convencional de resolver esse problema é especificar o tipo de matéria ou campo que gera o buraco de minhoca, através de Equações de Estado (do inglês *Equation of State*, EoS), do tipo $\tau = \tau(\rho)$ e $p = p(\rho)$. Uma outra maneira de resolver o problema é fixar a forma de $b(r)$ e $\Phi(r)$ e então obter as componentes de $T_{\mu\nu}$, buscando fazê-las consistentes com as leis da Física. No primeiro caso fixamos a matéria

⁶A partir deste ponto, serão omitidos os circunflexos; contudo, a base de vetores utilizada permanece sendo ortonormal. Caso retornemos à base usual, a menção será feita explicitamente no texto.

⁷Note que, nas dimensões usuais, $T_{00} = \rho c^2$.

⁸Em alguns trabalhos [1, 38, 40], é comum encontrar o tensor energia-momento em termos da pressão radial $p_r(r) = -\tau(r)$.

⁹Nos casos em que T_{11} é denominado pressão, usa-se $T_{22} = p_t$.

e obtemos a geometria, o que pode ocasionar em uma solução que não atenda aos critérios para que o mesmo seja atravessável, por outro lado o segundo método fixa a geometria e obtemos a matéria, o que pode ocasionar em uma distribuição de matéria-energia não usual.

3.2.2 Aspectos Geométricos

Uma vez que um buraco de minhoca é, por construção, uma estrutura que conecta duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo, então devemos verificar os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0, \quad (3.8b)$$

de modo que no limite assintótico se tenha a solução de Minkowski¹⁰.

A maneira adequada de visualizar a geometria de um buraco de minhoca, bem como outras soluções da RG, é através dos diagramas de mergulho (do inglês *embedding*), no qual consideramos uma fatia bidimensional do espaço-tempo e a mergulhamos em um espaço tridimensional [6]. Essa fatia bidimensional, devido a simetria esférica, pode ser tal que $t = \text{const.}$ e $\theta = \pi/2$, portanto

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3.9)$$

assim, se tomarmos um espaço tridimensional em coordenadas cilíndricas¹¹,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3.10)$$

em que z é a direção azimutal ao plano (r, φ) . Devido a simetria, $z = z(r)$ e, portanto,

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3.11)$$

por comparação direta com a Eq. 3.9, temos que

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-1/2}, \quad (3.12)$$

em que o sinal “ \pm ” indica de qual lado do buraco de minhoca se está. Assim, dado $b(r)$ que caracterize um buraco de minhoca, $z(r)$ representará a forma de visualizá-lo bidimensionalmente. Contudo, pela simetria azimutal, podemos rotacioná-lo de $\varphi = [0, 2\pi]$ e obter a representação tridimensional do buraco de minhoca (uma representação pictórica está descrita na Fig. 5). Por

¹⁰A priori, o limite assintótico não precisa ser nulo; basta que seja constante, podendo ser absorvido em uma redefinição das coordenadas.

¹¹A superfície de mergulho deve ser axialmente simétrica [7].

outro lado é necessário fixar condições de contorno para resolver a integração.

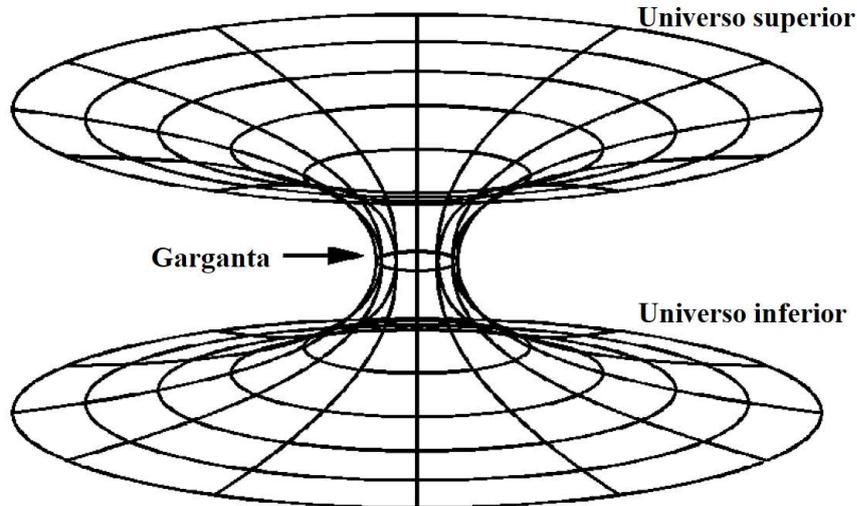


Figura 5: Diagrama de mergulho (esquemático) do buraco de minhoca de Morris-Thorne. Fonte: Adaptado de Muller[5].

A característica central de um buraco de minhoca é a existência de um raio mínimo, r_0 , denominado garganta (do inglês *throat*), neste ponto a reta tangente à curva $z(r)$ é vertical e, portanto, a derivada diverge,

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dz}{dr} \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

assim, devemos ter que

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right) = 0, \quad (3.14)$$

portanto, devemos ter $b(r_0) = r_0$ como condição de contorno da função de *shape*.

Por outro lado, se pensarmos no problema inverso $r = r(z)$, então a garganta representa um ponto mínimo da função e, portanto, a derivada segunda deve ser positiva, isto é

$$\frac{d^2 r}{dz^2} > 0, \quad (3.15)$$

assim, derivando o inverso da Eq. (3.12), obtemos

$$\frac{b(r) - b'(r)r}{b^2(r)} > 0, \quad (3.16)$$

a esta condição dá-se o nome de *flare-out*.

As restrições estabelecidas sobre $b(r)$ e $\Phi(r)$ são convertidas em restrições sobre $T_{\mu\nu}$, isto é, sobre $\rho(r)$, $\tau(r)$ e $p(r)$. Definamos a função de exotividade

$$\zeta(r) \equiv \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|}, \quad (3.17)$$

aplicando as ECE's, obtemos então que

$$\zeta(r) = \frac{2b^2(r)}{|b'(r)|r} \frac{d^2r}{dz^2} - 2(r - b(r)) \frac{\Phi'(r)}{|b'(r)|}, \quad (3.18)$$

note que, na garganta ($r = r_0$) o segundo termo desaparece, fazendo com que o sinal de $\zeta(r)$ seja o mesmo da derivada segunda, portanto

$$\zeta(r_0) = \frac{\tau(r_0) - \rho(r_0)}{|\rho(r_0)|} > 0, \quad (3.19)$$

a esta restrição também dá-se o nome *flare-out*. Observe que essa condição implica $\tau(r_0) > \rho(r_0)$. Portanto, na garganta, a tensão radial é maior do que o conteúdo de energia que gera o buraco de minhoca, violando a condição fraca de energia [24]. A esse tipo de matéria dá-se o nome de “exótica”. Essa terminologia surge porque um observador movendo-se pela garganta com velocidade suficientemente grande verá necessariamente uma densidade de massa-energia negativa [74].

4 BURACOS DE MINHOCA DE CASIMIR

Neste capítulo discutiremos as condições de existência para os buracos de minhoca de Casimir, inicialmente para espaços-tempo de dimensão arbitrária. Esta discussão foi compilada em um artigo publicado do autor [40]. Além disso, discutiremos em detalhes a relação com o caso particular, $D = 4$, que foi obtido por Garattini [1], e que foi a motivação para esta pesquisa. Por fim, discutiremos brevemente sobre os efeitos da constante cosmológica como fonte adicional de matéria-energia do buraco de minhoca.

4.1 A Energia de Casimir

Vimos no Capítulo anterior que, dadas restrições adequadas sobre as funções que caracterizam a métrica do buraco de minhoca, é necessário um tipo especial de matéria, denominada exótica, que possui densidade de energia negativa, $\rho(r) < 0$. Embora o conceito de densidade de massa-energia negativa seja inconcebível dentro da Teoria da Relatividade Geral, por outro lado campos quânticos, em condições específicas, podem ter energia negativa, por exemplo a energia de Casimir. Em linhas gerais, campos quânticos permeiam todo o espaço-tempo e oscilações dos próprios campos são entendidas como partículas, por exemplo o fóton é uma oscilação do campo eletromagnético.

O efeito Casimir ocorre quando duas placas planas¹, condutoras, paralelas, descarregadas e com espaçamento muito próximo encontram-se no vácuo [1]. Como as placas são neutras então não há força elétrica entre elas, a força gravitacional entre elas é totalmente desprezível com o uso de suportes, bem como quaisquer interferências externas, como por exemplo vibrações mecânicas [76]. Embora o esperado fosse de que nada ocorreria, a presença dos campos quânticos e oscilações em intervalos curtos de tempo fazem com que haja uma força atrativa entre as placas.

Casimir, em seu manuscrito seminal [77], mostrou que a distribuição de energia que aparece é²

$$\rho_C = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4}, \quad (4.1)$$

em que a é a separação das placas e \hbar é a constante reduzida de Planck. Essa densidade de energia gera uma pressão que obedece a uma Equação de Estado (do inglês *Equation of State*,

¹Historicamente, o efeito Casimir foi inicialmente detectado dessa maneira. No entanto, é importante destacar que ele ocorre em diversas geometrias, como em cascas esféricas concêntricas [75], por exemplo.

²Como o desenvolvimento explícito do tensor energia-momento de Casimir a partir das flutuações do vácuo foge ao escopo deste trabalho, esses detalhes serão omitidos nesta tese. Os leitores interessados podem consultar a Ref. [78] para uma explicação detalhada.

EoS) do tipo

$$p_C = 3\rho_C. \quad (4.2)$$

4.2 Solução em D dimensões

Nesta seção, iremos estudar as condições de existência de buracos de minhoca atravessáveis gerados pela energia de Casimir para espaços-tempo de dimensão arbitrária³. Soluções de buracos de minhoca tem sido amplamente estudados no contexto de dimensões extras [79–81]. Uma vez que, como discutido no Capítulo 3 desta Tese, a solução de Morris-Thorne é SSS, então a métrica, para D dimensões é (fazendo $c = 1$) [21, 82–84]

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (4.3)$$

onde $d\Omega_{D-2}^2$ é o elemento de linha de uma esfera unitária em $D - 2$ dimensões [83], $\Phi(r)$ e $b(r)$ são, naturalmente, as funções de *redshift* e de *shape*, respectivamente. Ambas as funções são inicialmente arbitrárias de $r \in [r_0, \infty)$, em que r_0 sendo o raio da garganta do buraco de minhoca. As componentes independentes, e não nulas, das Equações de Einstein são (em uma base ortonormal)

$$\kappa_D \rho(r) = \frac{D-2}{2r^3} [(D-4)b + rb'], \quad (4.4a)$$

$$\kappa_D P_r(r) = -\frac{D-2}{2r^3} [(D-3)b + 2r(b-r)\Phi'], \quad (4.4b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_D P_t(r) = & \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + \Phi' \left(\Phi' + \frac{D-3}{r} \right) \right] - \frac{3(D-4)(D-3)}{2r^2} \\ & - \frac{rb'}{2r^2} \left[\Phi' + \frac{D-3}{r} \right] + \frac{b}{2r^2} \left[\Phi' - \frac{(D-5)(D-3)}{r} \right], \end{aligned} \quad (4.4c)$$

em que $(')$ significa derivada com relação a r , κ_D é a constante de acoplamento gravitacional em D dimensões, $\rho(r)$ é a densidade superficial de energia, $P_r(r)$ e $P_t(r)$ são as pressões radial e transversa, respectivamente.

A partir da equação de conservação, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, podemos obter a equação hidrostática para o equilíbrio da matéria que sustenta o buraco de minhoca [38]

$$P_r'(r) = \frac{2}{r} [P_t(r) - P_r(r)] - [\rho(r) + P_r(r)] \Phi'(r). \quad (4.5)$$

De acordo com a Eq. (4.4a), a condição de *flare-out*, $b'r - b < 0$, é satisfeita para qualquer dimensão se $\rho_D(r) < 0$. Como a densidade de energia de Casimir de um campo sem massa é um sistema típico com energia negativa, deve ser possível construir um buraco de minhoca, a priori, em qualquer dimensão.

³Entenda dimensão arbitrária como sendo $D = d + 1$, sendo d dimensões espaciais e 1 temporal.

Para dimensões arbitrárias, a energia de Casimir é dada por (em unidades naturais)

[85]

$$\rho(r) = -\frac{(D-2)\Gamma(D/2)\zeta_R(D)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{r^D} = -\frac{\lambda_D}{r^D}, \quad (4.6)$$

em que $\zeta_R(z)$ é a função zeta de Riemann e $\Gamma(z)$ é a função gamma. O fator $D-2$ aparece devido aos $D-2$ graus de liberdade do campo eletromagnética⁴. Fazendo $D=4$, recuperamos o resultado original [77]. Além disso, a pressão radial é dada pela Equação de Estado (do inglês *Equation of State*, EoS)

$$P_r(r) = \omega_D \rho(r) = (D-1)\rho(r), \quad (4.7)$$

em que $\omega_D = D-1$ é o parâmetro da EoS para o caso D -dimensional. Observe que, como $D > 2$ então $\omega_D > 1$ (matéria exótica⁵), satisfazendo a Condição de Energia Fraca Quântica [1], ou seja,

$$\rho(r) + P_r(r) = \rho(r)[1 + \omega_D] = -f(r), \quad f(r) > 0, \quad r > r_0, \quad (4.8)$$

para qualquer dimensão.

Para obter a função de *shape*, $b(r)$, usamos a densidade de energia de Casimir (4.6) para escrever a Eq. (4.4a) na forma

$$[r^{D-4}b(r)]' = -\frac{r_1^{D-2}}{r^2}, \quad (4.9)$$

em que, definimos

$$r_1^{D-2} \equiv \frac{2\kappa_D \lambda_D}{D-2}, \quad (4.10)$$

iremos, ao longo desta Tese, denominar r_1^{D-2} como sendo o parâmetro de Garattini, já que é a generalização do parâmetro convencionado em seu artigo.

Uma vez que o lado esquerdo da Eq. (4.9) é dado por uma derivada total, podemos integrar e ao fixar as condições de contorno para a função de *shape* na garganta, isto é, $b(r_0) = r_0$, obtemos que

$$b(r) = \frac{r_1^{D-2}}{r^{D-3}} + \frac{r_0^{D-3}}{r^{D-4}} \left[1 - \frac{r_1^{D-2}}{r_0^{D-2}} \right], \quad (4.11)$$

essa é uma generalização dimensional consistente para as funções de *shape* obtidas anteriormente na literatura para $D=3$ [2] e $D=4$ [1]. Além disso, $\lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = 0$, garantindo que a solução assintótica seja a de Minkowski.

Para computar a função de *redshift* usaremos a EoS (4.7) e a função de *shape* (4.11)

⁴Esses dois graus de liberdade reduzidos são consequência de dois fatores, a ausência de massa [86] e a simetria de calibre (*gauge*) [49].

⁵Para uma leitura acerca da relação numérica do parâmetro da equação de estado com o tipo de matéria consulte a Seção 5.1 da Ref. [87].

para escrever a Eq. (4.4b) na forma compacta

$$2r_0r^{D-2}(b-r)\Phi' = [\omega_D - (D-3)]r_0r_1^{D-2} - (D-3)[r_0^{D-2} - r_1^{D-2}]r, \quad (4.12)$$

apesar da equação acima não poder ser resolvida analiticamente para dimensões arbitrárias, podemos analisar a divergência de $\Phi(r)$. Primeiro, voltemos nossa atenção para o termo $b-r$ no lado esquerdo da Eq. (4.12), o qual pode ser fatorado como

$$b-r = -(r-r_0)\frac{P_{D-3}(r)}{r^{D-3}}, \quad (4.13)$$

em que usamos a identidade

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}a^i, \quad (4.14)$$

para $n > 0$, e definimos o polinômio de ordem $D-3$, $P_{D-3}(r)$, como

$$P_{D-3}(r) = \begin{cases} r_1r_0^{-1} & , \text{ se } D = 3, \\ r_1^{D-2}r_0^{-1} + \sum_{i=0}^{D-4}r^{D-3-i}r_0^i & , \text{ se } D > 3. \end{cases} \quad (4.15)$$

Como $P_{D-3}(r)$ possui apenas termos positivos, não possui raízes reais positivas [88], portanto não sendo um termo de divergência física. Assim, as anulações do termo $b-r$ na garganta ocorrem apenas devido ao fator $r-r_0$ no lado direito da Eq. (4.13). Então, a Eq. (4.12) assume a forma

$$\Phi' = \frac{[\omega_D - (D-3)]r_0r_1^{D-2} - (D-3)[r_0^{D-2} - r_1^{D-2}]r}{2r_0r(r-r_0)P_{D-3}(r)}. \quad (4.16)$$

Para evitar a divergência na garganta do buraco de minhoca, $r=r_0$, o polinômio de primeira ordem no numerador deve desaparecer neste ponto. Assim, devido à liberdade em fixar r_0 , obtemos

$$\omega_D = (D-3)\frac{r_0^{D-2}}{r_1^{D-2}}, \quad (4.17)$$

para $D=4$ os resultados de Garattini são recuperados [1]. Assim, observe que apenas para $D=3$, não é possível usar a fixação (4.17) para remover a divergência na Eq. (4.16), mantendo a EoS padrão (4.7). Portanto, para $D > 3$ é sempre possível usar a energia de Casimir como fonte de um buraco de minhoca atravessável e a função *redshift* é dada pela solução da seguinte EDO

$$\Phi' = \frac{(D-3)[r_0^{D-2} - r_1^{D-2}]}{2r_0rP_{D-3}(r)}. \quad (4.18)$$

Enquanto isso, devemos mostrar que a solução no limite assintótico retorna o espaço-

tempo de Minkowski, dada a definição de um buraco de minhoca. Para isso, devemos calcular

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \Phi(r_0) + \frac{(D-3)[r_0^{D-2} - r_1^{D-2}]}{2r_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r' P_{D-3}(r')}, \quad (4.19)$$

em que $\Phi(r_0)$ é uma constante de integração. De fato, como as raízes de $P_{D-3}(r)$ não são reais positivas, então o integrando não tem divergências físicas, pois $r = 0$ não está compreendido no domínio de $\Phi(r)$, portanto, para $D > 3$ a integral converge. Assim, podemos fixar $\Phi(r_0)$ para obter o espaço-tempo de Minkowski como limite assintótico.

Portanto, para todo espaço-tempo de dimensão $D > 3$, é possível construir um buraco de minhoca de Casimir atravessável do tipo Morris-Thorne, com uma função de *shape* e de *redshift* dada por

$$b(r) = \frac{(D-3)r_0^{D-2}}{\omega_D r^{D-3}} + \frac{r_0^{D-3}}{r^{D-4}} \left[\frac{\omega_D - (D-3)}{\omega_D} \right], \quad (4.20a)$$

$$\Phi'(r) = \frac{(D-3)r_0^{D-3}}{2r P_{D-3}(r)} \left[\frac{\omega_D - (D-3)}{\omega_D} \right], \quad (4.20b)$$

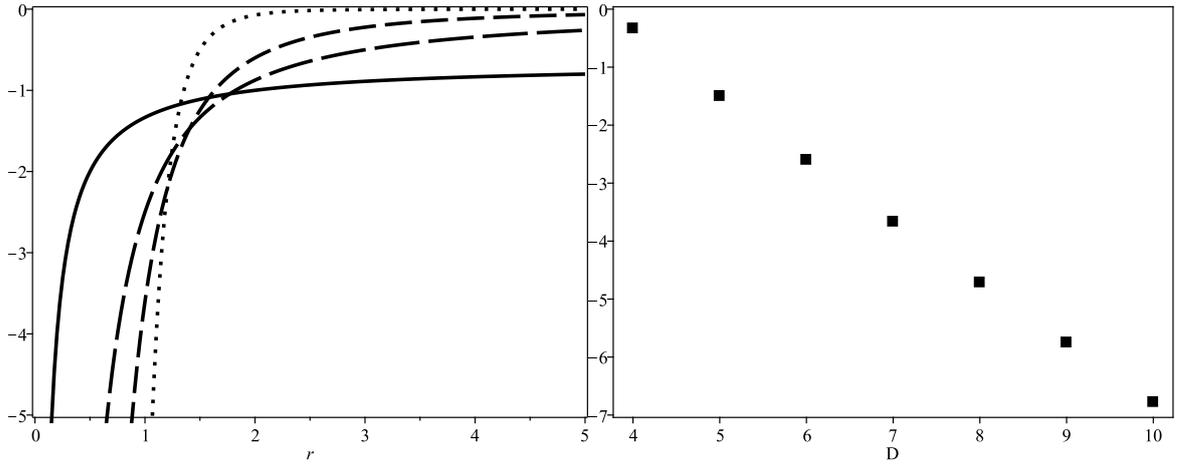
respectivamente. Para satisfazer a condição de forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$, para qualquer dimensão, a função de *shape* (4.20a), que é inversamente proporcional às potências de r , deve ser positivo definido. Portanto, a constante $\omega_D (= P_r(r)/\rho(r))$ deve ser restrita à condição $\omega_D \geq D - 3$. O limite $\omega_D = D - 3$ implica uma solução sem força de maré e, portanto, corresponde à solução de Ellis-Bronnikov [19,20]. Esta é a razão pela qual a solução EB (para $D = 4$ e $\omega = 1$) é possível de ser obtida a partir da solução dos buracos de minhoca de Casimir, como apontado por Garattini [1] em seu manuscrito.

A função de *shape* (4.20a), especificamente para buracos de minhoca de Casimir, ou seja, com $\omega_D = D - 1$, satisfaz (para qualquer $D > 3$) todas as condições necessárias para uma função de *shape* adequada: i) Condição forte de *flare-out*; ii) Condição fraca de *flare-out*; iii) Condição forte de não degenerescência radial e iv) Condição fraca de não degenerescência radial. Isso pode ser visto na Fig. (6).

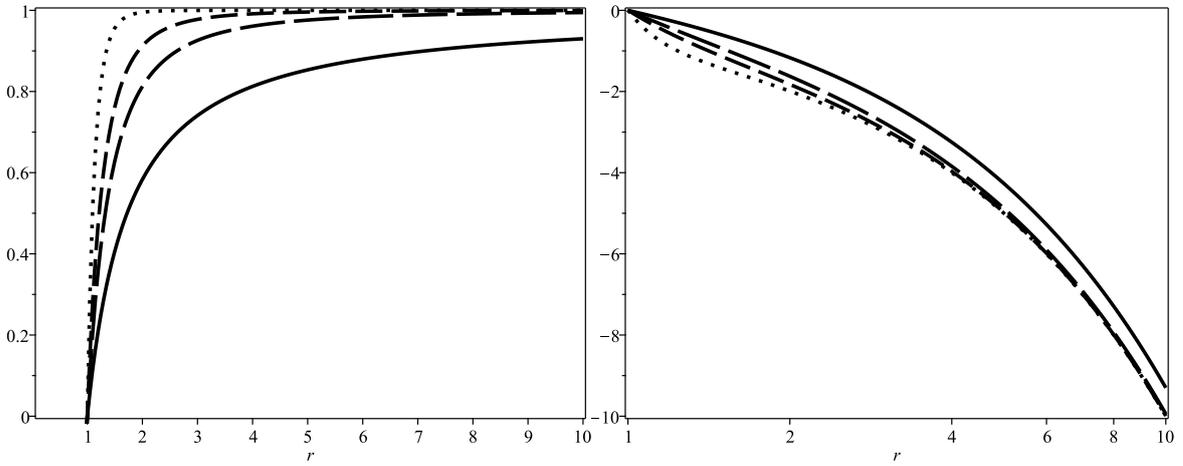
Enquanto a condição de *flare-out* (forte e/ou fraca) está associada à minimização do raio da garganta e à finitude da pressão [24], as condições de não degenerescência radial (forte e fraca) estão associadas à definição de distância própria e diagrama de mergulho. Como o domínio da coordenada radial é limitado por r_0 , definimos a distância própria, $l(r)$, uma nova coordenada que mapeia todo o espaço, por [6]

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b(r')}{r'}}} = \pm \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{\omega_D r'^{D-2}}}{\sqrt{\omega_D r' (r'^{D-3} + r_0^{D-3}) - (D-3)(r' + r_0)r_0^{D-3}}}, \quad (4.21)$$

em que o “ \pm ” depende do lado do buraco de minhoca em que se está. Observe que neste novo



((a)) Condição forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$. ((b)) Condição fraca de *flare-out*, $b'(r_0) < 1$.



((c)) Condição de não degenerescência radial forte, $1 - b(r)/r > 0$ at $r > r_0$. ((d)) Condição de não degenerescência radial forte, $b(r) - r < 0$ at $r > r_0$.

Figura 6: Condições satisfeitas pela função de *shape* (4.20a) (para $r_0 = 1$). Em (a), (c) and (d) temos $D = 4$ (linha sólida), 5 (linha longa tracejada), 6 (linha tracejada) and 10 (linha pontilhada).

sistema de coordenadas, $l(r) \in (-\infty, +\infty)$, e a posição da garganta está em $l = 0$. Por outro lado, permite obter os diagramas de mergulho, uma visualização espaço-temporal do buraco de minhoca, definida por [6]

$$z(r) \equiv \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r'}{b(r')} - 1}} = \pm \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{[\omega_D - (D-3)]r' + (D-3)r_0} dr'}{\sqrt{\omega_D r' \left(\frac{r'^{D-3}}{r_0^{D-3}} - 1 \right) + (D-3)(r' - r_0)}}, \quad (4.22)$$

para $D = 4$ resulta no diagrama encontrado na Ref. [1], porém verificamos que para $D = 5$ (ver Fig. 7a) o buraco de minhoca tende à solução de Minkowski mais rapidamente. De fato, pela Eq. (4.17), o valor do tamanho da garganta para $D = 4$ é $r_0 = 1,0166l_P$, de acordo com a literatura [1], onde l_P é o comprimento de Planck. À medida que a dimensão do espaço-tempo aumenta, o tamanho da garganta torna-se subplanckiano. A tabela 3 exemplifica o parâmetro de Garattini (r_1) e o tamanho da garganta (r_0) para alguns valores de D .

<i>Dimensão do espaço-tempo D</i>	<i>Parâmetro de Garattini $(r_1/l_P)^{D-2}$</i>	<i>Tamanho da garganta r_0/l_P</i>
4	$\pi^3/90$	1.01663
5	$3\zeta_R(5)/4\pi^2$	0.540149
6	$\pi^3/1260$	0.450020
7	$15\zeta_R(7)/16\pi^4$	0.429156
8	$\pi^3/6720$	0.451554
9	$315\zeta_R(9)/128\pi^6$	0.444341
10	$\pi^3/19008$	0.462602

Tabela 3: Alguns valores para o parâmetro de Garattini e o tamanho da garganta dos buracos de minhoca de Casimir para dimensões específicas.

Além disso, a função de *redshift* ainda depende da fixação adequada da constante de integração, a fim de garantir que o limite assintótico seja efetivamente nulo. No entanto, tal fixação não é necessária, pois é possível fazer um escalonamento na coordenada t para absorver esta constante. Podemos analisar isso em dois casos particulares, para $D = 4$ e $D = 5$ na Fig. (7).

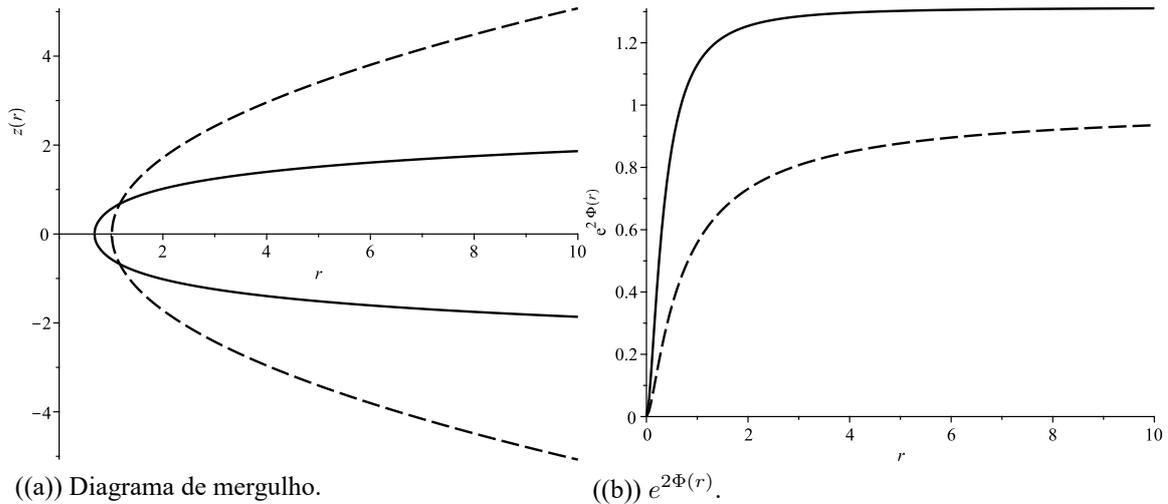


Figura 7: Comparação dos buracos de minhoca de Casimir para $D = 4$ (linha tracejada) and $D = 5$ (linha sólida).

Outra questão sobre os WHs de Casimir é a identificação dos componentes do Tensor Energia-Momento (do inglês *Stress Energy Tensor*, SET), responsável pela geração efetiva desses objetos. Fixamos hipoteticamente a forma da densidade de energia (4.6) e a pressão radial em termos da EoS (4.7), assim, através da equação de conservação (4.5) podemos determinar a pressão transversal por uma EoS não homogênea

$$P_t(r) = \Omega_D(r)\rho(r), \quad (4.23)$$

em que $\Omega_D(r)$ é dado por

$$\Omega_D(r) = -\frac{[(\omega_D + 1)(D - 3)(D - 3 - \omega_D)r_0^{D-3} + 2(D - 2)\omega_D^2 P_{D-3}(r)]}{4\omega_D P_{D-3}(r)}, \quad (4.24)$$

que evidentemente, retoma os resultados já encontrados na literatura para $D = 4$ [1]. Observe que, apenas para o caso limite de EB, a pressão transversal obedece a uma EoS homogênea, $\Omega_D^{EB} = -\omega_D(D - 2)/2$, no caso particular de $D = 4$, obtemos o esperado, $P_t(r) = -P_r(r)$. Portanto, a forma final do SET é

$$T_{\mu\nu} = \frac{(D - 2)\Gamma(D/2)\zeta_R(D)}{(4\pi)^{D/2}r^D} [\text{diag}(-1, -\omega_D, 1, 1) + [\Omega_D(r) - 1] \text{diag}(0, 0, 1, 1)]. \quad (4.25)$$

4.3 Efeitos da Constante Cosmológica

Uma possibilidade de contornar a inexistência de um Buraco de Minhoca de Casimir para $D = 3$ foi proposta por Alencar, Bezerra e Muniz[2], adicionando uma constante cosmológica no tensor momento-energia. A equação de Einstein com a constante cosmológica é modificada por,

$$R_M^N - \frac{1}{2}R\delta_M^N + \Lambda\delta_M^N = \kappa_D T_M^N, \quad (4.26)$$

onde os índices latinos variam sob as dimensões D no elemento de linha dado pela Eq. (4.3). Assim, a seguinte função de *shape* é obtida

$$\bar{b}(r) = b(r) + \frac{2\Lambda (r^{D-1} - r_0^{D-1})}{(D - 2)(D - 1)r^{D-4}}, \quad (4.27)$$

em que $b(r)$ é dado pela Eq. (4.11). Por outro lado, para contornar a divergência na função de *redshift* na garganta do buraco de minhoca, devemos fixar

$$\bar{\omega}_D = (D - 3)\frac{r_0^{D-2}}{r_1^{D-2}} - \frac{2\Lambda}{(D - 2)}\frac{r_0^D}{r_1^{D-2}}, \quad (4.28)$$

assim, se fixarmos $\bar{\omega}_D = D - 1$ que é a condição da EoS para a energia de Casimir (4.7), então obtemos uma relação entre a constante cosmológica e o raio da garganta do buraco de minhoca,

$$\Lambda(r_0) = \frac{\alpha_D}{r_0^2} - \frac{\beta_D}{r_0^D}, \quad (4.29)$$

em que $\alpha_D = (D - 3)(D - 2)/2$, e $\beta_D = 8\pi(D - 1)G_D\lambda_D$, e G_D é a constante gravitacional em D dimensões, dada por (em unidades naturais) $G_{(D=d+1)} = 2\pi^{1-d/2}\Gamma(d/2)l_P^{d-1}$ [89], e l_P é o comprimento de Planck, e λ_D é a constante da energia de Casimir definida pela Eq. (4.6). A Fig. (8) mostra o comportamento dos valores de constante cosmológica em função do raio da garganta.

Note que para $D = 3$ a constante cosmológica é necessariamente negativa, então o

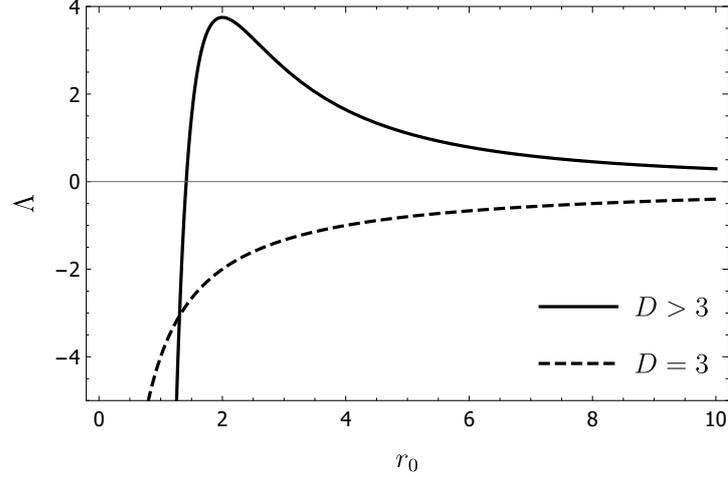


Figura 8: Relação entre a constante cosmológica, Λ , e o tamanho da garganta do buraco de minhoca de Casimir, r_0 , para $D = 3$ (linha tracejada) e $D > 3$ (linha sólida).

espaço-tempo $(2 + 1)$ -dimensional é do tipo Anti-deSitter (AdS). Por outro lado, para $D > 3$ a constante cosmológica tem uma raiz Planckiana real, caracterizando uma inversão no sinal. Assim, para buracos de minhoca com gargantas menores que $r_0 = (\beta_D/\alpha_D)^{1/(D-2)}$ a constante cosmológica é negativa, enquanto para valores maiores deve ter $\Lambda > 0$, com um valor máximo $(\alpha_D^D/\beta_D^2)^{1/(D-2)}[(4/D^2)^{1/(D-2)} - (2^D/D^D)^{1/(D-2)}]$ em $r_0 = (D\beta_D/2\alpha_D)^{1/(D-2)}$ e tendendo a zero para $r_0 \rightarrow \infty$.

Em $D = 4$ o valor da constante cosmológica é $\Lambda \approx 10^{-52}m^{-2}$ [90], então temos duas possibilidades: ou o buraco de minhoca é planckiano ($r_0 \approx 1.0186l_P$) ou macroscópico ($r_0 \approx 10^{26}m$). Assim, para a escala de energia considerada de fonte, o tamanho planckiano é a única solução fisicamente razoável, enquanto para $\Lambda < 0$ todos os buracos de minhoca são subplanckianos. Por outro lado, no contexto de uma constante cosmológica pequena (negativa) em $D = 3$, ela está necessariamente relacionada a um buraco de minhoca de tamanho macroscópico. Além disso, o limite de $|\Lambda| \rightarrow \infty$ tem o mesmo comportamento independente da dimensão, temos $r_0 \rightarrow 0$.

Embora para o caso da constante cosmológica não seja possível recuperar o limite minkowskiano (como discutido na Seção 2.6), temos espaços-tempos do tipo deSitter ou Anti-deSitter, a função de *redshift* é determinada resolvendo a seguinte EDO

$$\begin{aligned}
 -2r\bar{P}_{D-3}\bar{\Phi}' &= \frac{2\Lambda}{(D-2)} \sum_{j=0}^{D-1} r^{D-1-j} r_0^j + (D-3)r_1^{D-2}r_0^{-1} - (D-3)r_0^{D-3} \\
 &\quad - \frac{2(D-3)\Lambda r}{(D-2)(D-1)} \sum_{j=0}^{D-2} r^{D-2-j} r_0^j,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

em que redefinimos o polinômio de ordem $D - 3$ da Eq. (4.15) para

$$\bar{P}_{D-3}(r) = P_{D-3}(r) - \frac{2\Lambda}{(D-2)(D-1)} \sum_{j=0}^{D-2} r^{D-2-j} r_0^j. \quad (4.31)$$

Assim, em casos de constante cosmológica negativa, ou seja, buracos de minhoca de tamanho planckiano, $\Phi(r)$ não possui singularidades no intervalo $[r_0, \infty)$. No entanto, no contexto de $\Lambda > 0$ a função de *redshift* apresenta uma divergência caracterizada pelo horizonte de Sitter.

4.3.1 Buracos de Minhoca de Casimir em $2 + 1$ dimensões

Mostramos que considerando a existência de uma constante cosmológica além do campo de Casimir, é possível contornar a divergência na garganta do buraco de minhoca para a função de *redshift* para o caso $D = 3$. Como este caso em particular é o único que requer a existência de uma constante cosmológica não nula, vamos focar nele. Conforme mostrado na Eq. (4.29), devemos ter $\Lambda < 0$. Portanto, o parâmetro EoS nos permite escrever

$$r_1 = -2\Lambda \frac{r_0^3}{\bar{\omega}_3} = 2|\Lambda| \frac{r_0^3}{\bar{\omega}_3}, \quad (4.32)$$

então a função de *shape* é escrita como

$$\bar{b}(r) = r - |\Lambda|(r - r_0) \left(r^2 + r_0 r + \frac{2}{\bar{\omega}_3} r_0^2 \right), \quad (4.33)$$

satisfazendo a condição de contorno, $b(r_0) = r_0$, além de todas as quatro condições importantes, conforme descrito na Fig. (9).

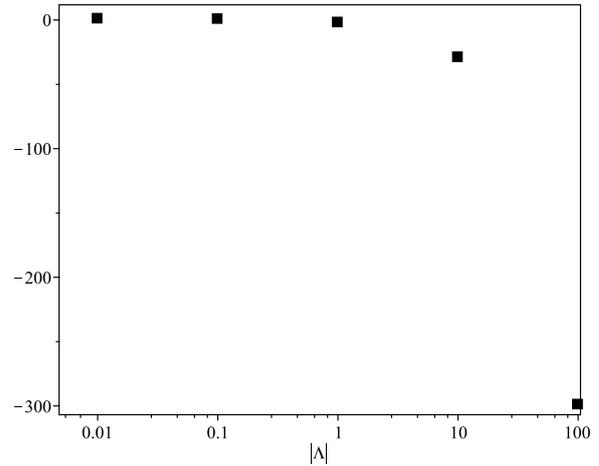
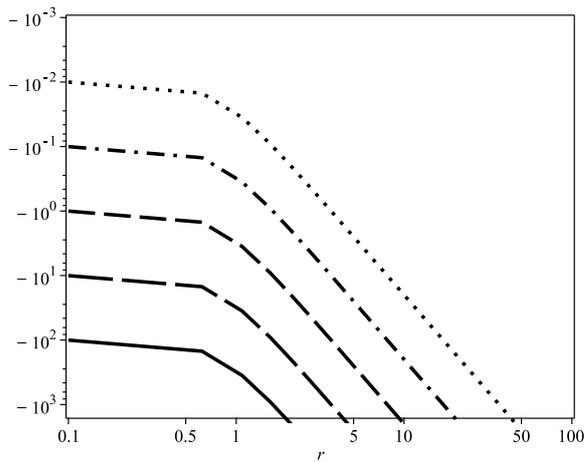
Uma consequência da existência da constante cosmológica é a perda do limite assintótico plano, que se reflete na condição de não degenerescência radial forte, que não está mais limitada entre $(0, 1]$ em $r > r_0$, em contraste com a Fig. (9c). Essa perda do limite assintótico é uma das condições que podem ser relaxadas nas soluções de buracos de minhoca, como mencionado no Capítulo 3.

Além disso, a Eq. (4.30) torna-se

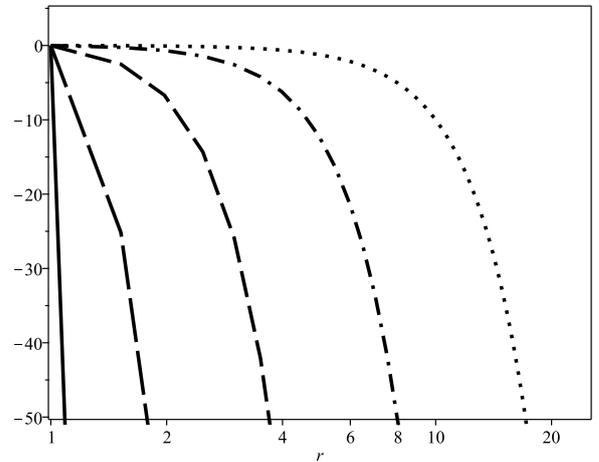
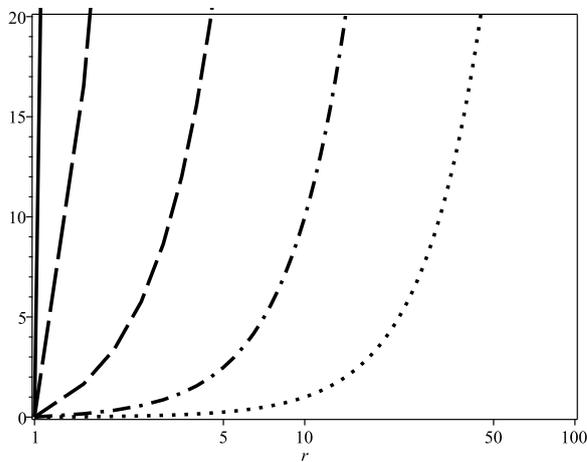
$$\bar{\Phi}'(r) = \frac{r^2 + r_0 r + r_0^2}{r \left(r + r_0 + \frac{2r_0^2}{\bar{\omega}_3} \right)}, \quad (4.34)$$

e, consequentemente, o termo da métrica associado à função de *redshift* é dado por

$$\exp(2\bar{\Phi}(r)) = [\bar{\omega}_3(r + r_0) + 2r_0^2]^{-f(\bar{\omega}_3, r_0)} r^{\frac{2\bar{\omega}_3 r_0}{\bar{\omega}_3 + 2r_0}} e^{2r}, \quad (4.35)$$



((a)) Condição forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$. ((b)) Condição fraca de *flare-out*, $b'(r_0) < 1$.



((c)) Condição de não degenerescência radial forte, $1 - b(r)/r > 0$ at $r > r_0$. ((d)) Condição de não degenerescência radial fraca, $b(r) - r < 0$ at $r > r_0$.

Figura 9: Condições satisfeitas pela função de *shape* (4.33) (para $r_0 = 1$). Em (a), (c) and (d) temos $|\Lambda| = 10^2$ (linha sólida), 10^1 (linha longa tracejada), 10^0 (linha tracejada), 10^{-1} (linha tracejada-pontilhada) e 10^{-2} (linha pontilhada).

em que

$$f(\bar{\omega}_3) = \frac{2\bar{\omega}_3 r_0 + 4\bar{\omega}_3 r_0^2 + 8r_0^3}{\bar{\omega}_3 (\bar{\omega}_3 + 2r_0)}, \quad (4.36)$$

mostrando que, embora não haja dependência explícita de Λ , perde-se o limite assintótico plano, característico da solução com a constante cosmológica $|\Lambda| < 0$. Por outro lado, na garganta, a função de *redshift* é finita.

5 BURACOS DE MINHOCAS DE YUKAWA-CASIMIR

Neste capítulo discutiremos as condições de existência para os buracos de minhoca de Casimir, inicialmente para espaços-tempo de dimensão arbitrária. Esta discussão foi compilada em um artigo publicado do autor [40]. Além disso, discutiremos em detalhes o caso particular, $D = 4$, que foi obtido por Garattini [1], e que foi a motivação para esta pesquisa. Por fim, discutiremos brevemente sobre a solução cosmológica.

5.1 Descrição do problema

Garattini, em outro manuscrito recente [39], busca propor uma maneira de estudar o efeito de termos do tipo Yukawa na função de *shape* do buraco de minhoca de Casimir. Fisicamente, essa modificação está relacionada à existência de modos massivos com energia negativa [91]. A extensão do buraco de minhoca de Casimir proposta é tal que a função de *shape* (4.20a) para o caso $D = 4$ é multiplicada por

$$f(r) = e^{-\mu(r-r_0)}, \quad (5.1)$$

em que μ tem dimensão de inverso de comprimento, em três contextos:

- (i) modificação global: $b(r) = \left(\frac{2r_0}{3} + \frac{r_0^2}{3r} \right) e^{-\mu(r-r_0)}$;
- (ii) modificação apenas no termo constante: $b(r) = \frac{2r_0}{3} e^{-\mu(r-r_0)} + \frac{r_0^2}{3r}$;
- (iii) modificação apenas no termo variável: $b(r) = \frac{2r_0}{3} + \frac{r_0^2}{3r} e^{-\mu(r-r_0)}$.

Por consequência, a equação (3.7a) obtém a densidade de energia responsável por gerar o WH e, impondo a condição de ausência de forças de maré (do inglês, *Zero Tidal Condition ZTC*)

$$\Phi'(r) = 0, \quad (5.2)$$

obtem a pressão radial em termos de uma Equação de Estado (EoS) não homogênea, $p_r(r) = \omega(r)\rho(r)$.

A abordagem adotada por Garattini requer, a priori, de um conjunto de suposições questionáveis¹. Inicialmente, temos que a função de *shape* adotada não depende apenas de uma EoS homogênea da pressão radial, mas também da relação $\omega r_1^2 = r_0^2$, obtida para contornar a existência de horizontes na função de *redshift* em $r = r_0$. Além disso, $\omega = 3$, que é a solução

¹Essas suposições são quadros particulares para o caso sem correção.

característica do campo de Casimir, deve ser modificada por uma EoS não homogênea, como apontado pelo autor.

A pressão de Casimir está relacionada à sua energia por $P = -\partial E/\partial L$, onde L é a distância de separação entre as placas. Assim, uma maneira consistente de manter o perfil de energia de Casimir é a partir da seguinte relação de derivada [85]

$$p_r(r) = -\frac{d}{dr}[r\rho(r)]. \quad (5.3)$$

Além disso, ao assumir $\mu = 0$, o WH Yukawa-Casimir deve, por construção, retornar ao WH de Casimir para cada ponto no espaço-tempo, com $r \in [r_0, \infty)$, e não apenas na garganta, como obtido por Garattini. Por fim, um WH que generaliza o de Casimir não deve levar a uma condição de ZTC.

Com base nisso, pretendemos propor uma nova maneira de gerar um Buraco de Minhoca de Yukawa-Casimir, a partir da função de *shape*

$$b(r) = r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1^2}{r}, \quad (5.4)$$

propondo as mesmas correções e obtendo a energia, pressão radial, pressão tangencial, função de *redshift* e a verdadeira relação entre r_1 e r_0 para cada caso. As três maneiras de modificar a função de *shape* listadas acima são o assunto das subseções seguintes.

5.1.1 A modificação global

O primeiro caso que iremos estudar é uma modificação global na função de forma, ou seja, multiplicar a solução (5.4) pelo fator (5.1) para obter

$$b(r) = \left(r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1^2}{r} \right) e^{-\mu(r-r_0)}. \quad (5.5)$$

Como o fator multiplicativo é global na função de forma, a função de forma modificada satisfaz diretamente as propriedades (i), (ii) e (iii) definidas na Seção 3.1. Para satisfazer a condição de *flare-out*, ou seja, $b'(r)r - b(r) < 0$, é necessário que

$$-\frac{(r_0^2 - r_1^2)r + 2r_1^2r_0}{r} < \mu [(r_0^2 - r_1^2)r + r_1^2r_0], \quad (5.6)$$

que é satisfeita em todos os lugares se $r_1 < r_0$ e $\mu \geq 0$. Portanto, a partir da primeira ECE (4.4a), obtemos a densidade de energia compatível com a função de *shape*.

$$\rho(r) = -\frac{e^{-\mu(r-r_0)}}{\kappa r^4} \left[r_1^2 + \frac{\mu r}{r_0} (r_0^2 r - r_1^2 (r - r_0)) \right], \quad (5.7)$$

evidentemente, o caso em que $\mu = 0$ retorna a densidade de energia de Casimir sem quaisquer

suposições extras. Por outro lado, na garganta, $r = r_0$, obtemos uma modificação,

$$\rho(r_0) = -\frac{1}{\kappa r_0^2} \left[\mu r_0 + \frac{r_1^2}{r_0^2} \right], \quad (5.8)$$

o que já era esperado, afinal a energia foi obtida através da derivação da função de *shape*.

Uma vez que $\rho(r)$ mudou, é esperado que a EoS que define a pressão radial também mude. Para preservar o perfil da energia de Casimir, cuja pressão radial é dada pela Equação (5.3), então a relação entre ρ e p_r torna-se não homogênea, $p_r(r) = \omega(r)\rho(r)$, com

$$\omega(r) = \frac{[(r_0^2 - r_1^2)r^3 + r_0 r_1^2 r^2] \mu^2 + [(r_0^2 - r_1^2)r^2 + 3r_0 r_1^2 r] \mu + 3r_1^2 r_0}{[(r_0^2 - r_1^2)r^2 + r_0 r_1^2 r] \mu + r_1^2 r_0}, \quad (5.9)$$

que possui as seguintes propriedades:

$$\omega(r_0) = \frac{r_0^4 \mu^2 + (r_0^3 + 2r_1^2 r_0) \mu + 3r_1^2}{\mu r_0^3 + r_1^2}, \quad (5.10a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega(r) \rightarrow \infty, \quad \text{for } \mu \neq 0, \quad (5.10b)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(r) = 3, \quad (5.10c)$$

voltando ao caso usual. Embora o limite $r \rightarrow \infty$ faça com que ω tenda ao infinito, a pressão radial possui um fator de proteção geral que garante a finitude da pressão. Ao contrário da proposta de Garattini, não é necessário impor um limite duplo, $\lim_{r \rightarrow r_0} \lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(r)$, para retornar ao caso padrão. Essa única condição, $\mu = 0$, já mapeia o WH de Yukawa-Casimir para os de Casimir.

Para evitar a divergência da função de *redshift* na garganta, podemos aplicar a segunda ECE (4.4b), em $r = r_0$. Supondo que $\Phi'(r_0) < \infty$, obtemos que

$$\kappa p_r(r_0) = -\frac{b(r_0)}{r_0^3} = -\frac{1}{r_0^2}, \quad (5.11)$$

a qual, pelo uso das Equações (5.10a) e (5.8), obtemos a relação entre r_1 e r_0 ,

$$r_1^2 = \left[\frac{1 - \mu^2 r_0^2 - \mu r_0}{3 + 2\mu r_0} \right] r_0^2. \quad (5.12)$$

A equação acima elimina a divergência da função de *redshift* na garganta, concordando com a condição $r_1 < r_0$ e, para $\mu = 0$, recuperando o resultado padrão $r_0^2 = 3r_1^2$. Assim, é possível reescrever a densidade de energia (5.7) e a função de estado (5.9), como

$$\bar{\rho}(u) = -\frac{e^{-\bar{\mu}(u-1)} [(u^2 - u) \bar{\mu}^3 + (3u^2 - u - 1) \bar{\mu}^2 + (2u^2 + u - 1) \bar{\mu} + 1]}{(2\bar{\mu} + 3) u^4}, \quad (5.13a)$$

$$\omega(u) = \frac{1}{(u^2 - u) \bar{\mu}^3 + (3u^2 - u - 1) \bar{\mu}^2 + (2u^2 + u - 1) \bar{\mu} + 1} \left[(u^3 - u^2) \bar{\mu}^4 + 3(u^3 - u) \bar{\mu}^3 + (2u^3 + 4u^2 - 3u - 3) \bar{\mu}^2 + (2u^2 + 3u - 3) \bar{\mu} + 3 \right], \quad (5.13b)$$

onde definimos a densidade de energia adimensional, $\bar{\rho}(u) = \kappa r_0^2 \rho(u)$, a coordenada radial, $u = r/r_0$, e parâmetro de massa adimensional, $\bar{\mu} = \mu r_0$. Além disso, para obter a pressão tangencial, usamos a conservação de energia (4.5) para obter $p_t(r)$ e fazemos $\Omega(r) = p_t(r)/\rho(r)$, satisfazendo uma EoS não homogênea diferente. Devido ao tamanho da equação, não a exibiremos aqui, apenas alguns gráficos indicando seu comportamento.

A Figura 10a mostra a condição de flare-out para alguns valores do parâmetro adimensional $\bar{\mu}$ e ilustra o fato de que ela é satisfeita para todo $\bar{\mu} > 0$. Nas Figuras 10b e 10c, plotamos a densidade de energia adimensional (5.13a) e a pressão radial, respectivamente, para alguns valores de $\bar{\mu}$. Elas mostram que a modificação global diminui a energia e a pressão radial quando $\bar{\mu}$ aumenta, devido à existência de modos massivos com energia negativa. Na Figura 10d, plotamos a pressão tangencial para alguns valores de $\bar{\mu}$, e podemos notar que o comportamento para $\bar{\mu} = 1.0$ é muito diferente dos outros casos, já que exibe um valor máximo próximo da garganta. O resultado analítico da pressão tangencial na garganta mostra que esse comportamento muda em torno de $\bar{\mu} = 0.72$. Finalmente, é possível obter o *redshift* a partir da Equação (4.4b) e o diagrama de incorporação pela Equação (3.12), ambos numericamente, e eles são representados na Figura 11a e na Figura 11b, respectivamente.

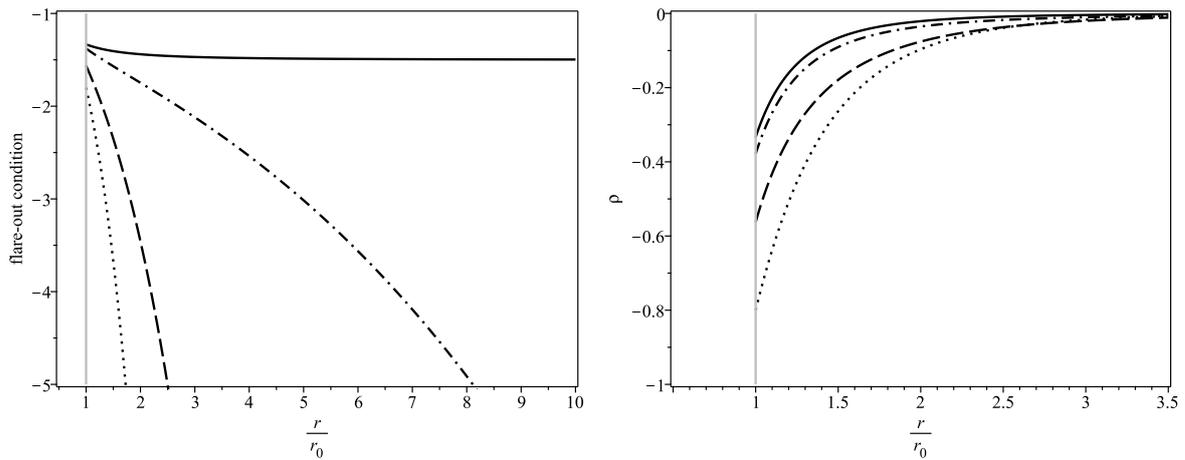
Uma característica intrigante é que, uma vez que Φ' não é monotônica, isto é, não tem um sinal bem definido dados os valores de μ , é observada a existência de um valor máximo na pressão tangencial, ver Figura 10d. Assim, se $\Phi_{\mu_c}(r)$ caracteriza o *redshift* para um determinado valor do parâmetro Yukawa e μ_c o caracteriza como um valor que exibe um ponto crítico em $p_t(r)$, então $\Phi_{\mu_c}(r) = 0$ para todos $r \geq r_0$, fazendo com que o WH Yukawa-Casimir obedeça ZTC desde que $b_{\mu_c}(r)$ satisfaça a condição de flare-out. Além disso, para $0 \leq \mu < \mu_c$, o WH exerce uma gravidade atrativa, mas para $\mu > \mu_c$, o *redshift* se transforma em um desvio blueshift tornando o WH Yukawa-Casimir ligeiramente repulsivo. Esse comportamento é ilustrado na Figura 11a. Neste caso, temos o valor $\mu_c \approx 0,276$.

5.1.2 A modificação no termo constante

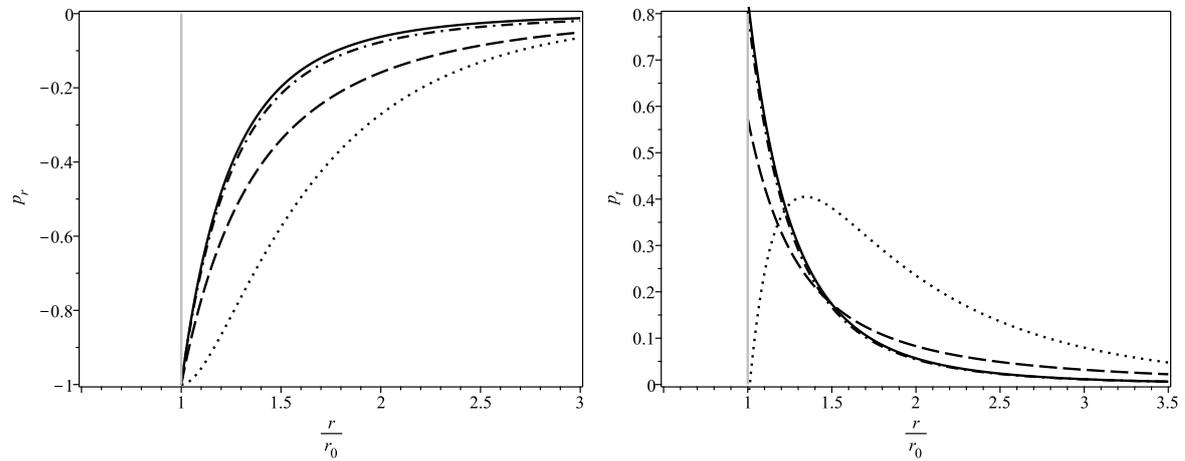
O segundo tipo de correção proposta é do tipo

$$b(r) = \left(r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} \right) e^{-\mu(r-r_0)} + \frac{r_1^2}{r}, \quad (5.14)$$

ou seja, apenas no termo constante. No caso original, ou seja, sem a correção do tipo Yukawa, o termo constante na função de forma não tinha muita relevância, já que a maioria das quantidades de interesse físico são obtidas através da derivação de $b(r)$. Nesta correção, no entanto, esse



((a)) Condição forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$. ((b)) Densidade de energia, $\rho(r)$.



((c)) Pressão radial, $p_r(r)$.

((d)) Pressão tangencial, $p_t(r)$.

Figura 10: Comportamento da condição de *flare-out* e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação global. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).

termo deve ser relevante. Naturalmente, $b(r_0) = r_0$ e

$$b'(r_0) = -\frac{[r_1^2 + \mu r_0(r_0^2 - r_1^2)]}{r_0^2} < 1, \quad (5.15)$$

assumindo que $r_0^2 > r_1^2$, verificável posteriormente. A partir da primeira EFE, obtemos a densidade de energia que gera tal buraco de minhoca

$$\rho(r) = -\frac{r_1^2}{kr^4} - \frac{\mu}{kr_0 r^2} (r_0^2 - r_1^2) e^{-\mu(r-r_0)}, \quad (5.16)$$

o primeiro termo refere-se ao campo de Casimir que é recuperado se $\mu = 0$, enquanto o segundo vem da correção de Yukawa. O sinal da energia é preservado pela condição $r_0^2 > r_1^2$.

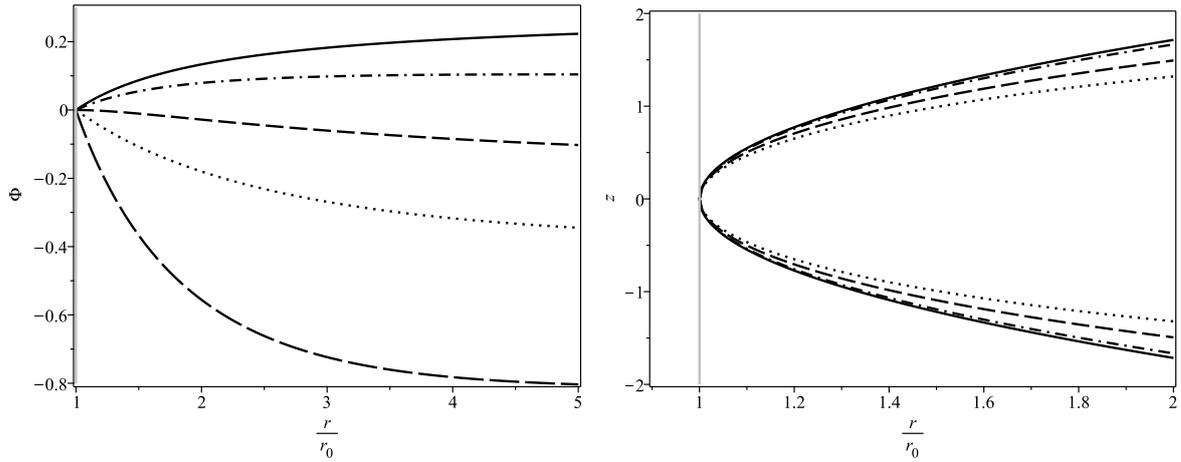
(a) Função de *redshift*, $\Phi(r)$.(b) Diagrama de mergulho, $z(r)$.

Figura 11: Em (a), temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.276$ (linha tracejada), $\mu = 0.5$ (linha pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (b), são utilizadas as mesmas notações da Figura 10

Conseqüentemente, a pressão radial é dada por

$$p_r(r) = -\frac{3r_1^2}{kr^4} - \frac{(r_0^2 - r_1^2)\mu(\mu r + 1)}{kr_0 r^2} e^{-\mu(r-r_0)}, \quad (5.17)$$

de maneira similar, o primeiro termo é puramente Casimir, enquanto o segundo termo é uma correção. A relação entre ρ e p_r é dada por uma EoS (equação de estado) não homogênea determinada por

$$\omega(r) = \frac{\mu r^2 (r_0^2 - r_1^2) (\mu r + 1) e^{-\mu(r-r_0)} + 3r_1^2 r_0}{\mu r^2 (r_0^2 - r_1^2) e^{-\mu(r-r_0)} + r_1^2 r_0}, \quad (5.18)$$

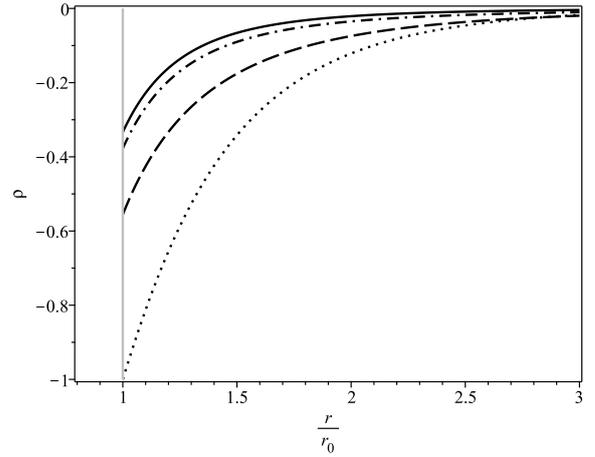
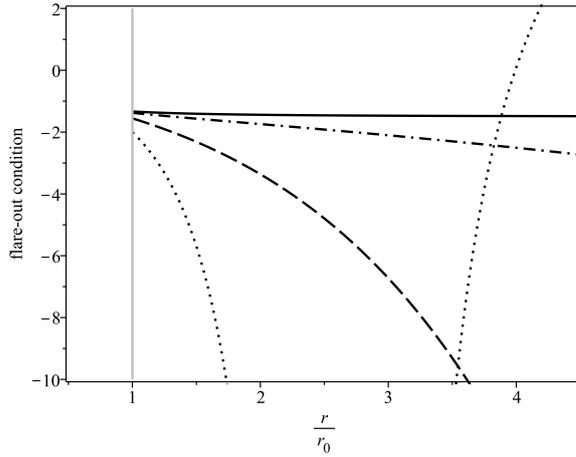
que para $\mu = 0$, retorna o valor padrão $\omega = 3$.

Por outro lado, esta equação, ao fornecer a contribuição de um termo anteriormente negligenciável, impõe uma restrição à constante de Yukawa. Este limite é visualizado na Figura 12a, onde $\mu = 1.0$ (comparável à r_0) viola a condição de *flare-out*. Nesse sentido, a condição de *flare-out* é violada no regime $0.618 < \mu < 1.43$.

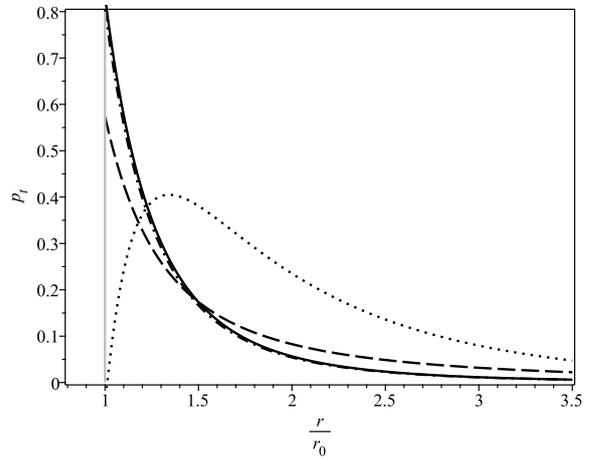
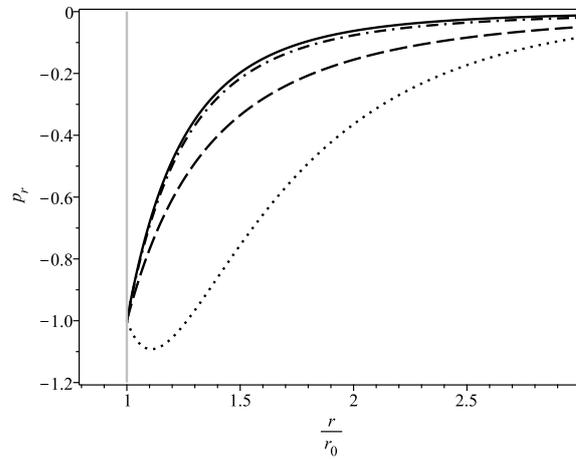
A partir da segunda EFE, obtemos a relação entre r_1 , r_0 e μ ,

$$r_1^2 = \left[\frac{\mu^2 r_0^2 + \mu r_0 - 1}{\mu^2 r_0^2 + \mu r_0 - 3} \right] r_0^2; \quad (5.19)$$

para $\mu = 0$, temos $r_0^2 = 3r_1^2$. Além disso, vale notar que $r_0 > r_1$, uma desigualdade necessária



((a)) Condição forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$. ((b)) Densidade de energia, $\rho(r)$.



((c)) Pressão radial, $p_r(r)$. ((d)) Pressão tangencial, $p_t(r)$.

Figura 12: Comportamento da condição de *flare-out* e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação constante. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).

para que a condição de *flare-out* (5.15) seja satisfeita. Portanto, obtemos

$$\bar{\rho}(u) = -\frac{[\bar{\mu}^2 + (1 - 2u^2 e^{-\bar{\mu}(u-1)})\bar{\mu} - 1]}{u^4(\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 3)}, \quad (5.20a)$$

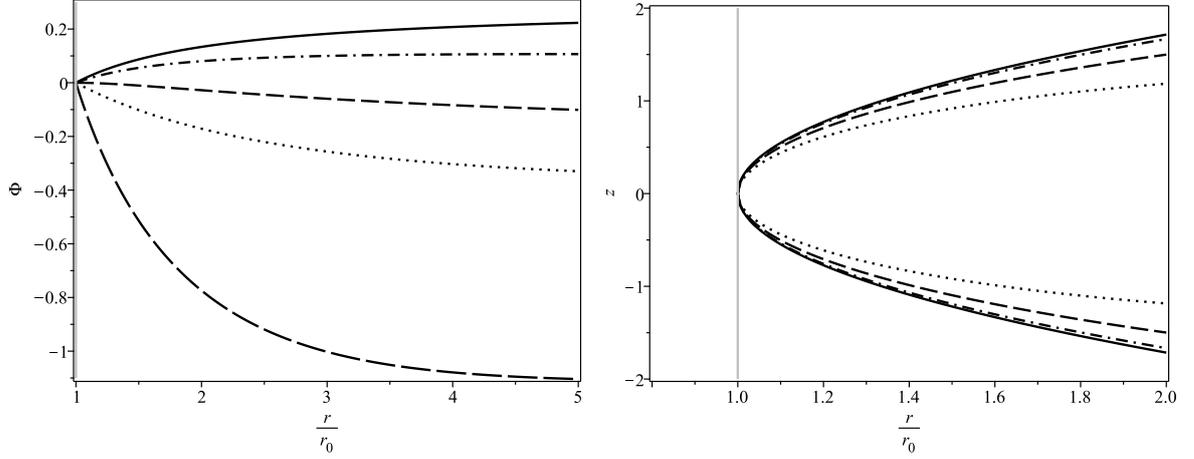
$$\bar{p}_r(u) = -\frac{3(\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 1)}{u^4(\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 3)} + \frac{2\bar{\mu}(\bar{\mu}u + 1)}{u^2(\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 3)}e^{-\bar{\mu}(u-1)}, \quad (5.20b)$$

$$\Phi'(u) = \frac{(-\bar{\mu}^2 - \bar{\mu} + 1) + (\bar{\mu}u^2(\bar{\mu}u + 1) - u^2)e^{-\bar{\mu}(u-1)}}{((\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 3)u^2 + 2ue^{-\bar{\mu}(u-1)} - (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu} - 1))}. \quad (5.20c)$$

Finalmente, a pressão tangencial é obtida pela conservação do tensor energia-momento (4.5). A expressão analítica para a pressão tangencial será omitida, e seu comportamento será mostrado na Figura 12d.

Similarmente ao caso global, o caso constante também apresenta um valor máximo na pressão tangencial, seguido por uma inversão no comportamento da função de *redshift* como

observado nas Figuras 12d e 13a, respectivamente. No entanto, nesse caso, $\mu_c \approx 0.286$ é substancialmente próximo ao valor observado no caso global.



((a)) Função de *redshift*, $\Phi(r)$.

((b)) Diagrama de mergulho, $z(r)$.

Figura 13: Em (a), temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.28646$ (linha tracejada), $\mu = 0.5$ (linha pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (b), são utilizadas as mesmas notações da Figura 10

5.1.3 A modificação no termo variável

A última correção proposta é aplicar o fator de Yukawa no termo com dependência radial da função de forma.

$$b(r) = r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1^2}{r} e^{-\mu(r-r_0)}, \quad (5.21)$$

como a maioria das quantidades físicas depende das derivadas da função de *shape*, uma modificação que ignora o termo constante tenderá a divergir suavemente da solução inicial. Isso ocorre porque funções que diferem apenas por constantes aditivas têm as mesmas derivadas.

Essa correção, como esperado, obedece a todas as condições que a função de *shape* de Casimir já obedecia, em particular,

$$b'(r_0) = -\frac{r_1^2(\mu r_0 + 1)}{r_0^2} < 1. \quad (5.22)$$

Assim, obtemos a densidade de energia que gera tal buraco de minhoca

$$\rho(r) = -\frac{r_1^2}{kr^4}(\mu r + 1)e^{-\mu(r-r_0)}; \quad (5.23)$$

além disso, a pressão radial é

$$p_r(r) = -\frac{r_1^2}{kr^4}(\mu^2 r^2 + 3\mu r + 3)e^{-\mu(r-r_0)}, \quad (5.24)$$

cujo fator da EoS não homogênea é

$$\omega(r) = \frac{\mu^2 r^2 + 3\mu r + 3}{\mu r + 1}, \quad (5.25)$$

o que naturalmente resulta em $\omega = 3$ para $\mu = 0$. Note que as únicas maneiras de ter $\omega(r_0) = 3$ são se $\mu = 0$ ou $r_0 = 0$. A primeira é a solução trivial do buraco de minhoca de Casimir, enquanto a segunda não caracteriza um buraco de minhoca atravessável.

Com a segunda ECE (4.4b), obtemos a seguinte relação entre as constantes para contornar a existência de horizontes na garganta

$$r_1^2 = \frac{r_0^2}{\mu^2 r_0^2 + 3\mu r_0 + 3}, \quad (5.26)$$

o que resulta, ao adotar as escalas de coordenadas radiais previamente definidas ($u = r/r_0$) e a redefinição ($\bar{\mu} = \mu r_0$), na seguinte energia adimensional

$$\bar{\rho}(u) = -\frac{1}{u^4} \frac{(\bar{\mu}u + 1)}{(\bar{\mu}^2 + 3\bar{\mu} + 3)} e^{-\bar{\mu}(u-1)}. \quad (5.27)$$

Analogamente, a pressão tangencial é obtida através da lei de conservação, cujo resultado é expresso na Figura 14d. Neste caso, como a derivada da função de *redshift* é monótona, não é possível obter soluções sem força de maré, como vemos na Figura 15a, onde não há inversão de comportamento.

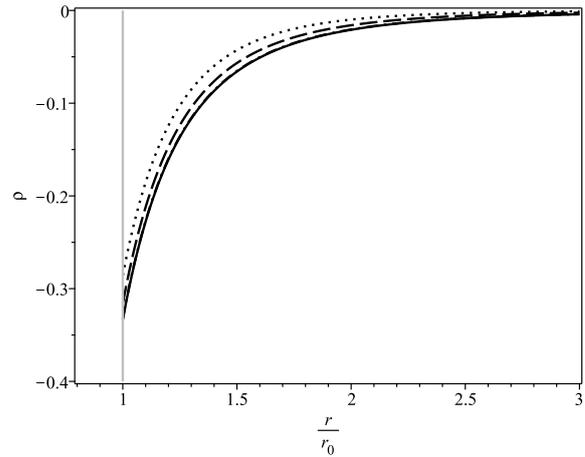
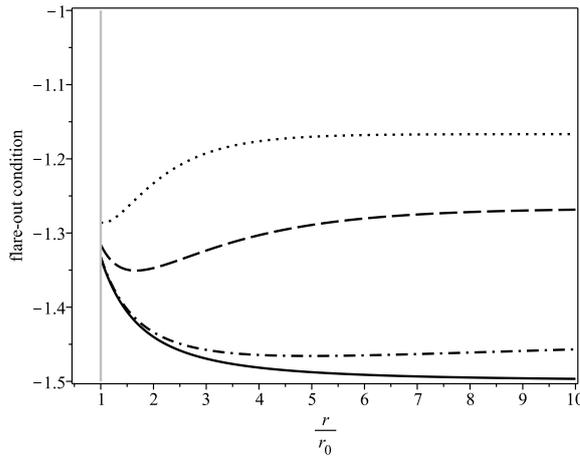
5.1.4 Análise de Estabilidade

Dadas as modificações feitas no buraco de minhoca de Casimir, é interessante verificar as condições de estabilidade das soluções, uma vez que o tensor momento-energia possui anisotropia local ($p_r \neq p_t$) [92, 93]. Essas condições podem resultar em restrições nos valores possíveis para o parâmetro μ . Uma maneira de fazer isso é calcular o quadrado da velocidade do som, dado por [94]

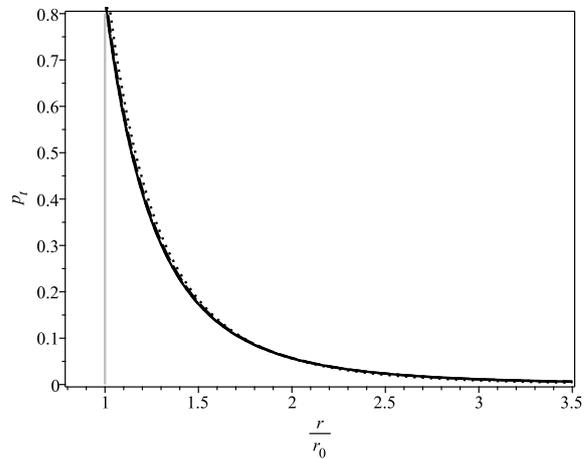
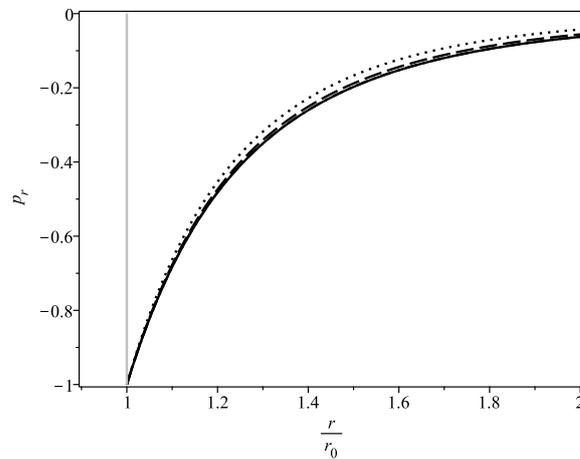
$$v_s^2(r) = \frac{dp_r(r)}{d\rho(r)} = \frac{p'_r(r)}{\rho'(r)}. \quad (5.28)$$

O modelo é instável para $v_s^2(r) < 0$, enquanto $v_s^2(r) > 0$ leva à estabilidade. Para o buraco de minhoca de Casimir, temos $v_s^2 = 3$, então eles são estáveis. Usando as Equações (5.7) (caso global), (5.16) (caso constante) e (5.23) (caso radial) e suas respectivas pressões radiais, segue-se que teremos $v_{s\text{-global}}^2$, $v_{s\text{-constant}}^2$ e $v_{s\text{-radial}}^2$. A análise numérica revela que, para garantir a estabilidade das soluções, as seguintes restrições são impostas ao parâmetro de Yukawa:

- (i) $v_{s\text{-global}}^2 > 0 \forall r \in [r_0, \infty)$ se $\mu < 2.56$,
- (ii) $v_{s\text{-constant}}^2 > 0 \forall r \in [r_0, \infty)$ se $\mu < 1.01$,



((a)) Condição forte de *flare-out*, $b'(r)r - b(r) < 0$. ((b)) Densidade de energia, $\rho(r)$.



((c)) Pressão radial, $p_r(r)$. ((d)) Pressão tangencial, $p_t(r)$.

Figura 14: Comportamento da condição de *flare-out* e dos componentes do tensor momento-energia associados à modificação no termo variável. Em todos os gráficos, temos $\bar{\mu} = 0.0$ (linha sólida), $\bar{\mu} = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\bar{\mu} = 0.5$ (linha tracejada) e $\bar{\mu} = 1.0$ (linha pontilhada).

(iii) $v_{s\text{-radial}}^2 > 0 \forall r \in [r_0, \infty)$ para todos os valores de μ .

Observe que o caso radial é o único que é estável para qualquer valor do parâmetro de Yukawa. Isso ocorre justamente porque ele varia muito pouco em relação ao buraco de minhoca de Casimir. Por outro lado, o caso global recebe sua primeira restrição, enquanto o caso radial impõe sua segunda restrição, sendo a primeira dada pela condição de *flare-out*. Em todos os casos, o comportamento do quadrado da velocidade do som foi plotado (em escala logarítmica) na Figura 16.

5.1.5 Correção para pequenos parâmetros

Embora não seja possível obter uma solução analítica completa para a função de *redshift* nos casos considerados nas seções 5.1.1-5.1.3, uma análise complementar consiste em

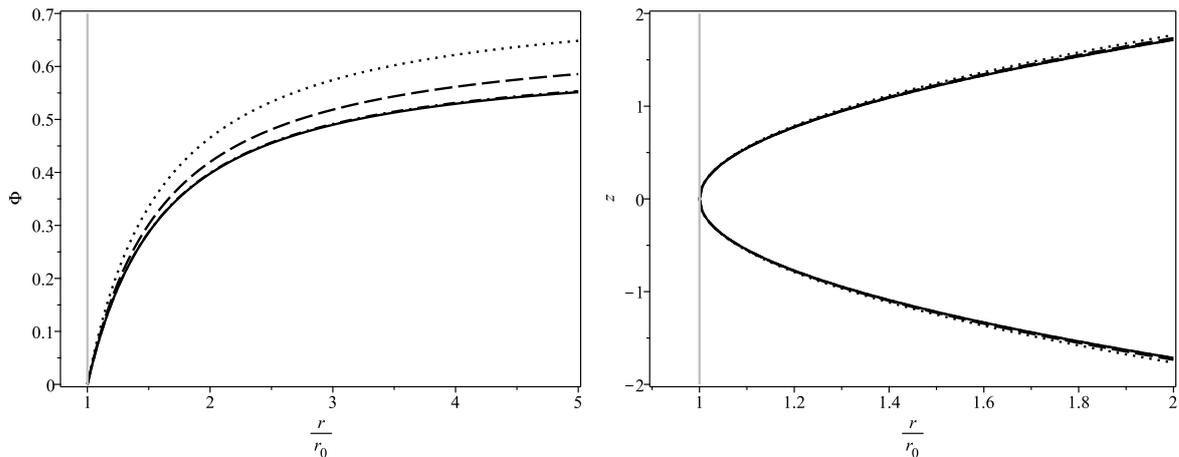
(a) Função de *redshift*, $\Phi(r)$.(b) Diagrama de mergulho, $z(r)$.

Figura 15: Em todos os gráficos temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.5$ (linha tracejada) e $\mu = 1.0$ (linha pontilhada).

comparar os três modelos de generalização de buracos de minhoca de Casimir para pequenos valores do parâmetro μ . O valor $\mu = 0$ deve modelar o buraco de minhoca para o caso usual de Casimir, assim, pequenos valores de μ estão na fronteira do que já é conhecido na literatura. Além disso, como vimos na subseção anterior, o buraco de minhoca Yukawa-Casimir é estável para pequenos valores do parâmetro de Yukawa. Portanto, os termos exponenciais locais em Φ' podem ser expressos via série de Taylor.

$$e^{-\mu(r-r_0)} = 1 - \mu(r - r_0) + \frac{1}{2}\mu^2(r - r_0)^2 + \dots, \quad (5.29)$$

então, uma correção de primeira ordem seria considerar todos os termos do tipo μ^j com $j \leq 1$, de segunda ordem com $j \leq 2$, e assim por diante.

5.1.5.1 Correção de primeira ordem

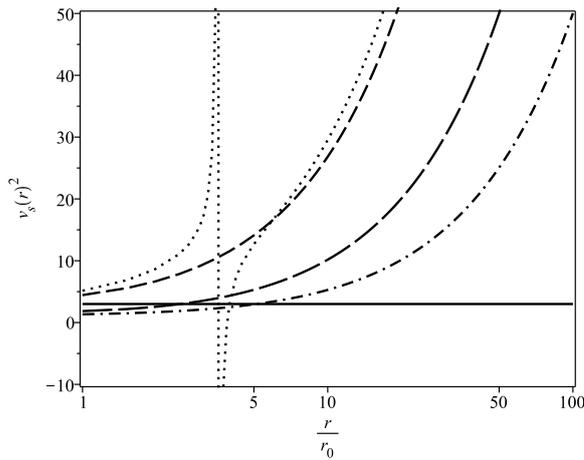
Vamos considerar correções de primeira ordem para a função de *redshift*. Nesse caso, temos

$$\Phi'_g(r) \approx \frac{r_0}{(3r + r_0)r} - \frac{6(r + r_0)r_0}{(3r + r_0)^2}\mu, \quad (5.30a)$$

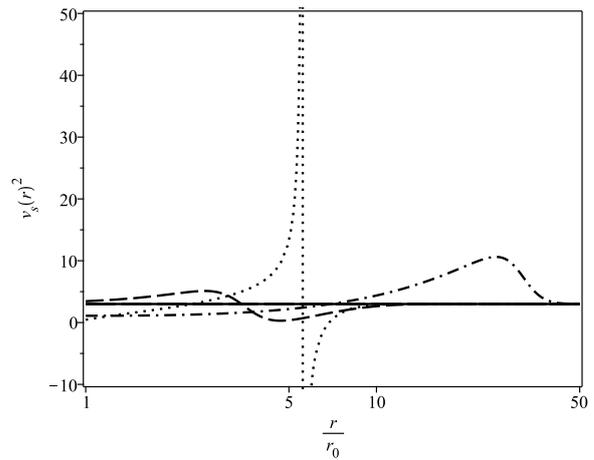
$$\Phi'_c(r) = \Phi'_g(r), \quad (5.30b)$$

$$\Phi'_r(r) \approx \frac{r_0}{(3r + r_0)r}, \quad (5.30c)$$

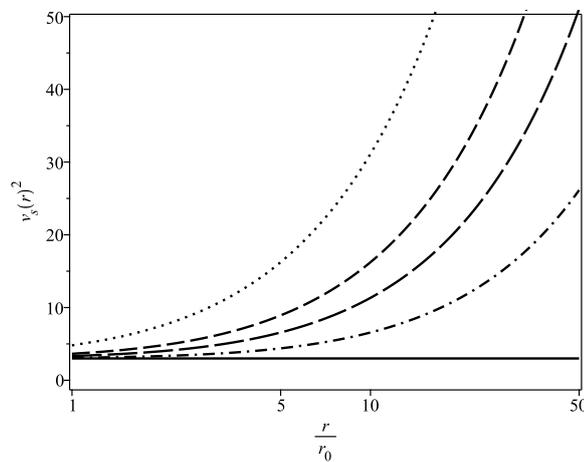
em que $\Phi'_g(r)$, $\Phi'_c(r)$ e $\Phi'_r(r)$ se referem aos casos discutidos na Seção 5.1.1, Seção 5.1.2, e Seção 5.1.3, respectivamente. Assim, as funções de *redshift* corrigidas de primeira ordem de μ



(a) Correção global.



(b) Correção constante.



(c) Correção no termo variável.

Figura 16: Gráfico de $v_s^2(r)$ versus r . Em todos os gráficos, temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.5$ (linha tracejada e pontilhada) e $\mu = 1.0$ (linha longamente tracejada). Em (a), temos $\mu = 2.56$ (linha tracejada) e $\mu = 3.0$ (linha pontilhada). Em (b), temos $\mu = 1.01$ (linha tracejada) e $\mu = 1.5$ (linha pontilhada). Em (c), temos $\mu = 1.5$ (linha tracejada) e $\mu = 3.0$ (linha pontilhada).

são dadas por

$$\Phi_g(r) \approx \ln\left(\frac{4r}{3r+r_0}\right) - \frac{\mu r_0}{9r+3r_0} \left[3(r-r_0) + (6r+2r_0) \ln\left(\frac{3r}{4r_0} + \frac{1}{4}\right) \right], \quad (5.31a)$$

$$\Phi_r(r) \approx \ln\left(\frac{4r}{3r+r_0}\right). \quad (5.31b)$$

Observe que, no caso radial, a solução é basicamente o *redshift* do buraco de minhoca de Casimir, mas com uma sutil mudança no numerador do argumento do logaritmo. Essa diferença se deve à definição de $\Phi(r_0)$, onde constantes aditivas não têm implicação física. Por outro lado, os casos global e constante se comportam da mesma maneira para mudanças de primeira ordem.

5.1.5.2 Correção de segunda ordem

Nas correções de primeira ordem, observamos que o *redshift* nos casos global e constante são os mesmos. Além disso, o desvio para o vermelho no caso radial é independente do parâmetro de Yukawa μ . Desta forma, é sugestivo considerar correções de segunda ordem. Assim,

$$\Phi'_g(r) \approx \frac{r_0}{(3r+r_0)r} - \frac{6(r+r_0)r_0}{(3r+r_0)^2}\mu + \frac{3(3r^3 - 4r^2r_0 - 15r_0^2r - 8r_0^3)r_0}{2(3r+r_0)^3}\mu^2, \quad (5.32a)$$

$$\Phi'_c(r) \approx \frac{r_0}{(3r+r_0)r} - \frac{6(r+r_0)r_0}{(3r+r_0)^2}\mu + \frac{3(3r - 7r_0)r_0(r+r_0)^2}{2(3r+r_0)^3}\mu^2, \quad (5.32b)$$

$$\Phi'_r(r) \approx \frac{r_0}{(3r+r_0)r} + \frac{3r_0^2(r+r_0)}{2(3r+r_0)^2}\mu^2; \quad (5.32c)$$

assim, as funções de *redshift* corrigidas de segunda ordem de μ são dadas por,

$$\begin{aligned} \Phi_g(r) \approx & \frac{1}{36(3r+r_0)^2} \left[\left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 (-126\mu^2r_0^2 - 216\mu r_0 - 324) \ln\left(\frac{3r}{4} + \frac{r_0}{4}\right) \right. \\ & + 126r_0 \left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 \left(\mu r_0 + \frac{12}{7}\right) \mu \ln(r_0) + 324 \left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 \ln(r) \\ & \left. + 54r_0 \left(-\frac{25\mu r_0^2}{18} + \left(-\frac{5\mu r}{2} - \frac{2}{3}\right)r_0 + \mu r^2 - 2r\right) \mu(r-r_0) \right], \quad (5.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_c(r) \approx & \frac{1}{18(3r+r_0)^2} \left[\left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 (-36\mu^2r_0^2 - 108\mu r_0 - 162) \ln\left(\frac{3r}{4} + \frac{r_0}{4}\right) \right. \\ & + 36r_0 \left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 \mu(\mu r_0 + 3) \ln(r_0) + 162 \left(r + \frac{r_0}{3}\right)^2 \ln(r) \\ & \left. + 27r_0 \left(-\frac{11\mu r_0^2}{9} + \left(-2r\mu - \frac{2}{3}\right)r_0 + \mu r^2 - 2r\right) (r-r_0)\mu \right], \quad (5.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_r(r) \approx & \frac{1}{36r+12r_0} \left[(\mu^2r_0^2 - 6)(6r+2r_0) \ln\left(\frac{3r}{4} + \frac{r_0}{4}\right) - 6\mu^2 \left(r + \frac{r_0}{3}\right) r_0^2 \ln(r_0) \right. \\ & \left. + (36r+12r_0) \ln(r) + 3\mu^2r_0^2(r-r_0) \right], \quad (5.35) \end{aligned}$$

o comportamento dessas soluções em função de r/r_0 é plotado na Figura 17. Nesta ordem de aproximação, como vemos na Figura 17, os casos global (linha tracejada) e radial (linha pontilhada) diferem pouco um do outro. É por isso que os valores de μ_c nesses casos são próximos. Essa diferença, próxima à garganta $r/r_0 = 1$, é tão pequena que se torna desprezível.

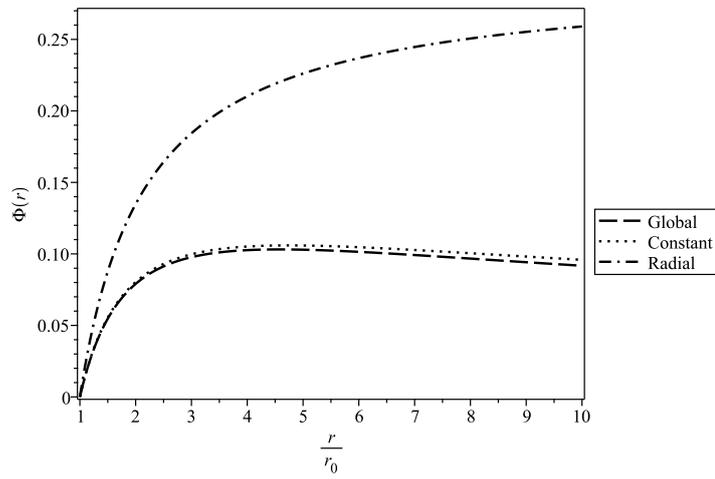


Figura 17: Comportamento da função de *redshift* modificada de segunda ordem em relação ao parâmetro μ para o buraco de minhoca Yukawa-Casimir.

6 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

6.1 Considerações Finais

6.1.1 Buracos de minhoca de Casimir

Nesta tese, estudamos a formação de buracos de minhoca estáticos, esfericamente simétricos e atravessáveis para espaços-tempos de dimensão arbitrária, generalizando os trabalhos recentes [2] e [1]. Para isso, analisamos a equação de Einstein para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico em D dimensões e consideramos a energia e a pressão de Casimir como fontes. Encontramos, à semelhança das Refs. [1, 2], que a solução depende apenas das funções *redshift* e *shape*. Para garantir a condição de *flare-out* e finitude do *redshift*, analisamos o raio da garganta e as dimensões que permitem uma fixação que remova as raízes na equação de *redshift*.

Obtivemos uma expressão analítica para a função de *shape* para D arbitrário (4.11) que reproduz as expressões encontradas para $D = 3$ [2] e $D = 4$ [1], além de ser assintoticamente nula. De fato, mostramos que as condições de contorno e *flare-out* podem ser satisfeitas para qualquer D . Portanto, essas condições não impõem nenhuma restrição para buracos de minhoca Casimir em dimensões D .

Por outro lado, para poder ser atravessado, devemos encontrar uma solução de buraco de minhoca que evite um horizonte de eventos. É exatamente aqui que aparece uma restrição. Na Ref. [2] os autores mostram que, diferentemente do caso $D = 4$ [1], uma divergência em $r = r_0$ no parâmetro de *redshift* é inevitável se a energia de Casimir for a única fonte. Para encontrar a origem desta singularidade, obtivemos uma condição geral a ser satisfeita pelo parâmetro de estado ω_D para evitá-la. É dado por

$$\omega_D = (D - 3) \frac{r_0^{D-2}}{r_1^{D-2}}, \quad (6.1)$$

e esta expressão revela que para $D = 3$ devemos ter $\omega_3 = 0$, eliminando a fonte de Casimir. Isso explica a razão pela qual, para espaços-tempos tridimensionais, não é possível formar um buraco de minhoca, resultado anteriormente apresentado na Ref. [2]. Em paralelo, mostramos que, embora não tenha sido possível obter uma expressão analítica para $\Phi(r)$, o integrando não possui divergências ao longo do domínio quando $D > 3$. Isso garantiu que $\Phi(r)$ seja finito em todos os lugares e que não temos horizontes. Mostramos também que, no limite assintótico, a integral converge permitindo uma fixação em $\Phi(r_0)$ (4.19) e garantindo que a solução seja assintoticamente plana.

Com base nos resultados acima, concluímos que a energia de Casimir pode ser usada

como fonte de buracos de minhoca do tipo Morris-Thorne para todo espaço-tempo de dimensão $D > 3$. Devemos apontar que isso deve ter consequências para a física de dimensões extras, particularmente relacionadas ao recém-descoberto buraco de minhoca da Ref. [27].

Finalmente, discutimos as consequências de considerar a existência de uma constante cosmológica diferente de zero. Neste cenário, temos uma função de *shape* (4.27) que satisfaz todas as condições impostas. Mostramos que para contornar a divergência da garganta devemos estabelecer uma relação entre o valor da constante cosmológica e o raio da garganta por

$$\Lambda(r_0) = \frac{(D-3)(D-2)}{2r_0^2} - \frac{8\pi(D-1)G_D\lambda_D}{r_0^D}. \quad (6.2)$$

Da expressão acima, vemos que em $D = 3$ um buraco de minhoca de Casimir é possível, mas o espaço-tempo deve ser AdS. Isso é muito semelhante ao buraco negro BTZ, onde uma constante cosmológica negativa deve ser adicionada para fornecer uma solução não trivial [95]. Para $D > 3$ descobrimos que ambas as possibilidades, de Sitter e anti-de Sitter, são permitidas. A expressão acima também mostra que o sinal da constante cosmológica é controlado pelo raio da garganta. O caso $\Lambda = 0$ para $D = 4$ também fornece o valor de r_0 encontrado anteriormente na Ref. [1]. Por fim, a eq. (6.2) mostra que, para $D > 3$, no contexto de um espaço de Sitter com uma constante cosmológica pequena, existem duas opções para r_0 , mas apenas a solução planckiana é fisicamente razoável.

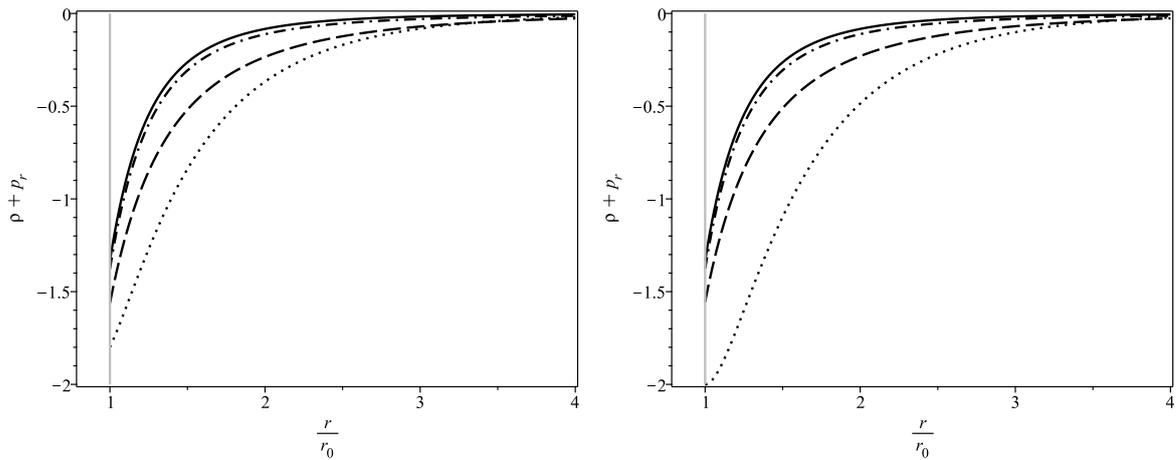
6.1.2 Buracos de minhoca de Yukawa-Casimir

Ainda nessa tese, propomos uma maneira mais consistente de generalizar o buraco de minhoca de Casimir com termos do tipo Yukawa nas funções de forma nas três abordagens inicialmente propostas por Garattini[39]. O buraco de minhoca de Casimir não possui *redshift* constante, portanto, não há motivo para construir um buraco de minhoca Yukawa-Casimir considerando o ZTC. Em nossa abordagem, mantivemos o caráter da pressão sendo dado pela derivada da energia, o que revelou uma física completamente nova para esses objetos astrofísicos. Com os resultados obtidos, o buraco de minhoca Yukawa-Casimir, em todos os casos considerados, satisfaz a chamada QWEC [1]

$$\rho(r) + p_r(r) = -g(r); \quad g(r) > 0 \quad \forall r \in [r_0, \infty), \quad (6.3)$$

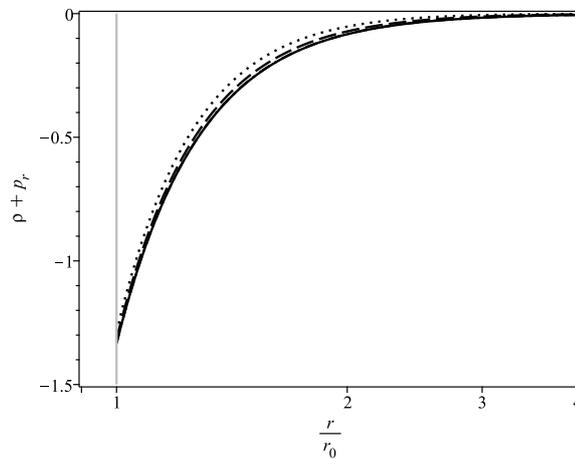
como visualizado na Figura 18. Na correção no termo variável, devido às pequenas discrepâncias entre as curvas, uma escala logarítmica foi considerada na variável independente.

Além disso, apenas na correção do termo constante é que restrições aparecem no valor da constante de Yukawa, já que $0.618 < \mu < 1.43$ viola a condição de flare-out. Esse tipo de restrição é visto apenas nesta abordagem. Outra característica desta metodologia foi um



((a)) Correção global.

((b)) Correção constante.



((c)) Correção no termo variável.

Figura 18: Verificação da Condição de Energia Fraca Quântica (QWEC). Em todos os gráficos, temos $\mu = 0.0$ (linha sólida), $\mu = 0.1$ (linha tracejada e pontilhada), $\mu = 0.5$ (linha tracejada) e $\mu = 1.0$ (linha pontilhada).

alcance natural, nos casos global e constante, de ser possível não apenas construir WH sem força de maré, mas também obter casos em que a força gerada é repulsiva, caracterizando um *blueshift* (desvio para o azul).

Outro tipo de restrição no parâmetro de Yukawa é estabelecido ao estudar a estabilidade das soluções através do cálculo do quadrado da velocidade do som. Nesta análise, apenas a mudança no termo variável não produziu soluções instáveis, devido ao fato de não ser muito sensível a mudanças nos valores de μ . Enquanto isso, para o caso global, a restrição $\mu < 2.566$ é necessária para que o buraco de minhoca Yukawa-Casimir seja estável. Finalmente, no caso constante, essa condição restringiu ainda mais os valores permitidos para o parâmetro de Yukawa, de modo que devemos ter $\mu \leq 0.618$.

Em todos os casos, a solução completa da função de desvio para o vermelho não pode ser obtida analiticamente devido a termos exponenciais locais no integrando. Portanto, foram

adotadas duas abordagens. Inicialmente, integração numérica foi realizada para a variável r/r_0 e definindo $\mu = 0.1$, que foram reproduzidas nas Figuras 11a, 13a e 15a,. Finalmente, uma análise foi realizada para pequenos valores do parâmetro de Yukawa, que na primeira ordem revelou que $\Phi_g(r) = \Phi_c(r)$, enquanto, para o caso radial, a função de desvio para o vermelho não depende explicitamente do parâmetro de Yukawa. Por outro lado, na segunda ordem, descobriu-se que os casos global e constante se tornam ligeiramente diferentes. Nossa análise de pequenos parâmetros não apenas nos permitiu obter o desvio para o vermelho de forma analítica, mas também revelou *insights* sobre a fronteira entre os buracos de minhoca de Casimir e Yukawa-Casimir. Essa análise lança luz sobre o motivo pelo qual o valor que causa a mudança no desvio para o vermelho é semelhante nos casos global (como mostrado na 11a) e constante (como mostrado na Figura 13a), pois eles diferem apenas na segunda ordem de μ .

6.2 Perspectivas futuras

Algumas possíveis extensões futuras deste trabalho com correção do tipo Yukawa incluem generalizações dimensionais, um estudo dos efeitos do Princípio da Incerteza Generalizado e análises que modifiquem a densidade de energia em vez da função de *shape*.

Além disso, buscaremos obter soluções de buracos de minhoca com outros campos que possuem, em determinadas situações, densidade de energia negativa, como é o caso do campo tensorial de matéria [96].

REFERÊNCIAS

- [1] GARATTINI, R. Casimir Wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 11, p. 951, 2019.
- [2] ALENCAR, G.; BEZERRA, V. B.; MUNIZ, C. R. Casimir Wormholes in (2+1) Dimensions with Applications to the Graphene. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, p. 924, 2021.
- [3] KONTOU, E.-A.; SANDERS, K. Energy conditions in general relativity and quantum field theory. *Class. Quant. Grav.*, v. 37, n. 19, p. 193001, 2020.
- [4] JARDIM, I. C. *Modelo de múltiplas branas esféricas como uma descrição cosmológica*. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- [5] MULLER, T. Visual appearance of a Morris-Thorne-wormhole. *Am. J. Phys.*, v. 72, p. 1045–1050, 2004.
- [6] PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521882231.
- [7] MISNER, C. *et al. Gravitation*. [S.l.]: Princeton University Press, 1973. ISBN 9780691177793.
- [8] DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, v. 220, p. 291–333, 1920.
- [9] ISHIHARA, A. *et al.* Gravitational bending angle of light for finite distance and the gauss-bonnet theorem. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 084015, Oct 2016.
- [10] CARVALHO, I. D. D. *et al.* The gravitational bending angle by static and spherically symmetric black holes in bumblebee gravity. *EPL*, v. 134, n. 5, p. 51001, 2021.
- [11] ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [12] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 189–196, 1916.
- [13] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 875, p. L1, 2019.
- [14] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. Magnetic Field Structure near The Event Horizon. *Astrophys. J. Lett.*, v. 910, n. 1, p. L13, 2021.
- [15] RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. ISBN 0–19–856731–6.
- [16] EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, v. 48, p. 73–77, 1935.

- [17] HAWKING, S.; ELLIS, G.; LANDSHOFF, P. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521099066.
- [18] VISSER, M. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. [S.l.]: American Inst. of Physics, 1995. (Computational and Mathematical Physics). ISBN 9781563963940.
- [19] ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 14, p. 104–118, 1973.
- [20] BRONNIKOV, K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B*, v. 4, p. 251–266, 1973.
- [21] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, v. 56, p. 395–412, 1988.
- [22] HOCHBERG, D.; VISSER, M. Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 044021, Jul 1998.
- [23] BRONNIKOV, K. A.; SKVORTSOVA, M. V. Cylindrically and axially symmetric wormholes. Throats in vacuum? *Grav. Cosmol.*, v. 20, p. 171–175, 2014.
- [24] KIM, S.-W. Flare-out condition of a Morris-Thorne wormhole and finiteness of pressure. *J. Korean Phys. Soc.*, v. 63, p. 1887–1891, 2013.
- [25] EIROA, E. F.; SIMEONE, C. Some general aspects of thin-shell wormholes with cylindrical symmetry. *Phys. Rev. D*, v. 81, n. 8, p. 084022, 2010. [Erratum: *Phys. Rev. D* 90, 089906 (2014)].
- [26] GAO, P.; JAFFERIS, D. L.; WALL, A. C. Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation. *JHEP*, v. 12, p. 151, 2017.
- [27] MALDACENA, J.; MILEKHIN, A. Humanly traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 103, p. 066007, Mar 2021.
- [28] BORDAG, M. *et al. Advances in the Casimir Effect*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. (International Series of Monographs on Physics). ISBN 9780191579882.
- [29] SORGE, F. Casimir effect in a weak gravitational field. *Class. Quant. Grav.*, v. 22, p. 5109–5119, 2005.
- [30] LIMA, A. P. C. M. *et al.* Null Second Order Corrections to Casimir Energy in Weak Gravitational Field. *JCAP*, v. 07, p. 011, 2019.
- [31] LIMA, A. P. C. M.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Null second order corrections to Casimir energy in weak gravitational field: The Schwinger's approach. *JCAP*, v. 01, p. 056, 2021.
- [32] AVINO, S. *et al.* Progress in a Vacuum Weight Search Experiment. *MDPI Physics*, v. 2, n. 1, p. 1–13, 2020.
- [33] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Phys. Rev. Lett.*, v. 61, p. 1446–1449, 1988.

- [34] CARVALHO, I. D. D.; ALENCAR, G.; MUNIZ, C. R. Gravitational bending angle with finite distances by Casimir wormholes. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 31, n. 03, p. 2250011, 2022.
- [35] JAVED, W.; HAMZA, A.; ÖVGÜN, A. Weak deflection angle by Casimir wormhole using Gauss-Bonnet theorem and its shadow. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 35, n. 39, p. 2050322, 2020.
- [36] GARATTINI, R. Generalized Absurdly Benign Traversable Wormholes powered by Casimir Energy. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 12, p. 1172, 2020.
- [37] TRIPATHY, S. K. Modelling Casimir wormholes in extended gravity. *Phys. Dark Univ.*, v. 31, p. 100757, 2021.
- [38] JUSUFI, K.; CHANNUIE, P.; JAMIL, M. Traversable Wormholes Supported by GUP Corrected Casimir Energy. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 2, p. 127, 2020.
- [39] GARATTINI, R. Yukawa–Casimir wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 9, p. 824, 2021.
- [40] OLIVEIRA, P. H. F. *et al.* Traversable Casimir wormholes in D dimensions. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 37, n. 15, p. 2250090, 2022.
- [41] OLIVEIRA, P. H. F. *de et al.* On the Traversable Yukawa–Casimir Wormholes. *Symmetry*, v. 15, n. 2, p. 383, 2023.
- [42] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521887052.
- [43] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781108488396.
- [44] CHENG, T. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. [S.l.]: OUP Oxford, 2005. (Oxford Master Series in Physics). ISBN 9780198529576.
- [45] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, 2008. ISBN 9788126517558.
- [46] WALD, R. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 2010. ISBN 9780226870373.
- [47] GRAY, C.; TAYLOR, E. When action is not least. *American Journal of Physics - AMER J PHYS*, v. 75, 05 2007.
- [48] AGUIAR, M. de. *Tópicos de mecânica clássica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. ISBN 9788578611019.
- [49] RUBAKOV, V.; WILSON, S. *Classical Theory of Gauge Fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. ISBN 9781400825097.
- [50] BARCELOS NETO, J. *Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e espinores*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. ISBN 978-85-7861-091-3.
- [51] MORIN, D. *Special Relativity: for the enthusiastic beginner*. [S.l.]: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017. ISBN 9781542323512.
- [52] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2013.

- [53] FARFAN, F. et al. Spherically symmetric solution in a space-time with torsion. *Gen. Rel. Grav.*, v. 44, p. 535–553, 2012.
- [54] CHANDRASEKHAR, S. On the “derivation” of einstein’s field equations. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 2, p. 224–234, 1972.
- [55] CHIRKOV, D. et al. Cosmological solutions in einstein–gauss–bonnet gravity with static curved extra dimensions. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 2, 2021. ISSN 1434-6052.
- [56] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029.
- [57] ZEE, A. *Einstein Gravity in a Nutshell*. [S.l.]: Princeton University Press, 2013. (In a Nutshell). ISBN 9780691145587.
- [58] SOTIRIOU, T. P.; LIBERATI, S. Field equations from a surface term. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 044016, 2006.
- [59] GUIDRY, M.; GUIDRY, M. *Modern General Relativity: Black Holes, Gravitational Waves, and Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781107197893.
- [60] EINSTEIN, A. Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1915, p. 831–839, 1915.
- [61] BERCHE, B.; MEDINA, E. The advance of Mercury’s perihelion. 2 2024.
- [62] CARVALHO, I. D. D. et al. The gravitational bending angle by static and spherically symmetric black holes in bumblebee gravity. *EPL*, v. 134, n. 5, p. 51001, 2021.
- [63] JÚNIOR, R. N. S.; BARBOZA, C. H. M. História e memória de vidro: as fotografias brasileiras do eclipse de 1919 em Sobral. *História, Ciências, Saúde-Manguinhos*, v. 27, p. 983–1000, 2020.
- [64] PINOCHET, J. Classical tests of general relativity II: looking to the past to understand the present. *Phys. Educ.*, v. 55, n. 6, p. 065017, 2020.
- [65] BERTI, E. et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quant. Grav.*, v. 32, p. 243001, 2015.
- [66] OLIVEIRA, P. H. F.; JARDIM, I. C.; LANDIM, R. R. Sobre a assinatura da métrica em Relatividade Restrita. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 46, p. e20230311, 2024.
- [67] EINSTEIN, A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1917, p. 142–152, 1917.
- [68] SOLA, J. Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 453, n. 1, p. 012015, aug 2013.
- [69] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The Cosmological Constant and Dark Energy. *Rev. Mod. Phys.*, v. 75, p. 559–606, 2003.

- [70] KOTTLER, F. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen Phys.*, v. 361, n. 14, p. 401–462, 1918.
- [71] STUCHLIK, Z.; HLEDIK, S. Some properties of the Schwarzschild-de Sitter and Schwarzschild - anti-de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 044006, 1999.
- [72] KONTOU, E.-A. Wormhole restrictions from quantum energy inequalities. 5 2024.
- [73] PERRY, G. P.; MANN, R. B. Traversable wormholes in (2+1)-dimensions. *Gen. Rel. Grav.*, v. 24, p. 305–321, 1992.
- [74] DELGATY, M. S. R.; MANN, R. B. Traversable wormholes in (2+1)-dimensions and (3+1)-dimensions with a cosmological constant. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 4, p. 231–246, 1995.
- [75] MILTON, K. A.; DERAAD JR., L. L.; SCHWINGER, J. S. Casimir Selfstress on a Perfectly Conducting Spherical Shell. *Annals Phys.*, v. 115, p. 388, 1978.
- [76] COUGO-PINTO, M. V.; FARINA, C.; TORT, A. O Efeito Casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, p. 122, 2000.
- [77] CASIMIR, H. B. G. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, v. 10, p. 261–263, 1948.
- [78] LIMA, A. P. C. M. de. *Aspectos do vácuo escalar em coordenadas generalizadas: estudo do efeito Casimir e efeito Unruh*. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.
- [79] KAR, S.; SAHDEV, D. Evolving Lorentzian wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 53, p. 722–730, 1996.
- [80] DEBENEDICTIS, A.; DAS, A. Higher dimensional wormhole geometries with compact dimensions. *Nucl. Phys. B*, v. 653, p. 279–304, 2003.
- [81] CATALDO, M.; SALGADO, P.; MINNING, P. Self-dual lorentzian wormholes in n-dimensional einstein gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, p. 124008, Dec 2002.
- [82] GOGBERASHVILI, M. Our world as an expanding shell. *EPL*, v. 49, p. 396–399, 2000.
- [83] DAS, A.; DEBENEDICTIS, A. Spherical gravitating systems of arbitrary dimension. *Prog. Theor. Phys.*, v. 108, p. 119–132, 2002.
- [84] JARDIM, I. C. *et al.* The construction of multiple spherical branes cosmological scenario. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 064019, 2011.
- [85] ALNES, H. *et al.* Electromagnetic casimir energy with extra dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 105017, Nov 2006.
- [86] OLIVEIRA, P. H. F. de. *Teorias de Gauge topologicamente massivas: um ensaio sobre a teoria de Maxwell-BF*. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.
- [87] NOGUEIRA, M. N. V. *Buracos de minhoca do tipo Schwarzschild na teoria assintoticamente segura da gravidade*. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.

- [88] CONWAY, J. *Functions of One Complex Variable I*. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781461263135.
- [89] MANN, R. B.; MUREIKA, J. R. (1+1)-Dimensional Entropic Gravity. *Phys. Lett. B*, v. 703, p. 167–171, 2011.
- [90] CARMELI, M.; KUZMENKO, T. Value of the cosmological constant: Theory versus experiment. *AIP Conference Proceedings*, v. 586, n. 1, p. 316–318, 2001.
- [91] NINHAM, B. W. *et al.* Casimir forces in a Plasma: possible connections to Yukawa Potentials. *Eur. Phys. J.*, v. 68, p. 328, 2014.
- [92] HERRERA, L.; SANTOS, N. O. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Phys. Rept.*, v. 286, p. 53–130, 1997.
- [93] ABREU, H.; HERNANDEZ, H.; NUNEZ, L. A. Sound Speeds, Cracking and Stability of Self-Gravitating Anisotropic Compact Objects. *Class. Quant. Grav.*, v. 24, p. 4631–4646, 2007.
- [94] SHARIF, M.; SHAH, S. A. A.; BAMBA, K. New holographic dark energy model in brans-dicke theory. *Symmetry*, MDPI, v. 10, n. 5, p. 153, 2018.
- [95] NADOS, M. B.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black hole in three-dimensional spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 69, p. 1849–1851, Sep 1992.
- [96] SILVA, C. A. S.; LANDIM, R. R. Antisymmetric tensor matter fields in a curved spacetime. 10 2007.
- [97] ARFKEN, G.; WEBER, H. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Harcourt/Academic Press, 2001. (Academic Press international edition). ISBN 9780120598267.

APÊNDICE A - SIMPLIFICAÇÃO DA MÉTRICA ESFERICAMENTE SIMÉTRICA

Por uma questão de completeza, neste apêndice, apresentaremos a demonstração da relação da métrica esfericamente simétrica que foi omitida ao longo do texto principal.

Partiremos da métrica construída com os invariantes de rotação

$$ds^2 = A d\vec{r} \cdot d\vec{r} + B(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 + C dt(\vec{r} \cdot d\vec{r}) + D dt^2, \quad (1)$$

em que A, B, C, D são funções de t e r . Ao considerarmos um sistema de coordenadas polares esféricas (r, θ, φ) , em que [97]

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (2a)$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi\hat{\varphi}, \quad (2b)$$

em que $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ é a base de vetores diretores ortonormais. É importante destacar, no entanto, que esta base (ao contrário da base retangular cartesiana $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$) não é independente do tempo. Os produtos escalares são então diretamente obtidos

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2, \quad (3a)$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr, \quad (3b)$$

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3c)$$

em que $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Assim, o invariante de linha é dado por

$$ds^2 = [A + Br^2]dr^2 + Ar^2 d\Omega^2 + Cr dr dt + D dt^2, \quad (4)$$

o coeficiente de dr^2 pode ser renomeado, $A + Br^2 = \bar{B}$. Uma vez que temos a liberdade para renomear as coordenadas, podemos realizar mudanças em prol de diagonalizar a métrica, preservando a simetria esférica. Assim, tomemos [44]

$$t \rightarrow \bar{t} = t + f(r), \quad (5)$$

em que $f(r)$ é inicialmente arbitrária. Assim, $d\bar{t} = dt + f' dr$ e, conseqüentemente,

$$dt^2 = d\bar{t}^2 - f'^2 dr^2 - 2f' dr dt, \quad (6)$$

assim,

$$ds^2 = Ar^2 d\Omega^2 + [\bar{B} - Cr f' + D f'^2] dr^2 + [Cr - 2D f'] dr d\bar{t} + D d\bar{t}^2, \quad (7)$$

assim, o termo cruzado se anulará desde que

$$f' = \frac{Cr}{2D}, \quad (8)$$

por outro lado, podemos tomar uma nova coordenada radial, do tipo $\bar{r}^2 = Ar^2$. Portanto, ao absorver os parâmetros e redefinir as coordenadas, obtemos

$$ds^2 = g_{00}(r, t)c^2 dt^2 + g_{11}(r, t)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (9)$$

APÊNDICE B - ARTIGOS CIENTÍFICOS PUBLICADOS E EM PREPARAÇÃO

Com o propósito de facilitar a compressão dos resultados obtidos, os quais deram origem a esta Tese, segue a lista dos trabalhos publicados e em preparação:

- P. H. F. Oliveira, G. Alencar, I. C. Jardim e R. R. Landim. Traversable Casimir wormholes in D dimensions. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 37, n. 15, p. 2250090, 2022.
- P. H. F. Oliveira, G. Alencar, I. C. Jardim e R. R. Landim. On the Traversable Yukawa–Casimir Wormholes. *Symmetry*, v. 15, n. 2, p. 383, 2023.
- P. H. F. Oliveira, I. C. Jardim and R. R. Landim, Wormholes supported by a Antisymmetric Tensor Matter Fields in a Curved Spacetime (em preparação).