



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**BRUNO ROCHA SILVEIRA**

**INFLUÊNCIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL E DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO**  
**NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA**

**FORTALEZA**  
**2023**

BRUNO ROCHA SILVEIRA

INFLUÊNCIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL E DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO  
NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal do  
Ceará, como requisito parcial à obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Vieira  
Gonçalves.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S586i Silveira, Bruno Rocha.

Influência da seção transversal e das condições de contorno nas frequências naturais de uma viga / Bruno Rocha Silveira. – 2023.

60 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Mecânica, Fortaleza, 2023.

Orientação: Profa. Dra. Vanessa Vieira Gonçalves.

1. Frequência natural. 2. Ressonância. 3. Viga. 4. Elementos finitos. 5. Vibração. I. Título.

CDD 620.1

---

BRUNO ROCHA SILVEIRA

INFLUÊNCIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL E DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO  
NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal do  
Ceará, como requisito parcial à obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

Aprovada em: 06/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Profa. Dra. Vanessa Vieira Gonçalves (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francisco Ison Silva Junior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luiz Soares Junior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.

Aos meus pais, Rosa e Alexandro.

## **AGRADECIMENTOS**

À Profa. Dra. Vanessa Vieira Gonçalves, pela excelente orientação e o auxílio no desenvolvimento deste trabalho e em todas as disciplinas por ela ministradas.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Francisco Ilson Silva Junior e Prof. Dr. Luiz Soares Junior, pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Também, a todos os professores do departamento de Engenharia Mecânica que marcaram positivamente este caminho com seus ensinamentos.

Aos colegas de turma, de modo especial aos mais próximos João Paulo, Victor Nogueira, Victor Carlos, Lucas Benício, Antônio Lucas, Daniel Falcão, Hemerson Silveira.

À minha namorada, Letícia Michiles, que esteve ao meu lado por grande parte da graduação, me dando todo o apoio necessário para superar as dificuldades, sendo compreensiva nos momentos de maior intensidade nos estudos e ofertando um grande incentivo em todos os momentos.

Aos meus pais, que me ofereceram todas as condições necessárias para que fosse possível realizar esta graduação, além de serem grandes amigos que sei que posso contar em todos os momentos.

Por fim, principalmente a Deus, principalmente por meio do Carisma da Obra Lumen, comunidade a qual faço parte, no encontro com Jesus abandonado encarnado nas pessoas que mais sofrem em situação de rua, que é meu sustento nos momentos de dificuldade e minha maior companhia dos momentos de alegria.

## RESUMO

A análise das vibrações desempenha um papel crucial em aplicações estruturais, destacando-se a determinação da frequência natural como um fator essencial. Essa determinação é essencial para prevenir a ressonância da estrutura com excitações externas, uma vez que a ressonância pode levar a falhas graves devido às amplitudes significativas de vibração geradas por esse fenômeno. Neste contexto, o objetivo deste estudo é avaliar o impacto das variações na seção transversal e nas condições de contorno na frequência natural de vigas. Isso é realizado por meio de análises computacionais, utilizando o método de elementos finitos em conjunto com soluções analíticas. Para alcançar esse objetivo, foram inicialmente validados os métodos utilizados, baseando-se em estudos prévios. Posteriormente, as dimensões de perfis retangulares, "I", tubulares quadrados e tubulares redondos foram variadas, considerando diferentes condições de suporte, como engastamento em uma extremidade, engastamento em ambas as extremidades e suporte simples. O software Ansys 2023, com licença estudantil, foi escolhido para realizar as simulações por elementos finitos. Os resultados indicaram que a variação na seção transversal impactou significativamente as frequências naturais, com maior influência nos perfis retangulares, seguidos pelos tubulares redondos, tubulares quadrados e, por último, o perfil "I". Quanto às condições de contorno, vigas engastadas demonstraram as menores vibrações naturais, seguidas pelas simplesmente apoiadas, enquanto as bi engastadas exibiram as maiores frequências naturais. Este estudo contribui para uma compreensão mais aprofundada dos efeitos da variação da seção transversal e das condições de contorno na resposta vibratória de vigas, com implicações importantes para o projeto e a análise estrutural. Observou-se que as variações médias nas frequências naturais para uma variação de 100% nas dimensões dos perfis analisados foram determinadas e são de 100% para o perfil retangular, 2,82% para o perfil I, 5,89% para o perfil tubular redondo e 4,62% para o perfil tubular quadrado, que a frequência natural  $\omega_n$  para a condição de bi engastada é igual à frequência natural  $\omega_{n-1}$  para a condição engastada e, por fim, que as vigas simplesmente apoiadas apresentaram suas frequências naturais entre as frequências de engastada e bi engastada.

**Palavras-chave:** frequência natural, ressonância, viga, elementos finitos, vibração.

## ABSTRACT

Vibration analysis plays a crucial role in structural applications, highlighting the determination of natural frequency as an essential factor. This decision is essential to avoid resonance of the structure with external excitations, since resonance can cause serious failures due to the vibration amplitudes generated by this influence. In this context, the objective of this study is to evaluate the impact of variations in cross-section and boundary conditions on the natural frequency of beams. This is carried out through computational analyses, using the finite element method in conjunction with analytical solutions. For this objective, the methods used were initially validated, based on previous studies. Subsequently, the dimensions of rectangular profiles, "I", square tubular and round tubular profiles were varied, considering different support conditions, such as embedding at one end, embedding at both ends and simple support. Ansys 2023 software, with a student license, was chosen to conduct finite element simulations. The results indicated that the variation in the cross section significantly impacted the natural frequencies, with the greatest influence on rectangular profiles, followed by round tubulars, square tubulars and, finally, the "I" profile. As for the boundary conditions, the fixed beams increased the lowest natural vibrations, followed by simply reinforced beams, while the double-fixed beams exhibited the highest natural frequencies. This study contributes to a more in-depth understanding of the effects of varying cross-section and boundary conditions on the vibrational response of beams, with important implications for design and structural analysis. Note that the average variations in natural frequencies for a 100% variation in specific profile dimensions have been determined and are 100% for the rectangular profile, 2.82% for the I profile, 5.89% for the round tubular profile and 4.62% for the square tubular profile, that the natural frequency  $\omega_n$  for the bi-fixed condition is equal to the natural frequency  $\omega_{n-1}$  for the fixed condition and, finally, that the simply reinforced beams complemented their natural frequencies between the frequencies set and bi-set.

**Keyword:** natural frequency, resonance, beam, finite elements, vibration.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Falha na Ponte Tacoma por ressonância .....	16
Figura 2	– Exemplo de uma viga de perfil I .....	19
Figura 3	– Elemento de área em um plano x-y .....	20
Figura 4	– Elemento de área deslocado em um plano x-y .....	21
Figura 5	– Momento de inércia em perfil retangular .....	22
Figura 6	– Momento de inércia em perfil circular .....	23
Figura 7	– Sistema massa-mola-amortecedor .....	24
Figura 8	– Passo a passo do procedimento de análise de vibrações .....	26
Figura 9	– Modelagem de um sistema de forjar .....	27
Figura 10	– Uma viga em flexão .....	28
Figura 11	– Modelagem pelo MEF realizada no software Ansys .....	33
Figura 12	– Passo a passo da metodologia .....	34
Figura 13	– Dimensões dos perfis retangulares .....	35
Figura 14	– Dimensões dos perfis I .....	36
Figura 15	– Dimensões dos tubulares redondos .....	37
Figura 16	– Dimensões dos tubulares quadrados .....	38
Figura 17	– Passo a passo para a determinação das frequências naturais pelo MEF .....	39
Figura 18	– Procedimento para gerar uma malha no Ansys .....	40
Figura 19	– Modelo de perfil retangular com malha aplicada .....	40
Figura 20	– Modelo de perfil I com malha aplicada .....	41
Figura 21	– Modelo de perfil tubular redondo com malha aplicada .....	41
Figura 22	– Modelo de perfil tubular quadrado com malha aplicada .....	41
Figura 23	– Seleção de nó no modelo para aplicação de restrição de deslocamento .....	42

Figura 24 – Procedimento para aplicar a análise de deformação total no Ansys	42
Figura 25 – Procedimento para executar a simulação de uma análise modal no Ansys .....	43
Figura 26 – Tabela com os modos de vibrar gerada pelo software Ansys ao executar a simulação .....	43
Figura 27 – Modos de vibrar analisados nas vigas engastadas .....	46
Figura 28 – Modos de vibrar analisados nas vigas bi engastadas .....	46
Figura 29 – Modos de vibrar analisados nas vigas simplesmente apoiadas .....	47

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil retangular engastado .....	48
Gráfico 2 – Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil I engastado .....	50
Gráfico 3 – Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil tubular redondo engastado .....	52
Gráfico 4 – Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil tubular quadrado engastado .....	54
Gráfico 5 – Comparação das frequências naturais entre as condições de contorno para o perfil retangular .....	57

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Condições de contorno de uma viga .....	31
Tabela 2	– Especificações do material utilizado .....	35
Tabela 3	– Dimensões perfis retangulares .....	35
Tabela 4	– Dimensões perfis I .....	36
Tabela 5	– Dimensões perfis tubulares redondos .....	37
Tabela 6	– Espessura chapa perfis tubulares redondos.....	37
Tabela 7	– Dimensões perfis tubulares quadrados .....	37
Tabela 8	– Espessura chapa perfis tubulares quadrados .....	38
Tabela 9	– Diferença relativa entre as frequências analíticas e por elementos finitos .....	44
Tabela 10	– Diferença relativa entre as frequências analíticas obtidas neste trabalho e em Reis (2016) .....	44
Tabela 11	– Diferença relativa entre as frequências por elementos finitos obtidas neste trabalho e em Reis (2016) .....	45
Tabela 12	– Diferença relativa entre as frequências experimentais do trabalho base e as frequências analíticas deste trabalho .....	45
Tabela 13	– Diferença relativa entre as frequências experimentais do trabalho base e as frequências pelo MEF deste trabalho .....	45
Tabela 14	– Comparação entre as diferenças .....	46
Tabela 15	– Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 3mm de altura .....	47
Tabela 16	– Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 6mm de altura .....	48

Tabela 17 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 9mm de altura .....	48
Tabela 18 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 1,91mm de espessura da alma .....	49
Tabela 19 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 9,53mm de espessura da alma .....	49
Tabela 20 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 19,05mm de espessura da alma .....	49
Tabela 21 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 3,30mm de espessura .....	51
Tabela 22 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 8,00mm de espessura .....	51
Tabela 23 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 10,35mm de espessura .....	51
Tabela 24 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 1,57mm de espessura .....	53
Tabela 25 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 5,55mm de espessura .....	53
Tabela 26 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 7,54mm de espessura .....	53

Tabela 27 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil retangular de altura 3mm .....	55
Tabela 28 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil I de espessura da alma igual a 1,91mm .....	55
Tabela 29 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil tubular redondo de espessura igual a 3,30mm .....	56
Tabela 30 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil tubular quadrado de espessura igual a 1,57mm .....	56
Tabela 31 – Relação percentual das frequências entre a condição de simplesmente apoiada e bi engastada .....	57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativas .....</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceitos sobre elemento estruturais .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1.2</b>	<b><i>Momento de inércia de área .....</i></b>	<b>20</b>
<b>2.1.2.1</b>	<b><i>Perfis retangulares .....</i></b>	<b>21</b>
<b>2.1.2.2</b>	<b><i>Perfis circulares .....</i></b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Conceitos básicos sobre vibrações .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2.1</b>	<b><i>Vibração .....</i></b>	<b>23</b>
<b>2.2.2</b>	<b><i>Partes elementares de sistemas vibratórios .....</i></b>	<b>23</b>
<b>2.2.3</b>	<b><i>Graus de liberdade .....</i></b>	<b>24</b>
<b>2.2.4</b>	<b><i>Frequência natural .....</i></b>	<b>25</b>
<b>2.2.4.1</b>	<b><i>Ressonância .....</i></b>	<b>25</b>
<b>2.2.5</b>	<b><i>Análise modal .....</i></b>	<b>26</b>
<b>2.2.6</b>	<b><i>Procedimento de análise de vibrações .....</i></b>	<b>26</b>
<b>2.2.7</b>	<b><i>Equações do movimento .....</i></b>	<b>28</b>
<b>2.2.7.1</b>	<b><i>Condições de contorno .....</i></b>	<b>29</b>
<b>2.2.7.2</b>	<b><i>Vibração livre .....</i></b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Método De Elementos Finitos .....</b>	<b>32</b>
<b>2.3.1</b>	<b><i>Conceitos do MEF .....</i></b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Material .....</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>Geometrias .....</b>	<b>35</b>
<b>3.2.1</b>	<b><i>Perfis Retangulares .....</i></b>	<b>35</b>
<b>3.2.2</b>	<b><i>Perfil I .....</i></b>	<b>36</b>
<b>3.2.3</b>	<b><i>Perfil Tubular Redondo .....</i></b>	<b>36</b>
<b>3.2.4</b>	<b><i>Perfil Tubular Quadrado .....</i></b>	<b>37</b>
<b>3.3</b>	<b>Validação dos modelos .....</b>	<b>38</b>
<b>3.4</b>	<b>Condições de contorno .....</b>	<b>38</b>
<b>3.5</b>	<b>Método analítico .....</b>	<b>39</b>
<b>3.6</b>	<b>Método de Elementos Finitos .....</b>	<b>39</b>

<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>44</b>
<b>4.1</b>	<b>Validação dos métodos .....</b>	<b>44</b>
<b>4.2</b>	<b>Influência da seção transversal nas frequências naturais de uma viga .....</b>	<b>47</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Perfil Retangular</i> .....</b>	<b>47</b>
<b>4.2.2</b>	<b><i>Perfil I</i> .....</b>	<b>49</b>
<b>4.2.3</b>	<b><i>Perfil Tubular Redondo</i> .....</b>	<b>51</b>
<b>4.2.4</b>	<b><i>Perfil Tubular Quadrado</i> .....</b>	<b>53</b>
<b>4.3</b>	<b>Influência das condições de contorno nas frequências naturais de uma viga .....</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Sugestões para os próximos trabalhos .....</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As vibrações permeiam o cotidiano da sociedade humana desde tempos remotos. Dos nomes que contribuíram para os estudos na área temos Isaac Newton que desenvolveu a teoria da vibração harmônica simples.

Esses princípios têm aplicações abrangentes em diversas áreas da sociedade. Por exemplo, a capacidade auditiva depende da vibração dos tímpanos, a respiração ocorre por meio da vibração dos pulmões, e a fala é viabilizada pela vibração da laringe. Além disso, esses conceitos encontram aplicação nas tecnologias de rádio, onde a ressonância é explorada para ampliar a amplitude das ondas, permitindo uma transmissão de sinal mais eficiente e um alcance expandido. Esses fenômenos extrapolam para as estruturas mecânicas, onde é imperativo evitar que a frequência natural coincida com a frequência de excitação, pois tal coincidência pode desencadear ressonância. Nesse contexto, a amplitude das vibrações aumenta, podendo resultar em falhas estruturais, como evidenciado no incidente da Ponte Tacoma (Figura 1). Neste caso, uma falha de projeto permitiu que a ponte entrasse em ressonância com os ventos intensos do dia, resultando em uma falha estrutural.

Figura 1 – Falha na Ponte Tacoma por ressonância.



Fonte: Tagliani, 2021.

No estudo de vibrações, destaca-se a análise modal, um procedimento com o propósito de descrever estruturas com base em suas propriedades dinâmicas ou modais. Essas propriedades incluem a frequência natural, a frequência de amortecimento e os modos de vibração (Avitabile, 2001).

A frequência natural das estruturas pode ser obtida por um desenvolvimento teórico analítico ou por uma simulação computacional pelo método de elementos finitos, com os desenvolvimentos destes dois métodos, é possível validar os resultados obtidos e aplicar os conceitos presentes na bibliografia.

As influências da seção transversal e das condições de contorno são assuntos de ampla discussão no meio científico, por exemplo, Ece (2006) desenvolveu um estudo sobre a vibração de uma viga de seção transversal variável para três tipos de condições de contorno e concluiu que a não uniformidade na seção transversal influencia as frequências naturais, verificou que a amplitude das vibrações aumenta para o alargamento das vigas e diminui para o estreitamento delas. Já influência das condições de contorno nas frequências naturais de uma viga é objeto de estudo em Yesilce (2013), que desenvolve diversas condições diferentes para que os resultados pudessem ser comparados.

Deste modo, as análises citadas foram desenvolvidas para observar a influência dos parâmetros geométricos de uma viga, no qual os cálculos desenvolvidos no método analítico foram comparados as simulações pelo método de elementos finitos utilizando o software Ansys.

## **1.1 Justificativa**

Neste trabalho será discutida a relevância, na frequência natural, de mudanças na seção transversal, tanto variando o tipo de seção, quanto variando as dimensões de uma mesma seção, e a relevância das condições de contorno de uma viga, visando evitar o fenômeno da ressonância em projetos estruturais.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é verificar a influência da variação da seção transversal e do tipo de suporte da viga nos valores de frequência natural.

Para objetivos específicos, têm-se:

- a) Selecionar diferentes perfis de vigas e tipos de apoios;
- b) Variar as dimensões dos perfis e os apoios e verificar a mudança dos valores das frequências naturais;
- c) Aplicar a método analítico e método numérico para a obtenção das frequências naturais;
- d) Comparar os métodos para obtenção das frequências naturais de sistemas dinâmicos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados tópicos relevantes para o desenvolvimento do trabalho, como os conceitos relativos a elementos estruturais, especialmente sobre vigas, conceitos sobre vibrações, sobre elementos finitos e as equações necessárias.

### 2.1 Conceitos sobre elemento estruturais do tipo viga

Para a construção de estruturas duráveis e confiáveis, se faz necessário desenvolver estudos sobre os elementos que a compõe, como a viga, para análise. Por isso, nesta seção, serão desenvolvidos conceitos utilizados neste trabalho. Vigas são elementos que resistem a flexão e podem ser encontrados em aplicações de construção civil, como pontes, casas e edifícios, na composição do chassi de veículos automotores, na construção naval, máquinas e equipamentos industriais e em veículos aéreos. Este último exemplo pôde ser observado em Lovely (2021), que desenvolveu um estudo que considerava a frequência natural em uma viga de um veículo aéreo não-tripulado (VANT). Na Figura 2, está exposto um exemplo de viga, neste caso, de perfil I.

Figura 2 – Exemplo de uma viga de perfil I.



Fonte: Yena, 2023.

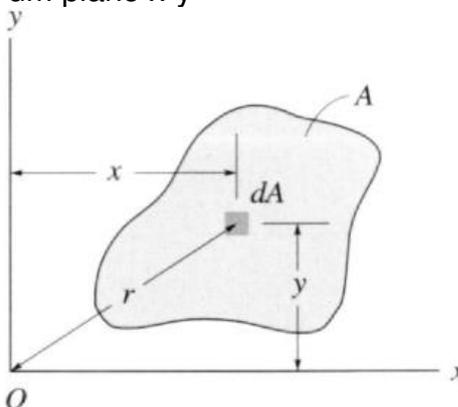
Segundo a NBR 6118:2003, “vigas são lineares em que a flexão é predominante”. Elementos lineares são aqueles que o comprimento longitudinal supera em, pelo menos, três vezes o diâmetro de sua seção transversal (Bastos, 2017).

### 2.1.2 Momento de inércia de área

Para desenvolver a análise de uma viga, é necessário compreender o conceito de momento de inércia, que se trata de uma propriedade geométrica da seção transversal utilizada no estudo da deformação de elementos estruturais indica a resistência à tensão de deformação do material (Silva, 2016).

Por definição, momento de inércia de área de um elemento de área  $dA$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$  são  $dI_x = y^2 dA$  e  $dI_y = x^2 dA$ , respectivamente (Figura 3).

Figura 3 – Elemento de área em um plano x-y



Fonte: Hibbeler, 2011.

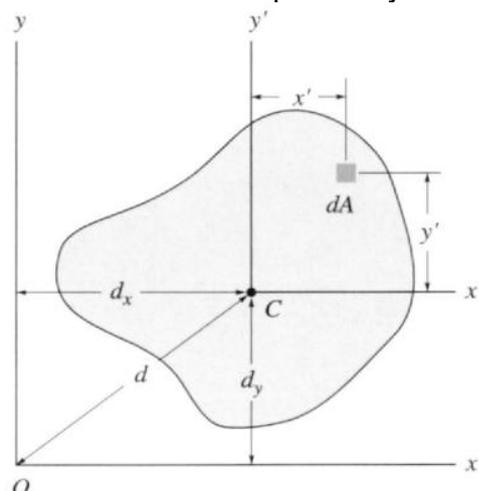
Para obter o momento de inércia da área  $A$  completa, tem-se, por meio de integração:

$$I_x = \int y^2 dA \quad (1)$$

$$I_y = \int x^2 dA, \quad (2)$$

A partir das equações (1) e (2), é possível aplicar o teorema dos eixos paralelos para determinar o momento de inércia desta área em relação a qualquer eixo paralelo ao eixo que passe por um eixo centroide. Para aplicar este teorema, será desenvolvido o momento de inércia da área presente na Figura 4.

Figura 4 – Elemento de área deslocado em um plano x-y



Fonte: Hibbeler, 2011.

Inicialmente, é determinado um elemento de área distante do centroide  $x'$  em relação ao eixo  $y'$  e  $y'$  em relação ao eixo  $x'$ , considerando que a distâncias entre os eixos  $x$  e  $x'$  é  $dy$ , o momento de inércia de  $dA$  será  $dI_x = (y' + dy)^2 dA$ , integrando para a área inteira obtém-se:

$$I_x = \int (y' + dy)^2 = \int y'^2 dA + 2dy \int y' dA + dy^2 \int dA \quad (3)$$

Destas, a segunda integral é igual a zero, pois  $x'$  passa pelo centroide, assim, obtém-se:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A dy^2 \quad (4)$$

E, por consequência:

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A dx^2 \quad (5)$$

### 2.1.2.1 Perfis retangulares

Para determinar o momento de inércia de área em um corpo de seção retangular, pode ser escolhido um elemento infinitesimal, como na Figura 5, onde o elemento está a uma distância  $y'$  do eixo  $x'$ , assim se faz necessária uma integração de  $y' = -\frac{h}{2}$  a  $y' = \frac{h}{2}$ , considerando  $dA = b dy'$ .

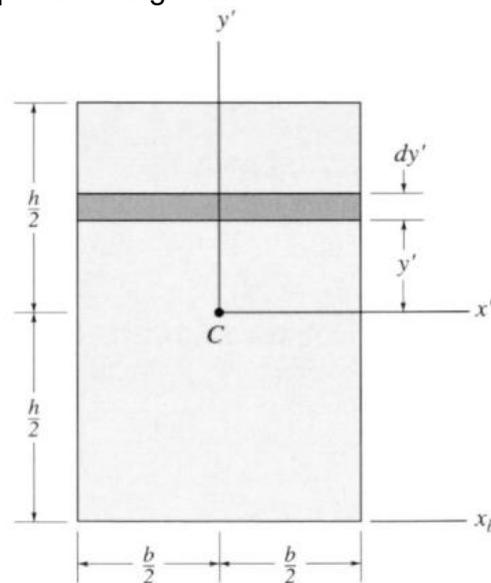
$$\bar{I}_{x'} = \int y'^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 (b dy') = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 dy' = \frac{1}{12} bh^3 \quad (6)$$

Aplicando em  $I_x = \bar{I}_{x'} + A dy^2$ , obtém-se:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 + bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad (7)$$

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 \quad (8)$$

Figura 5 – Momento de inércia em perfil retangular.



Fonte: Hibbeler, 2011.

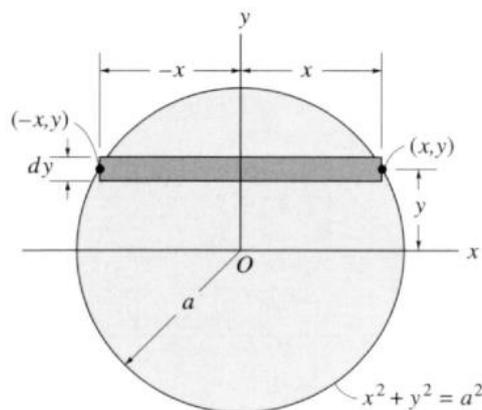
### 2.1.2.2 Perfis circulares

Para obter o momento de inércia de área para perfis circulares, a partir da representação da Figura 6, tem-se que  $dA = 2x dy$  e, assim:

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 (2x) dy = \int y^2 (2\sqrt{a^2 - y^2}) dy \quad (9)$$

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4} \quad (10)$$

Figura 6 – Momento de inércia em perfil circular.



Fonte: Hibbeler, 2011.

## 2.2 Conceitos básicos sobre vibrações

Nesta seção serão desenvolvidos os conceitos necessários para análises de vibrações em vigas que possibilitarão um melhor entendimento do que está sendo estudado neste trabalho.

### 2.2.1 Vibração

Entende-se por vibração, ou oscilação, movimentos que se repetem após um intervalo, este fenômeno pode ser verificado na corda de um violão, por exemplo. O estudo da vibração observa esta oscilação nos corpos e as forças associadas a este movimento (Rao, 2008).

Conforme Thomson (1993, p. 5)

O estudo da vibração preocupa-se com os movimentos oscilatórios dos corpos e as forças a eles associadas. Todos os corpos que possuem massa e elasticidade são capazes de vibrar. Assim, a maioria das máquinas e estruturas de engenharia sofrem vibração até certo ponto, e seu projeto geralmente requer consideração de seu comportamento oscilatório.

### 2.2.2 Partes elementares de sistemas vibratórios

Geralmente, um sistema vibratório possui um meio de armazenar energia potencial elástica, como uma mola ou um corpo elástico ( $k$ ), um meio de armazenar energia cinética, como uma massa ou uma inércia ( $m$ ), além de um

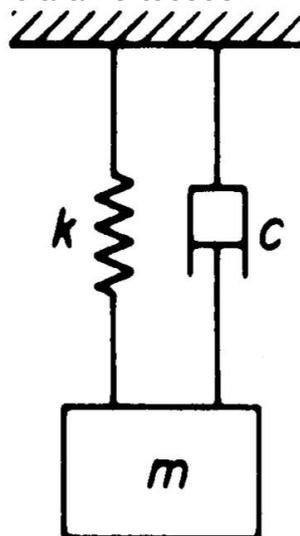
modo de perder gradualmente energia, como um amortecedor ( $c$ ). A vibração de um sistema nestas condições se relaciona com a mudança na forma da energia de potencial para cinética e vice e versa, com uma consequente perda gradual de parte desta energia por meio do amortecimento nos sistemas em que esta variável for levada em consideração.

Também é importante entender a diferença entre as vibrações amortecidas e não amortecidas, quando o sistema apresenta dissipação de energia, este é considerado amortecido, caso não haja energia dissipada, a vibração é considerada não amortecida. Para este trabalho, os sistemas analisados serão não amortecidos (Rao, 2008).

### 2.2.3 Graus de liberdade

O conceito de graus de liberdade pode ser entendido como a quantidade mínima de coordenadas independentes necessárias para determinar completamente as posições de cada parte do sistema vibratório. Um exemplo para um grau de liberdade é um sistema massa-mola-amortecedor, onde ocorre a oscilação apenas em uma direção ao longo do tempo, como está representado na Figura 7.

Figura 7 – Sistema massa-mola-amortecedor.



Fonte: Thomson, 1993.

Entender os graus de liberdade permite determinar as frequências naturais de vibração e compreender os modos de movimento do sistema.

Além disso, a classificação de um sistema está intrinsecamente relacionada à presença de uma força externa. Quando um sistema não é submetido à ação de uma força externa, é denominado sistema livre. Por outro lado, quando está sujeito a uma força externa, a vibração é caracterizada como forçada (Rao, 2008).

#### **2.2.4 Freqüência natural**

A freqüência natural é a freqüência com a qual um corpo sem amortecimento significativo se mantém oscilando, mesmo que já tenha passado uma perturbação inicial, os corpos podem ter  $n$  modos de vibrar e cada um destes terá uma freqüência natural. Esta grandeza é representada pela sigla  $\omega_n$  e é determinada em função da elasticidade e da massa do corpo em questão (Rao, 2008).

Segundo Borobia (2012), em sistemas de um grau de liberdade, a freqüência natural é a freqüência do movimento harmônico livre para uma velocidade inicial e um deslocamento. Esta é representada conforme equação (11).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

onde  $k$  é a rigidez do corpo e  $m$  sua massa.

##### **2.2.4.1 Ressonância**

Conforme Borobia (2012), ressonância é um fenômeno que ocorre quando a força que excita o sistema se iguala a freqüência natural deste, nestes casos, a amplitude de vibração pode ser várias vezes maior que o deslocamento obtido a partir da ação de uma força de mesma magnitude.

Para Thomson (1993), o fenômeno da ressonância pode causar oscilações perigosamente grandes, podendo gerar a falha de estruturas como pontes, edifício e asas de avião.

O fenômeno da ressonância pode ser verificado no famoso caso da ponte Tacoma, ilustrada na Figura 1, esta ponte foi construída em Washington, nos E.U.A. e chegou a apresentar amplitude de oscilação de 90 cm ao ser submetida

a um vento de 65 km/h que não havia sido previsto em seu projeto (Tagliani, 2021).

Na análise de estruturas se faz necessário observar a ressonância para evitar falhas, porém, este conceito pode ser utilizado positivamente, em aplicações de rádio, em que o sinal é amplificado com o aumento da amplitude de onda.

### **2.2.5 Análise modal**

Para a análise de vibrações, se faz necessário desenvolver um modelo que envolva todas as características do sistema. Este modelo é estudado por meio da análise modal.

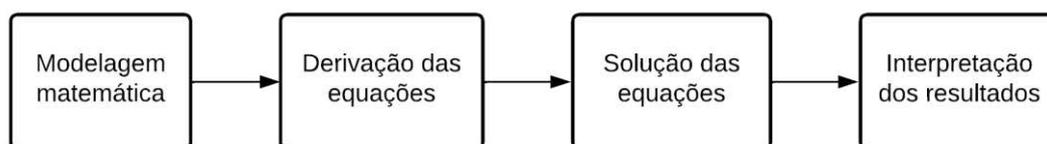
Análise modal é o processo para a determinação das características dinâmicas de um sistema mecânico que podem ser utilizadas para desenvolver um modelo matemático do comportamento dinâmico do sistema estudado (Borobia, 2012).

Este modelo matemático é denominado um modelo modal, ou seja, é composto pelas características modais do sistema que são a frequência natural, os modos de vibrar. Estas informações dependem da massa, da rigidez e do amortecimento do sistema (He & Fu, 2001).

### **2.2.6 Procedimento de análise de vibrações**

Nesta seção, as características modais serão analisadas, porém, vale ressaltar que, neste trabalho não serão consideradas vibrações amortecidas. Na Figura 8, está apresentado um passo a passo para análise de vibrações.

Figura 8 – Passo a passo do procedimento de análise de vibrações.

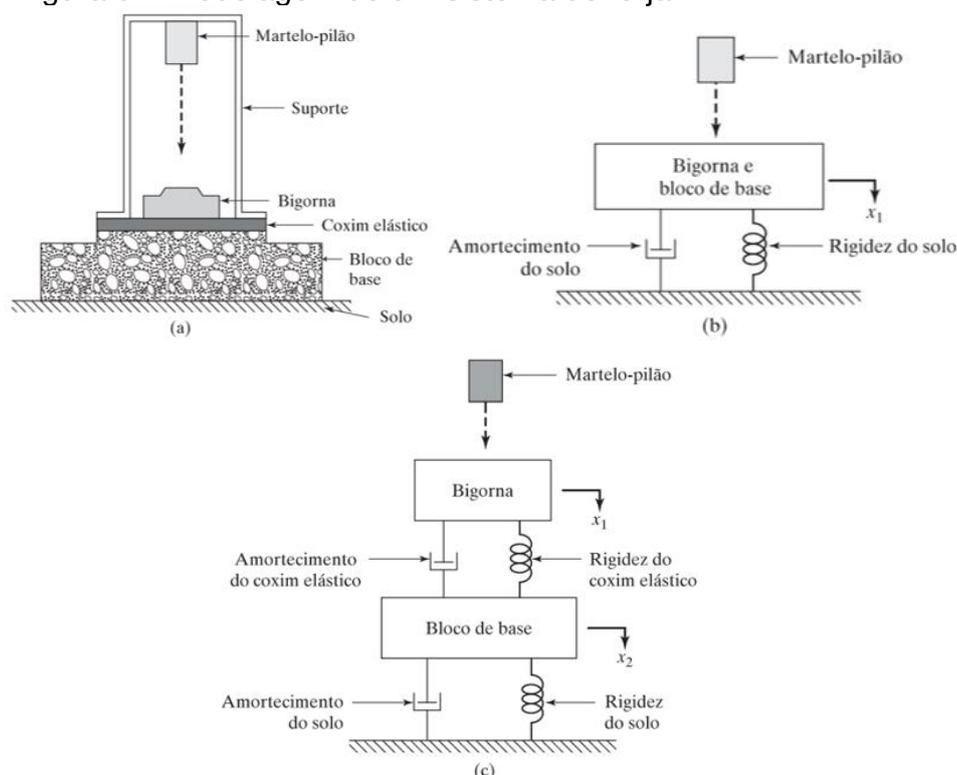


Fonte: Produzido pelo autor.

Inicialmente, o modelo matemático desenvolvido para solucionar o sistema vibratório deve ser o mais simples possível e este modelo deve ser

desenvolvido até atingir as circunstâncias basais para a solução do sistema, por exemplo, na Figura 9, está exposto o desenvolvimento de um modelo de um martelo de forjar onde, em primeiro momento, Figura 9a, tem-se a representação geral, em seguida, na Figura 9b é representado um modelo considerando a elasticidade e o amortecimento da bigorna e da base como um corpo só e, na Figura 9c a bigorna e a base são separadas, cada uma com sua elasticidade e amortecimento.

Figura 9 – Modelagem de um sistema de forjar.



Fonte: Rao, 2008.

Em seguida as equações que governam o sistema devem ser desenvolvidas a partir do diagrama de corpo livre, as equações do movimento podem ser obtidas. Neste trabalho, estas serão desenvolvidas para um sistema estático. Obtidas as equações, estas devem ser aplicadas para as condições específicas do sistema a dependerem do que será determinado na situação e, com isso, os resultados podem ser interpretados conforme as necessidades do projeto.

### 2.2.7 Equações do movimento

Para a análise de um sistema de vibração, faz-se necessário obter as equações de movimentos, nesta seção serão desenvolvidas as equações que regem o movimento e, a partir delas, será obtida a equação da frequência natural.

A partir do diagrama de corpo livre do elemento de viga apresentado na Figura 10b, na qual uma seção de corte da viga é retirada para análise, onde  $M(x, t)$  é o momento fletor,  $V(x, t)$  é a força de cisalhamento e  $f(x, t)$  é a força externa por unidade de comprimento da viga. Considerando que a força de inércia atuante nesta viga é:

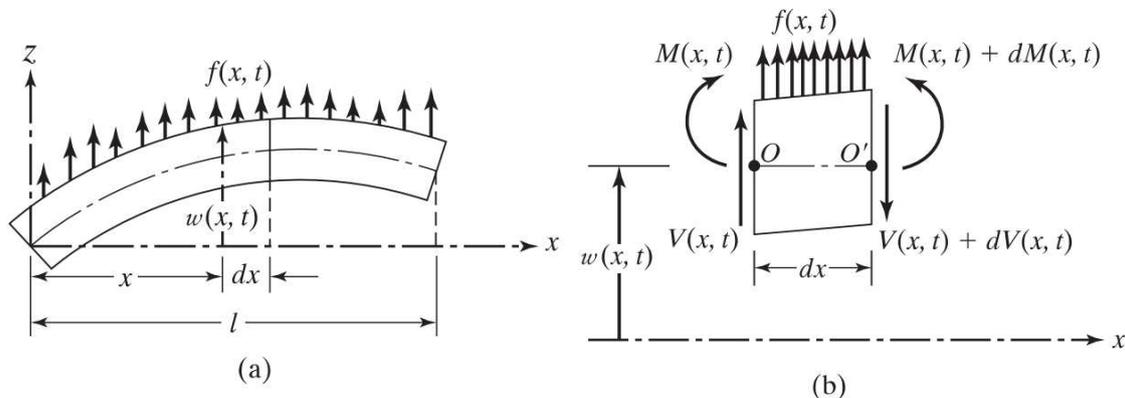
$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

a equação do movimento na direção  $z$  é:

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (12)$$

onde  $\rho$  é a densidade da massa e  $A(x)$  é a seção transversal da viga.

Figura 10 – Uma viga em flexão.



Fonte: Rao, 2008.

A partir da Figura 10 a equação do movimento para o momento em relação ao eixo  $y$  que passa pelo ponto 0 pode ser desenvolvida. Conforme a equação (13).

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (13)$$

Considerando  $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$  e  $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$  e desconsiderando termos que possuem o quadrado de  $dx$  as equações (12) e (13) podem ser escritas da seguinte forma:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (15)$$

Aplicando  $V = \frac{\partial M}{\partial x}$  da equação (15) na equação (14) obtém-se:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (16)$$

Pela teoria de Euler-Bernoulli da flexão de vigas, a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa como:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x, t) \quad (17)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $I(x)$  é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo  $y$ . Aplicando a equação (17) na equação (16), o resultado é a equação do movimento para a vibração lateral forçada de uma viga não-uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (18)$$

A equação (18) é válida para pequenas deformações. Para uma viga uniforme tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (19)$$

Para vibração livre tem-se  $f(x, t) = 0$ :

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (20)$$

Onde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (21)$$

### 2.2.7.1 Condições de contorno

Considerando que a equação do movimento contém a segunda derivada em relação ao tempo e a quarta derivada em relação a  $x$ , é necessário utilizar

duas condições iniciais e quatro condições de contorno para cada solução de  $w(x, t)$ . Geralmente os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como  $w_0(x)$  e  $\dot{w}_0(x)$ , respectivamente, em  $t = 0$  de modo que as condições iniciais ficam:

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \quad (22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) \quad (23)$$

### 2.2.7.2 Vibração livre

Um método que pode ser utilizado para determinar a vibração livre é o método de separação de variáveis:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (24)$$

Aplicando a equação (24) na equação (20) e organizando, obtém-se:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a = \omega^2 \quad (25)$$

onde  $a = \omega^2$  é uma constante positiva, esta equação pode ser escrita dos seguintes modos:

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (27)$$

Onde:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (28)$$

A equação (27) pode ser solucionada da seguinte forma:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (29)$$

sendo A e B são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais. Já para a equação (26), pode ser solucionada do seguinte modo:

$$W(x) = C e^{sx} \quad (30)$$

onde C e s são constantes, e a equação auxiliar pode ser desenvolvida:

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (31)$$

Que tem por raízes:

$$s_{1,2} = \pm \beta, \quad s_{3,4} = \pm i\beta \quad (32)$$

Assim, a solução da equação (29) é:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (33)$$

ou

$$W(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (34)$$

ou

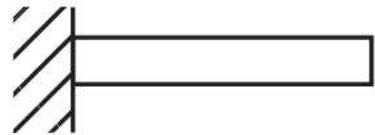
$$W(x) = C_1 (\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3 (\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4 (\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (35)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes que podem ser determinadas pelas condições de contorno. As frequências naturais da equação (29) podem ser determinadas por:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (36)$$

onde  $\beta_n$  é uma constante que varia conforme as condições de contorno, onde  $n$  é o modo de vibrar analisado, sendo  $\beta_1$  para o primeiro modo,  $\beta_2$  para o segundo e assim sucessivamente. Valores para  $\beta_n l$  estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 1 – Condições de contorno de uma viga.

Condições de contorno da viga	Valor de $\beta_n l$
<p>Bi apoiado</p> 	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
<p>Bi engastada</p> 	$\beta_1 l = 4,730041$ $\beta_2 l = 7,853205$ $\beta_3 l = 10,995608$ $\beta_4 l = 14,137165$
<p>Engastada-Livre</p> 	$\beta_1 l = 1,875104$ $\beta_2 l = 4,694091$ $\beta_3 l = 7,854757$ $\beta_4 l = 10,995541$

Fonte: Rao, 2008.

## **2.3 Método De Elementos Finitos**

Em algumas situações, o desenvolvimento de equações pode se tornar demasiadamente complexo, assim, se faz necessária a aplicação de ferramentas computacionais.

O método de elementos finitos (MEF) trata de simulações computacionais para realizar estudos de projetos estruturais. Neste método a geometria é submetida a carregamentos e restrições e é dividida em pequenas partes, chamadas de elementos, que representam o corpo de modo contínuo. Quanto menores os elementos, maior a capacidade de analisar corpos complexos, assim, as infinitas variáveis existentes nas situações reais são simuladas computacionalmente com variáveis finitas de modo a obter um resultado próximo ao real (Mirlisenna, 2016).

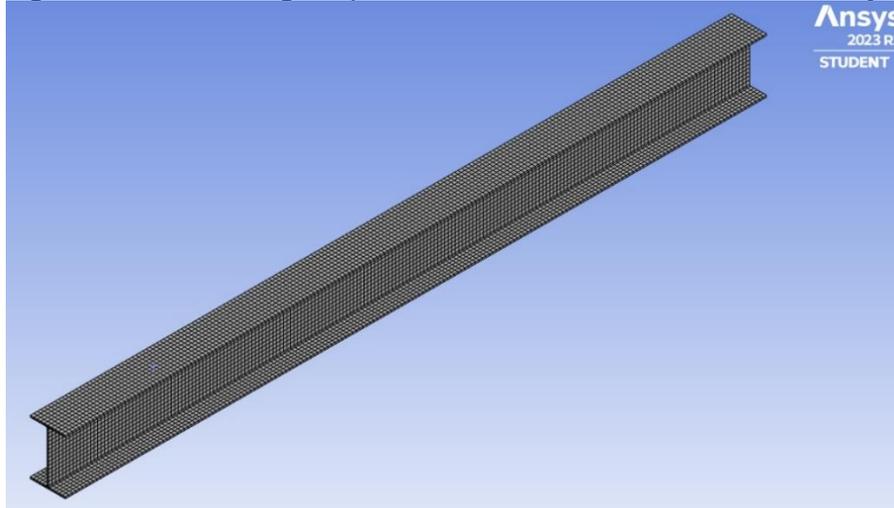
O MEF aplica o conceito de “continuum” que trata o corpo como diversos elementos infinitesimais, desconsiderando espaços entre estes elementos de modo a permitir que os cálculos em torno de um ponto geométrico, de volume igual a zero, sejam realizados por um limite matemático, tal como a definição de derivadas (Ribeiro, 2004).

Existem diversos programas que utilizam elementos finitos, como o Siemens NX, Abaqus, Ansys, SolidWorks (Engrenar Jr, 2019). O software utilizado neste trabalho foi o Ansys.

### **2.3.1 Conceitos envolvidos no MEF**

Dentre os principais conceitos que serão utilizados no método de elementos finitos, tem-se o nó ou pontos nodais, estes são os pontos que conectam os elementos de um modelo (Mirlisenna, 2016). Outro conceito de relevante importância é o de malha, que se trata do conjunto de todos os nós presentes no modelo que formam os elementos (Brasil, 2020), a ilustração de um modelo com malha está presente na Figura 11.

Figura 11 – Modelagem pelo MEF realizada no software Ansys.



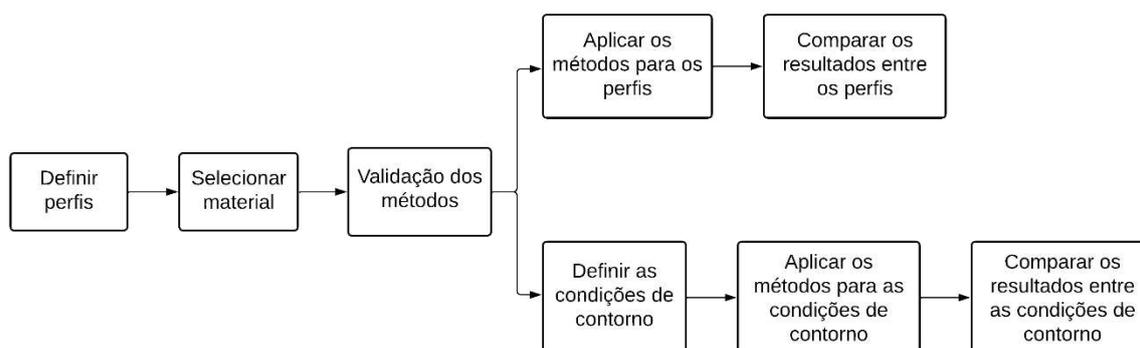
Fonte: Produzido pelo autor.

Inicialmente, na modelagem computacional de um fenômeno físico, são determinadas características que influenciam de modo relevante no projeto realizado, ou seja, devem ser determinados os princípios físicos e as variáveis dependentes e independentes do sistema, para a determinação de um modelo matemático constituído de equações diferenciais. A segunda etapa a ser seguida é determinar a solução do sistema matemático por meio de aplicação computacional (métodos numéricos). Um exemplo de modelagem computacional para a obtenção de resultados pelo MEF está presente na Figura 11.

### 3. METODOLOGIA

Para analisar os efeitos das variações da seção transversal e das condições de contorno na frequência natural, foram desenvolvidas as etapas no fluxograma da Figura 12.

Figura 12 – Passo a passo da metodologia.



Fonte: Produzido pelo autor.

Primeiramente, foram definidos os perfis, depois os materiais foram selecionados para que os métodos numérico e analítico de obtenção das frequências naturais pudessem ser validados a partir de resultados obtidos em um trabalho publicado (Reis, 2016), com isso, foram desenvolvidas duas análises.

Uma delas foi analisado da influência da alteração dos perfis selecionados, por meio da comparação entres as frequências obtidas em cada um; e na outra foram definidas condições de contorno para que um dos perfis selecionados fosse submetido, com isso, foi possível aplicar os métodos validados e comparar os resultados observando a influência das condições de contorno nas frequências naturais da viga.

#### 3.1 Material

Todas os resultados foram obtidos para o aço SAE 1020, para ser possível determinar a influência das variações físicas aplicadas nos perfis das vigas e das mudanças nas condições de contorno. A Tabela 2 apresenta as informações utilizadas deste material para o desenvolvimento das análises realizadas.

Tabela 2 – Especificações do material utilizado.

Material	Aço SAE 1020
Módulo de elasticidade	205 GPa
Coefficiente de Poisson	0,29
Densidade	7870 k/m <sup>3</sup>

Fonte: Reis, 2016.

Vale citar que as propriedades de amortecimento histerérico do material não foram levadas em consideração no desenvolvimento deste trabalho, tendo em vista que o objetivo principal deste é analisar os valores de frequência natural.

### 3.2 Geometrias

Para analisar a influência da seção transversal na frequência natural, foram escolhidos os seguintes perfis: retangular, I, tubular redondo e tubular quadrado.

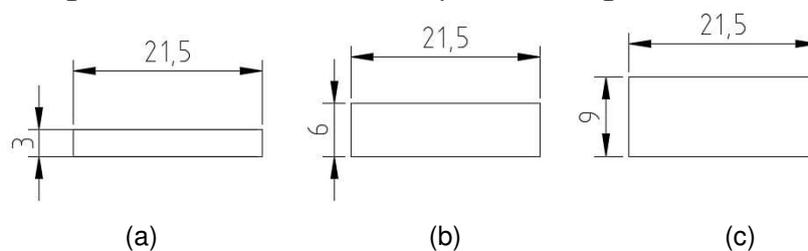
#### 3.2.1 Perfis Retangulares

Para analisar as frequências naturais dos perfis retangulares, as dimensões estão descritas na Tabela 3 e demonstrados na Figura 13.

Tabela 3 – Dimensões perfis retangulares.

Altura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Finalidade
3,0	21,5	432,5	Validação
3,0	21,5	2000	Comparação
6,0	21,5	2000	Comparação
9,0	21,5	2000	Comparação

Figura 13 – Dimensões dos perfis retangulares.



Fonte: Produzido pelo autor.

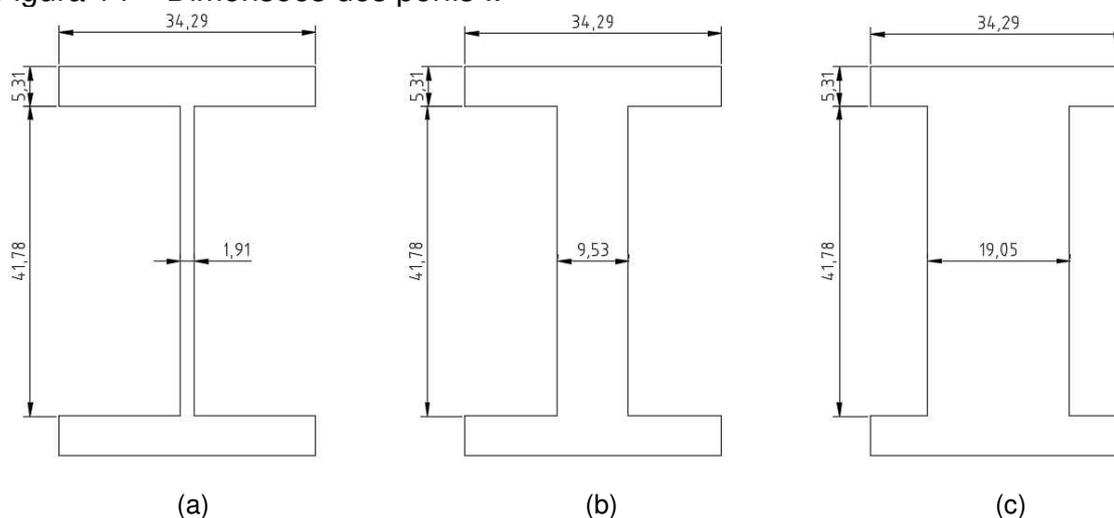
### 3.2.2 Perfil I

Entre as análises com os perfis I a variação ocorreu na largura da alma, que foi aumentada, as dimensões iniciais têm base em Lovely (2021). Estas dimensões estão descritas na Tabela 4 e demonstrados na Figura 14.

Tabela 4 – Dimensões perfis I.

Altura da alma (mm)	Largura da alma (mm)	Largura da aba (mm)	Altura da aba (mm)
41,78	1,905	34,29	5,31
41,78	9,525	34,29	5,31
41,78	19,05	34,29	5,31

Figura 14 – Dimensões dos perfis I.



Fonte: Produzido pelo autor.

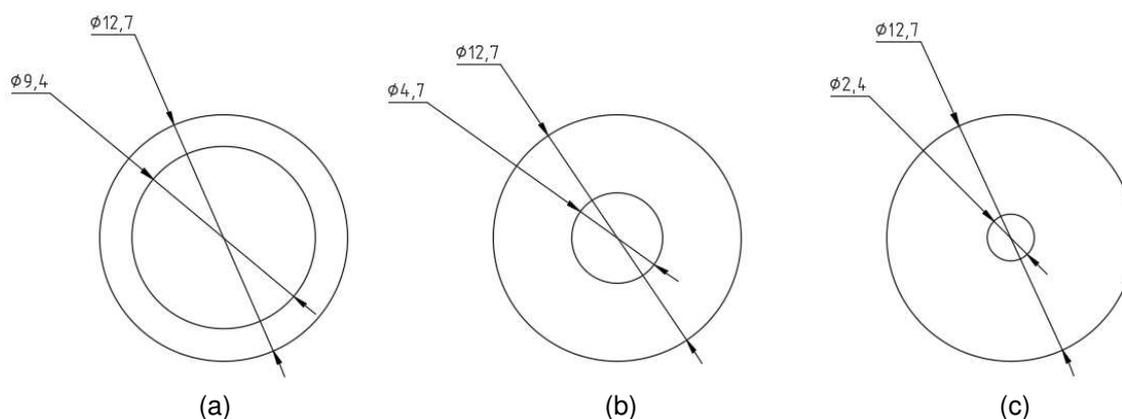
### 3.2.3 Perfil Tubular Redondo

Nos perfis tubulares redondos foi mantido o diâmetro externo e alterado a espessura do metal, ou seja, o diâmetro interno foi reduzido, as dimensões iniciais têm base em Lovely (2021). Estas dimensões estão descritas na Tabela 5, as espessuras dos tubos estão dispostas na Tabela 6 e demonstrados na Figura 15.

Tabela 5 – Dimensões perfis tubulares redondos.

Diâmetro externo (mm)	Diâmetro interno (mm)
12,7	9,4
12,7	4,7
12,7	2,4

Figura 15 – Dimensões dos tubulares redondos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 6 – Espessura chapa perfis tubulares redondos.

Perfil	Espessura do perfil (mm)
(a)	1,17
(b)	4,00
(c)	5,18

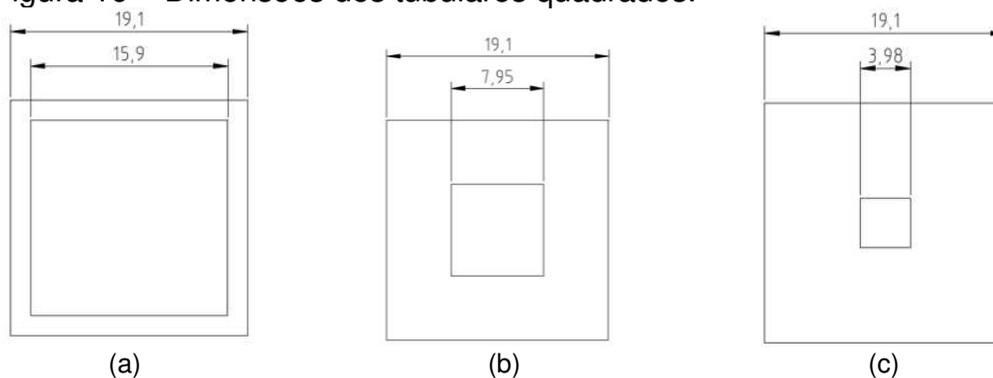
### 3.2.4 Perfil Tubular Quadrado

Nos perfis tubulares quadrados foi mantida a medida do lado externo e alterado a espessura do metal, ou seja, o lado interno foi reduzido, as dimensões iniciais têm base em Lovely (2021). Estas dimensões estão descritas na Tabela 7, as espessuras dos tubos estão dispostas na Tabela 8 e demonstrados na Figura 16.

Tabela 7 – Dimensões perfis tubulares quadrados.

Lado externo (mm)	Lado interno (mm)
19,1	15,9
19,1	7,95
19,1	3,98

Figura 16 – Dimensões dos tubulares quadrados.



Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 8 – Espessura chapa perfis tubulares quadrados.

Perfil	Espessura do perfil (mm)
(a)	1,57
(b)	5,55
(c)	7,54

### 3.3 Validação dos modelos

Antes de iniciar as análises nos perfis selecionados, foi aplicado o método numérico, com o Ansys, e o método analítico em um modelo estrutural que teve como referência o trabalho de Reis (2016), com um perfil mais simples de seção retangular e comprimento de 432,5mm, os resultados foram comparados aos obtidos pelo autor, que obteve resultados pelos métodos analítico, experimental e por elementos finitos. Ao validar o método, em seguida, foram realizadas análises com outras dimensões de perfis retangulares, com perfis I, com perfis tubulares circulares e quadrados. Além disso, com a finalidade de manter um padrão de comprimento entre todos os perfis, estes foram analisados com um comprimento total de 2000mm.

### 3.4 Condições de contorno

Após validação, o método foi replicado para o perfil retangular, variando as seguintes condições de contorno: engastada (Engastada-Livre), bi engastada (Engastada-Engastada) e simplesmente apoiada (bi apoiado).

### 3.5 Método analítico

Para obter as quatro frequências naturais por meio do método analítico, foi utilizada a equação (36).

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (36)$$

Foram utilizadas as informações do material dispostas na Tabela 2, já o comprimento da viga, foi considerado o comprimento de 432,5mm para o cálculo do modelo de validação e de 2000mm para os modelos utilizados para comparação. Ademais, as áreas e os momentos de inércia foram obtidos a partir as características específicas de cada modelo, dispostos nas Figuras 13 a 16 e nas Tabelas 3 a 8. Os momentos de inércia foram calculados com base nas equações (8) e (10).

$$I_x = \frac{1}{3} b h^3 \quad (8)$$

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4} \quad (10)$$

### 3.6 Método de Elementos Finitos

Para realizar uma simulação utilizando o MEF, no software Ansys. O tipo de elemento utilizado foram elementos 3D de elasticidade linear e de difícil convergência, com o intuito de obter as frequências naturais de um corpo, tem-se o fluxograma apresentado na Figura 17:

Figura 17 – Passo a passo para a determinação das frequências naturais pelo MEF.



Fonte: Produzido pelo autor.

1ª Etapa: Determinação dos perfis analisados, neste trabalho, serão utilizados os perfis ilustrados nas Figuras 13 a 16.

2ª Etapa: Devem ser inseridas as informações do aço SAE 1020 presentes na Tabela 2 nos dados de engenharia do Ansys.

3ª Etapa: Devem ser obtidas as geometrias a serem simuladas no SpaceClaim, um dos softwares de CAD internos do Ansys.

4ª Etapa: Definida a geometria, devem ser geradas as malhas utilizadas nos modelos seguindo o procedimento exposto na Figura 18.

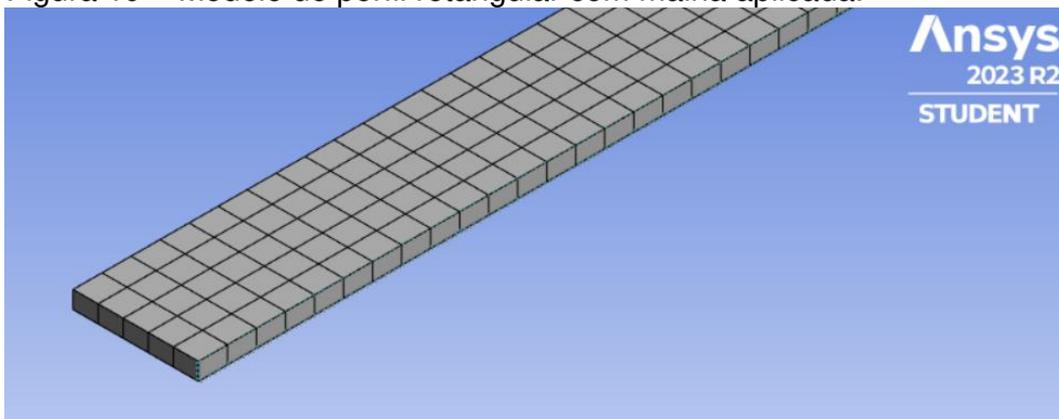
Figura 18 – Procedimento para gerar uma malha no Ansys.



Fonte: Ansys, 2023.

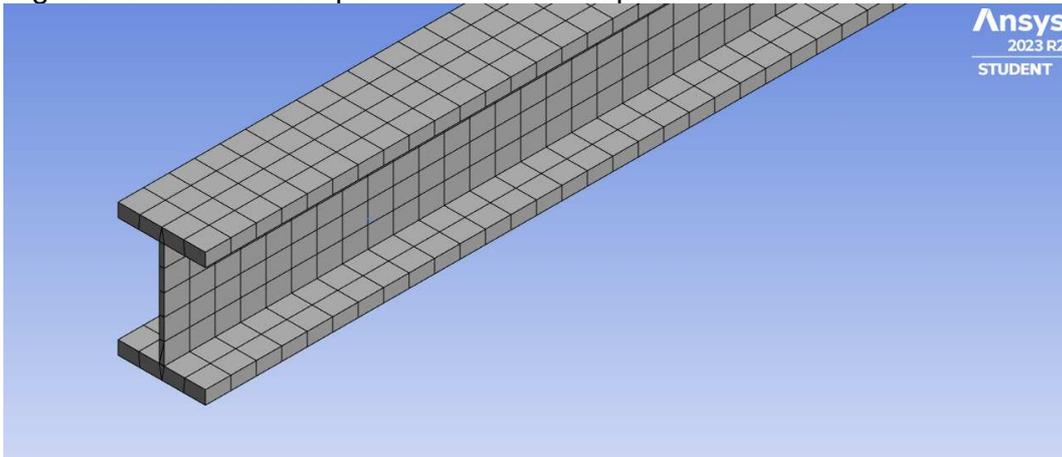
Os perfis de viga analisados com as malhas aplicadas estão demonstrados a partir da Figura 19 até a Figura 22.

Figura 19 – Modelo de perfil retangular com malha aplicada.



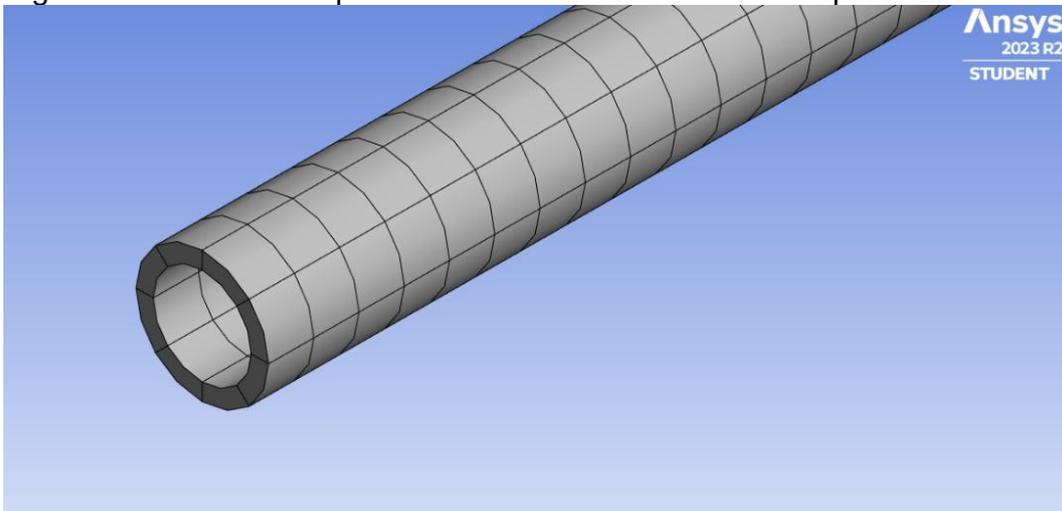
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 20 – Modelo de perfil I com malha aplicada.



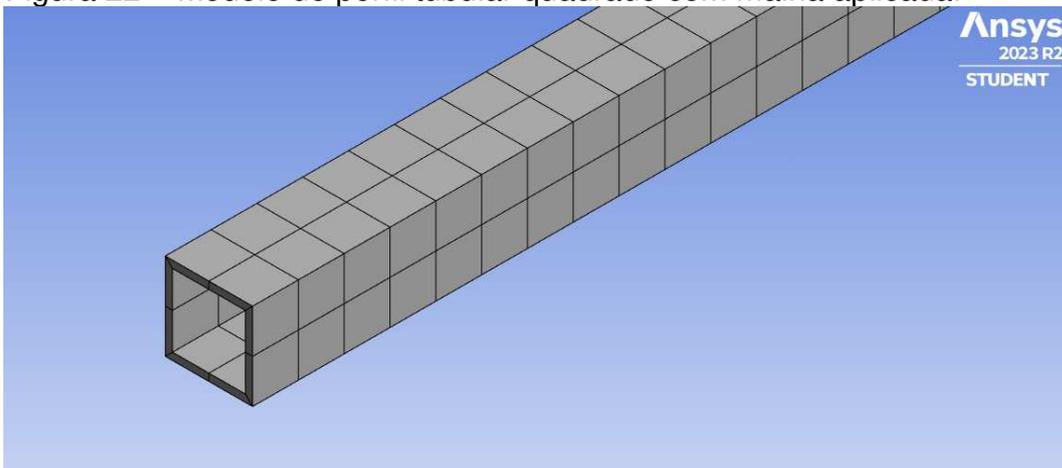
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 21 – Modelo de perfil tubular redondo com malha aplicada.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 22 – Modelo de perfil tubular quadrado com malha aplicada.



Fonte: Produzido pelo autor.

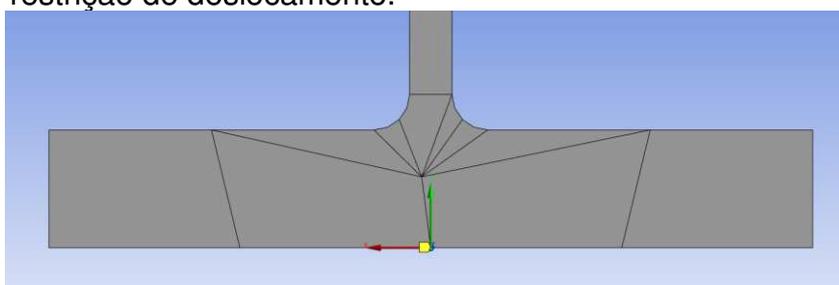
5ª Etapa: Estabelecer as condições de contorno do modelo, considerando faces fixas ou restrições de deslocamento, por exemplo.

Para inserir a condição de engastada em uma viga no Ansys, foi aplicado um suporte fixo na análise modal e selecionada uma das duas faces nas extremidades como geometria deste suporte fixo.

Semelhante à engastada, para inserir a condição de bi engastada em uma viga no Ansys, devem ser inseridos dois suportes fixos na análise modal e selecionada uma extremidade como geometria de cada suporte fixo.

Para inserir a condição de simplesmente apoiada em uma viga no Ansys, foram aplicadas duas restrições de deslocamentos na análise modal, permitindo movimento apenas no sentido axial do eixo, em seguida, foi selecionado um nó da malha de cada lado, atentando-se que estes nós estivessem posicionados na posição inferior da viga, como está exemplificado na Figura 23.

Figura 23 – Seleção de nó no modelo para aplicação de restrição de deslocamento.

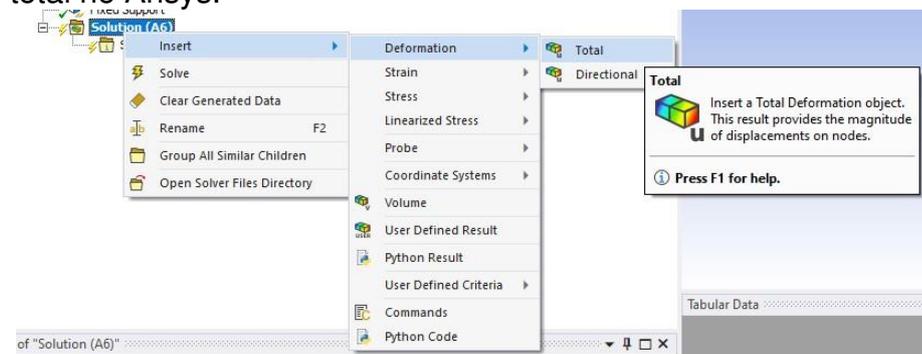


Fonte: Produzido pelo autor.

6ª Etapa: Definir o tipo de análise a ser realizada, como de deformação total para obter os modos de vibrar do corpo analisado.

A seguir foi aplicada a análise de deformação total que, dentre outras informações, fornece os modos de vibrar do corpo com as condições fornecidas até então (Figura 24).

Figura 24 – Procedimento para aplicar a análise de deformação total no Ansys.



Fonte: Ansys (2023).

7ª Etapa: Definidos todos os parâmetros, é possível executar a simulação e obter os resultados das frequências naturais dos modos de vibrar obtidos.

Estabelecidos todos os parâmetros para a execução da simulação, foi selecionada a opção de resolver a simulação (Figura 25).

Figura 25 – Procedimento para executar a simulação de uma análise modal no Ansys.



Fonte: Ansys (2023).

Com isso, o software gera uma tabela com os seis primeiros modos de vibrar por padrão, podendo ser configurado para fornecer quantos forem necessários, um exemplo de tabela com os valores está presente na Figura 26.

Figura 26 – Tabela com os modos de vibrar gerada pelo software Ansys ao executar a simulação.

	Mode	<input checked="" type="checkbox"/> Frequency [Hz]
1	1.	13,13
2	2.	82,264
3	3.	93,632
4	4.	230,31
5	5.	451,27
6	6.	485,43

Fonte: Produzido pelo autor.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão expostos os resultados das simulações e do método analítico, para que estes possam ser validados e comparados.

### 4.1 Validação dos métodos

Para validar os métodos utilizados, esses foram realizados para o perfil de Reis (2016), considerado como o trabalho base nesta seção, na Tabela 9 estão dispostos os resultados da solução analítica e pelo MEF para as quatro frequências naturais obtidas e a diferença relativa entre os métodos. Neste caso, diferenças inferiores a 5% serão consideradas irrelevantes.

Tabela 9 - Diferença relativa entre as frequências analíticas e por elementos finitos.

Frequências naturais	Solução analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	13,22	13,13	0,70%
$\omega_2$	82,86	82,26	0,73%
$\omega_3$	232,02	230,31	0,74%
$\omega_4$	454,68	451,27	0,75%

Visto que todas as diferenças permanecem no intervalo de 0,7% a 0,75%, os resultados podem ser considerados satisfatórios. Na Tabela 10, está disposta a comparação entre os resultados pelo método analítico deste trabalho e do trabalho base.

Tabela 10 - Diferença relativa entre as frequências analíticas obtidas neste trabalho e em Reis (2016).

Frequências naturais	Analítico (Hz) Reis (2016)	Analítico (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	13,33	13,22	0,81%
$\omega_2$	83,57	82,86	0,84%
$\omega_3$	233,99	232,02	0,84%
$\omega_4$	458,53	454,68	0,84%

Visto que todas as diferenças permanecem no intervalo de 0,81% a 0,84%, os resultados podem ser considerados satisfatórios. Na Tabela 11, está disposta a comparação entre os resultados pelo método de elementos finitos deste trabalho e do trabalho base.

Tabela 11 - Diferença relativa entre as frequências por elementos finitos obtidas neste trabalho e em Reis (2016).

Frequências naturais	Elementos Finitos (Hz) Reis (2016)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	13,26	13,13	0,99%
$\omega_2$	83,08	82,26	0,99%
$\omega_3$	232,59	230,31	0,98%
$\omega_4$	455,71	451,27	0,97%

Visto que todas as diferenças permanecem no intervalo de 0,97% a 0,99%, os resultados podem ser considerados satisfatórios. Nas Tabelas 12 e 13 estão dispostas as comparações entre os resultados do método experimental do trabalho base e o método analítico deste trabalho e entre o método experimental do trabalho base e o método de elementos finitos deste trabalho, respectivamente.

Tabela 12 - Diferença relativa entre as frequências experimentais do trabalho base e as frequências analíticas deste trabalho.

Frequências naturais	Experimental (Hz) Reis (2016)	Analítico (Hz)	Diferença relativa à solução analítica
$\omega_1$	11,73	13,22	11,30%
$\omega_2$	66,85	82,86	19,33%
$\omega_3$	176,44	232,02	23,96%
$\omega_4$	369,16	454,68	18,81%

Tabela 13 - Diferença relativa entre as frequências experimentais do trabalho base e as frequências pelo MEF deste trabalho.

Frequências naturais	Resultado analítico (Hz) Reis (2016)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa ao MEF
$\omega_1$	11,73	13,13	10,67%
$\omega_2$	66,85	82,26	18,74%
$\omega_3$	176,44	230,31	23,39%
$\omega_4$	369,16	451,27	18,19%

Foram verificadas elevadas diferenças nas comparações das Tabelas 12 e 13, de 10,67% a 23,96%, especialmente nas frequências mais altas, porém estas se aproximam com as obtidas no trabalho base, isto ocorre por conta das simplificações dos modelos analítico e de elementos finitos em relação ao procedimento experimental. Na Tabela 14 estão dispostas diferenças obtidas

neste trabalho e as diferenças obtidas em Reis (2016), para verificação da proximidade dos resultados.

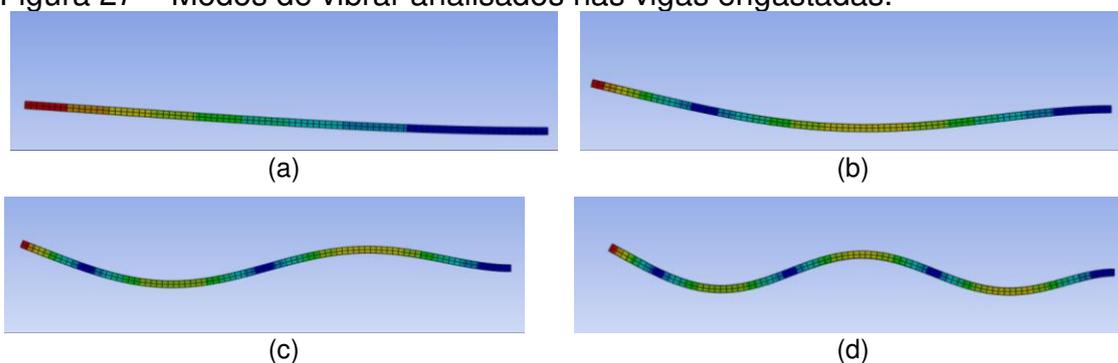
Tabela 14 – Comparação entre as diferenças.

Frequências naturais	Diferença solução analítica em relação à experimental do trabalho base	Diferença Elementos Finitos em relação à experimental do trabalho base	Diferença obtida no trabalho base
$\omega_1$	11,30%	10,67%	12,00%
$\omega_2$	19,33%	18,74%	20,00%
$\omega_3$	23,96%	23,39%	24,60%
$\omega_4$	18,81%	18,19%	19,50%

Assim, será possível seguir adiante com os valores obtidos pelos métodos deste trabalho, como foi realizado no Reis (2016).

Os quatro modos de vibrar obtidos para cada condição de contorno estão apresentados nas Figuras 27 a 29. Na Figura 27, estão dispostos os modos de vibrar analisados para todos os perfis engastados.

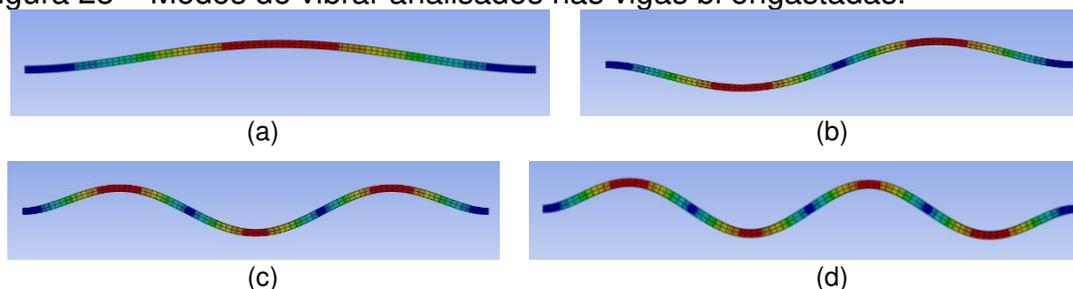
Figura 27 – Modos de vibrar analisados nas vigas engastadas.



Fonte: Produzido pelo autor.

Na Figura 28, estão dispostos os modos de vibrar analisados para todos os perfis bi engastados.

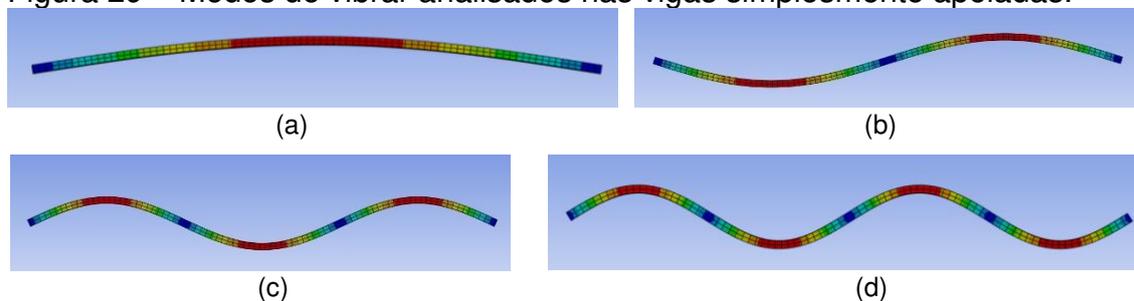
Figura 28 – Modos de vibrar analisados nas vigas bi engastadas.



Fonte: Produzido pelo autor.

Na Figura 29, estão dispostos os modos de vibrar analisados para todos os perfis simplesmente apoiados.

Figura 29 – Modos de vibrar analisados nas vigas simplesmente apoiadas.



Fonte: Produzido pelo autor.

## 4.2 Influência da seção transversal nas frequências naturais de uma viga

Nesta seção foram considerados os resultados para as vigas engastadas, enquanto as dimensões dos perfis são variadas, de modo a verificar, para as mesmas condições de contorno, o impacto destas variações. Além disso, foram traçados gráficos baseados nos valores das soluções analíticas, para facilitar a observação destas variações. Também foram determinados os tipos de função que as frequências obedecem a partir das variações dos perfis.

### 4.2.1 Perfil Retangular

As comparações entre os resultados do método analítico e do MEF para os perfis retangulares estão dispostas nas Tabelas 15 a 17.

Tabela 15 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 3mm de altura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	0,62	0,61	1,00%
$\omega_2$	3,88	3,84	0,99%
$\omega_3$	10,85	10,74	0,99%
$\omega_4$	21,26	21,05	0,99%

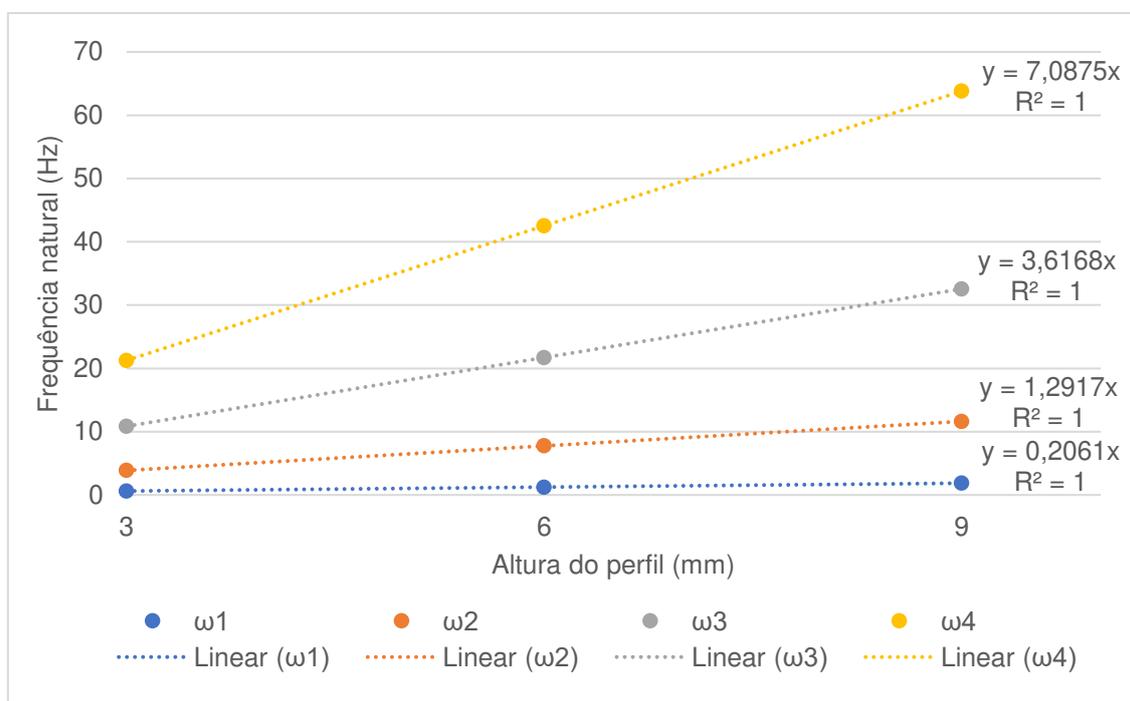
Tabela 16 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 6mm de altura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	1,24	1,22	1,00%
$\omega_2$	7,75	7,67	1,01%
$\omega_3$	21,70	21,48	1,01%
$\omega_4$	42,52	42,09	1,02%

Tabela 17 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil retangular engastado com 9mm de altura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	1,86	1,84	1,02%
$\omega_2$	11,63	11,51	1,03%
$\omega_3$	32,55	32,21	1,04%
$\omega_4$	63,79	63,12	1,05%

Gráfico 1 - Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil retangular engastado.



Fonte: Produzido pelo autor.

Verificando estas tabelas, percebe-se que as diferenças variam de 0,99% a 1,05%, assim, podem ser consideradas conformes. No Gráfico 1 estão distribuídas as frequências naturais em funções lineares, de modo que seja

possível observar a variação de cada modo de vibrar em relação à altura do perfil da viga. Assim, a cada 100% de variação na altura dos perfis retangulares, obteve-se, em média, 100% de aumento nas frequências naturais deste.

#### 4.2.2 Perfil I

As comparações entre os resultados do método analítico e do MEF para os perfis I estão dispostas nas Tabelas 18 a 20.

Tabela 18 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 1,91mm de espessura da alma.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	15,50	15,47	0,19%
$\omega_2$	97,13	94,90	2,30%
$\omega_3$	271,96	257,30	5,39%
$\omega_4$	532,94	482,80	9,41%

Tabela 19 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 9,53mm de espessura da alma.

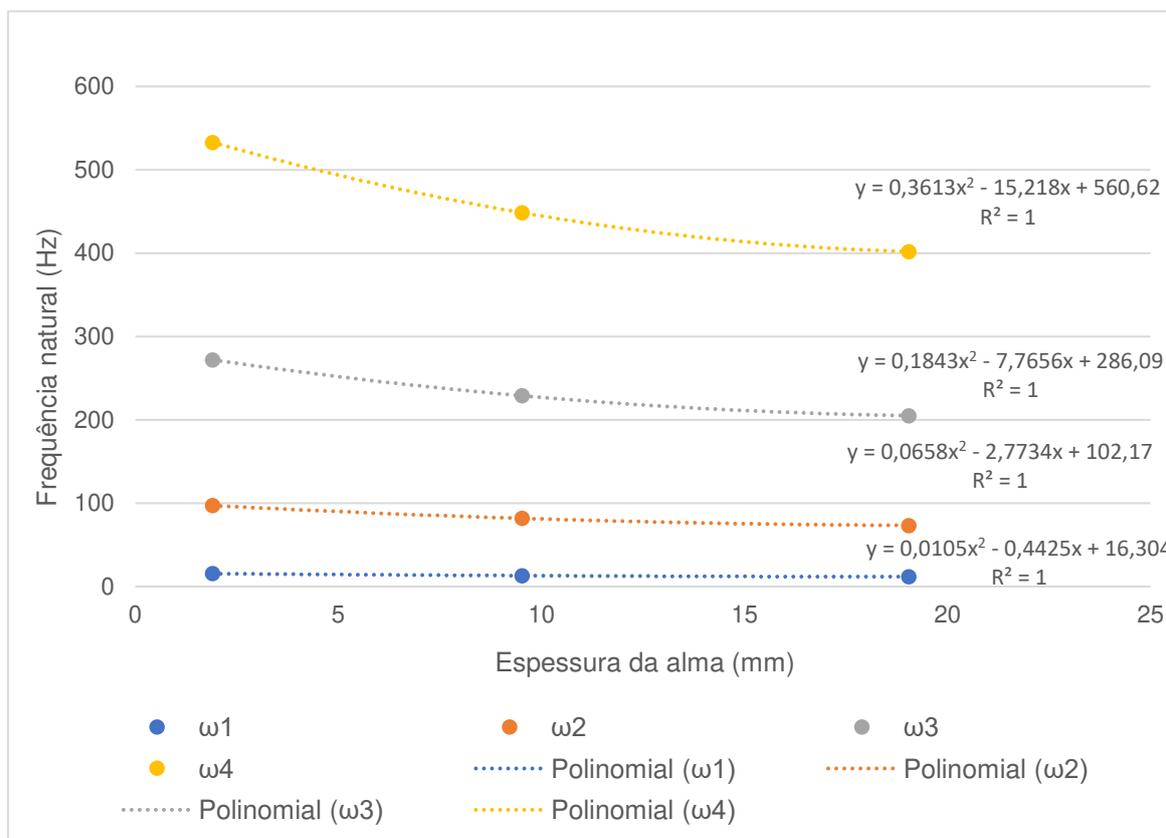
Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	13,04	13,05	-0,08%
$\omega_2$	81,73	81,27	0,56%
$\omega_3$	228,85	225,22	1,59%
$\omega_4$	448,45	434,92	3,02%

Tabela 20 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil I engastado com 19,05mm de espessura da alma.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	11,69	11,70	-0,09%
$\omega_2$	73,23	73,02	0,29%
$\omega_3$	205,05	203,08	0,96%
$\omega_4$	401,83	394,13	1,92%

Verificando estas tabelas, percebe-se que as diferenças variam de -0,09% a 9,41%, assim, podem ser consideradas aceitáveis por estarem abaixo de 10%. No Gráfico 2 estão distribuídas as frequências naturais em funções polinomiais de segundo grau, as funções para cada modo de vibrar estão dispostas no gráfico.

Gráfico 2 - Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil I engastado.



Fonte: Produzido pelo autor.

Verificando a variação, percebeu-se que, quando a altura foi duplicada, a frequência natural também duplicou. Realizando uma comparação entre os resultados do perfil com a espessura da alma de 1,91mm (Tabela 18) e com a espessura da alma de 9,53mm (Tabela 19), para um aumento de 500% na espessura da alma, houve uma redução de, aproximadamente, 15,9% nas frequências naturais da primeira em relação à segunda. Já observando a comparação entre a espessura da alma de 1,91mm (Tabela 18) e com a espessura da alma de 19,1mm (Tabela 20) para um aumento de 1000% na espessura da alma, houve uma redução de, aproximadamente, 24,6% nas frequências naturais da primeira em relação à última. Assim, a cada 100% de variação nas espessuras das almas dos perfis I, obteve-se, em média, uma redução de 2,82% nas frequências naturais destes.

### 4.2.3 Perfil Tubular Redondo

As comparações entre os resultados do método analítico e do MEF para os perfis tubulares redondos estão dispostas nas Tabelas 21 a 23.

Tabela 21 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 3,30mm de espessura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	2,79	2,79	0,00%
$\omega_2$	17,46	17,47	-0,06%
$\omega_3$	48,88	48,88	0,00%
$\omega_4$	95,78	95,72	0,06%

Tabela 22 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 8,00mm de espessura.

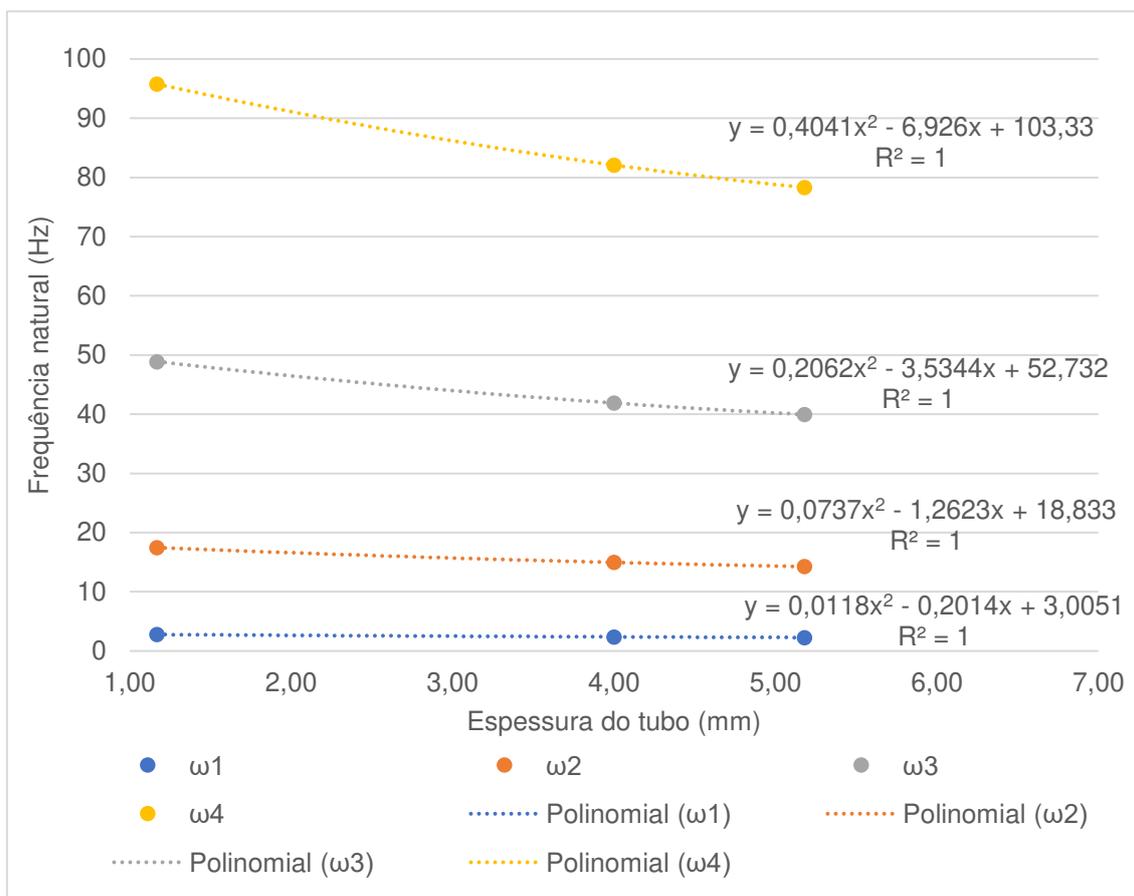
Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	2,39	2,39	0,00%
$\omega_2$	14,96	14,97	-0,07%
$\omega_3$	41,89	41,91	-0,05%
$\omega_4$	82,10	82,10	-0,03%

Tabela 23 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular redondo engastado com 10,35mm de espessura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	2,28	2,28	0,00%
$\omega_2$	14,27	14,28	-0,08%
$\omega_3$	39,96	39,98	-0,05%
$\omega_4$	78,30	78,32	-0,02%

Verificando estas tabelas, percebe-se que as diferenças variam de -0,08% a 0,06%, assim, podem ser consideradas aceitáveis por estarem abaixo de 10%. No Gráfico 3 estão distribuídas as frequências naturais em funções polinomiais de segundo grau, as funções para cada modo de vibrar estão dispostas no gráfico.

Gráfico 3 - Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil tubular redondo engastado.



Fonte: Produzido pelo autor.

Realizando uma comparação entre os resultados do perfil com a espessura do tubo de 3,30mm (Tabela 21) e com a espessura do tubo de 8,00mm (Tabela 22), para um aumento de, aproximadamente, 242% na espessura do tubo, houve uma redução de, aproximadamente, 14,3% nas frequências naturais da primeira em relação à segunda. Já observando a comparação entre a espessura do tubo de 3,30mm (Tabela 21) e com a espessura do tubo de 10,35mm (Tabela 23) para um aumento de, aproximadamente, 313,64% na espessura do tubo, houve uma redução de, aproximadamente, 18,3% nas frequências naturais da primeira em relação à última. Assim, a cada 100% de variação nas espessuras dos tubos de perfis tubulares redondos, obteve-se, em média, uma redução de 5,89% nas frequências naturais destes.

#### 4.2.4 Perfil Tubular Quadrado

As comparações entre os resultados do método analítico e do MEF para os perfis tubulares quadrados estão dispostas nas Tabelas 24 a 26.

Tabela 24 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 1,57mm de espessura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	5,05	5,06	-0,20%
$\omega_2$	31,66	31,67	-0,03%
$\omega_3$	88,65	88,51	0,16%
$\omega_4$	173,71	172,97	0,43%

Tabela 25 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 5,55mm de espessura.

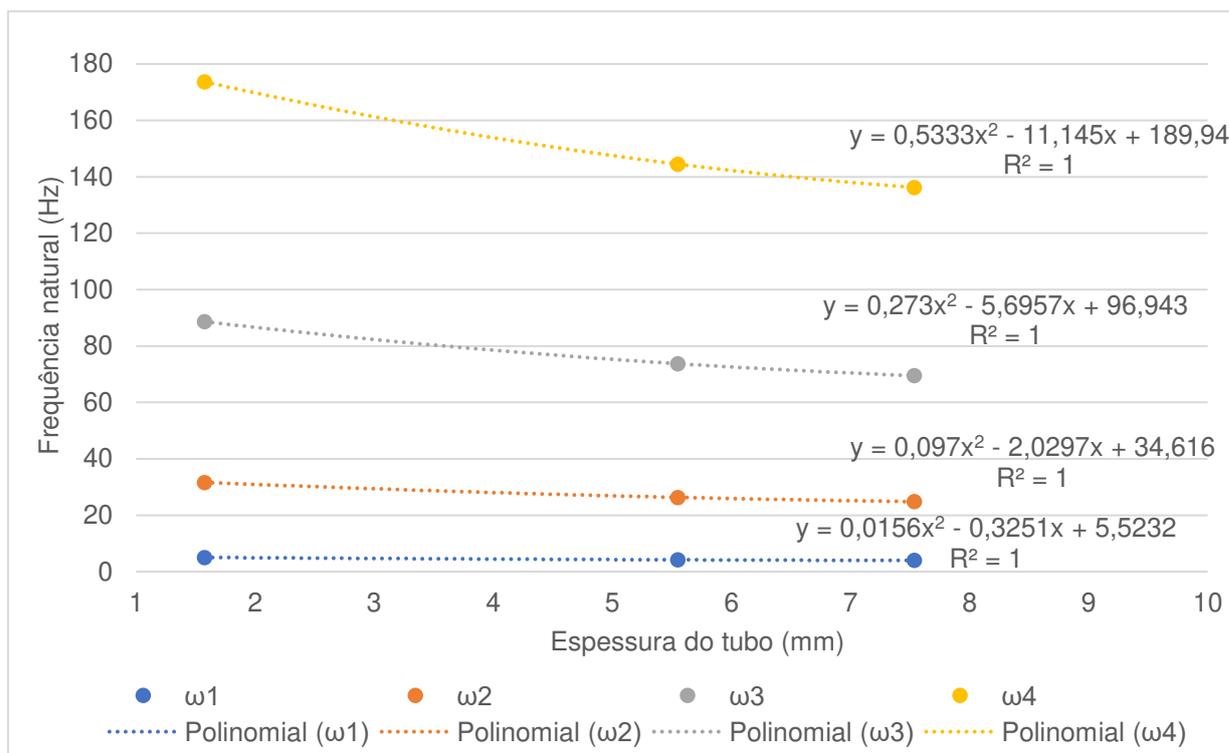
Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	4,2	4,21	-0,24%
$\omega_2$	26,34	26,37	-0,11%
$\omega_3$	73,74	73,75	-0,01%
$\omega_4$	144,51	144,32	0,13%

Tabela 26 – Comparação entre os resultados dos métodos analítico e de elementos finitos para o perfil tubular quadrado engastado com 7,54mm de espessura.

Frequências naturais	Solução Analítica (Hz)	Elementos Finitos (Hz)	Diferença relativa
$\omega_1$	3,96	3,97	-0,25%
$\omega_2$	24,83	24,86	-0,12%
$\omega_3$	69,52	69,56	-0,06%
$\omega_4$	136,23	136,16	0,05%

Verificando estas tabelas, percebe-se que as diferenças variam de -0,25% a 0,43%, assim, podem ser consideradas aceitáveis por estarem abaixo de 10%. No Gráfico 4 estão distribuídas as frequências naturais em funções polinomiais de segundo grau, as funções para cada modo de vibrar estão dispostas no gráfico.

Gráfico 4 - Comportamento dos modos de vibrar com a variação da altura do perfil tubular quadrado engastado.



Fonte: Produzido pelo autor.

Realizando uma comparação entre os resultados do perfil com a espessura do tubo de 1,57mm (Tabela 24) e com a espessura do tubo de 5,55mm (Tabela 25), para um aumento de, aproximadamente, 353,5% na espessura do tubo, houve uma redução de, aproximadamente, 16,8% nas frequências naturais da primeira em relação à segunda. Já observando a comparação entre a espessura do tubo de 1,57mm (Tabela 24) e com a espessura do tubo de 7,54mm (Tabela 26) para um aumento de, aproximadamente, 480,25% na espessura do tubo, houve uma redução de, aproximadamente, 21,6% nas frequências naturais da primeira em relação à última. Assim, a cada 100% de variação nas espessuras dos tubos de perfis tubulares quadrados, obteve-se, em média, uma redução de 4,62% frequências naturais destes.

Verificou-se que, com exceção dos perfis retangulares, todos os outros apresentaram reduções nas suas frequências naturais, apesar do aumento no momento de inércia.

### 4.3 Influência das condições de contorno nas frequências naturais de uma viga

Nesta seção foram considerados os resultados para as vigas, enquanto suas condições de contorno são variadas, de modo a verificar, para o mesmo perfil, o impacto destas variações. Os perfis com as menores dimensões entre as variadas foram considerados nestas análises.

A comparação entre os resultados do método analítico das três condições de contorno do perfil retangular está disposta na Tabela 27.

**Tabela 27 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil retangular de altura 3mm.**

Frequências naturais	Engastada-Livre	Bi engastada	Bi apoiada
$\omega_1$ (Hz)	0,61	3,90	1,72
$\omega_2$ (Hz)	3,84	10,75	6,87
$\omega_3$ (Hz)	10,74	21,08	15,45
$\omega_4$ (Hz)	21,05	34,84	27,47

A comparação entre os resultados do método analítico das três condições de contorno do perfil I está disposta na Tabela 28.

**Tabela 28 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil I de espessura da alma igual a 1,91mm.**

Frequências naturais	Engastada-Livre	Bi engastada	Bi apoiada
$\omega_1$ (Hz)	15,47	95,41	43,16
$\omega_2$ (Hz)	94,90	252,63	168,26
$\omega_3$ (Hz)	257,30	471,94	363,69
$\omega_4$ (Hz)	482,80	738,80	614,22

A comparação entre os resultados do método analítico das três condições de contorno do perfil tubular redondo está disposta na Tabela 29.

Tabela 29 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil tubular redondo de espessura igual a 3,30mm.

Frequências naturais	Engastada-Livre	Bi engastada	Bi apoiada
$\omega_1$ (Hz)	2,79	17,74	7,82
$\omega_2$ (Hz)	17,47	48,86	31,28
$\omega_3$ (Hz)	48,88	95,71	70,34
$\omega_4$ (Hz)	95,72	158,05	124,94

A comparação entre os resultados do método analítico das três condições de contorno do perfil tubular quadrado está disposta na Tabela 30.

Tabela 30 – Comparação entre os resultados analíticos das condições de contorno para o perfil tubular quadrado de espessura igual a 1,57mm.

Frequências naturais	Engastada-Livre	Bi engastada	Bi apoiada
$\omega_1$ (Hz)	5,06	32,15	14,19
$\omega_2$ (Hz)	31,67	88,42	56,62
$\omega_3$ (Hz)	88,51	172,81	126,91
$\omega_4$ (Hz)	172,97	284,58	224,41

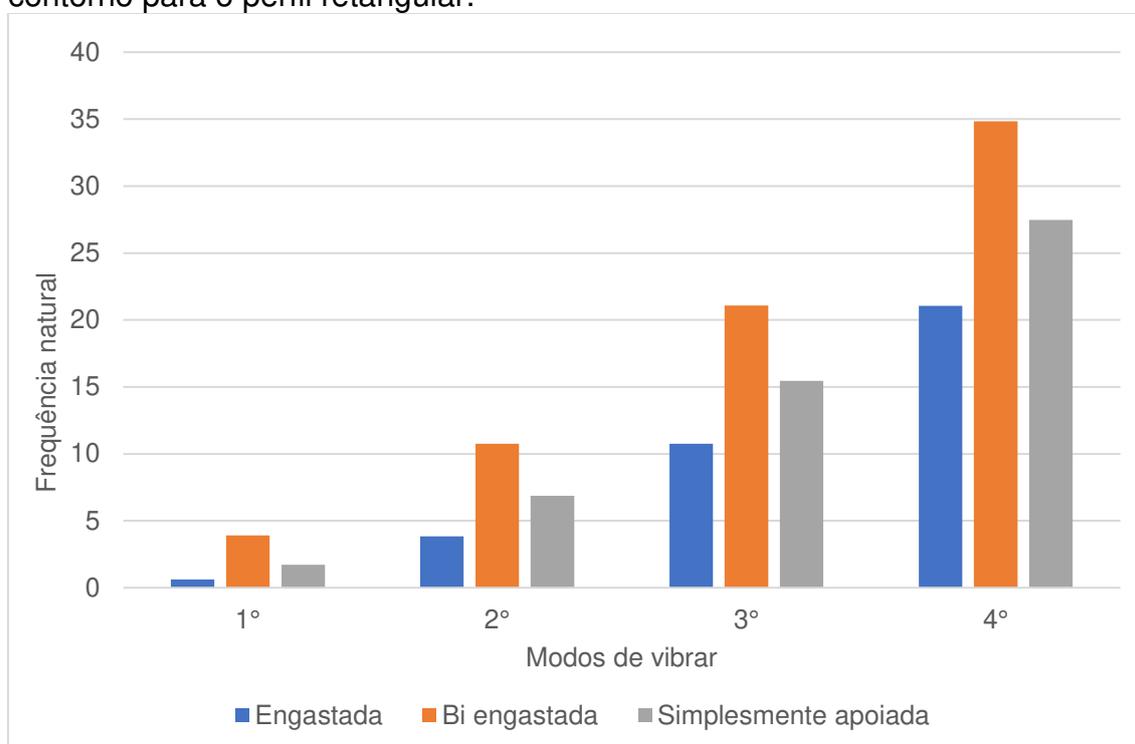
Primeiramente, é possível analisar que os primeiros modos de vibrar para as condições de contorno “Bi engastada” de todos os perfis são iguais aos segundos modos de vibrar da condição “Engastada-Livre”, este fenômeno se deve ao fato de que o movimento do corpo é restrito ao ter uma de suas extremidades engastadas, por isso um modo de vibrar é “perdido”. Além disso, todos os valores de frequência natural para as vigas simplesmente apoiadas ficaram entre as engastadas e as bi engastadas, na Tabela 31 estão as relações percentuais das frequências para a condição de simplesmente apoiada em relação à bi engastada.

O Gráfico 5 apresenta a comparação entre as condições de contorno para cada modo de vibrar, a constatação de que os modos de vibrar da condição de bi engastada (colunas laranjas) são iguais aos modos anteriores da condição de engastada (colunas azuis) pode ser observada com clareza nesta representação.

Tabela 31 – Relação percentual das frequências entre a condição de simplesmente apoiada e bi engastada.

Frequências naturais	Simplesmente apoiada em relação a bi engastado
$\omega_1$ (Hz)	35,50%
$\omega_2$ (Hz)	51,71%
$\omega_3$ (Hz)	59,46%
$\omega_4$ (Hz)	63,98%

Gráfico 5 – Comparação das frequências naturais entre as condições de contorno para o perfil retangular.



Fonte: Produzido pelo autor.

## 5 CONCLUSÃO

O modelo desenvolvido apresentou conformidade em relação à referência utilizada para validação, Reis (2016), as diferenças relativas obtidas entre os resultados analíticos neste desenvolvidos e os da referência permaneceram inferiores a 1,00%, o mesmo ocorreu para os resultados obtidos pelo método de elementos finitos. Nesse contexto, as diferenças obtidas em relação ao método experimental deste permaneceram, também, próximas. Por isso, os modelos utilizados foram considerados válidos.

Ademais, tratando-se do impacto do perfil das vigas nas frequências naturais, as variações médias nas frequências naturais para uma variação de 100% nas dimensões dos perfis analisados foram determinadas e são de 100% para o perfil retangular; 2,82% para o perfil I; 5,89% para o perfil tubular redondo e 4,62% para o perfil tubular quadrado.

Assim, as geometrias analisados mais sensíveis a variações em seus perfis são, nesta ordem, o perfil retangular, o perfil tubular redondo, o perfil tubular quadrado e o perfil I.

Além disso, observando as mudanças nas condições de contorno, verificou-se que a frequência natural  $\omega_n$  para a condição de bi engastada é igual à frequência natural  $\omega_{n-1}$  para a condição engastada, já a bi engastada não apresenta extremidades livres, o primeiro modo de vibrar das vigas engastadas não pode ser detectado nas vigas bi engastadas.

Também se percebeu que as vigas simplesmente apoiadas apresentaram seus valores de frequências naturais entre os valores das frequências de engastada e bi engastada, ao se relacionar estes valores com as das vigas fixas, foi possível verificar relações percentuais variando de 35,5%, no primeiro modo de vibrar, até 63,4% no segundo modo de vibrar, sendo, quanto maior o modo de vibrar, mais este se aproximou do resultado obtido na condição de bi engastada.

A compatibilidade entre os resultados analíticos e numéricos também mostram a viabilidade do uso da ferramenta Ansys tanto para pesquisas, quanto para abordagem didática em sala de aula, contribuindo para melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

## 5.1 Sugestões para os próximos trabalhos

Como sugestão para próximos estudos a partir do que foi desenvolvido neste trabalho tem-se a verificação da convergência dos valores de frequências naturais considerando elementos de uma dimensão no método de elementos finitos e com vigas de comprimentos menores. Também pode ser desenvolvido um estudo semelhante ao desenvolvido neste trabalho, porém considerando valores de amortecimento. Outra sugestão é de desenvolver um estudo para entender a causa dos comportamentos diferentes dos perfis ao terem sua seção variada, entender o motivo de algumas frequências diminuírem, enquanto outra cresce.

## REFERÊNCIAS

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS – 5 MOTIVOS DE SUA IMPORTÂNCIA. Engrenar Jr, 2019. Disponível em: <<https://engrenarjr.com.br/blog/o-que-e-analise-por-elementos-finitos-5-motivos-para-ficar-de-olho-nessa-tecnologia/#:~:text=A%20teoria%20por%20trás%20de,problemas%20que%20os%20projetistas%20necessitam>>. Acesso em 31/10/2023.

ANSYS, Inc. Ansys Student. Versão 2023. Canonsburg, Pensilvânia, EUA; 2023. Disponível em <[www.ansys.com](http://www.ansys.com)>. Acesso em: 15/09/2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2003.

AVITABILE, P. Experimental Modal Analysis: A Simple Non-Mathematical Presentation. Sound and Vibration, Lowell, v. 35, p. 20-31, Janeiro 2001.

BASTOS, P. S. Vigas de Concreto Armado. Bauru, SP: 2017.

BOROBIA, J. P. Elemento de Máquinas y Vibraciones. 3ª Ed. Argentina: McGraw-Hill, 2012.

BRASIL, R. Para leigos: entenda o Método dos Elementos Finitos, 2020. Disponível em: <<https://kotengenharia.com.br/para-leigos-entenda-o-metodo-dos-elementos-finitos/>>. Acesso em: 06/11/2023.

ECE, M. C.; AYDOGDU, M.; TASKIN, V. Vibration of a variable cross-section beam. Turkey: Trakya University, 2006.  
HE, J.; FU, Z. F. Modal Analysis. 1ª Ed. Butterworth-Heinemann. Massachusetts: 2001.

HIBBELER, R. C. Estática: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall. 2011.

I-Beam vs H-Beam: What Is the Difference?. Yena Engreeneering, 2023. Disponível em: <<https://yenaengineering.nl/i-beam-vs-h-beam/>>. Acesso em: 15/11/2023.

LOVELY, S. The Effect of Wing Spar Cross-Sectional Profile Variation on the Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Natural Frequency. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 1062: 2021.

MIRLISENNA, G. (2016). Método dos Elementos Finitos: o que é?. ESSS. Disponível em: <<https://www.esss.co/blog/metodo-dos-elementos-finitos-o-que-e/#:~:text=Os%20elementos%20finitos%20são%20conectados,se%20o%20nome%20de%20malha.>>. Acesso em: 06/11/2023.

Rao, Singiresu S. Vibrações mecânicas. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2008.

REIS, Eduardo V. M. Dos; LIMA, Sergio H. B. ROTINAS PARA EXTRAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS E ESTUDOS DE CASO. Rio de Janeiro: UFF, 2016.

RIBEIRO, Fernando L. B. Introdução ao Método de Elementos Finitos. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

Roque, A. Sistema massa-mola e o movimento harmônico simples. Março, 2023.

TAGLIANI, S. Conheça o incrível caso da Ponte de Tacoma [estudada por arquitetos e engenheiros]. Engenharia 360, 2021. Disponível em <[engenharia360.com/o-incrivel-caso-da-ponte-de-tacoma/](http://engenharia360.com/o-incrivel-caso-da-ponte-de-tacoma/)>. Acesso em: 17/10/2023.

SILVA; A. A. P. MOMENTO DE INÉRCIA, DE MASSA OU DE ÁREA?. Mogi Mirim: Faculdade de Tecnologia de Mogi-Mirim, 2016.

THOMSON, W. T. Theory of Vibration with Applications. 4<sup>a</sup> Ed. Spring Science, California: 1993.

Yesilce, Y. Determination of natural frequencies and mode shapes of axially moving Timoshenko beams with different boundary conditions using differential transform method. Adv. Vib. Eng, 12(1), 89-108. (2013).