



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**LUCAS BEZERRA DE OLIVEIRA LEITE**

**A MEDIÇÃO NA MECÂNICA QUÂNTICA**

**FORTALEZA**

**2024**

LUCAS BEZERRA DE OLIVEIRA LEITE

A MEDIÇÃO NA MECÂNICA QUÂNTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Milton Pereira Júnior.

FORTALEZA  
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

L554m Leite, Lucas Bezerra de Oliveira.

A medição na Mecânica Quântica / Lucas Bezerra de Oliveira Leite. – 2024.  
68 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Curso de Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. João Milton Pereira Júnior.

1. Mecânica Quântica. 2. Medição. 3. Decoerência. 4. Emaranhamento. 5. Interpretações da Mecânica Quântica. I. Título.

CDD 530

---

LUCAS BEZERRA DE OLIVEIRA LEITE

A MEDIÇÃO NA MECÂNICA QUÂNTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentada à Coordenação da Graduação do  
Curso de Física, da Universidade Federal do  
Ceará, como requisito parcial para a obtenção  
do Título de Licenciado em Física.

Aprovada em 07/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Milton Pereira Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos Meus Pais  
Viviane e Valmir.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. João Milton Pereira Júnior, pela orientação, paciência e comentários valiosos sobre esse assunto tão rico;

À minha mãe, Viviane Bezerra de Oliveira, por todo o amor, apoio, toda a maravilhosa convivência e singulares ensinamentos musicais. E por todas as atividades domésticas que inúmeras vezes fez por mim para que eu pudesse me dedicar integralmente às atividades acadêmicas;

Ao meu pai, Raimundo Valmir Leite Filho, primeiro orientador, pelas influências, por toda a colaboração, pela assistência na formatação deste trabalho e pelas muitas cervejas discutindo mecânica quântica e filosofia da ciência;

À minha namorada, Luiza Helena, de quem gosto em todos os verbos, por todo amor e carinho, por todas as trocas;

À minha segunda família e respectivos entes, Airla Gomes, Ailton Leão (*in memoriam*), Ailtinho (Ailton Júnior) e Felipe Moreira Barboza, por incomensurável apoio ao longo de toda a minha trajetória escolar e acadêmica, a quem estendo também o agradecimento, do afeto à intensa colaboração técnica;

À minha tia Vívian Bezerra, por tanto amor e suporte;

Ao meu padrasto, Miguel Henrique, pelas inspiradoras e divertidíssimas conversas na praça do Mercado;

Ao primo Jean Charles, pelas ótimas discussões sobre o método científico;

Aos meus padrinhos, Márcio André de Melo Gomes e Ana Cláudia Gouveia de Souza, duas grandes inspirações para a vida e para a carreira que escolhi;

Aos amigos e colaboradores Luiz Ozorio de Oliveira Filho e Antônio Neudson Lima Marques, por toda inspiração e riquíssima interação boêmia;

Aos professores Dr. Antônio Gomes de Souza Filho, Dr. Ascânio Dias Araújo, Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho, Dr. Diego Rabelo da Costa, Dr. Afrânio de Araújo Coelho, Dr. Nildo Loiola Dias, Dr. José Ramos Gonçalves, e à professora Dra. Hilma Helena Macedo Vasconcelos;

Ao professor Dr. Luiz Davidovich, pela interação pessoal e remota, pela atenção, inspiração, indicação e compartilhamento de materiais para estudo do tema;

Aos amigos Kennedy e Lia, pela amizade que conta seus quase 20 anos, cuja interação na reta final do meu curso foi de muita importância;

Aos amigos Sérgio Varela, Lucilane, Edson, Lúcio, Lena e Jackson por tanto carinho, boas conversas e bons momentos;

Ao amigo Cristiano Ferreira, pelas caronas no primeiro ano de UFC, no curso de Filosofia, e pelas muitas cervejas que sucederam;

Às colegas Ester, Rebeca, Mônica e Jéssica, e aos colegas Citó, Herbert, Célio Rodrigues, Thiago Sales, Gabriel Araújo, Márcio Vaz, Robert Bertoldo, Igor Cavalcante e Carlos Miguel por todos os momentos, tensos e descontraídos, ao longo do curso;

À Universidade Federal do Ceará e ao Departamento de Física, por toda estrutura de excelência;

A todos os funcionários deste Departamento, em especial aos secretários Anderson de Paula e Soraya Galdino, por toda atenção, solicitude e trato;

Ao Restaurante Universitário (RU) da UFC, que acolhe todo o espectro social dos discentes pelo valor simbólico de R\$1,10 por refeição;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

“A natureza ama esconder-se”

---

Heráclito de Éfeso

## RESUMO

Tendo como um dos pilares fundamentais o princípio da incerteza de Heisenberg, o desenvolvimento da Mecânica Quântica (MQ) tem nos mostrado uma faceta da natureza que aparenta ser mais inacessível do que no domínio clássico. Os primeiros fenômenos quânticos estudados fizeram não somente com que tivéssemos que nos abrir ao desconhecido, como também nos colocou sobre um fio muito sensível que divide o mundo clássico do quântico, que se convencionou chamar de *coerência*; a transição quântico-clássica, por sua vez, *decoerência*. O presente trabalho de conclusão consiste em um estudo de revisão de trabalhos teórico-experimentais, tendo como foco o período de 87 anos compreendido entre a formulação do paradoxo EPR e o Prêmio Nobel de Física de 2022, concedido aos experimentais J. Clauser, A. Aspect e A. Zeilinger pela violação das desigualdades de Bell. Ao longo da revisão histórica dos trabalhos, são problematizados e discutidos alguns dos tópicos de maior relevância para a teoria quântica, paralelamente com uma abordagem conteudista comentada, trazendo também algumas das interpretações da MQ. A violação das desigualdades, como boa parte das primeiras comprovações da teoria, é um passo importante na solução de um problema, e que entretanto nos leva a muitos outros, como o caráter não-local da MQ. Além dos referidos experimentos reconhecidos com o Nobel, abordaremos ao final dois experimentos (um deles mental e outro de realização mais simples) presentes na literatura sobre a medição na Mecânica Quântica, visando direcionamento ao ensino.

**Palavras-chave:** Mecânica Quântica; Medição; Decoerência; Emaranhamento; Interpretações da Mecânica Quântica.

## ABSTRACT

Having Heisenberg's uncertainty principle as one of the fundamental pillars, the development of the Quantum Mechanics (QM) has shown us a facet of nature that appears to be more inaccessible than in the classical domain. The first quantum phenomena studied did not only had to open ourselves to the unknown, but did also place us on a very thin line that divides the classical from the quantum world, which is conventionally called *coherence*; the quantum-classical transition, in turn, *decoherence*. The present work consists of a review study of theoretical-experimental works, having the focus on the 87 year period between the formulation of the EPR paradox and the Nobel Prize in Physics 2022, awarded to the experimentalists J. Clauser, A. Aspect and A. Zeilinger by the violation of Bell's inequalities. Throughout the historical review of this works, there are problems which include some of the most relevant topics of quantum theory that are discussed in parallel with a commented content approach, also bringing some interpretations of the QM. The violation of inequalities, like a large part of the first proofs of the theory, is an important step in solving a problem, and which however leads us to many others, such as the non-local character of QM. In addition to those mentioned experiments recognized with the Nobel Prize, we will finally address two experiments (one of them mental and the other simpler to carry out) presented in the literature on measurement in Quantum Mechanics, aiming at teaching.

**Keywords:** Quantum Mechanics; Measurement; Decoherence; Entanglement; Interpretations of Quantum Mechanics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esfera de Bloch . . . . .	37
Figura 2 – (a) Cavidade de Espelhos; (b) Foto de S. Haroche e sua equipe. . . . .	38
Figura 3 – Aparato análogo ao de N. Mermin. . . . .	46
Figura 4 – Leitura simplificada dos resultados possíveis, previstos por Bell. . . . .	46
Figura 5 – Aparato sugerido por Bell - Ímãs de Stern-Gerlach . . . . .	47
Figura 6 – John Bell no CERN, em 1982. . . . .	50
Figura 7 – Produção de fótons emranchados por decaimento em cascata do átomo de Cálcio. . . . .	55
Figura 8 – John Clauser junto de seu aparato experimental na UC Berkeley, 1972. . . . .	56
Figura 9 – Esquema experimental de John Clauser. . . . .	56
Figura 10 – Alain Aspect junto de seu aparato na Escola Politécnica de Paris, em 1982. . . . .	57
Figura 11 – Aparatos de Aspect . . . . .	58
Figura 12 – Foto de A. Zeilinger publicada na ocasião da sua menção ao Nobel de Física em 2022. . . . .	59
Figura 13 – Anton Zeilinger em seu laboratório na Universidade de Viena, em 2000. . . . .	59
Figura 14 – (a) Produção de fótons por CPD; (b) projeção dos fótons. . . . .	59
Figura 15 – Esquema experimental Zeilinger . . . . .	60
Figura 16 – Coincidências nas medições. . . . .	61
Figura 17 – Interferômetro de Michelson . . . . .	64
Figura 18 – Interferômetro em funcionamento . . . . .	65
Figura 19 – Padrão de interferência obtido . . . . .	65
Figura 20 – Polarizadores . . . . .	66
Figura 21 – Padrão de interferência destruído . . . . .	66

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CPD	Conversão Paramétrica Descendente
FMC	Física Moderna e Contemporânea
MC	Mecânica Clássica
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
MQ	Mecânica Quântica
PNF	Prêmio Nobel de Física
TRL	Teoria Realista Local
TVOL	Teorias de Variáveis Ocultas Locais

## LISTA DE SÍMBOLOS E CONSTANTES

$\partial$	Derivada parcial
$\hbar$	Constante de Planck reduzida
$\hat{x}$	Operador posição
$\hat{p}$	Operador momento linear
$\hat{H}$	Operador hamiltoniano
$i$	Número complexo
$ \psi\rangle$	Vetor de estado
$\Sigma$	Somatório
$\int$	Integração

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados da medição dos spins e seus produtos. . . . .	48
---	----

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
2	NOÇÕES DE MECÂNICA QUÂNTICA . . . . .	19
2.1	A equação de Schrödinger e a função de onda quântica . . . . .	19
2.2	Teorema de Ehrenfest, Observáveis e Primeira Quantização . . . . .	23
2.3	Princípio da Incerteza . . . . .	25
2.3.1	<i>O comutador</i> . . . . .	27
2.3.2	<i>Equação de Schrödinger para duas partículas</i> . . . . .	29
2.3.3	<i>Postulados da Mecânica Quântica</i> . . . . .	30
2.3.4	<i>O gato de Schrödinger</i> . . . . .	33
2.3.5	<i>Interpretações da Mecânica Quântica</i> . . . . .	37
2.4	Emaranhamento . . . . .	39
2.4.1	<i>O paradoxo EPR</i> . . . . .	39
3	HISTÓRICO EXPERIMENTAL . . . . .	43
3.1	As previsões teóricas de John Bell e o aparato de N. Mermin . . . . .	43
3.2	Teorema e desigualdade de J. Bell e o experimento sugerido por ele . . . . .	45
3.2.1	<i>Interpretação das desigualdades de Bell e de uma possível violação</i> . . . . .	48
3.3	J. Clauser, A. Aspect e A. Zeilinger e a violação das desigualdades de Bell . . . . .	50
3.3.1	<i>Os aparatos de Clauser, Aspect e Zeilinger e a evolução da sua cultura material</i> . . . . .	52
4	OUTROS EXPERIMENTOS E POSSIBILIDADES NO ENSINO DE MECÂNICA QUÂNTICA . . . . .	59
4.1	Experimento de Resultado Nulo . . . . .	59
4.2	Informação vs distinguibilidade . . . . .	60
4.2.1	<i>Interferômetro de Michelson</i> . . . . .	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS . . . . .	64
	REFERÊNCIAS . . . . .	65

## 1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica (MQ) é uma teoria que ocupa um lugar inusitado, entre postulados, experimentos e interpretações (Griffiths, 2011). Nesse lugar peculiar e repleto de sutilezas, talvez o que há de mais interessante é o fato de que a Mecânica Quântica é uma teoria notadamente bem sucedida: o que é previsto, ainda que não se entenda tão bem (ou *completamente*), é medido. O problema central da teoria? A medição.

Pode-se dizer que o problema da medição em MQ tem sua gênese em 1927, quando foi confirmada por Davisson e Germer (Davisson, 1937) a hipótese das *ondas de matéria*, lançada por Louis De Broglie em sua tese de doutorado (Broglie, 1924; Rosa, 2004). Durante as primeiras pesquisas sobre os fenômenos quânticos, no início do século XX, foram percebidas certas peculiaridades desse novo campo de estudo que repercutiriam drasticamente em concepções há muito estabelecidas na física clássica, como as noções de realismo e localidade (Bell, 1964).

De Broglie propunha, por extensão da dualidade onda-partícula da luz (Einstein, 1923; Compton, 1923), que a matéria também apresentava propriedades ondulatórias. Essas ondas teriam comprimento dado por uma relação matemática entre a constante de Planck (Planck, 1900; Planck, 2000) e o momento das partículas

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1.1)$$

A ideia de De Broglie foi bem vista pela banca, constituída pelos físicos Jean Perrin e Paul Langevin, o matemático Élie Cartan e o cristalógrafo Charles Mauguin. Perrin, no entanto, apesar de reconhecer a boa teoria, que conciliava fenômenos ondulatórios e corpusculares num belo modelo, demonstrou ceticismo quanto à proposta e insatisfação com a ausência de confirmações experimentais. De fato,

a tese não discute possíveis experimentos que pudessem testar a teoria apresentada. Pode-se dizer que De Broglie não procurou deduzir resultados novos a partir de sua teoria; seu principal objetivo era mostrar que sua teoria levava a resultados já conhecidos e aceitos, dando-lhes uma interpretação nova e unificada, coerente com a teoria da relatividade.

(Rosa, 2004, p.145)

Por outro lado, a teoria unificada de De Broglie, expressa e publicada em trabalhos anteriores à tese, durante seu doutoramento, o conduziu a postular que

um móvel qualquer poderia em certos casos se difratar. Um feixe de elétrons atravessando uma estrutura muito pequena apresentaria fenômenos de difração. É por este lado que se deveriam procurar confirmações experimentais

de nossas ideias.  
(Broglie, 1923b, p. 549)

Para concebermos as dificuldades envolvidas em um possível experimento, observemos que a Eq.(1.1) nos retorna valores da ordem de ângstrons ( $\text{\AA}$ ),  $10^{-10}$  m, ou 10 nm. Para se produzir difração de ondas dessa ordem, é necessário ter fendas de dimensões comparáveis. A distância média entre dois átomos em uma rede cristalina, por exemplo, é da ordem necessária para produzir o efeito. Dessa forma, com difração de elétrons em cristais, Davisson e Germer viriam a comprovar a hipótese de De Broglie, rendendo o Prêmio Nobel de Física de 1929 a De Broglie e o mesmo Prêmio em 1937 a Davisson.

Comprovado o caráter ondulatório - e, portanto, dual - que os elétrons poderiam apresentar, havia um questionamento fundamental (fazendo um comparativo com o experimento da dupla fenda): por qual fenda o elétron passa? Os intentos experimentais foram frustrados pelo que viria a ser formulado como princípio da incerteza de Heisenberg (Heisenberg, 1927), apresentado na Seção 2.3. Em vídeo gravado pela série *A ciência que eu faço* (iniciativa do Museu de Astronomia e Ciências Afins - MAST, MCTI), o professor da USP Paulo Nussenzveig comenta

Quando eu comecei a estudar mecânica quântica, foi aí que realmente despertou uma paixão grande minha por física: a maneira como a teoria era construída, a maneira como o nosso senso comum, a nossa intuição era em princípio violada, mas ao mesmo tempo nós éramos capazes de formar uma outra intuição.

(Nussenzveig, 2015)

Os experimentos balizariam uma nova maneira de pensar não só a descrição, mas também - e principalmente - a *evolução* dos sistemas quânticos (que será melhor discutida na Seção 2.1 - *Equação de Schrödinger* (Schrodinger, 1926)), como a noção do caráter probabilístico da teoria, devida a Max Born (BORN, 1954): as ondas associadas a partículas seriam *ondas de probabilidade* (não seriam reais). Por essa interpretação, Born foi laureado com o Nobel de Física de 1954.

O uso de considerações probabilísticas não é estranho à física clássica. Por exemplo, a mecânica estatística clássica se utiliza da teoria de probabilidades. Entretanto, na física clássica as leis básicas (tais como as leis de Newton) são determinísticas, e a análise estatística é apenas um utensílio prático para tratar de sistemas muito complicados. De acordo com Heisenberg e Bohr, no entanto, a interpretação probabilística é fundamental em mecânica quântica, e deve-se abandonar o determinismo.

(Eisberg, 1979, p. 97)

Assim, a onda quântica não teria natureza real, fato melhor comentado na Seção 2.1. A noção de que as ondas *associadas* às partículas (na Subseção 2.3.5 - *Interpretações da Mecânica Quântica*, discutiremos um pouco essas colocações) são ondas de probabilidade nos

permite, em um caso limite, intuir que cada partícula tem associada a si uma onda de probabilidade, sendo assim possível obtermos a figura de difração disparando partículas uma a uma em fendas de Young, como reportado em 2005 no *European Physical Journal D* (Jacques *et al.*, 2005). Feito esse anacronismo, haja vista que em 2005 o fenômeno já era bem compreendido, discutiremos no último parágrafo da Seção 2.1 como esse resultado conversa com a função de onda quântica, o estado coerente e a decoerência.

Desse modo, a cada comprovação experimental feita, indicando a consistência e a pertinência das hipóteses, novos problemas surgiriam, talvez maiores que os primeiros, envolvendo noções como realismo e localidade. Isso porque a bem-sucedida teoria que vinha se mostrando nos conduzia a resultados conflitantes, paradoxais para o senso comum. Todas as etapas aqui mencionadas enfatizaram o sucesso nas previsões do que viria a ser medido. Mas havia uma pergunta bastante pertinente a fazer: o que havia *antes* da medição? Aquilo que foi medido era exatamente igual antes da medição, antes de ser observado (Mermin, 1985)?

Nesse sentido, o desenvolvimento de resultados formais levou à identificação e ao evidenciamento experimental de dois novos fenômenos: o emaranhamento e a decoerência (Freire, O., p.67), sendo o emaranhamento a razão pela qual Einstein afirmava ser a MQ uma teoria correta, porém *incompleta*, e que deveria ser acrescida de variáveis ainda desconhecidas a fim de estabelecer realismo.

O fenômeno do emaranhamento (termo introduzido na literatura por Schrödinger (Schrodinger, 1935) foi evidenciado por Einstein e outros físicos importantes em 1935 (Einstein *et al.*, 1935) e ficou à margem das discussões sobre MQ até 1964, quando John Bell concebeu um teorema e um experimento capazes de distinguir as previsões da MQ (Bell, 1964) das previsões de TVOL (Teoria de Variáveis Ocultas Locais), proposta por Einstein e outros signatários da interpretação realista. Bell desenvolvera uma desigualdade matemática que permitia inferir se as TVOL seriam compatíveis com a MQ. Caso as desigualdades fossem satisfeitas, as teorias seriam compatíveis - e a MQ seria uma teoria incompleta); caso violadas, a MQ seria completa.

Com a importante contribuição de Bell, houve um intenso engajamento de pesquisadores interessados no assunto que levaram a uma melhoria substancial das técnicas experimentais. O primeiro grupo foi o do estadunidense John Clauser, que realizou seus experimentos em princípio com a colaboração de Stewart Freedman, posteriormente com Abner Shimony e seus alunos de doutorado, publicando os resultados, também surpreendentes, em 1972 (Freedman; Clauser, 1972). O segundo grupo foi o do francês Alain Aspect, cujos resultados foram reportados em 1981 e 1982 (Aspect *et al.*, 1982a; Aspect *et al.*, 1982b), sendo esse último o mais importante, por ter evidenciado o caráter não-local da MQ. Por fim, o grupo do austríaco Anton Zeilinger também obteve resultados que violaram as desigualdades, reportados em 1990 (Greenberger *et al.*, 1990). Zeilinger deu um passo à frente e foi pioneiro ao aplicar as propriedades

não-locais na realização do teletransporte de estados quânticos, em 1997.

Há pelo menos dois pontos a serem comentados quanto aos três grupos experimentais citados. O primeiro ponto diz respeito ao que estava em jogo nos experimentos. As previsões da MQ levavam à descrição de certos sistemas de duas partículas com fortes correlações, emaranhadas, que Einstein chamou de “efeito fantasmagórico à distância”. Nesse sentido, o que cada grupo experimental buscava eliminar eram as possíveis coincidências entre as medições. Para isso, eles impunham condições que garantissem aleatoriedade aos sistemas quânticos estudados.

O segundo ponto a ser comentado diz respeito às dificuldades experimentais e às técnicas utilizadas em cada dita “geração” de experimentos (Bispo *et al.*, 2013), que de algum modo também se relacionam com as condições mencionadas acima, brevemente comentado na Subseção 3.3.1 - *Os aparatos de Clauser, Aspect e Zeilinger e a evolução da cultura material.*

Por fim, são trazidos dois experimentos recorrentes na literatura sobre a medição na MQ que ilustram bem alguns conceitos e interpretações da teoria, instigantes e promissores para o ensino de Física Moderna e Contemporânea (FMC) e MQ. O primeiro é o *experimento de resultado nulo*. O segundo faz uso de um interferômetro de Michelson, cujo feixe laser original produz outros dois feixes com polarizações ortogonais, mas desconhecidas, que produzem uma figura de interferência. Ao distinguirmos as polarizações, perdemos a figura de interferência.

## 2 NOÇÕES DE MECÂNICA QUÂNTICA

Na Introdução, foram discutidos brevemente os pilares da Mecânica Quântica. Na física clássica, para cada área contamos com uma ou mais leis a partir das quais os problemas podem ser resolvidos. Na mecânica clássica, as leis de Newton. Na termodinâmica, contamos, por exemplo, com a equação de estado dos gases ideais. Na eletrodinâmica, com as equações de Maxwell e a expressão para a força de Lorentz.

Neste capítulo iremos apresentar as bases matemáticas da MQ, comentando alguns problemas com que iremos nos deparar e identificando, de certa forma, “as regras desse jogo”, lembrando a analogia feita pelo físico Richard Feynman (PNF, 1965) sobre o processo de construção das bases de uma nova teoria. Além disso, serão mostradas algumas aplicações advindas desses problemas.

### 2.1 A equação de Schrödinger e a função de onda quântica

Na MQ, contamos com a equação de onda de Schrödinger (2.1), proposta em 1926, para descrevermos o estado de partículas quânticas e sua evolução (Schrodinger, 1926)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi, \quad (2.1)$$

em que  $i^2 = -1$ ;  $\hbar = h/2\pi$ , denominada constante de Planck *reduzida*;  $\partial/\partial t$  é a derivada em relação ao tempo e  $\nabla^2$  é um operador diferencial denominado Laplaciano, dado pela soma das derivadas parciais de segunda ordem nas três coordenadas espaciais, a serem simplificadas na Eq. 2.3 como  $\partial^2/\partial x^2$ .  $\Psi$  é a função de onda quântica (descriptor no formalismo em questão),  $m$  é a massa da partícula e  $V$  é o potencial ao qual a partícula está submetida. A equação apresentada se aplica a apenas uma partícula. O fator de maior relevância será o potencial ao qual a partícula está submetida, que poderá depender ou não do tempo. Para uma partícula livre ( $V = 0$ ), a solução da equação de Schrödinger é a função de onda quântica, do tipo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.2)$$

Quando o potencial depende somente da posição e a função admite separabilidade por produtos, há uma alternativa para simplificarmos as notações, que é trabalhar com a função de onda dependente de apenas uma coordenada espacial

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V\Psi(x, t). \quad (2.3)$$

A equação de Schrödinger tem também uma versão *independente do tempo*, que nos permite calcular estados estacionários, que poderíamos dizer estados estáveis, bem definidos, chamados *autoestados*, que serão abordados mais vezes ao longo deste trabalho. Podemos resolver a equação diferencial supondo que  $\Psi(x, t)$  pode ser escrita como produto de duas funções que são dependentes apenas de uma variável

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t). \quad (2.4)$$

Substituindo na Eq.(2.1), teremos duas equações separadas por uma constante

$$i\hbar \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} = C = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V. \quad (2.5)$$

Fazendo uma análise dimensional da constante de separação, veremos que  $C$  tem dimensão de energia. Logo, a parcela dependente da posição ficará

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi, \quad (2.6)$$

denominada equação de Schrödinger independente do tempo. A primeira parcela da Eq.(2.5) ficará

$$\int \frac{d\phi}{\phi} = \int \frac{-iEdt}{\hbar}, \quad (2.7)$$

$$\ln(\phi) = \frac{-iEt}{\hbar} \quad \therefore \quad \phi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (2.8)$$

Dados esses passos importantes, percebemos de maneira mais clara a natureza que tem a dependência temporal da função de onda, cuja diferença já pode ser percebida ao repararmos que a equação de onda quântica carrega derivada temporal somente em primeira ordem, enquanto a equação de onda clássica traz derivadas de segunda ordem na posição e também no tempo. Isso acontece porque a onda que buscamos aqui representar, como mencionado anteriormente, não é real.

O problema da medição em MQ caminha exatamente sobre uma linha tênue conduzida pela dependência temporal, que é complexa e está diretamente ligada, afinal, à evolução do sistema. A solução completa da Eq.(2.1) pode ser obtida recompondo a função de onda dependente de  $x$  e  $t$  (Griffiths, 2011)

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}. \quad (2.9)$$

Segundo a descrição probabilística da MQ, podemos prever o estado da partícula e escrevê-lo como combinação linear dos estados possíveis - suas somas - acompanhados das suas respectivas constantes de normalização. Além disso, de posse da função de onda que fará

a descrição dessa evolução, calcularemos a integral

$$\int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx, \quad (2.10)$$

que nos retornará a probabilidade de encontrar a partícula entre  $a$  e  $b$  no instante  $t$  (Griffiths, 2011).

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1, \quad (2.11)$$

é chamada condição de normalização: a probabilidade de encontrar a partícula “varrendo” todo o espaço é igual a 100 %. Como mencionado, a função de onda quântica não é real. A integral acima é uma probabilidade, como há um diferencial  $dx$ , inferimos que o fator  $|\Psi|^2$  é uma densidade de probabilidade.

A função de onda quântica, descritor no formalismo de Schrödinger, está no espaço de configurações, um hiperespaço de 6 dimensões, sendo três para posição  $(x,y,z)$  e três para *momentum*  $(p_x, p_y, p_z)$ .

Como a linguagem da MQ é a álgebra linear, podemos trabalhar também em termos de vetores utilizando um sistema ortonormal. Assim, um outro formalismo mais utilizado, desenvolvido pelo físico Paul Dirac (que dividiu o PNF em 1933 com Schrödinger), e que leva seu nome, faz um tratamento sobre a MQ usando como descritores vetores de estado, denotados por  $|\Psi\rangle$ . Lê-se “ket  $\Psi$ ”. De forma equivalente à Eq.(2.9), esse estado pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.12)$$

expandido em termos de uma base  $|n\rangle$ .

A *notação de Dirac* é também conhecida por notação “bra-ket”, e é uma notação de álgebra linear, mas cujo direcionamento ao tratamento de problemas quânticos é bastante conveniente (como será mostrado na subseção 2.3.2). Os vetores de estado “kets” estão no espaço de Hilbert,  $\mathcal{H}$ . Os “bras” são denotados por  $\langle\Psi|$ , e estão no espaço dual, que abriga os complexos conjugados.

O espaço de Hilbert é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ , dotado de produto escalar. Podemos representar “brás” e “kets” também matricialmente, como vetores linha e coluna, respectivamente. Assim, o produto escalar entre dois elementos do espaço de Hilbert é denotado por  $\langle bra|ket\rangle$ , que consiste numa multiplicação entre esses dois vetores.

Supondo a dimensão do espaço de Hilbert como sendo igual a três, isso significa que podemos encontrar um trio de vetores linearmente independentes, que formam uma base  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ , por exemplo. Por uma motivação prática, os vetores que serão usados como base

nos problemas de MQ serão também *ortonormais*, isto é, ortogonais e normalizados. As bases ortonormais facilitam o algoritmo de solução de problemas. O sistema ortonormalizado tem as seguintes propriedades

$$\langle 1|2\rangle = \langle 1|3\rangle = \langle 2|3\rangle = 0; \quad (2.13)$$

$$\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = \langle 3|3\rangle = 1, \quad (2.14)$$

lembrando a conexão

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1. \quad (2.15)$$

Assim,

$$\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (2.16)$$

$$\delta_{mn} = 1, \quad m = n; \quad \delta_{mn} = 0, \quad m \neq n. \quad (2.17)$$

O produto escalar de dois vetores paralelos é não-nulo e de dois vetores ortogonais é nulo. Assim, a notação de Dirac é muito útil para trabalharmos com sistemas ortonormais, sobretudo de dois níveis, que denotam dois estados sobrepostos. Quando fazemos uma medição, estamos fazendo um produto escalar de um operador (conceito apresentado na Seção 2.2) com o vetor de estado.

A Eq.(2.9) descreve o que pode ser denominado *estado coerente*. Em verdade, o termo tem uma especificidade (e não é o caso dessa equação) que não irei abordar, mas poderemos usá-lo por analogia ao estado de um sistema quântico *antes* de fazermos uma medição, como possíveis resultados. A decoerência (ou descoerência) é a maneira como foi denominada a transição quântico-clássica, em que ocorrem as perdas das propriedades quânticas, a exemplo da superposição de estados.

Ao fazermos uma medição, dizemos acontecer o colapso da função de onda, e podemos obter na primeira medição qualquer um dos resultados previstos pelo estado coerente. Ao fazermos uma segunda medição, podemos obter o mesmo resultado anterior, mas com a mesma probabilidade de obter os demais resultados que não foram obtidos na primeira medição. Assim, as medições estão desvinculadas umas das outras (será melhor comentado na seção 2.2). Além disso, a interação entre observador e sistema no contexto da MQ é fundamentalmente diferente, por não admitir que sejam feitas correções que recuperem seu estado anterior. Um bom exemplo para isso é a medição de temperatura de uma substância. Sejam a temperatura  $\theta_0$  e a capacidade térmica  $C_0$  de um volume de água e a capacidade térmica do bulbo de um termômetro  $C_a$ , comparáveis ao volume de água, com temperatura inicial  $\theta_a$ .

A temperatura final  $\theta'_a = \theta'_0$  do termômetro não indica a temperatura inicial da água, pois a água perdeu calor para o termômetro. O medidor alterou assim o estado da água, como no caso quântico. Mas há no caso clássico uma diferença fundamental: é possível calcular a correção a ser introduzida na leitura do termômetro, usando as leis da Termologia, de forma a computar o valor inicial da temperatura da água:  $\theta_0 = \theta'_a + C_a C_0 (\theta'_a - \theta_0)$ . (Pessoa, 2021, p.55)

Permanece a pergunta: *antes* de fazermos a medição, o que havia, o estado coerente? Ou aquele resultado que fora medido já estava “definido” antes? O conceito de colapso da função de onda diz respeito a uma das interpretações da MQ, conhecida como interpretação ortodoxa, ou de Copenhagen.

Essa interpretação, cujo principal signatário era o físico Niels Bohr, enfrentou ferrenha oposição de Einstein, que propunha a interpretação realista. Isso porque, a interpretação de Bohr reconhecia a MQ como fundamentalmente probabilística, ao passo que Einstein expressou muitas vezes sua recusa a aceitar essa interpretação, afirmando que “Deus não joga dados”. Reconhecer como fundamentalmente probabilística significa também, reconhecê-la como uma teoria completa.

A posição realista, por sua vez, diz respeito a estabelecer realismo no sistema. Trata-se da noção de que o sistema deve se comportar daquela forma antes da medição, isto é, deve ter todas as suas propriedades, posição, momento ou componentes de spin ou polarização, bem definidas independente de observações. Uma das muitas conversas conhecidas de Einstein com colegas físicos se deu com Abraham Pais, caminhando pelos jardins do Instituto de Estudos Avançados da Universidade de Princeton, em que ele indaga o colega: “A lua está lá quando nós não a olhamos?”

Havia, ainda, a posição agnóstica, bastante pragmática, que considerava a discussão irrelevante, em virtude do sucesso que a teoria vinha demonstrando. Veremos adiante quais rumos essa discussão - em princípio, filosófica - tomou.

## 2.2 Teorema de Ehrenfest, Observáveis e Primeira Quantização

Um passo importante no formalismo da MQ é o procedimento denominado primeira quantização, que diz respeito à representação de grandezas (observáveis) por meio de operadores. O teorema de Ehrenfest (Ehrenfest, 1927; Bolivar, 2000) estabelece uma relação direta entre os observáveis na MQ e na MC ao afirmar que os observáveis obedecem às leis clássicas, logo, os operadores em questão, que se tratam de entes mensuráveis, podem ser derivados diretamente das expressões clássicas. Devido ao caráter probabilístico da teoria, trabalhamos com a ideia de valor esperado:

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi|^2 dx, \quad (2.18)$$

que, como explica o físico David Griffiths em seu livro-texto *Introdução à Mecânica Quântica* (Griffiths, 2011),

não significa que se você medir a posição de uma partícula repetidas vezes  $\int x|\Psi|^2 dx$  será a média dos resultados que você obterá. Ao contrário: a primeira medida (cujo resultado é indeterminado) colapsará a função de onda em um pico estreito em torno de um ponto no valor realmente obtido, e as medições subsequentes (se forem feitas rapidamente) simplesmente mostrarão o mesmo resultado. Em vez disso,  $\langle x \rangle$  é a média das medições feitas em partículas que estão todas no mesmo estado  $\Psi$ .

(Griffiths, 2011, p.16)

Por outro lado,

$$p = mv, \quad (2.19)$$

$$\langle p \rangle = m\langle v \rangle, \quad (2.20)$$

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle. \quad (2.21)$$

Derivando a Eq.(2.18) em relação ao tempo e substituindo na Eq.(2.21), teremos

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{d}{dt} \int x |\Psi|^2 dx, \quad (2.22)$$

$$\langle p \rangle = m \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx, \quad (2.23)$$

$$\langle p \rangle = m \int x \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) dx. \quad (2.24)$$

Aplicaremos a regra da derivada do produto em  $(\Psi^* \Psi)$ , cujos termos das derivadas no tempo têm origem na equação de Schrödinger (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi. \quad (2.25)$$

Substituindo as derivadas parciais no tempo obtidas da Eq.(2.25), na Eq.(2.22) na equação acima, ficaremos com

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right] dx, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx. \quad (2.27)$$

Efetuada integração por partes no segundo termo, obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\frac{i\hbar}{m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx. \quad (2.28)$$

Para recuperar, então, a expressão para o momento, resta multiplicar a equação

acima pela massa

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx. \quad (2.29)$$

Por fim, operadores são ferramentas matemáticas que extraem alguma informação do sistema, representado por um objeto descritor, que no caso é a função de onda. O operador momento, por sua vez, conserva o fator diferencial em  $x$ , nas palavras de R.P. Feynman, “faminto por uma função para diferenciar”

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.30)$$

Tomando novamente a equação de Schrödinger *independente do tempo*, Eq.(2.6), vemos que a energia pode ser escrita em termos de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V = \hat{H}. \quad (2.31)$$

Denominamos  $\hat{H}$  de operador hamiltoniano. No contexto da primeira quantização, esse será o operador que, atuando sobre a função de onda ou o vetor de estado, nos retornará a energia do sistema. Dessa forma, também podemos escrever a equação de Schrödinger dependente do tempo como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (2.32)$$

e, naturalmente, a independente do tempo

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (2.33)$$

ou

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (2.34)$$

### 2.3 Princípio da Incerteza

Confirmada a hipótese de De Broglie, uma das muitas questões que surgiram dizia respeito à trajetória dos elétrons, ou pelo menos a informação sobre qual seria a fenda que cada elétron havia atravessado, pensando no experimento usando como modelo a dupla fenda de Young.

Para determinar por qual fenda cada elétron está passando, podemos iluminar as fendas, assim a luz será refletida pelo elétron quando este passar. A exigência é que a radiação tenha um comprimento de onda *comparável* à distância entre as fendas - ser comparável é uma noção que sempre se fará necessária no ato de medir, haja vista que medições são comparações que fazemos entre o sistema estudado e padrões universais consensualmente estabelecidos para

as mesmas grandezas. Sendo mais preciso: para que, ao visualizarmos o *flash*, saibamos *de qual fenda* a luz foi refletida, é necessário que o comprimento de onda da radiação seja menor ou igual à distância entre as fendas

$$\lambda_\gamma \leq d_{\text{fendas}}. \quad (2.35)$$

Acontece que, o momento da radiação, pela relação de De Broglie, é dado por

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda_\gamma} \implies \frac{h}{\lambda_\gamma} \geq \frac{h}{d}, \quad (2.36)$$

$$\frac{h}{\lambda_\gamma} \geq \frac{h}{d} \implies \frac{h}{d} \sim p_e. \quad (2.37)$$

Inevitavelmente, o momento dessa radiação cujo comprimento de onda é necessário, será, no mínimo, igual ao próprio momento do elétron

$$p_\gamma \geq p_e. \quad (2.38)$$

Logo, o momento do elétron vai sofrer uma alteração da ordem do seu próprio valor e a consequência observada é que a figura de difração se desfaz

$$\Delta p_e \sim p_\gamma \sim p_e. \quad (2.39)$$

Uma maneira de tratar um objeto ondulatório, que se estende pelo espaço, mas que pode ser localizado, é o conceito de pacote de onda. A ideia consiste, simplificada, em comprimirmos a onda, de forma que a oscilação se dê numa região restrita do espaço. Ao comprimirmos a onda, estaremos reduzindo a incerteza da posição  $\Delta x$ , e consequentemente teremos uma maior incerteza do momento. Ao esticarmos a onda, aumentando o seu comprimento de modo que se torne uma onda harmônica, teremos uma maior incerteza na posição, mas saberemos exatamente o momento. Uma forma de construirmos um pacote de onda é usarmos o fenômeno dos batimentos, superpondo ondas de frequências próximas.

Seja uma função periódica par  $\psi(x + \lambda) = \psi(x)$ . No século XIX, o matemático francês Jean-Baptiste Fourier descobriu que qualquer função periódica e contínua por pontos pode ser escrita como uma superposição de senos e cossenos. Para uma função par, escreveremos em termos de cossenos

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x), \quad (2.40)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad 2\frac{2\pi}{\lambda}, \quad 3\frac{2\pi}{\lambda}, \dots \quad k_n = n\frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.41)$$

No caso dos batimentos, nós só precisamos somar duas frequências, ou dois comprimentos de onda. Mas no caso acima estamos somando um grande número de comprimentos

de onda. A diferença entre dois números de onda consecutivos será

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.42)$$

e tomando o limite em que  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Delta k \rightarrow 0$ . Nesse limite, a soma expressa na Eq.(2.40) passa a ser contínua

$$\psi(x) = \int_0^\infty A_k \cos(k_n x) dk, \quad (2.43)$$

expressão que denominamos *transformada de Fourier* da função de onda. Novamente: estamos construindo o objeto que denominamos pacote de onda; para tanto, somamos um número infinito de números de onda. A partir de uma distribuição dos valores de  $x$ , obteremos o seu valor médio  $\bar{x}$ , definiremos o  $\Delta x$  quadrático médio (“rms”) como

$$\Delta x_{rms} = \sqrt{\langle (x - \bar{x})^2 \rangle}, \quad (2.44)$$

e tomaremos uma definição equivalente para  $\Delta k$  que resultará na desigualdade

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}. \quad (2.45)$$

Retomando a relação de De Broglie, teremos que

$$\Delta p = \hbar \Delta k \quad (2.46)$$

e, conseqüentemente,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.47)$$

A relação de incerteza de posição e *momentum* se dá entre as mesmas componentes de cada grandeza,  $x$ ,  $p_x$  e  $y$ ,  $p_y$  e  $z$ ,  $p_z$ , o que será explicado na próxima subseção.

Voltando ao exemplo proposto, a figura de difração também ocorre para fenda única, desde que a fenda tenha dimensões comparáveis ao comprimento da onda incidente, o que também envolverá uma relação de incerteza de posição e *momentum*.

O exemplo mostrado tratou da relação de incerteza entre *posição e momento*, que em um primeiro contato são as duas grandezas de maior relevância numa transição entre as mecânicas clássica e quântica, devido à tentativa de calcular uma *trajetória* das partículas, como as primeiras ideias frustradas sobre os modelos atômicos. Entretanto, a incerteza de Heisenberg vai muito além da incompatibilidade entre posição e momento.

### 2.3.1 O comutador

Uma importante ferramenta no formalismo da MQ é o comutador, um dispositivo que funciona como um teste e nos permite investigar sistemas e interpretá-los e antever que

condições teremos de descrevê-los.

O comutador consiste em efetuar o produto entre duas grandezas (comumente chamados de observáveis) e após isso repetir a operação invertendo a ordem delas. Por fim, subtraímos um produto do outro. Esse tipo de procedimento é certamente um tanto inusitado, não o fazemos a não ser quando aprendemos sobre propriedades aritméticas de adição e multiplicação: comutativa, associativa e distributiva. Isso porque o produto entre quaisquer dois ou mais números reais é o mesmo independente da ordem que tomemos.

Você deve estar se perguntando como ele é aplicado no laboratório - por que você não consegue determinar (especificar) a posição e o momento da partícula? Certamente, você consegue avaliar a posição da partícula, porém, o ato de medir colapsa a função de onda em um ponto específico, o que necessariamente traz um amplo intervalo de comprimentos de onda (portanto momentos) em sua decomposição de Fourier. Se você medir o momento a essa altura, o estado colapsará em uma longa onda sinusoidal, com um comprimento de onda bem definido, porém, a partícula não ocupa mais a posição em que você a encontrou na primeira medição.

(Griffiths, 2011, p.86)

Na MQ, essa afirmação não é válida, as grandezas podem não comutar. Diante desse fato, é razoável nos perguntarmos quais outros resultados podemos obter que não o *zero*. Tomemos, então, as duas grandezas até então de maior interesse, posição e *momentum*, em uma dimensão, representadas por operadores

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}, \quad (2.48)$$

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\hbar\partial_x. \quad (2.49)$$

$$\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x} \implies [\hat{x}, \hat{p}] \neq 0. \quad (2.50)$$

De fato,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.51)$$

O resultado acima é denominado *relação de comutação canônica*. O princípio da incerteza, cujo cerne foi formulado na Introdução para as grandezas posição e momento, se aplica a quaisquer duas grandezas não comutáveis entre si. Sempre que o comutador é nulo - ou seja, quando duas grandezas de fato comutam - isso nos diz que se trata de grandezas que podem ser medidas simultaneamente. Caso não seja nulo, dizemos serem incompatíveis, e não podem ser medidas simultaneamente.

É imprescindível destacar que posição e momento são vetores e têm suas componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , logo, é preciso cuidado ao simplificá-las, pois o resultado muda quando tomamos componentes diferentes de cada uma (nesse caso, *comutam!*). A rigor, ou ao menos denotando de forma mais geral, a relação de comutação canônica deverá ser escrita da forma

$$[\hat{R}_m, \hat{P}_n] = i\hbar\delta_{mn}, \quad (2.52)$$

que retornará *zero* quando  $m \neq n$ .

Conectando a ideia de realismo, já apresentada, com o resultado dos comutadores e a evolução dos sistemas, podemos dizer também que os operadores incompatíveis não apresentam realismo simultâneo: na medida em que conhecemos um e desconhecemos o outro, respeitando a desigualdade da Eq.(2.47). Trocando em miúdos, não podem ser medidos simultaneamente com precisão.

Agora, que parte das ideias foram formalizadas, relembremos algumas situações propostas no início desta Seção, sobre o experimento da Dupla Fenda. Podemos usar a Eq.(2.9) como ponto de partida para analisar o referido experimento, isto é, a função de onda que representará os elétrons ou fótons disparados será uma combinação linear de apenas dois termos, devido à contribuição das duas fendas. A medição, seja ela por iluminação das fendas ou por obstrução de uma delas, fará com que a função de onda se reduza a uma das alternativas clássicas. Se fechamos a fenda 1, a função de onda nos dirá que só há uma possibilidade: a fenda 2. E vice-versa. E se fecharmos as duas fendas, claramente não haverá chance, probabilidade, de que alguma partícula passe. De fato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 0 \iff \Psi = 0, \quad (2.53)$$

a única maneira de a integral acima retornar *zero* é caso tenhamos a função de onda identicamente nula, cuja leitura é ausência de partículas.

Para que aconteça a difração, não é necessário que haja mais de uma fenda. O fenômeno da difração se dá quando uma onda contorna algum obstáculo, que deve ter dimensões comparáveis à onda difratada.

Dessa análise, percebemos que no experimento da dupla fenda *sem incerteza não há comportamento ondulatório*, logo não há dualidade. A dualidade é a maneira como a incerteza quântica se nos apresenta, e que é posta na linha de frente de um conflito entre um viés realista e um não-realista, a ser comentado na Subseção 2.3.4 - *Interpretações da Mecânica Quântica*.

### 2.3.2 Equação de Schrödinger para duas partículas

A equação de Schrödinger, nas suas duas versões já apresentadas, descreve a evolução do estado de apenas uma partícula. Para um sistema com mais partículas, precisamos incluir um termo a mais para cada grandeza lá representada: massa, derivadas da função de onda e potenciais.

Seja uma função de onda dependente do tempo para duas partículas (denotadas

pelos índices 1 e 2, para posição, massa e laplaciano)

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t). \quad (2.54)$$

Tomando a forma que faz o uso explícito do operador hamiltoniano, teremos

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \quad (2.55)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \right] \Psi. \quad (2.56)$$

Novamente, na forma independente do tempo

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \right] \psi = E\psi \quad (2.57)$$

Resolver uma equação diferencial consiste em encontrar a função que está sendo operacionalizada, no caso, a função de onda (para duas partículas). A maneira ideal de resolver essas equações é analiticamente, mas nem sempre isso é possível. Em verdade, quanto mais complexo é o problema, menos provável de resolvê-lo analiticamente. Além disso, mesmo que o problema admita soluções analíticas, elas podem não nos dizer muito sobre o problema.

Em resumo, há considerações importantes a serem feitas quando tratamos de mais de uma partícula. O átomo de hidrogênio é um problema que envolve duas partículas, um próton e um elétron. No entanto, é comum fazermos duas grandes simplificações, que são considerar que o núcleo está completamente parado (o que não é verdade) e desconsiderar efeitos relativísticos. Essas duas considerações simplificam bastante o problema e tornam possível encontrar as autoenergias e autofunções. Ao considerar o núcleo completamente parado, assumimos que há apenas uma partícula, elétron, submetida a um potencial, que é o de Coulomb.

Seguindo esse raciocínio, o primeiro átomo em que devemos realmente considerar duas partículas submetidas a um potencial comum é o de hélio. Nesse caso, o hamiltoniano consistirá em dois hamiltonianos hidrogênicos, considerando o potencial de atração do elétron 1 com o núcleo, e do elétron 2 com o núcleo, e o potencial de repulsão dos elétrons entre si, dado pelo último termo da soma abaixo

$$H = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1} \right] + \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (2.58)$$

Se simplesmente o ignorarmos, a equação de Schrödinger pode ser separada e as soluções podem ser escritas como produtos das funções de onda do hidrogênio

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)\Psi_{n'l'm'}(\mathbf{r}_2). \quad (2.59)$$

Essa solução só é válida para o *ortohélio*, estado no qual os elétrons têm número quântico principal diferente,  $n \neq n'$ . O estado *parahélio* não admite essa solução, o que será tratado adiante, na Subseção 2.4.1 - *O paradoxo EPR*. Em tempo, uma alternativa para o que foi feito seria considerar o referencial do centro de massa do sistema e fazer algumas adaptações na equação, incluindo um termo de massa reduzida.

### 2.3.3 Postulados da Mecânica Quântica

Parte das hipóteses lançadas na transição da MC para a MQ, no domínio costumeiramente chamado de física semi-clássica, pelos ditos “pais fundadores” da teoria foram *ad hoc*, que a grosso modo significa “para dar certo”. Ou seja, hipóteses que se encaixam e explicam determinado fenômeno, mas que não foram derivadas de primeiros princípios (relembrando, a própria quantização de energia não é um resultado derivável da física clássica).

Com o progresso do formalismo, foram estabelecidos sete postulados (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1978) que constituem uma gradação dos conceitos aqui abordados, sobre estado do sistema, primeira quantização, medição, etc. Aqui, abordaremos apenas os cinco primeiros, que correspondem aos três pontos citados: vetores de estado, operadores, resultado de medição e redução de estados.

Postulado 1: Em um dado instante  $t_0$ , o estado de um sistema é definido por  $|\Psi(t_0)\rangle$  pertencente ao espaço de vetores de estado (espaço de Hilbert).

Postulado 2: Toda quantidade física mensurável (“observável”) é representada por um operador autoadjunto que atua no espaço de estados.

Postulado 3: A única possibilidade de resultado em uma medição é um dos autovalores de seu operador associado.

Postulado 4 (caso de espectro discreto não-degenerado): Quando uma grandeza física “A” é medida em um sistema cujo estado  $|\psi\rangle$  é normalizado, a probabilidade  $P(a_n)$  de se obter o autovalor não-degenerado “ $a_n$ ” correspondente a  $\hat{A}$  é:

$$P(a) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2, \quad (2.60)$$

em que  $|u_n\rangle$  é um autovetor normalizado de  $\hat{A}$  associado ao autovalor  $a_n$  ( $\hat{A}|u\rangle = a|u\rangle$ ).

Postulado 4 (caso do espectro discreto e degenerado): Quando uma grandeza física “A” é medida em um sistema cujo estado  $|\psi\rangle$  é normalizado, a probabilidade  $P(a_n)$  de se obter o autovalor “ $a_n$ ” correspondente a  $\hat{A}$  é:

$$P(a) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2, \quad (2.61)$$

em que  $g_n$  é o grau de degenerescência de  $a_n$  e  $|u_n^i\rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, g_n$ ) é um conjunto de vetores

ortonormais que formam uma base no subespaço  $\mathcal{H}_n$  associada ao autovalor  $a_n$  de  $\hat{A}$ , em que  $|a\rangle$  é o autoestado associado a  $a$  ( $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ ).

Postulado 4 (caso de espectro contínuo não-degenerado): Quando uma grandeza física “A” é medida em um sistema cujo estado  $|\psi\rangle$  é normalizado, a probabilidade  $dP(\alpha_n)$  de se obter um resultado dentro do intervalo  $[\alpha, \alpha + d\alpha]$  é:

$$dP(\alpha) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha, \quad (2.62)$$

onde  $|v_\alpha\rangle$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $\alpha$  do observável  $\hat{A}$  associado a A.

Postulado 5: Se a medição de uma quantidade física A sobre o sistema no estado  $|\psi\rangle$  resulta em  $a_n$ , o estado do sistema imediatamente após a medição é a projeção normalizada

$$P_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.63)$$

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.64)$$

O primeiro postulado implica no princípio de superposição. O segundo postulado consiste na *primeira quantização*, já comentada na Seção 2.2. O terceiro postulado, diz respeito explicitamente ao problema da medição: podemos prever os autoestados (autoenergias e autofunções, ou autovetores de estado), mas só podemos medir um dos autoestados, e nada pode determinar qual será o autoestado medido, só temos conhecimento da *probabilidade* de obtermos cada autovalor. O quarto postulado, em seus três casos, e o quinto postulado, refinam a predição sobre os resultados e evolução dos sistemas.

Para conectar novamente algumas ideias já apresentadas, tomemos um estado  $|\psi\rangle$  dado por dois estados linearmente independentes. Esses estados são comumente chamados de sistemas de dois níveis.

$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle, \quad (2.65)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.67)$$

Para calcularmos os autovetores normalizados para a energia, por exemplo, tomaremos a equação de Schrödinger independente do tempo na forma de uma equação de autovalores,

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (2.68)$$

e reproduziremos um algoritmo de praxe da álgebra linear, deixando  $|\psi\rangle$  em evidência; como

$H$  é uma matriz, cujos elementos queremos calcular, e  $E$  são números reais, fazemos o produto de  $E$  pela matriz identidade  $I$

$$(\hat{H} - IE)|\psi\rangle = 0, \quad (2.69)$$

e calculamos o determinante do que está no parênteses (na equação secular abaixo)

$$\det(H - IE)|\psi\rangle = 0, \quad (2.70)$$

$$\det \begin{pmatrix} h-E & g \\ g & h-E \end{pmatrix} = (h-E)^2 - g^2 = 0 \implies \mp g \implies E_{\mp} = h \pm g. \quad (2.71)$$

As energias permitidas são  $(h+g)$  e  $(h-g)$ . Para determinarmos os autovetores, faremos

$$\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (h \pm g) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies h\alpha + g\beta = (h \pm g)\alpha \implies \beta = \pm\alpha, \quad (2.72)$$

e os autovetores normalizados serão

$$|\psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Expandindo o estado inicial como combinação dos autovetores do hamiltoniano, ficaremos com

$$|\psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{+}\rangle + |\psi_{-}\rangle). \quad (2.74)$$

Acrescentando a dependência temporal dada pelo termo exponencial deduzido anteriormente, o vetor de estado ficará

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i(h+g)t/\hbar} |\psi_{+}\rangle + e^{-i(h-g)t/\hbar} |\psi_{-}\rangle \right], \quad (2.75)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iht/\hbar} \left[ e^{-igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (2.76)$$

ou, ainda,

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} e^{-igt/\hbar} + e^{igt/\hbar} \\ e^{-igt/\hbar} - e^{igt/\hbar} \end{pmatrix} = e^{igt/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i\text{sen}(gt/\hbar) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Conectando as notações, podemos representar o estado coerente descrito pelo sistema de dois níveis na chamada esfera de Bloch, que será mostrada na subseção seguinte, no contexto da computação quântica.

Tratando o sistema em questão na notação de Dirac, definiremos os operadores por

$$\hat{P} \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.78)$$

forma que faz com que o operador atue sobre as bases ortonormais em termos dos bras e kets, extraíndo as informações que queremos sobre o sistema. No caso, o operador hamiltoniano nos retornará as autoenergias do sistema, sendo escrito da maneira abaixo

$$\hat{H} = (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|). \quad (2.79)$$

Fazendo o operador atuar sobre o estado  $|\psi\rangle$ , teremos

$$\hat{H}|\psi\rangle = [(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)], \quad (2.80)$$

e então a matriz hamiltoniana de um sistema de dois níveis será dada por

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

simplificando a matriz a

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

facilitando os resultados e as análises por estar diagonalizada.

O operador  $\hat{P}$  é assim denotado por ser o operador *projeção*. Ao atuar sobre um vetor para extrair uma informação, um valor, ele fará justamente com que o vetor de estado  $|\psi\rangle$  representado na esfera de Bloch seja projetado sobre apenas um de seus estados.

### 2.3.4 O gato de Schrödinger

O famoso experimento mental do gato de Schrödinger (Schrodinger, 1935) trata-se de uma ilustração do problema da medição e da transição quântico-clássica. O sistema consiste em um gato, um contador Geiger (aparelho capaz de detectar o decaimento de um átomo), um martelo, um frasco contendo veneno (todos esses objetos são clássicos) e o átomo que irá decair; tudo isso dentro de uma caixa fechada - trocando em miúdos, o sistema está isolado, sem influência de agentes externos.

Podemos imaginar que preparamos o aparato e contamos o tempo decorrido após fecharmos a caixa. O que vai acontecer é uma sequência causal de eventos que culminará na morte do gato, tão mais certa quanto maior o tempo decorrido após o isolamento (e tão menos provável quanto menor o tempo em que deixemos o sistema isolado - recordemos sobre o problema da evolução do estado, mencionado na p.20). Isso porque o átomo deve decair,

sendo esse fenômeno absorvido pelo detector, que por sua vez irá acionar o martelo que por fim quebrará o frasco e liberará o veneno, que matará o gato. Ocorre que, se abrirmos a caixa, teremos a decoerência.

O processo de decaimento do átomo nessas condições passa por superposições de estados e o que Schrödinger afirma é que, conforme a MQ vinha sendo interpretada, haverá algum momento - nem tão cedo nem tão tarde - em que o átomo estará em superposição e, dada a sequência causal descrita, o gato estará vivo e morto (novamente: se abrirmos a caixa, perceberemos somente o gato vivo *ou* morto)

$$|\psi_{gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{vivo}\rangle + |\psi_{morto}\rangle). \quad (2.83)$$

Conceber vida e morte como estados sobrepostos é claramente um absurdo porque esses conceitos descrevem condições clássicas, que são antagônicas, mutuamente excludentes.

Percebemo-nos de mãos atadas nessa investigação. Uma alternativa para isso, no entanto, é que façamos o aparato de tal forma que seja possível mandar um “ratinho quântico” atravessá-lo, isso porque a interação que afeta drasticamente as propriedades quânticas de um sistema se dá com objetos clássicos, macroscópicos. Se o ratinho sair vivo do outro lado, é porque o gato está morto. Se não sair, é porque o gato ainda está vivo (Davidovich, 2012).

Podemos notar que o *Gedankenexperiment* proposto por Schrödinger descreve muito bem a peculiaridade dos sistemas quânticos no que diz respeito às interações - fato importante que merece ser destacado, pois é fundamental compreendermos os elementos autorizados e vetados nos raciocínios sobre a MQ.

Pensemos agora na analogia feita pelo professor Luiz Davidovich (Professor Titular aposentado do Instituto de Física da UFRJ, atualmente colaborador). A ideia é fazer um objeto quântico (um átomo) enviado por nós - e que, portanto, tem seu estado conhecido de antemão - interagir com um sistema quântico. A interação interfere no estado dessa sonda quântica, deixando um indício de interação. Conhecendo de antemão o estado e medindo-o após a interação, supostamente podemos inferir o estado do sistema isolado. Tudo isso descrito foi previsto teoricamente pelo professor Luiz Davidovich em 1996 (Davidovich *et al.*, 1996) e reproduzido experimentalmente pelo grupo do francês Serge Haroche (Goy *et al.*, 1983b; Brune *et al.*, 1996; Goy *et al.*, 1983a) no mesmo ano - rendendo a ele o Prêmio Nobel de Física em 2012 (DAVIDOVICH, 2015).

O título facilitador do trabalho pode ser o mesmo da sua *Nobel Lecture*: (Goy *et al.*, 1983a) “Controlando fótons em uma caixa e explorando o limite quântico-clássico”. O experimento consistiu em fazer átomos de Rydberg cruzarem a cavidade ressonante supercondutora, com espelhos de 5 cm de diâmetro, e resfriada a 0,8 K que aprisionava os fótons. Foi realizada a contagem não destrutiva de fótons, a preparação e reconstrução dos estados de radiação do tipo

gato de Schrödinger e o estudo de sua decoerência, que forneceu uma ilustração da transição quântico-clássica.

Esses átomos possuem um alto número quântico principal, isto é, são átomos cujo elétron da camada exterior, da valência, está tão distante do núcleo que eles se assemelham aos átomos de hidrogênio (Freire, 2011, p. 19). Ao fazer um desses átomos interagirem com fótons presos (por um tempo da ordem de 1 segundo) em uma cavidade de espelhos supercondutores a baixas temperaturas, e após isso fazer a reconstrução do estado do fóton no interior da cavidade, a *leitura clássica* para o resultado obtido foi a de que a cavidade estava *acesa e apagada* ao mesmo tempo. A incongruência entre terminologias que dizem respeito à nossa percepção clássica, enunciando resultados de fenômenos quânticos, gera esse desconforto.

Haroche dividiu o PNF-2012 com David Wineland, que foi reconhecido pelos seus trabalhos com aprisionamentos de íons em campos magnéticos, que permitem a visualização, devido ao espalhamento de luz laser apontada para eles, de poucos íons (7) oscilando em modos normais. O estudo da decoerência e a manipulação de sistemas quânticos com poucos íons compõem o campo de estudo de ótica quântica, cujas aplicações em informação e computação quânticas são bastante promissoras (DAVIDOVICH, 2015).

A computação clássica, por exemplo, tem como componente fundamental os transistores, que “armazenam” uma informação bivalente (os “bits”), 1 ou 0, conduzindo corrente ou não, respectivamente. O bit é a unidade mínima de informação. Estendendo a noção de sistemas de dois níveis, já apresentada, quando denotamos um estado coerente  $|\psi\rangle$  em termos de dois vetores de estado para 0 e 1,

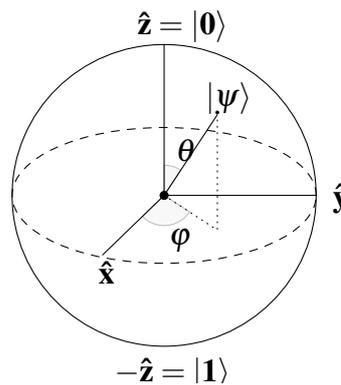
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.84)$$

podemos expandir o domínio natural restrito pela notação binária clássica para um intervalo real, no qual há infinitos números (infinitos estados) entre 0 e 1. Para tanto, assim como na teoria, é necessário que o estado superposto denotado acima seja mantido, ou seja, que haja *coerência*. Essa compreensão torna possível os bits quânticos, chamados *qubits*, que estão abaixo representados na esfera de Bloch.

Há um outro ponto com relação à evolução dos dispositivos processadores de que dispomos: segundo a lei de Moore, formulada por Gordon Moore, um dos fundadores da Intel, o número de transistores na CPU de um computador dobra a cada um ano e meio. Considerando que o tamanho das CPU's praticamente não muda, há algo que está diminuindo, que é exatamente a *quantidade de matéria necessária para armazenar o bit*. Tomando um limite nesse processo, a tendência é que a informação possa ser “armazenada” num único átomo. A tarefa mais delicada é manter coerente um sistema com um número razoável de *qubits*.

Por outro lado, em ciência é muito comum que um certo fenômeno represente um

Figura 1: Esfera de Bloch



Fonte: Editada pelo autor.

problema numa certa perspectiva ou intenção de aplicação, mas quase sempre esse problema pode ser uma solução. O fenômeno da resistência pode ser um problema em alguns casos, mas suas aplicações em dispositivos cotidianos são muitas. O desafio de manter a coerência de um sistema com uma quantidade razoável de *qubits* e realizar computação quântica sem perda de informações foi visto como uma possibilidade de aumentar a segurança na transmissão de informações. Assim, em 2007, Genebra (Suíça) transmitiu informações das suas eleições utilizando algoritmos de criptografia quântica (Gisin *et al.*, 2002; Greenemeier, 2007), cujas informações contidas seriam destruídas caso houvesse perturbação desses dados por alguém não autorizado. O feito foi liderado pelo físico Nicolas Gisin.

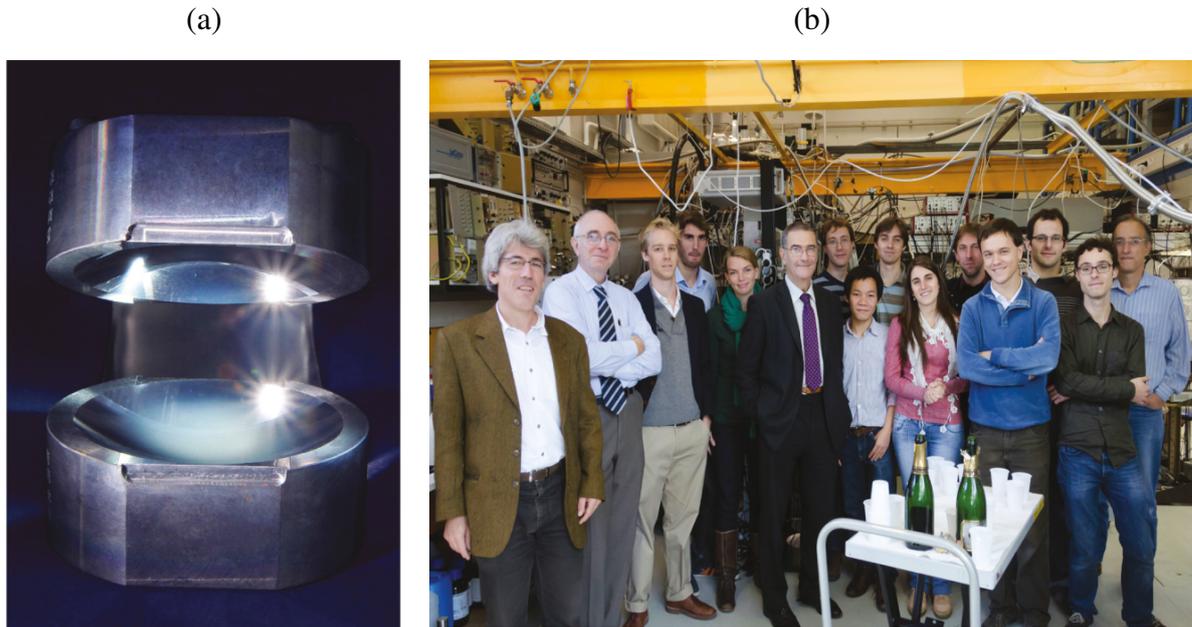
Da mesma forma, os trabalhos a serem apresentados no Capítulo 3 - *Histórico Experimental*, além das contribuições em ciência básica, também prometem um novo paradigma no campo do que se convencionou chamar tecnologias quânticas.

### 2.3.5 Interpretações da Mecânica Quântica

Parte dos temas centrais e interpretações da MQ já foram apresentados conceitualmente, e adiante serão novamente. A presente subseção, portanto, tem como objetivo fazer melhores apresentação e análise das interpretações da MQ, dado que as interpretações ou as ditas “posições” realista, ortodoxa e agnóstica (Griffiths, 2011) são simplificações pragmáticas, que têm como objetivo o ensino da teoria, que por sua vez, com boa compreensão, conduzirá a um melhor entendimento das demais interpretações. Visualizando esse ciclo, é importante observar, pois, que a MQ é uma teoria escrita à luz dos experimentos, conforme somos autorizados a enunciar postulados com base nos fatos empíricos.

Por outra perspectiva, é uma teoria de notável sucesso, isto é, de resultados em alto grau de concordância com as previsões, o que situa a MQ em um contexto inspirador, de algo que também vai sendo interpretado à medida que é confirmado. A redução das interpretações

Figura 2: (a) Cavidade de espelhos supercondutores; (b) S. Haroche (no meio) e seu grupo na Escola Normal Superior de Paris.



Fonte: Retirada da referência (Goy *et al.*, 1983a).

a somente as três supracitadas visa tornar possível a tarefa de ensinar uma teoria muito bem sucedida, mas que ainda demanda atenção para a escrita da sua fenomenologia.

É uma característica notável da Teoria Quântica que ela pode ser interpretada de diferentes maneiras, sendo que cada uma dessas interpretações é internamente consistente e, de modo geral, consistente com experimentos quânticos. Usamos a noção de interpretação como significando um conjunto de teses que se agrega ao formalismo mínimo de uma teoria científica, e que em nada afeta as previsões observacionais da teoria. (Se houver previsões novas, deveríamos falar de uma “teoria diferente”, mas se o desacordo com a Teoria Quântica for tão pequeno que não se possa fazer um experimento crucial para escolher entre elas, é costume considerar que a teoria diferente também é uma interpretação.) (Pessoa, 2021, p. 8)

Há muitas interpretações além das que iremos apresentar aqui, mas que podem ser organizadas nos cinco grupos a serem descritos. Fazendo uma construção partindo das três “posições” supracitadas, o que temos são basicamente teorias ondulatória, corpuscular e dualista pelo viés *realista*, a interpretação da complementaridade, de Bohr, e a interpretação instrumentalista, que ainda não foram comentada sob nenhum viés.

A distinção entre interpretações realistas e não-realistas podem ser tomadas em termos de duas visões sobre a natureza da função de onda, que são chamadas ôntica e epistêmica. Uma visão ôntica significa entender a função de onda como uma grandeza física real em si, enquanto a epistêmica diz respeito à função de onda cumprir um papel representativo na teoria, que certamente é útil e resolve os problemas, mas sem que tenha significado físico intrínseco.

O viés realista, como mencionado na Seção 2.1, diz respeito à noção de que os sistemas tenham “realidade” física, isto é, que tenham o mesmo comportamento independentemente de observações, ou que estejam completamente definidos sem que precisemos fazer medições. A interpretação ondulatória realista (de Schrödinger), entende que os objetos quânticos se propagam como ondas que, ao interagirem (e isso é compreendido como uma interação pontual), ficam mais ou menos bem localizadas (ver Eq.(2.40), Seção 2.3, sobre pacote de onda) como partículas. Essa interpretação pode ser confundida com a dualista, pois estamos falando de um comportamento dual, cujas facetas estão em função da propagação (onda) e interação (partícula). No entanto, a diferença fundamental neste caso é que onda e partícula *não coexistem* simultaneamente.

A interpretação *corpuscular realista* (defendida por Alfred Landé e Leslie Ballentine) entende que fóton e elétron são realmente partículas, porque assim se manifestam ao detectarmos ambos. O experimental A. Zeilinger (PNF, 2022), por exemplo, tem uma famosa frase na qual diz que “fótons são *clicks* em fotodetectores”. Segundo esse entendimento,

as leis da Física Quântica (no caso, a equação de Schrödinger) são tais que gerariam um padrão de interferência, sendo que não existiria uma onda associada à partícula. A célebre frase de Max Born pode ser aqui utilizada: ‘O movimento das partículas conforma-se às leis da probabilidade, mas a própria probabilidade propaga-se de acordo com as leis da probabilidade’ (Pessoa, 2021, p. 8)

A interpretação *dualista realista*, por sua vez, proposta originalmente por De Broglie e trazida novamente ao debate por David Bohm, entende que o objeto quântico tem duas partes, sendo uma partícula com trajetória bem definida - embora desconhecida - e uma onda associada, com probabilidade de se propagar numa determinada direção proporcional ao quadrado da amplitude ( $|\Psi(x,t)|^2$ ) da função de onda associada. E onde as ondas se cancelam, como mostrado também na Seção 2.1, não há partícula. Nesse caso, são reconhecidas duas partes do mesmo objeto.

Nos parágrafos anteriores, apresentamos três teorias *realistas*, que discorrem sobre pontos de vista distintos da realidade física dessas partículas quando estão se propagando, e da forma como interagem e se nos apresentam quando efetuamos medições. O físico dinamarquês Niels Bohr talvez tenha sido o primeiro a abandonar a exigência do realismo físico, tida como imprescindível para que uma teoria seja dita completa, crítica trazida por Einstein no resumo de seu artigo de 1935 (Einstein *et al.*, 1935) (em tradução direta) “Em uma teoria completa há um elemento para cada elemento de realidade. Uma condição suficiente para a realidade de uma quantidade física é a possibilidade de predizê-la com certeza”.

Percebemos aqui que a primeira grande oposição teórica estabelecida ao realismo em quaisquer de suas versões foi a interpretação ortodoxa, ou de Copenhague (devido à cidade

natal de Bohr). Ao enunciá-la como “oposição teórica”, busco pontuar o pioneirismo de Bohr quando sequer era imaginada uma forma de distinguir as previsões da MQ das previsões de TVOL.

A interpretação em questão abandona o realismo e admite que se trata de um fenômeno ondulatório, distinguindo-o categoricamente do corpuscular por não ser possível inferir a trajetória do quantum detectado, fato que é verificado experimentalmente. Medições consecutivas são independentes umas das outras, podendo haver alguma semelhança em função somente do tempo decorrido entre uma medição e outra (quanto menos tempo, mais similares), como discutido na Subseções 2.3.1 e 2.3.3 - *O comutador* e *O gato de Schrödinger*, respectivamente. A *complementaridade* diz respeito exatamente à incerteza entre dois observáveis não-compatíveis, analisada via dispositivo do comutador. As informações se complementam, mas alguma informação é perdida ao medirmos posição ou momento (ou qualquer par que não comute). O aspecto corpuscular verificado na detecção de fótons e elétrons é devida ao postulado quântico, de Max Planck, que para Bohr carrega consigo uma descontinuidade intrínseca dos processos nessa escala.

Por último, temos a interpretação *instrumentalista*, que pode e deve ser vista em pelo menos dois momentos, ou duas épocas, separadas pelo teorema de Bell e a violação das suas desigualdades. Entre 1935 e 1964, o debate sobre a realidade dos sistemas, ou seja, *antes* das medições, fora ignorado por muitos físicos que compunham o grupo signatário da posição agnóstica, que não se importava com detalhes dessa natureza, sobretudo em face da capacidade de previsão da teoria.

Até então, essa forma de compreensão consistia na combinação de uma postura antirrealista somada à tese de que a TQ é uma teoria referente a um coletivo estatístico, e não a partículas individuais, embora a TQ faça a previsão estatística correta da dupla fenda no regime quântico, com partículas disparadas individualmente, como realizado em 2005 (Jacques *et al.*, 2005). Após 1964, sobretudo a partir de 1982, o tema ganhou atenção até mesmo dos mais agnósticos, devidos aos avanços experimentais, que serão melhor comentados no Capítulo 3 - *Histórico Experimental*.

Com base nessas interpretações, a *interpretação probabilística*, devido a Max Born (BORN, 1954) compreende o caráter dual como ondas de probabilidade que estão *associadas* às partículas durante a sua propagação. Essa ideia está ligada à interpretação da complementaridade de Bohr, que entende que a onda associada colapsa no momento da medição.

## 2.4 Emaranhamento

### 2.4.1 O paradoxo EPR

Como pode ser observado, cada nova comprovação experimental acerca da MQ fez com que tivéssemos que rever muitas concepções elementares há muito estabelecidas e presentes em toda a física clássica. A equação de Schrödinger se mostrava eficaz na descrição da evolução dos sistemas a que se propunha aplicar, reconhecendo-se sempre a sua natureza probabilística. Entretanto, assumir que se tratava de uma teoria probabilística munida das noções que a interpretação de Copenhague trazia consigo, nos direcionava para resultados problemáticos.

Em maio de 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen publicaram um artigo no qual formularam o famoso paradoxo EPR, acrônimo das iniciais dos seus sobrenomes. O artigo, cujo título em tradução direta para o Português era “A descrição da Mecânica Quântica sobre a realidade física pode ser considerada completa?” (Einstein *et al.*, 1935), admitia que a MQ estava sendo desenvolvida e aplicada de maneira correta, mas ainda havia variáveis a incluir. A justificativa vem a seguir.

Podemos escrever a função de onda para um elétron no átomo de Hidrogênio, por exemplo, em termos das coordenadas esféricas ou em termos dos números quânticos, que são resultado das quantizações impostas às soluções das equações diferenciais radial e angular que obteremos resolvendo a equação de Schrödinger para o potencial coulombiano.

Obtidos os números quânticos, eles funcionam como atalhos e facilitam muito as predições que faremos. Neles está contida a informação do estado da partícula. O *número quântico principal*,  $n$ , está associado à coordenada radial e à quantização de energia. Os números quânticos *azimutal e magnético*,  $l$  e  $m$ , estão associados às coordenadas angulares,  $\theta$  e  $\phi$  e ao momento angular orbital. Assim, a função de onda ficará

$$\psi_{nlm} = R_n(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.85)$$

e para o estado fundamental do Hidrogênio pode ser escrita como  $\psi_{100}$ , cuja sequência  $n = 1$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$  é unívoca.

A construção probabilística da MQ nos leva a sistemas de duas (ou mais) partículas que podem estar fortemente correlacionadas. Um bom exemplo para isso é a função de onda para duas partículas idênticas. Tomemos o caso do átomo de Hélio, o segundo átomo mais simples que existe na natureza, com dois elétrons - e dois prótons e dois nêutrons, mas eles não vêm ao caso - no seu estado fundamental, denominado parahélio.

A função de onda para dois férmions idênticos pode ser escrita de forma sintética

como

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \pm \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)], \quad (2.86)$$

em que os índices 1 e 2 denotam partículas 1 e 2 (novamente, são indistinguíveis, sabemos que cada uma está numa posição, mas não *qual* está em cada posição), e  $a$  e  $b$  denotam estados distintos em que cada uma delas está.

Para férmions, faremos uma subtração dos termos, obtendo a função

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)]. \quad (2.87)$$

Se supusermos o mesmo estado para os dois elétrons,  $\psi_a$ , por exemplo, a Eq.(2.36) ficará

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_a(\mathbf{r}_1)] = 0, \quad (2.88)$$

aqui nos defrontamos novamente com uma função de onda nula, que sabemos significar ausência de partículas. Voltando à ideia de probabilidade, no contexto proposto, a leitura que fazemos é de que a probabilidade de encontrarmos dois elétrons *exatamente* no mesmo estado é *zero*. Esse resultado ficou conhecido como princípio de exclusão de Pauli, devido ao físico austríaco Wolfgang Pauli, que ganhou por isso o Nobel de Física em 1945.

Os estados denotados acima por  $a$  e  $b$  podem ser escritos também em termos dos números quânticos, como no exemplo  $\psi_{100}$ . Assim, supondo os dois elétrons no mesmo estado, teremos duas funções de onda com a mesma sequência unívoca de números quânticos

$$\psi_{nlm} = \psi_{n'l'm'} \iff n = n', \quad l = l', \quad m = m', \quad (2.89)$$

para ambos os elétrons, o que resultará na função de onda identicamente nula. Daí emerge a necessidade de um quarto número quântico, que denominamos spin, que em último caso irá distinguir os estados de dois elétrons. Continuando no mesmo raciocínio, se dois elétrons têm os três primeiros números quânticos iguais, um a um, isso nos obriga a inferir que a configuração dos seus spins seja o estado singlete (no Capítulo 4 serão mencionados exemplos de partículas emaranhadas e alguns modos de obtê-las)

$$\psi_{nlm\sigma} = R_n(r)Y_l^m(\theta, \phi)\chi_\sigma, \quad (2.90)$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.91)$$

A equação spinorial acima difere de todas as soluções gerais da equação de Schrödinger até aqui apresentadas, que são escritas como produtos das soluções para cada uma de suas partes. Por isso, no caso das partículas na configuração em questão, dizemos se tratar de estados *não-fatoráveis*. Isso significa que, caso verificemos o spin do primeiro elétron, e o

resultado seja *spin up*,  $|\uparrow\rangle$ , saberemos de antemão que o spin do outro elétron será, necessariamente, *spin down*,  $|\downarrow\rangle$ , e vice-versa. Temos conhecimento sobre o estado global do sistema, mas completo desconhecimento sobre o estado das suas partes.

Entretanto, tomando como pressuposto o princípio da localidade, que é o postulado da relatividade restrita, de que nenhuma influência pode propagar com velocidade igual ou superior à da luz, a única possibilidade de interpretação que de fato restava era a posição realista, que por fim nos levaria a concluir que a MQ estava incompleta - carecia de variáveis ainda desconhecidas.

Esse desfecho teórico brevemente apresentado se dá pelo fato de que, sendo o colapso da função de onda algo instantâneo (como era percebido), não seria possível que a medição do spin da primeira partícula determinasse o resultado do spin da outra, logo os resultados medidos deveriam ser aqueles *antes* da medição. Sobre a possibilidade do colapso da função de onda não ser instantâneo, isso violaria a conservação do momento angular, pois caso medíssemos o spin de uma das partículas antes da informação do colapso alcançá-la, teríamos uma probabilidade de 1/2 de encontrarmos ambas com o spin para cima.

Uma analogia para esse caso seria que alguém nos entregasse duas caixas, dentro das quais há um dos lados de um par de luvas, ou seja, mão esquerda numa caixa e mão direita na outra - não sabemos *qual* lado do par está em cada caixa. Assim, ao enviarmos uma das caixas para algum lugar arbitrariamente distante, e abrirmos a que ficou conosco, vendo assim qual luva tínhamos o tempo todo em mãos, saberemos imediatamente qual lado do par estava lá o tempo todo na caixa distante.

Além do argumento suficientemente convincente do princípio da localidade, a forte correlação que essas duas partículas podem ter abria margem para uma completa determinação do estado delas.

Einstein propõe medir o momento de A e através de certos cálculos, derivados da interação das partículas, obter o valor do momento de B. Alternativamente, ele sugere medir a posição de A, e por processo análogo obter a posição de B. Como as medidas hipotéticas foram feitas em A, e uma medição em uma partícula não deveria alterar o estado de outra partícula distante, Einstein conclui que a partícula B tem posição e momento simultaneamente bem definidos. Como a teoria quântica interdita esta conclusão, pelo princípio da indeterminação de Heisenberg, Einstein conclui que a teoria quântica é uma teoria incompleta porque descreve menos propriedades que aquelas expressas pela partícula B.

(Freire, 2013, p. 2)

O “paradoxo” formulado se dá pelo confronto das duas hipóteses: (1) “a descrição da realidade física dada pela função de onda na MQ não é completa, ou (2) as duas grandezas físicas não podem ter realidade simultâneas”.

Nas palavras de Léon Rosenfeld, colega de Niels Bohr, “este ataque caiu sobre nós com um raio dos céus” (Pessoa, 2021, p. 85).

### 3 HISTÓRICO EXPERIMENTAL

A discussão levantada no capítulo anterior pelo artigo de 1935 em que fora formulado o paradoxo EPR (Einstein *et al.*, 1935) foi, por mais legítimo que fosse o questionamento, colocada em segundo plano por ser considerada filosófica. Aqui, há dois pontos de vista. O primeiro é de que a maioria dos cientistas poderia ser, à época, excessivamente pragmática. O outro ponto de vista é que tal discussão ainda não era concebida como *falseável*. Testar as hipóteses é o último critério de verdade na física - não que busquemos “verdades”, mas buscamos  *fatos*  experimentais. Três anos antes do artigo supracitado, a pedido de David Hilbert, o também matemático John Von Neumann publicou uma obra em que definiu com rigor pontos importantes da matemática da MQ, a exemplo do próprio espaço de Hilbert. O livro intitulado *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica) trazia, inclusive, um argumento contra as TVOL, que viria a ser confrontado anos mais tarde.

#### 3.1 As previsões teóricas de John Bell e o aparato de N. Mermin

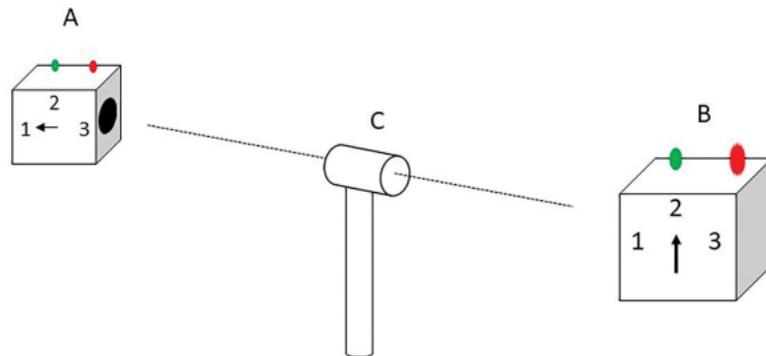
No ano de 1964, o físico norte-irlandês e pesquisador do CERN John Stewart Bell concebeu uma forma de distinguir as previsões da MQ das previsões das TVOL, possibilitando que as discussões filosóficas fossem para o laboratório. Ele idealizou um experimento para medição dos spins de partículas, baseada numa proposta feita em 1952 pelo também correligionário das variáveis ocultas, David Bohm, e estabeleceu um método capaz de verificar se havia correlação entre as medições dos spins, chegando a um teorema que levou seu nome e que envolve desigualdades a partir das quais podemos investigar a compatibilidade entre a MQ e TVOL, reportando em um brevíssimo artigo (Bell, 1964). Diga-se de passagem, tanto Bohm quanto Bell apresentaram contra-argumentos ao que foi exposto por Von Neumann em seu livro, mas não iremos detalhar aqui.

Bell sugeriu uma generalização do experimento EPR/Bohm: em vez de orientar os detectores de elétrons e pósitrons para a mesma direção, ele permitiu que eles fossem rotacionados de forma independente. O primeiro mede a componente do spin do elétron na direção de um vetor unitário  $\vec{a}$ , e o segundo mede o spin do pósitron junto à direção  $\vec{b}$  (Figura 12.2). Para simplificar, vamos registrar os spins em unidades de  $\hbar/2$ ; assim, cada detector registra o valor +1 (para spin para cima) ou -1 (spin para baixo), junto à direção em questão. (Griffiths, 2011, p.314)

O referido artigo do paradoxo EPR não teve mais do que algumas dezenas de citações até 1980, saltando para mais de mil atualmente (FREIRE JR, 2011, p. 42), sendo o divisor de águas o ano de 1982, em que fora reportado um importante experimento de um grupo liderado pelo francês Alain Aspect, a ser melhor comentado.

Inicialmente, para simplificar a sugestão de Bell, tomemos o exemplo facilitador proposto pelo físico Nathaniel Mermin (Mermin, 1985; Mermin, 1990), que foi mais uma vez simplificado em (Wagner *et al.*, 1995). Bell propôs a medição da orientação dos spins do elétron e do pósitron resultantes do decaimento do méson pi em repouso ( $\pi^0$ ), que tem seu momento angular conservado.

Figura 3: Aparato análogo ao de N. Mermin.



Fonte: Retirada da referência (Wagner *et al.*, 1995).

Figura 4: Leitura simplificada dos resultados possíveis, previstos por Bell.

A \ B	A	B	
	2R2R	3R2G	1G3G
	3R3R	3R2G	3R2R
	2R1R	2R2R	3R1G
	1G1G	3R1G	2G1R
	2R1R	1G3R	2G3R

Fonte: Retirada da referência (Wagner *et al.*, 1995).

Os pares número-letra acima denotam, respectivamente, o eixo do detector que fez a medição, e cor. O que Bell pretendia com seus experimentos era verificar se havia correlação entre as medidas dos spins, conforme prevê a MQ (ver Subseção 2.5.1). A condição que a MQ descreve é dita, de fato, uma *anticorrelação* (*spin up* e *spin down* ou o contrário). As cores, quando iguais, indicam que houve anticorrelação na detecção.

Podemos ver na tabela da Figura (3) configurações diversas, como na 2ª colíntegra, 4ª linha, em que temos 3R1G, ou seja, as partículas foram detectadas por dois eixos distintos, cujo resultado foram cores diferentes, indicando que não há correlação alguma. Vemos também resultados que apontam anticorrelação (cores iguais) sem que os números sejam iguais. Mas o resultado que chamou a atenção de Bell (e da comunidade científica - não só dos físicos) foi,

no caso do nosso exemplo, que *todas* as ocorrências de chaves coincidentes retornaram cores iguais, indicando a anticorrelação dos spins. Nunca números iguais retornavam cores distintas.

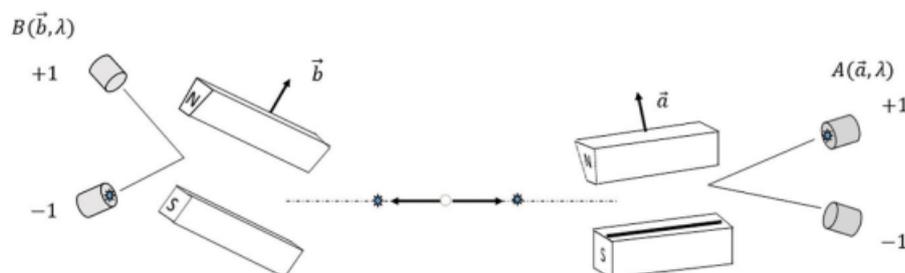
As combinações possíveis eram: 11, 22, 33, 12, 13, 21, 23, 31, 32 (9 no total). O raciocínio de Bell foi: (a) para números iguais, 11, 22, 33 (que correspondem a 1/3 das combinações possíveis), RR e GG (com a mesma frequência), em 100 % dos casos; (b) também houve coincidência de cores, RR e GG (com a mesma frequência), para chaves distintas, que têm como possibilidades as combinações 12, 21, 23, 32, 13, 31, em 1/4 das medições (com RG e GR em 3/4).

Para explicar o resultado (a), poderíamos supor que as partículas têm “instruções” do tipo RRR, RRG, RGR, GRR, RGG, GRG, GGG, GGR, tendo como hipótese que as partículas emitidas sejam sempre idênticas. Para analisar (b), temos que respeitar a hipótese que fizemos para (a). Suponhamos que as partículas tenham a instrução RRG. Dos arranjos possíveis: 12, 21, 13, 31, 23, 32 (6 no total), para RRG, só nos casos 12, 21 as cores seriam iguais. Como todos os arranjos são supostos aleatórios, o mesmo raciocínio deve ser válido para RGR, RGG, GRR, GRG, GGR. Nos casos RRR e GGG, as cores sempre serão iguais. Assim, a probabilidade de obtermos a mesma cor no caso (b) deveria ser maior que 1/3, quando na verdade os resultados detectados são de apenas 1/4.

Logo, há “dois tipos de coincidências”: as coincidências devido à correlação das partículas, e as meras coincidências. O que acabou de ser mostrado é que as meras coincidências deveriam ocorrer em maior número. Relembrando os objetivos do questionamento de Einstein, conforme mencionado por Bell no início do seu artigo (Bell, 1964), seriam restaurar a causalidade e a localidade na teoria quântica.

### 3.2 Teorema e desigualdade de J. Bell e o experimento sugerido por ele

Figura 5: Aparato sugerido por Bell - Ímãs de Stern-Gerlach



Fonte: Retirada da referência (Wagner *et al.*, 1995).

O aparato sugerido por Bell consiste em ímãs de Stern-Gerlach, com vetores unitários ( $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  na figura acima) associados à direção dos ímãs, e em termos dos quais seriam

escritas as medições de spin, em unidades de  $\hbar/2$ , simplificando os resultados em  $+1$  e  $-1$ . O processo de produção de partículas emaranhadas seria o decaimento do méson pi (píon) neutro ( $\pi^0$ ), que tem como produtos um elétron  $e^-$  e um pósitron  $e^+$  com spins no estado singlete.

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+, \quad (3.1)$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (3.2)$$

Os mésons foram propostos em 1943 pelo físico japonês H. Yukawa (PNF, 1949) como partículas mediadoras da interação nuclear forte, que se dá entre prótons e nêutrons. O méson  $\pi$  mencionado no experimento proposto por Bell foi descoberto experimentalmente pelo físico brasileiro César Lattes, em 1947. Em um primeiro contato com suas propriedades, têm como principal característica a instabilidade.

Bell propôs o cálculo do valor médio do produto dos spins para dado conjunto de orientações de detectores. Chame essa média de  $P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ . Se os detectores forem paralelos ( $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ), restauraremos a configuração EPRB original; nesse caso, um terá spin para cima e o outro terá spin para baixo, e, portanto, o produto será sempre  $-1$ , assim como a média, Eq.(3.1):  
(Griffiths, 2011, p.314)

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1, \quad (3.3)$$

$$P(\mathbf{a}, -\mathbf{a}) = +1. \quad (3.4)$$

Tabela 1: Resultados da medição dos spins e seus produtos.

$e^-$	$e^+$	Produto
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
...	...	...

Fonte: Retirada da referência (Griffiths, 2011).

O modelo de Bell opera com variáveis bivalentes, ou seja, que podem assumir apenas dois valores,  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{b}$ , como no caso de componentes de spin e polarização. O raciocínio de Bell consistiu em duas suposições fundamentais, a de que o estado completo do sistema fosse caracterizado pelas variáveis escondidas  $\lambda$ , isto é, que o estado de cada partícula poderia ser escrito como funções  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  e  $B(\mathbf{b}, \lambda)$ , e que o resultado da medição sobre uma partícula não influenciasse no resultado da medição sobre a outra. Se os detectores estiverem antiparalelos

( $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ ), teremos uma perfeita anticorrelação, Eq.(3.6). Assim, as exigências fundamentais seriam as equações (3.5) e (3.6)

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1; \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1, \quad (3.5)$$

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{b}, \lambda). \quad (3.6)$$

A média dos produtos das medições será dada por

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda, \quad (3.7)$$

em que  $\rho(\lambda)$  é a densidade de probabilidade para a variável oculta, que como qualquer densidade de probabilidades é não-negativa e satisfaz a condição de normalização

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (3.8)$$

Para orientações arbitrárias, a MQ prevê

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (3.9)$$

Combinando Eq.(3.6) e Eq.(3.7), ficaremos com

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.10)$$

Para qualquer outro vetor unitário  $\mathbf{c}$ ,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] d\lambda, \quad (3.11)$$

e colocando  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  em evidência, teremos

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{c}, \lambda)] A(\mathbf{a}, \lambda) d\lambda, \quad (3.12)$$

que, devido à Eq.(3.5), ficará

$$-1 \leq [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)] \leq +1; \quad (3.13)$$

e

$$\rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \geq 0; \quad (3.14)$$

$$[A(\mathbf{b}, \lambda)]^2 = 1. \quad (3.15)$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.16)$$

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] d\lambda, \quad (3.17)$$

Daí, a famosa desigualdade de Bell.

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.18)$$

O que Bell descobriu é que esse resultado é incompatível com qualquer teoria de variável oculta local (Griffiths, 2011, p.315). Com o seu resultado teórico, Bell inferiu que a teoria quântica poderia violar as desigualdades. A contingência - violar ou não - em questão depende dos ângulos de detecção, dos quais para  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , a MQ e uma TRL retornavam as mesmas previsões. Mas, para os demais valores, as previsões da MQ se confirmavam. Dessa forma, a conclusão era de que uma TRL não pode reproduzir todos os resultados previstos pela MQ. Sobre a abrangência dos resultados demonstrados, com base nos pressupostos que assumimos, Griffiths comenta em seu livro-texto (Griffiths, 2011)

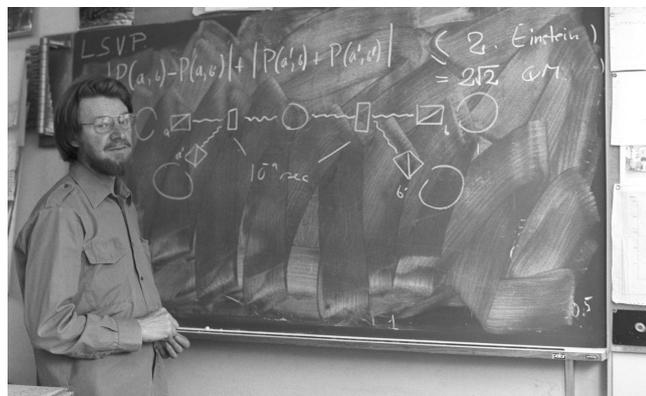
Isso vale para qualquer teoria de variável oculta local (sujeita apenas às exigências mínimas das equações 12.5 e 12.6), pois não fizemos pressupostos sobre a natureza ou o número de variáveis ocultas, ou sua distribuição ( $\rho$ ). Mas é fácil demonstrar que a previsão da mecânica quântica (Equação 12.4) é incompatível com a desigualdade de Bell. Por exemplo, suponha que os três vetores estejam em um plano e  $\mathbf{c}$  faça um ângulo de  $45^\circ$  com  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (Figura 12.3); nesse caso, a mecânica quântica diz que (Griffiths, 2011, p. 316)

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -0,707, \quad (3.19)$$

$$0,707 \not\leq 1 - 0,707 = 0,293. \quad (3.20)$$

Em algumas medições, a MQ viola a desigualdade em valores claramente discordantes, por exemplo, de  $2\sqrt{2}$ , como escrito por J. Bell na lousa na imagem abaixo.

Figura 6: John Bell no CERN, em 1982.



Fonte: Retirada da referência *Nobel Prize Org.*

### 3.2.1 Interpretação das desigualdades de Bell e de uma possível violação

Vimos no início desta seção que os resultados de medições correlatas foram distintos dos resultados previstos quando não privilegiamos combinações de números, tratando todas como igualmente prováveis. Diante das correlatas, no entanto, a suposição de que há instruções prévias (Variáveis Ocultas) falha por ser detectada em um número inferior de medições em relação aos arranjos possíveis. A desigualdade que Bell obteve indicava que qualquer teoria de variáveis ocultas locais seria incompatível com a MQ.

Em primeiro lugar, o que reconhecemos nos experimentos são as correlações de spins medidos, que podemos tratar, em princípio, como coincidência - ainda que, é claro, seja uma coincidência em altíssimo grau. Ao propor que os ímãs pudessem girar e ter direções independentes, e também de forma aleatória, isso importaria alguma aleatoriedade ao sistema. Aleatoriedade que, por sinal, foi “superada” pela correlação.

Relembremos que o que se buscava restabelecer ao propôr variáveis adicionais à MQ seria realismo e localidade, esta última colocada por Einstein, autor da teoria da relatividade restrita, como pressuposto fundamental e inviolável, que deveria conduzir à noção de sistemas previamente bem definidos (realismo).

No decorrer das investigações aqui discutidas, as TVOL eram a aposta dos críticos da MQ, mas poderia ser assumido que a MQ fosse uma teoria incompleta, cuja complementação fossem variáveis ocultas *não-locais*. Na literatura são encontradas algumas menções dessa natureza, mas de forma notadamente escassa, pois, como admitido pela maioria dos autores, a exemplo o próprio Griffiths,

a confirmação experimental da mecânica quântica veio como um choque para a comunidade científica. Mas não porque ela representava o fim do 'realismo'; a maioria dos físicos vem se ajustando a isso há muito tempo (e para aqueles que não puderam fazê-lo, restou a possibilidade de teorias de variáveis ocultas *não-locais*, para as quais o teorema de Bell não se aplica. O verdadeiro choque foi a demonstração de que *a própria natureza é fundamentalmente não-local* (Griffiths, 2011, p. 316)

Dessa forma, caso fossem confirmadas variáveis ocultas não-locais, seria uma descoberta de grande impacto, certamente, mas a noção de que a fenomenologia é fundamentalmente não-local constituiu um problema maior.

A condição de localidade é expressa no argumento que o resultado de uma medição não afete o resultado da outra à distância, o que para Bell significava ausência de qualquer influência causal devido às teorias físicas e interações conhecidas. Para Einstein, no entanto, a localidade era entendida à luz da sua importante teoria da relatividade restrita. Formalmente, dois eventos espaço-temporais estariam “à distância” caso estivessem separados por um intervalo do tipo espaço.

Sobre a condição de realidade, já definida de algumas formas, podemos compreendê-la em função de um dado instante no qual fazemos a medição

Esta condição de elemento de realidade pode ser refinada, segundo sugestão do filósofo da física inglês Michael REDHEAD, em sua excelente análise do argumento de EPR. Ele (p. 72) sugere a seguinte modificação: “Se pudermos prever com certeza, ou de qualquer maneira com probabilidade um, o resultado da medição de uma quantidade física no instante  $t$ , então no instante  $t$  existe um elemento de realidade correspondendo à quantidade física e tendo um valor igual ao resultado previsto para a medição.”  
(Pessoa, 2021, p.86)

Devemos destacar também que as medições de spins ou qualquer sistema equivalente *não* é simultânea, pois as componentes de spin não são compatíveis, e uma medição simultânea violaria o princípio da incerteza de Heisenberg. Acontece que essa relação pode e já foi enunciada como ausência de realismo simultâneo.

Os resultados obtidos indicaram que os sistemas *não* estavam definidos *antes* da medição, e que portanto a altíssima correlação entre os resultados permite inferir que uma medição influencia a outra apesar da imposição de uma separação tipo espaço.

Por fim, pondo em discussão o significado da violação das desigualdades de Bell e pontuando sobre a não-localidade verificada nos experimentos, que pode dar a entender como um fenômeno que viola a relatividade restrita (o que não é verdade), o que os resultados evidenciam são sim efeitos não-locais, mas não estabelecemos realismo e localidade simultaneamente nas medições. Há, porém, intentos no sentido de descrever a correlação verificada no emaranhamento por meio de um tratamento matemático em espaços não-euclidianos, também chamados espaços métricos - simplificada, aqueles cuja distância entre dois pontos vizinhos não é constante.

Adiante serão apresentados alguns experimentos de relevância em que as desigualdades de Bell foram violadas sob várias circunstâncias impostas.

### 3.3 J. Clauser, A. Aspect e A. Zeilinger e a violação das desigualdades de Bell

As contribuições teóricas de Bell inauguraram um novo momento na pesquisa em fundamentos da teoria quântica, sendo uma inspiração para alguns cientistas que viriam a caminhar na contramão do que a academia mais consagrava à época. Não foi fácil, sobretudo aos primeiros grupos, se dedicar academicamente a esse estudo.

Crítico da MQ como John Bell, o jovem John Clauser, à época com cerca de 30 anos de idade, foi o pioneiro das pesquisas experimentais que testaram as desigualdades de Bell. Motivado pela sua curiosidade e pelas ideias revolucionárias de seu tempo, era, dos teóricos críticos da MQ, certamente o mais convicto de que havia realmente variáveis escondidas/ocultas.

A guerra do Vietnã dominou o pensamento político de minha geração. Como um jovem estudante vivendo naquela era de pensamento revolucionário, eu naturalmente queria “sacudir o mundo”. Como eu já acreditava que variáveis escondidas de fato existiam, eu pensei que esse seria o experimento crucial para revelar sua existência.  
(Clauser, 2002)

Clauser iniciou seus experimentos ainda na década de 1960, juntamente com Stewart Freedman, sendo os primeiros físicos a violarem as desigualdades de Bell. Esse resultado foi bastante delicado de analisar, pois não somente se tratava de físicos signatários das TVOL (aqui levo em consideração uma mínima tendência pessoal de ambos a um tipo de resultado), como também não se sabia o que deveria ser esperado nos testes. Assim, a dupla confirmou as previsões da MQ tal qual era proposta, isto é, sem variáveis a incluir. Uma teoria completa. Mas muito ainda seria feito a fim de “tapar as brechas” experimentais, chamadas de *loopholes*.

Os experimentos de Clauser chamaram a atenção de um outro personagem de muita importância para essa pesquisa, Abner Shimony. Na época em que tomou conhecimento da pesquisa de Clauser, Shimony se dedicava ao mesmo tema, orientando dois alunos de doutorado, Michael Horn e Richard Holt. Uma rica colaboração teve como fruto a desigualdade CHSH, acrônimo dos seus nomes. A dedução da desigualdade de Bell, já apresentada e comentada na Seção 3.2 - *Teorema e desigualdade de J. Bell e o experimento sugerido por ele* dispensa detalhes quanto à dedução da desigualdade CHSH, a saber

$$-1 \leq S \leq 0. \quad (3.21)$$

Como mencionado na Introdução, todos os grupos experimentais que testaram as desigualdades de Bell as violaram. Assim também aconteceu com a desigualdade acima, evocada para investigar a possível não-localidade do fenômeno. O que desponta, de maior relevância, ao recapitular a história desse desenvolvimento é o que estava em jogo em cada experimento.

Einstein lança o argumento da localidade como pressuposto fundamental que irá culminar na interpretação realista. Ao obter resultados que indicavam correlação entre as partículas, outras hipóteses eram feitas, sobre possíveis correlações *entre os detectores*, que pudessem ter sido estabelecidas durante a configuração deles. Assim, seria necessário garantir aleatoriedade nos experimentos, para então verificar de forma mais segura em que proporção ocorriam os dois referidos tipos de coincidência.

No ano de 1976, Alain Aspect tomou a decisão de trabalhar com experimentos sobre as desigualdades de Bell no seu doutoramento, publicando resultados de muita relevância em 1981 e 1982 (Aspect *et al.*, 1982a; Aspect *et al.*, 1982b). Devido a críticas ainda com

respeito à correlação causal ou não entre as detecções obtidas, dentre as quais estava a atenta observação de John Bell sobre o progresso dos experimentos, Aspect publicou um terceiro resultado também no ano de 1982, juntamente com Dalibard e Roger. Nesse último trabalho, Aspect refez seu experimento, com os analisadores variando no tempo em configurações independentes e quase aleatórias.

No experimento em questão, os interruptores não trabalharam de forma verdadeiramente aleatória, mas quase periódica. Porém, os dois interruptores foram dirigidos por geradores com frequências diferentes, logo, naturalmente, pode-se assumir que eles não estavam correlacionados.

(Bispo, 2013, p. 72)

Ainda assim, foi verificada a anticorrelação entre os fótons e o resultado numérico obtido foi  $S = 0,101 \pm 0,020$ , sendo *zero* o valor máximo para a quantidade  $S$ . De acordo com as previsões da MQ, o valor é igual a  $S_{MQ} = 0.112$ . Logo, novamente os resultados corroboraram as previsões da MQ. Apesar de algumas críticas sobre a precisão menor que esse experimento teve em relação aos anteriores, foi um trabalho de muita relevância (mesmo porque estava de acordo com resultados anteriores), sendo um segundo marco no quesito citações do artigo de 1935 de Einstein, Podolsky e Rosen. O teorema de Bell envolve médias, e é concebível que um aparelho como o de Aspect contenha alguma tendência secreta que selecione uma amostra não representativa, distorcendo, assim, a média (GRIFFITHS, 2011, p. 316).

Por fim, no contexto dos trabalhos reconhecidos com o Prêmio Nobel de Física em 2022, o grupo do austríaco Anton Zeilinger também violou as desigualdades de Bell sob circunstâncias tecnicamente ainda mais complexas e deu um passo à frente com o emaranhamento de três fótons, ao invés de dois, além de conceber e realizar o teletransporte de estados quânticos. É de suma importância destacar esses avanços em aplicações diretas de compreensões sobre os fundamentos da MQ, antes uma pesquisa marginal e de pouca abertura acadêmica, e que possibilitam vislumbrar um novo panorama de tecnologias.

### 3.3.1 Os aparatos de Clauser, Aspect e Zeilinger e a evolução da sua cultura material

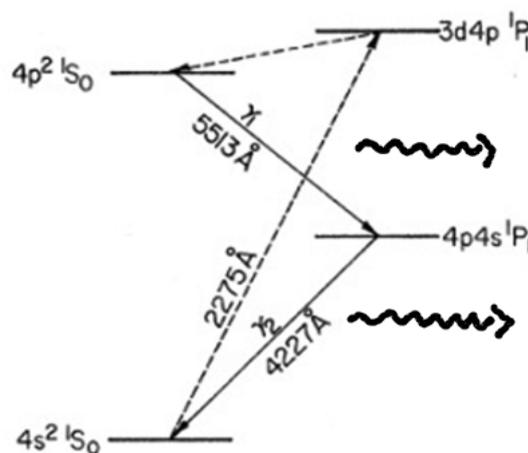
Para analisarmos os experimentos realizados (tanto em relação aos aparatos quanto às técnicas) e sua evolução, podemos nos basear em três pontos, que são excitação, detecção e contagem de coincidências. Nessa breve análise, focaremos nos experimentos de Clauser e Aspect, por terem tido papel mais crucial no tema.

Ao falar a respeito dos três grupos experimentais que violaram as desigualdades de Bell, tratamos sobre parte das discussões que motivaram as melhorias dos seus aparatos e técnicas experimentais. A principal razão, novamente, era eliminar quaisquer possibilidades de correlações previamente estabelecidas, durante o preparo dos experimentos, fosse na produção das partículas correlacionadas, fosse nos aparatos, para detecção e contagem.

A primeira mudança ocorrida em relação à proposta de Bell foi o tipo de partícula usada. Os experimentos em questão não fizeram uso do decaimento do pión, medindo os spins do elétron e do pósitron, mas sim de fótons emaranhados, verificando as suas direções de polarização. A produção desses fótons foi feita de ao menos duas formas. Clauser utilizou o decaimento em cascata de átomos de Cálcio (de dois níveis eletrônicos, imagem abaixo), que geram pares de fótons emaranhados. Uma técnica rústica e não muito simples de manipular.

O experimento conduzido por Clauser e Freedman (Freedman; Clauser, 1972) usou um método mais rústico para obter os pares emaranhados, excitando uma amostra atômica com feixes de elétrons com energia conhecida. Tanto os experimentos de segunda e terceira geração coletam dados suficientes para boas estatísticas em questão de minutos ou mesmo segundos. Clauser e Freedman precisaram manter o experimento estabilizado por cerca de 200 horas para obter dados suficientes para a análise. (Freire, 2013, p. 1)

Figura 7: Produção de fótons emaranhados por decaimento em cascata do átomo de Cálcio.



Fonte: Retirada da referência (Bispo *et al.*, 2013; Freedman; Clauser, 1972).

A produção desses fótons por esse método se dava aquecendo a amostra de Cálcio em um forno, o que acabava excitando muito mais do que os dois níveis atômicos de interesse para o decaimento em cascata, e conseqüentemente produzindo uma porção de resíduos desinteressantes, sem importância, e que ainda demandavam muito trabalho na detecção e contagem de coincidências, sobretudo por se tratarem de experimentos essencialmente estatísticos.

Uma outra dupla de relevância foram Edward Fry e Randall Thompson, que em 1976 reportaram experimentos com laser sintonizável, tornando mais preciso o processo de excitação dos átomos, fazendo-o nos níveis desejados e reduzindo substancialmente o tempo necessário para obter a quantidade de dados desejada. Enquanto Clauser precisou manter seu experimento estabilizado por cerca de 200 horas para obter um número suficiente de fótons, Fry e Thompson precisaram de 80 minutos. No final da década de 1980, o laser ainda viria a ser

Figura 8: John Clauser junto de seu aparato experimental na UC Berkeley, 1972.



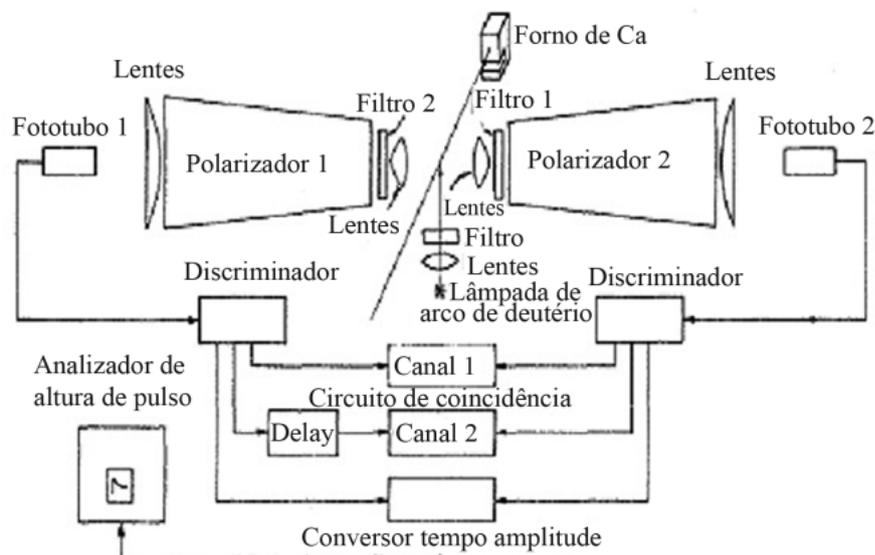
Fonte: Nobel Prize Org.

utilizado de outra forma ainda mais eficiente, sendo a fonte principal dos fótons emaranhados, processo a ser comentado ao final desta subseção.

Desde 1988 testes com as desigualdades de Bell são chamados de testes de terceira geração por usarem como fonte para a produção de pares de fótons emaranhados a conversão paramétrica descendente, processo pelo qual fótons emitidos por laser interagem com cristais não lineares produzindo o par de fótons emaranhados. Trata-se de fonte especialmente poderosa, que revolucionou a técnica destes experimentos.

(Freire, 2013, p. 1).

Figura 9: Esquema experimental de John Clauser.



Fonte: Retirada da referência (Bispo *et al.*, 2013; Freedman; Clauser, 1972).

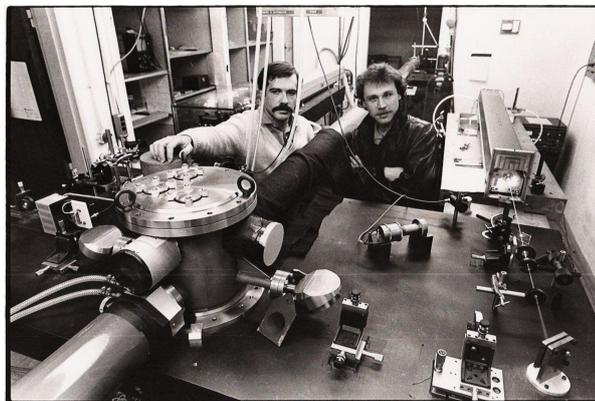
A amostra de Cálcio era excitada por feixes de luz vindos de uma lâmpada de arco. Os fótons emitidos passavam por lentes, filtros e polarizadores, chegando aos fototubos, onde os fótons eram transformados em pulsos elétricos para ser contados pelo circuito de coincidências. A contagem no circuito de coincidências tinha como objetivo verificar fótons que fossem realmente pares um do outro, fundamental nessa técnica, que ainda não fazia uso do laser para

excitação de um nível atômico específico. A verificação era feita numa janela de coincidência, que era o intervalo de tempo médio entre as emissões dos fótons (nesse experimento, cerca de 8,1 ns).

Dos átomos que não decaíam diretamente para o estado fundamental, apenas 7 % decaíam para o estado  $4p_2^1S_0$ , a partir do qual ocorria mais dois decaimentos, passando pelo estado intermediário  $4p4s^1p_1$ , dando origem ao par de fótons correlacionados em polarização emitidos de uma cascata  $J = 0, J = 1, J = 0$  (onde  $J$  é o *momentum* angular total). Esta técnica fez com que o experimento durasse 200 h para ser totalmente realizado, isto porque ocorriam vários decaimentos além do que originava o par de fótons correlacionados. Com isso a quantidade de dados coletados foi relativamente baixa, comparada com a quantidade de fótons emitidos. Como estes eram experimentos estatísticos, a quantidade de dados era fator fundamental.  
(Bispo, 2009, p.50)

A contribuição de Alain Aspect, como já foi dito, se destaca por ter sido crucial nessa série de experimentos realizados pelos diversos grupos. Dos três artigos publicados em sequência nos anos de 1981 e 1982, o terceiro obteve o maior impacto, ao reportar um aparato cujo funcionamento eliminava boa parte das correlações acidentalmente estabelecidas entre os polarizadores (uma suposição mais estranha, mas que também fora apontada pela comunidade cética aos resultados).

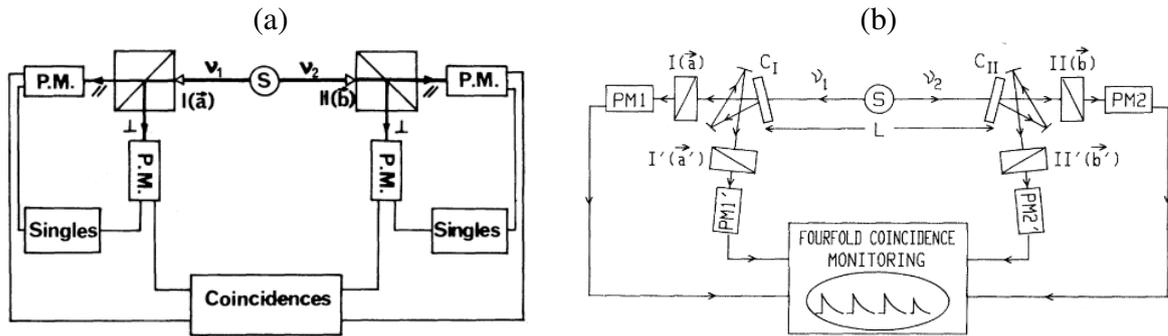
Figura 10: Alain Aspect junto de seu aparato na Escola Politécnica de Paris, em 1982.



Fonte: Nobel Prize Org.

Em que “S” é a fonte e  $v_1$  e  $v_2$  são os fótons correlacionados. P.M. são os fototubos. “Fonte” é uma simplificação de um conjunto de subaparatos: forno, amostra de Cálcio, lasers, lentes, etc. A mudança de relevância na imagem é a distância  $L = 12$  m entre os dois fototubos e o dispositivo na água que gerava as frequências diferentes. A mudança entre os polarizadores ocorriam em intervalos de 10 ns, e o tempo de voo dos fótons ( $L/c$ ) era de cerca de 40 ns. Uma onda estacionária ultra-sônica produzida na água constituía o dispositivo supracitado, que redirecionava os fótons de um polarizador a outro.

Figura 11: (a) Primeiro aparato de Aspect; (b) último aparato.



Fonte: Retirada da referência (Goy *et al.*, 1983a).

Os interruptores ópticos (optical switches) são dispositivos acústico-ópticos que funcionam como uma rede de difração no ângulo de Bragg. Nestes dispositivos a luz interagia com uma onda estacionária na água, sendo transmitida quando a amplitude da onda era nula e defletida quando esta amplitude era máxima. Esses interruptores mudavam a luz rapidamente de um polarizador para outro num intervalo de tempo de 10 ns. Esta mudança não era totalmente aleatória, mas de forma quase periódica. Num experimento ideal essas mudanças deveriam ser totalmente aleatórias. Este dispositivo permitiu que as configurações experimentais mudassem enquanto os fótons estivessem em vôo.

(Bispo, 2013, p. 102)

Na Fig.(11), acima e à esquerda, o primeiro aparato de Alain Aspect, usado no artigo de 1981 e no primeiro artigo de 1982, ambos com Grangier e Roger. À direita, o aparato utilizado por ele no segundo artigo de 1982, em que faz uso dos analisadores variando no tempo. O esquema “geral” é igual ao anterior, com as partes do aparato tendo a mesma função que tinham antes.

Nesse último artigo, Aspect anunciou novos resultados violando as desigualdades de Bell (Aspect *et al.*, 1982b) com o uso do recurso dos “analisadores variando no tempo”, que produziu uma condição de não-localidade, por mudar as configurações durante o tempo de voo dos fótons de tal forma que seria impossível que fosse propagada a informação de um medidor ao outro.

O último grupo experimental de relevância, no contexto do Prêmio Nobel de Física de 2022, foi o do físico austríaco Anton Zeilinger Figs.(12,13), que fez uso de aparatos e técnicas consideravelmente sofisticados Fig.(15), de forma que são classificados como testes de terceira geração Fig.(14).

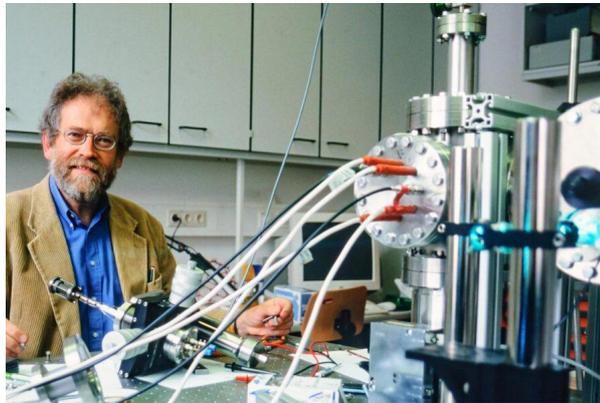
A ilustração acima mostra a produção de fótons emaranhados pela técnica de Conversão Paramétrica Descendente (CPD), em que um fóton ultravioleta é emitido em direção a um cristal não-linear e assim são produzidos fótons de menor energia, no infravermelho, cuja soma é menor ou no máximo igual à do fóton que os deu origem. O referido tipo de cristal

Figura 12: Foto de A. Zeilinger publicada na ocasião da sua menção ao Nobel de Física em 2022.



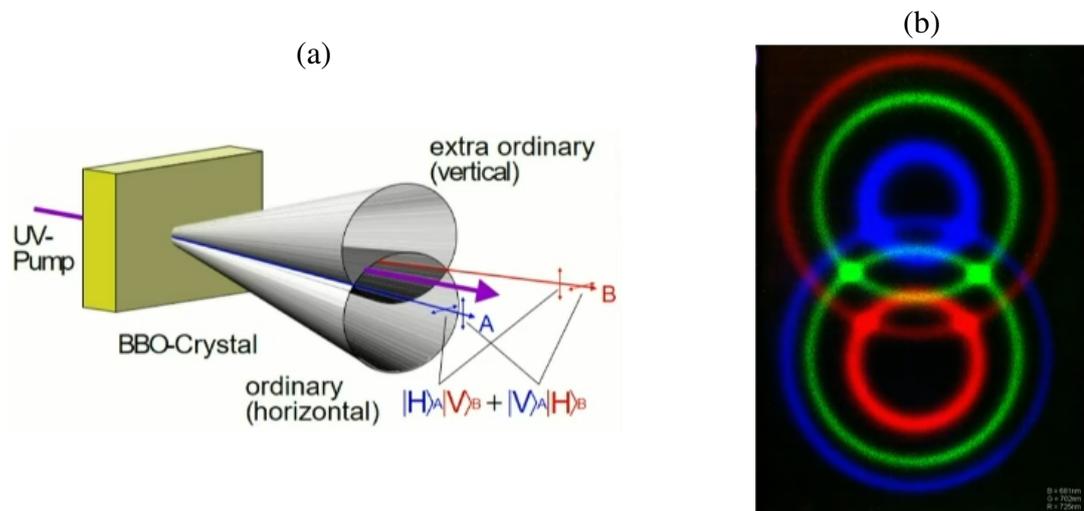
Fonte: *Nobel Prize Org.*

Figura 13: Anton Zeilinger em seu laboratório na Universidade de Viena, em 2000.



Fonte: *iGloboNews Brings Global Views.*

Figura 14: (a) Produção de fótons por CPD; (b) Projeção dos fótons.



Fonte: Retirado da referência (Kwiat *et al.*, 1995).

é assim denominado porque sua resposta é não-linear. Simplificadamente, o cristal excita um segundo harmônico do campo eletromagnético.

Sob certas condições, o que se obtém nesse processo são fótons com essas carac-

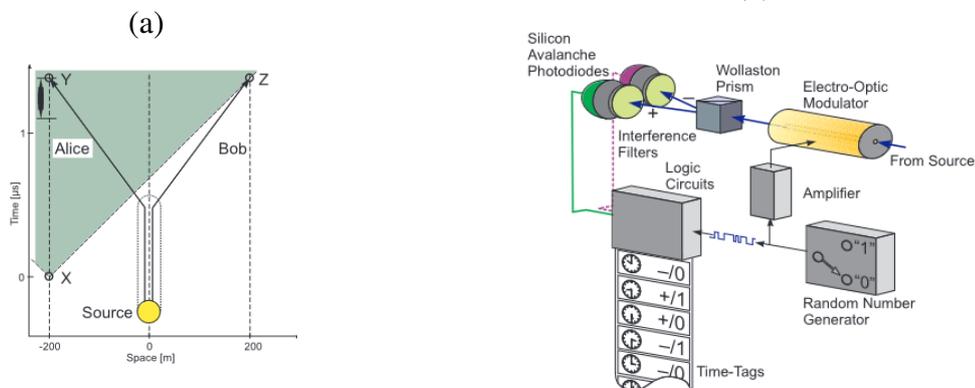
terísticas de energia e comprimento de onda, com polarizações anticorrelacionadas. No caso, as polarizações são ortogonais, mas não sabemos dizer de antemão qual fóton estará polarizado verticalmente e qual estará polarizado horizontalmente. Novamente, temos uma informação global sobre o sistema, mas desconhecemos os estados de suas partes por serem inseparáveis. O estado do tipo singleto está denotado na imagem acima como  $|H\rangle_A|V\rangle_B + |H\rangle_B|V\rangle_A$ . De fato, são obtidos os chamados estados de Bell

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1, V_2\rangle \pm |V_1, H_2\rangle). \quad (3.22)$$

As cores da imagem distinguem de forma ilustrativa as frequências dos fótons. Há fótons em toda a região circular dos dois cones, mas nos pontos verdes, na interseção dos anéis, são indicados fótons emaranhados, cuja polarização individual é desconhecida.

O emaranhamento é uma propriedade mensurável e admite valores entre 0 e 1, quando não há correlação e quando estão maximamente emaranhadas, respectivamente. As correlações de fótons gêmeos produzidos por CPD são fortes. Além disso, a produção de pares emaranhados nos experimentos de Zeilinger (Weihs *et al.*, 1998) era numa taxa de cerca de 1500 por segundo.

Figura 15: (a) Cone de luz de Alice; (b) esquema com de gerador de números aleatórios.

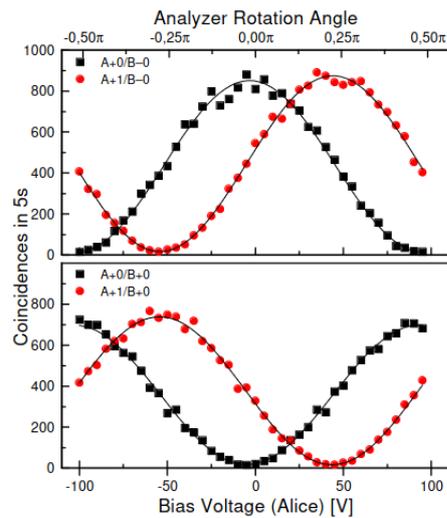


Fonte: Imagens retiradas da referência (Weihs *et al.*, 1998).

Nesse trabalho, intitulado “violação das desigualdades de Bell sob as estritas condições de localidade de Einstein”, os detectores foram separados por uma distância de 400 m, com o detector de Bob, em Z, fora do cone de luz do detector de Alice, em Y. Além disso, foi usado um gerador quântico de números aleatórios para reconfigurar os detectores, garantindo que não poderia haver correlação entre eles. Sob essa configuração extrema “anti-coincidências” as violações foram recorde, sendo a quantidade  $S = 2,73 \pm 0,02$  para 14700 eventos coincidentes coletados em 10 s.

Do ponto de vista de pesquisa básica (ou seja, em fundamentos da física), o grupo

Figura 16: Coincidências nas medições.



Fonte: Retirada da referência (Weihs *et al.*, 1998).

de Zeilinger também violou as desigualdades (Greenberger *et al.*, 1990), mas acabou dando um passo à frente ao ser o primeiro a utilizar os estados emaranhados para explorar possibilidades em informação quântica, estabelecendo o que ficou conhecido como teletransporte quântico. Em 2012, Zeilinger e uma equipe de colaboradores conseguiram realizar pela primeira vez um teletransporte quântico nas Ilhas Canárias, tendo gerado um par de fótons emaranhados na ilha de La Palma, dos quais um dos fótons foi medido na ilha de Tenerife, a 143 km de distância (al, 2012).

## 4 OUTROS EXPERIMENTOS E POSSIBILIDADES NO ENSINO DE MECÂNICA QUÂNTICA

Os trabalhos citados na recapitulação histórica feita no capítulo anterior constituem um referencial canônico para o tema da medição, em que, como pode ser percebido, foram praticamente esgotadas as teorias alternativas que visavam complementar a MQ, por estas não terem “sobrevivido” aos testes sistemáticos.

Creio que a vasta exposição feita até aqui tenha contribuído para problematizar a delicadeza que representa a medição na MQ e tenha propiciado condições mínimas para entender a construção da teoria do ponto de vista da conversação frequente mantida com a matemática, os experimentos que comprovam previsões, e a forma como interpretamos e ensinamos sua fenomenologia.

Espero também que tenha servido de motivação para o estudo e o ensino do assunto. Mas algo ainda pode ser feito com maior enfoque em possíveis abordagens no ensino de FMC e MQ, por meio da conexão entre experimentos de pensamento e as interpretações da teoria. Além disso, há experimentos possíveis, cujos efeitos inesperados podem ser de grande valia no ensino. Selecionamos dois desses exemplos e iremos apresentá-lo neste último capítulo, explorando menos formalismos matemáticos e mais as ideias e conceitos já apresentados e um pouco de matemática básica.

### 4.1 Experimento de Resultado Nulo

Os experimentos de pensamento, também conhecidos pela palavra alemã *Gedankenexperiment*, mencionada anteriormente neste trabalho, estão presentes em toda a física, sobretudo na FMC e na MQ. Alguns dos elementos mais frequentes nesses experimentos são artefatos explosivos, lasers, espelhos, fotodetectores, etc.

Os experimentos de resultado nulo são baseados na eliminação de uma das possibilidades de um estado correlacionado, ou singlete. Pensemos em ímãs de Stern-Gerlach. Faremos um único átomo atravessá-los, sabendo que em um dado instante  $t$ , ele será medido por um dos dois detectores. Vamos supor que um dos detectores seja removido, e que após o tempo mencionado, nenhum sinal seja acusado no detector que restou.

Podemos inferir que o átomo se encontra no canal cujo detector foi removido, com momento angular bem definido  $l_z = -\frac{1}{2}\hbar$ .

O vetor de estado representando o estado do átomo sofreu uma redução, sabemos agora qual é o valor do observável medido, mas nenhum sinal foi detectado! Este experimento de resultado nulo mostra assim que é possível haver uma medição e uma redução de estado (um “colapso”, segundo a interpretação

ondulatória) sem que um detector dispare e sem que se produza um registro macroscópico do sinal.  
(Pessoa, 2021, p. 58).

Aqui é interessante analisarmos esse fenômeno pela ótica das interpretações apresentadas na Subseção 2.3.5. Para a interpretação ondulatória realista, a onda real, material, é espalhada no espaço e interage com o medidor, provocando uma alteração na onda, que colapsa onde não há medidor. Ocorre, nesse caso, interação entre observador e objeto quântico sem que haja troca de quanta de energia.

Para a interpretação corpuscular realista, o átomo simplesmente rumou pelo caminho sem detector. A redução de estado é apenas uma alteração em nosso conhecimento a respeito do sistema quântico (Pessoa, 2021, p. 58). Neste caso, tratando-se de uma partícula, não há realmente interação entre o átomo e o detector.

Novamente unindo as duas interpretações dentro do viés realista, para a interpretação dualista o átomo não interage com o medidor, mas sua onda sim. Por fim, para a interpretação da complementaridade, Bohr entende que se trata de um fenômeno corpuscular, alinhado com a interpretação corpuscular realista mencionada no parágrafo anterior. É preciso lembrar que Bohr admite como que um dualismo não-realista, ou seja, sendo a propagação das partículas um fenômeno ondulatório descrito pela probabilidade (como propusera Max Born) e o colapso da função de onda no ponto em que fora medida exatamente a interação da partícula com o observador. Daí a complementaridade: não há realismo simultâneo. Heisenberg ressaltou que é preciso levar em consideração todos os elementos que compõem o aparato experimental.

A interpretação instrumentalista é mais complexa, pois a teoria quântica passou por um aprofundamento devido à compreensão mais íntegra dos fenômenos quânticos e da teoria eletromagnética, ou eletrodinâmica. Essa extensão ocorrida nas décadas de 1930 e 1940 é denominada Eletrodinâmica Quântica. Nesse domínio, Robert Dicke deu um tratamento para o experimento de resultado nulo baseado em “partículas virtuais”, que não iremos abordar aqui.

Dicke (1981) examinou em detalhes um exemplo de experimento de resultado nulo envolvendo um átomo dentro de uma caixa que está dividida em dois compartimentos. Seu estado inicial é uma superposição de estados bem localizados em cada um dos compartimentos. Irradia-se o compartimento esquerdo com fótons; se nenhum espalhamento for observado, ocorre um colapso do estado de posição do átomo para o compartimento da direita, sem haver detecção de fótons! Um fato paradoxal aqui é que este estado final (átomo mais fóton) tem mais energia do que o estado inicial! Dicke mostra, contudo, que este aumento é compensado pela diminuição de energia que ocorre quando o fóton é espalhado, de forma que a energia média é conservada.  
(Pessoa, 2011, p. 59)

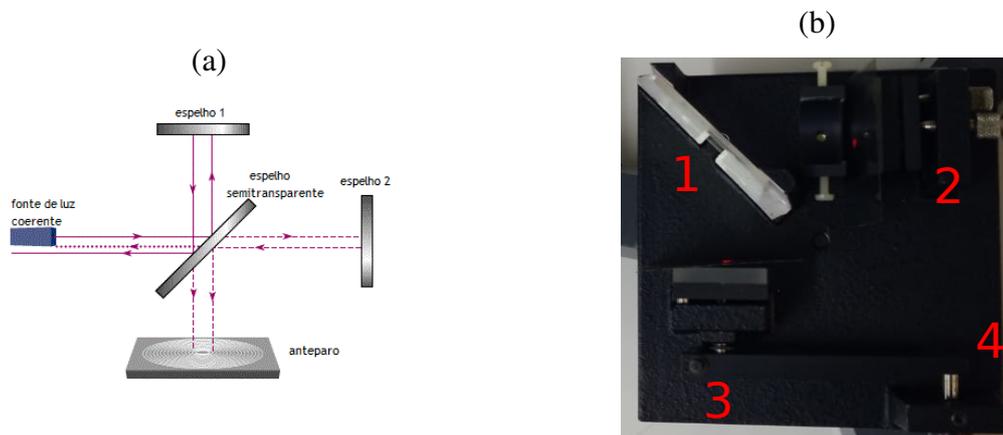
## 4.2 Informação vs distinguibilidade

O segundo experimento (este, de realização substancialmente mais simples) consiste em utilizar um interferômetro de Michelson com feixes separados por um polarizador. Esses feixes polarizados, ao se somarem no caminho final do interferômetro, produzem uma figura de interferência no anteparo. Acontece que não sabemos qual a polarização de cada feixe, apenas que ambos têm 1/2 de chance de estarem vertical ou horizontalmente polarizados, e ao colocarmos polarizadores nos seus caminhos, perdemos a figura de interferência, pois passamos a ter uma informação de caminho.

### 4.2.1 Interferômetro de Michelson

O interferômetro de Michelson, conhecido pelos experimentos de Michelson e Morley, é um aparato que divide um feixe de luz em dois outros feixes que irão percorrer caminhos ópticos distintos. O equipamento tem 4 partes, enumeradas na figura abaixo: espelho semitransparente (1) onde parte da luz laser usada é transmitida em direção ao espelho perpendicular (2) (perpendicular ao feixe original) e a outra parte é refletida em direção ao espelho paralelo (paralelo ao feixe original) (3). O bastão metálico (4) é um parafuso micrométrico que permite com que movamos sutilmente o espelho paralelo (3) a fim de incidir um feixe sobre o outro e produzir a figura de interferência.

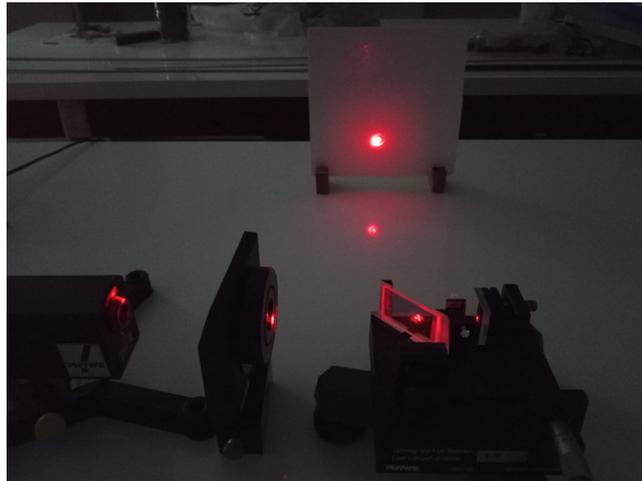
Figura 17: (a) Ilustração do interferômetro; (b) imagem do equipamento real.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Nas imagens abaixo, Fig.(19), observamos o padrão de interferência obtido. Podemos notar anéis vermelhos concêntricos, em torno de um ponto vermelho, intercalados com anéis escuros. Esses anéis são justamente as franjas claras e escuras próprias da interferência. A desproporcionalidade observada na largura dos anéis é devido à dificuldade de centralização de um feixe sobre o outro, ajuste que é feito com o parafuso micrométrico. Com cuidado, é

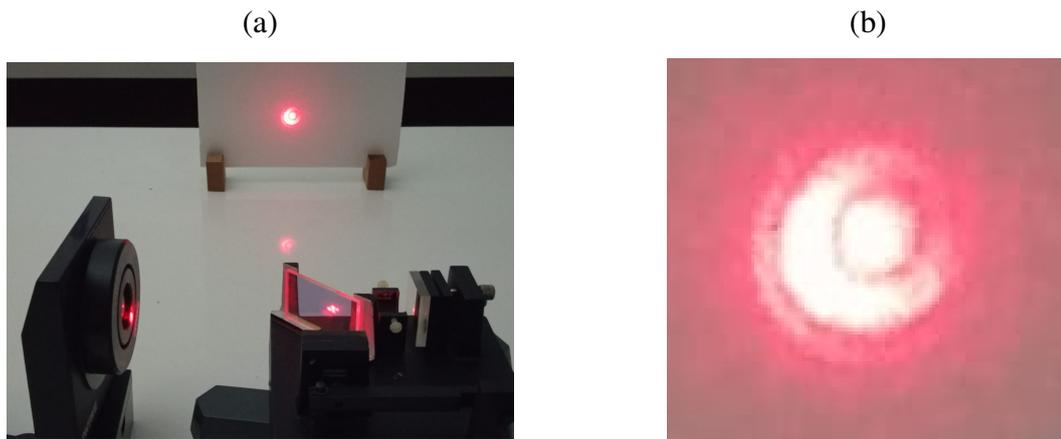
Figura 18: Aparato em funcionamento.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

possível obter anéis de larguras mais uniformes. À esquerda há uma lente convergente que ainda não havia sido mencionada.

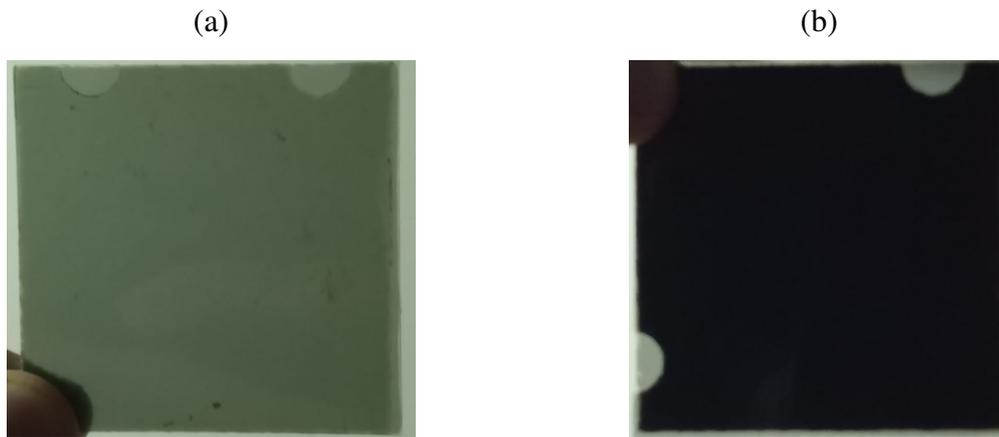
Figura 19: (a) Aparato produzindo figura de interferência; (b) figura de interferência ampliada.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Os polarizadores, Fig.(20), são dispositivos que polarizam a luz, fazendo-a oscilar somente em um plano, uma direção, alinhada a ele. Se temos um polarizador, ou ambos na mesma direção de polarização, os notamos acinzentados pela passagem de luz reduzida a uma única direção. Se os temos dispostos perpendicularmente, cada polarizador impedirá a passagem da luz perpendicular a ele, o que resultará em total opacidade, ou seja, não haverá passagem de luz.

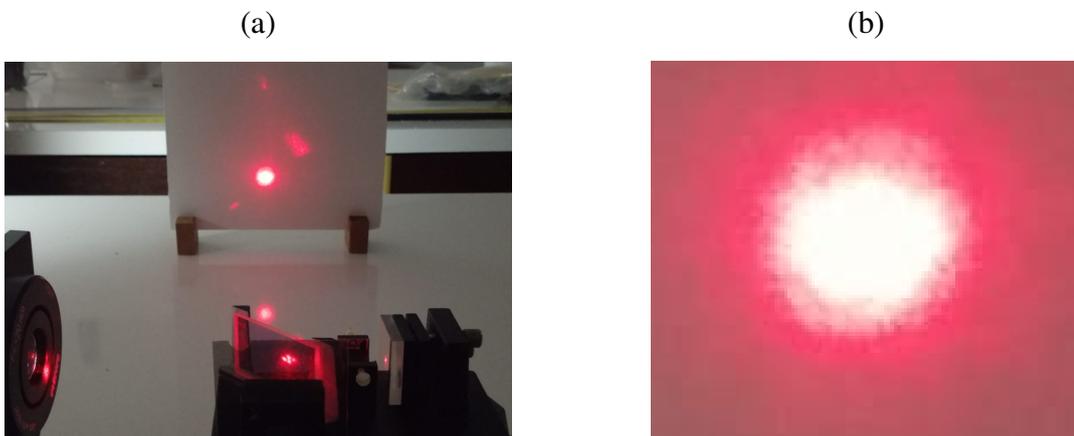
Figura 20: (a) Polarizadores paralelos; (b) polarizadores perpendiculares.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Adicionando um polarizador ao aparato inicial, no caso, utilizando um separador de feixes que os polarize, teremos polarizações ortogonais, mas não saberemos a polarização de cada feixe. Para sabermos como os feixes estão polarizados, podemos utilizar os polarizadores mostrados na imagem. No entanto, ao polarizarmos os feixes, perdemos a figura de interferência, como pode ser observado na imagem abaixo.

Figura 21: (a) Padrão de interferência destruído; (b) imagem ampliada.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

O experimento demonstrado acima foi uma adaptação. O correto seria um separador que polarizasse os feixes de modo que a partir dele não fosse possível distinguir a polarização de cada feixe. Daí seriam posicionados dois polarizadores perpendicularmente, um em cada caminho, e perderíamos a figura de interferência. O experimento adaptado, entretanto, ilustra bem o efeito pretendido.

Por fim, a conclusão que este experimento nos permite fazer é que informação e separabilidade de estados é algo proibido pela física nesse domínio. Se separamos os estados

perdemos a informação, analogamente ao caso dos sistemas coerentes e da criptografia quântica.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

O presente trabalho teve como objetivo apresentar o tema da medição na MQ, trazendo a maneira como a teoria e os experimentos dialogaram ao longo dos anos, tocando em pontos cruciais que motivaram sérios e saudáveis embates na comunidade científica, incluindo entre os ditos “pais fundadores” da teoria.

Como boa parte da história da física, a solução de um problema em aberto, ou mesmo uma melhor compreensão deste, conduziu os personagens dessa história a resultados ainda mais delicados em relação ao nosso entendimento de mundo. Muito incomodou gerações de físicos o problema de a medição ter se tornado primitivo que foi integrado aos fundamentos da teoria (Pessoa, O, 2021, p.51). Por isso, no Capítulo 2 foram apresentadas noções de MQ juntamente com suas interpretações, e no Capítulo 3 os principais experimentos que devem conversar com a elaboração da fenomenologia e o ensino da teoria.

Sob a perspectiva dos fundamentos da teoria, vemos que a MQ resistiu a severos testes experimentais que revolveram as bases empíricas da física, como as noções de realismo e localidade. Diante dessa fenomenologia particularmente desafiadora, prevaleceu a postura de avançar nas compreensões e vislumbrar aplicações. W. Pauli, conhecido pelos ácidos comentários em bancas de doutorado, tinha razão ao dizer “você não está nem errado”: com alguns erros, também podemos fazer importantes progressos. Quem diria que a incômoda “fantasmagórica ação à distância de Einstein” possibilitaria concretizar o teletransporte de estados quânticos? Quem diria que, talvez na única predição equivocada de Einstein em sua carreira, fosse haver tamanha revolução? Se Einstein estivesse correto, certamente não teríamos vislumbrado tais tecnologias.

Quanto às aplicações, o estudo do emaranhamento e da decoerência apontam para uma gama de tecnologias que vão do *software* ao *hardware* - da criptografia aos processadores quânticos. Assim, este trabalho de conclusão também aponta, naturalmente, para possíveis continuações mais aprofundadas e dedicadas a esses temas. Nesse sentido, relembro a frase do professor Luiz Davidovich, “o laser é uma solução em busca de problemas”.

## REFERÊNCIAS

- AL, Z. et. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. **Nature**, v. 489, 2012. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nature11472>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 49, p. 1804–1807, Dec 1982. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.49.1804>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen gedankenexperiment. **Phys. Rev. Lett.**, v. 49, n. 14, p. 1804, 1982. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.49.91>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physics** **1**, v. 3, p. 195 – 200, 1964. Disponível em: <https://journals.aps.org/ppf/abstract/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>. Acesso em 10 jul. 2024.
- BISPO, W. F. de O.; DAVID, D. F. G.; JR, O. F. As contribuições de john clausen para o primeiro teste experimental do teorema de bell: uma análise das técnicas e da cultura material. **Rev. Bras. Ens Física**, v. 35, p. 3603, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/nzL4Sh6VtBZZ9FbwP8Vvx5c/>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- BOLIVAR. Teorema de ehrenfest e o limite clássico da mecânica quântica. **Rev. Bras. de Ens. de Física**, v. 45, n. 7-8, p. 455–457, 2000. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/rFHC5V7h87tJkGrTqyLTVzQ/?format=pdflang=pt>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- BORN, M. The statistical interpretation of quantum mechanics. **Nobel Lecture**, American Physical Society, v. 50, p. 1903–1906, Jun 1954. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/born-lecture.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- BROGLIE, M. L. D. Recherches sur la theoria des quanta. **Annales de Physique**, v. 10, p. 3603, 1924; Disponível em: <https://theses.hal.science/tel-00006807/document>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- BRUNE, M.; HAGLEY, E.; DREYER, J.; MAÎTRE, X.; MAALI, A.; WUNDERLICH, C.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 77, p. 4887–4890, Dec 1996. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.77.4887>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics Vol.1**. New York: Wiley, 1978. 213 -219 p.
- COMPTON, A. H. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 21, p. 483–502, May 1923. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.21.483>. Acesso em: 10 jul. 2024.

DAVIDOVICH, L. Os quanta de luz e a ótica quântica. **Rev. Bras. Ens. de Fís.**, v. 21, p. 483–502, 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/j4FJ5CsQBJwqJThKQL8Gcy/>. Acesso em: 10 jul. 2024.

DAVIDOVICH, L.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Mesoscopic quantum coherences in cavity qed: Preparation and decoherence monitoring schemes. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 53, p. 1295–1309, Mar 1996. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.53.1295>. Acesso em: 10 jul. 2024.

DAVISSON, C. The discovery of electron waves. **Nobel Lecture**, v. 10, 1937; Disponível em: [nobelprize.org/prizes/physics/1937/davisson/lecture/](https://nobelprize.org/prizes/physics/1937/davisson/lecture/). Acesso em: 10 jul. 2024.

EHRENFEST, P. Bemerkung über die angenäherte gültigkeit der klassischen mechanik innerhalb der quantenmechanik. **Z. Phys.**, v. 45, n. 7-8, p. 455–457, 1927. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1927ZPhy...45..455E/abstract>. Acesso em: 10 jul. 2024.

EINSTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 21, p. 483–502, May 1923. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1905AnP...322..132E/abstract>. Acesso em: 10 jul. 2024.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review A**, v. 47, p. 777, 1935. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.777>. Acesso em: 10 jul. 2024.

FREEDMAN, S.; CLAUSER, J. Experimental test of local hidden-variable theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 28, n. 14, p. 938, 1972. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.28.938>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GISIN, N.; RIBORDY, G.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H. Quantum cryptography. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 74, p. 145–195, Mar 2002. Disponível em: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.74.145>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GOY, P.; RAIMOND, J. M.; GROSS, M.; HAROCHE, S. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 50, p. 1903–1906, Jun 1983. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.50.1903>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GOY, P.; RAIMOND, J. M.; GROSS, M.; HAROCHE, S. Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. **Nobel Lecture**, American Physical Society, v. 50, p. 1903–1906, Jun 1983. Disponível em: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.55.1083>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GREENBERGER, D. M. *et al.* Bell's theorem without inequalities. **Am. J. Phys.**, v. 58, n. 14, p. 731, 1990. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/58/12/1131/1053607/Bell-s-theorem-without-inequalities?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GREENEMEIER. Election fix? switzerland tests quantum cryptography. **Scientific American**, 2007. Disponível em: <https://www.scientificamerican.com/article/swiss-test-quantum-cryptography/>. Acesso em: 10 jul. 2024.

GRIFFITHS, D. J. **Introdução à Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. **Nobel Lecture**, v. 10, p. 3603, 1927; Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01397280>. Acesso em: 10 jul. 2024.

JACQUES, V.; WU, E.; TOURRY, T.; ASPECT, A. Single-photon wavefront-splitting interference. **Eur. Phys. Journal D**, v. 35, p. 561 – 566, 2005. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1140/epjd/e2005-00201-y>. Acesso em: 10 jul. 2024.

KWIAT, P. G.; MATTLE, K.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A.; SERGIENKO, A. V.; SHIH, Y. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 4337–4341, Dec 1995. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.75.4337>. Acesso em: 10 jul. 2024.

MERMIN, N. D. Is there moon when nobody looks? reality and quantum thoery. **Physics Today**, v. 38, p. 4763–4766, apr 1985. Disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/fqii/Mermin-PhysToday85.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2024.

MERMIN, N. D. Quantum mysteries revisited. **American Journal of Physics**, v. 58, p. 4763–4766, apr 1990. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/58/8/731/1053812/Quantum-mysteries-revisited?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 10 jul. 2024.

PLANCK, M. Ueber das gesetz der energveuerteilung im normalspectrum. **Anallen der Physik**, v. 2, p. 553, 1900. Disponível em: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783112621905-017/html?lang=de>. Acesso em: 10 jul. 2024.

PLANCK, M. Sobre a lei de distribuição de energia no espectro normal. **Rev. Bras. de Ens. de Física**, v. 22, p. 538, 2000. Disponível em: [http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v22\\_538\\_note](http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v22_538_note) = *Acessoem* : 10 jul. 2024, .

ROSA, P. S. Louis de broglie e as ondas de matéria. **IFGW, UNICAMP**, v. 10, p. 3603, 2004. Disponível em: <https://www.ghtc.usp.br/server/Teses/Pedro-Sergio-Rosa.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2024.

SCHRODINGER, E. Quantisierung als eigenwertproblem. **Anallen der Physik**, v. 79, p. 361 – 376, 1926. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19263840404x>. Acesso em: 10 jul. 2024.

WAGNER, R.; LIMA, N.; DUARTE, S. Uma reconstrução didática da apresentação original do teorema de bell: Sobre o paradoxo de einstein, podolsky e rosen. **Rev. Bras. de Ens. Física**, American Physical Society, v. 44, p. 4763–4766, Jun 1995. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/WFBJZ99NgZg5p3ZqJLWNH3x/>. Acesso em: 10 jul. 2024.

WEIHS, G.; JENNEWEIN, T.; SIMON, C.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A. Violation of bell’s inequality under strict einstein locality conditions. **Phys. Rev.**

**Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 5039–5043, Dec 1998. Disponível em:  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.81.5039>. Acesso em: 10 jul. 2024.