



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Nanoindentação de Materiais Elásticos Lineares com Espessura Finita

Jorge André Costa dos Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Dr. Jeanlex Soares de Sousa

14 de Julho de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Nanoindentação de Materiais Elásticos Lineares com Espessura Finita

Jorge André Costa dos Santos

Dissertação de mestrado aprovado no dia 14 de Julho de 2010, em Fortaleza, Estado do Ceará, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Dr. Jeanlex Soares de Sousa
Orientador, UFC

Dr. Eduardo Bede Barros
Co-Orientador, UFC

Dr. Anna Carla Monteiro de Araujo
Co-Orientadora, Poli/UFRJ

14 de Julho de 2010

*Aos meus pais, cuja dedicação e carinho
foram fundamentais à minha formação
profissional.*

Agradecimentos

Esta dissertação é fruto de muito esforço e dedicação, e não poderia deixar de registrar aqui minha sincera gratidão a todos que estiveram ao meu lado durante o desenvolvimento deste trabalho;

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter me dado a oportunidade de tão grande crescimento, coragem, persistência e sabedoria para poder chegar a mais esta conquista;

Ao professor e orientador, Dr. Jeanlex Soares de Sousa, pelo seu permanente apoio e atenção dispensada no decorrer deste trabalho. À sua disponibilidade irrestrita, sua forma amigável, exigente e crítica, fundamental contribuição no meu crescimento enquanto pesquisador;

Ao Dr. Eduardo Bede Barros e Dra. Anna Carla Monteiro de Araujo, pelo crescimento em diversos momentos de discussões e disponibilidade, sempre respondendo prontamente os meus questionamentos e dúvidas;

Ao CNPQ, que me concedeu uma bolsa durante a realização deste mestrado, auxílio financeiro que contribuiu para viabilização deste trabalho;

Agradeço a todos professores do mestrado, amigos e funcionários da Universidade Federal do Ceará, pelo auxílio e atenção ao longo destes meses;

Obrigado aos colegas mestrado, em especial aos amigos: Thiago, Luciana, Diego Rabelo e Euclides, por inúmeros momentos de descontração em meio a tantas dificuldades e pela grande amizade, que tanto ajudaram no meu crescimento acadêmico;

Aos amigos e companheiros musicais: Vicente, Igor Alves, Fabiano, Tony, Fábio e Glauder, por compartilhar grandes momentos de crescimento musical e pessoal;

Aos amigos: Alexandre, Tiago, Neto, Veridiana, Arthur, Igor Bessa, cuja amizade é para mim motivo de grande alegria e orgulho;

Aos meus pais, pela sólida formação que me foi dada, pelo incentivo e apoio incondicional que sempre me ajudaram em minhas conquistas;

A minha irmã, Jordiane, por todo o seu amor e carinho;

À minha namorada, amiga e companheira, Marina, pelo incansável apoio durante o desenvolvimento deste trabalho, por sua paciência e compreensão reveladas, fundamental nesta trajetória;

*Somente um principiante que não sabe nada
sobre ciência diria que a ciência descarta a
fé. Se você realmente estudar a ciência, ela
certamente o levará para mais perto de Deus.*

James Clerk Maxwell

Resumo

As propriedades mecânicas de nano e micro sistemas têm motivado muitos estudos com o objetivo de entender como a interação mecânica afeta os materiais em pequenas dimensões. A nanoindentação foi desenvolvida no início dos anos 1970 e é amplamente usada para extrair propriedades mecânicas de materiais, como por exemplo, o módulo de Young. Tem-se observado que modelos matemáticos clássicos da mecânica do contato com base no contato Hertziano (derivado do contato elástico semi-infinito) não descrevem adequadamente os campos de tensão e deformação devido aos efeitos do substrato e tamanho do indentador. Esse trabalho tem por objetivo adaptar o modelo proposto por Hertz para simular o contato entre indentadores com uma superfície de espessura finita. O método de elementos finitos (MEF) foi utilizado para modelar as geometrias do contato esférico e cônico, permitindo a investigação da resposta mecânica desses contatos por simulações de indentação computacional. Os dados obtidos pelo MEF permitiram o ajuste do modelo de Hertz e fatores de correção foram incluídos para levar a informação da espessura da amostra e assim melhorar o entendimento do efeito do substrato em nanoindentações. Esses ajustes do modelo de Hertz em conjunto com os dados experimentais de microscopia de força atômica são importantes no estudo das propriedades mecânicas de materiais biológicos, pois fornece a possibilidade de obter dados quantitativo e qualitativos a respeito do comportamento elástico de sistemas em pequena escala.

Abstract

The mechanical properties of nano and micro systems motivated many studies aiming understanding of how materials are affected by mechanical interactions in low dimensions. Nanoindentation was developed in the early 1970s and is widely use to extract material mechanical properties, e.g. Young's modulus. It has been observed that classical mathematical models of the mechanics of contact based on the Hertz contact solution (which is the derived for the semi-infinite elastic contact), doesn't adequately describe the indentation stress field due to the effects of substrate and indenter tip size. The purpose of this work is the modification of the model proposed by Hertz to describe the contact between indenters with a surface of finite thickness. The finite element method (FEM) was used to model the spherical and conical geometries of the contact allowing investigation of the mechanical response of these contacts by computational simulations of indentation. By fitting the data obtained by FEM for samples with different thickness, it was possible to (i) to understand the role of the substrate during nanoindentation of thin samples, and (ii) to determine the correction factor of the Hertz model to account for sample thickness. These modification can be used to analyze nanoindentation experiments performed with atomic force microscopy to study the mechanical properties of small-scale systems.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 15
2	Teoria da Deformação dos Sólidos	p. 18
2.1	Teoria de pequenas deformações: o tensor de deformações	p. 18
2.2	Aplicações de forças: o tensor de tensões	p. 23
2.3	Propriedades elásticas dos materiais	p. 25
2.3.1	Lei de Hooke generalizada	p. 27
2.3.2	Equações de equilíbrio	p. 28
3	Modelo de Hertz para o Contato entre Superfícies	p. 31
3.1	Contato elástico entre dois sólidos	p. 31
3.1.1	Teoria de Hertz	p. 31
3.1.2	Indentador esféricos	p. 32
3.1.3	Indentador cônico	p. 36
3.1.4	Limitações do modelo de Hertz	p. 37
3.2	Nanoindentação	p. 37
4	Método Computacional: Elementos Finitos	p. 39
4.1	Aplicações	p. 39
4.2	Métodos de elementos finitos - Conceitos	p. 41

4.2.1	Nós e elementos	p. 42
4.3	MEF modelando problemas de contato	p. 45
5	Simulações Numérica	p. 48
5.1	Modelo de Hertz para Espessura Finita: Indentador Esférico	p. 48
5.2	Resultados	p. 49
5.2.1	Proposta de modificação do modelo de Hertz para o contato esférico	p. 53
5.3	Problema do contato para o indentador cônico	p. 55
5.3.1	Proposta de modificação do modelo de Hertz para o contato cônico	p. 59
5.4	Conclusões e Perspectivas	p. 62
	Referências	p. 63
	Apêndice A - Espaço elástico semi-infinito (<i>Half-space</i>)	p. 67
A.1	Funções potencial de Boussinesq and Cerruti	p. 67
A.2	Força normal na área de contato	p. 69
A.3	Pressão Hertziana	p. 73

Lista de Figuras

1	Diagrama esquemático do princípio de funcionamento de um AFM. Adaptado [49]	p. 16
2	(A) Fibras representando a variação local dos elementos após deformação; (B) Posicionamentos de dois elementos que compõem as fibras antes e depois da deformação.[22]	p. 19
3	Deformação relativa na direção x	p. 21
4	Indentador esférico:(A) seção transversal do contato entre uma esfera e um sólido de raio R_s ; (B) Esquema do posicionamento dos ângulos para calcular h	p. 22
5	Exemplo de rotação - 2D Adaptado[22]	p. 23
6	Seção de um sólido sob a ação de forças externas. Adaptado[22]	p. 24
7	Componentes positivas de tensão em um elemento de volume.	p. 24
8	Curva tensão-deformação uniaxial de três materiais metálicos	p. 25
9	Elemento de volume submetido a uma tensão σ_y	p. 26
10	Indentador esférico: (A) seção transversal do contato entre uma esfera e um sólido de raio R_s . (B) Esquema do posicionamento dos ângulos para calcular h	p. 32
11	Processos de indentação: (A) indentador perfeitamente rígido (B) (plano-amostra) perfeitamente rígido (C) indentador e amostra deformáveis	p. 34
12	Modelo de Hertz: (A) Gráfico da distribuição de pressão sobre a área de contato pela distância radial de contato r . (B) Gráfico da força normal sobre a região de contato pela indentação (deformação normal) δ	p. 35
13	Esquema usando a simetria do contato entre um indentador cônico e um plano deformável.	p. 36
14	AFM utilizado como indentador no processo de deformação.	p. 38

15	(a) Mostra o MEF modelando uma mão ferida com 863 nodos para análise de tensão da região da ferida durante a sultura [18]. (b) Modelagem de um coração para a análise da dinâmica do fluido cardíaco [19].	p. 40
16	(a) Modelo para a análise de falha e fadiga na estrutura de uma aeronave.; (b) Simulação dos efeitos de choque mecânico em um carro e condutor [21]. (c) Dispersão de um agente químico na cidade de Atlanta [20]. . .	p. 41
17	Discretização do domínio em elementos. Adaptado [37]	p. 43
18	Classificação dos elementos pelo número de nós. Adaptado [37]	p. 43
19	(A) Condição de contorno de deslocamento do tipo bonded. (B) Condição de deslocamento do tipo nobonded. (C) Esquema idealizado para o contato entre uma esfera e um plano utilizando simetria axial.	p. 46
20	(a) Simetria axial do modelo do contato entre uma esfera e um plano utilizando MEF. (b) Seção transversal do contato entre uma esfera e um plano.	p. 48
21	Resultados (a) Comparativo entre as curva de força por indentação obtidas pelo MEF e o modelo de Hertz para o contato de um indentador esférico. (b) Comparativo do perfil da superfície de contato obtido pelo MEF e modelo de Hertz para o contato de um indentador esférico. . . .	p. 49
22	Simulação (a) Linhas do campo de tensão (σ_y) na direção(y) característica da natureza do contato. (b) Campo de deformação (u_y) na direção (y). (c) Perfil da superfície de contato e campo de tensão (σ_y) próximo ao ponto de contato.	p. 50
23	Resultados (a) Gráfico de <i>força-indentação</i> para a condição de contorno do tipo bonded. (b) Gráfico de <i>força-indentação</i> para a condição de contorno do tipo nobonded.(c) Comparativo entre o processo de deformação de uma amostra com espessura de $11\%L_0$ para as condições de contorno bonded e nobonded.	p. 51
24	Resultados (a) Modificação do perfil do contato com a espessura da amostra para a condição de contorno bonded. (b) Perfil de contato característico para as condições de contorno bonded e nobonded.	p. 52

25	Simulação (a) Comportamento das linhas de tensão na parte inferior da amostra para a condição de contorno nobonded. (b) Comportamento das linhas de tensão na parte inferior da amostra para a condição de contorno bonded.	p. 53
26	Resultados (a) e (c) Curvas ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) obtidas pelo MEF para as condições de contorno bonded e nobonded. (b) e (d) Ajustes polinomiais de 5ª ordem para as relações ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) para os caso bonded e nobonded.	p. 54
27	Resultados (a) Comparação entre o ajuste analítico e MEF para a condição de contorno bonded. (b) Comparação entre o ajuste analítico e MEF para a condição de contorno nobonded.	p. 55
28	(a) Contato cônico ($\alpha = 80^\circ$) modelado pelo MEF com 47288 elementos do tipo triangular. (b) Contato cônico ($\alpha = 68^\circ$) modelado pelo MEF com 10149 elementos do tipo triangular.	p. 56
29	Resultados (a) Curvas de força-indentação obtidas para um cone com $\alpha = 68^\circ$ pelo MEF em comparação com o modelo de Hertz. (b) Curvas de força-indentação obtidas para um cone com $\alpha = 80^\circ$ pelo MEF em comparação com o modelo de Hertz.	p. 56
30	Simulação (a) Linhas do campo de tensão (σ_y) na direção(y) característica da natureza do contato. (b) Campo de deformação (u_y) na direção (y). (c) Perfil da superfície de contato e campo de tensão (σ_y) próximo ao ponto de contato.	p. 57
31	Resultados (a) Gráfico de <i>força-indentação</i> para a condição de contorno do tipo bonded para $\alpha = 80^\circ$. (b) Gráfico de <i>força-indentação</i> para a condição de contorno do tipo nobonded para $\alpha = 80^\circ$. (c) Comparativo entre o processo de deformação de uma amostra com espessura de $3\%L_0$ para as condições de contorno bonded e nobonded.	p. 58
32	Resultados (a) Curvas ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) obtidas pelo MEF para a condição de contorno bonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$. (b) Curvas ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) obtidas pelo MEF para a condição de contorno nobonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$	p. 59
33	Resultados (a) e (c) Curvas ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) obtidas pelo MEF para as condições de contorno bonded e nobonded. (b) e (d) Ajustes polinomiais de 3ª ordem para as relações ($F/\zeta_{Hertz} - \xi$) para os caso bonded e nobonded.	p. 60

34	Resultados (a) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno bonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$. (b) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno nobonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$	p. 61
35	Semi-espaço elástico [27].	p. 68
36	Seção transversal do espaço elástico semi-infinito deformado, sob ação apenas de $p_z(\xi, \eta)$	p. 72
37	Esquema do espaço elástico semi-infinito em coordenadas polares.	p. 72
38	Espaço elástico semi-infinito em coordenadas polares. Adaptado [27].	p. 73

Lista de Tabelas

1	Modulo de elasticidade e razao de Poisson de materiais conhecidos [23].	p. 27
2	Vantagens e desvantagens do método de elementos finitos.	p. 42

1 *Introdução*

O interesse no estudo do contato entre superfícies iniciou a mais de um século como os estudos de problemas entre sólidos elásticos desenvolvidos por (Hertz-1881) *et al.* [1, 2] e (Boussinesq-1885) *et al.* [3], onde desenvolveram expressões analíticas para a deformação gerada por uma força em relação a uma amostra de espessura infinita. Apesar do intenso estudo e atenção dispensados, muitos comportamentos relacionados à deformação de contato ainda não foram completamente desvendados. Nas últimas décadas muitos trabalhos foram desenvolvidos nessa área devido a melhoria de ferramentas matemáticas e computacionais e o grande interesse nas ciências dos materiais, engenharias e medicina.

Snelddon [4] se baseou na abordagem adaptada por Boussinesq e desenvolveu uma metodologia baseada em transformações de integrais. Derivou soluções para diversas geometrias de indentadores assimétricos, considerando apenas problemas envolvendo amostra de espessura infinita. Landau [5] resumiu a abordagem Hertziana reproduzindo seus resultados e obteve expressões para os campos de tensão e deslocamento. Cálculos envolvendo análise de propriedades elásticas de materiais de espessura finita têm exigido uma alta performance em cálculos numéricos [6, 7]. Aleksandrov [8, 9] utilizou métodos assintóticos e a transformada integral para resolver deformações em uma camada finita, embora seus resultados não são aplicados para materiais incompressíveis, que é o caso da maioria dos tecidos biológicos. Cálculos analíticos [10] fazem uma estimativa das características elásticas de amostras incompressíveis de espessura finita deformadas por um indentador esférico, sendo o resultado mais indicado a se comparar com o presente trabalho.

A identificação de propriedades mecânicas de micro e nanosistemas vem sendo muito explorado como, por exemplo, nanotubos de carbono (estruturas de grafeno, onde trabalhos mostram que seu ponto de quebra é 200 vezes maior que o aço [11], tornando-se o material mais resistente e flexível já testado), sistemas biológicos no estudo de resposta elástica de membranas celulares [12], e no estudo de mobilidade de células cancerígenas, onde as mudanças morfológicas sofridas por essas células influenciam características como mobilidade, adesão e capacidade de invasão [13, 14].

A microscopia de força atômica (AFM - *Atomic Force Microscopy*) é uma técnica poderosa na investigação mecânica de micro e nanosistemas, sendo considerada muito cedo uma ferramenta útil na análise de sistemas biológicos sob algumas condições fisiológicas, devido ao seu modo de operar em líquidos [15]. A Figura 1 mostra o diagrama esquemático do princípio de funcionamento de um AFM. O AFM desde o seu desenvolvimento é utili-

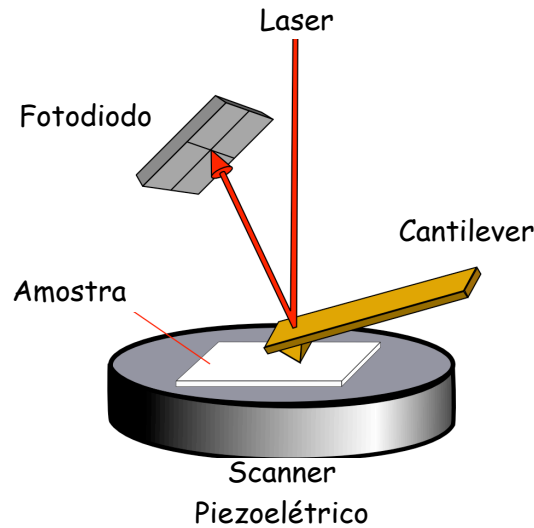


Figura 1: Diagrama esquemático do princípio de funcionamento de um AFM. Adaptado [49]

zado como indentador, onde a relação da variação da força com a indentação é interpretada em conjunto com modelos matemáticos apropriados permitindo estudar as propriedades elásticas de sistemas complexos [16]. Estudos utilizando a técnica de microscopia de força atômica mostraram que células cancerígenas de seios, pulmão e pâncreas em processo de metástase são em torno de 70% mais flexíveis que as células boas. Mostrando diferentes padrões de rigidez para diferentes tipos de cânceres, pode-se concluir que informações intrínsecas de elasticidade celular são importantes para diferenciar células cancerígenas das células saudáveis, mesmo que a nível morfológico ela sejam semelhantes [17].

No entanto tem-se observado que modelos matemáticos clássicos da mecânica do contato não descrevem adequadamente o comportamento de sistemas com espessuras finitas, ou seja, esses modelos têm que ser corrigidos para sistemas em pequena escala. O método de elementos finitos (MEF) é uma ferramenta numérica utilizada em várias linhas de pesquisa [18, 19, 20, 21] para resolver equações diferenciais parciais que descrevem sistemas físicos com geometrias complexas e diferentes condições de contorno. Com a utilização do MEF pode-se adaptar o modelo Hertziano para o contato entre superfícies possibilitando a interpretação com mais confiabilidade das curvas de força do microscópio de força atômica.

O objetivo desse trabalho é adaptar o modelo Hertz para o contato elástico entre superfícies infinitas para superfícies finitas utilizando o MEF para modelar o contato de indentadores do tipo esférico ou cônico sob diferentes condições de contorno. Será apresentada a teoria dos sólidos (Capítulo - 2) com objetivo de familiarizar o leitor com as notações adotadas e assim proporcionar um melhor entendimento das equações fundamentais no estudo de deformações. O modelo de Hertz para o contato é apresentado no capítulo 3 mostrando suas principais características como, suposições, cálculos para os indentadores do tipo esférico e cônico, suas limitações e como pode ser aplicado à nanoindentações. O fundamento do método (MEF) utilizado para a modificação do contato Hertziano e suas aplicações em várias linhas de pesquisa são expostas no capítulo 4. No capítulo 5 foi analisado o comportamento da deformação de amostras com espessura finita para condições de contorno diferenciadas através de simulações computacionais de nanoindentações, obtendo assim as curvas de *força-deformação* em função da espessura da amostra para os indentadores esférico e cônico.

2 Teoria da Deformação dos Sólidos

O presente capítulo vem a apresentar os conceitos básicos da elasticidade como: estado de deformações, estado de tensão e constantes elásticas dando assim um suporte para o entendimento das equações fundamentais para o estudo da mecânica dos sólidos.

2.1 Teoria de pequenas deformações: o tensor de deformações

Seja um corpo como uma barra retangular submetida a uma força externa em uma de suas extremidades gerando um campo de deformações. A Figura 2 apresenta fibras do corpo dispostas como uma malha quadrada para representar os elementos da barra que se deformam localmente, ou seja, os elementos dentro da malha são submetidos à deformações de extensão e de cisalhamento.

Considere uma fibra definida por dois pontos materiais vizinhos na barra (Figura 2(b)). Na configuração não deformada, eles ocupam as posições P_0 e P , que definem o vetor posição relativa \mathbf{r} . Após deformação esses pontos estão localizados nas posições P'_0 e P' . De acordo com a teoria da elasticidade linear (pequenas deformações), pode-se calcular o deslocamento relativo entre os pontos P_0 e P fazendo uma expansão em série de Taylor em coordenadas cartesianas do vetor \mathbf{r}' em torno do ponto P_0 . Sendo assim os vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' são representados por:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= u^0(x, y, z)\mathbf{i} + v^0(x, y, z)\mathbf{j} + w^0(x, y, z)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}' &= u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

onde u^0 , v^0 e w^0 são as componentes do vetor \mathbf{r} referente a configuração não deformada

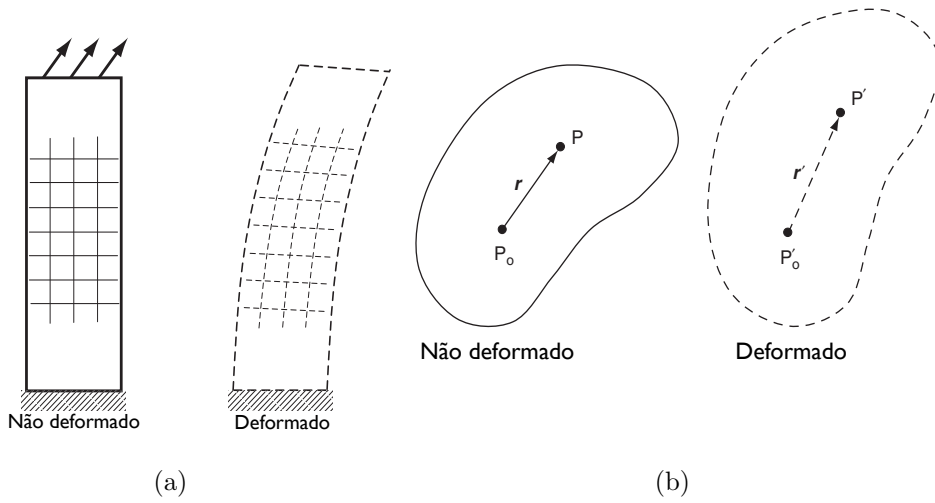


Figura 2: (A) Fibras representando a variação local dos elementos após deformação; (B) Posicionamentos de dois elementos que compõem as fibras antes e depois da deformação. [22]

e i , j e k são os vetores unitários das direções x , y e z .

Aplicando a expansão para u , v e w , tem-se

$$\begin{aligned}
 u &= u^0 + \frac{\partial u}{\partial x}(u - u^0) + \frac{\partial u}{\partial y}(v - v^0) + \frac{\partial u}{\partial z}(w - w^0) \\
 v &= v^0 + \frac{\partial v}{\partial x}(u - u^0) + \frac{\partial v}{\partial y}(v - v^0) + \frac{\partial v}{\partial z}(w - w^0) \\
 w &= w^0 + \frac{\partial w}{\partial x}(u - u^0) + \frac{\partial w}{\partial y}(v - v^0) + \frac{\partial w}{\partial z}(w - w^0)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Define-se que o campo de deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ dado por $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, e assim:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta v + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta w \\
 \Delta r_y &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta v + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta w \\
 \Delta r_z &= \frac{\partial w}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta v + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta w
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

escrito em notação tensorial, $\Delta \mathbf{r}$ torna-se

$$\Delta r_i = J_{i,j} \Delta u_j \tag{2.3}$$

Onde $J_{i,j}$ é chamado de tensor gradiente de deslocamento e pode ser escrito na sua forma

matricial em coordenadas cartesianas.

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

O tensor $J_{i,j}$ pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica,

$$J_{i,j} = e_{i,j} + w'_{i,j} \quad (2.5)$$

Onde

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} (J_{i,j} + J_{j,i}) \quad (2.6)$$

$$w'_{i,j} = \frac{1}{2} (J_{i,j} - J_{j,i}) \quad (2.7)$$

O tensor $e_{i,j}$ é chamado de tensor de deformações (*Strain*) e o $w'_{i,j}$ é referido como tensor de rotação[22]. Usando as equações 2.3 e 2.5, observa-se que o deslocamento relativo entre dois pontos vizinhos para teoria das pequenas deformações é dada em termos de uma soma de deformações e componentes de rotação.

$$u_i = u_i^0 + e_{i,j}dx_j + w'_{i,j}dx_j \quad (2.8)$$

É interessante comentar a interpretação física dos elementos do tensor de deformação. Os índices i e j representam as coordenadas x, y e z e assumem valores $i, j = 1, 2$ e 3 . Para $i = j = 1$ nas equações 2.7 e 2.8, obtém-se:

$$e_{1,1} = \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$w'_{1,1} = \frac{1}{2} (u_{1,1} - u_{1,1}) = 0$$

Generalizando-se, a componente $e_{ij} (j = i)$ do tensor de deformação representa uma pequena deformação na direção x_i . Assim $e_{ii} = \varepsilon_i$ representa uma deformação relativa ao eixo principal x_i e é adimensional como mostra a Figura 3.

$$\Delta u = u_1 - u_1^0 = \varepsilon_x dx_1 = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Agora vamos analisar o caso $i = 1$ e $j = 2$ somente para a equação 2.7.

$$e_{1,2} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

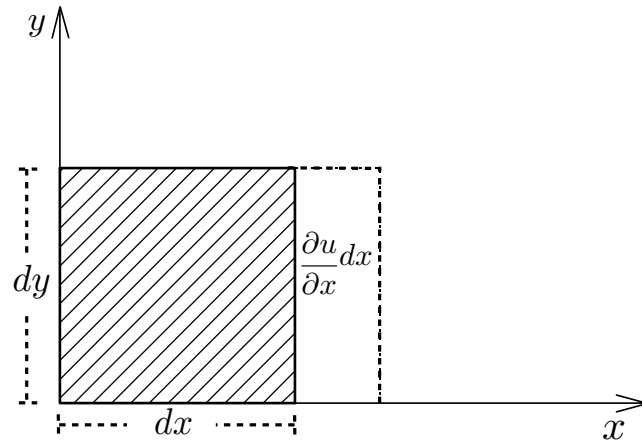


Figura 3: Deformação relativa na direção x

Com a ajuda da Figura 4 é fácil compreender que ε_{xy} leva a informação da variação dos ângulos entre os semi-eixos positivos x e y .

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$$

O termo $\theta_1 + \theta_2$ é a variação do ângulo entre os eixos x e y e é designado por $\gamma_{1,2}$ que está intimamente relacionado com o tensor de deformação $\varepsilon_{i,j} = 1/2\gamma_{i,j}$.

Trabalhando o tensor de deformação $e_{i,j}$, as suas componentes são expressas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.9a)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.9b)$$

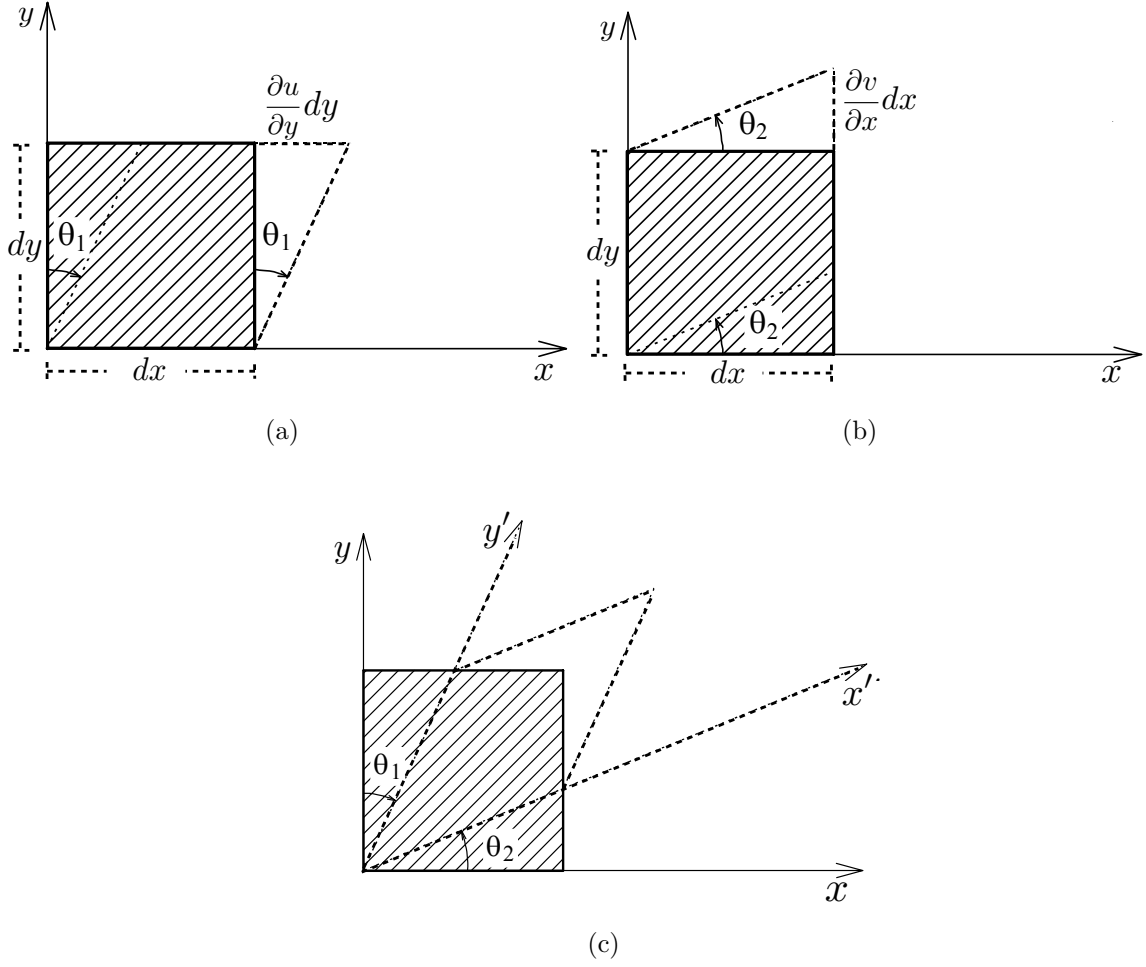


Figura 4: Indentador esférico:(A) seção transversal do contato entre uma esfera e um sólido de raio R_s ; (B) Esquema do posicionamento dos ângulos para calcular h .

Utilizando a equação 2.8 com a contribuição apenas do tensor de rotação para casos particulares $i = 1, 2$ e 3 , temos:

$$dl_i = w'_{i,j} dx_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (2.10)$$

Para $i = 1$, temos a soma em j com $j \neq 1$.

$$\begin{aligned} dl_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \\ &= -R_3 dx_2 + R_2 dx_3 = (\mathbf{R} \times d\mathbf{r})_1 \end{aligned}$$

Do mesmo modo para $i = 2$ com $j \neq 2$ e $i = 3$ com $j \neq 3$

$$\begin{aligned} dl_2 &= -R_3 dx_1 + R_1 dx_3 = (\mathbf{R} \times d\mathbf{r})_2 \\ dl_3 &= -R_2 dx_1 + R_1 dx_2 = (\mathbf{R} \times d\mathbf{r})_3 \end{aligned}$$

Assim percebemos que w'_{ij} descreve uma rotação de um segmento $d\mathbf{r}$ de um ângulo γ em torno de um eixo na direção de \mathbf{R} . Consideremos um exemplo em que $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_3$ e com os seguintes segmentos:

$$\overrightarrow{AB_1} = dx_1\mathbf{e}_1 \quad e \quad \overrightarrow{AB_2} = dx_2\mathbf{e}_2 \quad (2.11)$$

Considerando apenas os efeitos de rotação podemos escrever esses segmentos deformados utilizando a equação 2.8

$$\overrightarrow{AB'_1} = dx_1\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_3 \times dx_1\mathbf{e}_1 = dx_1\mathbf{e}_1 + Rdx_1\mathbf{e}_2 \quad (2.12)$$

$$\overrightarrow{AB'_2} = dx_2\mathbf{e}_2 + R\mathbf{e}_3 \times dx_2\mathbf{e}_2 = dx_2\mathbf{e}_2 - Rdx_2\mathbf{e}_1 \quad (2.13)$$

Os segmentos $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_2}$, $\overrightarrow{AB'_1}$ e $\overrightarrow{AB'_2}$ são mostrados na Figura 5. O ângulo γ para rotações infinitesimais é dado por:

$$\tan \gamma = \frac{Rdx_1}{dx_1} = -\frac{Rdx_2}{dx_2} = R \quad (2.14)$$

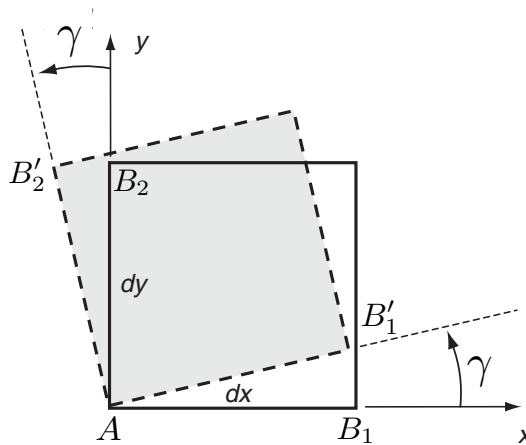


Figura 5: Exemplo de rotação - 2D Adaptado[22]

2.2 Aplicações de forças: o tensor de tensões

Seja um corpo arbitrário sujeito a forças externas mostrado na Figura 6. Para investigar e quantificar a distribuição interna de forças dentro de um sólido contínuo, foi feita uma seção onde existe uma pequena área δA com um vetor normal \mathbf{n} . A resultante de forças superficiais que atua sobre a área δA é representada por $\delta\mathbf{F}$. Atensão é definida

por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A} \quad (2.15)$$

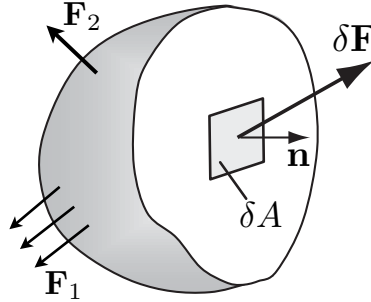


Figura 6: Seção de um sólido sob a ação de forças externas. Adaptado[22]

De acordo com o elemento infinitesimal de volume na Figura 7, considere o caso em que δA coincide com cada um dos três planos de coordenadas e com o vetor normal \mathbf{n} apontando ao longo dos eixos positivos unitários \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 . Neste caso a tensão pode ser escrita para cada face como:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n} = \mathbf{e}_1) &= \sigma_x \mathbf{e}_1 + \tau_{xy} \mathbf{e}_2 + \tau_{xz} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n} = \mathbf{e}_2) &= \tau_{yx} \mathbf{e}_1 + \sigma_y \mathbf{e}_2 + \tau_{yz} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n} = \mathbf{e}_3) &= \tau_{zx} \mathbf{e}_1 + \tau_{zy} \mathbf{e}_2 + \sigma_z \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

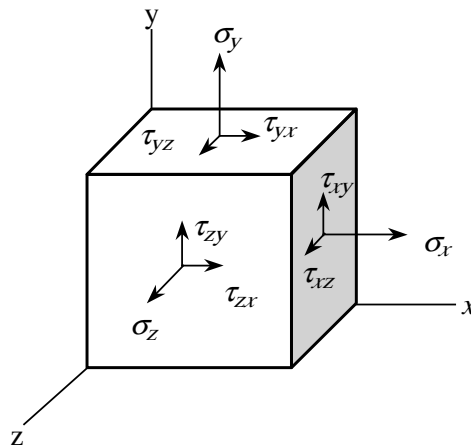


Figura 7: Componentes positivas de tensão em um elemento de volume.

As nove componentes são chamadas de componente de tensão, onde σ_x , σ_y e σ_z são as componentes normais e as quantidades τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} e τ_{zx} são componentes de cisalhamento.

Assim quando um corpo em equilíbrio sofre a ação de uma ou mais forças externas, aparecerão componentes de tensão em todas as direções no seu interior. Independente do sistema de coordenadas, as componentes normal de tensão sempre atuam tensionando ou comprimindo a face do elemento de volume, precisando assim de apenas um índice para representar a sua direção. Dependente do sistema de coordenadas, as componentes de cisalhamento precisa de dois índices, o primeiro indica o plano de atuação e o segundo a direção da tensão. As componentes do tensor de tensões podem ser formalmente escritas na forma matricial.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Apesar do tensor ter nove componentes, apenas seis são importantes, pois ele é simétrico em relação a diagonal principal como será mostrado na seção 2.3.2.

2.3 Propriedades elásticas dos materiais

Cada material responde de maneira específica em deformações quando submetidos a tensões e essa informação é representada através das equações constitutivas. O comportamento mecânico, diferente para diversos tipos de materiais, é indentificado no ensaio de tração. A figura 8 mostra a relação tensão-deformação para três tipos de materiais obtidos por esse procedimento experimental. Observa-se inicialmente um comportamento linear para pequenas deformações seguido de um comportamento não linear que pode levar a grandes deformações. Assim a parcela de deformação linear elástica ε_x é essencial-

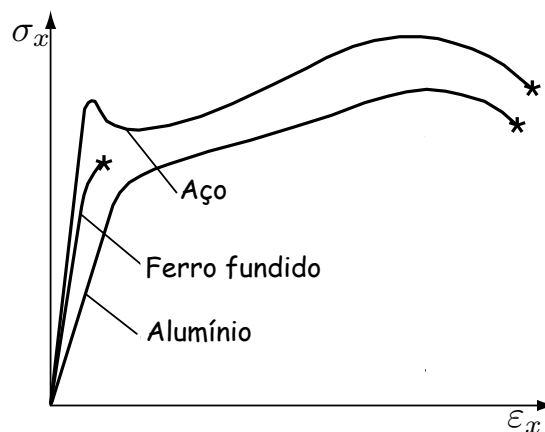


Figura 8: Curva tensão-deformação uniaxial de três materiais metálicos

mente proporcional a componente de tensão σ_x neste ensaio uniaxial e é reversível. Após removida a tensão, a deformação desaparece e a esse fenômeno chamamos de deformação elástica. Dessa forma para uma força uniaxial no regime elástico pode-se escrever a relação:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.18)$$

Onde E é o módulo elástico (ou módulo de Young) e não é apenas a inclinação da curva do ensaio de tração, este parâmetro representa a rigidez elástica do material. A unidade métrica do módulo de Young E é o *Pascal* (Pa) onde é dado em (N/m^2) .

Fisicamente o módulo de Young está fortemente associado com as forças interatômicas. Em um sólido os átomos exercem forças atrativas e repulsivas criando um equilíbrio quando estão perfeitamente separados. Uma força externa tentando aproximar ou separar esses átomos vai fazer com que naturalmente o sistema resista a não sair do equilíbrio, então quanto maior for essas ligações maior será o módulo de Young, precisando ser submetida à uma força externa maior para gerar uma deformação maior.

Uma outra propriedade importante é a razão ou coeficiente de Poisson. Seja um corpo isotrópico (Figura 9) submetido a uma tração uniaxial longitudinal σ_y ($\sigma_x = \sigma_z = 0$). Como consequência surge uma contração lateral perpendicular a extensão ε_x e ε_z . A razão de Poisson ν é a razão entre a contração lateral e a extensão longitudinal quando submetido a tensão uniaxial deste material.

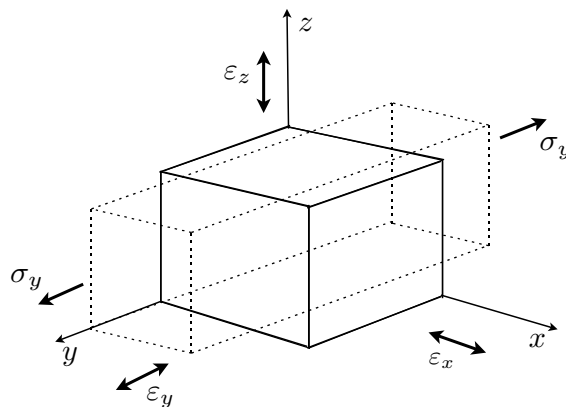


Figura 9: Elemento de volume submetido a uma tensão σ_y .

Considere um elemento infinitesimal de volume submetido a uma tensão σ_y como mostra a Figura 9. A tensão na direção y gera deformações em todas as direções. A razão

de Poisson e dada por:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (2.19)$$

Como a extensão longitudinal é uma deformação positiva e a contração transversal é negativa, a razão de Poisson ν é definida negativa para obter um coeficiente positivo. O valor de ν varia entre $0 < \nu < 0.5$, onde valores pequenos de ν representam materiais que sofrem pouca contração lateral quando submetidos a extensões longitudinais. Valores de ν próximos de 0.5 caracterizam materiais quase incompressíveis, ou seja, não sofrem variação de volume sob tensão. Na Tabela 1 é mostrado as constantes elásticas de alguns materiais reportados na literatura.

<i>Material</i>	<i>E(GPa)</i>	<i>ν</i>
Nitreto de Silício(AFM)	280-290	0.27-0.3
Vidro	75	0.18-0.3
Indentador de Diamante	1141	0.07
Aço	200	0.30
Náilon 6.6	1.58-3.80	0.39
Titânio	107	0.34

Tabela 1: Modulo de elasticidade e razao de Poisson de materiais conhecidos [23].

2.3.1 Lei de Hooke generalizada

Na seção 2.3 definimos a relação linear entre tensão e deformação uniaxial. Essa relação é conhecida como lei de Hooke. A lei de Hooke generalizada[22] para um material homogêneo e isotrópico é dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Na equação 2.20 é utilizada a notação de Einstein para o somatório implícito representado por índices repetidos, temos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.21a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.21b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.21c)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.21d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (2.21e)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (2.21f)$$

A lei de Hooke generalizada também é encontrada na literatura escrita em função do módulo de cisalhamento G e da constante de Lamè λ ,

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \quad (2.22)$$

onde,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.23)$$

2.3.2 Equações de equilíbrio

Seja um corpo em equilíbrio sujeito a forças superficiais e volumétricas \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_1 como mostra a Figura 6. Essas forças satisfazem as equações básicas do equilíbrio, ou seja, o somatório de todas as forças e momentos é zero. Para o equilíbrio estático, a conservação do momento linear implica que estas forças são equilibradas e sua resultante é nula. Portanto se o corpo está em equilíbrio pode-se escolher de maneira apropriada uma porção do corpo para se aplicar o princípio do equilíbrio. Então a partir do somatório das forças superficiais e volumétricas obtém-se:

$$\int_S T_i dS + \int_V F_i dV = 0 \quad (2.24)$$

Podemos escrever as forças de superfície em termos do tensor de tensões como mostrado na seção 2.3.

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V F_i dV = 0 \quad (2.25)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação 2.25

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) dV = 0 \quad (2.26)$$

Como o integrando é contínuo e volume V é arbitrário e diferente de zero, então a integral desaparece.

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.27)$$

A equação 2.27 pode ser escrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Essas relações são chamadas de equações de equilíbrio e todo campo de tensões no equilíbrio deve satisfazer as equações 3.29.

Usando a lei Hooke generalizada dada pela equação 2.20

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk,i} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij,j} \quad (2.29)$$

e substituindo na forma geral das equações 2.9b

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

obtem-se a equação do equilíbrio da forma:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + F_i = 0 \quad (2.30)$$

Essas equações diferenciais parciais descrevem os deslocamentos sofridos por um corpo em equilíbrio submetido a forças externas F_i .

Utilizado o principio do momento angular em que o momento de todas as forças

atuantes em uma porção do corpo é nula, temos:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV = \quad (2.31)$$

$$= \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV \quad (2.32)$$

Aplicando o teorema da divergência

$$\int_V [(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l)_{,l} + \varepsilon_{ijk} x_j F_k] dV = 0 \quad (2.33)$$

Simplificando a integral a equação 2.33 torna-se

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad (2.34)$$

Como a região V é arbitrária o integrando deve ser $\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$. Devido as propriedades de antisimetria do tensor ε_{ijk} encontra-se que o tensor de tensões é simétrico, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Assim o tensor de tensões tem nove componentes, onde apenas seis são importantes.

No próximo capítulo será utilizado a base teórica dos campos de deformações em um problema prático. Problemas envolvendo o contato entre diferentes tipos de superfícies são bastante utilizados em física aplicada para estudar a natureza desse contato e assim retirar informações reológicas dos materiais.

3 *Modelo de Hertz para o Contato entre Superfícies*

O modelo de Hertz oferece uma maneira de calcular deformações localizadas e a distribuição de pressão entre dois corpos elásticos em contato. As tensões e deformações decorrentes desse contato têm uma aplicação prática em desgastes, teste de dureza, *design* de dentes de engrenagem, diagnóstico de doenças [24, 25, 26] e em muito outros caso onde o contato entre um indentador perfeitamente rígido e um plano é um modelo de interesse particular.

3.1 Contato elástico entre dois sólidos

3.1.1 Teoria de Hertz

Hertz[1, 2] na tentativa de entender o processo de indentação e a natureza do contato entre os corpos elásticos, ele tentou atribuir uma forma a superfície de contato e usou algumas hipóteses a fim de facilitar a análise:

1. *O material dos corpos em contato é isotrópico e homogêneo.*
2. *A força aplicada é estática.* Essa suposição permite que dissipação de energia sísmica (vibrações ou ondas sonoras) durante o contato dos corpos seja desprezado.
3. *O material é linearmente elástico.* A lei do Hooke descreve o comportamento do material.
4. *O raio de curvatura dos corpos em contato é muito grande em comparação com o raio de contato.* A teoria de hertz é baseada no problema de um espaço elástico semi-infinito, no qual está sujeito a pressões em uma pequena área localizada. Trações fora da área de contato tendem a zero.

5. *As dimensões dos corpos são muito maiores que a dimensão da superfície de contato.* Isso garante que tensões geradas devido ao contato desapareçam nas extremidades do corpo, pois o objetivo de Hertz era estudar tensões somente na região de contato.
6. *O contato entre os corpos é suave.* O efeito do atrito gerando durante o contato das superfícies é desprezado.
7. *A deformação é muito pequena.* Conseqüentemente a não-linearidade na geometria devido às largas deformações não é considerada.

3.1.2 Indentador esféricos

Considere o contato entre uma esfera de raio R' , módulo elástico E' , razão de Poisson ν' e uma superfície de raio R_s onde as constantes elásticas são E e ν . Na ausência de força aplicada o indentador apenas toca a superfície da amostra de raio R_s como mostra a Figura 10(a). A distância h entre um ponto da periferia do indentador à superfície da amostra mostrada na Figura 10(b), é dada por:

$$h = \frac{r^2}{2R}, \quad r \ll R' \quad (3.1)$$

Onde R é a curvatura relativa entre o indentador e à amostra.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_s} \quad (3.2)$$

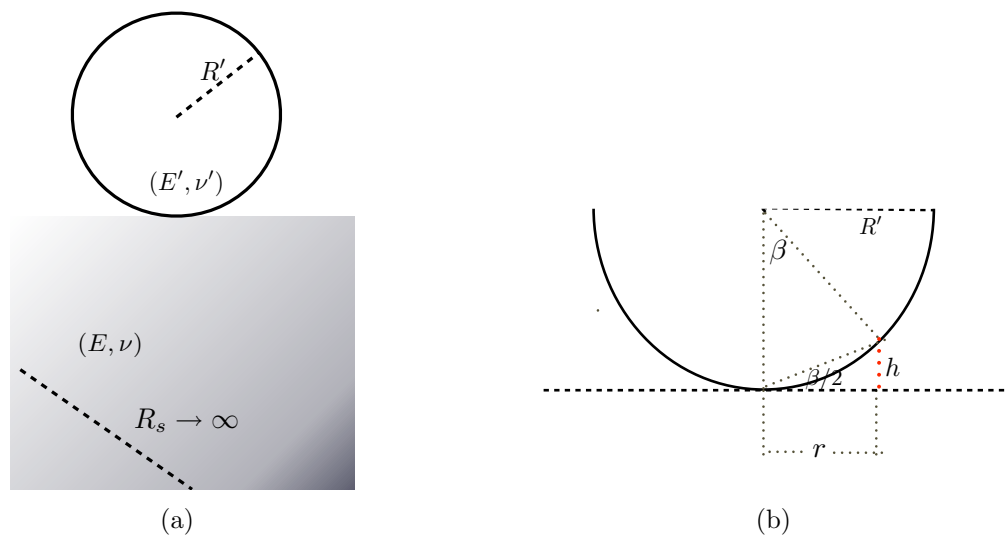


Figura 10: Indentador esférico: (A) seção transversal do contato entre uma esfera e um sólido de raio R_s . (B) Esquema do posicionamento dos ângulos para calcular h .

Ao aplicar uma força (direção normal) ao indentador em contato com uma superfície plana (fazendo na equação (3.2), $R_s \rightarrow \infty$), observa-se que o ponto de contato onde a força é aplicada se desloca δ na direção vestical. Esta distância pode ser considerada a aproximação mútua entre o indentador e à amostra quando medida em relação a um ponto distante na amostra [3]. De maneira geral tanto o indentador quanto a amostra são submetidos a deformações. As deformações u'_z (relativo ao indentador) e u_z (relativo a amostra) em um ponto arbitrário dentro da área de contato são mostradas na Figura 11. Aqui será trabalhado com $u'_z = \bar{u}'_z$ e $u_z = \bar{u}_z$, pois a deformação que estamos focando é a deformação da superfície de contato (ver apêndice - seção A.2). O contato entre um indentador rígido e um plano deformável é mostrado em (A), onde a indentação $\delta = u_z|_{r=0}$ será dada pela deformação da amostra, pois $u'_z = 0$. O perfil do contato ou raio de contato é representado por a . Em (B) temos um plano perfeitamente rígido $u_z = 0$ e aproximação mútua entre eles é $\delta = u'_z + h$. A linha tracejada representa a forma do indentador se ele não fosse submetido a deformação. Em (C) temos o caso em que tanto o indentador como o plano podem se deformar e a indentação para esse tipo de contato é dado por:

$$\delta = u'_z + u_z + h \quad (3.3)$$

A deformação dentro da área de contato obtida da pela equação A.22 derivada das funções de Boussinesq[3] (demonstrada em anexo) é expressa por:

$$u_z = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (3.4)$$

A distribuição de pressão na área de contato foi definida por Hertz[1] da seguinte forma:

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Onde r é a distância radial do centro da superfície de contato e p_0 é a máxima pressão aplicada perpendicularmente a superfície de contato e ocorre no centro de contato $r = 0$. Utilizando a equação 3.5, a força total P sobre a área de contato é dada por:

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{3}{2} p_0 \pi r^2 \quad (3.6)$$

Consequentemente a pressão máxima p_0 é $\frac{3}{2}$ vezes a pressão média $P_m = \frac{P}{\pi a^2}$

Usando a equação 3.4 na condição de contorno de deslocamento (equação 3.3) para o

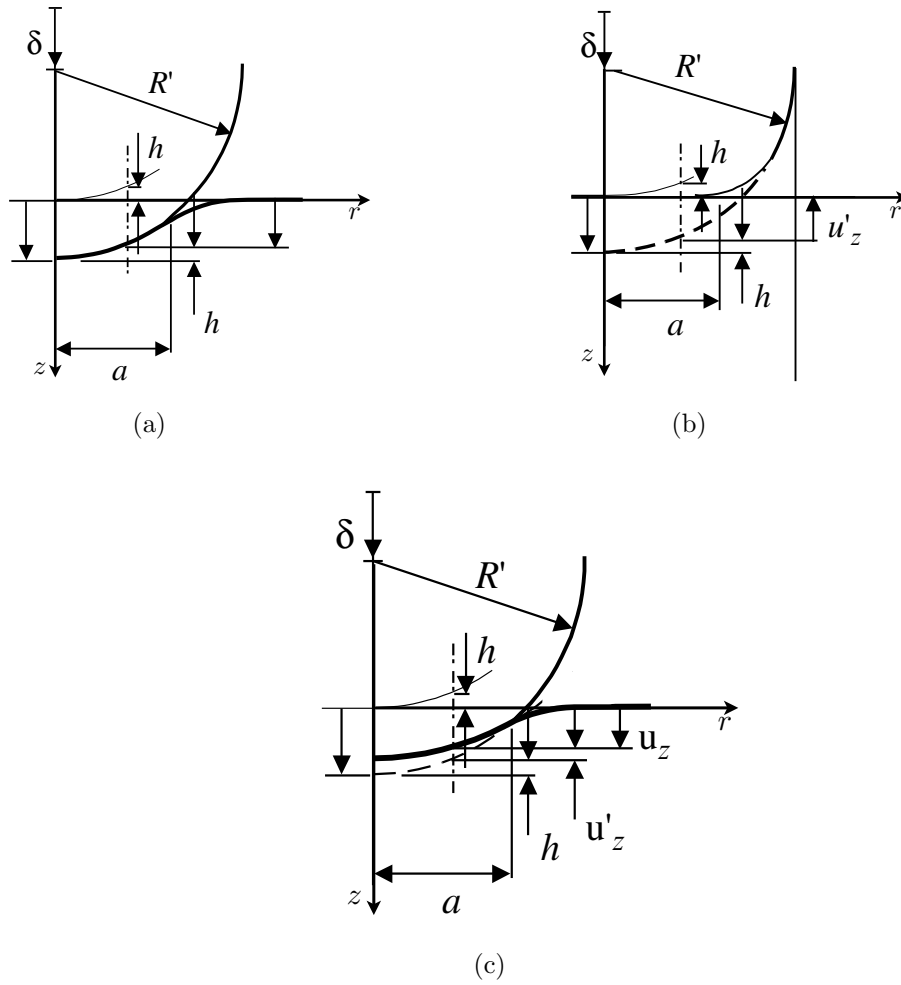


Figura 11: Processos de indentação: (A) indentador perfeitamente rígido (B) (plano-amostra) perfeitamente rígido (C) indentador e amostra deformáveis

caso de deformação mútua entre o indentador esférico e a amostra plana, temos:

$$\begin{aligned}
 u_z + u'_z &= \left(\frac{1}{E^*} \right) \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \\
 &= \delta - \frac{r^2}{2R}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde E^* é dado por:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} + \frac{(1 - \nu'^2)}{E'} \tag{3.8}$$

Como a equação 3.4 é válida somente dentro da área de contato, ou seja, para $r \leq a$ faz-se $r = 0$ na equação 3.7

$$\delta = \left(\frac{\pi p_0 a}{2E^*} \right) \tag{3.9}$$

E para condição em que $r = a$, tem-se:

$$a = \left(\frac{\pi p_0 R}{2E^*} \right) \quad (3.10)$$

Como na prática especifica-se a força total, então é mais conveniente usar a equação 3.6 combinada com as equações 3.9 e 3.10, tem-se:

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (3.11a)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE_*^2} \right)^{1/3} \quad (3.11b)$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE_*^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (3.11c)$$

Os gráficos da distribuição de pressão em função do raio de contato e da força em função da indentação são mostrados a seguir na Figura 12:

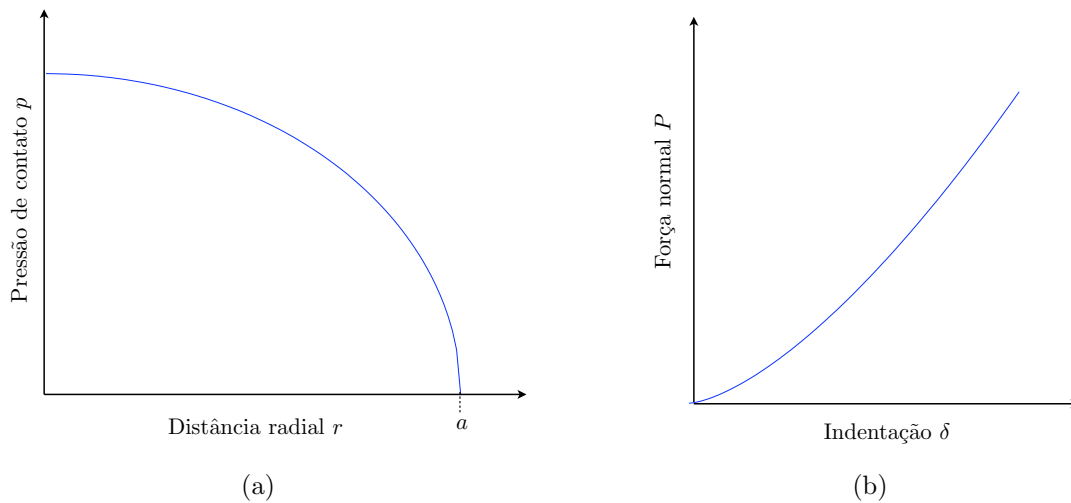


Figura 12: Modelo de Hertz: (A) Gráfico da distribuição de pressão sobre a área de contato pela distância radial de contato r . (B) Gráfico da força normal sobre a região de contato pela indentação (deformação normal) δ .

3.1.3 Indentador cônico

Na seção 3.1.2 observou-se que o contato Hertziano se restringe a superfícies suaves e contínuas garantindo dessa forma que as tensões sejam finitas em todo o sólido. Considere agora um cone de ângulo α indentando uma superfície elástica plana. Essa indentação δ é pequena comparada com as dimensões dos sólidos, podendo assim ser utilizada a solução elástica do espaço semi-infinito para essa interação. Para o indentador cônico a equação que relaciona o raio de contato a com a força de indentação P é dada por [30]:

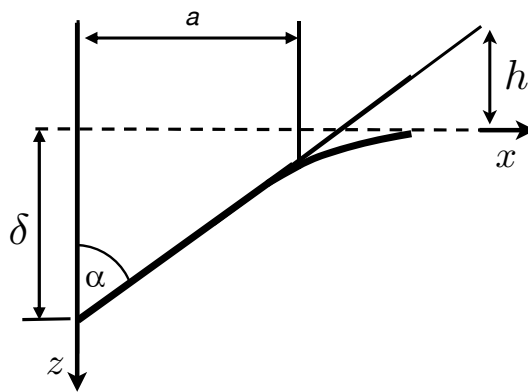


Figura 13: Esquema usando a simetria do contato entre um indentador cônico e um plano deformável.

$$P = \frac{\pi}{2} a^2 E^* \cot \alpha \quad (3.12)$$

a condição de contorno de deslocamento da superfície dentro da área de contato é:

$$u_z = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{a} \right) a \cot \alpha \quad r \leq a \quad (3.13)$$

Substituindo a equação 3.12 em 3.13 com $r = 0$, onde $u_z|_{r=0} = \delta$, obtem-se que a força total é dada por:

$$P = \frac{2E^*}{\pi} \tan \alpha \delta^2 \quad (3.14)$$

Estas equações de contato se aplicam a um contato completamente elástico entre o indentador e a amostra. A ponta infinitamente afiada serve para garantir que a deformação plástica ocorreria assim que o contato fosse estabelecido [31]. Dessa forma singularidade na ponta do cone previsto por estas equações seria evitada. Na prática, um indentador não teria uma ponta infinitamente afiada e assim os estágios iniciais de contato seriam semelhantes ao que envolve um indentador esférico.

3.1.4 Limitações do modelo de Hertz

Embora o estudo de Hertz em relação ao campos de tensão produzidos pelo contato entre uma superfície plana e um indentado esférico seja bastante reportado na literatura, ele apresenta algumas limitações a respeito de sua aplicação.

- Hertz não calcula a magnitude das tensões em pontos ao longo do interior do sólido. Ele somente considera tensões na área de contato para calcular o valor da indentação δ , então o seu modelo oferece uma sugestão quanto ao caráter dessa distribuição de tensão calculada sobre a superfície e ao longo do eixo de simetria.
- O objetivo do modelo era investigar tensões e deformações em um pequena área localizada, por isso foi definido que o raio de curvatura dos sólidos que entram em contato é muito grande em comparação com a área de contato. Assim o modelo de Hertz não leva a informação da espessura dos sólidos que entram em contato, precisando assim ser modificado para ser aplicado a sistemas finitos de contato.

3.2 Nanoindentação

As propriedades mecânicas de micro e nano sistemas tem motivado muitos estudos com o objetivo de entender como interações mecânicas afetam esses sistemas. A microscopia de força atômica (AFM - *Atomic Force Microscopy*) é uma técnica de varredura por sonda muito poderosa e tem se mostrado muito útil na investigação das propriedades mecânicas desses sistemas. O microscópio de força atômica (AFM - *Atomic Force Microscope*) é composto basicamente por um braço flexível chamado de *Cantilever* microfabricado normalmente de Nitreto de silício (Si_3N_4) e um sistema de posicionamento constituído de cerâmicas piezoelétricas. O AFM é usado como micro indentador e sua utilização para medir propriedades elásticas foi introduzida no início de seu desenvolvimento [16]. Esses sistemas como células e tecidos biológicos [41] têm as suas propriedades elásticas estudadas por meio das curvas de (*força - deformação*) obtidas pelo AFM e usadas em conjunto com modelos matemáticos que descrevem a mecânica do contato para estimar o módulo de Young e outras propriedades materiais [41].

A figura 14 mostra o esquema dos parâmetros relevantes para o estudo de deformações utilizando o AFM como um nanoindentador. Os dados obtidos usando a técnica de microscopia de força tem a forma $d = f(z)$ (curvas de força), onde d é deflexão do cantilever e z representa o deslocamento da cerâmica piezoelétrica. O ponto de contato

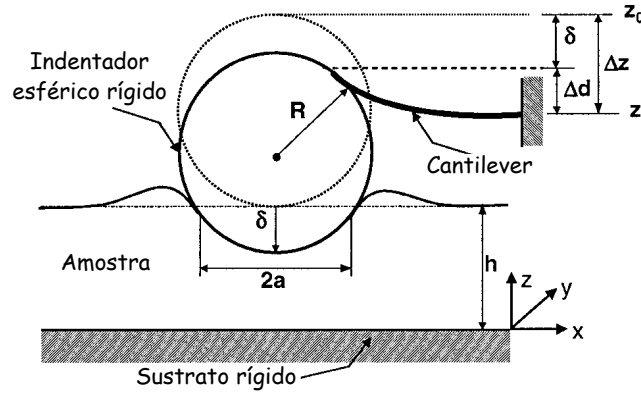


Figura 14: AFM utilizado como indentador no processo de deformação.

entre o indentador e a superfície da amostra é representado por (d_0, z_0) e dessa forma tem-se $\Delta d = d_0 - d$ e $\Delta z = z_0 - z$, pois o cantilever tem um certa deflexão antes da deformação e a cerâmica piezoelétrica desloca-se para engatar o contato entre o indentador e a superfície da amostra. Observa-se facilmente através do esquema de contato que a variação de deslocamento da cerâmica Δz é igual a soma da variação de deflexão do cantilever e a indentação.

$$\Delta z = \Delta d + \delta \longrightarrow \delta = \Delta z - \Delta d \quad (3.15)$$

As equações que relaciona a força com parâmetros elásticos e geométricos $F(\delta, R', h, E, \nu)$ e $F(\delta, \tan(\alpha), h, E, \nu)$ para os indentadores esférico e cônico podem ser relacionadas pela força de deflexão transmitida a amostra obtida pela lei de Hooke $F = k_c \Delta d$, onde k_c é a dureza do cantilever.

$$F = k_c \Delta d = F(\delta, R', h, E, \nu) = F(\delta, \tan(\alpha), h, E, \nu) \quad (3.16)$$

Substituindo a equação 3.15 na equação 3.16, tem-se:

$$\begin{aligned} d &= d_0 + \frac{1}{K_c} F(z_0 - d_0 - z + d, R', h, E, \nu) = \\ &= d_0 + \frac{1}{K_c} F(z_0 - d_0 - z + d, \tan(\alpha), h, E, \nu) \end{aligned} \quad (3.17)$$

As expressões 3.17 mostram a complexidade da relação dos parâmetros geométricos e materiais do problema do contato para os indentadores já citados. O ajuste de tal modelo matemático para sistemas em pequena escala utilizando os dados experimentais, fornece uma estimativa para os parâmetros desconhecidos E e ν .

4 *Método Computacional: Elementos Finitos*

Neste capítulo será apresentado o método de elementos finitos, suas principais características e aplicações. O método de elementos finitos (MEF) é uma abordagem numérica bastante utilizadas em fenômenos físicos como: eletromagnetismo, fluxo de fluidos, transferência de calor e análise de tensões e deformações. O fato de oferecer ótimas possibilidades de modelagem faz do MEF uma ferramenta poderosa aliada a pesquisa científica.

4.1 Aplicações

O método de elementos finitos (MEF) tem uma gama de aplicações muito grande como por exemplo:

1. Análises de tensões, deformações e térmica em componentes industriais, como: aparelhos elétricos, *chips* eletrônicos, motores de automóveis e avião.
2. Análise de acidentes de carros, trens e aviões.
3. Análise eletromagnética de antenas e transistores.
4. Análise de procedimentos cirúrgicos, como: cirurgia plástica de reconstrução óssea e correção de escoliose.
5. Estudos sísmicos de barragens e edifícios de grande altura.

O MEF vem despertando bastante interesse em diversas áreas de atuação, como a medicina. A comunidade médica viu grandes possibilidade de utilizar esse método em medicina preventiva no qual visa utilizar imagens médicas e dados de monitoramento para construir modelos com base em anatomia e fisiologia. Esses modelos são usados para prever a resposta do paciente a tratamentos alternativos, como procedimentos cirúrgicos.

Na Figura 15(a) mostra a utilização do modelo de elementos finitos para o planejamento do procedimento cirúrgico visando otimizar a modelagem de sutura, pois o MEF permite uma modelagem em alta precisão, o que é necessário para representar anatomias complexas. Alguns modelos, como por exemplo, o modelo de um coração mostrado pela

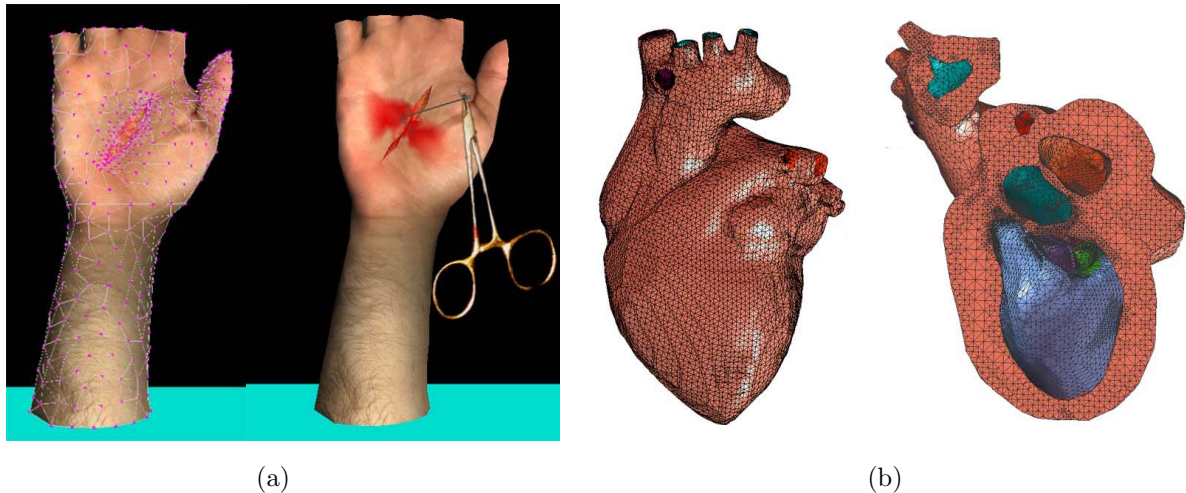


Figura 15: (a) Mostra o MEF modelando uma mão ferida com 863 nodos para análise de tensão da região da ferida durante a sutura [18]. (b) Modelagem de um coração para a análise da dinâmica do fluido cardíaco [19].

Figura 15(b) ainda são temas de pesquisa tendo uma grande importância no estudo de substituição de válvulas e adaptação de próteses em diversos procedimentos cirúrgicos.

A indústria automobilística utiliza a análise de elementos finitos em diversas aplicações, como: estudo da acústica para reduzir o ruído interno, análise de vibrações para melhorar o conforto e otimizar a rigidez dos chassis, o aumento da vida útil dos componentes de suspensão e do motor para que as temperaturas e tensões sejam aceitáveis. A Figura 16(b) mostra uma análise não linear utilizando MEF com o objetivo de simular um acidente para ambos os modelos do carro e do ocupante. Durante o processo de fabricação de uma aeronave é necessário incluir tensões gerada por milhares de forças para teste de falhas e fadiga e assim evitar catástrofes (Figura 16(a)).

Estudos utilizando elementos finitos vem sendo utilizado cada vez mais em linhas de pesquisas completamente diferente, como em processos de decisão ambiental e redução de riscos a níveis aceitáveis. A dispersão de um aerosol químico em meio a cidade de Atlanta é mostrado na Figura 16(c), onde a maior concentração do aerosol é representada pela cor vermelha. A complexidade da geometria da cidade é fundamental para determinar a dispersão, podendo ser explorado em detalhes por esse método pelas diversas condições de contorno ajustáveis. Outras áreas de aplicação em que esse método oferece ótimas

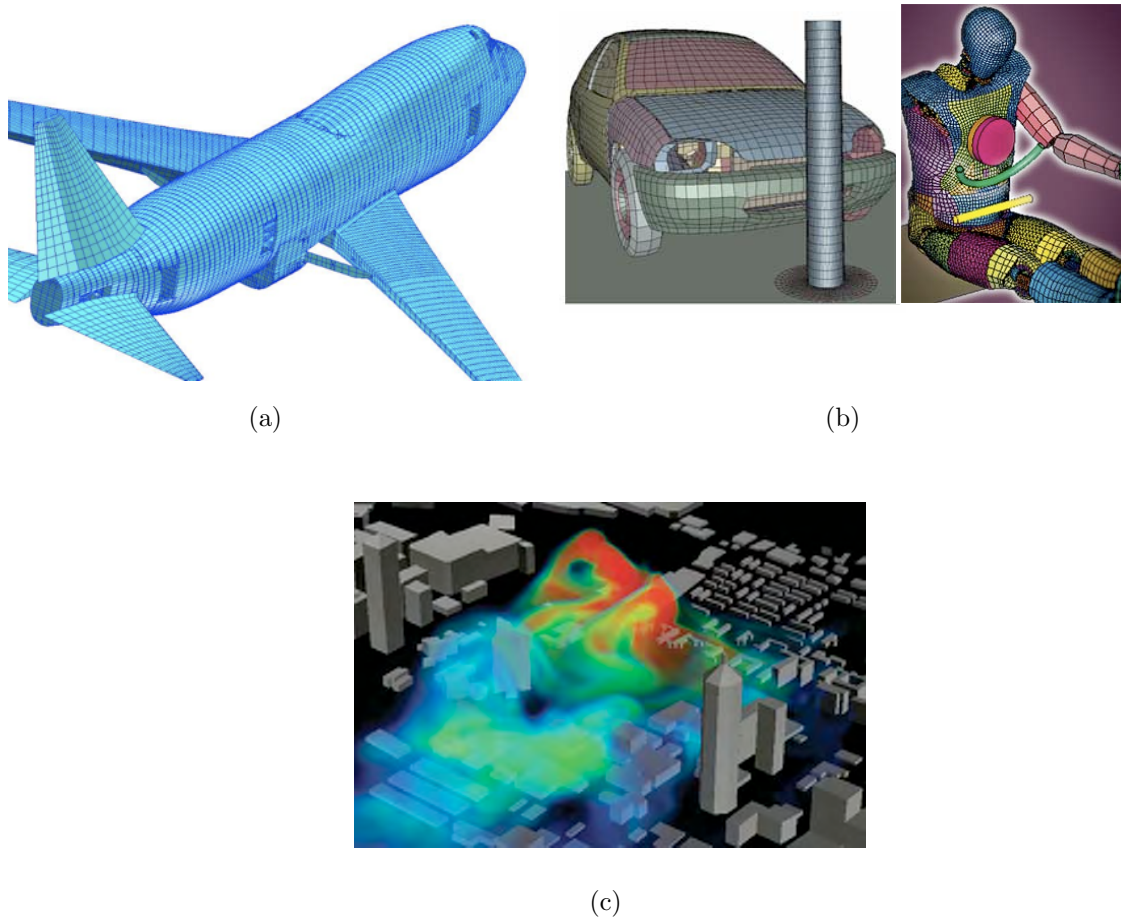


Figura 16: (a) Modelo para a análise de falha e fadiga na estrutura de uma aeronave.; (b) Simulação dos efeitos de choque mecânico em um carro e condutor [21]. (c) Dispersão de um agente químico na cidade de Atlanta [20].

possibilidade de modelagem são em terremotos, resposta de construções à abalos sísmicos, efeitos causados pelo vento à estruturas e outros.

4.2 Métodos de elementos finitos - Conceitos

As equações diferenciais parciais são utilizadas para descrever vários fenômenos físicos e sua solução por métodos clássicos como por exemplo, separação de variáveis, pode torna-se muito difícil ou até mesmo impossível. A análise de elementos finitos é um método numérico no qual equações diferenciais parciais são solucionadas, mesmo que essas soluções sejam consideradas aproximadas sob o ponto de vista matemático. Alguns fenômenos físicos são tratados considerando a matéria um meio contínuo e envolvem várias variáveis, como por exemplo, problemas de contato no qual envolvem campos de deformação e

tensão. Esse campos variam de ponto a ponto e possuem um número infinito de soluções no domínio.

O método de elementos finitos (MEF) basicamente divide o domínio em um número finito de subdomínios chamados de *elementos* e expressa as variáveis desconhecidas em termos de funções aproximadas dentro de cada um desses elemento. Essas funções são chamadas de funções de interpolação e são definidas em termos das variáveis em pontos bastante específicos chamados de *nós* no qual definem a fronteira dos elementos e se conectam ao elemento adjacente.

A discretização do domínio em nós e elementos é chamada de *malha* e sua densidade depende da precisão da análise e dos recursos computacionais disponíveis. Normalmente uma malha refinada produzirá um resultado mais preciso aumentando o custo computacional. Como a malha normalmente não é uniforme, a malha refinada pode ser usada em áreas onde o gradiente de deslocamento é maior ou onde a precisão é fundamental para a análise. Para o estudo de deformações geradas por contatos entre corpos de materiais e geometrias (domínios) diferentes, a malha deve ser refinada nas regiões próximas ao contato devido a natureza localizada das tensões e deformações nesta região. Utilizar malhas pouco refinadas podem levar a uma má detecção do contato, causando problemas de convergência numérica. Na tabela 2 mostra algumas vantagens e desvantagens do método de elementos finitos na modelagem de problemas.

<i>Vantagens</i>	<i>Desvantagens</i>
Análise estática e dinâmica, determinística e estocástica	Soluções aproximadas
Geometrias irregulares e grandes deformações	Os resultados dependem da discretização do domínio (<i>malha</i>)
Diversos tipos de materiais com inclusão de não-linearidade	
Carregamentos e condições de contorno complexas	

Tabela 2: Vantagens e desvantagens do método de elementos finitos.

4.2.1 Nós e elementos

A discretização do domínio em subdomínio (elementos) permite representar matematicamente problemas físicos práticos, onde os elementos são conectados uns aos outros por meio dos nós. Os nós representam as coordenadas de localização no espaço onde vínculos físicos existem como mostra a Figura 17. As funções de interpolação são chamadas de funções de base local pelo o fato de serem definidas em pequenas parcelas do domínio e

levam a um sistema de equações numericamente estável das variáveis de interesse.

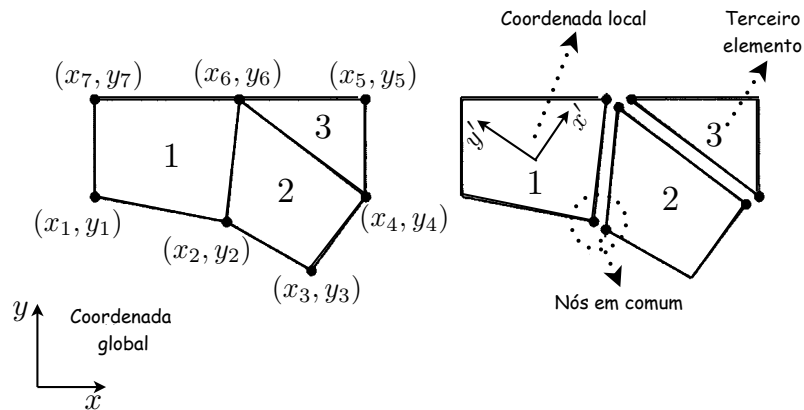


Figura 17: Discretização do domínio em elementos. Adaptado [37]

A geometria do problema ou domínio pode ser discretizado por linhas, áreas ou elementos de volume. A Figura 18 mostra a variação desses elementos pelo número de nós. A geometria e a natureza física do problema são extremamente importantes no processo de discretização e solução do problema.

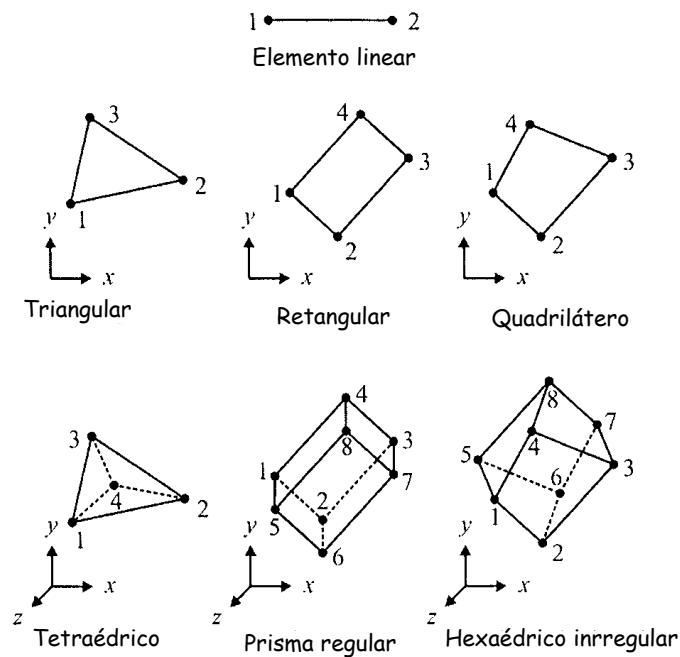


Figura 18: Classificação dos elementos pelo número de nós. Adaptado [37]

Em problemas lineares a solução é determinada pela resolução de um sistema de equações lineares, onde o número de incógnitas ou variáveis de campo (tensão, deformação, temperatura, potencial elétrico e magnético entre outros) é igual ao número de nós.

As equações diferenciais parciais (equações 2.30) desenvolvidas na seção 2.3.2, são conhecidas como formas fortes do sistema de equações que regem a deformação para corpos em equilíbrio. A forma forte em comparação com uma forma fraca [38, 39], exige forte continuidade no campo de variáveis que nesse caso são os deslocamentos (u , v e w) e obter a sua solução exata é muito difícil quando aplicada a problemas de geometrias complexas em duas e três dimensões. A forma fraca das equações é geralmente criada utilizando alguns métodos, por exemplo, princípio da energia (princípio de Hamilton) ou método de ponderação residual no qual é uma ferramenta matemática mais geral aplicada a solução de todo tipo de equação diferencial parcial. Esses métodos são utilizados para criar as equações do MEF, onde o princípio de Hamilton é aplicado a problemas de sólidos e estruturas, e o de ponderação residual é usado na formulação de problemas de transferência de calor. A falta de exigência sobre as variáveis de campo, e a operação de integração (a forma fraca é apresentada muitas vezes em uma forma integral), gera um conjunto de equações discretizadas do sistema obtendo um resultado muito mais preciso, principalmente para geometrias complexas.

Para simplificar a construção das equações do MEF é preciso usar sistemas de coordenadas locais (Figura 17) que é definido para um elemento em relação ao sistema de coordenada global que é geralmente definido para toda a geometria. De acordo com o sistema de coordenada local definido em um elemento, o deslocamento dentro do elemento é assumido como uma interpolação polinomial usando o deslocamento de cada nó e é dado por:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} \mathbf{N}_i(x, y, z) \mathbf{d}_i = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d}_e \quad (4.1)$$

onde n_d é o número de nós que formam o elemento, \mathbf{d}_i é o deslocamento do i -ésimo nó. \mathbf{d}_i deve ser calculado e pode ser expressado de forma geral como:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_f} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

d_1, d_2, \dots, d_{n_f} são as componentes de deslocamento do i -ésimo nó, e n_f é número de graus de liberdade do i -ésimo nó. Para uma geometria 3-D $n_f = 3$ e as componentes do deslocamento tornam-se, $d_1 = u_i$, $d_2 = v_i$ e $d_3 = w_i$. As componentes do deslocamento dos nós podem ter contribuição de efeitos de rotação, assim o vetor \mathbf{d}_e representa o

deslocamento do elemento inteiro e escrito como:

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dessa forma \mathbf{d}_1 representa o deslocamento do nó 1 e \mathbf{d}_{n_d} o deslocamento do n_d -ésimo nó (último nó que compõe o elemento). O número de graus de liberdade do elemento é $n_d \times n_f$. O fator \mathbf{N} na equação 4.1 é a matriz de funções de interpolação para os nós que formam o elemento, sendo pré-definida a assumir as diferentes formas de deslocamento em relação as coordenadas. De forma geral essa matriz pode ser escrita,

$$\mathbf{N}(x, y, z) = [\mathbf{N}_1(x, y, z) \quad \mathbf{N}_2(x, y, z) \quad \dots \quad \mathbf{N}_{n_d}(x, y, z)] \quad (4.4)$$

sendo $\mathbf{N}_1(x, y, z)$ a forma da função de interpolação referente ao nó 1 e assim sucessivamente. \mathbf{N}_i é a matriz de forma de funções referentes aos deslocamentos e pode ser representada na forma matricial por:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{in_f} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Então N_{ik} é a forma da função para a k -ésima componente do i -ésimo nó. Para geometrias em 3-D, $n_f = 3$, onde muitas vezes temos $N_{i1} = N_{i2} = N_{i3}$. A forma das funções não precisam ser a mesma para todas as componentes dos deslocamentos, podendo ser usada por exemplo, uma função com uma forma para representar o deslocamento translacional e outra o rotacional.

4.3 MEF modelando problemas de contato

O problema estudado neste trabalho envolve a simulação do contato *Hertziano* (capítulo-3) entre superfícies de diferentes geometrias (contato esférico e contato cônico) e materiais. A simulação é projetada para estudar os efeitos do contato para configurações com condições de contorno diferentes e modificar o modelo de Hertz (baseado em espessuras infinitas) para espessuras finitas. O MEF foi utilizado para modelar as geometrias de contato e solucionar as equações diferenciais 2.30 sob diferentes condições de contorno

de deslocamento. Devido o contato apresentar simetria, a geometria e os cálculos foram simplificados para a uma análise bidimensional utilizando simetria axial. A figura 19(c) mostra a seção transversal do contato entre uma esfera de raio R' (indentador) e um plano de espessura L_0 (amostra), onde campos de deformações e de tensões gerados por uma força P aplicada ao indentador serão estudados. O valor de L_0 é utilizado de tal forma a reproduzir o contato Hertziano para espessuras infinitas.

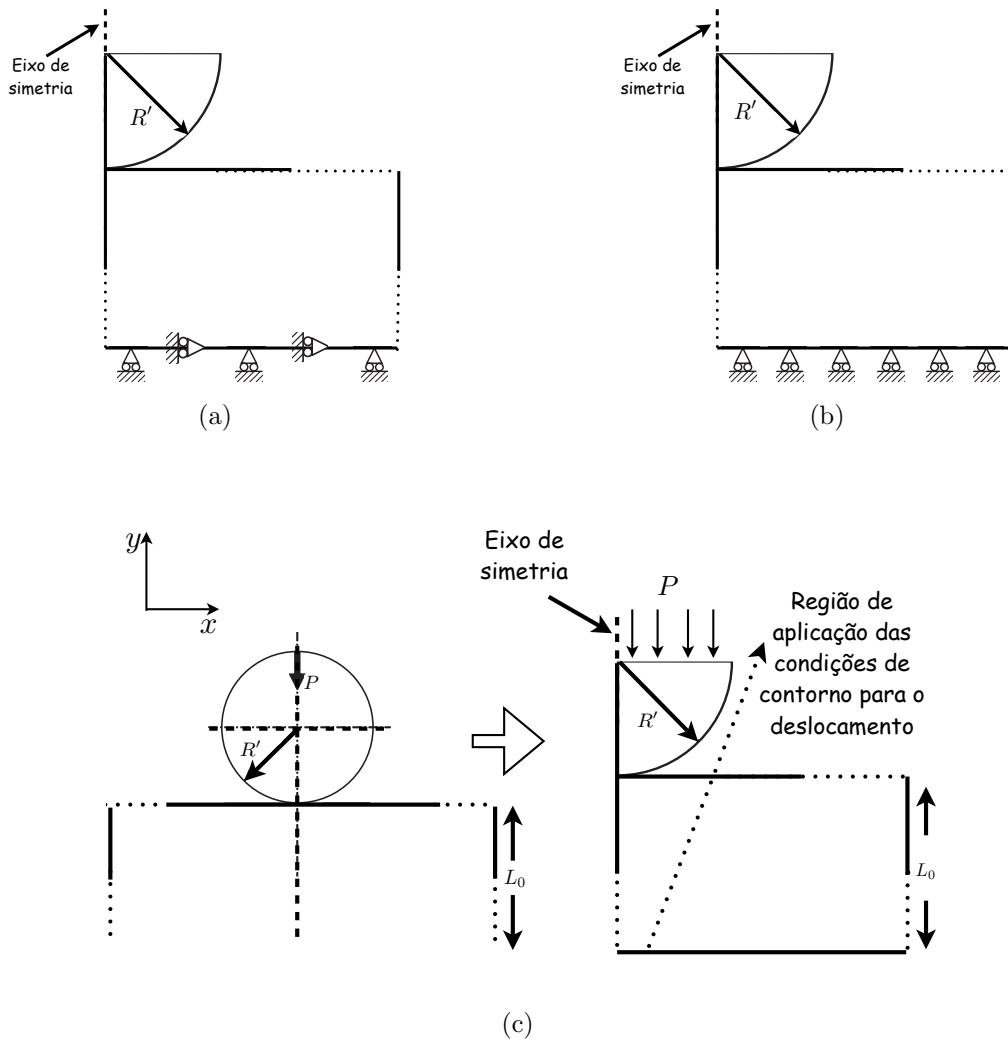


Figura 19: (A) Condição de contorno de deslocamento do tipo bonded. (B) Condição de deslocamento do tipo nobonded. (C) Esquema idealizado para o contato entre uma esfera e um plano utilizando simetria axial.

As condições de contorno utilizadas, estão relacionadas em reproduzir o deslocamento que a base inferior da amostra sofrerá após o contato. Essas condições de contorno são denominadas por, *bonded* e *nobonded*. A condição de contorno do tipo bonded (Figura 19(a)) representa a falta de deslocamento da superfície inferior da amostra, ou seja, a superfície inferior está totalmente ligada sem deslocamento nas direções x e y . A condição

de contorno nobonded (Figura 19(b)) reproduz a condição em que apenas existe deslocamento na direção x , restringindo o movimento em y . Essas condições de contorno também serão aplicadas ao contato entre um indentador do tipo cônico e uma superfície plana.

Durante o processo de modificação do modelo de Hertz, curvas que relacionam a força normal imprimida sobre a amostra pelo indentador e a indentação correspondente a essa força são analisadas para diferentes valores de L_0 . Devido a falta de relação analítica entre a força e a indentação para um dos modelos de contato (indentador cônico), as curvas de força por indentação δ para diferentes valores de L_0 geradas pelo MEF foram ajustadas numericamente por um polinômio. As constantes intrínsecas do material como módulo de Young (E, E') e razão de Poisson (ν, ν') a priori não são determinadas, mas assumidas.

5 *Simulações Numérica*

5.1 Modelo de Hertz para Espessura Finita: Indentador esférico

O modelo de Hertz tradicional (baseado em materiais de espessuras infinitas) quando utilizado para retirar informações elásticas de materiais em pequena escala, introduz erros pela resposta do substrato (material onde a amostra é fixada) sob a amostra. Sistemas em micro e nano escala são muitos estudados e suas propriedades mecânicas têm sido fundamental em tecnologias de filmes finos [35], possibilitando diversas aplicações em mecânica, elétrica e engenharia biomédica.

A análise de elementos finitos foi utilizada em todas as investigações e os resultados numéricos foram comparados com as previsões do modelo teórico de Hertz para estudar eventuais discrepâncias. O modelo do contato esférico 2-D (Figura 20) foi construído utilizando 5965 elementos do tipo triangular (Figura 18) formado de 8 nós, podendo assim se adaptar melhor a formas irregulares de geometrias sem perder precisão.

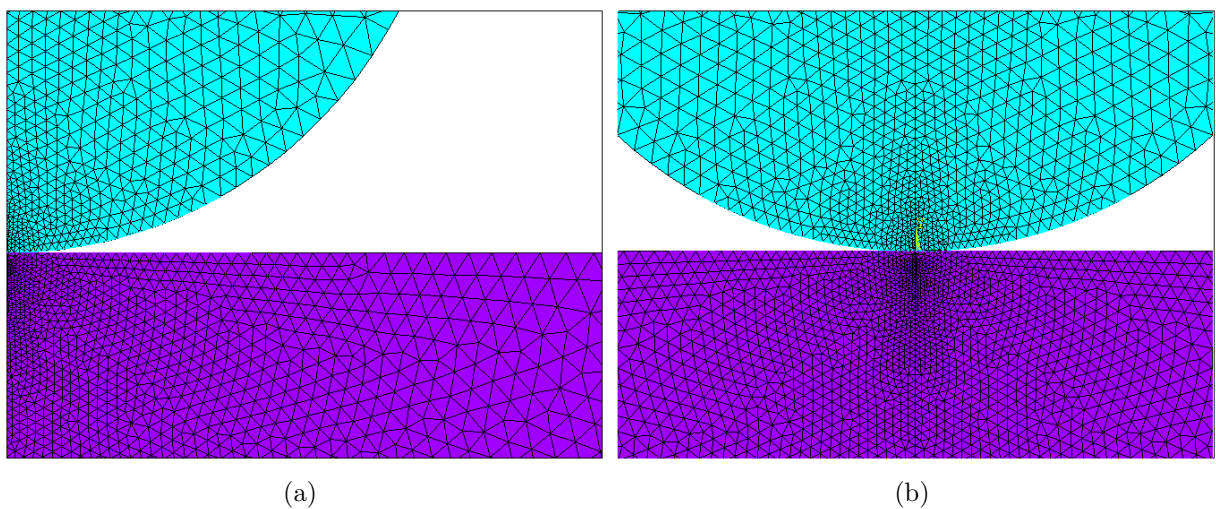


Figura 20: (a) Simetria axial do modelo do contato entre uma esfera e um plano utilizando MEF. (b) Seção transversal do contato entre uma esfera e um plano.

Os elementos que representam o indentador e a amostra possuem cores diferentes indicando que esses materiais são constituídos com propriedades elásticas distintas. No presente trabalho assume-se que o indentador tem um módulo de Young (E') superior ao módulo de Young da amostra (E) em oito ordens de grandeza, garantindo que durante o contato o indentador não sofra deformação. Os coeficientes de Poisson referentes ao indentador ($\nu' = 0.27$) e amostra ($\nu = 0.5$) foram escolhidos dessa forma com o objetivo de estudar o contato entre um indentador de Nitreto de silício (Si_3N_4) e uma amostra praticamente incompressível, porém ainda no regime elástico com $\nu = 0.4999$. A força P foi aplicada em 50 passos a fim de obter pequenos valores de forças no início da deformação e assim capturar as curvas de força por indentação e pressão de contato por distância radial do ponto de contato.

5.2 Resultados

Nos gráficos de grandezas adimensionais (Figura(21)) tem-se uma comparação entre a relação *força-indentação* e o perfil da superfície de contato obtido pelo modelo tradicional de Hertz e o modelo de elementos finitos. Observa-se que o MEF reproduz perfeitamente o contato *Hertziano* para uma amostra de espessura L_0 . Os campos correspondentes a

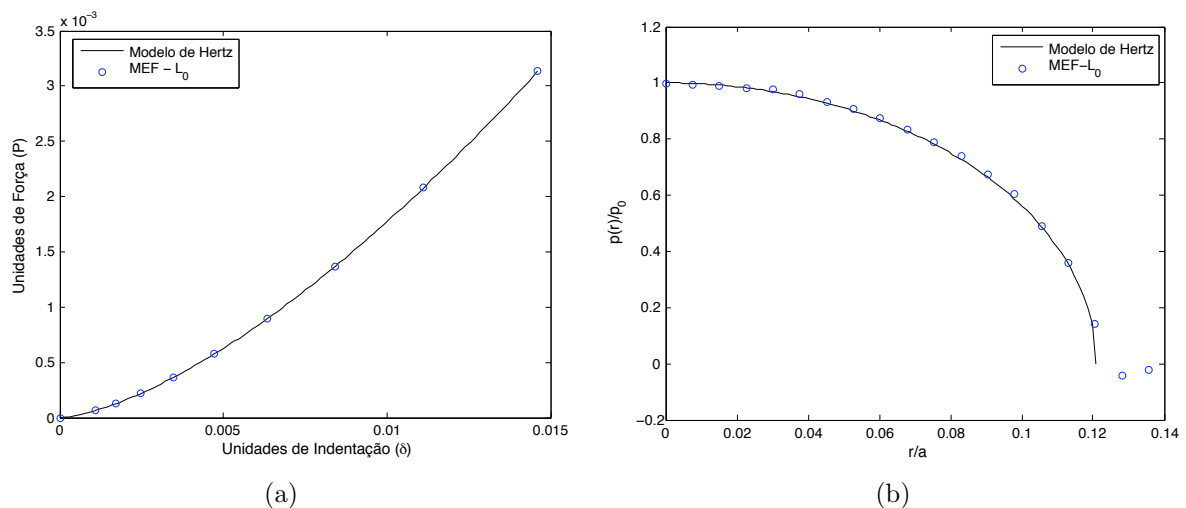


Figura 21: Resultados (a) Comparativo entre as curva de força por indentação obtidas pelo MEF e o modelo de Hertz para o contato de um indentador esférico. (b) Comparativo do perfil da superfície de contato obtido pelo MEF e modelo de Hertz para o contato de um indentador esférico.

natureza do contato localizado entre uma esfera e um plano são mostrados na Figura (22). A cor azul representa a região de maior tensão (Figuras 21(a), 21(b)) e essa região se localiza próximo a área de contato. Na Figura(21(b)) a cor azul representa a região

que sofre maior deformação, onde a região próxima ao contato se desloca em mesma quantidade que o indentador.

A medida que a espessura da amostra diminui alguns comportamentos físicos ligados as diferentes condições de contorno atribuidas a amostra não são considerados pelo modelo de Hertz tradicional. A Figura 23 mostra a mudança de comportamento da relação *força-*

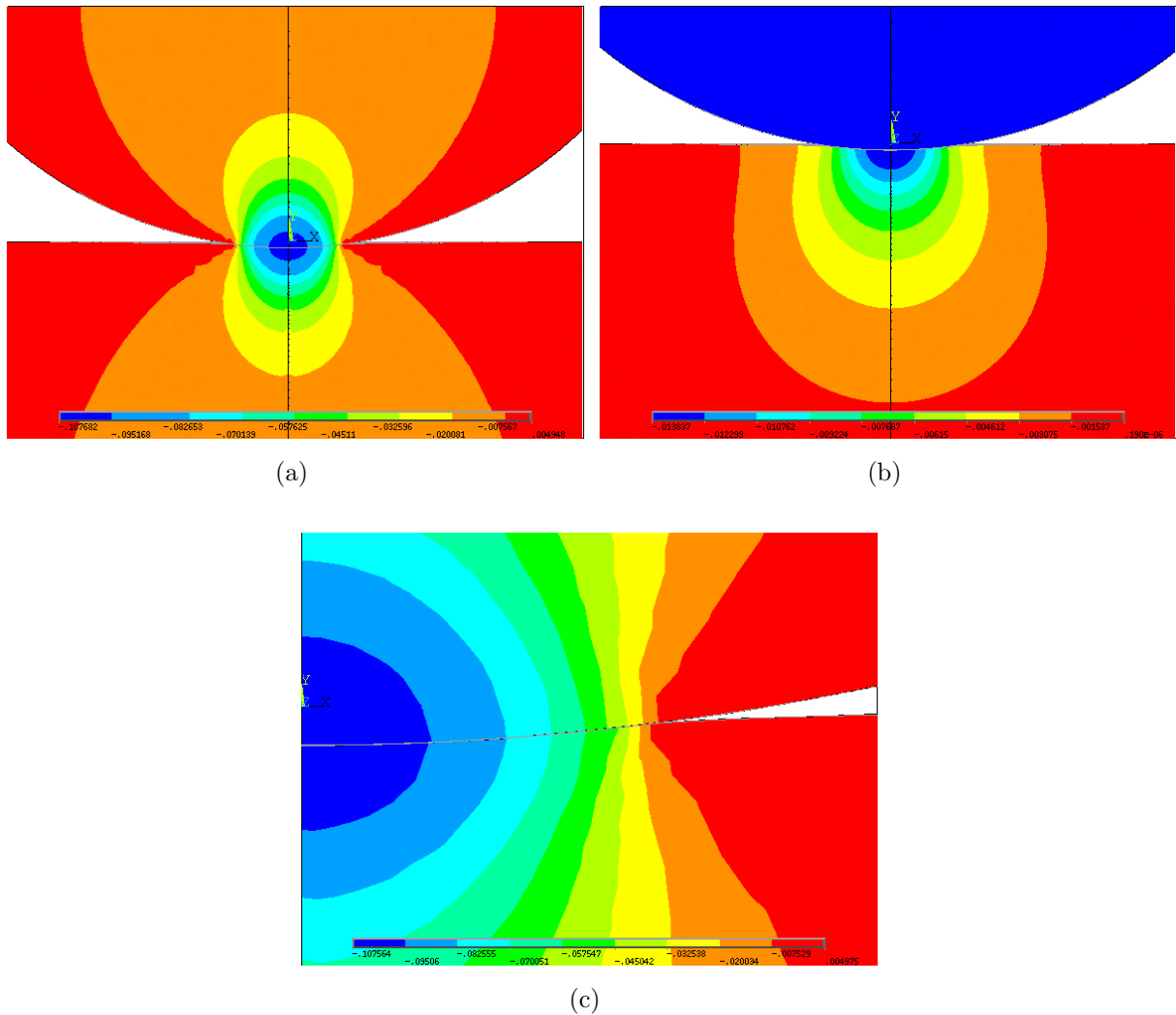


Figura 22: Simulação (a) Linhas do campo de tensão (σ_y) na direção(y) característica da natureza do contato. (b) Campo de deformação (u_y) na direção (y). (c) Perfil da superfície de contato e campo de tensão (σ_y) próximo ao ponto de contato.

indentação com a variação da espessura da amostra para as condições de contorno *bonded* e *nobonded*, onde observa-se um afastamento da curvas em relação a curva referente ao modelo de Hertz. Para a condição de contorno do tipo *bonded* (Figura 23(a)) tem-se valores de indentações menores em comparação a condição de contorno do tipo *nobonded* (Figura 23(b)), ou seja, quanto menos espessa a amostra for, menos o indentador esférico penetra para uma mesmo valor de força P . A condição de contorno *nobonded* permite que

a base inferior da amostra sofra um deslocamento cisalhante na direção y (Figura 19(b)) em relação ao substrato, permitindo uma acomodação maior do material que constitui da amostra nesta direção durante a deformação. Por isso a condição de contorno nobonded permite um intervalo de deformação maior (na curva *força-indentação*) em comparação a condição de contorno bonded. A Figura 23(c) mostra o comportamento de deformação para as condições de contorno bonded e nobonded para uma amostra com espessura de $11\%L_0$.

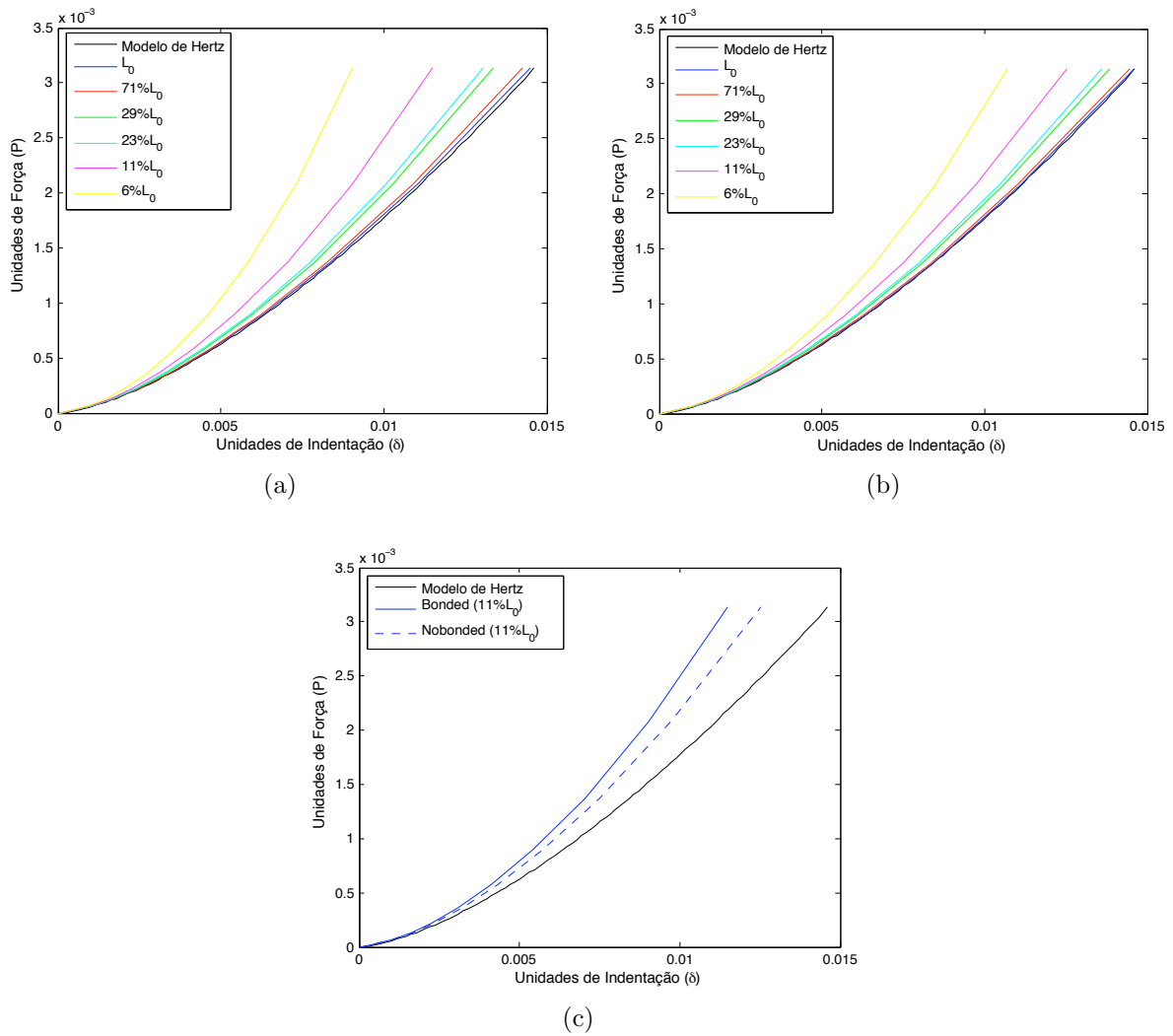


Figura 23: Resultados (a) Gráfico de *força-indentação* para a condição de contorno do tipo bonded. (b) Gráfico de *força-indentação* para a condição de contorno do tipo nobonded. (c) Comparativo entre o processo de deformação de uma amostra com espessura de $11\%L_0$ para as condições de contorno bonded e nobonded.

O perfil da superfície de contato também é alterado com a mudança da espessura da amostra e espera-se fisicamente que o raio de contato a diminua para uma amostra de espessura pequena, pois a medida que a espessura diminui os graus de liberdade suscetíveis

a deformação diminui.

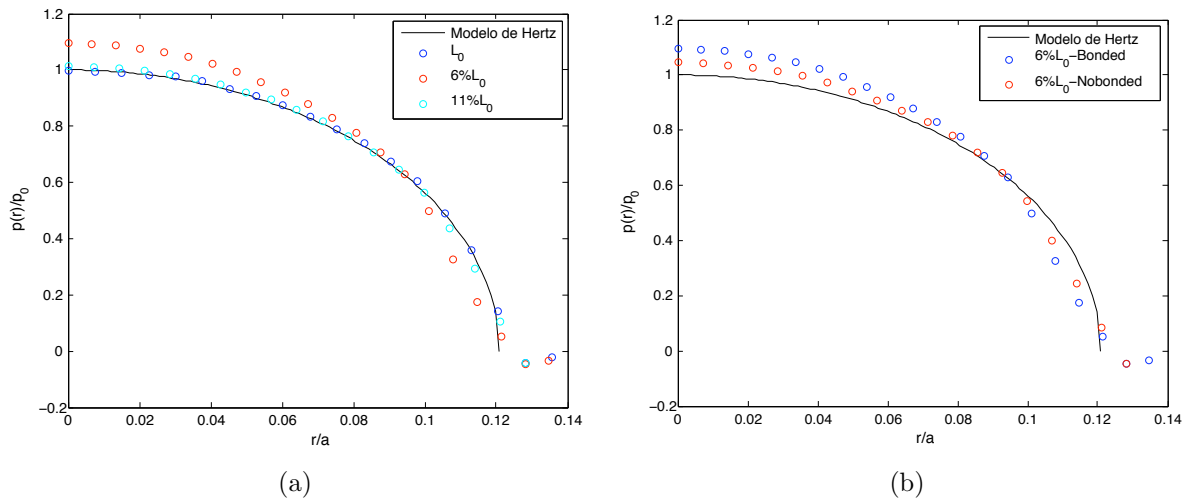


Figura 24: Resultados (a) Modificação do perfil do contato com a espessura da amostra para a condição de contorno bonded. (b) Perfil de contato característico para as condições de contorno bonded e nobonded.

O gráfico 24(a) mostra uma diminuição do raio de contato relacionada com a variação da espessura da amostra e esse comportamento vem acompanhado de um aumento na pressão. Esse aumento de pressão é necessário para compensar a diminuição do raio de contato, mantendo assim o valor da força P constante. No gráfico 24(b) compara-se o perfil do contato para as condições de contorno bonded e nobonded em um amostra de espessura $6\%L_0$. O raio de contato para o sistema (contato esfera-plano) com condição de contorno bonded é menor em comparação com a condição de contorno nobonded, pois ele permite um valor maior de deformação para um mesmo valor de força P .

O modelo de elementos finitos (MEF) consegue reproduzir perfeitamente o comportamento das linhas de tensões na superfície inferior da amostra como mostra a Figura 25. Antes de atingir à superfície inferior da amostra, as linhas de tensões durante o processo de deformação têm componentes em todas as direções (na seção transversal essas componentes estão presentes nas direções x e y). A condição de contorno nobonded permite a componente x da tensão gerar um deslocamento da amostra na direção x . Esse deslocamento acontece até que o equilíbrio se estabelece e apenas a contribuição da componente y da tensão permanece, fazendo com que as linhas de tensões cheguem de maneira perpendicular a superfície inferior da amostra (Figura 25(a)). Para o caso bonded (Figura 25(b)), as tensões nas direções x e y não conseguem gerar deslocamento devido a condição imposta sobre a amostra e permanecem com as duas componentes na parte inferior da amostra.

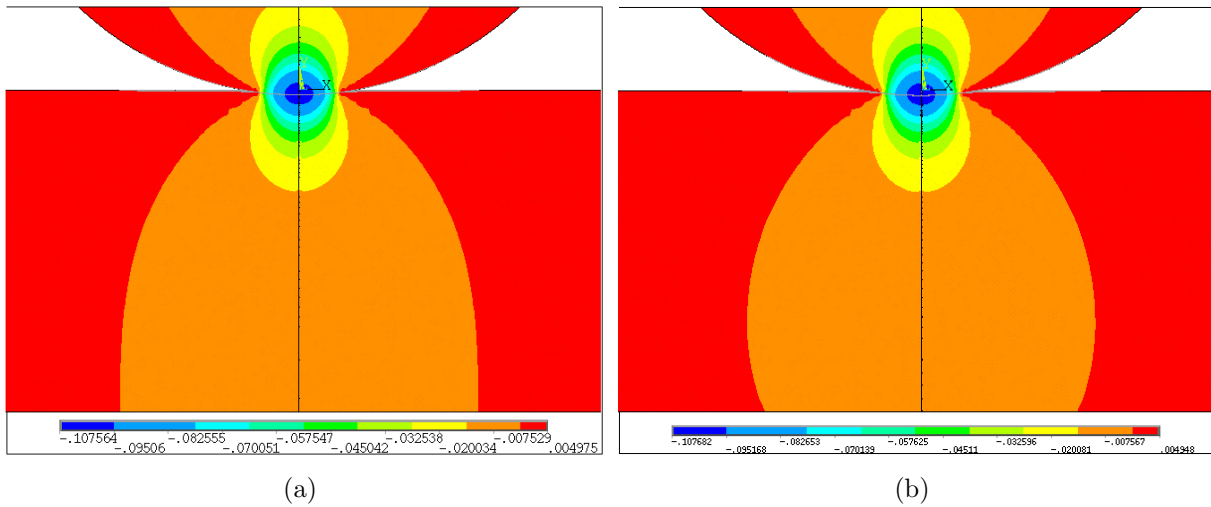


Figura 25: Simulação (a) Comportamento das linhas de tensão na parte inferior da amostra para a condição de contorno nobonded. (b) Comportamento das linhas de tensão na parte inferior da amostra para a condição de contorno bonded.

5.2.1 Proposta de modificação do modelo de Hertz para o contato esférico

As propriedades mecânicas de materiais isotrópicos e linearmente elásticos considerados neste trabalho podem ser completamente descritos por dois parâmetros intrínsecos para uma certa geometria específica, o módulo de Young E [N/m^2] e a razão de Poisson ν . Devido a natureza complexa do contato a força depende dos seguintes parâmetros $F(\delta, R', h, E, \nu)$, onde (E, ν) são parâmetros da amostra que devem ser extraídos, e R e h são o raio de curvatura do indentados e a espessura da amostra (parâmetros que levam informações da geometria do contato). De acordo com a equação 3.11b espera-se que a força se relacione com esse parâmetros de maneira não linear da seguinte forma,

$$F = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R^{1/2} \delta^{3/2} [1 + A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 \dots] \quad (5.1)$$

onde o valor ξ deve ser função dos parâmetros (δ, h, R') de tal forma quando $h \rightarrow \infty$ a expressão 5.1 reproduza a modelo de Hertz.

O trabalho [10] desenvolveu analiticamente uma expressão análoga a equação 5.1 modificando a expressão A.19 escrevendo-a em termos das funções de Green [5] para caracterizar a deformação da superfície de contato devido a uma força pontual. Esse trabalho analítico usou para o material da amostra $\nu = 0.5$ e as expressões modificada para as condições de contorno bonded e nobonded têm a seguinte forma:

Bonded

$$F = \frac{16E}{9} R^{1/2} \delta^{3/2} [1 + 1.333\chi + 1.283\chi^2 + 0.769\chi^3 + 0.0975\chi^4] \quad (5.2)$$

Nobonded

$$F = \frac{16E}{9} R^{1/2} \delta^{3/2} [1 + 0.884\chi + 0.781\chi^2 + 0.386\chi^3 + 0.0048\chi^4] \quad (5.3)$$

onde $\chi = (R\delta)^{1/2}/h$, R e E representam o raio do indentador e módulo de Young da amostra. As figuras 26 mostram a relação $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtida pelo o método de elementos finitos (MEF) para diferentes valores de h , onde $\zeta_{Hertz} = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R^{1/2} \delta^{3/2}$ é o termo natural Hertziano para o indentador esférico.

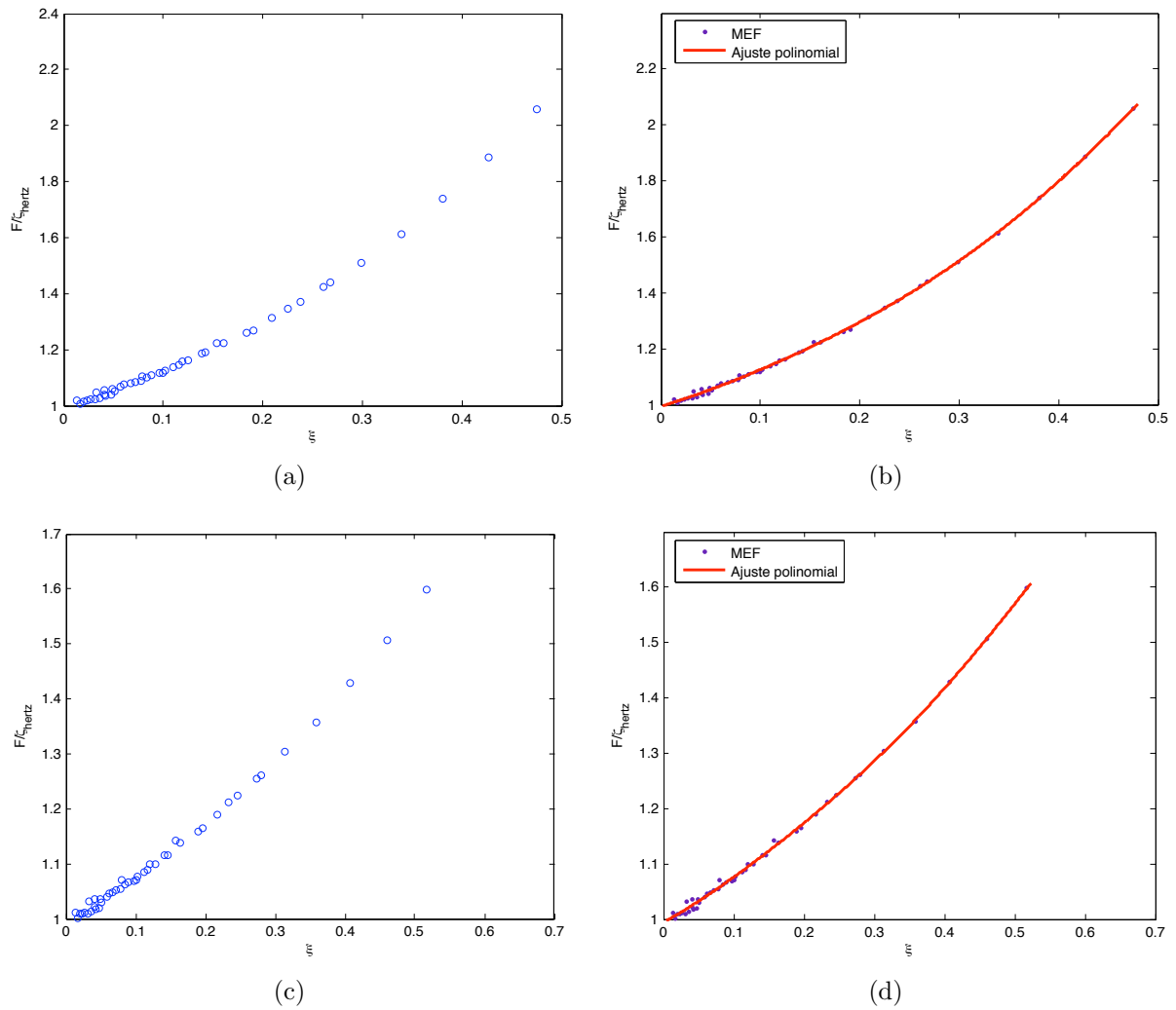


Figura 26: Resultados (a) e (c) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para as condições de contorno bonded e nobonded. (b) e (d) Ajustes polinomiais de 5ª ordem para as relações $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ para os caso bonded e nobonded.

As Figuras (26(a), 26(c)) mostram o comportamento de F/ζ_{Hertz} para diferentes valor de espessura h , onde $F/\zeta_{Hertz} = 1$ é obtido para pequenos valores de ξ , ou seja, para valores grandes de h . Nas figuras (26(b), 26(d)) tem-se o ajuste utilizando um polinômio de 5ª obtendo as expressões corrigidas pelo MEF para os casos bonded e nobonded dadas por:

$$F = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R^{1/2} \delta^{3/2} [0.9935 + 1.085\xi + 2.727\xi^2 + (-6.737)\xi^3 + 21.74\xi^4 + (-18.7)\xi^5] \quad (5.4)$$

Nobonded

$$F = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R^{1/2} \delta^{3/2} [0.9941 + 0.6815\xi + 1.779\xi^2 + (-5.767)\xi^3 + 13.16\xi^4 + 9.953\xi^5] \quad (5.5)$$

onde $\xi = (R\delta)^{1/2}/h$.

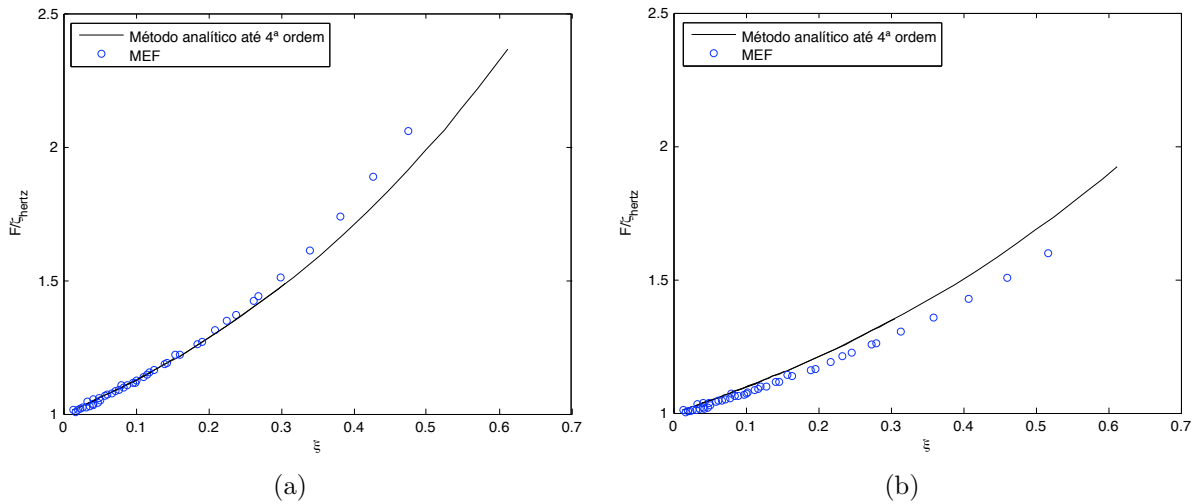


Figura 27: Resultados (a) Comparação entre o ajuste analítico e MEF para a condição de contorno bonded. (b) Comparação entre o ajuste analítico e MEF para a condição de contorno nobonded.

5.3 Problema do contato para o indentador cônico

A modelagem do contato entre um indentador do tipo cônico e um plano utilizando o MEF foi desenvolvida da mesma forma do contato esférico. Os módulos de elasticidades (módulo de Young) do indentador e amostra foram assumidos com oito ordens de grandeza de diferença de tal forma que o indentador não se deforme durante o processo de indentação. Os coeficientes de Poisson do indentador ($\nu' = 0.27$) e amostra ($\nu = 0.499$) foram escolhidos para representar o contato entre um indentador cônico de Nitreto de silício (Si_3N_4) e uma amostra praticamente incompressível.

Dois geometrias para o indentador cônico foram analisadas e estão representadas na Figura 28 para $\alpha = 80^\circ$ e $\alpha = 68^\circ$ de acordo com o esquema 3.1.3 apresentado na seção 13.

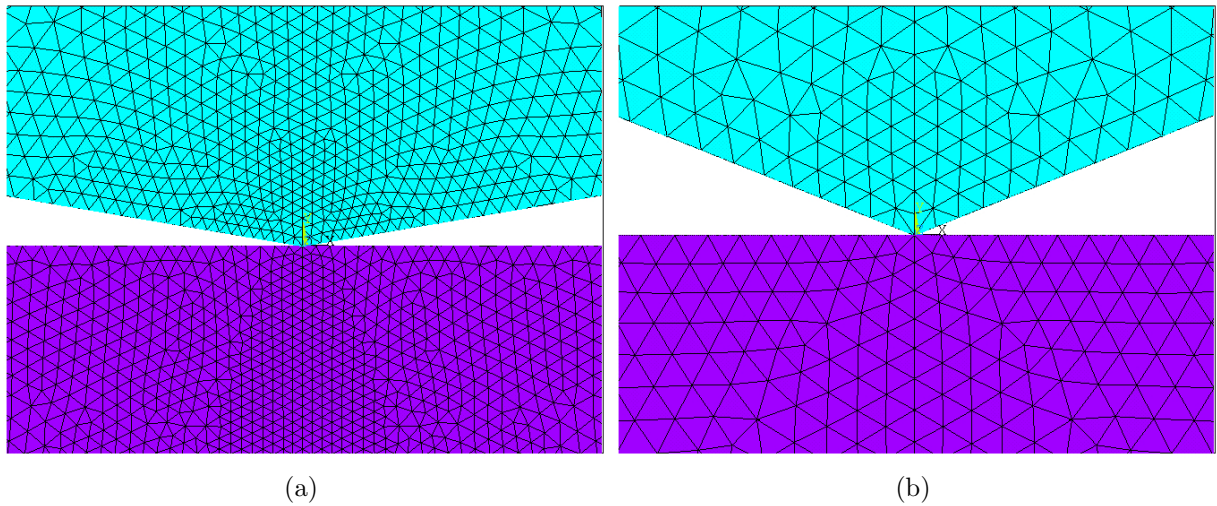


Figura 28: (a) Contato cônico ($\alpha = 80^\circ$) modelado pelo MEF com 47288 elementos do tipo triangular. (b) Contato cônico ($\alpha = 68^\circ$) modelado pelo MEF com 10149 elementos do tipo triangular.

Os dados de força e deformação foram obtidos submetendo o sistema a uma força P (Figura 19(c)) dividida em 50 passos a fim de obter inicialmente pequenos valores de forças e assim obter uma boa convergência pelo método de elementos finitos. O comportamento da deformação produzida por uma força P é mostrado na Figura 29.

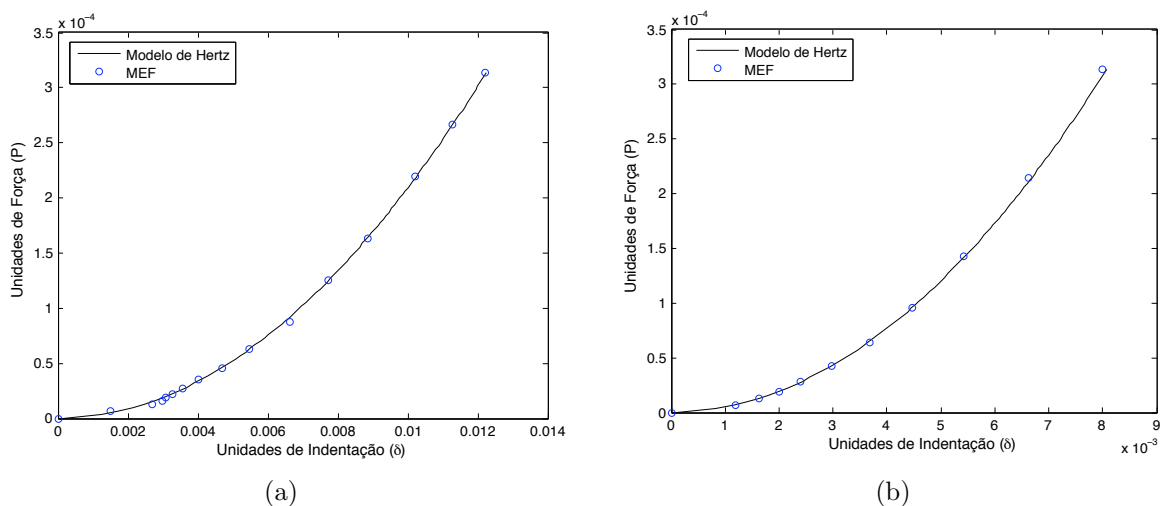


Figura 29: Resultados (a) Curvas de força-indentação obtidas para um cone com $\alpha = 68^\circ$ pelo MEF em comparação com o modelo de Hertz. (b) Curvas de força-indentação obtidas para um cone com $\alpha = 80^\circ$ pelo MEF em comparação com o modelo de Hertz.

Observa-se que os valores numéricos (MEF) para pequenos valores de indentações são

mais instáveis para o caso em que $\alpha = 68^\circ$. Já os valores são mais comportados (seguem mais estáveis a curva teórica) para $\alpha = 80^\circ$. Isso deve-se a problemas de convergência devido a geometria do cone (contato não é tão suave quanto o da esfera) onde ângulos pequenos de α geram valores muito grandes de tensões nas primeiras indentações. Assim menos área de contato terá o início do processo de deformação, precisando valores maiores de α para garantir uma área de contato inicialmente e uma melhor convergência dos valores numéricos.

As linhas de tensões e deformações para o contato cônico são mostradas na Figura 30. As linhas assumem formas semelhantes ao contato esférico tendo maiores valores bem próximos ao ponto de contato representados pela cor azul.

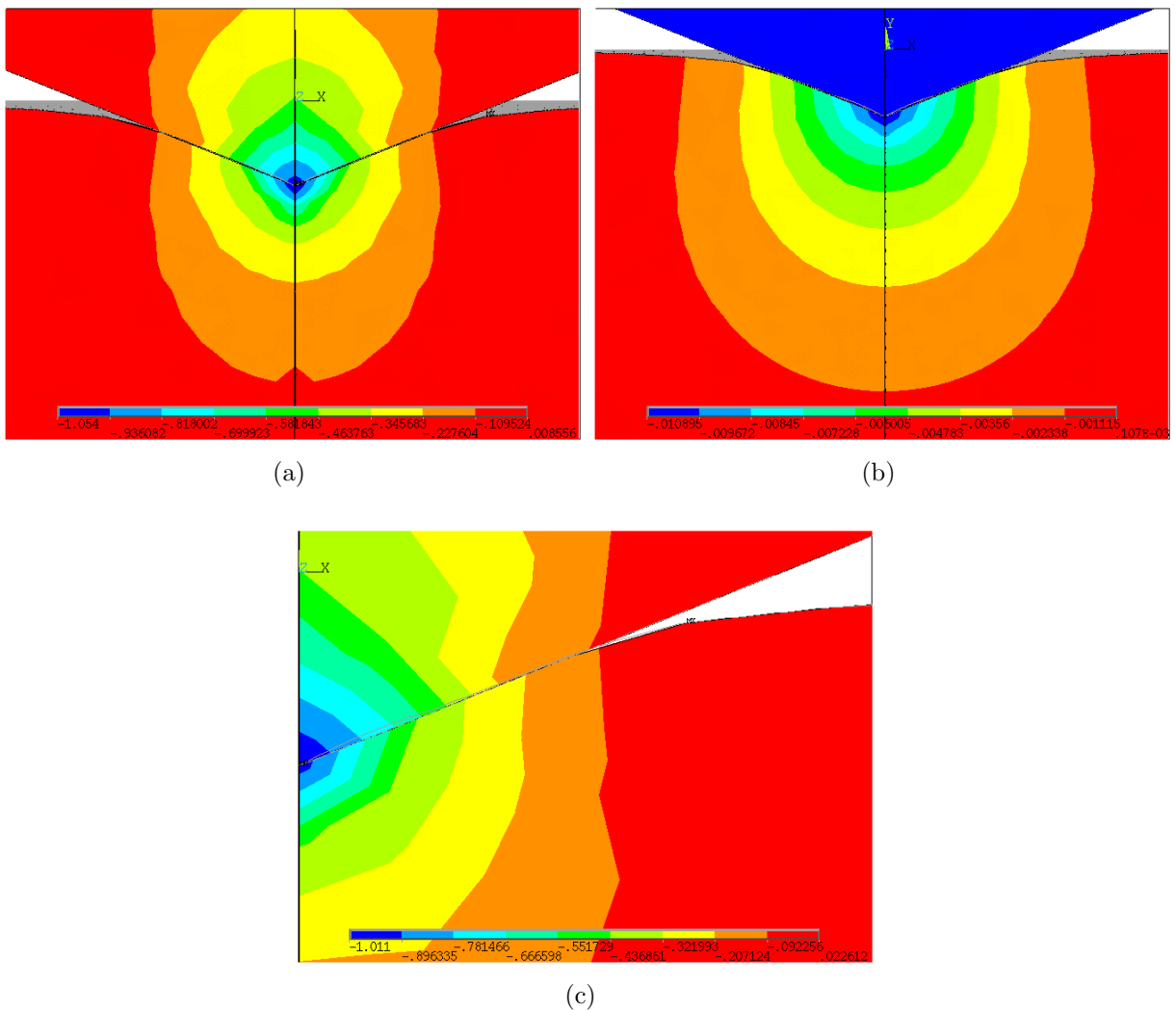


Figura 30: Simulação (a) Linhas do campo de tensão (σ_y) na direção(y) característica da natureza do contato. (b) Campo de deformação (u_y) na direção (y). (c) Perfil da superfície de contato e campo de tensão (σ_y) próximo ao ponto de contato.

O comportamento das curvas de força-indentação com a mudança de espessura e

condições de contorno da amostra é apresentado na Figura 31. Esses comportamentos são semelhante ao comportamento do contato esférico, onde pequenos valores de indentações são permitidos para um mesmo valor de força P com o decréscimo de espessura da amostra (Figuras 30(c),30(b)). Em relação as condições de contorno bonded e nobonded (Figura 31(a)), o comportamento (força-deformação) continua sendo o mesmo, onde maiores deformações são permitidas para a condição de contorno nobonded para um mesmo valor de espessura h e de força P .

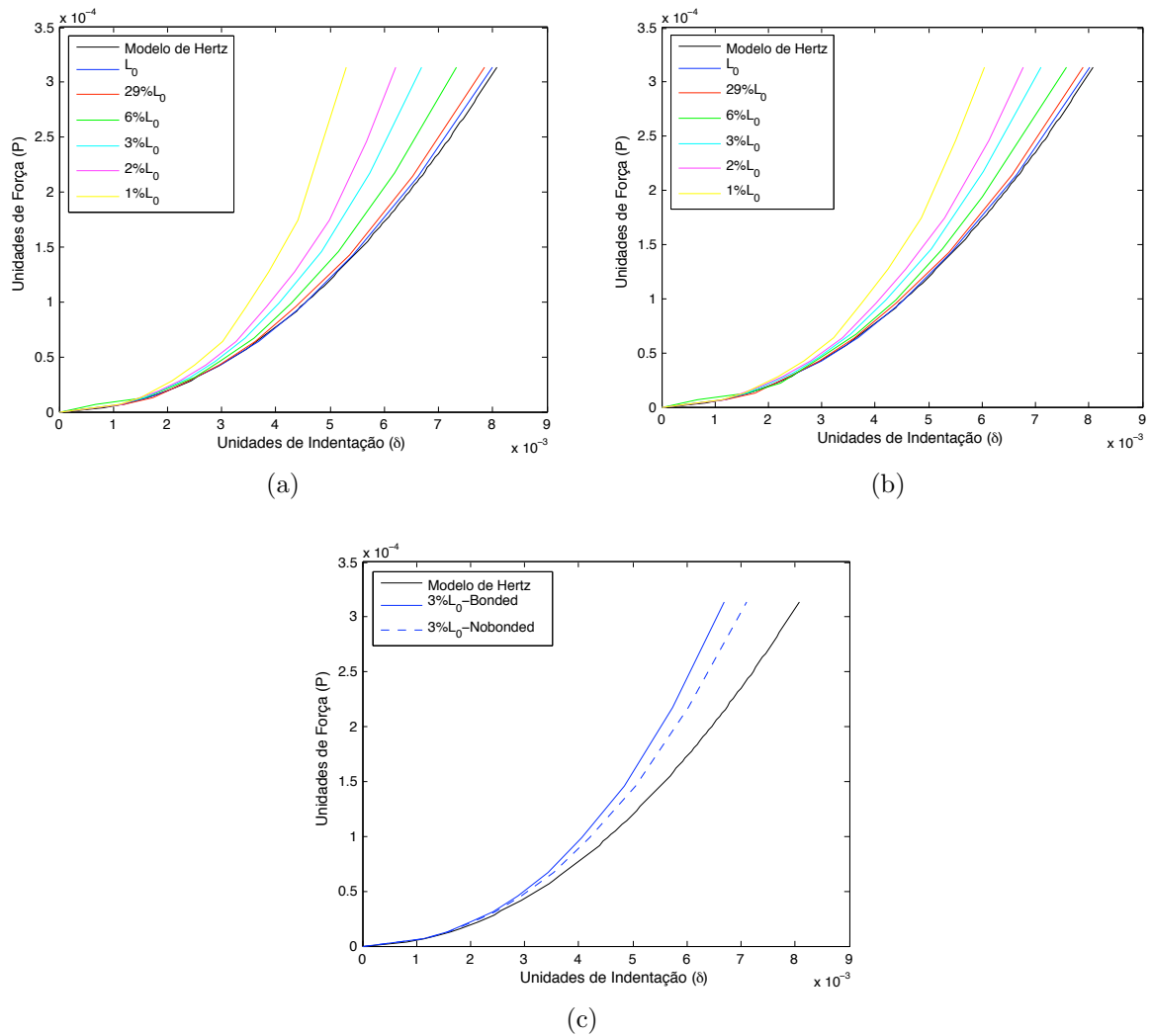


Figura 31: Resultados (a) Gráfico de *força-indentação* para a condição de contorno do tipo bonded para $\alpha = 80^\circ$. (b) Gráfico de *força-indentação* para a condição de contorno do tipo nobonded para $\alpha = 80^\circ$. (c) Comparativo entre o processo de deformação de uma amostra com espessura de $3\%L_0$ para as condições de contorno bonded e nobonded.

5.3.1 Proposta de modificação do modelo de Hertz para o contato cônico

Como não se tem uma expressão analítica para a correção do modelo cônico de contato, o método de elementos finitos (MEF) mostrou-se um método útil na modificação desse tipo de contato para amostras com pequenas espessuras. Na seção 5.2.1 foi comentado sobre a complexidade do contato e a relação não linear entre a força e os parâmetros geométricos. De acordo com a equação 3.14, vamos investigar a priori a correção para o contato cônico utilizando a seguinte expressão:

$$F = \zeta_{Hertz} [1 + A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 \dots] \quad (5.6)$$

onde $\zeta_{Hertz} = \frac{2E^*}{\pi} \tan(\alpha)\delta^2$ e $\xi = \delta/h$.

Nas figuras 32 a relação $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ foi construída para os cones com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$ sob as condições de contorno bonded e nobonded e utilizando um intervalo de espessura h que vai de $29\%L_0$ à $3\%L_0$. Essa relação para as condições de contorno bonded e nobonded é mostrada nas Figuras (32(a), 32(b)), onde percebe-se curvas bastante distintas para cada tipo de geometria e uma grande instabilidade numérica para pequenos valores de ξ para a geometria $\alpha = 68^\circ$.

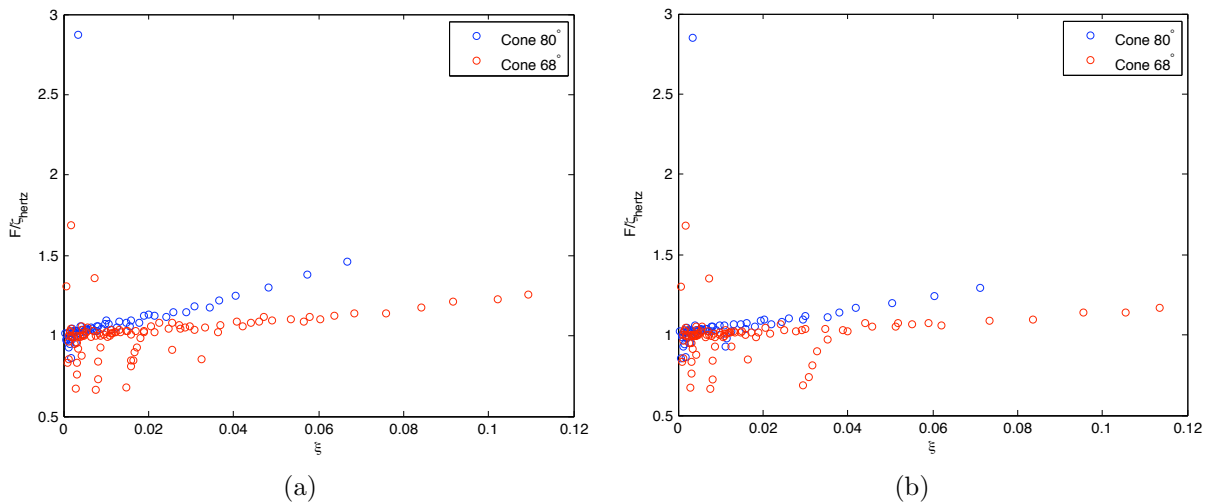


Figura 32: Resultados (a) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno bonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$. (b) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno nobonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$.

Devido a geometria $\alpha = 80^\circ$ apresentar melhor resultado numérico, um ajuste utilizando um polinômio de 3^a para essa geometria com as condições de contorno bonded e

nobonded é apresentada na Figura 33. A relação $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ foi obtida em um intervalo de espessura h que vai de L_0 à $1\%L_0$ obtendo a seguinte correção.

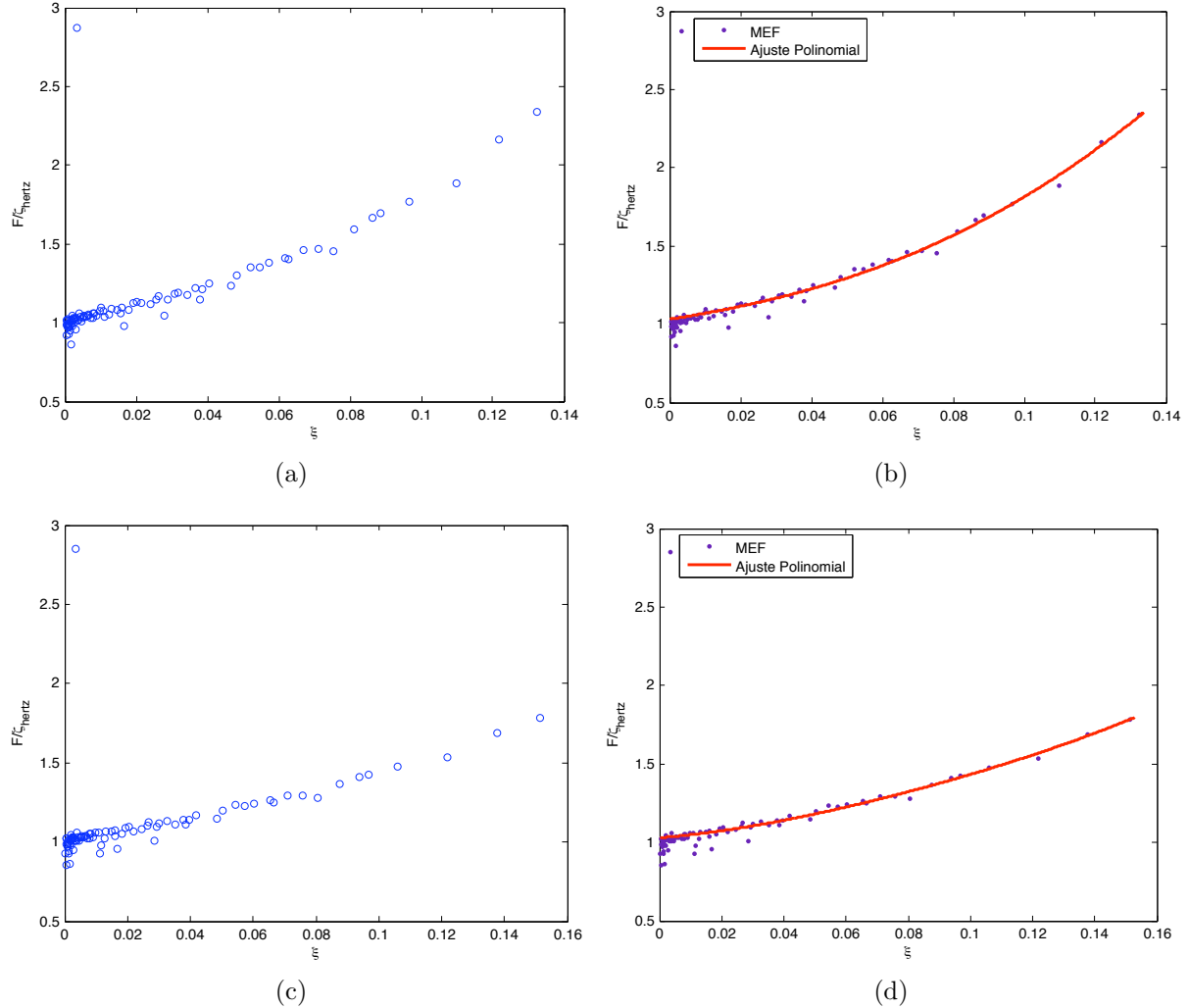


Figura 33: Resultados (a) e (c) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para as condições de contorno bonded e nobonded. (b) e (d) Ajustes polinomiais de 3ª ordem para as relações $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ para os caso bonded e nobonded.

Bonded

$$F = \frac{2E^*}{\pi} \tan(\alpha)\delta^2 [1.032 + 3.435\xi + 29.58\xi^2 + 139.6\xi^3] \quad (5.7)$$

Nobonded

$$F = \frac{2E^*}{\pi} \tan(\alpha)\delta^2 [1.029 + 1.796\xi + 25.91\xi^2 + (-33.28)\xi^3] \quad (5.8)$$

Utilizando a equação 5.6 com uma modificação onde $\xi = \tan(\alpha)\delta/h$, ou seja, colocando a informação do raio do contato cônico na expansão, assim observa-se um padrão bem

semelhante (Figura 34) entre as relações $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ para os cones com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$, dessa forma pode-se encontrar uma expressão ajustada para as duas geometrias de forma geral como foi desenvolvida para o ajuste esférico.

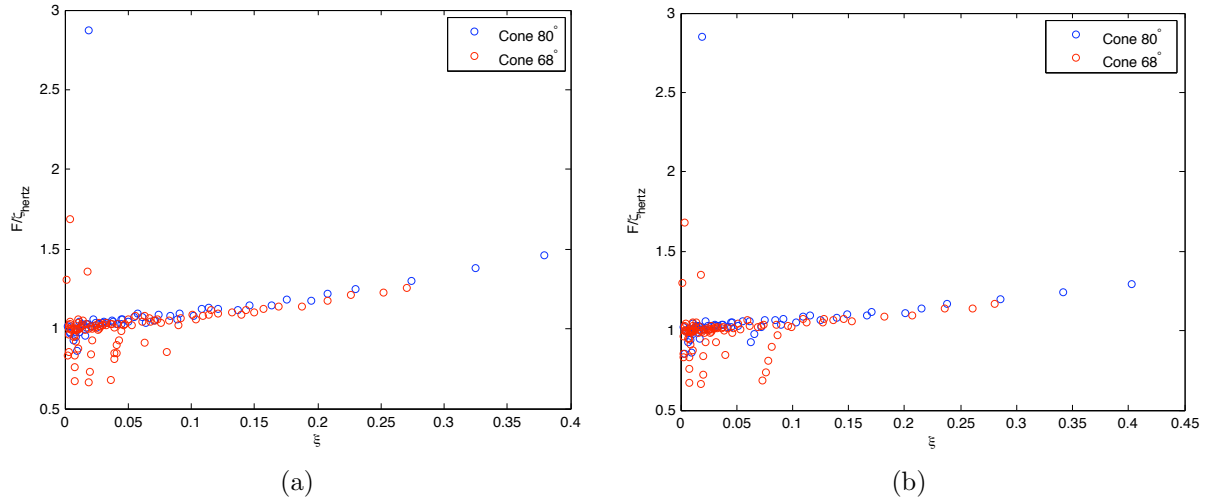


Figura 34: Resultados (a) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno bonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$. (b) Curvas $(F/\zeta_{Hertz} - \xi)$ obtidas pelo MEF para a condição de contorno nobonded com $\alpha = 68^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$.

Utilizando a geometria com $\alpha = 80^\circ$ devido um melhor comportamento numérico tem-se:

Bonded

$$F = \frac{2E^*}{\pi} \tan(\alpha) \delta^2 [1.032 + 0.6058\xi + 0.92\xi^2 + 0.7661\xi^3] \quad (5.9)$$

Nobonded

$$F = \frac{2E^*}{\pi} \tan(\alpha) \delta^2 [0.9861 + 0.8744\xi + (-0.7397)\xi^2 + 0.9621\xi^3] \quad (5.10)$$

5.4 Conclusões e Perspectivas

Observou-se que o método de elementos finitos (MEF) é uma ferramenta fundamental no estudo de deformações de materiais com características diferentes como tipos de materiais e geometrias complexas. Os resultados (Capítulo-5) mostraram que as condições de contorno e a espessura da amostra são essenciais no processo de deformação dos indentadores e que o perfil do contato é semelhante tanto para a esfera quanto o cone. Para a condição de contorno bonded mostrada na Figura 23(a), tem-se valores de indentações menores em comparação a condição de contorno do tipo nobonded (Figura 23(b)), ou seja, quanto menos espessa a amostra for, menos o indentador esférico penetra para uma mesmo valor de força P . A condição de contorno nobonded permite que a base inferior da amostra sofra um deslocamento na direção y em relação ao substrato, permitindo uma acomodação maior do material que constitui da amostra nesta direção durante a deformação. Por isso a condição de contorno nobonded permite um intervalo de deformação maior (na curva *força-indentação*) em comparação a condição de contorno bonded. Os dados obtidos de simulações computacionais de nanoindentações permitiu observar que os ajustes numéricos das curvas de *força-indentação* do indentador esférico segue a mesma tendência do trabalho analítico no qual foi comparado, concluindo que a utilização do MEF para a modificação numérica do contato cônico é viável e assim proporcionar uma interpretação mais confiável as curvas de força e assim possibilitar um melhor entendimento dos efeitos do substrato em nanoindentações.

A correção das curvas de força é um passo fundamental na interpretação de medidas de nanoindentações realizadas com o AFM. Tais medidas são utilizadas na investigação das propriedades mecânicas de diversas amostras, como, por exemplo, células e filmes de petróleo. Entretanto, a análise teórica dessas amostras somente em regime elástico não é suficiente, pois estas têm comportamentos físicos que vão além do regime elástico como, viscosidade e plasticidade, existindo assim a necessidade de introduzir tais comportamentos nos ajustes das expressões.

Referências

- [1] **H. Hertz**, “*On the contact of elastic solids*”, J. Reine Angew. Math. **92**, pp. 156 – 171, (1881). Translated and reprinted in English in Hertz’s Miscellaneous Paper, Macmillan & Co., London, (1896), Ch 5.
- [2] **H. Hertz**, “*On hardness*”, Verh. Ver. Beförderung Gewerbe Fleisses **61**, pp. 410, (1882). Translated and reprinted in English in Hertz’s Miscellaneous Paper, Macmillan & Co., London, (1896), Ch 6.
- [3] **J. Boussinesq**, *Application des Potentiels a l’Etude de l’Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*, Gauthier-Villars, Paris (1885). Discutido em **S. Timoshenko** e **J.N. Goodier**, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, **11**, pp. 398–402, (1970). C.R. Flamant, Paris, **114**, pp. 1465, (1892).
- [4] **Sneddon, I. N.**, *Fourier Transforms*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, pp. 450–486, (1951).
- [5] **L. D. Landau and E. M. Lifshitz**, *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., Pergamon Press Ltd., Oxford, U.K.
- [6] **Popov, G. I.**, *The contact problem of the theory of elasticity for the case of a circular area of contact*, Prikl. Mat. Mekh. **26**, pp. 152–164, (1962).
- [7] **Tu, Y.-O., and D. C. Gazis**, *The contact problem of a plate pressed between two spheres*. Trans. ASME J. Appl. Mech. **31**, pp. 659–666, (1964).
- [8] **Aleksandrov, V. M.**, *Asymptotic methods in contact problems of elasticity theory*. Prikl. Mat. Mekh. **32**, pp. 672–683, (1968).
- [9] **Aleksandrov, V. M.**, *Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer*. Prikl. Mat. Mekh. **33**, pp. 61–73, (1969).
- [10] **Emilios K. Dimitriadis, Ferenc Horkay, Julia Maresca, Bechara Kachar and Richard S. Chadwinck**, *Determination of Elastic Moduli of Thin of Soft Material Using the Atomic Force Microscope*, Biophysical Journal, **82**, (2002).
- [11] **C. Lee et al.**, Science 321, 385(2008).
- [12] **Rebelo, L. M.**, *Estudo Mofológico e das Propriedades Elásticas de plaquetas Humanas por Microscopia de Força Atômica*. Dissertação apresentada no departamento de física da Universidade Federal do Ceará-UFC-2007.
- [13] **Yamazaki, D., Kurisu, S., Takenawa, T.**, *Regulation of cancer cell mobility through action reorganization*, Cancer Sci. **96**, pp. 379 – 386, (2005).

- [14] **Rao, J., Li, N.**, *Microfilament actin remodeling as a potential target for cancer drug development*, *Curr. Cancer Drug Targ.*, **4**, pp. 267 – 283, (2004).
- [15] **Rugar, D., Hansma, P. K.**, *Atomic Force Microscopy*, *Physics Today*, **43**, 23 – 30, (1990).
- [16] **Burnham, N. A., and R. J. Colton.**, *Measuring the nanomechanical properties and surface forces of materials using the AFM*. *J. Vacuum Sci Technol*, **A7**, pp. 2906–2913, (1989).
- [17] **Cross, E. C., Jin, Y., Rao, J., Gimzewski, J. K.**, *Nanomechanical analysis of cells from cancer patients*, *Nature Nanotechnology*, **2**, pp. 780 – 783, (2007).
- [18] **Jeffrey Berkley, George Turkiyyah, Daniel Berg, Mark Ganter, Suzanne Weghorst**, *Real-Time Finite Element Modeling for Surgery Simulation: An Application to Virtual Suturing*, *Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **10**, pp. 3, (2004).
- [19] **Yongjie Zhang and Chandrajit Bajaj**, *Finite Element Mesh for Cardiac Analysis*, The University of Texas at Austin.
- [20] **Jacob Fish and Ted Belytschko**, *A First Course in Finite Elements*, England, (2007).
- [21] **Alexey Borovkov, Oleg Klyavin and Alexander Michailov**, *Finite Element Modeling and Analysis of Chash Safe Composite Lighting Columns*, St. Petersburg State, Polytechnical University.
- [22] **Martin H. Sadd**, *Elasticity, Theory, Application and numerics*, 2nd Ed., (2009).
- [23] **Morden Plastics Encyclopedia**, Copyright, The McGraw-Hill Companies, (1995).
- [24] **Discher, D. Janmey, P., Wang, Y.**, *Tissue cells feel and respond to the stiffness of their substrate.*, *Science*, **310**, pp. 1139 – 1143, (2005).
- [25] **McKnight, A. I., et al**, *MR elastography of breast cancer: preliminary results*, *AJR Am. J. Roetjenol.*, **178**, pp. 1411 – 1417, (2002).
- [26] **Bercoff, J. et al.**, *In vivo breast tumor detection using transient elastography*, *Ultrasound Med. Biol.*, **29**, pp. 1387 – 1396, (2003).
- [27] **K.L. Johnson**, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.,(1985).
- [28] **S. Timoshenko and J.N. Goodier**, *Theory of Elasticity*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, (1970).
- [29] **Anthony C. Fischer-Cripps**, *Introduction to Contact Mechanics*, 2nd Ed., Springer, (2007).
- [30] **I.N. Sneddon**, *“Boussinesq’s problem for a rigid cone”*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44**, pp. 492–507, (1948).
- [31] **Anthony C. Fischer-Cripps**, *The IBIS Handbook of Nanoindentation*, (2009).

- [32] **Mindlin, R. D.**, *Compliance of Elastic Bodies in Contact*, Journal of Applied Mechanics, v. **16**, n. **3**, pp. 259 – 268, Sep. (1949).
- [33] **Love, A. E. H.**, *The Stress Produced In a Semi – Infinite Solid by Pressure On Part of The Boundary*, Phil. Trans. Royal Society, v. **228**, pp. 377 – 420, Oct. (1929).
- [34] **Love, A. E. H.**, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4nd Ed. New York: Dover Publications, pp. 643, (1944).
- [35] **Shuangbiao Liu, Q. Jane Wang**, *Determination of Young modulus and Poisson ratio for coatings*, Surface & Coatings Technology, **201**, (2007).
- [36] **Sneddon, I. N.**, *The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*, Int. J. Engr. Sci. pp. 3 : 47–57, (1965).
- [37] **Erdogan Madenci, Ibrahim Guven**, *The Infinite Element Method and application in Engineering Using Ansys[®]*, Springer, (2006).
- [38] **Crandall, S. H.**, *Engineering Analysis: A Survey of Numerical Procedures*, McGraw-Hill, New York, (1956).
- [39] **Washizu, K.** et al. *Finite Element Handbook*, v. **1** and **2**, Baitukan, Japan, (1981).
- [40] **Radmacher, M.**, *Imaging soft samples with the atomic force microscope: gelatin in water and propanol*, Biophys. J., **69**, pp. 264–270, (1995).
- [41] **Radmacher, M.**, *From molecules to cells: imaging soft samples with the atomic force microscope*, Science, **257**, pp. 1900–1905, (1992).
- [42] **Radmacher, M.**, *Imaging adhesion forces and elasticity of lysozyme adsorbed on mica with the AFM*, Langmuir, **10**, pp. 3809–3814, (1994).
- [43] **Radmacher, M.**, *Measuring viscoelastic properties of human platelets with the atomic force microscope*, Biophys. J., **70**, pp. 556–567, (1996)
- [44] **Radmacher, M., Fritz, M., Kacher, C. M., Cleveland, J. P., and Hansma, P. K.**, *Measuring the elastic properties of human platelets with the atomic force microscope*, Biophys. J., **70**, pp. 556–567, (1996).
- [45] **Radmacher, M., Fritz, and Hansma, P. K.**, *Measuring the elastic properties of biological materials with the atomic force microscope*, Biophys. J., **68**, pp. A139, (1995).
- [46] **Veeco**, *Force Imaging*, Support Note No. **228**, Rev. E (1999).
- [47] **Veeco Probes**. <https://www.veecoprobes.com/>.
- [48] **Carbon Nanotubes**. http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_nanotube.
- [49] **AFM**, <http://www.freesbi.ch/images/stories/AFM/Figures/afm-schema.png> .

- [50] **Heruberger, M., Dietle, and L. Schalapbach.**, *Mapping the local Young's modulus by analysis of the elastic deformation occurring in atomic force microscopy*, Nanotechnology. **5**, pp. 12–23, (1994).
- [51] **Domke, J., and M. Radmacher.**, *Measuring the elastic properties of thin polymer films with the atomic force microscope*. Langmuir. **14**, pp. 3320–3325, (1998).
- [52] **Yang F.**, *Indentation of an incompressible elastic layer*. Mech Materials. **30**, pp. 275–286, (1998).

APÊNDICE A – Espaço elástico semi-infinito (Half-space)

A.1 Funções potencial de Boussinesq and Cerruti

A descrição matemática de campos de indentação de tensão associado com particulares tipos de indentadores começou com a análise de condição de ponto de contato utilizando forças normais ao plano de contato. Isto foi estudado por Boussinesq [3] em 1885. A solução de Boussinesq para o ponto de contato permite determinar a distribuição de tensão para qualquer distribuição de pressão dentro da área de contato pelo o principio da superposição. Trabalho semelhante foi desenvolvido por Cerruti [32] considerando apenas forças tangenciais no plano de contato. Estas duas abordagens são clássicas e iniciaram o estudo do efeito de uma distribuição de tensões proveniente de um contato entre dois sólidos.

Vamos analisar a tensão e a deformação produzidas em um espaço semi-infinito, delimitada por uma superfície plana $z = 0$, sobre a ação de forças nas direções normal e tangencial aplicada em uma área fechada S da superfície na vizinhança da origem. Fora da área S as forças normal e tangencial tende a zero.

Seja um semi-espaço elástico mostrado na Figura 35. $C(\xi, \eta)$ é um ponto qualquer dentro da região de interesse S onde estão aplicadas as forças e $A(x, y, z)$ é ponto genérico posicionado no interior de um dos corpos elásticos semi-infinito. A distância entre esse dois pontos é dado por:

$$\rho = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

As distribuições de forças normal e tangencial $p_z(\xi, \eta)$, $q_x(\xi, \eta)$ e $q_y(\xi, \eta)$ atuam na área de contato S .

As funções pontenciais de Boussinesq ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 representam a carga total aplicada

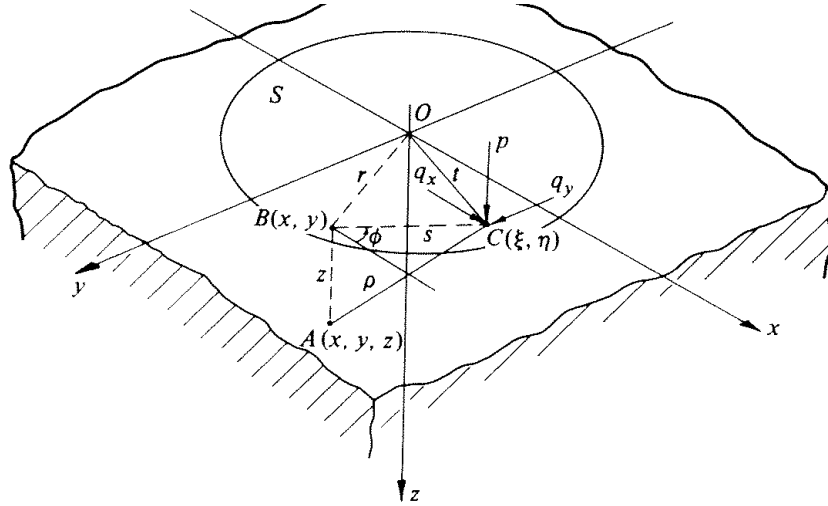


Figura 35: Semi-espaço elástico [27].

em uma dada direção dentro da área S e são representadas pelas equações A.2

$$\phi_1 = \int_S p_x(\xi, \eta) (z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta \quad (\text{A.2a})$$

$$\phi_2 = \int_S p_y(\xi, \eta) (z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta \quad (\text{A.2b})$$

$$\phi_3 = \int_S p_z(\xi, \eta) (z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta \quad (\text{A.2c})$$

Defini-se ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 como sendo as derivadas das funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , como mostrado nas equações A.3

$$\psi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \int_S p_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (\text{A.3a})$$

$$\psi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \int_S p_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (\text{A.3b})$$

$$\psi_3 = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \int_S p_z(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (\text{A.3c})$$

Define-se também o gradiente das funções potenciais:

$$\phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \quad (\text{A.4a})$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \quad (\text{A.4b})$$

Os deslocamentos em um ponto qualquer $A(x, y, z)$ é escrito em termos das funções po-

tenciais e de seus gradientes [33]:

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (\text{A.5a})$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (\text{A.5b})$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + (1 - 2\nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (\text{A.5c})$$

Esses deslocamentos são determinados em relação a um ponto distante da região de contato, onde nesse ponto em $\rho \rightarrow \infty$ podemos considerar os deslocamentos nulos.

Utilizando a lei de Hooke generalizada, equações (2.20 e 2.21) trabalhada com as equações (2.10 e 2.11) é obtida o campo de tensões

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{A.6a})$$

$$\sigma_y = \frac{2\nu G}{(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (\text{A.6b})$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu G}{(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.6c})$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (\text{A.6d})$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (\text{A.6e})$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (\text{A.6f})$$

Dessa forma percebemos que através de uma solução formal foi possível obter os campos de deformação e tensão para o problema de um corpo elástico semi-infinito sujeito a condição de ponto de contato.

A.2 Força normal na área de contato

Vamos considerar o caso em que temos apenas a distribuição de pressão $p_z(\xi, \eta)$ na área de contato e como ela atua na vizinhança da origem, temos que:

$$\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

E de acordo com as equações A.3

$$\psi_3 = \int_S p_z(\xi, \eta) \frac{1}{\rho} d\xi d\eta \Leftrightarrow \psi_3 = \frac{P}{\rho} \quad (\text{A.8})$$

Onde P é a força total aplicada na região de contato S . Como $q_x(\xi, \eta) = q_y(\xi, \eta) = 0$ e de acordo com as equações A.4 teremos:

$$\phi = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \psi_3 \quad (\text{A.9a})$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x \partial z} \quad (\text{A.9b})$$

Para calcular o campo de deslocamento u_x vamos precisar de alguma derivadas, então temos:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = \frac{P}{(z + \rho)} \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = \frac{P}{\rho} \Rightarrow P \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -P \frac{x}{\rho^3} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as equações A.9 e A.10 em A.5a

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi G} \left(2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi G} \left(-\frac{P}{(\rho + z)} \frac{x}{\rho} + 2\nu \frac{P}{(\rho + z)} \frac{x}{\rho} + z \frac{Px}{\rho^3} \right) = \\ &= \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{x}{\rho(\rho + z)} (2\nu - 1) + \frac{zx}{\rho^3} \right) \end{aligned}$$

Trabalhando da mesma forma para os campos u_y e u_z , obteremos o campos de deformação para pressão puramente normal.

$$u_x = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{x}{\rho(\rho + z)} (2\nu - 1) + \frac{zx}{\rho^3} \right) \quad (\text{A.11a})$$

$$u_y = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{y}{\rho(\rho + z)} (2\nu - 1) + \frac{zy}{\rho^3} \right) \quad (\text{A.11b})$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{2(1 - \nu)}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^3} \right) \quad (\text{A.11c})$$

Uma vez encontrada a deformação em qualquer ponto do sólido podemos expressar as componentes da tensão dada pelas equações A.12

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{\alpha^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\} \quad (\text{A.12a})$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{\alpha^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\} \quad (\text{A.12b})$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \quad (\text{A.12c})$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{xy}{\alpha^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\} \quad (\text{A.12d})$$

$$\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5} \quad (\text{A.12e})$$

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5} \quad (\text{A.12f})$$

Onde $\alpha^2 = x^2 + y^2$

Trabalhando em um sistema simétrico usaremos coordenadas polares $x \rightarrow r$, $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow z$, onde $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Assim as componentes da deformação podem ser escritas como:

$$u_r = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{(\rho-z)}{\rho r} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{(1-\nu)}{\rho} \right] \quad (\text{A.14})$$

E as componentes da tensão:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r(r^2+z^2)^{1/2}} \right] - \frac{3r^2z}{r(r^2+z^2)^{5/2}} \right\} \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \quad (\text{A.16})$$

Fazendo a análise sobre a superfície de contato em $z = 0$ como mostra a figura 11, onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, temos para as componentes de deformação:

$$\bar{u}_r = -\frac{P}{2\pi E r} (1-2\nu)(1+\nu) \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{u}_z = \frac{P}{\pi E r} (1-\nu^2) \quad (\text{A.18})$$

Podemos observar nas equações 3.22 e 3.23 que \bar{u}_r e $\bar{u}_z \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, distanciado do ponto de aplicação da força a deformação diminui.

A deformação \bar{u}_z em um ponto geral da superfície $B(x, y)$ e as componentes da tensão no interior do corpo em $A(x, y, z)$ produzidos por uma distribuição de pressão $p_z(\xi, \eta)$

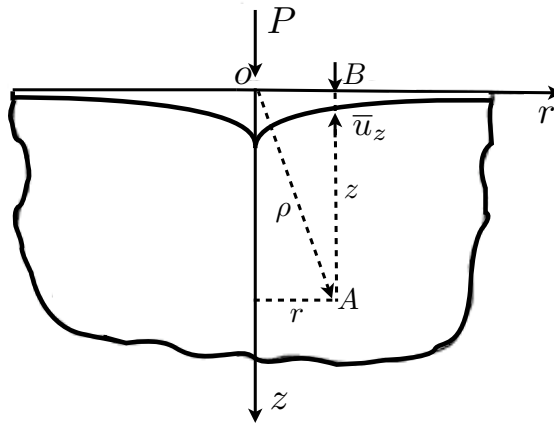


Figura 36: Seção transversal do espaço elástico semi-infinito deformado, sob ação apenas de $p_z(\xi, \eta)$.

sobre a superfícies de área S são encontrados por superposição. A figura 37 é uma análise do espaço elástico semi-infinito em coordenadas polares (s, ϕ) cuja origem está localizada em B , onde a pressão $p(s, \phi)$ atuando sobre um elemento de área posicionado em C é equivalente a uma força de módulo $dP = p(s, \phi)s dsd\phi$. A deformação da superfície \bar{u}_z

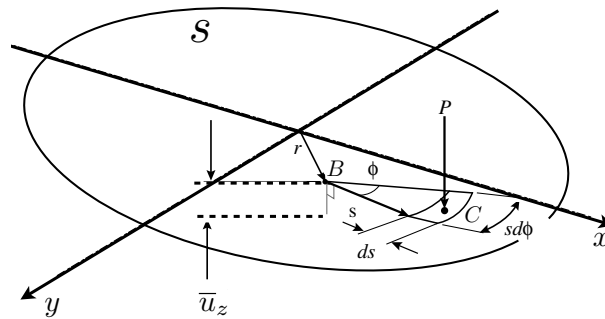


Figura 37: Esquema do espaço elástico semi-infinito em coordenadas polares.

devido a essa força e dada por:

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_S p(s, \phi) dsd\phi \quad (\text{A.19})$$

Então conhecendo a priori a distribuição de pressão dentro da região S é possível encontrar a deformação e a tensão em qualquer lugar do sólido. Devido a complexidade das equações de Boussinesq, problemas simples podem apresentar dificuldades por não terem solução analítica bem definida.

A.3 Pressão Hertziana

Escrevendo a pressão definida por Hertz (equação 3.5) sobre a área de contato em coordenadas polares com origem em $B(r, 0)$, temos:

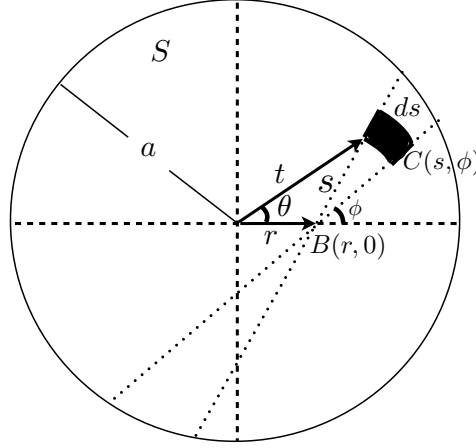


Figura 38: Espaço elástico semi-infinito em coordenadas polares. Adaptado [27].

$$P(s, \phi) = \frac{p_0}{a} \{(a^2 - r^2) - 2r \cos(\phi)s - s^2\}^{1/2} \quad (\text{A.20})$$

Substituindo essa distribuição de pressão na equação A.19, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{u}_z &= \frac{1 - 2\nu}{\pi E} \int_S p(s, \phi) ds d\phi = \\ &= \frac{1 - 2\nu}{\pi E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{S_1} \frac{p_0}{a} \{(a^2 - r^2) - 2r \cos(\phi)s - s^2\}^{1/2} ds \end{aligned}$$

Trabalhando a integral com dependência em s , temos:

$$\int_0^{S_1} \{(\alpha^2 - 2\beta s - s^2)\}^{1/2} ds = \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\beta/\alpha) \right\}$$

S_1 é a raiz positiva do integrando, onde $\alpha^2 = (a^2 - r^2)$ e $\beta = r \cos \phi$. Os termos $\beta\alpha$ e $\tan^{-1}(\beta/\alpha)$ desaparecem quando integrados em relação a ϕ entres os limites $[0, 2\pi]$. Assim tem-se,

$$\begin{aligned} \bar{u}_z &= \frac{1 - 2\nu}{\pi E} \int_0^{2\pi} \frac{p_0}{a} \frac{\pi}{4} \{(a^2 - r^2) + r^2 \cos^2(\phi)\}^{1/2} d\phi = \\ &= \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Dessa forma temos:

$$\bar{u}_z = \frac{(1 - \nu^2) \pi p_0}{E} \frac{1}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r < a \quad (\text{A.22})$$

Com a expressão [A.22](#) obtem-se a deformação da superfície de contato para a $r < a$.