



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

LAISE LIMA DE CARVALHO SOUSA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS BASEADA NO
MÉTODO DE PETROV-GALERKIN LOCAL SEM MALHA DIRETO ACOPLADO
COM UMA ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA BIDIRECIONAL**

FORTALEZA

2024

LAISE LIMA DE CARVALHO SOUSA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS BASEADA NO MÉTODO
DE PETROV-GALERKIN LOCAL SEM MALHA DIRETO ACOPLADO COM UMA
ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA BIDIRECIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica.

Orientador: Prof. Dr. Creto Augusto Vidal.

Coorientador: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S697o Sousa, Laise Lima de Carvalho.

Otimização topológica de estruturas contínuas baseada no método de Petrov-Galerkin local sem malha direto acoplado com uma abordagem evolucionária bidirecional / Laise Lima de Carvalho Sousa. – 2024. 105 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Creto Augusto Vidal.

Coorientação: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto.

1. Otimização Topológica. 2. Métodos Sem Malha. 3. Método DMLPG. 4. Método BES0. I. Título.
CDD 005

LAISE LIMA DE CARVALHO SOUSA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS BASEADA NO MÉTODO
DE PETROV-GALERKIN LOCAL SEM MALHA DIRETO ACOPLADO COM UMA
ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA BIDIRECIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica.

Aprovada em: 07/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Creto Augusto Vidal (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Murilo Pereira de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Fernando Campos Ramos Martha
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Dedico esta tese à memória de minha avó Valde-
lice pelo seu amor, cuidado e incentivo enquanto
esteve ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me concedido forças para superar os obstáculos que surgiram ao longo desta jornada. É com imensa gratidão que alcanço esta conquista, sabendo que Ele esteve ao meu lado a cada passo dado neste caminho.

Aos meus pais, marido, filha e irmãos, pelo amor, encorajamento e compreensão nos momentos mais difíceis. Seu apoio foi meu alicerce durante todo este percurso.

Aos meus orientadores, Creto Augusto Vidal e Joaquim Bento Cavalcante-Neto, pelos conselhos, paciência, dedicação e ensinamentos. São minhas inspirações como grandes educadores e sou imensamente grata por tê-los como mentores.

À minha companheira de pesquisa, Suzana Matos, pela paciência e pelo constante encorajamento, que me impulsionaram a seguir firme neste caminho.

Aos meus amigos do CRAb, em especial, Lilian e Arnaldo, por serem uma fonte constante de motivação e alegria.

A Springer Nature por permitir a reprodução desta pesquisa.

A todos, meu mais sincero e profundo agradecimento. Muito obrigada.

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê." (Arthur Schopenhauer)

RESUMO

A otimização topológica é um dos campos mais interessantes da otimização estrutural, possibilitando a concepção de projetos eficientes e leves. Nos últimos anos, os métodos numéricos sem malha têm surgido como uma alternativa significativa em relação às abordagens com malha. Embora tenham historicamente se apoiado no Método dos Elementos Finitos, as técnicas de otimização topológica vêm sendo associadas a vários métodos sem malha. No entanto, a maioria dessas abordagens numéricas acaba recorrendo a uma malha, seja para construir as funções tentativas ou para realização da integração numérica. O método de Petrov-Galerkin Local Sem Malha Direto (*Direct Meshless Local Petrov-Galerkin - DMLPG*) é caracterizado como um método verdadeiramente sem malha, pois não faz uso de uma malha em todo seu desenvolvimento. Esse método tem sido aplicado para resolver diversos problemas de valor de contorno, obtendo resultados com boa precisão e eficiência computacional, uma vez que a integração é realizada sob polinômios de baixo grau, ao invés de considerar funções de forma complicadas. Neste trabalho, uma nova abordagem de otimização topológica é proposta, combinando o DMLPG com um método de Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization - BESO*), com o intuito de mostrar a viabilidade desse procedimento numérico nessa área. O DMLPG é usado para obter os deslocamentos, deformações e tensões, enquanto o BESO atualiza a geometria estrutural com base nos valores de sensibilidade. Alguns exemplos, considerando a minimização da energia total de deformação de estruturas elásticas lineares, foram realizados, demonstrando a aplicabilidade e validade da técnica ao comparar os projetos ótimos obtidos com outros resultados encontrados na literatura existente.

Palavras-chave: otimização topológica; métodos sem malha; método DMLPG; método BESO.

ABSTRACT

Topology optimization is one of the most interesting fields of structural optimization, enabling the conception of efficient and lightweight designs. In recent years, meshless numerical methods have emerged as a significant alternative to mesh-based approaches. Although historically reliant on the Finite Element Method, topology optimization techniques have been associated with several meshless methods. However, most of these numerical approaches using a mesh, either to construct the trial functions or to perform the numerical integration. The *Direct Meshless Local Petrov-Galerkin* - DMLPG method is characterized as a truly meshless method, as it does not use a mesh throughout its development. This method has been applied to solve various boundary value problems, obtaining results with good precision and computational efficiency, since integration is performed under low-degree polynomials instead of considering complex shape functions. In this work, a new approach to topological optimization is proposed, combining DMLPG with a *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* - BESO method, in order to show the feasibility of this numerical procedure in this field. DMLPG is used to obtain displacements, strains and stresses, while BESO updates the structural geometry based on sensitivity values. Some examples, considering the minimization of the total deformation energy of linear elastic structures, were carried out, demonstrating the applicability and validity of the technique by comparing the optimal designs obtained with other results found in existing literature.

Keywords: topology optimization; meshless method; DMLPG method; BESO method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração dos tipos de otimização estrutural. Os problemas iniciais são mostrados no lado esquerdo e as soluções ótimas são mostradas no lado direito.	20
Figura 2 – Processo iterativo da otimização topológica em alto nível.	22
Figura 3 – Discretização de um domínio com diferentes métodos de análise numérica. .	22
Figura 4 – Projeto ótimo obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Zheng <i>et al.</i> (2008). O resultado foi comparado com o alcançado utilizando o MEF.	26
Figura 5 – Resultado obtido para uma estrutura sob múltiplas cargas com o modelo proposto por Gong <i>et al.</i> (2010).	28
Figura 6 – Resultado obtido com o modelo proposto por Lin <i>et al.</i> (2017).	30
Figura 7 – Resultado obtido com o modelo proposto por Gong <i>et al.</i> (2018).	32
Figura 8 – Resultado obtido para um disco carregado tangencialmente com o modelo proposto por Nguyen e Bui (2022).	33
Figura 9 – Resultado obtido com o modelo proposto por Luo <i>et al.</i> (2012a). Topologia no conjunto de nível zero.	35
Figura 10 – Resultado obtido para uma viga com suportes fixos utilizando o modelo proposto por Juan <i>et al.</i> (2010).	37
Figura 11 – Resultado obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Shobeiri (2015a).	38
Figura 12 – Resultado obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Zhou e Zou (2007).	39
Figura 13 – Resultado obtido com o modelo proposto por Li <i>et al.</i> (2022).	41
Figura 14 – Visão geral da técnica proposta.	44
Figura 15 – O domínio global Ω e a fronteira global Γ de um corpo arbitrário bidimensional. As fronteiras Γ_u e Γ_t , nessa ordem, são as partes de Γ em que as condições de contorno essenciais e naturais são especificadas. \bar{u} e \bar{t} são os deslocamentos e as tensões prescritas, respectivamente. \mathbf{n} é o vetor normal unitário em Γ e \mathbf{b} é a força de corpo.	46

Figura 16 – Ilustração da distribuição de nós para a abordagem DMLPG. Cada nó é associado a um subdomínio local, juntamente com sua fronteira local. Por exemplo, os nós J e K possuem subdomínios locais Ω_J e Ω_K , respectivamente, com fronteiras Γ_J e Γ_K . Se um subdomínio está totalmente contido no domínio global, como o subdomínio de J , então $\Gamma_J = \Gamma_{J0}$. No entanto, se o subdomínio de um nó intersecta a fronteira global, como o subdomínio de K , então sua fronteira local é definida como $\Gamma_K = \Gamma_{K0} \cup \Gamma_{Ku} \cup \Gamma_{Kt}$, onde Γ_{K0} é a parte de Γ_K em que nenhuma condição de contorno é aplicada, enquanto Γ_{Ku} e Γ_{Kt} são, nessa ordem, as partes de Γ_K onde as condições de contorno essenciais e naturais são especificadas.	47
Figura 17 – O raio r_w do suporte compacto de uma função peso centrada em um ponto x é ilustrado. Alguns nós na vizinhança são exemplificados: J , K e L . Como o nó J é o mais próximo ao ponto x , sua influência é maior do que a do nó K . O nó L não tem influência, uma vez que está fora da região de suporte da função.	53
Figura 18 – Função de Heaviside em um caso bidimensional centrada no nó I de suporte compacto com raio r_e	54
Figura 19 – Exemplo da instabilidade numérica do padrão do tabuleiro de xadrez.	61
Figura 20 – Definição dos pontos de integração, x_q . Cada subdomínio é dividido em setores circulares de ângulos, no máximo, de 90° . Dado um espaço paramétrico $-1 \leq \xi \leq 1$, os pontos de integração são criados nos arcos de 90° e nas linhas, caso existam, de interseção da fronteira do subdomínio com a fronteira do corpo, ambos parametrizados em ξ	66
Figura 21 – Definição do problema da viga em balanço.	67
Figura 22 – Resultados para o problema da viga em balanço utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.	67
Figura 23 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga em balanço com outros encontrados na literatura.	68
Figura 24 – Sequência de iterações para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós.	69
Figura 25 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós.	69

Figura 26 – Resultados para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem e com o processo de estabilização.	70
Figura 27 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem a etapa de estabilização.	70
Figura 28 – Resultados para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem e com o tratamento de simetria.	71
Figura 29 – Definição do problema da viga MBB.	71
Figura 30 – Resultados para o problema da viga MBB utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.	72
Figura 31 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga MBB com outros encontrados na literatura.	72
Figura 32 – Sequência de iterações para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós.	73
Figura 33 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós.	73
Figura 34 – Resultados para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós sem e com o tratamento de simetria.	73
Figura 35 – Definição do problema da viga simplesmente apoiada.	74
Figura 36 – Resultados para o problema da viga simplesmente apoiada utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.	74
Figura 37 – Resultados para o problema da viga simplesmente apoiada com diferentes discretizações.	75
Figura 38 – Resultados da literatura para o problema da viga simplesmente apoiada.	75
Figura 39 – Definição do problema da viga com suportes fixos.	76
Figura 40 – Resultados para o problema da viga com suportes fixos utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.	76
Figura 41 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga com suportes fixos em relação a outros encontrados na literatura.	77
Figura 42 – Resultados para o problema da viga com suportes fixos utilizando uma discretização de 51×51 nós sem e com a aplicação do filtro de sensibilidade.	77
Figura 43 – Definição do problema da viga em forma de L.	78

Figura 44 – Resultados para o problema da viga em forma de L com diferentes discretizações.	78
Figura 45 – Resultados da literatura para o problema da viga em forma de L.	79
Figura 46 – Definição do problema da viga em forma de L com um buraco.	79
Figura 47 – Resultados para o problema da viga em forma de L com um buraco.	80
Figura 48 – Definição do problema da ponte.	80
Figura 49 – Projeto ótimo alcançado para o problema da ponte comparado com o resultado alcançado no estudo de Li e Atluri (2008a).	81
Figura 50 – Representação do problema de otimização topológica.	94
Figura 51 – Representação de um material compósito.	95
Figura 52 – Representação da abordagem de conjunto de nível para um único material.	97
Figura 53 – Aproximação da fronteira Γ do domínio global Ω por segmentos de retas. As fronteiras dos subdomínios locais, Γ_J , Γ_K e Γ_L , são construídas a partir de círculos centrados nos nós e de suas interseções com a borda Γ	100
Figura 54 – Representação da interseção de um círculo com a fronteira do domínio, formada por segmentos de retas ordenados no sentido anti-horário.	101
Figura 55 – Casos de interseção entre a reta que define o segmento $\overline{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}}$ e o círculo.	102
Figura 56 – Decomposição da fronteira de um subdomínio em retas e arcos.	103
Figura 57 – Representação do espaço paramétrico ξ e do segmento de reta $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$	104
Figura 58 – Representação do espaço paramétrico ξ e do arco de circunferência de raio r_e , com ângulo θ , definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pesquisas em otimização topológica baseadas em uma análise numérica sem malha.	41
Tabela 2 – Valores tabelados das posições paramétricas e dos pesos para diferentes quantidades de pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre (KAMERMANS, 2011).	104

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BESO	<i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>
BM-SBM	<i>Burton–Miller-type Singular Boundary Method</i>
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CSRBF	<i>Compactly Supported Radial Basis Function</i>
DMLPG	<i>Direct Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
EFG	<i>Element-Free Galerkin</i>
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
FVMLPG	<i>Finite Volume Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
GFDM	<i>Generalized Finite Difference Method</i>
GMLS	<i>Generalized Moving Least Squares</i>
IEFG	<i>Improved Element-Free Galerkin</i>
IGA	<i>Isogeometric Analysis</i>
IMLS	<i>Improved Moving Least Squares</i>
LS	<i>Level-Set</i>
MBB	<i>Messerschmitt-Bolkow-Blohm</i>
MEF	<i>Método dos Elementos Finitos</i>
ML-MMC	<i>Meshless Moving Morphable Component</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MLS	<i>Moving Least Squares</i>
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
NNPG	<i>Natural Neighbour Petrov-Galerkin</i>
NNRPIM	<i>Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method</i>
NURBS	<i>Non-uniform Rational B-spline</i>
OC	<i>Optimality Criteria</i>
PTO	<i>Proportional Topology Optimization</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RK	<i>Reproducing Kernel</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
SBMFM	<i>Spline-based Meshfree Method</i>
SED	<i>Strain Energy Densities</i>

SIMP *Solid Isotropic Material with Penalization*

SPH *Smoothed Particle Hydrodynamics*

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Dimensão do problema
Ω	Domínio de um corpo
Γ	Fronteira de um corpo
Γ_u	Parte de Γ em que as condições de contorno essenciais são prescritas
Γ_t	Parte de Γ em que as condições de contorno naturais são prescritas
I, J, K, L	Nós no domínio ou na fronteira do corpo
Ω_I	Subdomínio associado ao nó I
Γ_I	Fronteira do subdomínio associado ao nó I
Γ_{Iu}	Parte de Γ_I em que as condições de contorno essenciais são prescritas
Γ_{It}	Parte de Γ_I em que as condições de contorno naturais são prescritas
Γ_{I0}	Parte de Γ_I em que não há condições de contorno prescritas
\mathbf{x}	Posição de um ponto
\mathbf{u}	Deslocamento ou função desconhecida
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Representação vetorial do tensor de deformação
$\boldsymbol{\sigma}$	Representação vetorial do tensor de tensão de Cauchy
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento prescrito
$\bar{\mathbf{t}}$	Tração prescrita
\mathbf{n}	Normal na fronteira do corpo
\mathbf{b}	Força de corpo
\mathbf{N}	Matriz das componentes de \mathbf{n}
\mathcal{V}	Vetor de valores arbitrários da função teste
Θ	Matriz diagonal da função teste que depende da posição
Ψ	Matriz com as derivadas das componentes de Θ
\mathbf{L}_d	Matriz de operadores diferenciais
\mathbf{D}	Tensor de elasticidade de um material isotrópico ou matriz dos coeficientes de rigidez elástica do material
E	Módulo de Young

ν	Coefficiente de Poisson
i, j, k, l	Valores indiciais
v_{Ii}	Componente da função teste para um nó I
w	Função peso da aproximação GMLS
λ, β, μ	Funcionais lineares
$\hat{\lambda}$	Aproximação de λ
a, c	Coefficientes das combinações lineares
M	Número total de funcionais que aproximam a solução
\tilde{N}	Número total de nós no domínio
N	Número de nós dentro do domínio de suporte da função w
\bar{N}	Número de nós dentro do raio de influência da função ω
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_k, \Phi, \phi$	Matrizes da aproximação GMLS
\mathcal{P}	Subespaço vetorial
\mathbf{p}	Vetores em \mathcal{P}
m	Ordem de continuidade ou ordem polinomial
G	Total de vetores na base de \mathcal{P}
r_e	Raio do domínio de suporte da função teste
r_w	Raio do domínio de suporte da função w
ϵ	Parâmetro de forma da função gaussiana w
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{f}	Vetor de força
$\delta_{\mathbf{x}}$	Delta de Dirac
d_{min}	Distância euclidiana mínima entre dois nós no domínio
V	Volume de um corpo
V_I	Volume nodal superestimado
V^*	Volume predefinido
p	Expoente de penalização
C	Energia total de deformação

$\alpha, \hat{\alpha}, \tilde{\alpha}$	Sensibilidades
α_{th}	Limiar para as sensibilidades
ω	Função peso da filtragem
r_{IJ}	Distância entre os nós I e J
r_{min}	Raio da função ω
\mathcal{X}	Variáveis de projeto
\mathcal{X}_{min}	Valor pequeno não nulo atribuído a variável de projeto
ER	Taxa evolucionária
τ	Limiar para convergência
ζ	Limiar para a diferença relativa definida no processo de atualização do projeto
η	Número associado à quantidade de iterações em que a função objetivo é analisada
θ_{th}	Limite para um ângulo máximo de um arco no processo de integração
ξ	Espaço paramétrico usado na quadratura de Gauss-Legendre

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Objetivo e Contribuição	24
1.2	Organização do Trabalho	24
2	TRABALHOS RELACIONADOS	25
2.1	Abordagens de Densidade	25
2.2	Abordagens de Conjunto de Nível	34
2.3	Abordagens Evolucionárias	37
2.4	Outras Abordagens	39
2.5	Considerações Finais	41
3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA EM UMA ANÁLISE NUMÉRICA SEM MALHA	44
3.1	Método DMLPG	45
3.1.1	<i>Problema de Valor de Contorno</i>	45
3.1.2	<i>Forma Fraca Local</i>	47
3.1.3	<i>Funções Tentativas</i>	50
3.1.3.1	<i>Aproximação GMLS</i>	50
3.1.3.2	<i>Função Peso</i>	52
3.1.4	<i>Funções Teste</i>	53
3.1.5	<i>Discretização</i>	54
3.1.6	<i>Aplicação das Condições de Contorno Essenciais</i>	56
3.1.7	<i>Obtenção dos Deslocamentos, Deformações e Tensões</i>	57
3.1.8	<i>Algoritmo</i>	57
3.2	Método BESO	58
3.2.1	<i>Definição do Problema</i>	59
3.2.2	<i>Análise de Sensibilidade</i>	59
3.2.3	<i>Filtragem e Processo de Estabilização</i>	60
3.2.4	<i>Atualização do Projeto</i>	61
3.2.5	<i>Critérios de Convergência e Atualização da Matriz de Rigidez Elástica</i>	63
3.3	Considerações Finais	64
4	RESULTADOS	65

4.1	Definição dos Parâmetros	65
4.2	Viga em Balanço	67
4.3	Viga MBB	71
4.4	Viga Simplesmente Apoiada	73
4.5	Viga com Suportes Fixos	75
4.6	Viga em Forma de L	77
4.6.1	<i>Viga em Forma de L Padrão</i>	77
4.6.2	<i>Viga em Forma de L com Buraco</i>	78
4.7	Ponte	80
4.8	Considerações Finais	81
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	82
	REFERÊNCIAS	84
	APÊNDICE A – TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA . . .	94
	APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	100

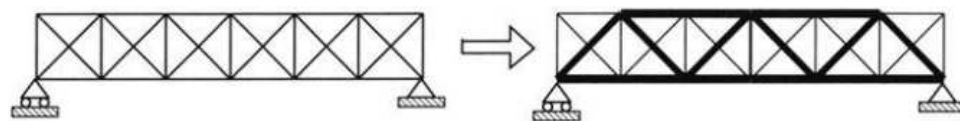
1 INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia e a crescente complexidade das demandas em diversos setores, como nas indústrias da construção civil, automotiva, aeroespacial, entre outras, tornou-se essencial desenvolver métodos eficazes para projetar estruturas que sejam não apenas seguras e estáveis, mas também econômicas e leves. A otimização estrutural surge nesse contexto, buscando alcançar o projeto com melhor desempenho possível, de forma a maximizar ou minimizar uma função predefinida e satisfazer restrições impostas.

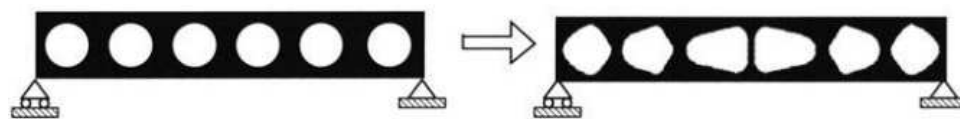
A otimização estrutural pode ser categorizada em três principais áreas: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica. A otimização dimensional tem como objetivo ajustar as dimensões dos elementos estruturais enquanto mantém a forma e a topologia inalteradas (Figura 1a). A otimização de forma concentra-se na modificação do contorno da estrutura, permitindo ajustes em seu formato, mas mantendo sua topologia fixa (Figura 1b). Por outro lado, a otimização topológica busca determinar a distribuição ótima de material dentro de uma região de projeto, o que inclui a possibilidade de adicionar buracos e realizar mudanças na conectividade (Figura 1c). A característica genérica e a complexidade envolvida na redistribuição de material torna a otimização topológica um dos campos mais desafiadores da otimização estrutural (LI *et al.*, 2010; LUO *et al.*, 2012c; MUNK *et al.*, 2015; KHAN *et al.*, 2023).

Figura 1 – Ilustração dos tipos de otimização estrutural. Os problemas iniciais são mostrados no lado esquerdo e as soluções ótimas são mostradas no lado direito.

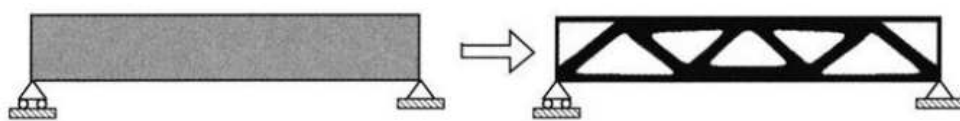
(a) Otimização dimensional.



(b) Otimização de forma.



(c) Otimização topológica.



Fonte: Bendsøe e Sigmund (2004).

Com o crescente interesse dos pesquisadores no campo da otimização topológica,

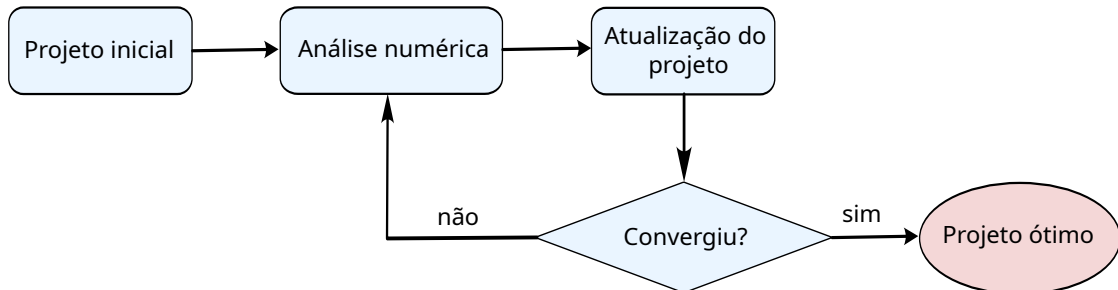
após a aplicação do método de Homogeneização proposto por Bendsøe e Kikuchi (1988), diversos estudos foram conduzidos, resultando em uma variedade de técnicas propostas, incluindo: as abordagens de densidade (BENDSØE, 1989; ZHOU; ROZVANY, 1991; STOLPE; SVANBERG, 2001); as abordagens evolucionárias (XIE; STEVEN, 1992; XIE; STEVEN, 1993; QUERIN *et al.*, 1998); as abordagens de conjunto de nível (SETHIAN; WIEGMANN, 2000; WANG *et al.*, 2003; ULLAH; TREVELYAN, 2016; XIA *et al.*, 2018b); entre outras (ESCHENAUER *et al.*, 1994; WANG, 2004; NORATO *et al.*, 2007; SIGMUND; MAUTE, 2013). As abordagens de densidade, que incorporam um dos métodos mais conhecidos, o Material Isotrópico Sólido com Penalização (*Solid Isotropic Material with Penalization* - SIMP) (BENDSØE, 1989), são fundamentadas na representação da distribuição de material por meio de uma variável de densidade, que varia continuamente em todo o domínio de projeto. Por outro lado, nas abordagens de conjunto de nível, uma função de conjunto de nível é definida no domínio estrutural, de modo que a fronteira da estrutura é representada pela curva de nível zero dessa função. Conforme a função de conjunto de nível é atualizada e a fronteira se move, a topologia ótima é alcançada.

As abordagens evolucionárias, que se referem às técnicas baseadas em alguma regra evolutiva para alcançar a estrutura ótima, em particular, têm se tornado bastante populares entre os métodos de otimização topológica, devido à sua simplicidade conceitual e facilidade de implementação (ANSOLA *et al.*, 2007; HUANG; XIE, 2009; KÖKE *et al.*, 2015; TEIMOURI; ASGARI, 2019; LIN *et al.*, 2020; GAN; WANG, 2021; JIANG *et al.*, 2023). O método de Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* - ESO) (XIE; STEVEN, 1992; XIE; STEVEN, 1993) parte do pressuposto básico de que uma estrutura evolui para a otimalidade ao remover gradualmente material de regiões ineficientes, ou seja, com baixa tensão ou energia de deformação. Uma extensão do ESO é o método de Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* - BESO) (QUERIN *et al.*, 1998), que não apenas permite a remoção, mas também a adição de material, contribuindo para a busca por soluções mais eficientes.

A obtenção de um projeto otimizado topologicamente segue um processo iterativo, conforme ilustrado de forma simplificada na Figura 2. Estabelecendo-se um modelo inicial, uma análise numérica é conduzida para obter dados essenciais, como deslocamentos, deformações e tensões. Essas informações são então analisadas e empregadas na atualização do projeto, por meio da modificação das variáveis de projeto, que representam os parâmetros suscetíveis a alterações em busca da solução ideal. Esse processo de otimização prossegue iterativamente,

avaliando e modificando um projeto existente até que um critério predefinido seja alcançado. Tradicionalmente, as abordagens de otimização topológica utilizam como procedimento numérico

Figura 2 – Processo iterativo da otimização topológica em alto nível.



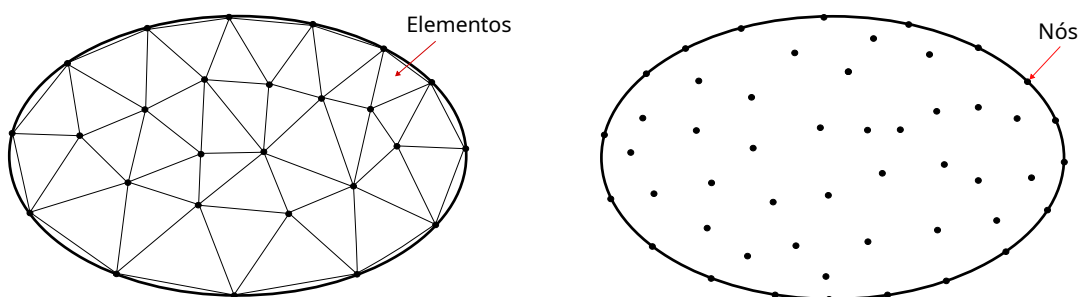
Fonte: Elaborada pelo autor.

o Método dos Elementos Finitos - MEF, cujo o domínio de projeto é discretizado através de uma malha (Figura 3a) (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE, 1989; ESCHENAUER *et al.*, 1994; QUERIN *et al.*, 1998; SETHIAN; WIEGMANN, 2000). No entanto, as dificuldades inerentes associadas ao uso de uma malha tornam a aplicação dessas abordagens em problemas mais complexos complicada, especialmente, quando remalhamento é necessário, com a garantia de geração de uma malha de boa qualidade (ZHENG *et al.*, 2012; JUAN *et al.*, 2010; LI *et al.*, 2020; SOHOULI *et al.*, 2020).

Figura 3 – Discretização de um domínio com diferentes métodos de análise numérica.

(a) Métodos dos Elementos Finitos.

(b) Métodos sem malha.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos últimos anos, diversos métodos sem malha foram propostos com o objetivo de superar as dificuldades associadas ao uso de malha (GINGOLD; MONAGHAN, 1977; BELYTSCHKO *et al.*, 1994; LIU *et al.*, 1995; OÑATE *et al.*, 1996; BABUSKA; MELENK, 1997; SUKUMAR *et al.*, 1998; MIRZAEI; SCHABACK, 2013). Nessas abordagens, o domínio é discretizado em um conjunto de nós, sem qualquer conexão explícita entre eles (Figura 3b). A flexibilidade de adaptação e a obtenção de soluções precisas (LI; ATLURI, 2008a; NGUYEN;

BUI, 2022), tornam as abordagens sem malha bastante atrativas, levando à aplicação de vários métodos na otimização topológica de estruturas, tais como: o método de Galerkin Livre de Elementos (*Element-Free Galerkin - EFG*) (DU *et al.*, 2008; LUO *et al.*, 2012c; YANG *et al.*, 2016; ZHANG *et al.*, 2018; ZHANG *et al.*, 2022); o Método de Interpolação de Ponto Radial (*Radial Point Interpolation Method - RPIM*) (ZHENG *et al.*, 2008; LEE *et al.*, 2009; GONÇALVES *et al.*, 2022a); o método de Galerkin Sem Malha (LUO *et al.*, 2012a; ZHAO, 2014); o método Hidrodinâmico de Partículas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*) (LIN *et al.*, 2017; LI *et al.*, 2020); o método de Colocação Misto baseado no método de Petrov-Galerkin Local Sem Malha (*Meshless Local Petrov-Galerkin - MLPG*) (LI; ATLURI, 2008a; LI; ATLURI, 2008b); entre outros (CHO; KWAK, 2006; ZHENG *et al.*, 2009; LI *et al.*, 2010; WU *et al.*, 2017; HUR *et al.*, 2017; ZHAO *et al.*, 2020; SOHOULI *et al.*, 2020; ULLAH *et al.*, 2022; GONÇALVES *et al.*, 2022b; LIU *et al.*, 2023). No entanto, a maioria dessas abordagens aplicadas na otimização topológica, apesar de serem consideradas sem malha, faz uso de uma malha de fundo para a construção das funções tentativas ou para a realização da integração numérica.

Mirzaei (2011) propôs o método de Petrov-Galerkin Local Sem Malha Direto (*Direct Meshless Local Petrov-Galerkin - DMLPG*), que é considerado uma abordagem verdadeiramente sem malha, uma vez que não utiliza malha em nenhuma etapa do seu desenvolvimento. Com base em uma forma generalizada do método dos Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares - MLS*), o DMLPG completamente ignora a construção de funções de forma complicadas, realizando a integração numérica em polinômios de baixo grau, o que possibilita alcançar resultados com precisão equivalente, porém, com melhor eficiência computacional, quando comparado a outras técnicas com e sem malha (MIRZAEI, 2011; MIRZAEI; SCHABACK, 2013; MIRZAEI; SCHABACK, 2014; MIRZAEI, 2015; ILATI; DEHGHAN, 2016; ABBASZADEH *et al.*, 2022; DEHGHAN *et al.*, 2022). Apesar de ser um método relativamente recente, o DMLPG já foi aplicado com eficácia na resolução de uma variedade de problemas, como: condução de calor (MIRZAEI; SCHABACK, 2014); potenciais (MAZZIA *et al.*, 2012; ABBASZADEH; DEHGHAN, 2020); elastostático (MIRZAEI, 2015); elastodinâmico (MIRZAEI; HASANPOUR, 2016); eletrostático (TALEEI; DEHGHAN, 2014); termoelasticidade (HASANPOUR; MIRZAEI, 2018); e com não-linearidades (DARANI, 2017; SHOKRI; BAHMANI, 2019; SHOKRI; BAHMANI, 2021; ABBASZADEH; DEHGHAN, 2022). No entanto, até o momento, sua utilização na otimização topológica de estruturas ainda não foi abordada na literatura existente.

1.1 Objetivo e Contribuição

Métodos baseados em malha têm uma história rica e são amplamente utilizados em diversas disciplinas científicas e de engenharia. Em contraste, os métodos sem malha são relativamente recentes, mas estão emergindo como uma alternativa significativa a abordagens com malha. Os pesquisadores no domínio dos métodos sem malha têm a tarefa de seguir a trajetória dos métodos baseados em malha para poder corroborar seu potencial de aplicabilidade e versatilidade. Assim, neste trabalho, uma nova abordagem de otimização topológica que combina o método DMLPG com um método BESO é proposta, com o intuito de demonstrar a viabilidade desse método verdadeiramente sem malha nessa área. Para alcançar tal propósito, ajustes são realizados em um algoritmo BESO baseado no MEF, permitindo sua integração com a metodologia sem malha e o problema da minimização da energia total de deformação de estruturas elásticas lineares sob restrição de volume é considerado.

A principal contribuição deste trabalho consiste então em fornecer uma nova possibilidade na área de otimização topológica com base em uma técnica verdadeiramente sem malha, o DMLPG, abrindo caminho para que esse método sem malha possa ser estabelecido como uma ferramenta potencial nesse campo desafiador da otimização estrutural.

1.2 Organização do Trabalho

O restante deste trabalho está estruturado em quatro capítulos. No Capítulo 2, são apresentados diversos estudos que utilizaram uma abordagem de otimização topológica associada a um método numérico sem malha. No Capítulo 3, a técnica de otimização proposta, que combina o método DMLPG com uma abordagem BESO, é descrita. No Capítulo 4, são abordados os testes conduzidos e discutidos os resultados obtidos. Finalmente, no Capítulo 5, são apontadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 TRABALHOS RELACIONADOS

Desde o final dos anos 80, a partir do trabalho seminal de Bendsøe e Kikuchi (1988), vários métodos de otimização topológica já foram propostos (BENDSØE, 1989; ZHOU; ROZVANY, 1991; XIE; STEVEN, 1992; XIE; STEVEN, 1993; QUERIN *et al.*, 1998; SETHIAN; WIEGMANN, 2000). Embora, tradicionalmente, a maioria dessas abordagens seja baseada no MEF, existem muitas outras técnicas de análise numérica que podem ser utilizadas, como os métodos sem malha. Esses métodos têm atraído a atenção de diversos pesquisadores, devido não só à obtenção de soluções precisas, bem como à sua facilidade de adaptatividade.

Neste capítulo, são apresentados alguns trabalhos de otimização topológica baseados em procedimentos numéricos sem malha, separando-os pela abordagem de otimização empregada. Na Seção 2.1, são mostrados modelos baseados em abordagens de densidade. Nas Seções 2.2 e 2.3, são descritos estudos que fizeram uso de um método de conjunto de nível e um método evolucionário, respectivamente. Pesquisas que utilizaram outros tipos de técnicas são relatadas na Seção 2.4. Por fim, na Seção 2.5, algumas considerações finais a respeito deste capítulo são tecidas.

2.1 Abordagens de Densidade

Cho e Kwak (2006) resolveram problemas de otimização topológica de estruturas geometricamente não lineares, associando um modelo de otimização baseado em densidade com o método sem malha de Núcleo Reprodutor (*Reproducing Kernel* - RK). As funções de forma da aproximação RK são utilizadas na discretização dos campos de deslocamento e densidade, permitindo que pontos sejam facilmente removidos ou adicionados no domínio de projeto. Com essa propriedade, o problema de convergência associado a subdomínios com baixa densidade, comumente presente quando se lida com estruturas não lineares, é tratado através da exclusão dessas regiões. Instabilidades numéricas resultantes da deficiência do posto da matriz do sistema são evitadas por meio da seleção de um número adequado de pontos materiais independentes. Exemplos numéricos realizados mostraram a eficiência do método na resolução de problemas envolvendo grandes deformações e a vantagem do esquema de exclusão de subdomínios em termos de custo computacional.

Zheng *et al.* (2008) combinaram o método SIMP (Apêndice A.2) com o RPIM. Na abordagem numérica RPIM, as funções de forma são construídas através de Funções de

Base Radial com Suporte Compacto (*Compactly Supported Radial Basis Function - CSRBF*). O uso de CSRBF garante que as condições de contorno essenciais, isto é, as condições de deslocamentos prescritos, sejam aplicadas diretamente, haja visto que a propriedade da função Delta de Kronecker é satisfeita. O RPIM é utilizado para obtenção dos deslocamentos nodais e a estrutura é topologicamente modificada através da atualização das densidades nodais via aplicação do Critério de Otimalidade (*Optimality Criteria - OC*). A abordagem OC é amplamente utilizada em conjunto com o SIMP para a atualização das variáveis de projeto, conforme pode ser verificado em diversos estudos (LI; ATLURI, 2008a; ZHENG *et al.*, 2009; GONG *et al.*, 2010; LI *et al.*, 2010; ZHENG *et al.*, 2012; LUO *et al.*, 2012c; GONG *et al.*, 2012; YANG *et al.*, 2016; LIN *et al.*, 2017; CUI *et al.*, 2017; GONG *et al.*, 2018; ZHAO *et al.*, 2020; LAVAEI; FIROOZJAEI, 2021; ZHANG *et al.*, 2022). Os resultados obtidos com o modelo proposto foram comparados com os resultados alcançados com o MEF, demonstrando a viabilidade da técnica (Figura 4).

Figura 4 – Projeto ótimo obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Zheng *et al.* (2008). O resultado foi comparado com o alcançado utilizando o MEF.

(a) Viga em balanço.

(b) Projeto ótimo.

(c) Projeto ótimo - MEF.



Fonte: Zheng *et al.* (2008).

Li e Atluri (2008a) propuseram uma nova abordagem para resolução de problemas de otimização topológica de estruturas elásticas isotrópicas acoplando o SIMP com um método de colocação misto baseado no método MLPG. Nesse modelo, os deslocamentos e as tensões são interpolados de forma independente, no entanto, ambas as interpolações utilizam as funções de forma construídas através da aproximação MLS. A função teste da forma fraca local é adotada como sendo a função Delta de Dirac, eliminando assim a necessidade de resolver integrais durante o processo. No mesmo ano, os autores estenderam essa técnica para tratar de problemas de otimização topológica com sólidos ortotrópicos (LI; ATLURI, 2008b).

Du *et al.* (2008) tiveram como propósito estudar o uso de métodos sem malha em otimização topológica para avaliar o desempenho de mecanismos flexíveis com atuadores

termomecânicos. Ao contrário de grande parte das pesquisas em otimização topológica que adotam como função objetivo a minimização da energia total de deformação, nesse tipo de problema o objetivo é maximizar o deslocamento final. O método sem malha EFG é empregado para discretizar o domínio de projeto e obter as temperaturas e os deslocamentos nodais. Por sua vez, a abordagem Assintóticas Móveis (*Method of Moving Asymptotes* - MMA) é usada com o SIMP para a atualização das variáveis de projeto. Em Du *et al.* (2009), os autores aprimoraram o modelo ao incorporar uma análise geométrica não linear, proporcionando uma representação mais precisa do comportamento da estrutura em situações de grandes deslocamentos.

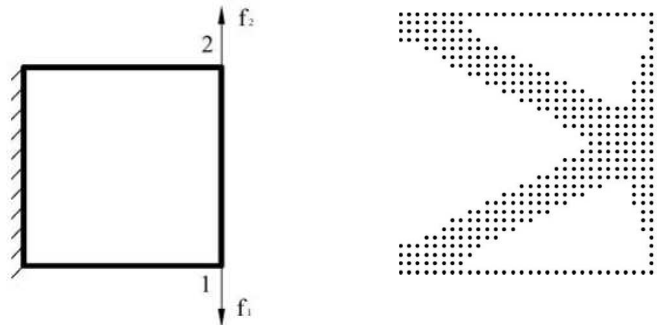
Um modelo que combina o SIMP com o método MLPG associado ao Método de Volume Finito (*Finite Volume Meshless Local Petrov-Galerkin* - FVMLPG) foi proposto por Zheng *et al.* (2009). No FVMLPG, a aproximação MLS é utilizada para a obtenção das funções de forma, que são usadas para interpolar de maneira independente os deslocamentos e as deformações em pontos distribuídos aleatoriamente. O uso das deformações como variável independente permite que as integrais da forma fraca local sejam realizadas sem a necessidade do cálculo das derivadas das funções de forma, melhorando a eficiência da técnica em comparação ao MLPG original (ATLURI; ZHU, 1998).

Um estudo sobre otimização topológica de estruturas sob múltiplas cargas e restrições de tensão, baseado no EFG em conjunto com o SIMP, foi desenvolvido por Gong *et al.* (2010). Nos casos de múltiplas cargas, cada uma das cargas atua individualmente na estrutura e corresponde a uma função objetivo. A função objetivo geral é analisada através de um método de ponderação, sendo expressa como a soma das funções objetivo de cada carregamento, cada uma multiplicada por um fator de ponderação. Nas situações envolvendo restrição de tensão, a tensão de von Mises é considerada e, uma vez que o número de restrições de desigualdade torna-se igual ao número de nós no domínio de projeto, dificultando a solução do problema, uma função penalidade é introduzida no modelo. As densidades e os deslocamentos no campo de projeto são aproximados através do MLS. Um resultado obtido para uma estrutura submetida a múltiplas cargas é mostrado na Figura 5.

A otimização topológica de placas Reissner-Mindlin usando o SIMP com um método sem malha de Petrov-Galerkin de Vizinhança Natural (*Natural Neighbour Petrov-Galerkin* - NNPG) foi investigada por Li *et al.* (2010). No NNPG, as funções tentativas sobre um domínio local são construídas baseadas em uma interpolação de vizinhança natural, e as funções testes são definidas como sendo as funções de forma de um elemento triangular de três nós do MEF. A

Figura 5 – Resultado obtido para uma estrutura sob múltiplas cargas com o modelo proposto por Gong *et al.* (2010).

(a) Domínio de projeto. (b) Projeto ótimo.



Fonte: Gong *et al.* (2010).

interpolação de vizinhança natural é realizada com base no diagrama de Voronoi e na tesselação de Delaunay e as funções de forma obtidas, empregadas para aproximar ambos os campos de densidade e deslocamento, possuem a propriedade Delta de Kronecker.

Zheng *et al.* (2012) aplicaram o SIMP em conjunto com o EFG para tratar de problemas de otimização topológica de estruturas contínuas sujeitas a vibração livre. Na formulação do problema topológico, o objetivo é maximizar o autovalor fundamental. No desenvolvimento da abordagem SIMP, o tensor de material e a matriz de massa são relacionados com a densidade, de modo que ambos sofrem a influência de uma potência de penalização. O EFG é usado para a geração do sistema de equações discretas, que, após ser resolvido, permite a obtenção dos autovalores e autovetores associados ao problema.

Fazendo uso também do EFG e do SIMP, Luo *et al.* (2012c) desenvolveram um novo modelo que utiliza uma aproximação em dois níveis para as densidades, empregando a função de Shepard. No primeiro nível, a função de Shepard é utilizada para aproximar as densidades nodais. A densidade em um nó arbitrário no domínio de projeto é avaliada de acordo com as variáveis de densidades nodais localizadas dentro do domínio de influência do nó em questão. No segundo nível, a função de Shepard é usada para aproximar a densidade em qualquer ponto computacional no domínio de projeto, que mais tarde é definido como um ponto de integração. A densidade em qualquer ponto computacional é determinada considerando as densidades atualizadas, no primeiro nível, dos nós dentro do domínio de influência do ponto de interesse. No EFG, as funções de forma utilizadas para a aproximação dos deslocamentos nodais são construídas através do MLS, e sendo, portanto, a função de Shepard usada apenas para a obtenção das densidades. Inicialmente, somente estruturas elásticas lineares foram consideradas, porém, posteriormente,

uma análise geométrica não linear foi incorporada ao modelo com o intuito de tratar problemas envolvendo mecanismos flexíveis com grandes deslocamentos (WANG *et al.*, 2015a).

Um método de otimização topológica modal baseado no SIMP com o EFG foi apresentado por GONG *et al.* (2012). O processo de otimização modal estabelecido visa encontrar a distribuição mais razoável dos materiais no domínio de projeto, de modo a maximizar a frequência natural de primeira ordem. Para evitar o fenômeno de multifrequência, cada autovalor é multiplicado por um fator constante elevado a uma potência. A matriz de massa também é modificada, de forma que, no domínio com baixa densidade relativa, a massa é definida como sendo muito baixa adotando um valor elevado para uma potência de penalização.

Baseado no EFG e em um esquema independente de interpolação para o campo de densidade, He *et al.* (2014) apresentaram um método de otimização topológica para estruturas geometricamente não lineares. O EFG é utilizado para discretizar o domínio de análise e obter os deslocamentos nodais. Para descrever a distribuição de material no domínio de projeto, primeiramente, as variáveis de densidade são definidas em um conjunto de pontos que é independente do conjunto de nós da análise numérica e uma interpolação via função de Shepard é então realizada. No processo de interpolação, a densidade em um ponto computacional é obtida através das variáveis de densidade localizadas dentro do domínio de influência do ponto considerado. Para superar o problema de convergência decorrente de regiões com baixa densidade, um critério de convergência baseado na energia de deformação é utilizado.

Wang *et al.* (2015b) empregaram uma abordagem numérica sem malha para resolver problemas de otimização topológica no projeto de compósitos microestruturais. O método da Homogeneização (Apêndice A.1), em sua forma inversa, é aplicado para avaliar as propriedades efetivas do compósito. As funções de forma do RPIM são utilizadas para a interpolação dos campos de deslocamento e densidade. No processo de otimização, as variáveis de densidades nodais são atualizadas através do MMA.

Yang *et al.* (2016) aplicaram o EFG para resolver problemas de otimização topológica de estruturas contínuas sujeitas a restrições de deslocamento. Na formulação matemática desenvolvida através do SIMP, a minimização do peso é considerada como função objetivo, e as densidades dos pontos de integração são adotadas como variáveis de projeto. Uma relação explícita entre as variáveis topológicas e as restrições de deslocamento é estabelecida permitindo a evolução do modelo.

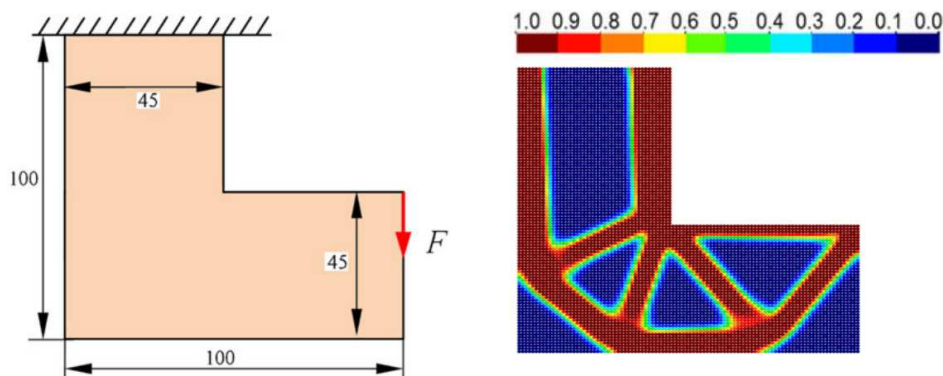
Uma abordagem alternativa de otimização topológica, baseada em um algoritmo

sem malha SPH foi sugerida por Lin *et al.* (2017). Inicialmente, problemas presentes no SPH clássico (LIU; LIU, 2010), que complicam sua aplicação em mecânica dos sólidos, foram tratados. A deficiência, denominada "inconsistência", que pode ser causada, por exemplo, pela distribuição irregular das partículas, fazendo com que uma função constante ou a derivada de uma função linear não possam ser aproximadas pelo método, é solucionada através do uso de um procedimento de correção. Nesse procedimento, a forma corrigida da aproximação da partícula para a função de deslocamento é alcançada mediante a aplicação de uma expansão em série de Taylor. No entanto, o emprego dessa estratégia ocasiona outro problema chamado "instabilidade de tração", que resulta em agrupamento e fragmentação das partículas. Para contornar essa dificuldade, uma função de Kernel na configuração inicial sem deformação é utilizada. No processo topológico, um método SIMP modificado é considerado, sendo o módulo de Young de uma partícula definido pela seguinte relação:

$$E = E^v - \rho^p (E^s - E^v), \quad (2.1)$$

onde E^s e E^v representam o módulo de Young dos materiais sólido e vazio, respectivamente, ρ é a densidade e p é o expoente de penalização. A Figura 6 mostra um dos resultados obtidos. Inicialmente, apenas estruturas elásticas lineares bidimensionais sob a ação de uma única carga foram abordadas. Entretanto, em Li *et al.* (2020), o modelo foi ampliado para lidar com casos de múltiplas cargas.

Figura 6 – Resultado obtido com o modelo proposto por Lin *et al.* (2017).
 (a) Viga em forma de L. (b) Projeto ótimo.



Fonte: Lin *et al.* (2017).

Cui *et al.* (2017) apresentaram um método de otimização topológica para estruturas com múltiplos materiais, aliando o EFG com um algoritmo de fase ativa alternada. Nesse algoritmo, o cálculo da otimização é realizado através de laços aninhados de tal forma que, em

cada laço interno, um subproblema de otimização topológica de duas fases é resolvido. Durante o processo de resolução realizado pela abordagem SIMP, a topologia das duas fases que estão sendo consideradas (fases ativas) é variada, enquanto que a topologia das outras fases restantes permanece fixa no último resultado obtido. Os deslocamentos nodais são aproximados através do MLS convencional. Entretanto, para a obtenção das densidades nodais, a interpolação de Shepard é combinada com a função de forma do MLS.

Com o intuito de reduzir o custo computacional em métodos de otimização topológica baseados no EFG, Zhang *et al.* (2017) propuseram uma abordagem de acoplamento considerando o EFG e o MEF. A chave para o desenvolvimento do método é a construção da função peso utilizada no EFG – uma função cosseno, em que o tamanho de seu suporte depende de um parâmetro de dilatação. Quando um valor pequeno para o parâmetro de dilatação é usado, as funções de forma do EFG se aproximam das funções de forma do MEF, cuja propriedade do Delta de Kronecker é satisfeita. Um algoritmo de diagrama de Voronoi centroidal restrito, associado à variável de densidade do SIMP, é aplicado para gerar o conjunto de pontos do EFG. Além disso, as densidades são aproximadas através da estratégia de dois níveis sugerida por Luo *et al.* (2012c) e são atualizadas por meio do MMA. Em Zhang *et al.* (2018), os autores estenderam o modelo para considerar estruturas hiperelásticas.

A resolução de problemas de otimização topológica de estruturas, baseada no SIMP em conjunto com um método de Galerkin Livre de Elementos Melhorado (*Improved Element-Free Galerkin - IIEFG*), foi sugerida por Wu *et al.* (2017). O IIEFG tenta superar, através do uso de uma aproximação melhorada dos Mínimos Quadrados Móveis (*Improved Moving Least Squares - IMLS*), a desvantagem das matrizes singulares que às vezes ocorre no EFG convencional. No IMLS, as funções de base algébrica utilizadas no MLS tradicional são substituídas por funções de base ortogonal construídas através da ortogonalização de Gram-Schmidt. Além de tratar do problema de matrizes singulares no EFG, os autores mostraram que o uso do IMLS também melhora a eficiência do método, visto que nesse esquema de aproximação o cálculo de uma matriz inversa não é mais necessário.

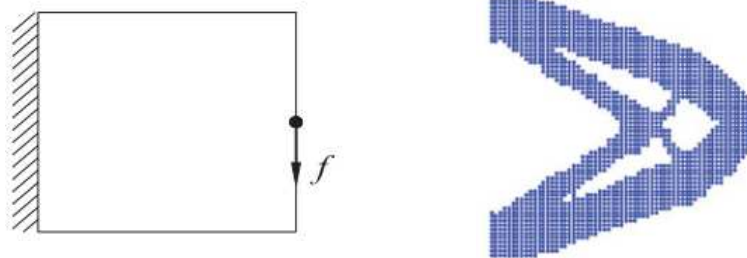
Com base no modelo material SIMP integrado com o EFG, Gong *et al.* (2018) propuseram uma nova metodologia que considera o movimento das partículas para alcançar o projeto ótimo. O movimento das partículas é controlado levando em conta o valor de sua densidade, isto é, partículas com densidades inferiores a um valor limite são movidas para posições com valores de densidades mais elevadas, enquanto as partículas com densidades altas

são mantidas imóveis. O processo finaliza quando todas as partículas possuem densidades maiores ou iguais ao valor limite. Para evitar a sobreposição de partículas, um valor para a distância mínima entre elas é considerado. Um dos resultados alcançados é mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Resultado obtido com o modelo proposto por Gong *et al.* (2018).

(a) Viga em balanço.

(b) Projeto ótimo.



Fonte: Gong *et al.* (2018).

Um modelo numérico para otimização topológica de estruturas térmicas isotrópicas e anisotrópicas, combinando o método EFG com uma abordagem denominada Aproximação Racional de Propriedade Material (*Rational Approximation of Material Properties - RAMP*), foi proposto por Zhang *et al.* (2019). Através do método RAMP, a condutividade térmica do material, ao invés de ser descrita por um modelo matemático baseado em uma função de potência, como acontece na metodologia SIMP, é representada por meio de uma função racional que depende de um fator de penalização. A dissipação da capacidade potencial de transporte de calor é tomada como função objetivo, e as densidades relativas dos nós do EFG são consideradas como variáveis de projeto, sendo atualizadas através do OC. As estruturas ótimas alcançadas apresentaram bom desempenho na dissipação de calor, possuindo fronteiras mais nítidas quando comparadas com as obtidas com o MEF.

Sohouli *et al.* (2020) investigaram a otimização topológica de estruturas com e sem a presença de fissuras, empregando uma abordagem sem malha Peridinâmica associada a um método SIMP modificado. A Peridinâmica é uma forma não local da mecânica do contínuo em que, ao invés de resolver uma equação diferencial parcial, uma equação integro-diferencial é considerada. No modelo topológico proposto, as propriedades materiais são interpoladas através do esquema SIMP, e além do tradicional esquema de atualização das densidades através do uso do OC, outro mecanismo também é adotado. Nesse método, denominado de Otimização Topológica Proporcional (*Proportional Topology Optimization - PTO*), a análise de sensibilidade comumente empregada nas técnicas de otimização topológica não é realizada, e a atualização

das variáveis de projeto é feita considerando o valor da função objetivo. As duas abordagens são comparadas, mostrando que resultados diferentes podem ser alcançados quando fissuras são introduzidas no domínio de projeto.

Em um estudo que integra o Método de Diferenças Finitas Generalizado (*Generalized Finite Difference Method - GFDM*) sem malha com a abordagem SIMP, Zhao *et al.* (2020) propuseram uma estratégia de otimização topológica para problemas de condução de calor em estado estacionário. No GFDM, uma expansão em série de Taylor e uma aproximação MLS são utilizadas para discretizar a equação diferencial parcial governante em fórmulas de diferenças explícitas, abordando as derivadas parciais necessárias das variáveis nodais desconhecidas. Para alcançar o caminho otimizado de condução térmica, um modelo matemático de otimização topológica é estabelecido, no qual a minimização da capacidade potencial térmica é adotada como função objetivo, sob restrição do número de nós. O método SIMP é empregado para desenvolver a relação entre os coeficientes de condução de calor e as variáveis de densidade nodais.

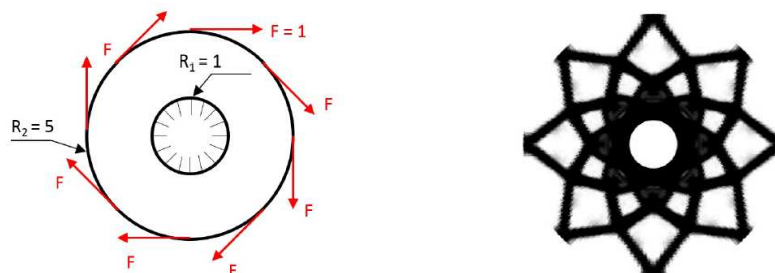
Usando uma distribuição irregular de nós e as densidades nos pontos de integração de Gauss como variáveis de projeto, Lavaei e Firoozjaee (2021) integraram os métodos EFG e SIMP. Para assegurar a presença de uma quantidade suficiente de nós dentro do domínio de suporte de um ponto arbitrário, proporcionando resultados com boa precisão, o raio do domínio de suporte é calculado com base em uma distância média entre os nós. Exemplos comumente encontrados na literatura foram realizados, mostrando a viabilidade do modelo.

Nguyen e Bui (2022) desenvolveram um novo modelo combinando os métodos PTO e RPIM. O módulo de Young de cada nó é definido conforme a Equação (2.1), e as densidades dos pontos de integração são consideradas como variáveis de projeto. O resultado obtido para um disco carregado tangencialmente é mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Resultado obtido para um disco carregado tangencialmente com o modelo proposto por Nguyen e Bui (2022).

(a) Domínio de projeto.

(b) Projeto ótimo.



Fonte: Nguyen e Bui (2022).

Ullah *et al.* (2022) também apresentaram uma abordagem PTO, porém a associaram com um método sem malha baseado em entropia máxima para resolver problemas envolvendo restrição de tensão e minimização da energia total de deformação. As funções base de entropia máxima (SUKUMAR; WRIGHT, 2007) possuem a propriedade Delta de Kronecker, facilitando a aplicação das condições de contorno de deslocamento. Essas funções, assim como suas derivadas, são calculadas apenas uma vez no início da simulação e são utilizadas em cada iteração do processo de otimização para computar a matriz de rigidez, a tensão e a energia de deformação. O modelo SIMP estabelecido pela Equação (2.1) é adotado para obtenção das propriedades de material, e as variáveis de projeto, definidas como as densidades em cada ponto de integração, são computadas com base nos valores da tensão de von Mises e da energia de deformação.

Um algoritmo de otimização topológica para estruturas periódicas com materiais ortotrópicos, utilizando o EFG e o método SIMP, foi desenvolvido por Zhang *et al.* (2022). O domínio é inicialmente dividido em subdomínios de projeto, e o modelo é então estabelecido usando a matriz de rigidez elástica ortotrópica e impondo restrições periódicas aos subdomínios gerados. Exemplos realizados mostraram que o número de subdomínios deve ser apropriadamente controlado para que estruturas periódicas com complexidade moderada possam ser alcançadas.

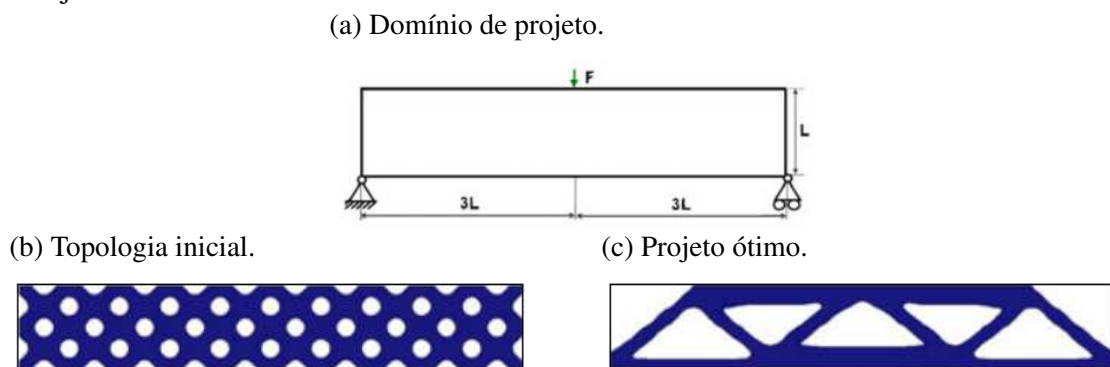
Liu *et al.* (2023) aplicaram um Método de Contorno Singular do tipo Burton-Miller (*Burton-Miller-type Singular Boundary Method - BM-SBM*) sem malha semi-analítico para analisar o desempenho acústico de barreiras de som com diferentes formatos e obter, através da combinação com uma abordagem SIMP, a distribuição ótima de materiais absorvedores de som sobre a superfície das barreiras. No método BM-SBM, a equação diferencial governante é aproximada como uma combinação linear das soluções fundamentais nos pontos nodais. Para o processo de otimização topológica, a minimização da pressão sonora em um dado plano de referência é tomada como função objetivo e as densidades nodais são atualizadas através da abordagem MMA. Resultados obtidos indicaram que o efeito da redução de ruído não é necessariamente melhor se toda a superfície da barreira de som é coberta com materiais absorvedores de som.

2.2 Abordagens de Conjunto de Nível

Luo *et al.* (2012a) desenvolveram um método de Conjunto de Nível (*Level-Set - LS*) (Apêndice A.3) para otimização topológica e de forma de estruturas contínuas, usando um método de Galerkin sem malha com forma fraca global. Nesse modelo, CSRBF são utilizadas para

parametrizar a função de conjunto de nível e construir as funções de forma para a aproximação sem malha da forma fraca. Dessa maneira, os dois estágios numéricos, geralmente envolvidos nos métodos LS convencionais, que correspondem à propagação da função de conjunto de nível discreta e à aproximação das equações discretas, são unificados sobre um conjunto de nós de campo dispersos. Apesar de uma configuração inicial para a topologia ser necessária para a evolução do modelo, característica comum presente em abordagens LS, a exclusão e adição de novos buracos na estrutura são realizadas diretamente, sem a necessidade de aplicação de técnicas adicionais. Um dos resultados obtidos é mostrado na Figura 9. Em Luo *et al.* (2012b), os autores expandiram a técnica proposta para tratar de problemas envolvendo estruturas geometricamente não lineares com atuadores flexíveis multifísicos.

Figura 9 – Resultado obtido com o modelo proposto por Luo *et al.* (2012a). Topologia no conjunto de nível zero.



Fonte: Luo *et al.* (2012a).

Um modelo que combina o EFG com uma abordagem LS foi proposto por Khan *et al.* (2019). A função de conjunto de nível é tomada como sendo uma função distância com sinal, e as funções de forma do MLS são empregadas para aproximar os deslocamentos nodais. Uma única discretização é utilizada tanto para a análise estrutural quanto para a função de conjunto de nível discreta, permitindo uma avaliação rápida das sensibilidades de forma e topológica. Nenhuma configuração inicial para topologia é necessária, porém, a inserção de buracos no modelo é realizada por meio do uso de derivadas topológicas. Para conseguir gerar buracos de forma automática e eliminar a utilização de derivadas topológicas, em Ullah *et al.* (2022) foi realizada uma modificação no método, em que a função de conjunto de nível passou a ser parametrizada através de CSRBF. Além disso, em Khan *et al.* (2023), os autores mostraram como converter o projeto ótimo obtido em um formato *Computer Aided Design* - CAD padrão, permitindo a sua fabricação.

Integrando um método de conjunto de nível com o RPIM, Ai e Gao (2019) projetaram

metamateriais mecânicos microarquitetados bidimensionais. Fazendo uso da mesma estratégia adotada por Luo *et al.* (2012a), a função de conjunto de nível é parametrizada via CSRBF. As propriedades elásticas efetivas do material compósito, como módulo volumétrico, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson, são determinadas por um método de Homogeneização baseado em energia de deformação. Tanto o caso de um único material sólido quanto o caso de dois materiais sólidos, ambos com uma fase vazia adicional, são otimizados topologicamente. Para cada um dos casos, três problemas sob restrição de volume são considerados: maximizar o módulo volumétrico; maximizar o módulo de cisalhamento; e minimizar o coeficiente de Poisson. Na situação multimaterial com duas fases sólidas, cada fase é associada a uma função de conjunto de nível. A inserção de buracos é feita de forma automática durante o processo de otimização, mas a dependência de uma configuração inicial para a topologia se faz presente.

Neofytou *et al.* (2020) apresentaram um método de conjunto de nível com uma abordagem de partícula RK para minimizar a energia total de deformação de estruturas sujeitas a cargas de pressão em suas fronteiras. Inicialmente, as partículas de domínio são colocadas nas posições nodais de uma malha de fundo criada com o propósito de resolver a integração numérica através da quadratura de Gauss. A cada iteração, partículas são adicionadas nos pontos de interseção entre a malha de fundo e as bordas da estrutura. Se uma partícula ficar muito próxima a uma partícula de borda, a mesma é removida. Antes de iniciar a otimização, as partículas nas bordas com carga de pressão são marcadas como partículas de pressão. Durante o processo, dependendo do valor da função de conjunto de nível e da posição da borda de pressão, as partículas podem ser classificadas nos seguintes tipos: partículas sólidas, que estão dentro da estrutura; partículas vazias, que estão fora da estrutura; partículas de borda, que estão sobre a borda da estrutura; e partículas de pressão, que indicam onde a carga de pressão deve ser aplicada. Testes realizados com a metodologia proposta mostraram que projetos finais equivalentes são obtidos considerando ou não uma configuração inicial para a topologia. Posteriormente, em Neofytou *et al.* (2021), os autores modificaram o modelo proposto em que, ao invés de fazer uso da quadratura de Gauss, a integração numérica é realizada através de um esquema nodal estabilizado naturalmente, empregando domínios nodais construídos por meio do diagrama de Voronoi. Em cada iteração da otimização, as partículas de borda são colocadas nos pontos em que as bordas da estrutura interceptam os elementos de uma malha de conjunto de nível e as partículas no interior são posicionadas livremente. Para analisar essa nova proposta, problemas baseados em tensão também foram considerados.

2.3 Abordagens Evolucionárias

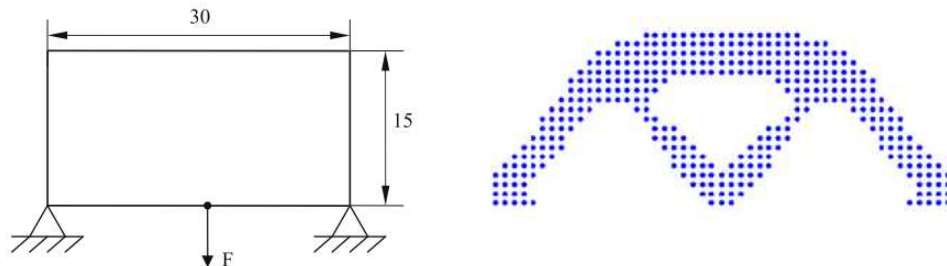
Lee *et al.* (2009) descreveram uma técnica de otimização topológica baseada no método ESO (Apêndice A.4) com uma abordagem sem malha para o desenvolvimento de estruturas de treliças bidimensionais. No algoritmo ESO, o domínio inicial evolui para a topologia ótima através da remoção dos nós com baixa tensão. A remoção é realizada atribuindo ao nó um módulo de elasticidade baixo. Pequenas quantidades de material são removidas em cada etapa do processo, evitando instabilidades no algoritmo e garantindo uma transição suave de uma topologia gerada para a subsequente. O RPIM é usado para a avaliação dos deslocamentos e tensões nodais.

Uma abordagem ESO juntamente com o método EFG foi proposta por Juan *et al.* (2010). Considerando a minimização do peso como função objetivo, a formulação matemática do problema de otimização é desenvolvida baseada em um critério de remoção através da tensão. Assim como no trabalho de Lee *et al.* (2009), nós com baixa tensão são removidos. Um dos resultados obtidos com a técnica é mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Resultado obtido para uma viga com suportes fixos utilizando o modelo proposto por Juan *et al.* (2010).

(a) Viga apoiada.

(b) Projeto ótimo.



Fonte: Juan *et al.* (2010).

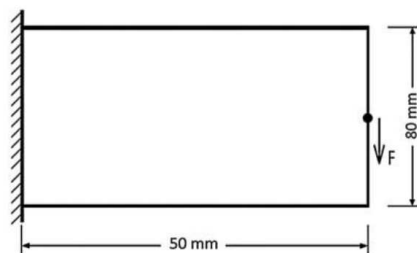
Zhao (2014) associou um método de Galerkin sem malha com uma abordagem BESO (Apêndice A.4) modificada. No esquema BESO sugerido, uma aproximação em dois níveis para as densidades é realizada. Assim como no trabalho de Luo *et al.* (2012c), a função de Shepard é utilizada para aproximar primeiramente as densidades nodais e, em seguida, é usada para aproximar a densidade nos pontos de integração de Gauss com base nas densidades nodais atualizadas. O critério de Densidade de Energia de Deformação (*Strain Energy Densities* - SED) é usado para adição e remoção de material. Dessa forma, nós com valores elevados de SED passam a ter material sólido, caso contrário, material suave é atribuído. No método de Galerkin,

CSRBF são utilizadas para construção das funções de forma e para obter os deslocamentos nodais.

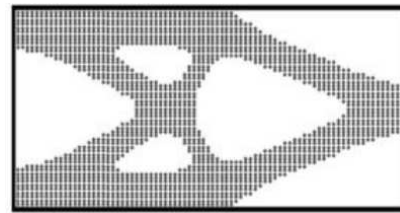
Um método BESO combinado com o EFG foi sugerido por Shobeiri (2015a). A formulação matemática da otimização topológica é desenvolvida considerando a minimização da energia total de deformação como função objetivo, porém, restrições são impostas no peso da estrutura, ao invés do volume, como acontece em grande parte das pesquisas. A energia de deformação nodal é utilizada como critério para remoção e adição de material. Limiares para a energia de deformação nodal são especificados com base no peso pretendido em cada iteração. A Figura 11 mostra um dos testes realizados e o resultado alcançado. Em Shobeiri (2015b), o método proposto foi ampliado para considerar estruturas com a presença de fissuras.

Figura 11 – Resultado obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Shobeiri (2015a).

(a) Viga em balanço.



(b) Projeto ótimo.



Fonte: Shobeiri (2015a).

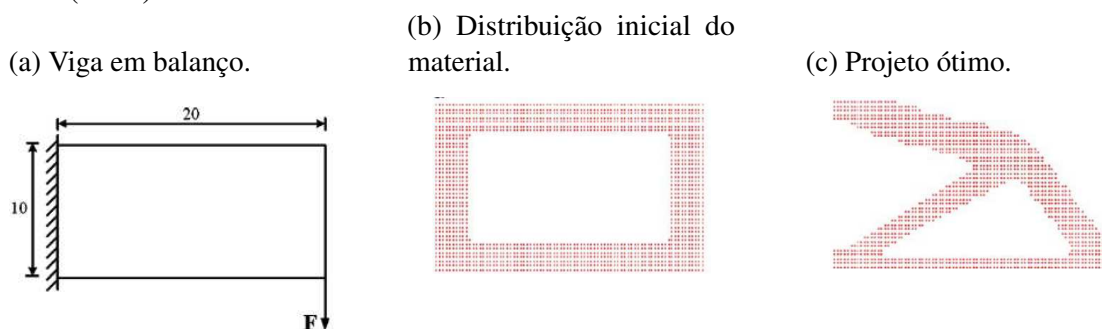
Gonçalves *et al.* (2022a) propuseram uma nova abordagem topológica associando um algoritmo BESO modificado com o RPIM. No algoritmo de BESO proposto, baseado no valor de uma média cúbica para a tensão de von Mises, regiões com uma mudança significativa no nível de tensão são identificadas e reforçadas com material sólido. Esse processo evita que partes estruturalmente importantes do domínio se tornem muito finas. Para mostrar a aplicabilidade do método, testes em peças de aeronaves foram realizados. Em Gonçalves *et al.* (2022b, 2022c), o modelo proposto foi alterado substituindo o RPIM por um Método de Interpolação de Ponto Radial com Vizinhança Natural (*Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* - NNRPIM). Na formulação NNRPIM apresentada, a integração numérica é realizada via a construção de uma malha de fundo obtida através do diagrama de Voronoi e da triangulação de Delaunay. Uma célula de Voronoi associada a um determinado nó é dividida em um número finito de subcélulas por meio da triangulação de Delaunay. Os pontos de integração são então localizados dentro de cada subcélula na posição de seu baricentro. Depois de construir a malha de integração, as funções de forma são obtidas com base em um conceito de célula de influência.

Nesse conceito, o domínio de influência de um ponto de interesse é obtido considerando os nós cuja célula de Voronoi possui uma aresta em comum com a célula que contém o ponto. Além de considerar estruturas de aeronaves, peças automotivas também foram otimizadas.

2.4 Outras Abordagens

Zhou e Zou (2007) combinaram o método RK com uma descrição topológica implícita. Uma função implícita é estabelecida de modo que seu valor depende da localização do ponto no domínio de projeto. Essa função, assim como os deslocamentos nodais, é aproximada através das funções de forma do método sem malha. As variáveis de projetos, que são atualizadas durante o processo de otimização via a análise da sensibilidade da energia de deformação, são definidas como a função implícita nos nós. Forças concentradas, que são comuns em otimização estrutural, mas pouco discriminadas na literatura sem malha, são consideradas. Essas forças são tratadas através de uma função delta generalizada que converte o problema para aplicação de condições de contorno de tração distribuída. Problemas elastostáticos bidimensionais foram resolvidos e os resultados foram comparados com uma abordagem SIMP sem malha, mostrando a plausibilidade da técnica proposta (Figura 12).

Figura 12 – Resultado obtido para uma viga em balanço com o modelo proposto por Zhou e Zou (2007).



Fonte: Zhou e Zou (2007).

Um método Ótimo de Pareto com uma abordagem de Galerkin sem malha foi proposto por Zhao (2013). Para a aplicação da teoria Ótimo de Pareto, primeiramente, o problema com um único objetivo é transformado em um problema multiobjetivo. Para realizar essa modificação, uma teoria de otimização ponderada é aplicada, e o problema passa a ser definido pela minimização da soma da função objetivo com o volume desejado para a estrutura, ambos ponderados por pesos predefinidos. O projeto final é obtido via derivadas topológicas, em que uma topologia é considerada um Ótimo de Pareto se nenhuma outra topologia existir

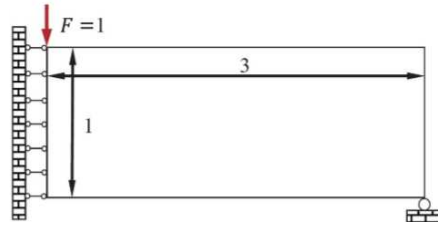
com menor valor para a função objetivo e mesmo volume. As funções de forma do método de Galerkin são construídas através de CSRBF, sendo esse utilizado para obter os deslocamentos, as deformações e as tensões nodais.

Uma abordagem de otimização topológica utilizando derivadas topológicas e um Método Sem Malha baseado em Splines (*Spline-based Meshfree Method* - SBMFM) foi proposta por Hur *et al.* (2017). O SBMFM surgiu a partir da Análise Isogeométrica (*Isogeometric Analysis* - IGA), que integra projeto e análise através de funções *Non-uniform Rational B-spline* - NURBS. No modelo desenvolvido, o SBMFM faz uso da técnica de recorte do sistema CAD, representando o domínio usando curvas NURBS. A derivada topológica é aplicada para descrever a sensibilidade das curvas e, em seguida, essas curvas são atualizadas por meio de um algoritmo de ajuste de curva. Mudanças topológicas são alcançadas através da inserção de novas curvas, que são determinadas comparando as derivadas topológicas nas fronteiras e em pontos de avaliação dentro do domínio de projeto.

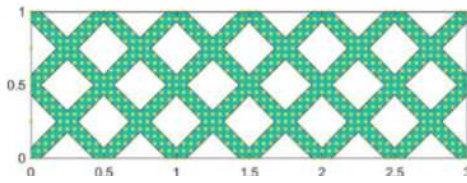
A otimização topológica de estruturas através de um método baseado em Componentes Morfáveis Móveis Sem Malha (*Meshless Moving Morphable Component* - ML-MMC) foi proposta por Li *et al.* (2022). Na abordagem ML-MMC, o domínio de projeto é ocupado por um número finito de componentes estruturais sólidas que podem se mover e deformar. A topologia ótima é então alcançada otimizando os parâmetros geométricos associados a essas componentes. A análise estrutural é realizada apenas na região sólida ocupada pelas componentes, dessa forma, a distribuição dos nós sem malha nessa região passa a ser de grande importância. No modelo proposto, inicialmente, um certo número de nós e pontos de integração de Gauss são distribuídos uniformemente no domínio de projeto. Em seguida, os nós e pontos de integração cobertos por componentes são ativados. Por fim, nós adicionais são distribuídos nas bordas e na região onde a carga externa é aplicada, permanecendo ativos durante todo o processo de otimização. Como a distribuição dos nós ativos é frequentemente não uniforme, o domínio de influência desses nós é ajustado dinamicamente para evitar problemas de singularidade na matriz de rigidez. Com esse tratamento, mesmo que as componentes estejam desconectadas no domínio de projeto físico, elas passam a estar conectadas na análise numérica. O EFG é a estratégia sem malha adotada, e o MMA é utilizado para atualizar as variáveis de projeto. A Figura 13 mostra um dos resultados obtidos.

Figura 13 – Resultado obtido com o modelo proposto por Li *et al.* (2022).

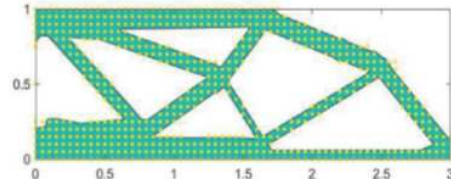
(a) Domínio de projeto.



(b) Topologia inicial.



(c) Projeto ótimo.

Fonte: Li *et al.* (2022).

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados alguns métodos de otimização topológica baseados em uma análise numérica sem malha. A Tabela 1 sintetiza as pesquisas relatadas. Nota-se que várias técnicas de otimização topológica, especialmente a abordagem SIMP, têm sido associadas a diversos métodos numéricos sem malha, sendo o EFG o mais utilizado. No entanto, é interessante apontar que a maior parte desses procedimentos numéricos, tal como o EFG, faz uso de uma malha de fundo em alguma etapa do desenvolvimento, seja para construir o espaço de funções tentativas ou para realizar a integração numérica. Desse modo, neste trabalho, uma técnica verdadeiramente sem malha é empregada, isto é, que não utiliza nenhuma malha em todo o processo, associando-a com um método BESO, que, no contexto de otimização topológica sem malha, ainda é pouco explorado. No próximo capítulo, essa nova metodologia de otimização será descrita.

Tabela 1 – Pesquisas em otimização topológica baseadas em uma análise numérica sem malha.

Métodos Sem Malha	Métodos de Otimização Topológica					
	Abordagens de Densidade		Conjunto de Nível	Evolucionários		Outros
	SIMP	Outras		ESO	BESO	
RK		Cho e Kwak (2006)	Neofytou <i>et al.</i> (2020), Neofytou <i>et al.</i> (2021)			Zhou e Zou (2007)

Tabela 1 - continuação da página anterior

Métodos Sem Malha	Métodos de Otimização Topológica					
	Abordagens de Densidade		Conjunto de Nível	Evolucionários		Outros
	SIMP	Outras		ESO	BESO	
RPIM	Zheng <i>et al.</i> (2008)	Wang <i>et al.</i> (2015b), Nguyen e Bui (2022)	Ai e Gao (2019)	Lee <i>et al.</i> (2009)	Gonçalves <i>et al.</i> (2022a)	
NNRPIM					Gonçalves <i>et al.</i> (2022b), Gonçalves <i>et al.</i> (2022c)	
EFG	Du <i>et al.</i> (2008), Du <i>et al.</i> (2009), Gong <i>et al.</i> (2010), Zheng <i>et al.</i> (2012), Luo <i>et al.</i> (2012c), GONG <i>et al.</i> (2012), Wang <i>et al.</i> (2015a), Yang <i>et al.</i> (2016), Cui <i>et al.</i> (2017), Zhang <i>et al.</i> (2017), Zhang <i>et al.</i> (2018), Lavaei e Firoozjaee (2021), Zhang <i>et al.</i> (2022)	He <i>et al.</i> (2014), Gong <i>et al.</i> (2018), Zhang <i>et al.</i> (2019), Ullah <i>et al.</i> (2022)	Khan <i>et al.</i> (2019), Ullah <i>et al.</i> (2022), Khan <i>et al.</i> (2023)	Juan <i>et al.</i> (2010)	Shobeiri (2015a), Shobeiri (2015b)	Li <i>et al.</i> (2022)
IEFG	Wu <i>et al.</i> (2017)					
Galerkin			Luo <i>et al.</i> (2012a), Luo <i>et al.</i> (2012b)		Zhao (2014)	Zhao (2013)
Colocação com MLPG	Li e Atluri (2008a), Li e Atluri (2008b)					
FVMLPG	Zheng <i>et al.</i> (2009)					
NNPG	Li <i>et al.</i> (2010)					
GFDM	Zhao <i>et al.</i> (2020)					
SPH	Lin <i>et al.</i> (2017), Li <i>et al.</i> (2020)					
Peridinâmico	Sohouli <i>et al.</i> (2020)					
SBMFM						Hur <i>et al.</i> (2017)
BM-SBM	Liu <i>et al.</i> (2023)					

Tabela 1 - continuação da página anterior

Métodos Sem Malha	Métodos de Otimização Topológica					
	Abordagens de Densidade		Conjunto de Nível	Evolucionários		Outros
	SIMP	Outras		ESO	BESO	
Entropia Máxima		Ullah <i>et al.</i> (2022)				

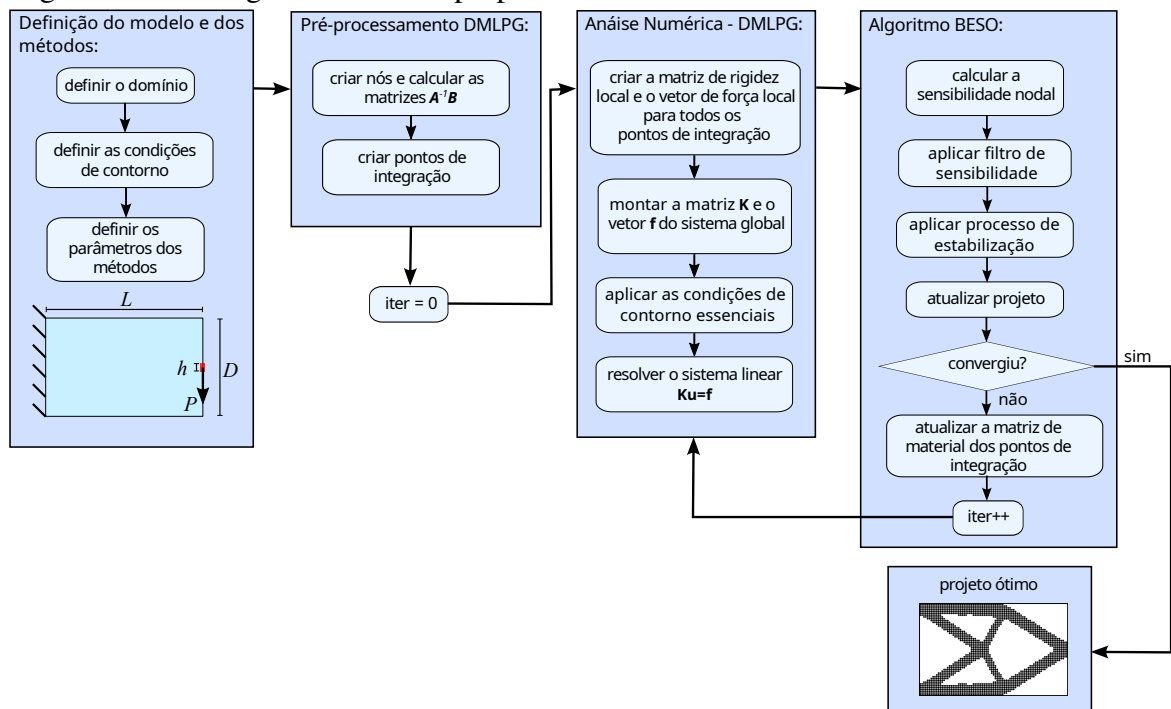
Fonte: Elaborada pelo autor.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA EM UMA ANÁLISE NUMÉRICA SEM MALHA

Destacando-se por sua capacidade de fornecer soluções precisas e eficientes, o método DMLPG tem se tornado uma escolha cada vez mais comum para pesquisadores e engenheiros que buscam uma análise numérica verdadeiramente sem malha robusta e confiável (MIRZAEI; SCHABACK, 2014; MIRZAEI; HASANPOUR, 2016; HASANPOUR; MIRZAEI, 2018; DARANI, 2017; SHOKRI; BAHMANI, 2019; SHOKRI; BAHMANI, 2021). Neste capítulo, a metodologia de otimização topológica proposta é apresentada, a qual integra o DMLPG a um método BESO, tendo como objetivo a minimização da energia total de deformação com restrição de volume em estruturas contínuas elásticas lineares. A abordagem BESO desenvolvida é baseada no algoritmo apresentado por Huang e Xie (2010b), adaptado para o contexto de um procedimento numérico sem malha.

O fluxograma mostrado na Figura 14 sintetiza os passos da abordagem proposta. Inicialmente, o domínio de projeto inicial, juntamente com suas condições de contorno, é definido e alguns parâmetros dos métodos DMLPG e BESO são estabelecidos. Em seguida, o domínio é discretizado em um conjunto de nós e os pontos de integração são criados. Para reduzir o custo computacional, algumas matrizes do DMLPG, que permanecem constantes, são pré-computadas. O processo iterativo começa com a análise DMLPG, na qual um sistema linear é construído

Figura 14 – Visão geral da técnica proposta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

e resolvido para determinar os deslocamentos, deformações e tensões em cada nó. O método BESO é então inicializado com o cálculo das sensibilidades nodais e, logo após, um filtro e um processo de estabilização são aplicados para prevenir a ocorrência de instabilidades numéricas e melhorar a convergência. As variáveis de projeto são atualizadas determinando quais nós terão material adicionado ou removido. Se o processo convergir, o projeto ótimo é alcançado. Caso contrário, a matriz de rigidez elástica é atualizada em cada ponto de integração, e o processo iterativo continua.

Nas seções seguintes, as etapas do método de otimização topológica mencionadas anteriormente são descritas de forma mais detalhada. Na Seção 3.1, a formulação do DMLPG é apresentada, abordando seus princípios fundamentais. Na Seção 3.2, a abordagem BESO, adaptada para empregar a análise numérica sem malha, é explanada. As considerações finais decorrentes das discussões realizadas são apontadas na Seção 3.3.

3.1 Método DMLPG

Em contraste com outros métodos sem malha, como o MLPG (ATLURI; ZHU, 1998) e o EFG (BELYTSCHKO *et al.*, 1994), o método DMLPG caracteriza-se por evitar a construção de funções de forma complicadas, realizando seu processo de integração apenas sobre polinômios. Nesta seção, a teoria relacionada ao DMLPG é apresentada. Na Subseção 3.1.1, o problema de valor de contorno elastostático a ser resolvido é definido. Em seguida, na Subseção 3.1.2, a forma fraca local é determinada e descrita na forma matricial. Nas Subseções 3.1.3 e 3.1.4, a construção das funções tentativas através da aproximação Mínimos Quadrados Móveis Generalizado (*Generalized Moving Least Squares - GMLS*) é demonstrada e a função teste utilizada é estabelecida. Posteriormente, na Subseção 3.1.5, o sistema linear global é montado. As condições de contorno essenciais são aplicadas na Subseção 3.1.6 e a obtenção dos deslocamentos, tensões e deformações é considerada na Subseção 3.1.7. Um algoritmo em alto nível para o DMLPG é descrito no Subseção 3.1.8, resumindo as etapas discutidas ao longo deste capítulo.

3.1.1 Problema de Valor de Contorno

Considere um corpo, conforme ilustrado na Figura 15, com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3), limitado por uma fronteira Γ , sujeito a deformações infinitesimais. O problema

elástico linear é governado pela equação diferencial de equilíbrio

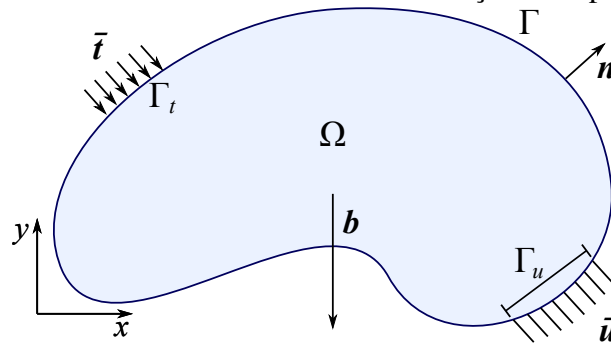
$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \text{ em } \Omega, \quad (3.1)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de tensão de Cauchy e b_i são as componentes da força de corpo, para $1 \leq i, j \leq d$, sendo $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$. As componentes σ_{ij} são relacionadas com as componentes do tensor de deformação infinitesimal, ε_{kl} , para $1 \leq k, l \leq d$, através da lei de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij} = e_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.2)$$

sendo e_{ijkl} os coeficientes de rigidez elástica do material.

Figura 15 – O domínio global Ω e a fronteira global Γ de um corpo arbitrário bidimensional. As fronteiras Γ_u e Γ_t , nessa ordem, são as partes de Γ em que as condições de contorno essenciais e naturais são especificadas. $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são os deslocamentos e as tensões prescritas, respectivamente. \mathbf{n} é o vetor normal unitário em Γ e \mathbf{b} é a força de corpo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O tensor de deformação em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é definido como a parte simétrica do gradiente de deslocamento, assim

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \quad (3.3)$$

com u_i e u_j denotando as componentes do deslocamento.

A fronteira Γ é composta por duas sub-regiões: Γ_u , onde a condição de contorno essencial é prescrita, e Γ_t , onde a condição de contorno natural é especificada (Figura 15). Dessa forma,

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ em } \Gamma_u, \quad (3.4a)$$

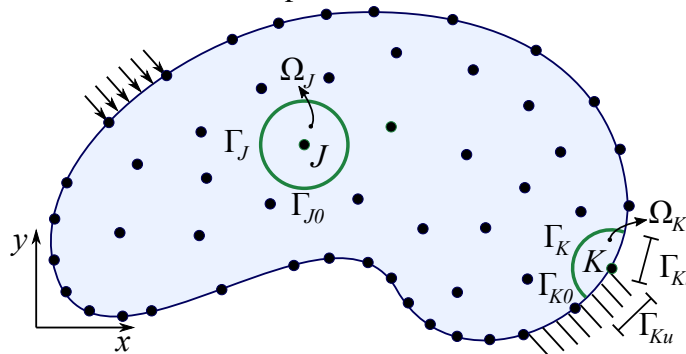
$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i, \text{ em } \Gamma_t, \quad (3.4b)$$

de modo que, \bar{u}_i representa a i -ésima componente do deslocamento prescrito em Γ_u , \bar{t}_i denota a i -ésima componente da tensão prescrita em Γ_t e n_j é a j -ésima componente do vetor normal unitário na fronteira Γ . O campo de deslocamento deve satisfazer a Equação (3.1) em cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, além das Equações (3.4a) e (3.4b) na fronteira Γ .

3.1.2 Forma Fraca Local

Considere que o domínio do corpo e sua fronteira são cobertos por nós distribuídos arbitrariamente e que cada nó I possui um subdomínio local, Ω_I , com uma fronteira local, Γ_I (Figura 16). Os subdomínios podem ter formas arbitrárias, tais como quadrados, círculos, entre outras (ATLURI; SHEN, 2002). Mirzaei (2015) observou que tanto formas circulares quanto quadrilaterais alcançam resultados satisfatórios nos métodos sem malha. Assim, neste estudo, optou-se por utilizar apenas subdomínios circulares.

Figura 16 – Ilustração da distribuição de nós para a abordagem DMLPG. Cada nó é associado a um subdomínio local, juntamente com sua fronteira local. Por exemplo, os nós J e K possuem subdomínios locais Ω_J e Ω_K , respectivamente, com fronteiras Γ_J e Γ_K . Se um subdomínio está totalmente contido no domínio global, como o subdomínio de J , então $\Gamma_J = \Gamma_{J0}$. No entanto, se o subdomínio de um nó intersecta a fronteira global, como o subdomínio de K , então sua fronteira local é definida como $\Gamma_K = \Gamma_{K0} \cup \Gamma_{Ku} \cup \Gamma_{Kt}$, onde Γ_{K0} é a parte de Γ_K em que nenhuma condição de contorno é aplicada, enquanto Γ_{Ku} e Γ_{Kt} são, nessa ordem, as partes de Γ_K onde as condições de contorno essenciais e naturais são especificadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como exemplificado na Figura 16 para $I = K$, a fronteira Γ_I de um nó I pode ser decomposta em até três partes distintas,

$$\Gamma_I = \Gamma_{I0} \cup \Gamma_{Iu} \cup \Gamma_{It}. \quad (3.5)$$

Nesse contexto, Γ_{I0} representa a região de Γ_I onde nenhuma condição de contorno é estabelecida, enquanto que Γ_{Iu} e Γ_{It} denotam as regiões de Γ_I onde as condições de contorno essenciais e naturais são especificadas, respectivamente.

Uma forma fraca local generalizada sobre o subdomínio local Ω_I para a Equação (3.1) pode ser escrita como

$$\int_{\Omega_I} [\sigma_{ij,j} + b_i] v_{Ii} d\Omega = 0, \quad (3.6)$$

onde v_{Ii} é a i -ésima componente da função teste definida sobre o subdomínio local Ω_I . A Equação (3.6) deve ser válida para qualquer valor de v_{Ii} , o que permite representá-lo como

$$v_{Ii}(\mathbf{x}) = \theta_{Ii}(\mathbf{x}) \mathcal{V}_{Ii}, \quad (3.7)$$

sendo $\theta_{Ii}(\mathbf{x})$ uma função definida de forma conveniente e \mathcal{V}_{Ii} um fator de escala arbitrário.

Aplicando o teorema da divergência na Equação (3.6), tem-se

$$\int_{\Gamma_I} \sigma_{ij} n_j v_{Ii} d\Gamma - \int_{\Omega_I} \sigma_{ij} v_{Ii,j} d\Omega + \int_{\Omega_I} b_i v_{Ii} d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Em seguida, decompondo a fronteira Γ_I em suas partes constituintes (Equação (3.5)) e impondo a condição de contorno natural (Equação (3.4b)), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{I0}} \sigma_{ij} n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \sigma_{ij} n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \bar{t}_i v_{Ii} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_I} \sigma_{ij} v_{Ii,j} d\Omega + \int_{\Omega_I} b_i v_{Ii} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considerando a função teste conforme definida na Equação (3.7), a Equação (3.9) pode ser expressa na forma matricial como

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}_I^T \left[\int_{\Gamma_{I0}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \Theta_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_I} \Psi_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_I} \Theta_I \mathbf{b} d\Omega \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a representação do vetor coluna do tensor de tensão, \mathbf{V}_I^T é o vetor linha dos fatores de escala arbitrários, Θ_I é a matriz diagonal da parte da função teste que depende de \mathbf{x} (veja Equação (3.7)), \mathbf{N} é a matriz que contém as componentes do vetor normal unitário em relação à fronteira Γ , $\bar{\mathbf{t}}$ é o vetor de tensão prescrita em Γ_{It} , \mathbf{b} é o vetor de força de corpo e $\Psi_I = \mathbf{L}_d \Theta_I$ é a matriz das derivadas de Θ_I , com \mathbf{L}_d denotando a matriz de operadores diferenciais.

As Equações (3.2) e (3.3) também podem ser representadas na forma matricial,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.11a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_d \mathbf{u}, \quad (3.11b)$$

sendo ε a representação vetorial do tensor de deformação, \mathbf{u} o vetor de deslocamento e \mathbf{D} a matriz dos coeficientes de rigidez elástica do material. Neste trabalho, um material isotrópico será considerado.

Sabendo que \mathbf{V}_I é um vetor de valores arbitrários, para que a Equação (3.10) seja satisfeita, é necessário que a expressão dentro dos colchetes seja igual ao vetor nulo, isto é,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{I0}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \Theta_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_I} \boldsymbol{\Psi}_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_I} \Theta_I \mathbf{b} d\Omega = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dessa forma, substituindo as Equações (3.11) na Equação (3.12), a forma fraca local pode ser expressa como

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_I} \boldsymbol{\Psi}_I^T \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{I0}} \Theta_I \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{Iu}} \Theta_I \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_{It}} \Theta_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_I} \Theta_I \mathbf{b} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para o caso bidimensional, por exemplo, as matrizes e os vetores das Equações (3.10) a (3.13) podem ser definidos do seguinte modo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_I = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{I1} \\ \mathcal{V}_{I2} \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{t}} &= \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta_I = \begin{bmatrix} \theta_{I1} & 0 \\ 0 & \theta_{I2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}_d^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases} \quad (3.14)$$

e

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases} \quad (3.15)$$

onde E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson do material.

3.1.3 Funções Tentativas

O método DMLPG utiliza a aproximação GMLS para estimar os deslocamentos. Essa estimativa é alcançada por meio da definição de funcionais lineares, os quais são posteriormente estabelecidos através da forma fraca local (Subseção 3.1.5). Nesta subseção, o GMLS e sua função peso são discutidos de forma geral, tendo como base os estudos de Mirzaei e Schaback (2013) e Abbaszadeh e Dehghan (2022).

3.1.3.1 Aproximação GMLS

Considere a equação linear

$$\lambda(\mathbf{u}) = \beta, \quad (3.16)$$

onde λ e β são funcionais lineares e \mathbf{u} é uma função desconhecida, por exemplo, o deslocamento, com $u_i \in C^m(\Omega)$, ou seja, as componentes pertencem a um espaço de funções contínuas e são m vezes diferenciáveis.

Seja $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ um conjunto de nós dispersos no domínio Ω ou na fronteira Γ . O objetivo do GMLS é aproximar $\lambda(\mathbf{u})$ por $\hat{\lambda}(\mathbf{u})$. Essa aproximação pode ser expressa pela combinação linear

$$\lambda(\mathbf{u}) \approx \hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda) \mu_J(\mathbf{u}), \quad (3.17)$$

dos funcionais $\mu_J(\mathbf{u})$ com coeficientes a_J . Os funcionais λ e μ_J podem representar, por exemplo, avaliações pontuais de \mathbf{u} ou de qualquer uma de suas derivadas até a ordem m , uma integral local que contenha \mathbf{u} ou qualquer uma de suas derivadas, etc. (MIRZAEI; SCHABACK, 2013).

Assuma $\mathcal{P} = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_G\}$ como sendo um subespaço finito de funções polinomiais, em que as componentes, p_{ki} , $i = 1, \dots, d$, de um vetor da base, \mathbf{p}_k , para $k = 1, \dots, G$, têm continuidade $C^m(\Omega)$, com $G = \frac{(m+d)!}{m!d!}$. Por exemplo, para o espaço bidimensional, $d = 2$, com base canônica e ordem quadrática, $m = 2$, tem-se

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.18)$$

Para todas as funções $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, a igualdade

$$\lambda(\mathbf{p}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda) \mu_J(\mathbf{p}) \quad (3.19)$$

é válida. Assim, busca-se uma aproximação $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$ de \mathbf{u} que minimize

$$\left\{ \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mu_J(\mathbf{p}))^2 w_J \right\}, \quad (3.20)$$

onde w_J é o valor de uma função peso que mede a influência do nó J no processo de minimização.

Reescrevendo \mathbf{p} como uma combinação linear dos vetores da base de \mathcal{P} e levando em conta a linearidade dos funcionais μ_J , então

$$\mu_J(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = \mu_J \left(\sum_{k=1}^G c_k \mathbf{p}_k(\mathbf{x}) \right) = \sum_{k=1}^G c_k \mu_J(\mathbf{p}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}, \quad (3.21)$$

sendo $\mathbf{p}_{\mu_J}^T = [\mu_J(\mathbf{p}_1(\mathbf{x})) \ \mu_J(\mathbf{p}_2(\mathbf{x})) \ \cdots \ \mu_J(\mathbf{p}_G(\mathbf{x}))]$ e $\mathbf{c}^T = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_G]$.

O problema de minimização irrestrita é definido como

$$\text{minimizar } \mathcal{J}(\mathbf{c}), \quad (3.22)$$

com

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c})^2 w_J \quad (3.23)$$

obtido substituindo a Equação (3.21) na Equação (3.20).

Para realizar o processo de minimização, é necessário igualar a derivada de \mathcal{J} em relação a cada coeficiente c_k a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_1} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_2} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_G} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Simplificando e reorganizando os termos da Equação (3.24), tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J \mu_J(\mathbf{u}), \\
\sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J \mu_J(\mathbf{u}), \\
&\vdots \\
\sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J \mu_J(\mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

O sistema de equações lineares na Equação (3.25) pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}), \tag{3.26}$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}$, com

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\mu_1}^T \\ \mathbf{p}_{\mu_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{\mu_N}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{u}) \\ \mu_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \mu_N(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

Após o processo de minimização, os coeficientes \mathbf{c}^* do polinômio ótimo, $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$, são dados por

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}). \tag{3.27}$$

Na aproximação GMLS, a solução ótima é definida como $\hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{p}^*)$. Desse modo, usando as Equações (3.21) e (3.27), tem-se

$$\hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}_\lambda^T \mathbf{c}^* = \mathbf{p}_\lambda^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}). \tag{3.28}$$

3.1.3.2 Função Peso

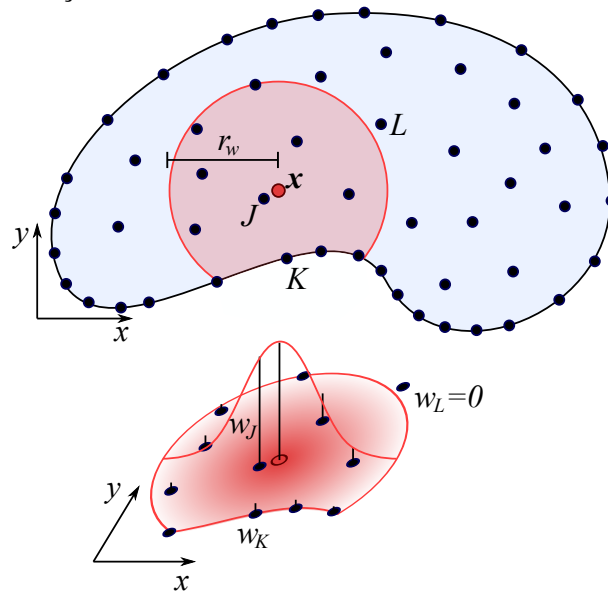
Neste trabalho, a função peso utilizada é a função gaussiana com suporte circular compacto. Essa função pode ser escrita como

$$w_J = w(r_J) = \frac{\exp(-(\epsilon r_J)^2) - \exp(-\epsilon^2)}{1 - \exp(-\epsilon^2)}, \tag{3.29}$$

com $0 \leq r_J \leq 1$, onde $r_J = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_J\|/r_w$, sendo r_w o raio do suporte circular compacto centrado em um ponto \mathbf{x} e ϵ um parâmetro que controla a curvatura do perfil em forma de seno

da função. A Figura 17 mostra as contribuições de um nó para um dado ponto x . Quanto mais distante um nó estiver do ponto, menor será sua contribuição. Se um nó estiver fora da região de suporte ($r_J \geq r_w$), sua contribuição será nula ($w(r_J) = 0$), como exemplificado pelo nó L na Figura 17.

Figura 17 – O raio r_w do suporte compacto de uma função peso centrada em um ponto x é ilustrado. Alguns nós na vizinhança são exemplificados: J , K e L . Como o nó J é o mais próximo ao ponto x , sua influência é maior do que a do nó K . O nó L não tem influência, uma vez que está fora da região de suporte da função.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como observado na Equação (3.27), a matriz A deve ser inversível. No entanto, como apontado por Atluri e Zhu (1998) e Liu (2009), para que essa condição seja satisfeita, é necessário que $N \geq G$, isto é, o número de nós dentro do domínio de suporte da função peso deve ser maior ou igual ao número de vetores da base de \mathcal{P} .

3.1.4 Funções Teste

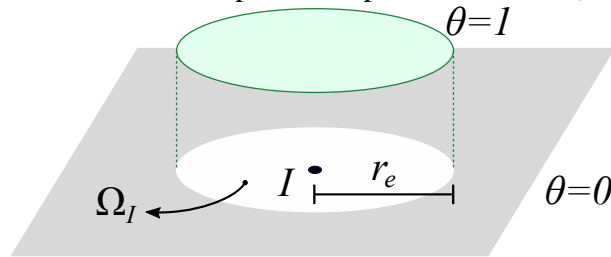
As funções teste são centradas nos nós e suas regiões de suporte são definidas pelo raio r_e , coincidindo com os subdomínios dos nós. Nesta pesquisa, a abordagem DMLPG5 (MIRZAEI, 2015), que considera a função teste como uma função de Heaviside (Figura 18), é

empregada. Assim, baseado na Equação (3.7),

$$\theta_{Ii}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_I, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.30)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Figura 18 – Função de Heaviside em um caso bidimensional centrada no nó I de suporte compacto com raio r_e .



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.5 Discretização

Como a função de Heaviside é uma função que assume valores constantes, sua derivada é nula, fazendo com que a integral de domínio do lado esquerdo da Equação (3.13) desapareça. Assim, sabendo que $\Theta_I = \mathbf{I}$ e com base na Equação (3.16), o problema discretizado pode ser definido como

$$\lambda_I(\mathbf{u}) = \beta_I, \quad (3.31)$$

onde

$$\lambda_I(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{u}) \\ \lambda_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \lambda_d(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = - \int_{\Gamma_{I0} \cup \Gamma_{Iu}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.32)$$

e

$$\beta_I = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_d \end{pmatrix} = \int_{\Gamma_{It}} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_I} \mathbf{b} d\Omega, \quad (3.33)$$

com $I = 1, \dots, M$. Seja \tilde{N} o número total de nós no domínio discretizado, para que o sistema admita solução, é necessário que $M \geq \tilde{N}$ (MIRZAEI; SCHABACK, 2013). No entanto, por simplicidade, assume-se $M = \tilde{N}$, ou seja, os funcionais são avaliados nas \tilde{N} localizações nodais. Note que os funcionais $\lambda(\mathbf{u})$ e β (Equação (3.16)) são definidos para cada dimensão $i = 1, \dots, d$.

Considerando as Equações (3.17) e (3.28), nas quais as componentes de $\boldsymbol{\mu}$ são tomadas como as avaliações do deslocamento nas direções i para o nó J , pode-se aproximar $\lambda_I(\mathbf{u})$ por

$$\hat{\lambda}_I(\mathbf{u}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\lambda_I}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}, \quad (3.34)$$

onde $N \leq \tilde{N}$ é o número de nós dentro do domínio de suporte da função peso centrada em \mathbf{x}_I , ou seja, os nós J em que $w_J > 0$. $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{dG \times dN}$ é uma matriz em blocos,

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{1N} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{G1} & \boldsymbol{\Phi}_{G2} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{GN} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

onde cada bloco $d \times d$ é escrito como

$$\boldsymbol{\Phi}_{kJ} = \begin{bmatrix} \phi_{kJ} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{kJ} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{kJ} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

sendo ϕ_{kJ} o elemento $[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]_{kJ}$ da matriz $\phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. $\mathbf{p}_{\lambda_I}^T \in \mathbb{R}^{d \times dG}$ é uma matriz representada como

$$\mathbf{p}_{\lambda_I}^T = [\lambda_I(\mathbf{p}_1) \ \lambda_I(\mathbf{p}_2) \ \cdots \ \lambda_I(\mathbf{p}_G)], \quad (3.37)$$

com

$$\lambda_I(\mathbf{p}_k) = - \int_{\Gamma_{I0} \cup \Gamma_{Iu}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{P}_k d\Gamma \quad (3.38)$$

para $k = 1, \dots, G$ e

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{L}_d \left[\text{diag}\{\mathbf{p}_k\} \right]. \quad (3.39)$$

A notação $\text{diag}\{\mathbf{p}_k\}$ representa uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são as componentes dos vetores da base, \mathbf{p}_k , aplicados em um ponto \mathbf{x} . Vale mencionar que, segundo

Mirzaei e Schaback (2013), considerando inicialmente a base canônica para o subespaço \mathcal{P} , é possível melhorar a estabilidade e precisão da aproximação modificando os termos dessa base. Desse modo, as componentes dos vetores \mathbf{p}_k , podem ser definidas de forma que, ao invés de utilizar os termos dos monômios na forma natural $\{x^\kappa\}_{0 \leq \kappa \leq m}$, esses valores podem ser deslocados e escalonados com base em

$$\left\{ \frac{(x-z)^\kappa}{d_{\min}^\kappa} \right\}_{0 \leq \kappa \leq m}, \quad (3.40)$$

onde z representa uma avaliação da posição do nó I e d_{\min} é a distância euclidiana mínima entre dois nós no domínio. Assim, por exemplo, a Equação (3.18) pode ser reescrita como

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_{I1}}{d_{\min}} \\ \frac{x_1 - x_{I1}}{d_{\min}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_{I2}}{d_{\min}} \\ \frac{x_2 - x_{I2}}{d_{\min}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x_{I1})^2}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_1 - x_{I1})^2}{d_{\min}^2} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x_{I1})(x_2 - x_{I2})}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_1 - x_{I1})(x_2 - x_{I2})}{d_{\min}^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(x_2 - x_{I2})^2}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_2 - x_{I2})^2}{d_{\min}^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (3.41)$$

O sistema linear construído a partir da Equação (3.31) pode ser expresso como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.42)$$

onde \mathbf{K} é uma matriz quadrada de dimensões $(dM) \times (dM)$, enquanto \mathbf{u} e \mathbf{f} são vetores coluna de dimensões compatíveis. A matriz de rigidez \mathbf{K} é gerada a partir de cada bloco $\mathbf{K}_{IJ} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ definido como

$$\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{p}_{\lambda_I}^T \Phi_{:,J} \quad (3.43)$$

e o vetor de força \mathbf{f} é composto pelos vetores

$$\mathbf{f}_I = \beta_I. \quad (3.44)$$

A notação “:” na Equação (3.43) representa a J -ésima coluna da matriz de bloco Φ . As integrais que compõem cada bloco \mathbf{K}_{IJ} (Equação (3.38)) e o vetor \mathbf{f}_I (Equação (3.33)) são resolvidas através da quadratura de Gauss-Legendre (Apêndice B). Note que o sistema linear global ainda precisa ser modificado para levar em conta as condições de contorno essenciais.

3.1.6 Aplicação das Condições de Contorno Essenciais

Uma vez que a propriedade do delta de Kronecker não pode ser garantida nos nós, as condições de contorno essenciais são impostas usando o método de colocação do MLS (LIU,

2009; MIRZAEI, 2015). Para um nó I na fronteira Γ_u , a linha correspondente do sistema linear global na (Equação (3.42)), onde a condição é estabelecida para a direção i , é zerada. Em seguida, com base na Equação (3.17), tomando λ como a avaliação pontual em \mathbf{x}_I , isto é, $\lambda = \delta_{\mathbf{x}_I}$, e μ como o deslocamento do ponto \mathbf{x}_J , a seguinte equação é aplicada:

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}_I) = \sum_{J=1}^N a_J(\delta_{\mathbf{x}_I}) u_i(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}_I}}^T \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}_i, \quad (3.45)$$

sendo $\bar{u}_i(\mathbf{x}_I)$ a condição de contorno essencial prescrita no nó I com $i = 1, \dots, d$, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}_I}}^T = [p_{1i}(\mathbf{x}_I) \ p_{2i}(\mathbf{x}_I) \ \dots \ p_{Gi}(\mathbf{x}_I)]$ e $\mathbf{u}_i^T = [u_{1i} \ u_{2i} \ \dots \ u_{Ni}]$.

3.1.7 Obtenção dos Deslocamentos, Deformações e Tensões

Segundo Mirzaei *et al.* (2012), uma boa aproximação dos deslocamentos é obtida ao resolver o sistema linear (Equação (3.42)). No entanto, o deslocamento real em um ponto \mathbf{x} pode ser calculado como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N a_J(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}, \quad (3.46)$$

onde $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}}^T = [\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{p}_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{p}_G(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{d \times dG}$. A deformação e a tensão podem ser obtidas com as Equações (3.11) usando a Equação (3.39) para conseguir as derivadas de $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}}$.

3.1.8 Algoritmo

O Algoritmo 1 apresenta os passos do método DMLPG. A entrada consiste na definição do modelo e das condições de contorno. A discretização é realizada na Linha 1. Na Linha 3, o algoritmo determina os nós, J , que estão dentro dos domínios de suporte de cada nó I , considerando o raio, r_w , da função de peso (Equação (3.29)), e então calcula as matrizes $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ (Equação (3.26)). Nas Linhas 5 a 11, os pontos de integração são criados dentro dos subdomínios de raio r_e e a matriz de rigidez local e o vetor de força local são determinados e montados no sistema global (Equações (3.42) a (3.44)). Se $\mathbf{x}_I \in \Gamma_u$, a condição de contorno essencial é imposta no sistema global nas Linhas 12 a 17 (Equação (3.45)). Finalmente, na Linha 19, o sistema linear, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, é resolvido para obter os deslocamentos nodais, \mathbf{u} (Equação (3.46)).

Algoritmo 1: Método DMLPG.

Input: Domínio Ω ; Contorno Γ ; Número total de nós M ; Número total de elementos no vetor de base polinomial G ; Raios r_w e r_e .

Output: Deslocamentos aproximados nos nós, \mathbf{u} .

```

1  $\mathcal{M} \leftarrow \text{CriarNós}(M, \Omega, \Gamma)$ 
2 for  $\mathbf{x}_I \in \mathcal{M}$  do
3    $\mathcal{C} \leftarrow \text{EncontrarVizinhos}(\mathcal{M}, \mathbf{x}_I, r_w)$ ; // nós  $J$  com  $w(\|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I\|) > 0$ 
4    $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \leftarrow \text{CalcularMatrizA}^{-1}\mathbf{B}(\mathcal{C}, \mathbf{x}_I, G)$ 
5    $\mathcal{Q} \leftarrow \text{CriarPontosIntegração}(\mathbf{x}_I, r_e, \Gamma)$ 
6   for  $\mathbf{x}_q \in \mathcal{Q}$  do
7      $\mathbf{f}_I \leftarrow \text{CalcularVetorForçaLocal}(\mathbf{x}_q)$ 
8      $\mathbf{K}_{IJ} \leftarrow \text{CalcularMatrizRigidezLocal}(\mathbf{x}_q, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathcal{C})$ ; //  $J$  são os
       vizinhos  $\mathcal{C}$  representados nas colunas da matriz  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 
9     MontarVetorForçaGlobal( $\mathbf{f}_I, \mathbf{f}$ )
10    MontarMatrixRigidezGlobal( $\mathbf{K}_{IJ}, \mathbf{K}$ )
11  end
12  if CondiçãoContornoEssencial( $\mathbf{x}_I$ ) then
13     $\mathcal{L} \leftarrow \text{EixosComCondiçãoContorno}(\mathbf{x}_I)$ 
14    ZerarLinhasSistemaLinear( $\mathcal{L}, \mathbf{f}, \mathbf{K}$ )
15    ImporCondiçãoContornoEssencialVetorForçaGlobal( $\mathbf{x}_I, \mathcal{L}, \mathbf{f}$ )
16    ImporCondiçãoContornoEssencialMatrizRigidezGlobal( $\mathbf{x}_I, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathbf{K}$ )
17  end
18 end
19  $\mathbf{u} \leftarrow \text{ResolverSistemaLinear}(\mathbf{K}, \mathbf{f})$ 

```

3.2 Método BESO

O método BESO é uma técnica amplamente utilizada na concepção de estruturas otimizadas, devido à sua simplicidade conceitual e à capacidade de fornecer soluções eficientes (HUANG; XIE, 2010a; XIA *et al.*, 2018a). Ao iterativamente remover e adicionar material na estrutura, o método busca atingir configurações estruturais ideais que garantam resistência, rigidez e leveza. Desde que foi proposto por Querin *et al.* (1998), diversas melhorias foram realizadas no BESO (XIA *et al.*, 2018a). Um dos estudos mais conhecidos foi desenvolvido por Huang e Xie (2010b) (YAN *et al.*, 2014; KEFAL *et al.*, 2019; YAN *et al.*, 2019; XIONG *et al.*, 2023), no qual um algoritmo BESO, fundamentado no modelo sugerido por Huang e Xie (2009), é apresentado. Nesse método, o material não é verdadeiramente removido da estrutura, sendo apenas suavizado, e um esquema de interpolação material com penalização é empregado.

Nesta seção, é descrita a abordagem BESO utilizada neste trabalho, baseada no algoritmo apresentado por Huang e Xie (2010b), adaptado para integração com o método DMLPG. Na Subseção 3.2.1, é definido o problema de otimização a ser resolvido. Na Subseção 3.2.2, é

demonstrado o cálculo das sensibilidades nodais, as quais passarão por processos de filtragem e estabilização, discutidos na Subseção 3.2.3. Em seguida, na Subseção 3.2.4, é explicado o procedimento de atualização das variáveis de projeto. Por fim, na Subseção 3.2.5, são apresentados os critérios de convergência e como modificar a matriz de rigidez elástica caso os requisitos estabelecidos não sejam satisfeitos.

3.2.1 Definição do Problema

O problema de otimização estrutural é definido como

$$\text{minimizar } C \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \boldsymbol{\sigma}_I V_I, \quad (3.47a)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.47b)$$

$$V^* - \sum_{I=1}^M V_I \mathcal{X}_I = 0, \quad (3.47c)$$

$$\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_{min} \quad \text{ou} \quad 1, \quad (3.47d)$$

onde C representa a aproximação da energia total de deformação, V^* é o volume prescrito, V_I é o volume nodal superestimado e \mathcal{X}_I é a variável de projeto binária no nó I . $\mathcal{X}_I = 1$ indica a presença de material sólido, enquanto $\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_{min}$ denota o vazio, sendo \mathcal{X}_{min} um valor pequeno e não nulo. O uso de um valor baixo, diferente de zero, para representar a ausência de material caracteriza a formulação apresentada como uma abordagem *soft-kill*. Nesse tipo de abordagem, o material não é de fato removido do domínio, ao invés disso, é suavizado, o que evita que a matriz de rigidez, \mathbf{K} , se torne singular (HUANG; XIE, 2009). A suavização indica que o material contribuirá apenas marginalmente para a rigidez da estrutura.

3.2.2 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade tem como propósito determinar a sensibilidade de cada nó, que será o parâmetro utilizado para definir quais nós terão o vazio ou material sólido atribuído. As sensibilidades são determinadas através da derivada da função objetivo em relação a cada variável de projeto.

Considerando

$$\mathbf{D}(\mathcal{X}_I) = \mathcal{X}_I^p \mathbf{D}_0, \quad (3.48)$$

onde p é o expoente de penalização e \mathbf{D}_0 é a matriz de rigidez elástica inicial, a Equação (3.11a) para o tensor de tensão pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathcal{X}_I)\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{X}_I^p \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.49)$$

Com base na realização de testes numéricos, Huang e Xie (2009) afirmaram que qualquer valor maior que 1 para p é suficiente para um bom funcionamento do método, porém recomendaram o uso de $p \geq 1,5$.

Substituindo a Equação (3.49) na Equação (3.47a), tem-se

$$C \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}(\mathcal{X}_I) \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathcal{X}_I^p \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I. \quad (3.50)$$

Assim, a derivada da energia total de deformação em relação às variáveis de projeto é calculada como

$$\frac{\partial C}{\partial \mathcal{X}_I} \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \frac{\partial \mathbf{D}(\mathcal{X}_I)}{\partial \mathcal{X}_I} \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I = \frac{p \mathcal{X}_I^{p-1}}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I. \quad (3.51)$$

Baseado na Equação (3.51), o valor da sensibilidade para um nó I é definido da seguinte forma,

$$\alpha_I = \frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{X}_I} = \frac{\mathcal{X}_I^{p-1}}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I. \quad (3.52)$$

Nota-se que, para $\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_{min}$, quando p tende ao infinito, o valor da sensibilidade nodal pode ser considerado igual a zero. Esse caso, torna-se equivalente à situação em que $\mathcal{X}_{min} = 0$, conhecida como abordagem *hard-kill*, na qual o material é de fato removido do domínio (HUANG; XIE, 2010b).

3.2.3 Filtragem e Processo de Estabilização

O fenômeno do tabuleiro de xadrez é uma instabilidade numérica comum presente em métodos de otimização topológica (SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSØE; SIGMUND, 2004). Esse fenômeno é caracterizado pelo surgimento de pontos dispersos e sem continuidade estrutural na solução, formando, em alguns casos, regiões contendo espaços vazios e espaços com material que se alternam de forma semelhante a um tabuleiro de xadrez (SIGMUND; PETERSSON, 1998; YANG *et al.*, 2016), conforme ilustrado na Figura 19. Uma das formas de solucionar esse problema é através do uso de técnicas de filtragem (SIGMUND; PETERSSON,

1998). Desse modo, uma filtragem nas sensibilidades nodais é realizada. O filtro baseia-se em um raio, r_{\min} , que ajuda a encontrar os nós adjacentes que influenciam a sensibilidade de um determinado nó (XIA *et al.*, 2018a). Os números de sensibilidade filtrados, $\hat{\alpha}_I$, são estabelecidos como

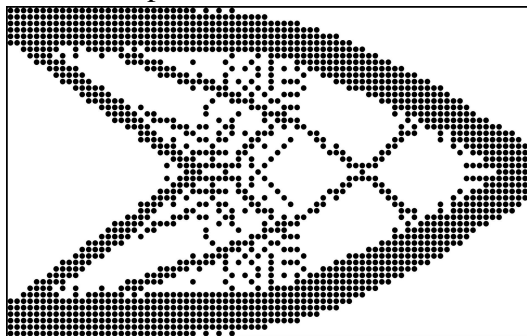
$$\hat{\alpha}_I = \frac{\sum_{J=1}^{\bar{N}} \omega(r_{IJ}) \alpha_J}{\sum_{J=1}^{\bar{N}} \omega(r_{IJ})}, \quad (3.53)$$

com

$$\omega(r) = \begin{cases} r_{\min} - r, & r < r_{\min}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.54)$$

onde \bar{N} é o número de nós que estão dentro do raio de influência r_{\min} e $r = r_{IJ}$ é a distância euclidiana entre os nós I e J .

Figura 19 – Exemplo da instabilidade numérica do padrão do tabuleiro de xadrez.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o objetivo de alcançar uma melhor convergência, reduzindo a ocorrência de grandes variações da função objetivo durante o processo (HUANG; XIE, 2007), um procedimento de estabilização é aplicado. Nesse procedimento, as sensibilidades dos nós são modificadas considerando a média dos valores das sensibilidades nas iterações atual, k , e anterior, $k - 1$,

$$\tilde{\alpha}_I = \frac{\hat{\alpha}_{I,k} + \tilde{\alpha}_{I,k-1}}{2}. \quad (3.55)$$

3.2.4 Atualização do Projeto

A obtenção de uma nova topologia para a estrutura é alcançada através da atualização das variáveis de projeto. Esse processo de atualização inicia-se com o cálculo do volume da

iteração atual, V_k , determinado como

$$V_k = V_{k-1}(1 - ER), \quad (3.56)$$

onde ER é a taxa evolucionária, que representa a redução gradual do volume das iterações até que o volume objetivo, V^* , seja alcançado.

O método BESO busca efetivamente balancear a SED entre todos os nós, garantindo que a estrutura resultante seja robusta e resistente, com base no seguinte critério de otimalidade: “as densidades de energia de deformação dos materiais sólidos são sempre maiores do que as dos materiais suaves” (ZHAO, 2014). Desse modo, se a sensibilidade de um nó I for alta, a variável de projeto \mathcal{X}_I é atualizada para o valor 1, caso contrário, é atualizada para o valor \mathcal{X}_{min} . O limiar usado para classificar o valor de sensibilidade começa com o valor médio das sensibilidades máxima e mínima, e é atualizado com base em quanto a estrutura deve mudar para atingir o volume V_k .

O processo de atualização das variáveis de projeto, visando à construção de um novo projeto, é então realizado através da execução dos seguintes passos:

1. Calcule o volume da iteração, V_k .
2. Encontre os valores das sensibilidades mínima, α_{min} , e máxima, α_{max} .
3. Verifique se

$$\frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\alpha_{max}} < \zeta, \quad (3.57)$$

onde ζ é um número suficientemente pequeno. Se a desigualdade não for satisfeita, defina o limiar α_{th} para os valores de sensibilidade como a média dos valores α_{min} e α_{max} , isto é,

$$\alpha_{th} = \frac{\alpha_{max} + \alpha_{min}}{2}. \quad (3.58)$$

4. Se a sensibilidade do nó for menor que α_{th} , atualize sua variável de projeto para \mathcal{X}_{min} (ausência de material), caso contrário, atualize para 1 (material sólido).
5. Compute o valor do volume da estrutura obtida. Se o volume computado for maior que V_k , modifique o valor de α_{min} para α_{th} , caso contrário, modifique o valor de α_{max} para α_{th} .
6. Repita os passos 3 a 5 até que a desigualdade definida na Equação (3.57) seja satisfeita.

Alguns problemas abordados em otimização topológica requerem a obtenção de um projeto ótimo para estruturas simétricas. Muitas vezes, para reduzir o esforço computacional, apenas a parte simétrica é otimizada. No entanto, quando é necessário otimizar a estrutura completa, os erros numéricos acumulados durante o processo podem acarretar um resultado final assimétrico. Para contornar esse problema, antes de iniciar o processo de atualização das variáveis de projeto, nesses casos, as sensibilidades dos nós, que são simétricos em relação ao eixo de simetria, são modificadas assumindo o valor médio das sensibilidades desses nós.

3.2.5 Critérios de Convergência e Atualização da Matriz de Rigidez Elástica

O processo iterativo continua até que o volume objetivo, V^* , seja obtido e o seguinte critério de convergência, definido em termos da variação da função objetivo, seja satisfeito,

$$\text{erro} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{\eta} (C_{k-i+1} - C_{k-\eta-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^{\eta} C_{k-i+1}} \leq \tau, \quad (3.59)$$

onde k representa o número da iteração atual, τ é a tolerância de convergência permitida e η está associado à quantidade de iterações em que a função objetivo é analisada, 2η .

Caso a convergência do processo de otimização não seja alcançada, a matriz de rigidez elástica deve ser atualizada em cada ponto de integração para ser utilizada na próxima iteração na análise numérica (Equação (3.38)). Para esse fim, uma variável de projeto estimada, \mathcal{X}_q , é definida para cada ponto de integração, na posição \mathbf{x}_q , como um valor médio ponderado com base nas variáveis de projeto dos nós adjacentes,

$$\mathcal{X}_q = \frac{\sum_{J=1}^N w(r_J) \mathcal{X}_J}{\sum_{J=1}^N w(r_J)}, \quad (3.60)$$

onde w é a função peso centrada em \mathbf{x}_q (Equação (3.29)) e N é o número de nós dentro do raio de influência r_w . A matriz de rigidez elástica é então computada substituindo \mathcal{X}_I por \mathcal{X}_q na Equação (3.48), ou seja,

$$\mathbf{D}(\mathcal{X}_q) = \mathcal{X}_q^p \mathbf{D}_0. \quad (3.61)$$

3.3 Considerações Finais

Neste capítulo, a abordagem de otimização topológica proposta, que associa o DMLPG a um método BESO, foi apresentada. Inicialmente, a teoria que norteia a formulação da abordagem DMLPG, aplicada à resolução de um problema elástico linear, foi explicada. Ao longo da exposição, os princípios fundamentais subjacentes ao DMLPG foram destacados, incluindo a determinação da forma fraca do problema, a construção das funções tentativas e testes, e a discretização do sistema global. O processo de aplicação das condições de contorno essenciais e de como obter os deslocamentos, tensões e deformações, também foram discutidos. Nota-se que ao fazer uso da aproximação GMLS para estimar a forma fraca local, o processo de integração do DMLPG é executado exclusivamente sobre polinômios. Além disso, também é possível perceber que, o uso de uma malha não é necessário em nenhuma etapa de seu desenvolvimento, o que caracteriza o DMLPG como uma técnica verdadeiramente sem malha.

Em seguida, todas as etapas da abordagem BESO utilizada foram descritas, abrangendo desde a formulação do problema topológico até a atualização iterativa do projeto com base nas sensibilidades nodais. Tendo como fundamentação um algoritmo BESO que utiliza o MEF, algumas modificações foram realizadas para permitir sua associação com a análise do DMLPG. Devido à propagação de erros numéricos, um tratamento para estruturas simétricas foi incorporado no procedimento de atualização das variáveis de projeto. Além disso, uma etapa de atualização da matriz de rigidez elástica nos pontos de integração foi adicionada ao processo iterativo, permitindo a obtenção precisa das tensões e deformações. Para demonstrar a viabilidade da metodologia proposta, diversos testes foram realizados, os quais serão descritos no próximo capítulo.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, os testes conduzidos com intuito de demonstrar a viabilidade da técnica proposta, que associa os métodos DMLPG e BESO para a otimização topológica de estruturas, são apresentados. Inicialmente, na Seção 4.1, os parâmetros de ambos os métodos, que são comuns a todos os exemplos, são estabelecidos. Posteriormente, nas Seções 4.2 a 4.7, os testes realizados são especificados e discutidos. Por fim, na Seção 4.8, as discussões abordadas são sintetizadas.

É importante mencionar que, devido à ausência de soluções analíticas, a validação da abordagem é realizada comparando os resultados obtidos com outros encontrados na literatura, proporcionando, uma base sólida para a execução desse processo. Ademais, para assegurar a integridade e a confiabilidade dos resultados, alguns fatores que podem exercer influência sobre estes são examinados, como a discretização do domínio de projeto, o tratamento de simetria, a definição de regiões com e sem material predefinidas, além da aplicação do filtro de sensibilidade e do processo de estabilização.

A implementação foi desenvolvida na linguagem de programação C++ e a biblioteca Eigen (GUENNEBAUD *et al.*, 2021) foi empregada para realizar as operações matriciais e resolver o sistema de equações lineares na análise DMLPG.

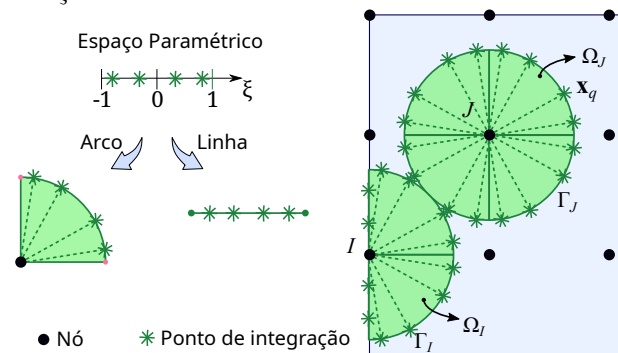
4.1 Definição dos Parâmetros

Para os exemplos abordados, os quais são executados no espaço bidimensional ($d = 2$) e sob o estado plano de tensão, diversos parâmetros e configurações são inicialmente estabelecidos no método DMLPG:

- O subespaço \mathcal{P} é definido considerando uma base polinomial canônica modificada de ordem quadrática. Dessa forma, define-se $m = 2$, onde m representa a ordem polinomial. A base canônica é modificada conforme a Equação (3.40), sendo portanto, seus vetores constituintes estabelecidos como descrito na Equação (3.41);
- Atribuindo um valor nulo para a força de corpo, apenas integrais de borda necessitam ser resolvidas durante a análise com o DMLPG (Equações (3.33) e (3.38)). A quadratura de Gauss-Legendre é aplicada para solucionar essas integrais, em que um espaço paramétrico, ξ , é definido para uma linha ou um arco de, no máximo, 90° do subdomínio (Apêndice B). Quatro pontos de integração são criados em

cada espaço paramétrico (Figura 20).

Figura 20 – Definição dos pontos de integração, \mathbf{x}_q . Cada subdomínio é dividido em setores circulares de ângulos, no máximo, de 90° . Dado um espaço paramétrico $-1 \leq \xi \leq 1$, os pontos de integração são criados nos arcos de 90° e nas linhas, caso existam, de interseção da fronteira do subdomínio com a fronteira do corpo, ambos parametrizados em ξ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Parâmetro de forma da função peso gaussiana, $\epsilon = 4$ (Equação (3.29));
- Raio do domínio de suporte da função peso, $r_w = 4d_{min}$ (Equação (3.29)) e raio do domínio de suporte da função teste, $r_e = 0,7d_{min}$ (Equação (3.30)), onde d_{min} é a distância euclidiana mínima entre dois nós no domínio de projeto. Caso a matriz \mathbf{A} não seja inversível (Equação (3.27)), r_w é aumentado em 10%, como sugerido por Taleei e Dehghan (2014);
- Módulo de Young, $E = 200GPa$ (Equação 3.14), e coeficiente de Possion, $\nu = 0,3$ (Equação 3.15), do material.

A princípio, a menos que seja especificado de outra forma, o domínio de projeto é considerado totalmente preenchido com material sólido. Portanto, as variáveis de projeto nodais na abordagem BESO começam o processo iterativo com valor igual a 1. Outros parâmetros do BESO, que são compartilhados por todos os exemplos, incluem:

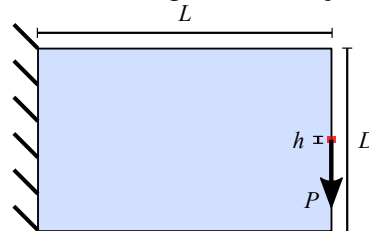
- Variável de projeto associada a ausência de material, $\mathcal{X}_{min} = 10^{-3}$ (Equação (3.47d));
- Expoente de penalidade, $p = 3$ (Equação (3.48));
- Raio da função peso no processo de filtragem, $r_{min} = 3d_{min}$ (Equação (3.54));
- Taxa evolucionária, $ER = 2\%$ (Equação (3.56));
- Limiar do processo de atualização das variáveis de projeto, $\zeta = 10^{-5}$ (Equação (3.57));

- Tolerância de convergência, $\tau = 10^{-3}$ (Equação (3.59));
- Valor associado à quantidade de iterações em que a função objetivo é analisada, $\eta = 5$ (Equação (3.59)).

4.2 Viga em Balanço

O problema da viga em balanço emprega o modelo ilustrado na Figura 21, com $L = 0,08\text{m}$, $D = 0,05\text{m}$ e uma carga $P = 4500\text{N}$ distribuída sobre uma região de área $h \times T$, onde $h = 0,004\text{m}$ e $T = 0,001\text{m}$, sendo T a espessura da viga. O volume objetivo, V^* , é definido como 40%.

Figura 21 – Definição do problema da viga em balanço.

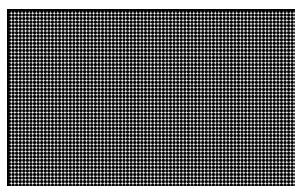


Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiramente, um teste com discretização de 81×51 nós (Figura 22a) foi realizado para comparar com a solução alcançada utilizando um método BESO baseado no MEF com discretização similar. A solução baseada no MEF é obtida fazendo uso do algoritmo em MATLAB disponibilizado por Huang e Xie (2010b). Uma vez que, na execução com o MEF, a malha considerada possui 80×50 elementos, o número de nós em ambos os testes é o mesmo. Observar-se que os métodos produzem resultados semelhantes, existindo apenas pequenas diferenças entre ambos (Figuras 22b e 22c).

Figura 22 – Resultados para o problema da viga em balanço utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.

(a) Discretização de 81×51 nós.



(b) Projeto ótimo com 81×51 nós.



(c) Projeto ótimo obtido utilizando o algoritmo de Huang e Xie (2010b) com 80×50 elementos.

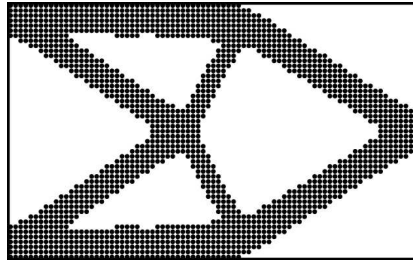


Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme mostrado na Figura 23, embora as abordagens e alguns parâmetros sejam distintos, o resultado alcançado também é compatível com outros encontrados na literatura (HUANG, 2020; ULLAH *et al.*, 2022; LI *et al.*, 2022).

Figura 23 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga em balanço com outros encontrados na literatura.

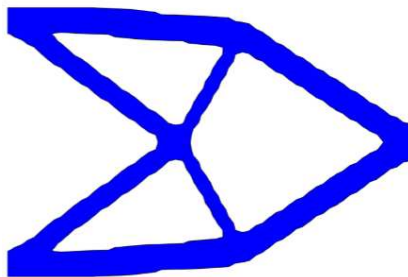
(a) Projeto ótimo.



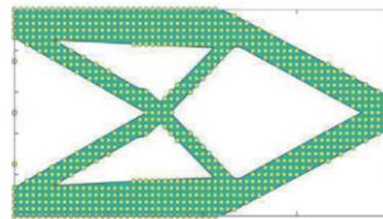
(b) Projeto ótimo - Huang (2020).



(c) Projeto ótimo - Ullah *et al.* (2022).



(d) Projeto ótimo - Li *et al.* (2022).

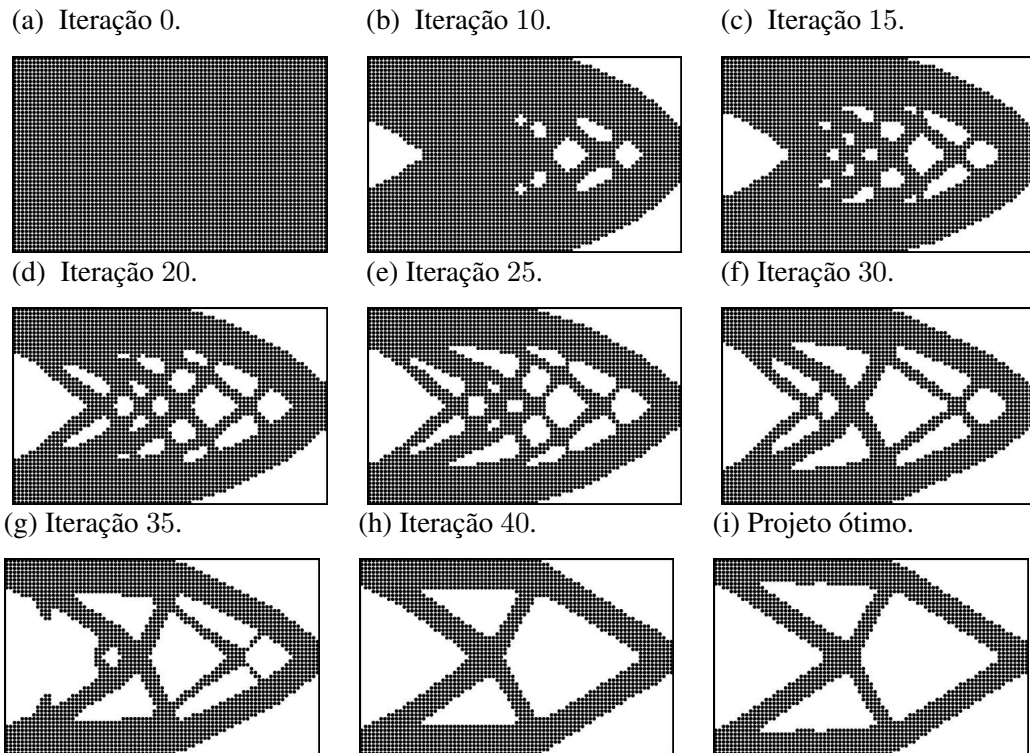


Fonte: Huang (2020), Ullah *et al.* (2022) e Li *et al.* (2022).

A Figura 24 ilustra o processo iterativo do teste realizado. Os históricos de evolução da função objetivo e da fração de volume são apresentados na Figura 25. A energia total de deformação aumenta e a topologia se desenvolve gradualmente em direção a otimalidade à medida que o material é adicionado/removido do domínio de projeto. Entre as iterações 25 e 40, ocorrem oscilações mais acentuadas na energia total de deformação devido a mudanças significativas na topologia, ocasionadas pela quebra de conexões (Figura 24). No entanto, após esse intervalo, a energia total de deformação se recupera, retornando a uma ascensão mais suave. Em aproximadamente 45 iterações, a fração de volume atinge o volume objetivo de 40% e a energia total de deformação começa a se estabilizar até satisfazer o critério de convergência. O projeto ótimo é estabelecido em 55 iterações.

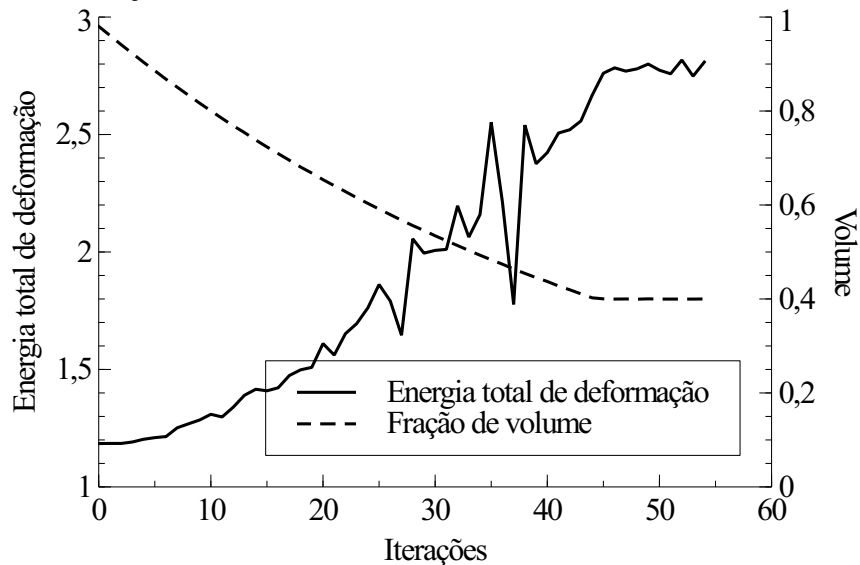
Para demonstrar a influência do processo de estabilização na obtenção do projeto ótimo, o teste com 81×51 nós foi realizado sem considerar essa etapa. As Figuras 26 e 27 mostram o resultado obtido e o comportamento da função objetivo e da fração de volume, respectivamente. Observa-se que, em comparação com o resultado anterior, a energia total de

Figura 24 – Sequência de iterações para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós.

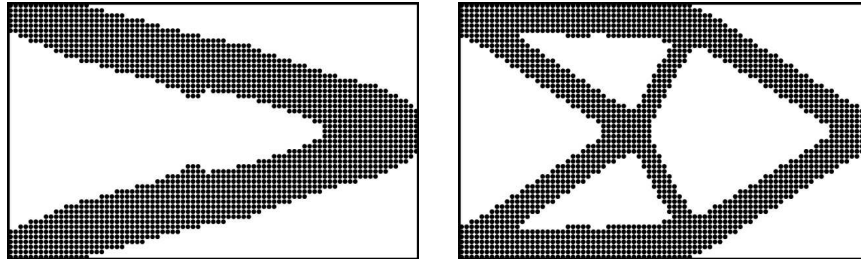


Fonte: Elaborada pelo autor.

deformação exibiu mais oscilações, com picos mais acentuados, o que resultou em um aumento significativo no número de iterações necessárias para alcançar o projeto final. O projeto ótimo foi alcançado em 161 iterações, apresentando uma configuração diferente da obtida com a

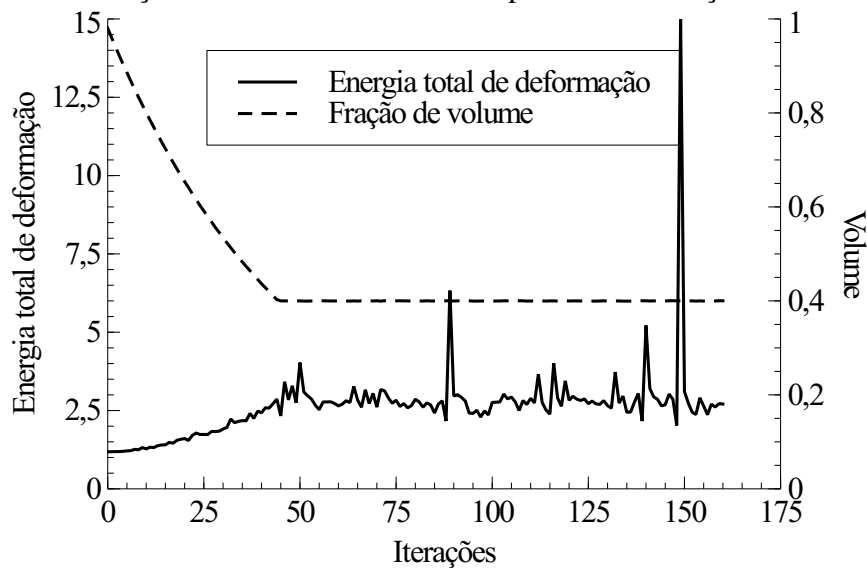
aplicação da estabilização. Portanto, torna-se evidente que o processo de estabilização é uma etapa essencial para garantir um bom desempenho do método.

Figura 26 – Resultados para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem e com o processo de estabilização. (a) Projeto ótimo sem estabilização. (b) Projeto ótimo com estabilização.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem a etapa de estabilização.



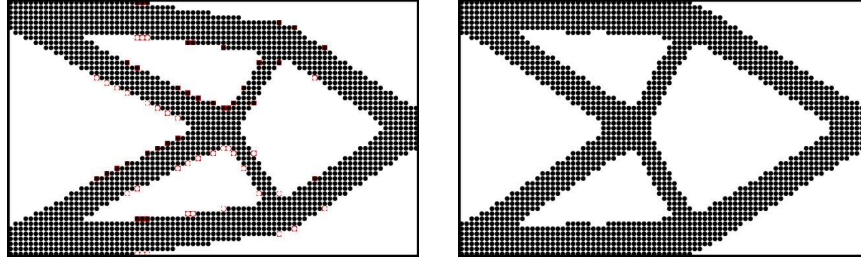
Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando se considera a otimização de uma estrutura simétrica, a propagação de erros numéricos pode resultar em um projeto final assimétrico. Para resolver esse problema, é aplicado um tratamento de simetria, calculando-se a média das sensibilidades para os nós simétricos. A Figura 28 mostra os resultados obtidos para a discretização de 81×51 nós, tanto sem quanto com o tratamento de simetria. Observa-se que a ausência do tratamento, apesar de não ter impactado significativamente a topologia, resultou na perda de simetria em várias partes do contorno da estrutura, conforme evidenciado pelos nós destacados em vermelho (Figura 28a).

Figura 28 – Resultados para o problema da viga em balanço com uma discretização de 81×51 nós sem e com o tratamento de simetria.

(a) Projeto ótimo sem o tratamento de simetria.

(b) Projeto ótimo com o tratamento de simetria.

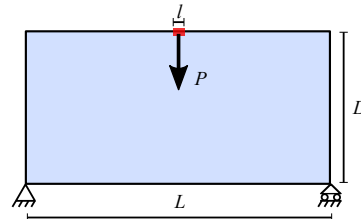


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Viga MBB

O modelo para a viga Messerschmitt-Bolkow-Blohm - MBB é apresentado na Figura 29, com $L = 1,2\text{m}$, $D = 0,2\text{m}$ e uma carga $P = 220000\text{N}$ distribuída sobre uma região de área $l \times T$, onde $l = 0,004\text{m}$ e $T = 0,01\text{m}$, sendo T a espessura da viga. O volume objetivo, V^* , é definido como 50%.

Figura 29 – Definição do problema da viga MBB.



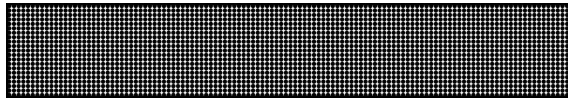
Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando uma discretização de 121×21 nós (Figura 30a), o resultado alcançado foi comparado com o projeto ótimo obtido utilizando o método BESO baseado no MEF (HUANG; XIE, 2010b), no qual uma discretização de 120×20 elementos foi empregada. Nota-se que os projetos ótimos apresentam similaridades, embora a quantidade de buracos formados seja distinta (Figuras 30b e 30c). A Figura 31 reforça a plausibilidade do resultado alcançado ao mostrar seu alinhamento com outros reportados na literatura (WEI; WANG, 2009; LUO *et al.*, 2012a; LUO *et al.*, 2012c).

Algumas iterações do processo de otimização e os históricos de evolução da função objetivo e da fração de volume são mostrados nas Figuras 32 e 33, respectivamente. Assim como no exemplo anterior (Seção 4.2), a energia total de deformação aumenta, sofrendo algumas oscilações mais acentuadas no intervalo entre aproximadamente as iterações 15 e 30, decorrentes

Figura 30 – Resultados para o problema da viga MBB utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.

(a) Discretização de 121×21 nós.



(b) Projeto ótimo com 121×21 nós.



(c) Projeto ótimo obtido utilizando o algoritmo de Huang e Xie (2010b) com 120×20 elementos.



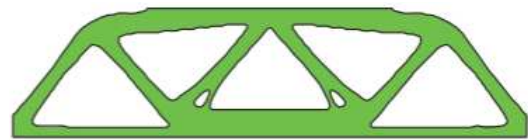
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga MBB com outros encontrados na literatura.

(a) Projeto ótimo.



(b) Projeto ótimo - Wei e Wang (2009).



(c) Projeto ótimo - Luo *et al.* (2012a).



(d) Projeto ótimo - Luo *et al.* (2012c).

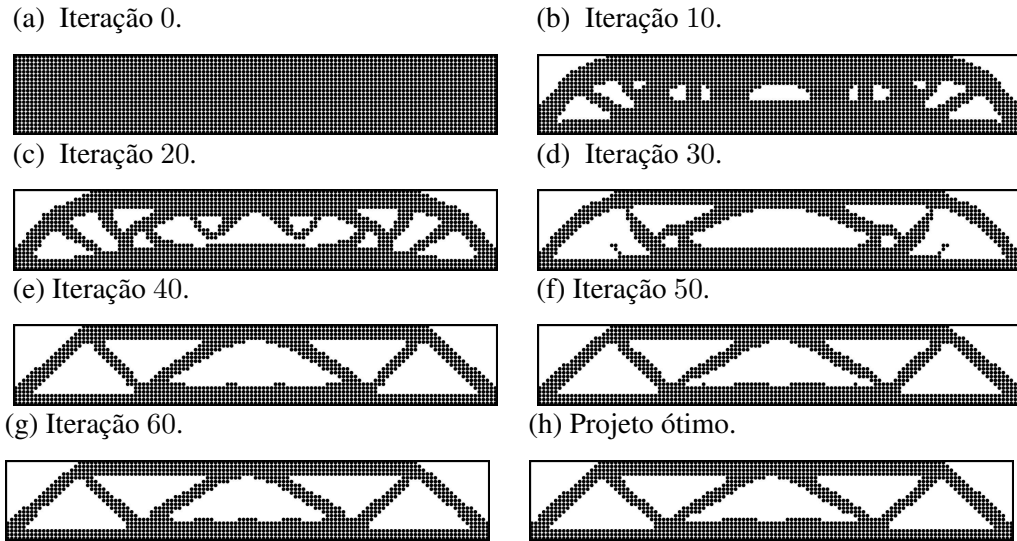


Fonte: Wei e Wang (2009), Luo *et al.* (2012a) e Luo *et al.* (2012c).

de mudanças mais expressivas na estrutura devido a perda de ligações (Figuras 32). Após esse intervalo, em cerca de 35 iterações, o volume objetivo de 50% é alcançado e a energia total de deformação tenta se manter mais estável, resultando em poucas mudanças na topologia (Figuras 32). O projeto ótimo é então estabelecido na iteração 71.

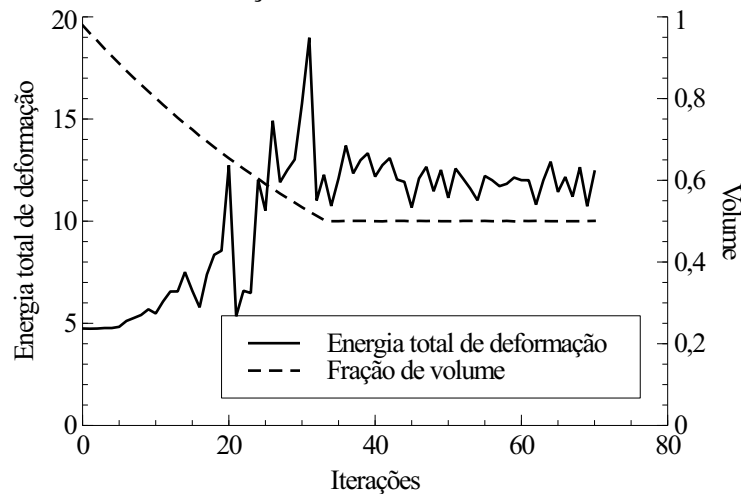
O tratamento de simetria foi utilizado no resultado apresentado. No entanto, para verificar a influência desse procedimento, a viga, empregando a mesma discretização, também foi analisada sem sua aplicação. Como pode ser observado na Figura 34, em comparação com o teste realizado anteriormente (Seção 4.2), a não utilização do tratamento resultou em uma estrutura em que a característica antissimétrica se torna bastante evidente, o que pode dificultar a interpretação do resultado. Assim, ao lidar com estruturas cujo comportamento simétrico é esperado, o tratamento de simetria se mostra um mecanismo importante para assegurar a geração de projetos ótimos viáveis.

Figura 32 – Sequência de iterações para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós.



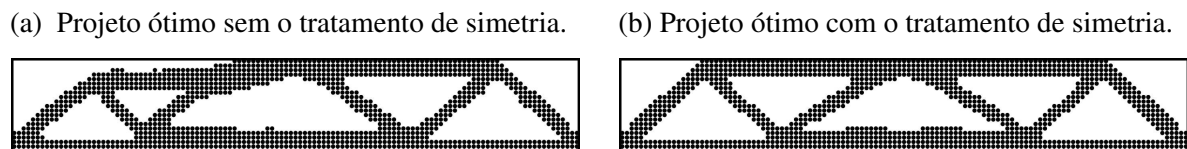
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Histórico da evolução da energia total de deformação e da fração de volume para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Resultados para o problema da viga MBB com uma discretização de 121×21 nós sem e com o tratamento de simetria.



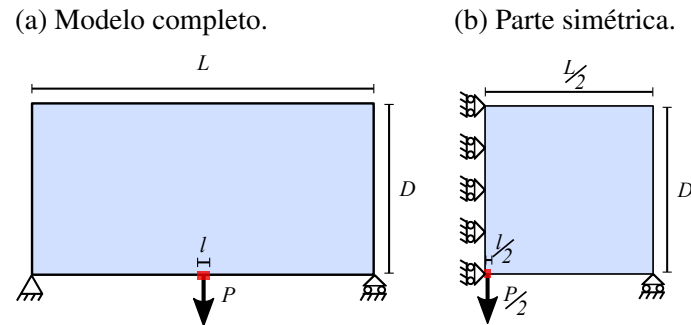
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Viga Simplesmente Apoiada

Uma viga simplesmente apoiada, conforme ilustrado na Figura 35a, é considerada, com dimensões $L = 1,2\text{m}$ e $D = 0,6\text{m}$, sujeita a uma carga $P = 200000\text{N}$ distribuída sobre

uma região de área $l \times T$, onde $l = 0,004\text{m}$ e $T = 0,01\text{m}$, sendo T a espessura da viga. No entanto, para otimizar o esforço computacional, devido à sua simetria, apenas metade da viga é analisada, aplicando-se as condições de contorno adequadas (Figura 35b). O volume objetivo, V^* , é definido como 60%.

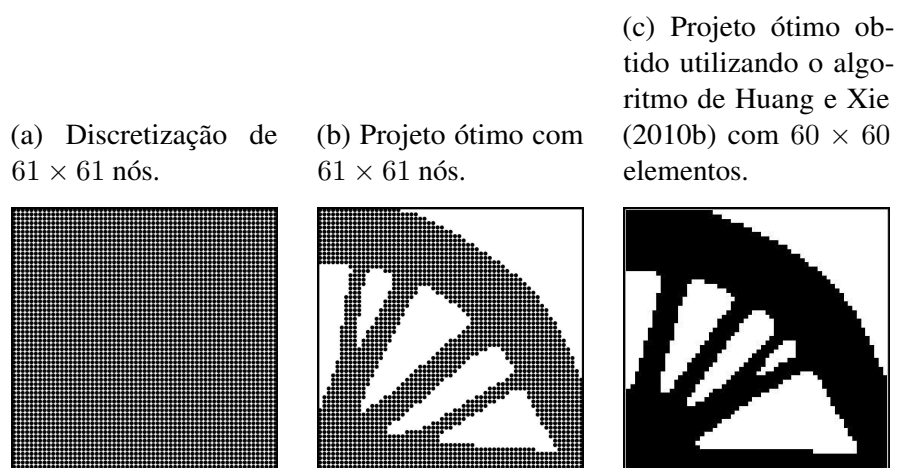
Figura 35 – Definição do problema da viga simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O problema foi inicialmente analisado com uma discretização de 61×61 nós (Figura 36a) para comparação com o método BESO baseado no MEF (HUANG; XIE, 2010b), utilizando uma malha de 60×60 elementos. Projetos ótimos semelhantes foram obtidos, resultando em estruturas com o mesmo número de buracos (Figuras 36b e 36c).

Figura 36 – Resultados para o problema da viga simplesmente apoiada utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o objetivo de investigar o comportamento da técnica com o uso de diferentes discretizações, foram realizados dois outros testes, com as discretizações de 56×56 e 66×66 nós. A Figura 37 apresenta os projetos ótimos alcançados com todas as distribuições consideradas.

Os resultados obtidos foram espelhados para permitir a visualização completa da estrutura. É importante observar que o projeto final, com menos nós, exibe uma configuração mais simples, ou seja, possui menos buracos em comparação com os demais. Geralmente, o uso de uma malha mais refinada resulta em um maior número de buracos. Esse fato é equivalente ao fenômeno de dependência de malha que pode ocorrer na otimização topológica de estruturas baseada no MEF (BENDSØE; SIGMUND, 2004; LUO *et al.*, 2012c). Todos os resultados alcançados são

Figura 37 – Resultados para o problema da viga simplesmente apoiada com diferentes discretizações.

(a) Projeto ótimo - 56×56 nós. (b) Projeto ótimo - 61×61 nós. (c) Projeto ótimo - 66×66 nós.

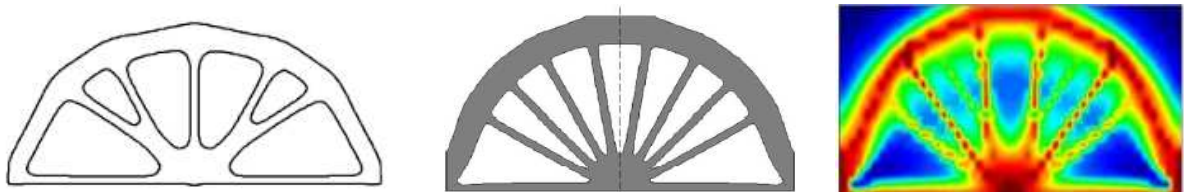


Fonte: Elaborada pelo autor.

considerados plausíveis, estando em conformidade com o que se espera com base na literatura (WANG *et al.*, 2004; NORATO *et al.*, 2007; LEE *et al.*, 2009), como pode ser observado na Figura 38.

Figura 38 – Resultados da literatura para o problema da viga simplesmente apoiada.

(a) Projeto ótimo - Wang *et al.* (2004). (b) Projeto ótimo - Norato *et al.* (2007). (c) Projeto ótimo - Lee *et al.* (2009).



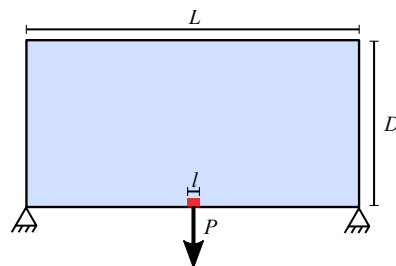
Fonte: Wang *et al.* (2004), Norato *et al.* (2007) e Lee *et al.* (2009).

4.5 Viga com Suportes Fixos

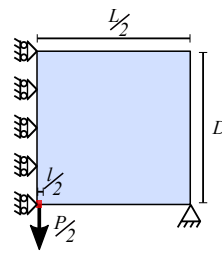
O modelo para a viga com suportes fixos é ilustrado na Figura 39a, com dimensões $L = 1,0\text{m}$ e $D = 0,5\text{m}$, sujeito a uma carga $P = 200000\text{N}$ distribuída sobre uma região de área $l \times T$, onde $l = 0,004\text{m}$ e $T = 0,01\text{m}$, sendo T a espessura da viga. Porém, com o intuito de reduzir o esforço computacional, em virtude de sua simetria, apenas metade da viga é otimizada, estabelecendo-se as condições de contorno de maneira apropriada (Figura 39b). O volume objetivo, V^* , é definido como 40%.

Figura 39 – Definição do problema da viga com suportes fixos.

(a) Modelo completo.



(b) Parte simétrica.

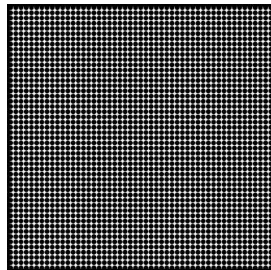


Fonte: Elaborada pelo autor.

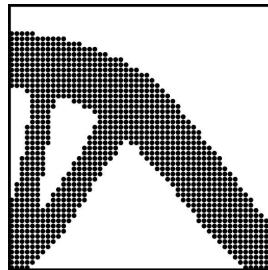
Para comparação com a abordagem BESO com MEF (HUANG; XIE, 2010b), usando uma malha de 50×50 elementos, uma discretização de 51×51 nós foi empregada (Figura 40a). Resultados similares foram obtidos (Figuras 40b e 40c). A compatibilidade do projeto ótimo

Figura 40 – Resultados para o problema da viga com suportes fixos utilizando o método proposto e uma abordagem BESO baseada no MEF.

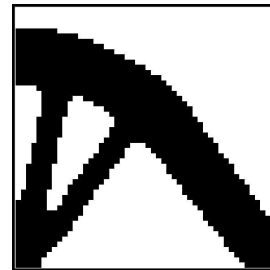
(a) Discretização de 51×51 nós.



(b) Projeto ótimo com 51×51 nós.



(c) Projeto ótimo obtido utilizando o algoritmo de Huang e Xie (2010b) com 50×50 elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

com outros disponíveis na literatura também pode ser verificada, como mostrado na Figura 41, reforçando a validade da técnica proposta (LI; ATLURI, 2008a; ULLAH *et al.*, 2022).

A eficácia da aplicação do filtro de sensibilidade é verificada neste exemplo. Para isso, o teste com a discretização de 51×51 nós foi realizado sem a execução desse procedimento. Conforme mostrado na Figura 42, a instabilidade do padrão de tabuleiro de xadrez se torna proeminente sem o uso do filtro, destacando a necessidade de sua aplicação.

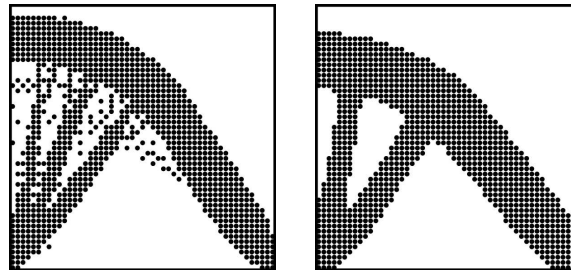
Figura 41 – Comparação do resultado obtido para o problema da viga com suportes fixos em relação a outros encontrados na literatura.



Fonte: Li e Atluri (2008a) e Ullah *et al.* (2022).

Figura 42 – Resultados para o problema da viga com suportes fixos utilizando uma discretização de 51×51 nós sem e com a aplicação do filtro de sensibilidade.

(a) Projeto ótimo sem o filtro. (b) Projeto ótimo com o filtro.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 Viga em Forma de L

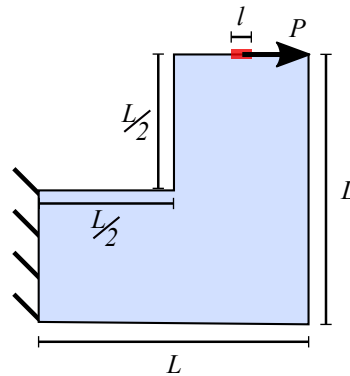
A análise da viga em forma de L foi conduzida considerando dois modelos. No primeiro modelo, delineado na Subseção 4.6.1, a viga é definida em seu formato padrão, enquanto, no segundo, abordado na Subseção 4.6.2, um buraco é introduzido na estrutura, caracterizando uma região predefinida sem material.

4.6.1 Viga em Forma de L Padrão

Neste exemplo, a viga em forma de L utiliza o modelo representado na Figura 43, com $L = 0,1\text{m}$ e uma carga $P = 35000\text{N}$ distribuída sobre uma região de área $l \times T$, onde $l = 0,002\text{m}$ e $T = 0,01\text{m}$, sendo T a espessura da viga. O volume objetivo, V^* , é definido como 40%.

A estrutura foi analisada utilizando duas distribuições regulares de nós distintas na região quadrada de dimensão $L \times L$, considerando apenas os nós contidos na área em formato de L. As distribuições de nós foram 61×61 e 73×73 , resultando em 2821 e 4033 nós dentro da

Figura 43 – Definição do problema da viga em forma de L.



Fonte: Elaborada pelo autor.

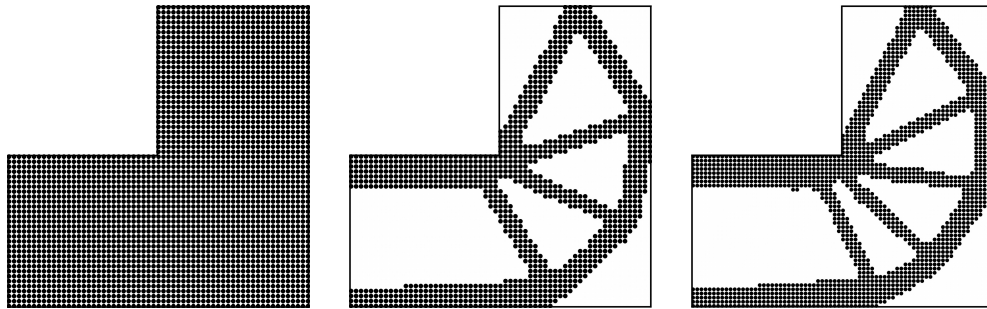
área em formato de L, respectivamente (Figura 44a). Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 44b e 44c. Como observado na Seção 4.4, diferentes discretizações podem produzir projetos distintos. Nota-se que com o aumento do número de nós, mais buracos surgiram na estrutura. No entanto, conforme evidenciado na Figura 45, os resultados são consistentes com

Figura 44 – Resultados para o problema da viga em forma de L com diferentes discretizações.

(a) Discretização de 2821 nós.

(b) Projeto ótimo com 2821 nós.

(c) Projeto ótimo com 4033 nós.



Fonte: Elaborada pelo autor.

outros reportados na literatura (ZHANG *et al.*, 2013; ZHAO, 2014; GONÇALVES *et al.*, 2022c).

4.6.2 Viga em Forma de L com Buraco

Uma modificação é realizada no modelo da viga em forma de L utilizado anteriormente, através da introdução de um buraco circular, que representa uma região predefinida sem material, conforme ilustrado na Figura 46. O tamanho do domínio, a carga aplicada e o volume objetivo são os mesmos estabelecidos no exemplo anterior. O círculo que define o buraco é

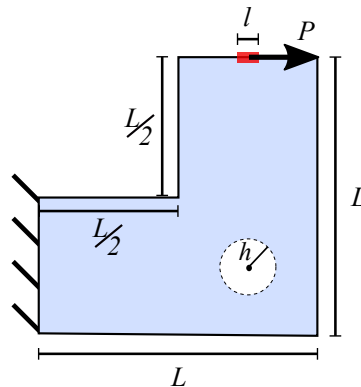
Figura 45 – Resultados da literatura para o problema da viga em forma de L. (a) Projeto ótimo - Zhang *et al.* (2013). (b) Projeto ótimo - Zhao (2014). (c) Projeto ótimo - Gonçalves *et al.* (2022c).



Fonte: Zhang *et al.* (2013), Zhao (2014) e Gonçalves *et al.* (2022c).

centralizado no quadrado de lado $L/2$ localizado na parte inferior do lado direito e possui raio $h = 0,01m$.

Figura 46 – Definição do problema da viga em forma de L com um buraco.

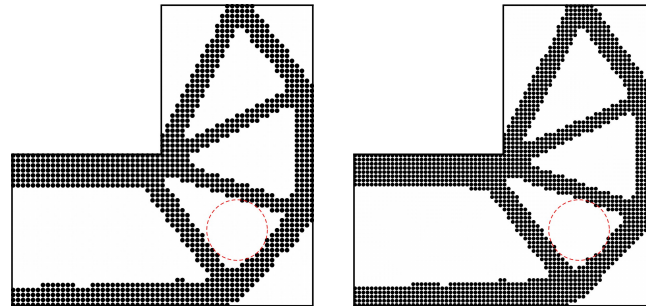


Fonte: Elaborada pelo autor.

A solução para o problema foi obtida utilizando as distribuições de 2821 e 4033 nós, como no caso anterior. Neste exemplo, entretanto, para os nós que estão dentro da zona circular do buraco, as variáveis de projeto da abordagem BESO são inicializadas com o valor de \mathcal{X}_{min} e não são atualizadas durante o processo iterativo. A Figura 47 mostra os resultados alcançados. O buraco é evidenciado apenas para facilitar a identificação de sua localização. Observa-se que a predefinição de uma região vazia na estrutura não impossibilitou o método proposto de determinar uma solução ótima. O material foi distribuído de forma adequada mantendo a região livre de material.

Figura 47 – Resultados para o problema da viga em forma de L com um buraco.

(a) Projeto ótimo com 2821 nós. (b) Projeto ótimo com 4033 nós.



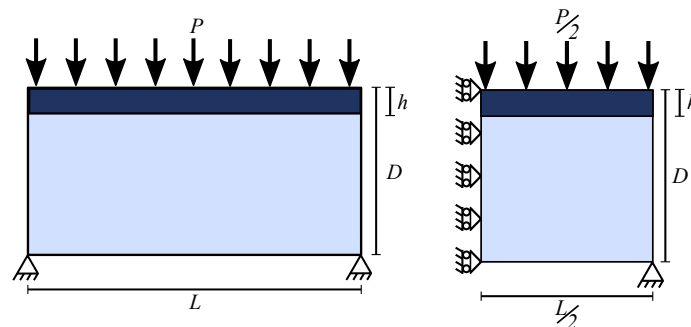
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.7 Ponte

O último exemplo executado trata de uma estrutura de ponte, cujo modelo inicial é ilustrado na Figura 48a, com $L = 2,0\text{m}$, $D = 1,0\text{m}$ e uma carga $P = 200000\text{N}$ distribuída uniformemente no topo, que equivale a uma região de área $L \times T$, onde $T = 0,01\text{m}$ representa a espessura da estrutura. O volume objetivo, V^* , é definido como 40%. Devido a característica simétrica do problema, apenas metade da ponte é otimizada, estabelecendo-se as condições de contorno de forma apropriada (Figura 48b).

Figura 48 – Definição do problema da ponte.

(a) Modelo completo. (b) Parte simétrica.



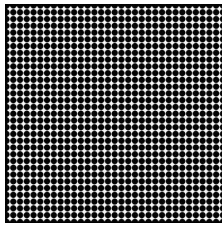
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na parte superior da ponte, há uma área predefinida, de modo que os nós que pertencem a essa região não podem ter suas variáveis de projetos modificadas, sendo atribuído o material sólido durante todo o processo de otimização. Uma discretização de 33×33 nós foi empregada (Figura 49a) e o número de nós na direção vertical da parte com material fixado é estabelecido como 3, assim $h = 0,1\text{m}$, significando que cerca de 10% do volume objetivo já é satisfeito. O resultado obtido, após o espelhamento da parte simétrica, é apresentado na

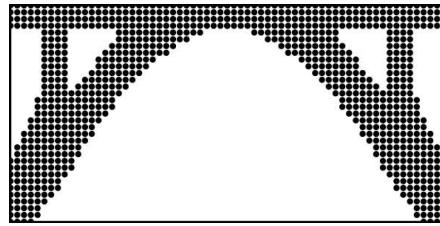
Figura 49b, mostrando sua concordância com o projeto ótimo obtido no estudo de Li e Atluri (2008a) (Figura 49c), apesar da técnica e alguns parâmetros serem diferentes. Observa-se, portanto, que a metodologia sem malha proposta lida bem com situações que envolvem estruturas com áreas predefinidas de material sólido.

Figura 49 – Projeto ótimo alcançado para o problema da ponte comparado com o resultado alcançado no estudo de Li e Atluri (2008a).

(a) Discretização de 33×33 nós.



(b) Projeto ótimo com 33×33 nós.



(c) Projeto ótimo - Li e Atluri (2008a).



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.8 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados os testes realizados com o objetivo de validar a técnica proposta. Durante a discussão, analisou-se a influência do filtro de sensibilidade, do processo de estabilização, do tratamento de simetria, da predefinição de regiões com e sem material, e da discretização na obtenção do projeto ótimo. Observou-se que o filtro de sensibilidade elimina eficientemente o fenômeno do tabuleiro de xadrez, enquanto o processo de estabilização reduz a ocorrência de variações na função objetivo, melhorando a convergência do processo. O emprego do tratamento de simetria garante a obtenção de estruturas simétricas e o estabelecimento de regiões predefinidas com e sem material na estrutura não prejudica o funcionamento do método. No entanto, o fenômeno de dependência de discretização, que pode também ocorrer com o uso do MEF, está presente, e, portanto, diferentes discretizações podem resultar em soluções ótimas distintas. A validade dos resultados alcançados foi assegurada por meio de sua compatibilidade com uma abordagem BESO baseada no MEF e com outros relatados na literatura, demonstrando, assim, a viabilidade e a aplicabilidade do método proposto.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A otimização topológica desempenha um papel crucial no campo da otimização estrutural, possibilitando a criação de projetos mais eficientes e leves ao otimizar a distribuição de material dentro de uma região de projeto. Nesse contexto, abordagens sem malha têm sido cada vez mais adotadas, emergindo como alternativa aos métodos baseados em malha, como o MEF, devido à sua capacidade de fornecer soluções precisas e à flexibilidade que proporcionam. O método DMLPG, uma abordagem sem malha, vem sendo amplamente utilizado na resolução de diversos problemas de engenharia e das ciências em geral. Ao contrário das tradicionais técnicas sem malha empregadas em otimização topológica, como o EFG e o RPIM, o DMLPG não requer uso de malha em nenhuma fase de seu desenvolvimento, caracterizando-o como um método verdadeiramente sem malha. Sendo assim, este trabalho propôs uma nova abordagem de otimização topológica, associando o DMLPG a um método BESO, com o propósito de explorar a viabilidade dessa abordagem numérica, verdadeiramente sem malha, nessa área.

O método BESO, embora ainda seja pouco utilizado em conjunto com técnicas sem malha, tem despertado o interesse de muitos pesquisadores devido à sua simplicidade conceitual, facilidade de implementação e capacidade de fornecer soluções eficientes. Um método BESO *soft-kill* usando um esquema de interpolação material com penalização foi adotado, realizando adaptações de uma abordagem baseada no MEF para permitir sua integração e funcionamento adequado com o método DMLPG. Uma etapa de atualização da matriz de rigidez elástica e um procedimento para o tratamento de simetria foram adicionados ao processo.

Definindo o problema de otimização como a minimização da energia total de deformação, sujeita à restrição de volume e considerando estruturas bidimensionais elásticas lineares, foram conduzidos vários testes para validar a técnica proposta. Ao incorporar um filtro de sensibilidade, o método eficientemente elimina a instabilidade numérica do padrão do tabuleiro de xadrez, um desafio comum na otimização topológica. O tratamento de simetria garante a obtenção de estruturas simétricas, quando necessário. No entanto, o fenômeno da dependência de discretização existe, em que discretizações diferentes podem levar a resultados distintos. De maneira geral, os resultados alcançados ressaltaram a viabilidade e aplicabilidade da abordagem proposta, uma vez que estes se mostraram consistentes com os resultados da abordagem BESO baseada no MEF e com outros relatados na literatura existente.

Com este estudo, uma nova possibilidade para o campo de otimização topológica é então oferecida, sendo esta baseada em um método verdadeiramente sem malha. No entanto,

este é apenas o primeiro passo para demonstrar as potencialidades do DMLPG nessa área. Para fortalecer seus benefícios, especialmente em comparação com métodos baseados em malha, é necessário explorar caminhos que envolvam uma maior complexidade. Portanto, como trabalhos futuros, sugere-se expandir a aplicação da abordagem de otimização topológica proposta para incluir estruturas tridimensionais e com bordas curvas, adaptatividade da discretização empregada, problemas com não-linearidades geométricas e a propagação de fissuras. Além disso, uma investigação mais profunda sobre o fenômeno da dependência de discretização também pode ser conduzida, buscando mecanismos que possam ser adicionados ao modelo para contornar essa instabilidade, de forma que o uso de uma discretização refinada alcance o mesmo resultado ao considerar uma discretização mais grosseira, porém com contornos mais definidos.

REFERÊNCIAS

- ABBASZADEH, M.; BAYAT, M.; DEHGHAN, M. Numerical investigation of the magnetic properties and behavior of electrically conducting fluids via the local weak form method. **Applied Mathematics and Computation**, [S. I.]: Elsevier, v. 433, p. 127–293, 2022. ISSN 0096-3003.
- ABBASZADEH, M.; DEHGHAN, M. Direct meshless local petrov-galerkin method to investigate anisotropic potential and plane elastostatic equations of anisotropic functionally graded materials problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 118, p. 188–201, 9 2020. ISSN 0955-7997.
- ABBASZADEH, M.; DEHGHAN, M. The fourth-order time-discrete scheme and split-step direct meshless finite volume method for solving cubic–quintic complex ginzburg–landau equations on complicated geometries. **Engineering with Computers**, [S. I.]: Springer, v. 38, p. 1543–1557, 2022. ISSN 1435-5663.
- AI, L.; GAO, X.-L. Topology optimization of 2D mechanical metamaterials using a parametric level set method combined with a meshfree algorithm. **Composite Structures**, [S. I.]: Elsevier, v. 229, p. 111318, 2019. ISSN 0263-8223.
- ANSOLA, R.; VEGUERÍA, E.; CANALES, J.; TÁRRAGO, J. A. A simple evolutionary topology optimization procedure for compliant mechanism design. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. I.]: Elsevier, v. 44, n. 1–2, p. 53–62, 2007. ISSN 0168-874X.
- ATLURI, S. N.; SHEN, S. The meshless local petrov-galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 3, p. 11–51, 2002.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, [S. I.]: Springer-Verlag, v. 22, n. 2, p. 117–127, 1998. ISSN 0178-7675.
- BABUSKA, I.; MELENK, J. M. The Partition of Unity Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-Free Galerkin Methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 1, p. 193–202, 1989. ISSN 0934-4373.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988. ISSN 0045-7825.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin: Springer, 2004.

- CARVALHO, L. F. B. **Otimização topológica de estruturas com restrições de flambagem aplicada à manufatura aditiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.
- CHO, S.; KWAK, J. Topology design optimization of geometrically non-linear structures using meshfree method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 195, n. 44, p. 5909–5925, 2006. ISSN 0045-7825.
- CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. I.]: Elsevier, v. 21, n. 4, p. 239–251, 1996. ISSN 0168-874X.
- CUI, M.; CHEN, H.; ZHOU, J.; WANG, F. A meshless method for multi-material topology optimization based on the alternating active-phase algorithm. **Engineering with Computers**, [S. I.]: Springer, v. 33, p. 871–884, 2017.
- DARANI, M. A. Direct meshless local petrov-galerkin method for the two-dimensional klein-gordon equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 74, p. 1–13, 2017. ISSN 0955-7997.
- DEHGHAN, M.; HOOSHYARFARZIN, B.; ABBASZADEH, M. Numerical simulation based on a combination of finite-element method and proper orthogonal decomposition to prevent the groundwater contamination. **Engineering with Computers**, [S. I.]: Springer, v. 38, p. 3445–3461, 2022.
- DIJK, N. P. van; MAUTE, K.; LANGELAAR, M.; KEULEN, F. van. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 48, p. 437–472, 2013.
- DU, Y.; FANG, Z.; WU, Z.; TIAN, Q. Thermomechanical compliant actuator design using meshless topology optimization. In: **2008 Asia Simulation Conference - 7th International Conference on System Simulation and Scientific Computing, ICSC 2008**. [S. l.: s. n.], 2008. p. 1018 – 1025.
- DU, Y.; LUO, Z.; TIAN, Q.; CHEN, L. Topology optimization for thermo-mechanical compliant actuators using mesh-free methods. **Engineering Optimization**, [S. I.]: Taylor & Francis, v. 41, p. 753–772, 2009.
- ESCHENAUER, H. A.; KOBELEV, V. V.; SCHUMACHER, A. Buble method for topology and shape optimization of structures. **Structural Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 8, p. 42–51, 1994.
- FUJII, D.; KIKUCHI, N. Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer-Verlag, v. 19, p. 113–121, 2000.
- GAN, N.; WANG, Q. Topology optimization of multiphase materials with dynamic and static characteristics by BESO method. **Advances in Engineering Software**, [S. I.]: Elsevier, v. 151, p. 102928, 2021. ISSN 0965-9978.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, [S. I.: s. n.], v. 181, p. 375–389, 1977.

- GONÇALVES, D. C.; LOPES, J. D. F.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J. The radial point interpolation method combined with a bi-directional structural topology optimization algorithm. **Engineering with Computers**, [S. I.]: Springer, v. 38, p. 5137–5151, 2022.
- GONÇALVES, D. C.; LOPES, J. D. F.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J. Topology optimization of light structures using the natural neighbour radial point interpolation method. **Meccanica**, [S. I.]: Springer, v. 57, p. 659 – 676, 2022.
- GONÇALVES, D. C.; LOPES, J. D. F.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J. Topology optimization using a natural neighbour meshless method combined with a bi-directional evolutionary algorithm. **Mathematics and Computers in Simulation**, [S. I.]: Elsevier, v. 194, p. 308–328, 2022. ISSN 0378-4754.
- GONG, S.; CHEN, M.; ZHANG, J.; HE, R. Study on modal topology optimization method of continuum structure based on EFG method. **International Journal of Computational Methods**, [S. I.: s. n.], v. 09, n. 01, p. 1240005, 2012.
- GONG, S.; DU, J.-X.; LIU, X.; XIE, G.-L.; ZHANG, J.-P. Study on topology optimization under multiple loading conditions and stress constraints based on EFG method. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, [S. I.]: Taylor & Francis, v. 11, p. 328–336, 2010.
- GONG, S.-g.; WEI, Y.-b.; XIE, G.-l.; ZHANG, J.-p. Study on topology optimization method of particle moving based on element-free galerkin method. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, [S. I.]: Taylor & Francis, v. 19, n. 5, p. 305–313, 2018.
- GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. *et al.* **Eigen v3.4**. 2021. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org>.
- HASANPOUR, K.; MIRZAEI, D. A fast meshfree technique for the coupled thermoelasticity problem. **Acta Mechanica**, [S. I.]: Springer, v. 229, p. 2657–2673, 2018.
- HE, Q.; KANG, Z.; WANG, Y. A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation. **Computational Mechanics**, [S. I.]: Springer, v. 54, p. 629–644, 2014.
- HUANG, X. Smooth topological design of structures using the floating projection. **Engineering Structures**, [S. I.]: Elsevier, v. 208, p. 110330, 2020. ISSN 0141-0296.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. I.]: Elsevier, v. 43, n. 14, p. 1039–1049, 2007. ISSN 0168-874X.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Bidirectional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, [S. I.]: Springer, v. 43, p. 393–401, 2009.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications**. [S. I.]: Wiley, 2010.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. A further review of ESO type methods for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 41, p. 671–683, 2010.

HUR, J.; KANG, P.; YOUN, S.-K. Topology optimization based on spline-based meshfree method using topological derivatives. **Journal of Mechanical Science and Technology**, [S. I.]: Springer, v. 31, p. 2423–2431, 2017.

ILATI, M.; DEHGHAN, M. Remediation of contaminated groundwater by meshless local weak forms. **Computers & Mathematics with Applications**, [S. I.]: Elsevier, v. 72, p. 2408–2416, 2016. ISSN 0898-1221.

JIANG, X.; MA, J.; TENG, X. A modified bi-directional evolutionary structural optimization procedure with variable evolutionary volume ratio applied to multi-objective topology optimization problem. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 135, p. 511–526, 2023.

JUAN, Z.; SHUYAO, L.; GUANGYAO, L. The topology optimization design for continuum structures based on the element free galerkin method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 34, n. 7, p. 666–672, 2010. ISSN 0955-7997.

KAMERMANS, M. P. 2011. <http://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>. Acesso em: 22 de mar. de 2024.

KEFAL, A.; SOHOULI, A.; OTERKUS, E.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Topology optimization of cracked structures using peridynamics. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, [S. I.]: Springer, v. 31, p. 1645–1672, 2019.

KHAN, I.; ULLAH, B.; ISLAM, S. ul; ULLAH, Z.; KHAN, W. An adaptive B-spline representation of topology optimization design for additive manufacturing. **Advances in Engineering Software**, [S. I.]: Elsevier, v. 186, p. 103552, 2023. ISSN 0965-9978.

KHAN, W.; ISLAM, S. ul; ULLAH, B. Structural optimization based on meshless element free galerkin and level set methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 344, p. 144–163, 2019. ISSN 0045-7825.

KÖKE, H.; WEIß, L.; HÜHNE, C. BESO with strain controlled material assignment. In: **2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S. l.: s. n.], 2015. p. 626–631.

LAVAEI, A.; FIROOZJAEI, A. R. Topology optimization of continuum structures using element free galerkin method on irregular nodal distribution. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, [S. I.]: Springer, v. 17, p. 333–344, 2021.

LEE, S.; LEE, C.-K.; BAE, J. Evolution of 2D truss structures using topology optimization technique with meshless method. In: **Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium**. [S. l.: s. n.], 2009. p. 1058–1065.

LI, J.; GUAN, Y.; WANG, G.; WANG, G.; ZHANG, H.; LIN, J. A meshless method for topology optimization of structures under multiple load cases. **Structures**, [S. I.]: Elsevier, v. 25, p. 173–179, 2020. ISSN 2352-0124.

LI, L.; LIU, C.; DU, Z.; ZHANG, W.; GUO, X. A meshless moving morphable component-based method for structural topology optimization without weak material. **Acta Mechanica Sinica**, [S. I.]: Springer, v. 38, n. 5, p. 361–365, 2022.

LI, S.; ATLURI, S. N. Topology-optimization of structures based on the MLPG mixed collocation method. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 26, p. 61–74, 2008.

- LI, S.; ATLURI, S. N. The MLPG mixed collocation method for material orientation and topology optimization of anisotropic solids and structures. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 30, p. 37–56, 2008.
- LI, S.; LONG, S.; LI, G. A topology optimization of moderately thick plates based on the meshless numerical method. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 60, n. 1, p. 73–94, 2010.
- LIN, H.; XU, A.; MISRA, A.; ZHAO, R. An ANSYS APDL code for topology optimization of structures with multi-constraints using the BESO method with dynamic evolution rate (DER-BESO). **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 62, p. 2229–2254, 2020.
- LIN, J.; GUAN, Y.; ZHAO, G.; NACEUR, H.; LU, P. Topology optimization of plane structures using smoothed particle hydrodynamics method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 110, n. 8, p. 726 – 744, 2017.
- LIU, G. **Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. Boca Raton: CRC Press, 2009. 794 p.
- LIU, H.; WANG, F.; ZHANG, C. Performance analysis and material distribution optimization for sound barriers using a semianalytical meshless method. **International Journal of Mechanical System Dynamics**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 3, n. 4, p. 331–344, 2023.
- LIU, M. B.; LIU, G. R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. **Archives of Computational Methods in Engineering**, [S. I.]: Springer, v. 17, p. 25–76, 2010.
- LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. F. Reproducing Kernel Particle Methods. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 20, n. 8-9, p. 1081–1106, 1995.
- LUO, Z.; ZHANG, N.; GAO, W.; MA, H. Structural shape and topology optimization using a meshless galerkin level set method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 90, p. 369–389, 2012.
- LUO, Z.; ZHANG, N.; JI, J.; WU, T. A meshfree level-set method for topological shape optimization of compliant multiphysics actuators. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 223-224, p. 133–152, 2012. ISSN 0045-7825.
- LUO, Z.; ZHANG, N.; WANG, Y.; GAO, W. Topology optimization of structures using meshless density variable approximants. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 93, p. 443–464, 2012.
- MAZZIA, A.; PINI, G.; SARTORETTO, F. Numerical investigation on direct MLPG for 2d and 3d potential problems. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 88, p. 183–209, 2012.
- MIRZAEI, D. **Development of moving least squares based meshless methods**. Tese (PhD in Applied Mathematics) – Amirkabir University of Technology, Tehran, 2011.
- MIRZAEI, D. A new low-cost meshfree method for two and three dimensional problems in elasticity. [S. I.]: Elsevier, v. 39, p. 7181–7196, 2015. ISSN 0307-904X.

MIRZAEI, D.; HASANPOUR, K. Direct meshless local petrov–galerkin method for elastodynamic analysis. **Acta Mechanica**, [S. I.]: Springer, v. 227, p. 619–632, 2016.

MIRZAEI, D.; SCHABACK, R. Direct meshless local petrov–galerkin (DMLPG) method: A generalized mls approximation. **Applied Numerical Mathematics**, [S. I.]: Elsevier, v. 68, p. 73–82, 2013. ISSN 0168-9274.

MIRZAEI, D.; SCHABACK, R. Solving heat conduction problems by the direct meshless local petrov-galerkin (DMLPG) method. **Numerical Algorithms**, [S. I.]: Kluwer Academic Publishers, v. 65, p. 275–291, 2014.

MIRZAEI, D.; SCHABACK, R.; DEHGHAN, M. On generalized moving least squares and diffuse derivatives. **IMA Journal of Numerical Analysis**, [S. I.]: IEEE Xplore, v. 32, p. 983–1000, 2012.

MLEJNEK, H. P.; SCHIRRMACHER, R. An engineer’s approach to optimal material distribution and shape finding. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 106, p. 1–26, 1993. ISSN 0045-7825.

MUNK, D.; VIO, G.; STEVEN, G. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 52, p. 613–631, 2015.

NEOFYTOU, A.; HUANG, T.-H.; KAMBAMPATI, S.; PICELLI, R.; CHEN, J.-S.; KIM, H. A. Level set topology optimization with nodally integrated reproducing kernel particle method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 385, p. 114016, 2021. ISSN 0045-7825.

NEOFYTOU, A.; PICELLI, R.; HUANG, T.-H.; CHEN, J.-S.; KIM, H. A. Level set topology optimization for design-dependent pressure loads using the reproducing kernel particle method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 61, p. 1805–1820, 2020.

NGUYEN, M.; BUI, T. Q. A meshfree-based topology optimization approach without calculation of sensitivity. **Vietnam Journal of Mechanics**, [S. I.]: House for Science and Technology, v. 44, p. 45–58, 2022. ISSN 2815-5882.

NORATO, J. A.; BENDSØE, M. P.; HABER, R. B.; TORTORELLI, D. A. A topological derivative method for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 33, p. 375–386, 01 2007.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. A finite point method for analysis of fluid mechanics problems. applications to convective transport and fluid flow. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.: s. n.], v. 39, n. 22, p. 3839–3866, 1996.

PINTO, O. T. **Aplicação de homogeneização inversa para a obtenção de estrutura básica ótima para propriedades elásticas prescritas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, [S. I.: s. n.], v. 15, p. 1031–1048, 1998.

REIS, R. F. A. **Análise de tensão em materiais compósitos de microestrutura periódica.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2016.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SETHIAN, J.; WIEGMANN, A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. **Journal of Computational Physics**, [S. I.]: Elsevier, v. 163, n. 2, p. 489–528, 2000. ISSN 0021-9991.

SHOBEIRI, V. Topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization based on the element-free galerkin method. **Engineering Optimization**, [S. I.]: Taylor & Francis, v. 48, n. 3, p. 380–396, 2015.

SHOBEIRI, V. The topology optimization design for cracked structures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 58, p. 26–38, 2015. ISSN 0955-7997.

SHOKRI, A.; BAHMANI, E. Direct meshless local petrov–galerkin (DMLPG) method for 2d complex ginzburg–landau equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 100, p. 195–203, 2019. ISSN 0955-7997.

SHOKRI, A.; BAHMANI, E. A study of nonlinear systems arising in the physics of liquid crystals, using MLPG and DMLPG methods. **Mathematics and Computers in Simulation**, [S. I.]: Elsevier B.V., v. 187, p. 261–281, 2021. ISSN 0378-4754.

SIGMUND, O. **Design of Material Structures Using Topology Optimization.** Tese (PhD in Mechanical Engineering) – Technical University of Denmark, Lyngby, 1994.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 48, p. 1031–1055, 2013.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural optimization**, [S. I.]: Springer, v. 16, p. 68–75, 1998.

SOHOULI, A.; KEFAL, A.; ABDELHAMID, A.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Continuous density-based topology optimization of cracked structures using peridynamics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 62, p. 2375–2389, 2020.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 22, p. 116–124, 2001.

SUKUMAR, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. The Natural Element Method in Solid Mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 43, n. 5, p. 839–887, 1998.

SUKUMAR, N.; WRIGHT, R. Overview and construction of meshfree basis functions: From moving least squares to entropy approximants. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 70, p. 181 – 205, 2007.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 24, p. 359–373, 1987.

TALEEI, A.; DEHGHAN, M. Direct meshless local petrov–galerkin method for elliptic interface problems with applications in electrostatic and elastostatic. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 278, p. 479–498, 2014. ISSN 0045-7825.

TEIMOURI, M.; ASGARI, M. Multi-objective BESO topology optimization algorithm of continuum structures for stiffness and fundamental natural frequency. **Structural Engineering and Mechanics**, [S. I.: s. n.], v. 72, p. 181–190, 2019.

ULLAH, B.; KHAN, W.; ISLAM, S.-u.-I.; ULLAH, Z. A coupled meshless element-free galerkin and radial basis functions method for level set-based topology optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [S. I.]: Springer, v. 44, p. 89, 2022.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. A boundary element and level set based topology optimisation using sensitivity analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 70, p. 80–98, 2016. ISSN 0955-7997.

ULLAH, Z.; ULLAH, B.; KHAN, W.; ISLAM, S. ul. Proportional topology optimisation with maximum entropy-based meshless method for minimum compliance and stress constrained problems. **Engineering with Computers**, [S. I.]: Springer-Verlag, v. 38, n. 6, p. 5541–5561, 2022.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 192, n. 1, p. 227–246, 2003. ISSN 0045-7825.

WANG, S. Y.; LIM, K. M.; KHOO, B. C.; WANG, M. Y. An extended level set method for shape and topology optimization. **Journal of Computational Physics**, [S. I.]: Elsevier, v. 221, n. 1, p. 395–421, 2007. ISSN 0021-9991.

WANG, S. Z. M. Y. Phase field: a variational method for structural topology optimization. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 6, n. 6, p. 547–566, 2004.

WANG, X.; WANG, M.; GUO, D. Structural shape and topology optimization in a level-set-based framework of region representation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 27, p. 1–19, 2004.

WANG, Y.; LUO, Z.; WU, J.; ZHANG, N. Topology optimization of compliant mechanisms using element-free galerkin method. **Advances in Engineering Software**, [S. I.]: Elsevier, v. 85, p. 61–72, 2015. ISSN 0965-9978.

WANG, Y.; Lü, E.; ZHAO, J.; GUO, J. Meshfree method for the topological design of microstructural composites. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 109-110, p. 35–53, 2015.

WEI, P.; WANG, M. Piecewise constant level set method for structural topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. I.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 78, p. 379 – 402, 04 2009.

- WU, Y.; MA, Y.-Q.; FENG, W.; CHENG, Y.-M. Topology optimization using the improved element-free galerkin method for elasticity. **Chinese Physics B**, [S. l.: s. n.], v. 26, n. 8, p. 080203, 2017.
- XIA, L.; XIA, Q.; HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: A comprehensive review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, [S. l.]: Springer, v. 25, p. 437–478, 2018. ISSN 0017-9310.
- XIA, Q.; SHI, T.; XIA, L. Topology optimization for heat conduction by combining level set method and BESO method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [S. l.]: Elsevier, v. 127, p. 200–209, 2018. ISSN 0017-9310.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. In: **Proceedings of the international conference computational engineering science**. Hong Kong: [S. n.], 1992. p. 471.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, [S. l.]: Elsevier, v. 49, n. 5, p. 885–896, 1993. ISSN 0045-7949.
- XIONG, Y.; ZHAO, Z.-L.; LU, H.; SHEN, W.; XIE, Y. M. Parallel BESO framework for solving high-resolution topology optimisation problems. **Advances in Engineering Software**, [S. l.]: Elsevier, v. 176, p. 103389, 2023. ISSN 0965-9978.
- YAN, X.; BAO, D. W.; CAI, K.; ZHOU, Y.; XIE, Y. M. A new form-finding method for shell structures based on BESO algorithm. In: **Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium**. [S. l.: s. n.], 2019.
- YAN, X.; HUANG, X.; ZHA, Y.; XIE, Y. M. Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures. **Computers & Structures**, [S. l.]: Elsevier, v. 133, p. 103–110, 2014. ISSN 0045-7949.
- YANG, X.; ZHENG, J.; LONG, S. yao. Topology optimization of continuum structures with displacement constraints based on meshless method. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, [S. l.]: Springer, v. 13, p. 311 – 320, 2016.
- ZHANG, J.; WANG, S.; ZHOU, G.; GONG, S.; YIN, S. Topology optimization of thermal structure for isotropic and anisotropic materials using the element-free galerkin method. **Engineering Optimization**, [S. l.]: Taylor & Francis, v. 52, p. 1097–1118, 2019.
- ZHANG, J.; ZHANG, H.; CHEN, J.; LIU, T.; PENG, J.; ZHANG, D.; YIN, S. Topology optimization of periodic mechanical structures with orthotropic materials based on the element-free galerkin method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. l.]: Elsevier, v. 143, p. 383–396, 2022. ISSN 0955-7997.
- ZHANG, W. S.; GUO, X.; WANG, M. Y.; WEI, P. Optimal topology design of continuum structures with stress concentration alleviation via level set method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.]: John Wiley & Sons, Ltd, v. 93, n. 9, p. 942–959, 2013.
- ZHANG, Y.; GE, W.; ZHANG, Y.; ZHAO, Z. Topology optimization method with direct coupled finite element–element-free galerkin method. **Advances in Engineering Software**, [S. l.]: Elsevier, v. 115, p. 217–229, 2017. ISSN 0965-9978.

ZHANG, Y.; GE, W.; ZHANG, Y.; ZHAO, Z.; ZHANG, J. Topology optimization of hyperelastic structure based on a directly coupled finite element and element-free galerkin method. **Advances in Engineering Software**, [S. I.]: Elsevier, v. 123, p. 25–37, 2018. ISSN 0965-9978.

ZHAO, F. A meshless pareto-optimal method for topology optimization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 37, p. 1625–1631, 2013. ISSN 0955-7997.

ZHAO, F. Topology optimization with meshless density variable approximations and BESO method. **Computer-Aided Design**, [S. I.]: Elsevier, v. 56, p. 1–10, 2014. ISSN 0010-4485.

ZHAO, Q.; FAN, C.-M.; WANG, F.; QU, W. Topology optimization of steady-state heat conduction structures using meshless generalized finite difference method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [S. I.]: Elsevier, v. 119, p. 13–24, 2020. ISSN 0955-7997.

ZHENG, J.; LONG, S.; LI, G. Topology optimization of free vibrating continuum structures based on the element free galerkin method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 45, p. 119–127, 2012.

ZHENG, J.; LONG, S.; XIONG, Y.; LI, G. A topology optimization design for the continuum structure based on the meshless numerical technique. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 27, p. 137–154, 2008.

ZHENG, J.; LONG, S.; XIONG, Y.; LI, G. A finite volume meshless local petrov-galerkin method for topology optimization design of the continuum structures. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [S. I.]: Tech Science Press, v. 42, n. 1, p. 19–34, 2009.

ZHOU, J. X.; ZOU, W. Meshless approximation combined with implicit topology description for optimization of continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. I.]: Springer, v. 36, p. 347–353, 2007.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. The COC algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.]: Elsevier, v. 89, n. 1, p. 309–336, 1991. ISSN 0045-7825. Second World Congress on Computational Mechanics.

APÊNDICE A – TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste apêndice, uma ideia geral das principais técnicas utilizadas na resolução de problemas de otimização topológica é apresentada. Na Seção A.1, o método de Homogeneização é discutido, enquanto que sua variante conhecida como Material Isotrópico Sólido com Penalização (*Solid Isotropic Material with Penalization - SIMP*) é descrita na Seção A.2. Na Seção A.3, a metodologia Conjunto de Nível é explicada. Por último, na Seção A.4, as abordagens Evolucionárias são explanadas.

A.1 Homogeneização

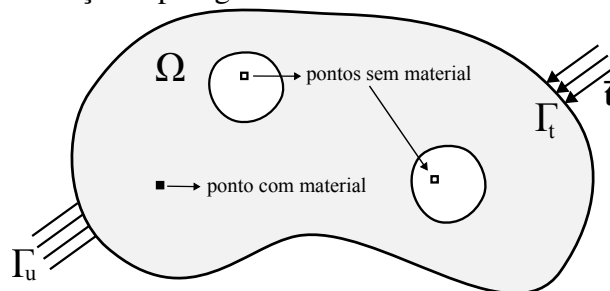
A otimização topológica consiste em determinar quais pontos do domínio contêm material e quais não contêm (Figura 50), ou seja, trata-se de um problema binário do tipo 0–1. Desse modo, o ideal é que existisse uma parametrização do tipo (BENDSØE; SIGMUND, 2004),

$$D_{ijkl} = 1_{\Omega^{mat}} D_{ijkl}^0, \quad 1_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^{mat} \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases},$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega = Vol(\Omega^{mat}) \leq V = Vol(\Omega),$$

onde Ω é o domínio de projeto, Ω^{mat} é o subconjunto de Ω dos pontos que contêm material, D_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de elasticidade do material isotrópico dado e D_{ijkl} são as componentes do tensor calculadas para um ponto \mathbf{x} . Essa natureza discreta complica o processo

Figura 50 – Representação do problema de otimização topológica.

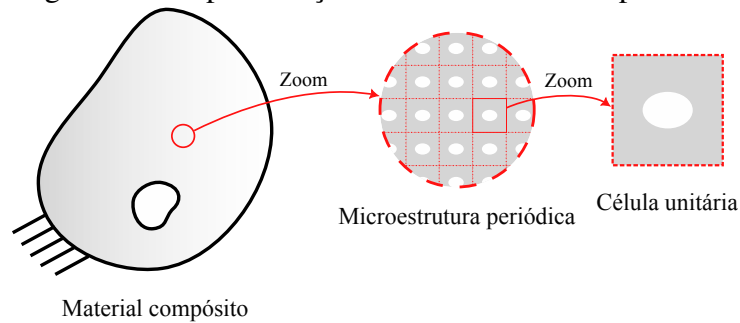


Fonte: Elaborada pelo autor.

de resolução, pois envolve uma grande quantidade de variáveis de projeto e não há garantia de solução (SIGMUND; PETERSSON, 1998). A fim de relaxar esse problema, foi proposto o uso de variáveis de projeto contínuas com o método de Homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

No método de Homogeneização, utiliza-se o conceito de materiais compósitos formados por células de base unitária, ou microestruturas, que se repetem de forma periódica gerando a heterogeneidade do meio (REIS, 2016), conforme ilustrado na Figura 51. Essas microestruturas são compostas por materiais homogêneos, geralmente isotrópicos. O meio heterogêneo é então substituído por um meio homogêneo equivalente (REIS, 2016), em que as propriedades efetivas são parametrizadas pelas características geométricas das microestruturas (SANT'ANNA, 2002).

Figura 51 – Representação de um material compósito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada célula unitária possui várias variáveis de projeto que definem suas características geométricas e sua densidade. Assim, as seguintes equações são estabelecidas (SANT'ANNA, 2002)

$$\begin{aligned}
 D_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \tilde{D}_{ijkl}(\mu(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \dots, \theta(\mathbf{x})), \\
 \rho(\mathbf{x}) &= \rho(\mu(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \dots), \\
 \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega &\leq V, \\
 0 &\leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \\
 \mathbf{x} &\in \Omega,
 \end{aligned}$$

onde μ, γ, \dots são os parâmetros geométricos da célula e θ é sua orientação. \tilde{D}_{ijkl} são as componentes do tensor de elasticidade do material equivalente homogeneizado e ρ é a densidade de material na célula. A introdução da densidade como uma variável contínua é a ideia central do modelo para evitar as dificuldades associadas à resolução do problema de natureza discreta. O valor $\rho = 0$ indica um ponto sem material, $\rho = 1$ corresponde a um ponto com material e os valores intermediários, ou seja, $0 < \rho < 1$, representam um material composto poroso e periódico.

Atualmente, existem duas vertentes associadas a esse método. Na abordagem original, conhecida somente como Homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), parte-se de considerações sobre a estrutura microscópica e chega-se ao comportamento macroscópico do material (PINTO, 2011). Enquanto que, na Homogeneização Inversa (SIGMUND, 1994), parte-se do comportamento macroscópico e busca-se obter as propriedades microscópicas do material (PINTO, 2011), isto é, o tensor do material é prescrito e utilizado como uma restrição no problema de otimização topológica.

A.2 Material Isotrópico Sólido com Penalização

O método SIMP, introduzido por Bendsøe (1989) e posteriormente por Mlejnek e Schirmacher (1993) e Fujii e Kikuchi (2000), é uma variação do método de Homogeneização, no qual uma única variável de projeto é considerada: a densidade do material, $\rho(\mathbf{x})$. Dependendo da geometria da microestrutura, muitos parâmetros devem ser otimizados, o que leva a uma elevação do custo computacional do método de Homogeneização. Dessa forma, o uso de uma única variável de projeto torna o procedimento mais simples.

Na abordagem SIMP, o tensor de elasticidade do material é parametrizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \rho^p(\mathbf{x})D_{ijkl}^0, \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})d\Omega &\leq V, \\ 0 &\leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \\ \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned}$$

onde p é o fator de penalização. A escolha do valor de penalização depende do problema físico a ser tratado. Por exemplo, para o problema da minimização da energia total de deformação, $p > 1$ penaliza as densidades intermediárias tentando se aproximar de soluções do tipo 0–1. Escolher um valor para p muito baixo ou muito alto causa uma escala de cinza abundante ou uma convergência bastante rápida para mínimos locais (SIGMUND; MAUTE, 2013). Para problemas em que a restrição de volume é considerada, geralmente, a obtenção de projetos 0 – 1 é alcançada levando em conta $p \geq 3$ (BENDSØE; SIGMUND, 2004). Um número “mágico” que garante uma boa convergência é $p = 3$ (BENDSØE; SIGMUND, 2004; SIGMUND; MAUTE, 2013).

O problema de otimização pode ser resolvido com diferentes algoritmos de otimização baseados em gradiente, tais como (ZHENG *et al.*, 2012; LUO *et al.*, 2012c): o método

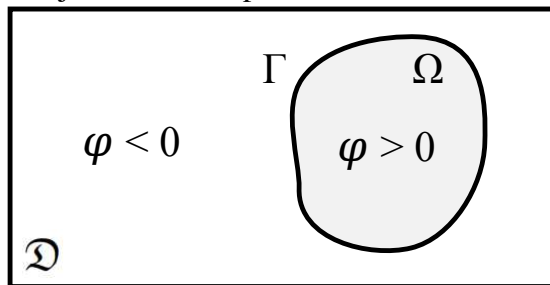
critério de otimalidade (ZHOU; ROZVANY, 1991); o método das assíntotas móveis (SVANBERG, 1987); e o método de programação linear sequencial (FUJII; KIKUCHI, 2000).

A.3 Conjunto de Nível

O método de Conjunto de Nível (*Level-Set - LS*) foi proposto na otimização topológica estrutural por Sethian e Wiegmann (2000). Nessa abordagem, a fronteira do domínio de projeto é definida pela curva de nível zero de uma função de conjunto de nível. Seja \mathcal{D} um domínio computacional e Ω o domínio de projeto que ocupa uma parte de \mathcal{D} (Figura 52). Se a estrutura projetada for composta de um único material, \mathcal{D} é considerado como sendo ocupado por dois materiais, um é o material sólido e o outro é vazio. Ω pode então ser representado implicitamente por uma função de conjunto de nível $\varphi(\mathbf{x})$, que é definida no domínio \mathcal{D} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &> 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ (material)}, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \text{ (interface)}, \\ \varphi(\mathbf{x}) &< 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus (\Omega \cup \Gamma) \text{ (vazio)}.\end{aligned}$$

Figura 52 – Representação da abordagem de conjunto de nível para um único material.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A otimização topológica acontece através da movimentação da fronteira Γ (CARVALHO, 2020). Esse processo advém da atualização da função de conjunto de nível, que é geralmente realizada por meio da solução da equação de Hamilton-Jacobi expressa por (SIGMUND; MAUTE, 2013; DIJK *et al.*, 2013)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\bar{V} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$$

ou, considerando $\mathbf{n} = (\nabla\varphi)/(\|\nabla\varphi\|)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \bar{V}\|\nabla\varphi\| = 0,$$

onde t é um pseudo-tempo que representa a evolução do projeto no processo de otimização e \bar{V} é o módulo do vetor velocidade (*speed function*). A obtenção do resultado ótimo depende, em muitos casos, da definição de uma configuração inicial para a topologia (SIGMUND; MAUTE, 2013; ULLAH *et al.*, 2022).

Durante o processo de atualização da função de conjunto de nível, os gradientes dessa função devem ser uniformes ao longo da interface, por exemplo, $\|\nabla\varphi\| \approx 1$ (SIGMUND; MAUTE, 2013). No entanto, a equação de Hamilton-Jacobi não garante esse requisito e esquemas de reinicialização são usados para evitar que os gradientes se tornem muito íngremes ou muito planos ao longo da interface (WANG *et al.*, 2003). O uso da equação de Hamilton-Jacobi também não permite a criação de novos buracos durante o processo de otimização. A introdução de um novo buraco normalmente é realizada em uma etapa separada, que pode afetar a convergência do processo (SIGMUND; MAUTE, 2013). Abordagens utilizando, por exemplo, derivadas topológicas (WANG *et al.*, 2007; KHAN *et al.*, 2019) e combinando o método de conjunto de nível com funções de base radial já foram propostas (ULLAH *et al.*, 2022).

A.4 Otimização Estrutural Evolucionária e Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional

Visto que o problema de otimização topológica original é de natureza discreta, 0–1, é natural tentar resolvê-lo utilizando uma abordagem de otimização discreta. Um campo importante que faz uso desse tipo de abordagem são os métodos de otimização evolucionários. O método de Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* - ESO) foi introduzido pela primeira vez por Xie e Steven (1992, 1993). A ideia central consiste no conceito de que a estrutura evolui em direção a um ótimo removendo lentamente materiais de regiões consideradas “ineficientes”. Tipicamente baseado no Método dos Elementos Finitos - MEF, assim como as outras técnicas citadas anteriormente, a avaliação da ineficiência das regiões foi associada originalmente ao nível das tensões nos elementos. Elementos com tensões mais baixas são removidos da análise. Essa abordagem é conhecida como *hard-kill*. Com o intuito de maximizar a rigidez da estrutura, Chu *et al.* (1996) modificou o critério de tensão para a energia de deformação do elemento.

Uma extensão do ESO foi proposta por Querin *et al.* (1998), sendo denominada Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* - BESO). O BESO permite não apenas retirar elementos ineficientes, mas também adicionar elementos em regiões consideradas “eficientes”. Novos elementos são adicionados em locais próximos aos elementos com tensões mais elevadas.

Nos métodos ESO e BESO originais, a remoção completa de um elemento do domínio do projeto pode resultar em dificuldades teóricas no processo de otimização topológica (HUANG; XIE, 2009; HUANG; XIE, 2010b). Algumas soluções podem ser encontradas na revisão de Xia *et al.* (2018a), como a proposta por Huang e Xie (2009). Nessa abordagem, uma estratégia de penalização material, similar à utilizada na técnica SIMP, é incorporada ao método BESO por meio de uma metodologia *soft-kill*. Nessa metodologia, os elementos não são verdadeiramente removidos, são apenas suavizados, contribuindo pouco para a rigidez da estrutura.

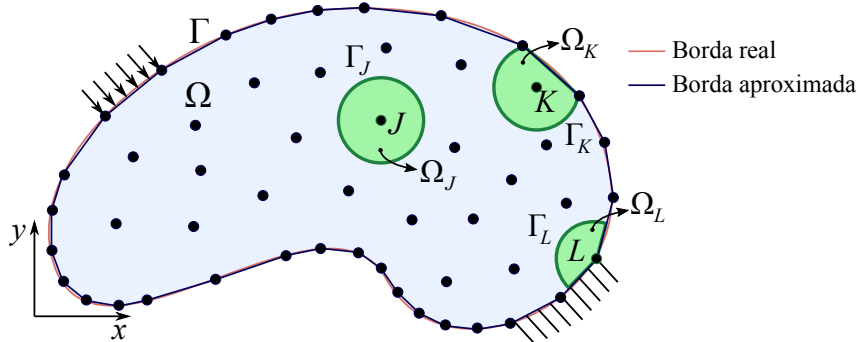
APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, as integrais são aproximadas através da quadratura de Gauss-Legendre. Sendo assim, este Apêndice apresenta uma breve explicação dos principais passos envolvidos nesse processo. A Seção B.1 mostra a construção dos subdomínios locais e suas fronteiras, enquanto que a Seção B.2 aborda como as integrais de borda são resolvidas.

B.1 Construção dos Subdomínios Locais e suas Fronteiras

Considerando um domínio Ω , sua fronteira Γ é aproximada por segmentos de retas, como ilustrado na Figura 53. O corpo é discretizado por um conjunto de nós, em que cada nó I possui um subdomínio local, Ω_I , com uma fronteira local, Γ_I (Figura 53). Para construir os subdomínios, neste trabalho, são utilizados círculos centrados nos nós. As fronteiras locais podem ter suas formas modificadas, dependendo da interseção com a fronteira Γ , como exemplificado na Figura 53 com os nós K e L .

Figura 53 – Aproximação da fronteira Γ do domínio global Ω por segmentos de retas. As fronteiras dos subdomínios locais, Γ_J , Γ_K e Γ_L , são construídas a partir de círculos centrados nos nós e de suas interseções com a borda Γ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para estabelecer a fronteira local, Γ_I , de um subdomínio, Ω_I , é necessário computar os pontos de interseção do círculo de raio r_e centrado no nó I , na posição $\mathbf{x}_I = [x_I \ y_I]^T$, com cada segmento de reta, $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$, no sentido anti-horário, como mostrado na Figura 54. Substituindo a equação paramétrica da reta que contém o segmento $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_i + t(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) = \begin{cases} x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \\ y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.1})$$

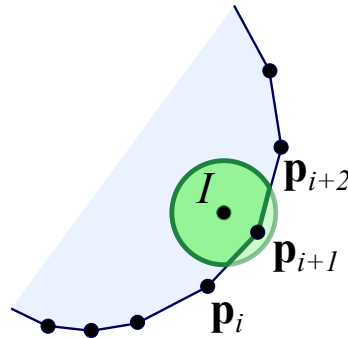
na equação do círculo,

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r_e^2, \quad (\text{B.2})$$

obtém-se

$$(x_i + t(x_{i+1} - x_i))^2 + (y_i + t(y_{i+1} - y_i))^2 = r_e^2. \quad (\text{B.3})$$

Figura 54 – Representação da interseção de um círculo com a fronteira do domínio, formada por segmentos de retas ordenados no sentido anti-horário.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Equação (B.3) pode ser reescrita como uma equação de segundo grau na variável paramétrica t ,

$$\begin{aligned} & ((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2)t^2 \\ & + 2((x_i - x_I)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_I)(y_{i+1} - y_i))t \\ & + (x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2 - r_e^2 = 0. \end{aligned}$$

Definindo $a = (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$, $b = 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$ e $c = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) - r_e^2$, obtém-se a forma padrão

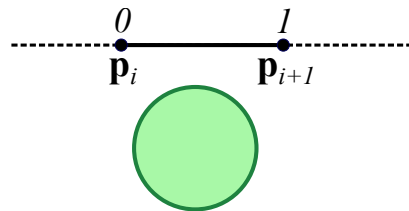
$$at^2 + bt + c = 0. \quad (\text{B.4})$$

Resolvendo a Equação (B.4), três casos são possíveis dependendo do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$, então não existe interseção entre a reta que define o segmento e o círculo (Figura 55a). Se $\Delta = 0$, então existe um único ponto de interseção, isto é, $t_0 = t_1 = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ (Figura 55b). Caso contrário, $\Delta > 0$, existem dois pontos de interseção, dados

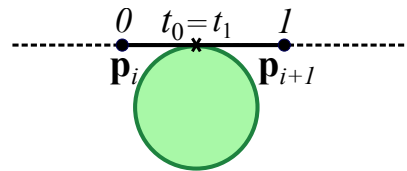
pelas raízes reais, $t_0 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$ e $t_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$, porém, é necessário analisar onde ocorrem. Se $t_1 \leq 0$ ou $t_0 \geq 1$ (Figs. 55c e 55d), não existe interseção do segmento com o círculo. Se $t_0 \geq 0$ e $t_1 \geq 1$ (Figura 55e), existe apenas um ponto de interseção no segmento de reta. O mesmo acontece para o caso em que $t_0 \leq 0$ e $t_1 \leq 1$ (Figura 55f). Se $t_0 \leq 0$ e $t_1 \geq 1$ (Figura 55g), não há interseção, contudo o segmento está completamente dentro do círculo. Se $t_0 \geq 0$ e $t_1 \leq 1$ (Figura 55h), existem dois pontos de interseção entre o círculo e o segmento de reta. Sendo assim, os casos que de fato alteram a fronteira do subdomínio são representados pelas Figuras 55e-55h.

Figura 55 – Casos de interseção entre a reta que define o segmento $\overline{p_i p_{i+1}}$ e o círculo.

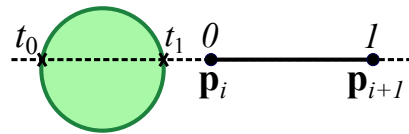
(a) $\Delta < 0$.



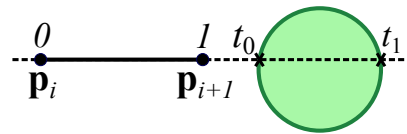
(b) $\Delta = 0$.



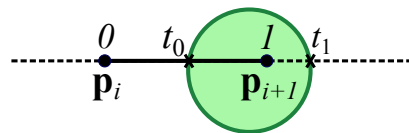
(c) $\Delta > 0$ e $t_1 \leq 0$.



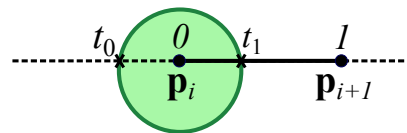
(d) $\Delta > 0$ e $t_0 \geq 1$.



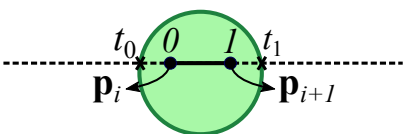
(e) $\Delta > 0$, $t_0 \geq 0$ e $t_1 \geq 1$.



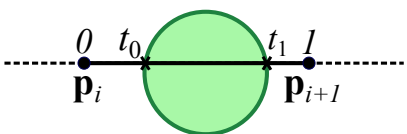
(f) $\Delta > 0$, $t_0 \leq 0$ e $t_1 \leq 1$.



(g) $\Delta > 0$, $t_0 \leq 0$ e $t_1 \geq 1$.



(h) $\Delta > 0$, $t_0 \geq 0$ e $t_1 \leq 1$.



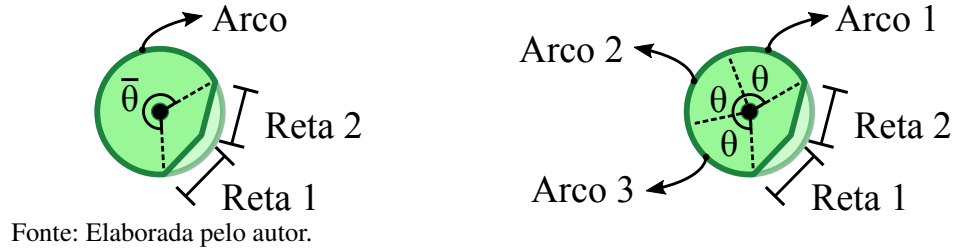
Fonte: Elaborada pelo autor.

B.2 Quadratura de Gauss–Legendre

Uma vez que a força de corpo não é considerada neste trabalho, apenas integrais de borda precisam ser resolvidas (Equações (3.33) e (3.38)). Levando em conta o exemplo da Figura 54, após o cálculo das interseções (Seção B.1), a fronteira do subdomínio pode ser decomposta em dois casos: segmentos de reta e arcos de circunferência, conforme mostrado na Figura 56a. Seja θ_{th} um limiar para o ângulo máximo de um arco. Se $\bar{\theta} > \theta_{th}$ (Figura 56a), então

é necessário subdividir o setor circular, criando arcos menores com ângulos $\theta \leq \theta_{th}$ (Figura 56b).

Figura 56 – Decomposição da fronteira de um subdomínio em retas e arcos.
 (a) Subdomínio após a interseção com a fronteira do domínio global. (b) Subdivisão do setor circular para criar arcos com ângulos $\theta < \theta_{th}$.



Dessa forma, após os processos mencionados anteriormente, os pontos de integração podem ser gerados para cada caso. A Seção B.2.1 apresenta a quadratura de Gauss-Legendre para o caso do segmento de reta, enquanto que a Seção B.2.2 mostra para o caso do arco de circunferência.

B.2.1 Segmento de Reta

Considere a integral

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma, \quad (\text{B.5})$$

onde f é a função a ser integrada e $\bar{\Gamma}_I$ é uma parte da fronteira Γ_I definida por um segmento de reta, $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$. Os pontos de integração da quadratura de Gauss-Legendre são estabelecidos em um espaço paramétrico ξ , para $-1 \leq \xi \leq 1$ (Figura 57), o que requer uma mudança de variável,

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma = \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\xi)) \|\mathbf{p}'(\xi)\| d\xi. \quad (\text{B.6})$$

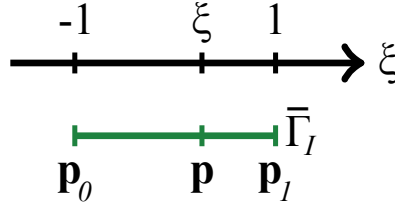
Tomando

$$\mathbf{p}(\xi) = \frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1}{2} + \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{2} \xi = \begin{cases} x(\xi) = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_1 - x_0}{2} \xi, \\ y(\xi) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} \xi, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

tem-se

$$\mathbf{p}'(\xi) = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{2} = \begin{cases} x'(\xi) = \frac{x_1 - x_0}{2}, \\ y'(\xi) = \frac{y_1 - y_0}{2}. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Figura 57 – Representação do espaço paramétrico ξ e do segmento de reta $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim sendo, a integral da Equação (B.5) é aproximada com a quadratura de Gauss-Legendre da seguinte forma,

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma \approx \sum_{i=1}^Q \psi_i g(\xi_i), \tag{B.9}$$

onde Q é o total de pontos de integração, $g(\xi_i) = f(x(\xi_i), y(\xi_i))\|\mathbf{p}'(\xi_i)\|$ e ψ_i é o peso associado ao ponto i na posição ξ_i definido na Tabela 2. É importante notar que existem mais valores tabelados dependendo do total de pontos de integração utilizados para a aproximação (KAMERMANS, 2011).

Tabela 2 – Valores tabelados das posições paramétricas e dos pesos para diferentes quantidades de pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre (KAMERMANS, 2011).

Total de pontos (Q)	Posições paramétricas (ξ_i)	Pesos (ψ_i)
2	± 0.5773502691896257	1.0000000000000000
3	0.0000000000000000	0.8888888888888888
	± 0.7745966692414834	0.5555555555555556
4	± 0.3399810435848563	0.6521451548625461
	± 0.8611363115940526	0.3478548451374538

Fonte: Elaborada pelo autor.

B.2.2 Arco de Circunferência

Seja agora $\bar{\Gamma}_I$ um arco de circunferência de raio r_e , com ângulo $\theta \leq \theta_{th}$, definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 , como ilustrado na Figura 58. A mudança de variável na Equação (B.6) é

feita de modo que

$$\mathbf{p}(\xi) = \begin{cases} x(\xi) = r_e \cos(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \\ y(\xi) = r_e \sin(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

onde

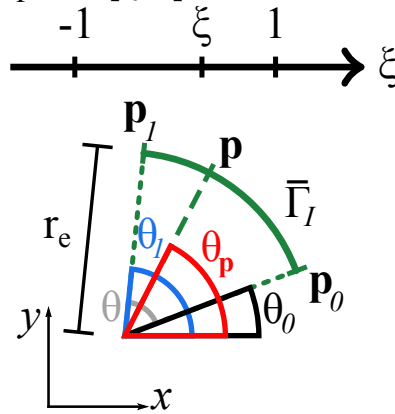
$$\theta_{\mathbf{p}}(\xi) = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\xi, \quad (\text{B.11})$$

em que θ_0 e θ_1 são os ângulos associados aos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 , respectivamente. Desse modo,

$$\mathbf{p}'(\xi) = \begin{cases} x'(\xi) = -r \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} \right) \sin(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \\ y'(\xi) = r \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} \right) \cos(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)). \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

A integral é então resolvida com a aproximação da Equação (B.9).

Figura 58 – Representação do espaço paramétrico ξ e do arco de circunferência de raio r_e , com ângulo θ , definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.