



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE QUIXADÁ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ELIABE SOARES SANTOS

**LIMITES SUPERIORES PARA O NÚMERO CROMÁTICO $L(3,2,1)$ DE CLASSES DE
GRAFOS COM GRAU MÁXIMO TRÊS.**

QUIXADÁ-CE

2023

ELIABE SOARES SANTOS

LIMITES SUPERIORES PARA O NÚMERO CROMÁTICO $L(3,2,1)$ DE CLASSES DE
GRAFOS COM GRAU MÁXIMO TRÊS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do Campus de Quixadá da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

QUIXADÁ-CE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S234I Santos, Eliabe Soares.

Limites superiores para o número cromático $L(3,2,1)$ de classes de grafos com grau máximo três. / Eliabe Soares Santos. – 2023.

71 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá, Curso de Ciência da Computação, Quixadá, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

1. Teoria dos grafos. 2. Ciência da computação.. 3. Matemática discreta.. I. Título.

CDD 004

ELIABE SOARES SANTOS

LIMITES SUPERIORES PARA O NÚMERO CROMÁTICO $L(3,2,1)$ DE CLASSES DE
GRAFOS COM GRAU MÁXIMO TRÊS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do Campus de Quixadá da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em: 6 de dezembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fábio Carlos Sousa Dias
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lucas Ismailly Bezerra Freitas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Henrique Macedo de Araujo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, que acreditaram no meu potencial. Mãe, seu cuidado e dedicação de fazer sempre o melhor por mim. Pai, seus conselhos e puxões de orelha me tornaram mais forte.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero expressar minha gratidão pessoal. Concluir esta etapa exigiu muito esforço e dedicação, e estou orgulhoso do que alcancei. Agradeço aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado quando mais precisei, e às minhas irmãs, que me fazem meus dias mais intensos. Ao meu orientador, professor Atílio, minha gratidão por sua paciência e cuidado. Seu apoio foi fundamental para que eu pudesse concluir este trabalho da melhor maneira possível. Aos meus amigos, devo um agradecimento especial. Athayde, que esteve presente em todas as fases da minha vida, sempre pronto para ir à praia ou fazer alguma aventura aleatória comigo. Anderson Silva, que conheci na faculdade e se tornou um parceiro constante de estudos. Cícero Anderson, cuja visão única do mundo me ajudou a permanecer firme nos meus objetivos. À Maria Heloisa, uma amiga de longa data que ocupa um lugar muito especial no meu coração. Ela conhece todos os aspectos da minha vida e sempre me compreende. Deixo uma menção especial ao Silas, meu companheiro de aventuras musicais que sempre me acompanha nos shows do Gustavo Lima. Passamos dias contando os minutos e segundos para o próximo e quando finalmente chegou o dia, valeu a pena cada segundo da espera. E como esquecer o show do Gustavo Lima em Fortaleza? Dedico uma parte especial desta mensagem aos meus amigos dos Estados Unidos: Rya, Luiz Suarez e Hyrum Cannon, e à sua família. Esses amigos estão sempre jogando Fortnite comigo e sempre tiveram muita paciência comigo, mesmo quando eu não os entendia. Eles me ajudaram a conseguir melhorar no inglês e se tornaram uma extensão da minha vida fora do Brasil. E, claro, não posso esquecer de Igor Albuquerque. Companheiro de risadas e brincadeiras durante a faculdade, Igor esteve comigo até meu último dia letivo, ajudando-me com minhas malas quando eu estava de partida. Sua amizade e apoio valem mais que ouro. Por fim, agradeço a todos que passaram pela minha vida. Cada um de vocês, de alguma forma, contribuiu para o meu crescimento. Obrigado.

"Na minha cabeça, eu sou o melhor. Se não pensarmos assim não temos ambição. Eu tenho de pensar que, na minha profissão, eu sou o melhor. Posso não ser, mas na minha cabeça eu sou o melhor." (Cristiano Ronaldo)

RESUMO

Dado um grafo G , uma função $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, k\}$ é chamada de rotulação-L(3,2,1) de G se, para $u, v \in V(G)$: se $d(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$; se $d(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$; e se $d(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$. O *span* de uma rotulação-L(3,2,1) f é o maior rótulo k que é atribuído pela rotulação f a um vértice de G . Uma rotulação-L(3,2,1) é dita *ótima* quando possui o menor *span* possível e o *span* de tal rotulação é chamado *número cromático L(3,2,1)*, e é denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$. A classe dos grafos cúbicos é de interesse na Teoria dos Grafos e em Algoritmos pois diversos problemas de decisão em grafos arbitrários são NP-Completo e permanecem NP-Completo mesmo quando restritos aos grafos cúbicos. Um grafo é dito *subcúbico* quando o seu grau máximo é igual a 3. Uma outra classe de grafos de importância na Teoria dos Grafos é a classe dos grafos snarks. Um *grafo snark* é um grafo cúbico sem arestas de corte e que não possui uma coloração própria de arestas com 3 cores. Neste trabalho de conclusão de curso, apresentamos um limitante superior mais ajustado para o número cromático L(3,2,1) para uma subclasse de grafos subcúbicos, a saber, para grafos subcúbicos sem vértices adjacentes de grau máximo tais que quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos 4 entre si, melhorando assim um resultado anterior da literatura. Também apresentamos limitantes superiores mais ajustados para o número cromático L(3,2,1) das seguintes famílias infinitas de *snarks*: *snarks* de Blanuša generalizados, *snarks* de Loupekin e *snarks-flor*.

Palavras-chave: teoria dos Grafos; ciência da computação; matemática discreta.

ABSTRACT

Given a graph G , a function $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, k\}$ is said to be an $L(3, 2, 1)$ -labelling of G if, for each $u, v \in V(G)$: when $d(u, v) = 1$, then $|f(u) - f(v)| \geq 3$; when $d(u, v) = 2$, then $|f(u) - f(v)| \geq 2$; and when $d(u, v) = 3$, then $|f(u) - f(v)| \geq 1$. The *span* of an $L(3, 2, 1)$ -labelling f is the largest label assigned by f to a node of G . An $L(3, 2, 1)$ -labelling is said to be *optimal* when it has the minimum possible span, and the span of such a labeling is called the $L(3, 2, 1)$ chromatic number, and denoted by $\lambda_{3,2,1}(G)$. The class of cubic graphs is of interest in Graph Theory and Algorithms because many decision problems in arbitrary graphs are NP-complete and remain NP-Complete even when constrained to cubic graphs. A graph is said to be subcubic when its maximum degree is equal to 3. Another class of graphs relevant to Graph Theory is the class of snark graphs. A snark graph is a bridgeless cubic graph that does not have a proper edge coloring with 3 colors. In this work, we show a tighter upper bound for the $L(3, 2, 1)$ chromatic number of a subclass of subcubic graphs, such that there are no adjacent nodes with maximum degree such that any two nodes with degree equal to 3 are at distance at least 4 from each other, improving upon previous results in the literature. We also show tighter upper bounds for the $L(3, 2, 1)$ chromatic number for the following infinite families of snarks: generalized Blanuša snarks, Loupekine snarks, and Flower snarks.

Keywords: graph theory; computer science; discrete mathematics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Definições básicas de teoria dos grafos	14
2.2	Rotulação-L(3,2,1)	18
3	GRAFOS SUBCÚBICOS	24
4	SNARKS DE BLANUŠA GENERALIZADOS	34
5	SNARKS DE LOUPEKINE	44
6	SNARKS-FLOR	56
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	66
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

Rotulação de Grafos (do inglês, *Graph Labeling*) é uma área da Teoria dos Grafos dedicada a estudar problemas cujo objetivo principal é determinar a viabilidade de atribuir rótulos a *elementos* (vértices ou arestas) de um grafo satisfazendo restrições pré-estabelecidas. A origem da área de Rotulação de Grafos remonta ao problema de coloração de mapas com no máximo 4 cores (*Four Color Problem*) (Robertson *et al.* 1997), que pode ser modelado como o problema de atribuição de no máximo quatro cores aos vértices de um grafo planar de modo que vértices adjacentes possuam cores distintas. O problema de coloração de vértices deu origem a problemas correlatos como, por exemplo, a coloração de arestas (Vizing 1964) e a coloração total (Behzad 1965). Porém, a partir da década de 1960, começaram a ser propostos na literatura novos problemas de atribuição de rótulos aos elementos de um grafo nos quais os rótulos a serem atribuídos não podem ser cores. Para essa nova classe de problemas de rotulação, os rótulos a serem usados devem obrigatoriamente pertencer a um subconjunto dos números reais, como por exemplo o conjunto dos números naturais, já que as restrições a serem satisfeitas pelas rotulações dependem diretamente de propriedades numéricas, como por exemplo soma, subtração e valor absoluto. Um exemplo de problema de rotulação ainda bastante estudado atualmente, e que foi introduzido por volta de 1967, é o Problema da Rotulação Graciosa (Rosa 1967). Rotulação de Grafos é uma área recente e em constante atividade, de modo que existe uma resenha dinâmica mantida e atualizada anualmente por Gallian (Gallian 2022).

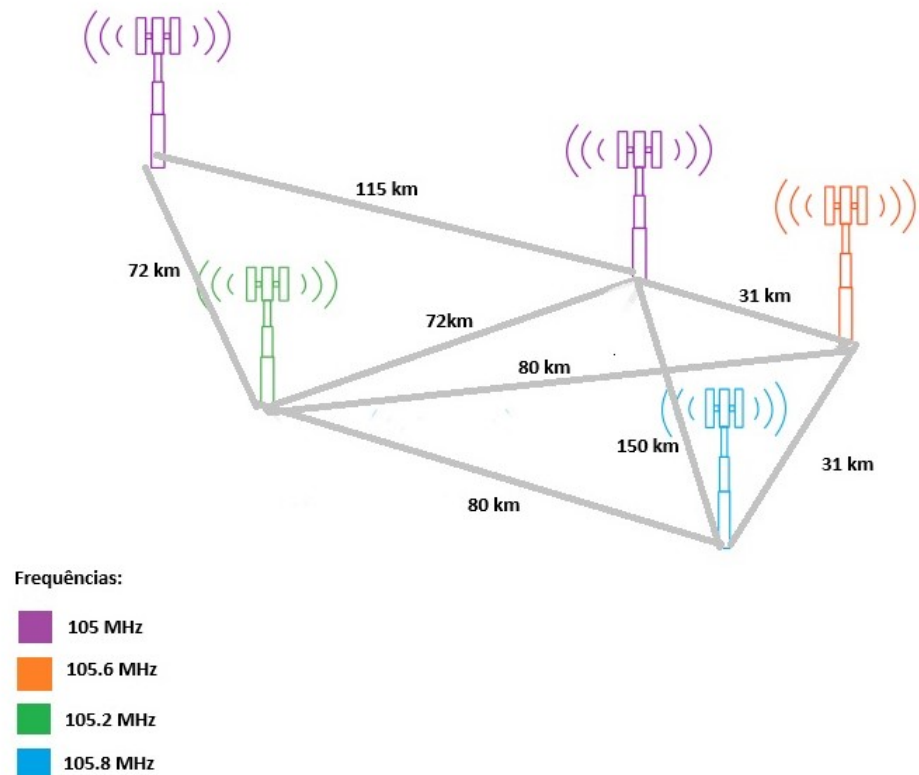
Além do problema de coloração de mapas e da rotulação graciosa, existem também problemas práticos que podem ser modelados com rotulação de grafos. Um exemplo é o Problema de Atribuição de Canais de Frequência (do inglês, *Channel Assignment Problem*). Neste problema, existe uma rede de estações transmissoras e receptoras, que se localizam em uma mesma região geográfica. As estações são equipadas com antenas de mesma potência, abrangendo uma área circular e de mesmo alcance. Cada estação transmite e recebe ondas de rádio em uma frequência específica, dentro de uma faixa, estipulada pelo tipo de aplicação. Neste problema, há dois objetivos: as informações devem ser transmitidas sem interferência e a faixa de frequência deve ser utilizada de forma eficiente, onde as faixas de frequências podem ser representadas por números naturais (Heuvel *et al.* 1998).

Estações de rádio FM são caracterizadas pela sua frequência de transmissão, potência irradiada e altura da antena. Essas estações são divididas em classes (E1, E2, etc) e os órgãos reguladores das telecomunicações exigem que as estações de rádio próximas recebam canais de

frequência distintos de modo que, quanto mais próximo duas estações forem uma da outra, tanto maior deverá ser a diferença entre os canais atribuídos a cada uma. Uma vez que os sinais de rádio se atenuam com a distância, uma mesma frequência pode ser usada simultaneamente por dois transmissores sem causar interferência se eles estiverem a uma distância suficiente chamada *distância de reutilização*.

Nos Estados Unidos da América (EUA), o *Federal Communications Commission* (FCC) é o órgão governamental responsável pela regulação das estações de rádio. Como descrito no livro de Chartrand e Zhang (Chartrand e Zhang 2008), o FCC exige que estações de rádio FM que estejam próximas entre si devam receber canais de frequência distintos e que, quanto mais perto duas estações estejam uma da outra, maior deve ser a diferença entre os canais de frequência atribuídos a elas (veja por exemplo (FEDERAL COMMUNICATIONS COMMISSION 2023)). Por exemplo, dois canais de frequência são considerados *primeiro-adjacentes* quando eles diferem de 200kHz. Por exemplo, 105.7MHz e 105.9MHz são considerados primeiro-adjacentes e eles podem ser atribuídos a estações que estejam a pelo menos 72 km de distância entre si. Dois canais de frequência são considerados *segundo ou terceiro-adjacentes* se eles diferem de 400 kHz a 600 kHz e eles devem ser atribuídos a estações de rádio que estejam a uma distância de pelo menos 31 quilômetros entre si. Por fim, se duas estações de rádio estiverem a pelo menos 115 km de distância entre si, então elas podem receber o mesmo canal de frequência, pois não haverá risco de interferência (Chartrand e Zhang 2008). A Figura 1 ilustra um esquema de torres de transmissão, com suas respectivas distâncias relativas e com uma atribuição de frequências de acordo com as regras estabelecidas pelo FCC.

Figura 1 – Esquema de estações de rádio distribuídas sob um terreno.

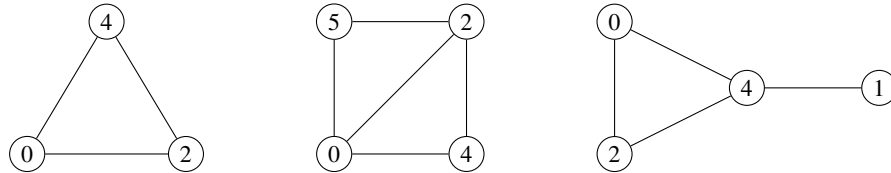


Fonte: Elaborado pelo autor.

Em 1980, Hale modelou o Problema de Atribuição de Canais de Frequência como um problema de coloração de vértices de um grafo (Hale 1980). Por exemplo, na Figura 1 cada vértice é ilustrado com uma cor. O trabalho de Hale foi importante pois deu origem a uma nova abordagem ao problema de atribuição de frequências e inspirou o estudo do problema por meio de técnicas da teoria dos grafos. A abordagem proposta por Hale motivou a introdução de novos problemas de rotulação em grafos que modelam versões restritas do Problema de Atribuição de Canais de Frequência. Um exemplo de tal rotulação é a Rotulação-L(2,1), investigada inicialmente por Griggs e Yeh e proposta por meio de comunicação privada por S. Roberts (Griggs e Yeh 1992). A motivação do trabalho de Griggs e Yeh foi a investigação de uma maneira mais realista de atribuição de frequências às estações de rádios pois o modelo vigente que usava cores era muito simplificado e gerava interferências em transmissores um pouco próximos uns dos outros. Formalmente, a Rotulação-L(2,1) é definida da seguinte forma: dado um grafo G , uma rotulação-L(2,1) de G é uma função $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$, com $k \geq 0$, tal que, para quaisquer dois vértices $x, y \in V(G)$, se a distância entre x e y for igual a 1, então

$|f(x) - f(y)| \geq 2$ e se a distância entre x e y for igual a 2, então $|f(x) - f(y)| \geq 1$. A Figura 2 ilustra grafos com a rotulação- $L(2,1)$ aplicada.

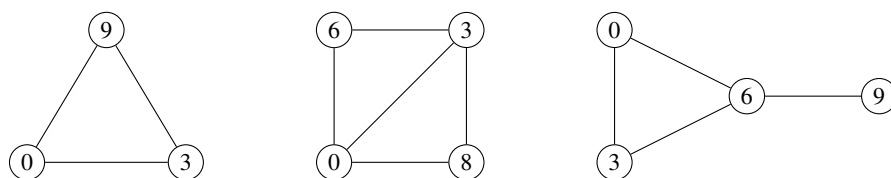
Figura 2 – Grafos com rotulação- $L(2,1)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Deste que foi introduzida, a Rotulação- $L(2,1)$ foi investigada por diversos pesquisadores e generalizações desta rotulação foram propostas desde então como, por exemplo, a Rotulação- $L(h,k)$. Uma resenha contendo resultados sobre a Rotulação- $L(2,1)$ e a Rotulação- $L(h,k)$ foi escrita por Calamoneri (Calamoneri 2011). Em 2004, Liu e Shao introduziram uma variante da rotulação- $L(2,1)$, chamada Rotulação- $L(3,2,1)$ (Liu e Shao 2004). A principal diferença desta nova rotulação para a Rotulação- $L(2,1)$ é que vértices que estão à distância 3 entre si também são levados em consideração no momento da rotulação e as diferenças absolutas entre rótulos à distância 1 e 2 também são aumentadas. A seguir, definimos formalmente a Rotulação- $L(3,2,1)$. Dado um grafo G , uma Rotulação- $L(3,2,1)$ de G é uma função $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$, tal que, para quaisquer dois vértices $x, v \in V(G)$, se a distância entre x e v for igual a 1, então $|f(x) - f(v)| \geq 3$, se a distância entre x e v for igual a 2, então $|f(x) - f(v)| \geq 2$ e se a distância entre x e v for igual a 3, então $|f(x) - f(v)| \geq 1$. O *span* de uma rotulação- $L(3,2,1)$ f é o maior inteiro k atribuído por f a um vértice de G . A Figura 3 ilustra grafos com uma rotulação- $L(3,2,1)$ aplicada.

Figura 3 – Grafos com rotulação- $L(3,2,1)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em 2011, Chia et al. provaram que todo grafo simples G possui uma rotulação- $L(3,2,1)$ com $span$ no máximo $\Delta(G)^3 + 2\Delta(G)$ e esse é o melhor limitante superior existente até o presente (Chia et al. 2011). Esse resultado implica que todo grafo simples G com grau máximo 3 possui uma rotulação- $L(3,2,1)$ com $span$ no máximo 33. Por volta de 2021, Florencio e Luiz estudaram diversas classes de grafos com grau máximo 3 e verificaram que todas as classes investigadas possuem uma rotulação- $L(3,2,1)$ com $span$ menor que 33. Por exemplo, (Florencio e Luiz 2021) provaram que os grafos subcúbicos sem vértices adjacentes de grau máximo possuem uma rotulação- $L(3,2,1)$ com $span$ no máximo 25 e, nesse mesmo trabalho, provaram que, se a distância entre dois vértices de grau máximo nesse grafo for maior ou igual a 4, o $span$ é no máximo 16. O trabalho de Florencio e Luiz nos motivou a continuar o estudo da rotulação- $L(3,2,1)$ em classes de grafos com grau máximo 3. Neste trabalho, encontramos uma rotulação- $L(3,2,1)$ com $span$ menor para os grafos subcúbicos com vértices de grau máximo a uma distância de pelo menos 4, além de apresentar novos resultados para a rotulação- $L(3,2,1)$ de três classes de grafos *snarks*, que são classes de grafos cúbicos, a saber: os *snarks* de Blanuša generalizados, os *snarks* de Loupekine e os *snarks-flor*.

Os demais capítulos deste trabalho de conclusão de curso estão organizados como descrito a seguir. No Capítulo 2, apresentamos conceitos e definições necessários para o entendimento dos capítulos posteriores. No Capítulo 3, apresentamos os resultados desse trabalho para os grafos subcúbicos. No Capítulo 4, apresentamos os resultados para os *snarks* de Blanuša generalizados. No Capítulo 5, apresentamos os resultados para os *snarks* de Loupekine. No Capítulo 6, apresentamos os resultados para os *snarks-flor*. E, por fim, no Capítulo 7, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

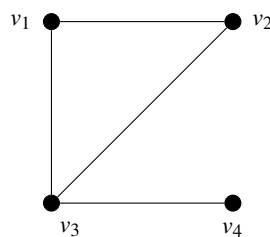
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, definimos conceitos básicos da Teoria dos Grafos que são utilizados neste trabalho, assim como também apresentamos resultados básicos em Rotulação-L(3,2,1) e rotulações relacionadas, que são usados nas demonstrações contidas nos capítulos seguintes. A Seção 2.1 contém os conceitos e definições básicos sobre grafos que são necessários para o entendimento desse trabalho. A Seção 2.2 contém resultados relacionados à Rotulação-L(3,2,1). Conceitos de grafos não contidos nesse capítulo podem ser encontrados no livro de Chartrand e Zhang(Chartrand e Zhang 2008).

2.1 Definições básicas de teoria dos grafos

Um *grafo simples* $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática abstrata formada por um conjunto $V(G)$ finito e não vazio de elementos denominados *vértices* e por um conjunto $E(G)$ que é formado por subconjuntos de dois elementos de $V(G)$ chamados de *arestas*. Cada aresta $\{u, v\} \in E(G)$ é denotada por uv ou vu . Todos os grafos utilizados neste trabalho são grafos simples e finitos. Desse modo, escrevemos grafo com o sentido de grafo simples e finito. Chamamos de *ordem* de G a cardinalidade do conjunto $V(G)$ e de *tamanho* de G a cardinalidade do conjunto $E(G)$. A Figura 4 mostra um exemplo de um grafo $G = (V(G), E(G))$, tal que, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_4\}$, $|E(G)| = 4$ e $|V(G)| = 4$.

Figura 4 – Grafo simples G .

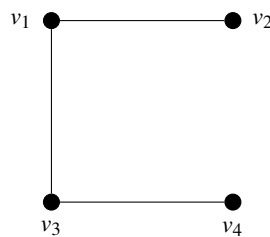


Fonte: Elaborado pelo autor.

Um grafo H é chamado subgrafo de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se H é subgrafo de G , então $H \subseteq G$. Se $uv \in E(G)$, então, u e v são *adjacentes*. Dois vértices adjacentes são *vizinhos* entre si. O vértice u e a aresta $uv \in E(G)$ são chamados *incidentes* um ao outro. O conjunto de vizinhos de um vértice v é denotado por $N_G(v)$. Se duas arestas compartilham o mesmo vértice dizemos que são *arestas adjacentes*.

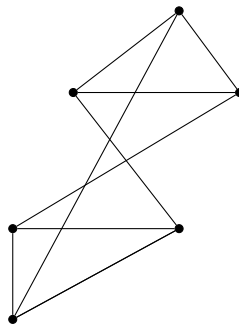
O *grau* de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v e é denotado por $d_G(v)$. O *grau máximo* de G é o grau de um vértice com maior grau no grafo, denotado por $\Delta(G)$, e o *grau mínimo* de G é o grau de um vértice com o menor grau no grafo, denotado por $\delta(G)$. Dizemos que um grafo G é k -*regular* quando todos os seus vértices possuem grau igual a k . Um grafo 3-regular é também chamado de *cúbico*. A Figura 5 ilustra um grafo G com o valor de $\Delta(G) = 2$ e $\delta(G) = 1$. Já a Figura 6 ilustra um grafo cúbico.

Figura 5 – Grafo G com $\Delta(G) = 2$ e $\delta(G) = 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 – Grafo cúbico.



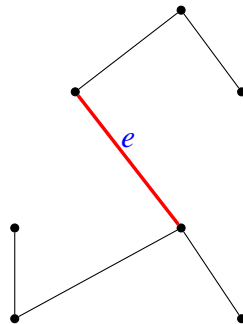
Fonte: Elaborado pelo autor.

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência de vértices de G , $W = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$, de tal forma que v_i e v_{i+1} são vizinhos, com $0 \leq i \leq k-1$. Dizemos que os vértices v_0 e v_k são os *extremos* do passeio W . Um *caminho* em G é um passeio em G que não repete vértices. Um *ciclo* em G é um passeio em G , $C = v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$, com $k \geq 2$, de tal forma que v_i e v_{i-1} são vizinhos, com $1 \leq i \leq k$, v_k é vizinho de v_0 e v_0, \dots, v_k são todos distintos. Um *grafo caminho* com n vértices é um grafo cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência linear, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, de tal forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos na sequência. Um grafo caminho com n vértices é denotado por P_n . Um grafo com $n \geq 3$ vértices é um *ciclo*, denotado por C_n , se seus vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica (v_1, v_2, \dots, v_n)

de modo que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos na sequência cíclica. Um grafo *completo* com n vértices, denotado por K_n , é um grafo em que quaisquer dois de seus vértices são adjacentes. A *distância* $d(u, v)$ de um vértice u para um vértice v é o número de arestas de um menor caminho entre u e v em um grafo G . Denotamos por $N_p(v)$ o conjunto dos vértices que estão à distância p de v em G . Ou seja, $N_p(v) = \{u \in V(G) : d(v, u) = p\}$. A *vizinhança estendida* de um vértice $v \in V(G)$ é o conjunto dos vértices que estão à distância no máximo 3 de v , ou seja, é o conjunto $N_1(v) \cup N_2(v) \cup N_3(v)$.

Dizemos que um grafo G é *conexo* se, para quaisquer dois vértices u e v de G existe um caminho em G com extremos u e v ; caso contrário, G é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Um aresta $e \in E(G)$ é dita *aresta de corte* se, ao removê-la do grafo, o número de componentes conexas de G aumenta. A Figura 7 mostra um grafo com uma aresta de corte destacada.

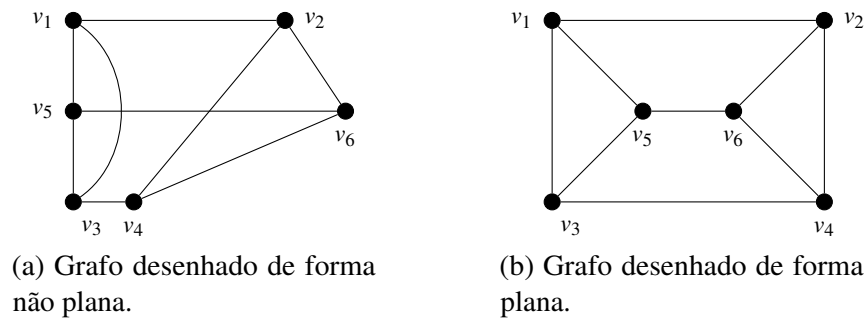
Figura 7 – Grafo com aresta de corte e .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um *grafo plano* é um grafo que está desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. Um *grafo planar* ou é um grafo plano, ou é um grafo que pode ser desenhado no plano como um grafo plano. As *faces* de um grafo plano são as regiões delimitadas por três ou mais arestas. A Figura 8(b) mostra um exemplo de grafo planar.

Figura 8 – Um grafo planar desenhado de duas formas distintas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja G um grafo e S um conjunto de cores com $|S| = k$, $k \geq 1$. Uma *coloração própria dos vértices* de G é o mapeamento $c : V(G) \rightarrow S$, tal que dois vértices adjacentes recebam cores diferentes. O menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo G de forma própria é denotado por $\chi(G)$ e é denominado *número cromático* de G .

Dado um grafo arbitrário G e um inteiro positivo k , com $k \geq 3$, determinar se G possui uma coloração própria de vértices com no máximo k cores é um problema NP-Completo (Karp 1972). Existem na literatura limitantes superiores e inferiores para o número cromático $\chi(G)$. Logo a seguir, apresentamos dois limitantes superiores clássicos e que são utilizados em nossas demonstrações, um deles é um resultado básico obtido por meio de um algoritmo guloso para o problema e o segundo foi obtido por R. L. Brooks por volta de 1941 (Brooks 1941).

Teorema 1. (Chartrand e Zhang 2008) *Se G é um grafo, então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Teorema 2. (Brooks 1941) *Se G é um grafo conexo e G não é igual a um ciclo ímpar ou a um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

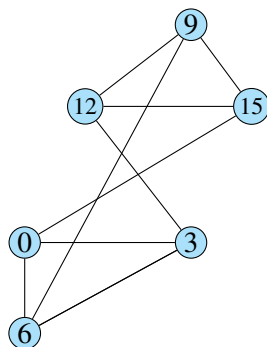
Uma *coloração própria de arestas* de G é uma atribuição de cores às arestas de G de modo que arestas adjacentes tenham cores distintas. Dizemos que um grafo admite uma k -coloração de arestas, se é possível colorir o grafo, com uma coloração própria de arestas, com k cores. O *índice cromático* de um grafo G é o menor k , tal que G admite uma k -coloração de arestas, e é denotado por $\chi'(G)$. Um resultado clássico em teoria dos grafos é o Teorema 3 (Vizing 1964), que estabelece um limitante superior para o índice cromático de um grafo.

Teorema 3. (Vizing 1964) *Se G é um grafo simples, então $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

2.2 Rotulação-L(3,2,1)

Uma *rotulação-L(3,2,1)* de um grafo simples G é uma função $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ que atribui a cada vértice de G um inteiro não-negativo de forma que, para $u, v \in V(G)$: se $d(u, v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$; se $d(u, v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$; e se $d(u, v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$. De modo alternativo, uma rotulação-L(3,2,1) de G é uma função $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ tal que $|f(u) - f(v)| \geq 4 - d(u, v)$, para $u, v \in V(G)$. Dizemos que os rótulos $f(u)$ e $f(v)$ de dois vértices $u, v \in V(G)$ *conflitam* ou *são conflitantes* se u pertence à vizinhança estendida de v e $|f(u) - f(v)| < 4 - d(u, v)$. A Figura 9 ilustra um grafo com uma rotulação-L(3,2,1).

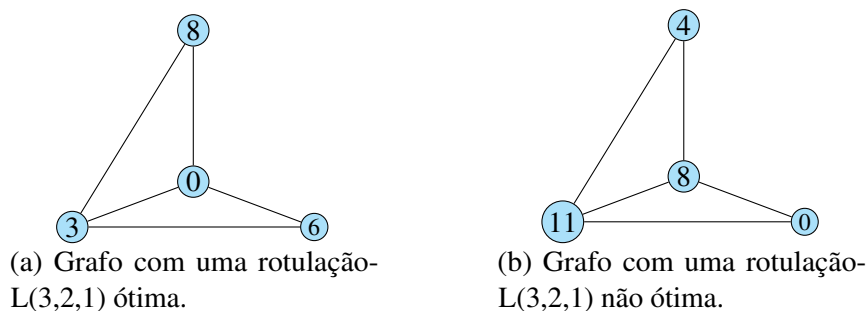
Figura 9 – Grafo G com uma rotulação-L(3,2,1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O *span* de uma rotulação-L(3,2,1) f é o maior rótulo k que é atribuído pela rotulação f a um vértice de G . Uma rotulação-L(3,2,1) é dita *ótima* quando possui o menor *span* possível e o *span* de tal rotulação é chamado *número cromático L(3,2,1)*, e é denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$. A Figura 10(a) mostra um grafo G com uma rotulação-L(3,2,1) ótima e a Figura 10(b) um grafo G com rotulação não ótima.

Figura 10 – Exemplo de grafos rotulados com uma rotulação-L(3,2,1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, apresentamos três lemas básicos sobre a Rotulação-L(3,2,1) juntamente com suas demonstrações, cuja leitura pode ser ignorada pelo leitor sem prejuízo do entendimento dos resultados futuros. Em seguida, apresentamos um teorema contendo um limitante superior para o número cromático L(3,2,1) de grafos arbitrários.

Lema 4. (Chia et al. 2011) Se H é subgrafo de um grafo G , então $\lambda_{3,2,1}(H) \leq \lambda_{3,2,1}(G)$.

Demonstração. Seja H subgrafo de G . Seja $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ uma rotulação-L(3,2,1) do grafo G e seja f_1 a rotulação f restrita ao subgrafo H . Dados dois vértices $u, v \in V(H)$, pela construção de H , temos que $|f_1(u) - f_1(v)| = |f(u) - f(v)|$. Logo, a diferença absoluta dos valores dos rótulos de qualquer par de vértices de H é a mesma que esse par tinha em G sob a rotulação f . Portanto, f_1 é uma rotulação-L(3,2,1) para o grafo H com *span* menor ou igual ao da rotulação f . Logo, temos que $\lambda_{3,2,1}(H) \leq \lambda_{3,2,1}(G)$. \square

Lema 5. (Chia et al. 2011) Seja G um grafo com uma rotulação-L(3,2,1) ótima $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$. Então f obrigatoriamente atribui o rótulo 0 a algum vértice de G .

Demonstração. Seja G um grafo e f uma rotulação-L(3,2,1) ótima de G . Suponha, por absurdo, que o menor rótulo atribuído por f seja $c \geq 1$. Defina k como o maior rótulo atribuído por f , com $k \geq c$. A seguir, definimos uma nova rotulação g da seguinte forma: para todo vértice $v \in V(G)$, defina $g(v) = f(v) - c$. Pela definição de g quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$ possuem, $|g(u) - g(v)| = |f(u) - c - (f(v) - c)| = |f(u) - c - f(v) + c| = |f(u) - f(v)|$. Como f é uma rotulação-L(3,2,1), concluímos que g também é. Além disso, note que o menor rótulo atribuído por g é $c - c = 0$ e o maior rótulo atribuído por g é $k - c$. Logo, g é uma rotulação-L(3,2,1) com menor rótulo igual a 0 e *span* igual a $k - c$. Isso contradiz o fato de f ser ótima. Portanto, f obrigatoriamente atribui o rótulo 0 a algum vértice de G . \square

Lema 6. (Chia et al. 2011) Se G é um grafo com grau máximo $\Delta > 0$, então $\lambda_{3,2,1}(G) \geq 2\Delta + 1$.

Demonstração. Seja G um grafo com grau máximo $\Delta > 0$. Seja $v \in V(G)$ um vértice com grau $d(v) = \Delta$. Suponha, por absurdo, que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 2\Delta$. Seja, então, $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2\Delta\}$ uma rotulação-L(3,2,1) de G com $\text{span } 2\Delta$.

Note que, em qualquer rotulação-L(3,2,1) de G , não podem ser atribuídos dois inteiros consecutivos aos vizinhos do vértice v uma vez que quaisquer dois inteiros atribuídos a vizinhos de v devem ter diferença absoluta de pelo menos 2. Logo, os rótulos atribuídos aos vizinhos de v devem pertencer a um e somente um dos três conjuntos a seguir: $\{0, 2, 4, \dots, 2\Delta - 2\}$, $\{2, 4, 6, \dots, 2\Delta\}$ ou $\{1, 3, 5, \dots, 2\Delta - 1\}$.

Porém, não resta nenhum rótulo no conjunto $\{0, 1, \dots, 2\Delta\}$ que possa ser atribuído ao vértice v sem gerar conflito com algum rótulo atribuído a um de seus vizinhos, gerando uma contradição.

Portanto, $\lambda_{3,2,1}(G) \geq 2\Delta + 1$. □

Teorema 7. (Clipperton et al. 2005) Se G um grafo com grau máximo Δ . Então, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$.

Demonstração. Seja G um grafo com grau máximo Δ e seja v_1, \dots, v_n uma sequência arbitrária dos vértices de G . A seguir, definimos uma rotulação-L(3,2,1) $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$, com $k = \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$, para o grafo G , construída com base em uma estratégia gulosa. A estratégia consiste em percorrer os vértices em sequência, atribuindo a cada um deles o menor rótulo disponível no conjunto $\{0, 1, \dots, k\}$ e que não conflite com rótulos já atribuídos a vértices na sua vizinhança estendida. Inicialmente f atribui o rótulo 0 ao vértice v_1 . Ao chegar o momento de atribuir um rótulo a um vértice v_i , com $2 \leq i \leq n$, devemos considerar os vértices $v_j \in N_1(v_i)$ que já foram rotulados. Neste caso, temos que 5 rótulos não podem ser atribuídos a v_i , são eles: $\{f(v_j), f(v_j) \pm 1, f(v_j) \pm 2\}$. No pior caso temos que $|N_1(v_i)| = \Delta$, assim ficamos com 5Δ rótulos que não podem ser atribuídos a v_i . Agora, considere os vértices à distância 2 de v_i . Seja $v_k \in N_2(v_i)$. Note que, no pior caso, $|N_2(v_i)| = \Delta(\Delta - 1)$. Neste, caso sabemos que os rótulos que não podem ser atribuídos a v_i são: $\{f(v_k), f(v_k) \pm 1\}$, assim temos $3(\Delta^2 - \Delta)$ rótulos que não podem ser atribuídos a v_i . Por fim, considere os vértices à distância 3 de v_i . Seja $v_l \in N_3(v_i)$. Note que, no pior caso, $|N_3(v_i)| = \Delta^3 - 2\Delta^2 + \Delta$. Como o rótulo de v_i deve ser distinto dos rótulos que estão à distância 3 dele, então obtemos que existem no máximo mais $|N_3(v_i)|$ rótulos que não podem ser atribuídos ao vértice v_i . Portanto, obtemos que o número máximo de rótulos que

não podem ser atribuídas ao vértice v_i é $5\Delta + 3\Delta^2 - 3\Delta + \Delta^3 - 2\Delta^2 + \Delta = \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$. Como a quantidade de rótulos disponíveis no conjunto $\{0, 1, \dots, k\}$ é maior que esse valor, concluímos que sobra pelo menos um rótulo para ser atribuído ao vértice v_i . Portanto, concluímos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$. \square

A Rotulação-L(3,2,1) foi introduzida por Liu e Shao (Liu e Shao 2004), que a investigaram para grafos planares e provaram que todo grafo planar G possui $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 15(\Delta^2(G) - \Delta + 1)$. Posteriormente, outros autores (Chia *et al.* 2011; Clipperton *et al.* 2005) determinaram o número cromático $L(3,2,1)$ de famílias clássicas de grafos, tais como caminhos, ciclos, grafos completos, grafos bipartidos completos, potências de caminho e produto cartesiano de dois caminhos. Em particular, Chia *et al.* (Chia *et al.* 2011) também obtiveram o seguinte limitante superior para o parâmetro $\lambda_{3,2,1}(G)$ de grafos G , que ainda permanece como o melhor limitante superior conhecido para $\lambda_{3,2,1}(G)$.

Teorema 8. (Chia *et al.* 2011). *Se G é um grafo, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta(G)^3 + 2\Delta(G)$.*

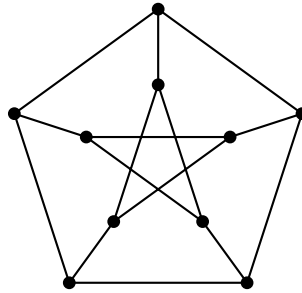
A seguir, apresentamos as classes de grafos estudadas neste trabalho. Além disso, discutimos os resultados conhecidos em relação à Rotulação-L(3,2,1) para cada uma delas.

A classe dos grafos com grau no máximo três é uma classe bastante investigada em Teoria dos Grafos, dado que as versões de decisão de muitos problemas de otimização são NP-completas mesmo quando restritas a esta classe, em particular para os grafos cúbicos. Exemplos de problemas NP-completos em grafos cúbicos são: determinar o tamanho de um conjunto independente mínimo para grafos cúbicos planares (Garey e Johnson 1979), decidir se um grafo cúbico contém um ciclo Hamiltoniano (Picouleau 1994), também é NP-Completo decidir se 4 cores são suficientes para uma $L(1,1)$ -Rotulação para um grafo cúbico (Heggernes e Telle 1998).

Uma classe de grafos cúbicos importante na Teoria dos Grafos e que é considerada neste trabalho de conclusão de curso é a classe dos grafos *snarks*, definida a seguir. Um *grafo snark* é um grafo cúbico sem arestas de corte e que não possui uma coloração própria de arestas com 3 cores. Essa classe de grafos surgiu a partir de um dos problemas que ajudaram no desenvolvimento da teoria dos grafos: o Problema das Quatro Cores (Appel e Haken 1978). Pelo Teorema 3, obtemos que todo grafo cúbico possui uma coloração própria de arestas com 3 ou 4 cores. Porém, até 1898, não se sabia se existia um grafo conexo, sem arestas de corte e que não admite uma coloração própria de arestas com 3 cores (*snark*). Foi somente em 1898, que J.

Petersen construiu o primeiro *snark* (Petersen 1898). Esse *snark* foi batizado com o nome dele e está ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Grafo de Petersen.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O *snark* de Petersen ficou por muito tempo sendo o único *snark* conhecido. No final do século XIX, como era difícil achar um grafo dessa classe, sempre que um novo exemplar era proposto e provado na literatura, usava-se o termo “descoberta” para se referir ao fato de que alguém conseguiu achar um novo *snark*. Por tradição, esse termo é utilizado até hoje entre os estudiosos da classe dos *snarks*. Em 1946, o primeiro *snark* de Blanuša foi descoberto, esse *snark* possui 18 vértices e 27 arestas. A partir de 1975 as primeiras famílias infinitas de *snarks* foram descobertas. Em 1975, R. Isaacs (Isaacs 1975) publicou um método de construção de novos *snarks* a partir de *snarks* já existentes. Com o uso desse método, foram descobertas duas classes de *snarks* infinitas: os *snarks-flor* e os *snarks-BDS*.

Em 1976, R. Isaacs (Isaacs 1976) apresentou um novo método de construção de *snarks* desenvolvido por F. Loupekine. Os *snarks* gerados a partir desse método são chamados de *snarks de Loupekine*. Recentemente, novos métodos de geração de *snarks* foram apresentados por Hägglund (Hägglund 2016), que introduziu as classes: *Blowup* e *Semi-Blowup*.

O Teorema 8 determina que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$ para todo grafo simples G com $\Delta(G) = 3$. Porém, Florêncio e Luiz (Florencio e Luiz 2021) investigaram a Rotulação- $L(3,2,1)$ para algumas famílias de grafos com $\Delta(G) = 3$ e encontraram limitantes superiores mais justos para o número cromático $L(3,2,1)$ das famílias estudadas. Dentre as famílias estudadas por esses autores estão os *snarks-flor*, *snarks* de Goldberg, e a famílias dos grafos com grau máximo três e sem vértices adjacentes de grau máximo. A seguir, mostramos os principais resultados obtidos por Florêncio e Luiz.

Teorema 9. (Florencio e Luiz 2021). *Se G é um grafo subcúbico sem vértices de grau 3*

adjacentes, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$.

Teorema 10. (Florencio e Luiz 2021). *Seja G um grafo subcúbico no qual quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos quatro entre si. Então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$.*

Teorema 11. (Florencio e Luiz 2021). *Para todo snark-flor J_i com $i \geq 5$ ímpar, $\lambda_{3,2,1}(J_i) \leq 12$. Além disso, $\lambda_{3,2,1}(J_3) \leq 14$.*

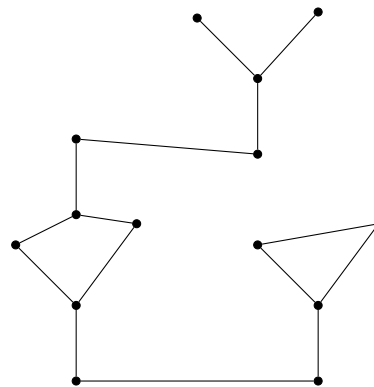
Os resultados obtidos pelos autores Florêncio e Luiz, nos motivaram a avaliar se havia possibilidade de melhoria e a possibilidade de determinar novos resultados para algumas classes de grafos com grau máximo 3 não contempladas pelos estudos prévios. Após um cuidadoso estudo, conseguimos encontrar resultados melhores para algumas classes de grafos estudadas pelos autores. Nos próximos capítulos, apresentamos os resultados deste trabalho.

3 GRAFOS SUBCÚBICOS

Este capítulo trata o problema da Rotulação-L(3,2,1) para uma subclasse dos grafos subcúbicos. Aqui, determinamos um limitante superior para o número cromático L(3,2,1) mais apertado do que o encontrado na literatura.

Um grafo é dito *subcúbico* quando o seu grau máximo é igual a 3. Dentro do conjunto de grafos subcúbicos, existe uma família específica de grafos que é de interesse neste estudo. Essa família consiste em grafos subcúbicos em que vértices de grau máximo não são adjacentes entre si no grafo. A Figura 12 ilustra um grafo subcúbico sem vértices de grau máximo adjacentes.

Figura 12 – Exemplo de um grafo subcúbico.



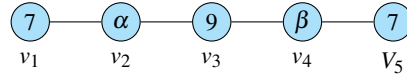
Fonte: Elaborado pelo autor.

No Teorema 14, apresentamos um limitante superior para grafos subcúbicos sem vértices de grau máximo adjacentes mais justo do que o apresentado no Teorema 10. A seguir, apresentamos dois lemas auxiliares sobre rotulação-L(3,2,1) de caminhos que são utilizados na prova do Teorema 14.

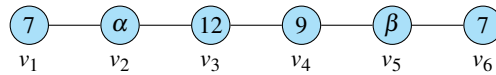
Lema 12. *Sejam $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ tal que $\alpha > \beta$. Todo caminho $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ com $5 \leq n \leq 7$ vértices possui uma rotulação-L(3,2,1) f_n com span menor ou igual a 12, satisfazendo as propriedades: $f_n(v_1) = f_n(v_n) = 7$, $f_n(v_2) = \alpha$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$, $f_n(v_3) \geq 9$ e $f_n(v_{n-2}) \geq 9$.*

Demonstração. A demonstração do resultado segue imediatamente por inspeção das rotulações-L(3,2,1) dos caminhos exibidas na Figura 13. Note que os rótulos α e β pertencem ao conjunto $\{0, 2, 4\}$ e são tais que $\alpha > \beta$. Logo, esses rótulos não conflitam com os rótulos dos demais vértices na sua vizinhança estendida. \square

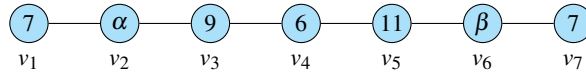
Figura 13 – Esquema das rotulações-L(3,2,1) para os caminhos P_5 , P_6 e P_7 conforme especificado no enunciado do Lema 12.



(a) Rotulação-L(3,2,1) f_5 do caminho P_5 com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.



(b) Rotulação-L(3,2,1) f_6 do caminho P_6 com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.



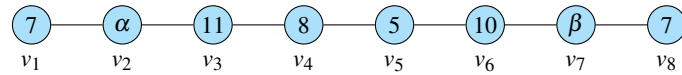
(c) Rotulação-L(3,2,1) f_7 do caminho P_7 com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

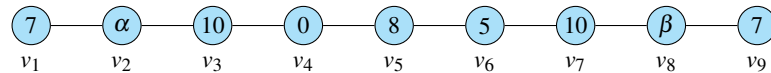
Lema 13. *Sejam $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ com $\alpha > \beta$. Todo caminho $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ com $n \geq 8$ possui uma rotulação-L(3,2,1) f_n com span menor ou igual a 11, com as seguintes propriedades: $f_n(v_1) = 7$, $f_n(v_2) = \alpha$, $f_n(v_3) \geq 10$, $f_n(v_{n-4}) = 8$, $f_n(v_{n-3}) = 5$, $f_n(v_{n-2}) = 10$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$ e $f_n(v_n) = 7$.*

Demonstração. Usamos indução forte em n . Como caso base da indução consideramos caminhos P_n com $n = 8, 9, 10, 11$. As rotulações-L(3,2,1) destes quatro casos estão definidas na Figura 14.

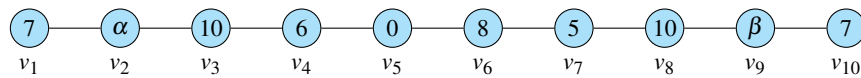
Figura 14 – Esquema das rotulações-L(3,2,1) para os caminhos P_8 , P_9 , P_{10} e P_{11} conforme especificado no enunciado do Lema 13.



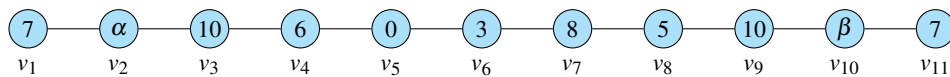
(a) Rotulação-L(3,2,1) f_8 do caminho P_8 com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.



(b) Rotulação-L(3,2,1) f_9 do caminho P_9 com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.



(c) Rotulação-L(3,2,1) f_{10} do caminho P_{10} com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.



(d) Rotulação-L(3,2,1) f_{11} do caminho P_{11} com $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e $\alpha > \beta$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível checar por inspeção que as quatro rotulações definidas na Figura 14 são rotulações-L(3,2,1) dos caminhos P_8 , P_9 , P_{10} e P_{11} . Note que, como $\alpha, \beta \in \{0, 2, 4\}$ e como $\alpha > \beta$, esses rótulos não conflitam com os demais rótulos na vizinhança pelo fato que a diferença dos rótulos dos vértices a distância dois para qualquer valor de α e β é maior ou igual a 2 e para os vértices à distância 3 a diferença é maior ou igual a 1.

No passo da indução, considere um caminho $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ com $n \geq 12$ vértices. Por hipótese de indução, o caminho P_{n-4} , com $n-4$ vértices, possui uma rotulação-L(3,2,1) f_{n-4} , com *span* menor ou igual a 11, satisfazendo as seguintes propriedades: $f_{n-4}(v_1) = 7$, $f_{n-4}(v_2) = \alpha$, $f_{n-4}(v_3) \geq 10$, $f_{n-4}(v_{n-4}) = 7$, $f_{n-4}(v_{n-5}) = \beta$, $f_{n-4}(v_{n-6}) = 10$, $f_{n-4}(v_{n-7}) = 5$ e $f_{n-4}(v_{n-8}) = 8$. A partir da rotulação f_{n-4} , construímos uma rotulação f_n para P_n da seguinte forma: (i) Para todo vértice v_i com $1 \leq i \leq n-6$, defina $f_n(v_i) = f_{n-4}(v_i)$; (ii) $f_n(v_{n-5}) = 0$, $f_n(v_{n-4}) = 8$, $f_n(v_{n-3}) = 5$, $f_n(v_{n-2}) = 10$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$ e $f_n(v_n) = 7$.

Note que, como os primeiros $n-6$ vértices do P_n , v_1, v_2, \dots, v_{n-6} , receberam rótulos de uma rotulação-L(3,2,1) do P_{n-4} , dada por hipótese de indução, então, por definição, eles não

causam conflitos entre si. Para concluir a prova basta mostrar que os rótulos atribuídos por f_n aos seis últimos vértices do caminho P_n não causam conflitos com a sua vizinhança estendida. Dividimos o restante da prova em seis casos, sendo que cada caso analisa o rótulo de um dos últimos seis vértices e verifica que ele não conflita com os demais rótulos na sua vizinhança estendida.

Caso 1: v_{n-5} com $f_n(v_{n-5}) = 0$. Neste caso, $N_1(v_{n-5}) = \{v_{n-6}, v_{n-4}\}$, $N_2(v_{n-5}) = \{v_{n-7}, v_{n-3}\}$ e $N_3(v_{n-5}) = \{v_{n-8}, v_{n-2}\}$, $f_n(v_{n-6}) = 10$, $f_n(v_{n-4}) = 8$, $f_n(v_{n-7}) = 5$, $f_n(v_{n-3}) = 5$, $f_n(v_{n-8}) = 8$ e $f_n(v_{n-2}) = 10$. Portanto, $|f_n(v_{n-5}) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_{n-5})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2: v_{n-4} com $f_n(v_{n-4}) = 8$. Neste caso, $N_1(v_{n-4}) = \{v_{n-5}, v_{n-3}\}$, $N_2(v_{n-4}) = \{v_{n-6}, v_{n-2}\}$ e $N_3(v_{n-4}) = \{v_{n-7}, v_{n-1}\}$, $f_n(v_{n-5}) = 0$, $f_n(v_{n-3}) = 5$, $f_n(v_{n-6}) = 10$, $f_n(v_{n-2}) = 10$, $f_n(v_{n-7}) = 5$ e $f_n(v_{n-1}) = \beta$. Portanto, $|f_n(v_{n-4}) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_{n-4})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3: v_{n-3} com $f_n(v_{n-3}) = 5$. Neste caso, $N_1(v_{n-3}) = \{v_{n-4}, v_{n-2}\}$, $N_2(v_{n-3}) = \{v_{n-5}, v_{n-1}\}$ e $N_3(v_{n-3}) = \{v_{n-6}, v_n\}$, $f_n(v_{n-4}) = 8$, $f_n(v_{n-2}) = 10$, $f_n(v_{n-5}) = 0$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$, $f_n(v_{n-6}) = 10$ e $f_n(v_n) = 7$. Portanto, $|f_n(v_{n-3}) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_{n-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4: v_{n-2} com $f_n(v_{n-2}) = 10$. Neste caso, $N_1(v_{n-2}) = \{v_{n-3}, v_{n-1}\}$, $N_2(v_{n-2}) = \{v_{n-4}, v_n\}$ e $N_3(v_{n-2}) = \{v_{n-5}\}$, $f_n(v_{n-3}) = 5$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$, $f_n(v_{n-4}) = 8$, $f_n(v_n) = 7$ e $f_n(v_{n-5}) = 0$. Portanto, $|f_n(v_{n-2}) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_{n-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 5: v_{n-1} com $f_n(v_{n-1}) = \beta$, para $\beta \in \{0, 2\}$. Neste caso, $N_1(v_{n-1}) = \{v_{n-2}, v_n\}$, $N_2(v_{n-1}) = \{v_{n-3}\}$ e $N_3(v_{n-1}) = \{v_{n-4}\}$, $f_n(v_{n-2}) = 10$, $f_n(v_n) = 7$, $f_n(v_{n-3}) = 5$ e $f_n(v_{n-4}) = 8$. Portanto, $|f_n(v_{n-1}) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_{n-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 6: v_n com $f_n(v_n) = 7$. Neste caso, $N_1(v_n) = \{v_{n-1}\}$, $N_2(v_n) = \{v_{n-2}\}$ e $N_3(v_n) = \{v_{n-3}\}$, $f_n(v_{n-1}) = \beta$, $f_n(v_{n-2}) = 10$ e $f_n(v_{n-3}) = 5$. Portanto, $|f_n(v_n) - f_n(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in N_t(v_n)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Assim, provamos que nenhum dos novos rótulos adicionados causam conflitos. Logo, f_n é uma rotulação-L(3,2,1) do caminho P_n com *span* no máximo 11, e o resultado segue. \square

A partir dos lemas anteriores, estamos aptos para provar o Teorema 14 que é o resultado principal desse capítulo que representa uma melhoria para o Teorema 10.

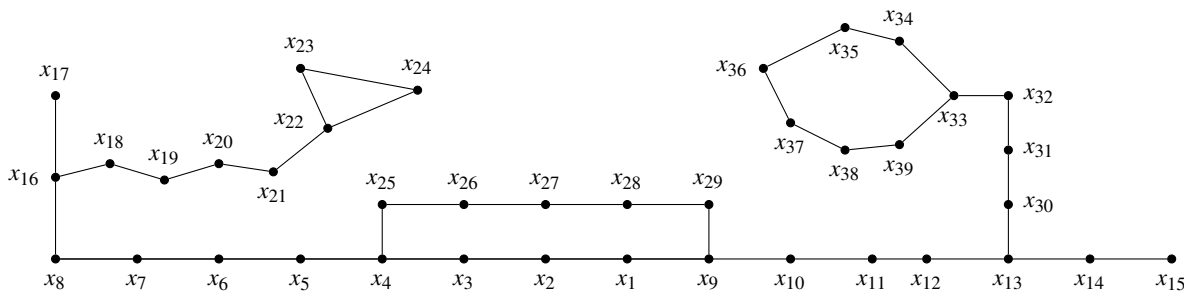
Teorema 14. *Seja G um grafo subcúbico conexo no qual quaisquer dois vértices de grau máximo estejam à distancia pelo menos quatro entre si. Então, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 12$.*

Demonstração. A prova é construtiva. Construimos uma rotulação-L(3,2,1) $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, 12\}$ para G com *span* no máximo 12. Essa construção é dividida em três etapas.

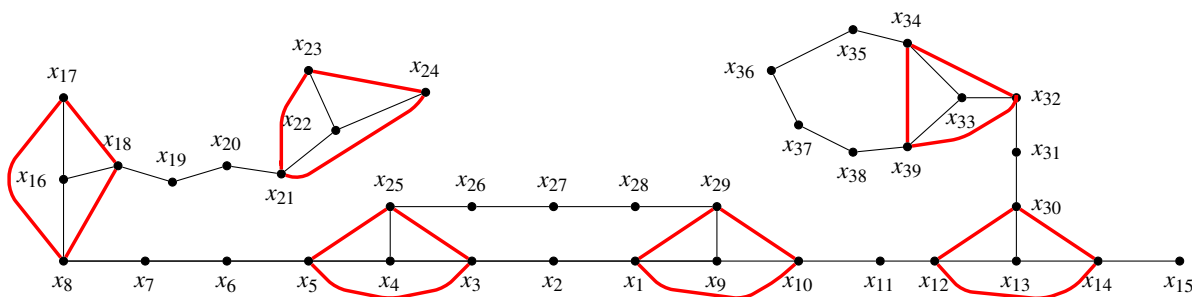
Etapa 1: Inicialmente, rotulamos todos os vértices de grau 3 de G com o rótulo 7. Como quaisquer dois desses vértices estão à distância maior que 3 entre si, então, não há conflito.

Etapa 2: Rotulamos todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3. Para isso, construimos um grafo simples e conexo auxiliar H contendo somente esses vértices. Seja V_3 o conjunto dos vértices de grau 3 em G . Defina $V(H) = \bigcup_{v \in V_3} N_G(v)$. Dois vértices de H são conectados por uma aresta se eles obedecem uma das duas regras a seguir: (I) para todo $v \in V_3$ e $u, w, z \in N_G(v)$, adicione as arestas uw, wz, zu ao conjunto $E(H)$. Note que $u, w, z \in V(H)$ pela definição de $V(H)$. (II) Dados dois vértices u e $w \in V(H)$, se existir em G um caminho $P = u, x_1, x_2, \dots, x_n, w$ tal que $d_G(x_i) = 2$ para $1 \leq i \leq n$, então adicione a aresta uw a $E(H)$. Na Figura 15, há uma ilustração da geração do grafo H a partir do grafo G .

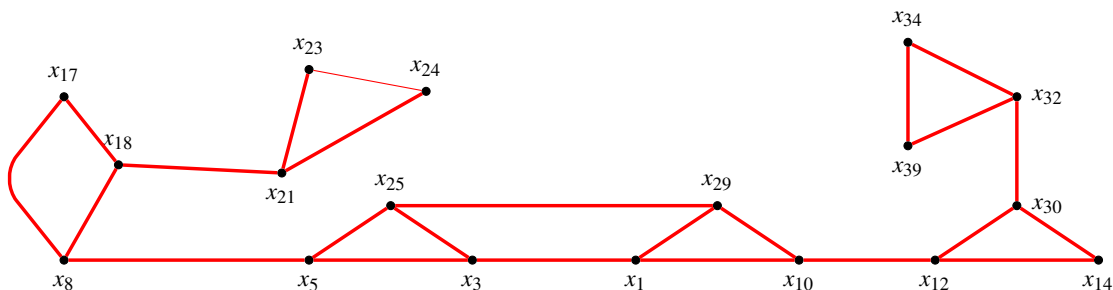
Figura 15 – Esquema da geração do grafo auxiliar H .



(a) Grafo subcúbico G no qual quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos 4.



(b) Construção inicial do grafo H a partir de G . Note que os vértices adjacentes a vértices de grau três são adicionados a $V(H)$ e são conectados por meio das arestas em cor vermelha ilustradas na figura.



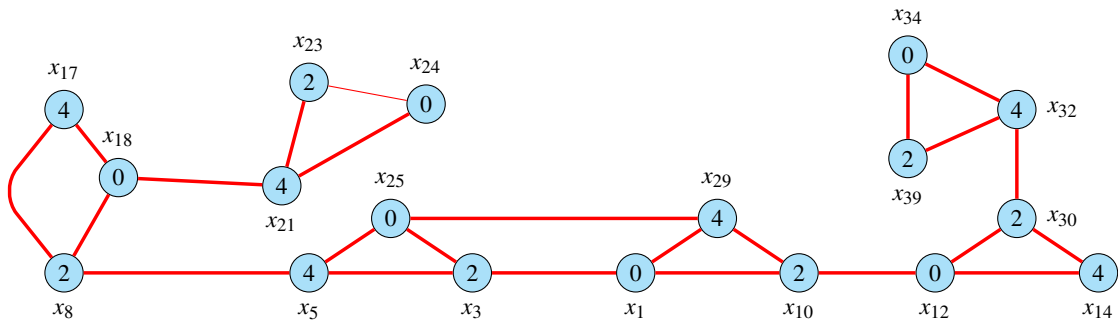
(c) Grafo simples e conexo H , gerado a partir de G .

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, provamos que H possui uma coloração própria de vértices com 3 cores. Primeiro, alegamos que $\Delta(H) \leq 3$. Para ver isso, note que, pela definição de H , todo vértice de H foi conectado a mais dois outros vértices, formando um ciclo com três vértices (um triângulo) em H (cada um desses três vértices no triângulo era vizinho de um vértice de grau três em G). Além disso, como G é um grafo conexo e seus vértices de grau máximo estão à distância pelo menos 4 entre si, cada triângulo de H possui pelo menos um vértice que foi conectado a exatamente um outro vértice de outro triângulo. Isso implica, que todo vértice de H possui grau no máximo 3. Agora, note que H não é igual a um grafo completo K_n com $n \geq 5$ vértices, pois o grau de

H é no máximo 3 e esses grafos completos possuem grau maior que 3. Ademais, note que H não pode ser igual ao grafo completo K_4 : de fato, se G tiver pelo menos dois vértices de grau 3, então H terá pelo menos 6 vértices e o K_4 tem apenas 4 vértices. Por fim, se G tiver apenas um vértice de grau 3, então H será igual ao ciclo ímpar C_3 e não ao K_4 . Portanto, H não é igual ao K_4 . Se H for igual a um ciclo ímpar, então H só pode ser o C_3 , caso em que H foi obtido a partir de um grafo G com apenas um vértice de grau 3. Porém, se H for igual ao C_3 , pelo Teorema 1, ele tem uma coloração própria de vértices com 3 cores. Portanto, suponha que H não é igual ao C_3 . Então, ele também não é igual a um grafo completo, como já foi provado. Neste caso, o Teorema 2 (Teorema de Brooks) se aplica ao grafo H , ou seja, H possui uma coloração própria de vértices com 3 cores. Seja, então, $\phi: V(H) \rightarrow \{0, 2, 4\}$ uma coloração própria dos vértices de H com as cores 0, 2 e 4. A Figura 16 mostra o grafo H da Figura 15(c) munido de tal coloração.

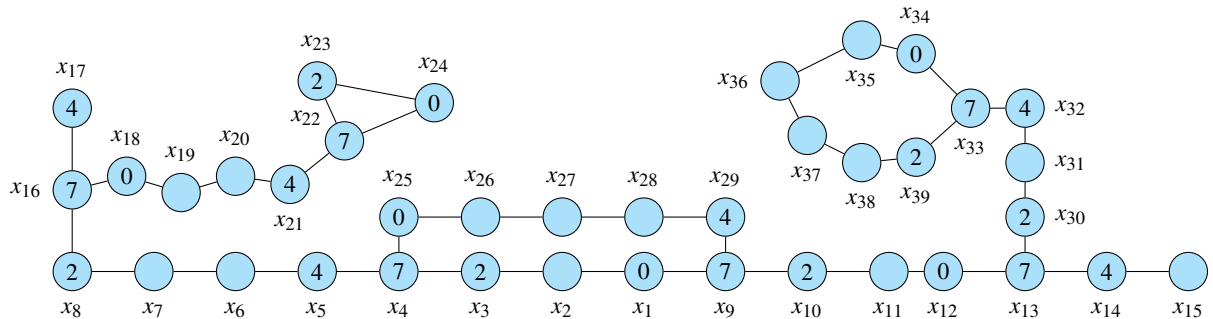
Figura 16 – Grafo auxiliar H com uma 3-coloração própria de vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Depois de dar uma 3-coloração própria de vértices ao grafo H , trazemos essa rotulação dos vértices de H para os vértices correspondentes em G . Para isso, defina $f(v) = \phi(v)$ para todo vértice $v \in V(H)$. Note que, como todo vértice de H é também um vértice de G , então o rótulo desses vértices em G estão todos bem-definidos. A Figura 17 mostra o grafo G da Figura 15(a) com a rotulação de vértices parcial construída acima. Note que, como cada vértice de grau 3 recebeu o rótulo 7 e como todos os seus vizinhos receberam rótulos no conjunto $\{0, 2, 4\}$, então os seus rótulos não conflitam.

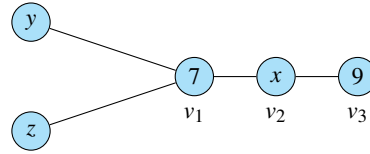
Figura 17 – Grafo G parcialmente rotulado. Note que todos os vértices de grau 3 e seus vizinhos estão rotulados e seus rótulos não conflitam.



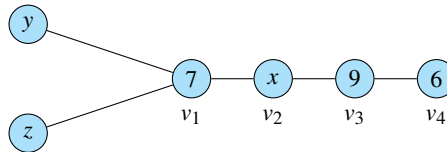
Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 3: Por fim, note que os vértices que faltam ser rotulados induzem caminhos. Como os caminhos entre dois vértices de grau três possuem comprimento maior ou igual a 4, então conseguimos rotular esses caminhos usando os Lemas 12 e 13, da seguinte forma: para cada par de vértices $v_1, v_n \in V(G)$ com $d(v_1) = d(v_n) = 3$ tal que existe um caminho $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ com $d(v_i) = 2$ para todo $2 \leq i \leq n-1$, notamos que os rótulos dos vértices v_1, v_2, v_{n-1}, v_n já foram definidos nas duas etapas anteriores, ou seja $f(v_1) = f(v_n) = 7, f(v_2), f(v_{n-1}) \in \{0, 2, 4\}$ com $f(v_2) \neq f(v_{n-1})$. Sem perda de generalidade, supomos que $f(v_2) > f(v_{n-1})$. Assim, rotulamos os demais vértices de P que ainda não foram rotulados com alguma das rotulações-L(3,2,1) especificadas nos enunciados dos Lemas 12 e 13, de acordo com o comprimento do caminho P . Caminhos que iniciam e terminam no mesmo vértice de grau três e que tenham comprimento maior ou igual a 4 também recebem estas mesmas rotulações. Por fim, caminhos que iniciam em um vértice de grau três e terminam em um vértice de grau 1 e que tenham comprimento maior ou igual a 4 também recebem essas rotulações. Falta apenas rotular os caminhos que iniciam em vértices de grau 3, terminam em um vértice de grau 1 e possuem comprimento 2 ou 3. Para estes caminhos sempre existirá uma cor disponível no conjunto $\{0, 1, \dots, 12\}$ que possa ser atribuída a seus vértices sem que cause conflito com as cores dos vértices nas suas vizinhanças estendidas como demonstrado na Figura 18. A Figura 19 mostra o grafo G da Figura 15(a) completamente rotulado de acordo com a nossa construção.

Figura 18 – Caminhos de comprimentos 2 e 3 rotulados com uma rotulação-L(3,2,1).



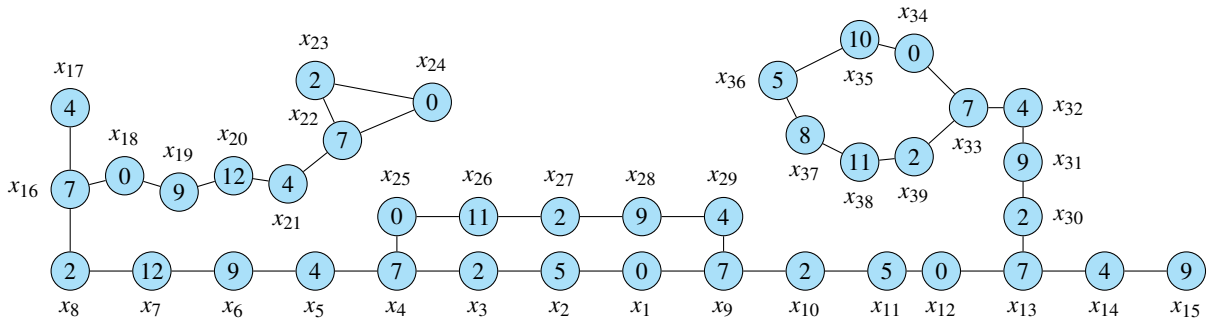
(a) Caminho de comprimento 2 rotulado com uma rotulação-L(3,2,1), onde $x, y, z \in \{0, 2, 4\}$.



(b) Caminho de comprimento 3 rotulado com uma rotulação-L(3,2,1), onde $x, y, z \in \{0, 2, 4\}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Grafo G rotulado com conflito.

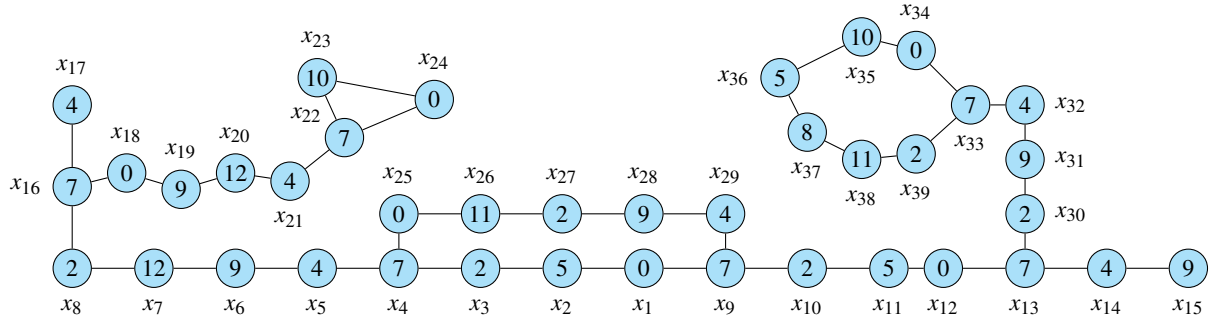


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como exemplificado na Figura 19, conseguimos rotular toda a estrutura. No entanto, ainda resta um pequeno detalhe para concluir a prova. Observe que os vértices x_{23} e x_{24} estão gerando conflitos, isso ocorre no caso em que um vértice de grau 3 tem exatamente dois vizinhos de grau 2 adjacentes. A fim de resolver esse caso, sejam x_{23} e x_{24} os vizinhos conflitantes. Sem perda de generalidade, escolha o vértice x_{23} . Se esse vértice possuir um vizinho w à distância 3, seja $f(w)$ o rótulo de w . Atribua a x_{23} um rótulo no conjunto $\{\{10, 11\} - \{f(w)\}\}$. Note que sobra pelo menos uma cor nesse conjunto que pode ser atribuída a x_{23} e essa cor não causa conflito com nenhum outro rótulo na sua vizinhança estendida, pois o maior rótulo à distância no máximo 2 de x_{23} é o 7 e ele não causa conflito nem com o 10 nem com o 11. Continuando o nosso

exemplo de rotulação a Figura 20 mostra o grafo G da Figura 15(a) com uma rotulação-L(3,2,1).

Figura 20 – Grafo G rotulado sem conflitos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, conseguimos provar que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 12$. Assim, o resultado segue. \square

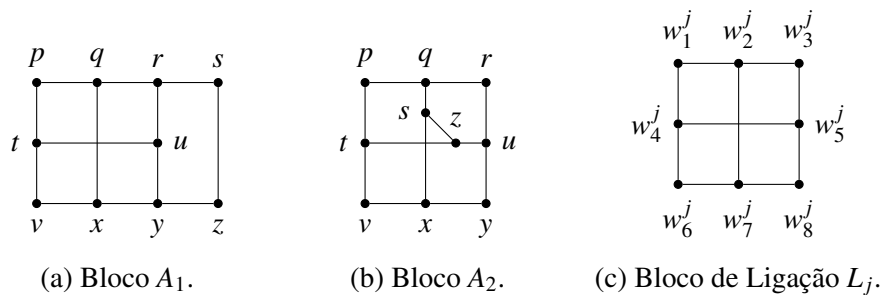
4 SNARKS DE BLANUŠA GENERALIZADOS

Neste capítulo, apresentamos a família dos *snarks* de Blanuša generalizados, descrevemos a construção recursiva dos membros desta família e, por fim, apresentamos os resultados obtidos na investigação do número cromático $L(3,2,1)$ desta família.

Em 1946, D. Blanuša (Blanus 1946) descobriu dois *snarks*, ambos com 27 arestas e 18 vértices, que ficaram conhecidos como primeiro e segundo *snarks* de Blanuša e estão ilustrados na Figura 22(a) e Figura 23(a), respectivamente.

Em 1983, J. Watkins (Watkins 1983) generalizou os *snarks* de Blanus e construiu duas famílias infinitas de *snarks* denominadas de *Snarks* de Blanuša Generalizados. Os *snarks* de Blanuša generalizados consistem em duas famílias infinitas de grafos. Os grafos pertencentes a estas duas famílias podem ser obtidos por meio de uma construção recursiva, a partir de subgrafos fixos denominados *blocos de construção*. A seguir, definimos os blocos de construção e determinamos como cada membro das famílias é obtido. Os *blocos de construção* são denominados bloco A_1 , bloco A_2 , e bloco de ligação L_j e são ilustrados nas Figuras 21(a), 21(b) e 21(c), respectivamente. Chamamos de *vértices de ligação* os vértices de grau 2 dos blocos A_1 , A_2 e L_j .

Figura 21 – Blocos de construção dos *snarks* de Blanuša.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sejam $\mathcal{B}^1 = \{B_1^1, B_2^1, \dots, B_k^1\}$ e $\mathcal{B}^2 = \{B_1^2, B_2^2, \dots, B_k^2\}$ a primeira e a segunda famílias de *snarks* de Blanuša generalizados. O primeiro *snark* da família \mathcal{B}^1 é o grafo B_1^1 que tem conjunto de vértices $V(B_1^1) = V(A_1) \cup V(L_1)$ e conjunto de arestas $E(B_1^1) = E(A_1) \cup E(L_1) \cup \{sw_6^1, zw_1^1, pw_8^1, vw_3^1\}$. O *snark* B_1^1 está ilustrado na Figura 22(a). Por sua vez, o primeiro *snark* da família \mathcal{B}^2 é o grafo B_1^2 que possui conjunto de vértices $V(B_1^2) = V(A_2) \cup V(L_1)$ e conjunto de arestas $E(B_1^2) = E(A_2) \cup E(L_1) \cup \{rw_6^1, yw_1^1, pw_8^1, vw_3^1\}$. O *snark* B_1^2 está ilustrado na Figura 23(a).

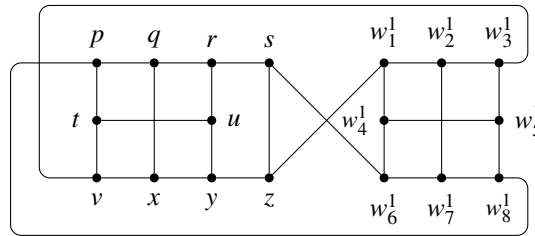
Para $k \in \{1, 2\}$ e $i \geq 2$, obtemos o *snark* B_i^k de forma recursiva a partir do *snark* B_{i-1}^k e do bloco de ligação L_i de acordo com as seguintes regras de formação:

I $V(B_i^k) = V(B_{i-1}^k) \cup V(L_i)$;

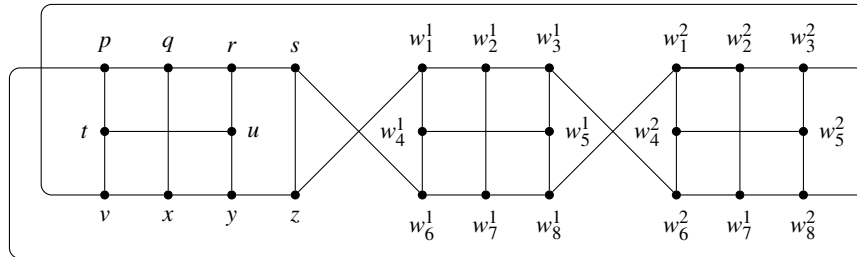
II $E(B_i^k) = E(B_{i-1}^k) \setminus E_{out}^{i-1} \cup E(L_i) \cup \{w_3^{i-1}w_6^i, w_8^{i-1}w_1^i, pw_8^i, vw_3^i\}$ tal que $E_{out}^{i-1} = \{pw_8^{i-1}, vw_3^{i-1}\}$.

As Figuras 22(a), 22(b), 23(a) e 23(b) exibem os *snarks* B_1^1 , B_2^1 , B_1^2 e B_2^2 respectivamente.

Figura 22 – Os dois primeiros membros da família \mathcal{B}^1 .

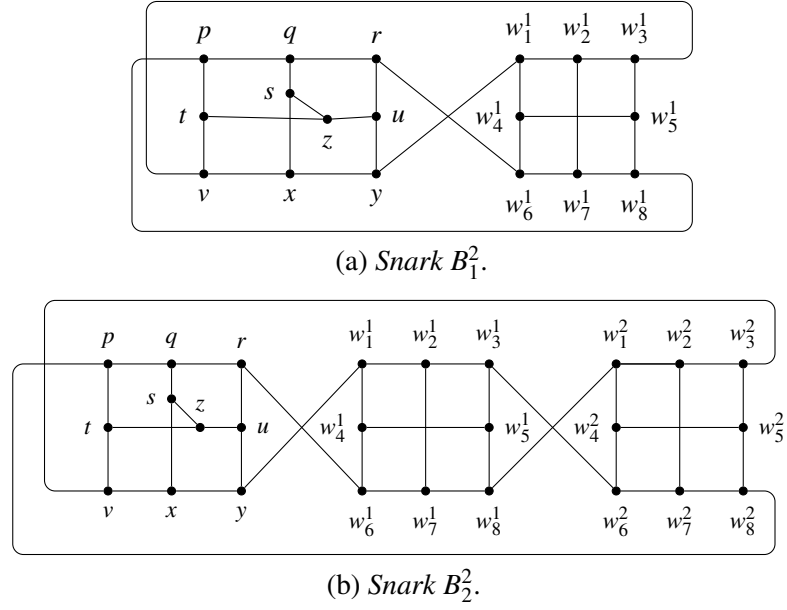


(a) Snark B_1^1 .



(b) Snark B_2^1 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Os dois primeiros membros da família \mathcal{B}^2 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

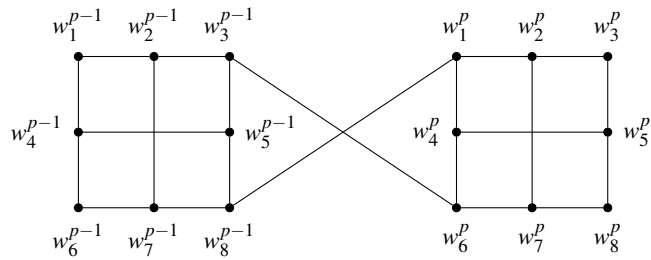
Seja B_i^k um snark de Blanuša generalizado e sejam L_p e L_q dois de seus blocos de ligação, com $1 \leq p < q \leq i$. Dizemos que os vértices $w_j^p \in V(L_p)$ e $w_j^q \in V(L_q)$, com $1 \leq j \leq 8$, são *vértices correspondentes* nos blocos L_p e L_q . O lema a seguir mostra que vértices correspondentes pertencentes a blocos de ligação consecutivos estão à distância maior que três entre si. Este resultado é usado nas nossas demonstrações.

Lema 15. *Dado um snark de Blanuša generalizado B_i^k , com $k \in \{1, 2\}$ e $i \geq 2$, dois vértices correspondentes $w_j^{p-1}, w_j^p \in V(B_i^k)$ estão à distância maior que três, para todo $1 \leq j \leq 8$.*

Demonstração. Dado o snark B_i^k , seja H um subgrafo de B_i^k induzido pelo conjunto $V(L_{p-1}) \cup V(L_p)$, $2 \leq p \leq i$, e ilustrado na Figura 24. Por inspeção do subgrafo H , é possível verificar que o menor caminho entre quaisquer dos oito possíveis pares de vértices correspondentes w_j^{p-1} e w_j^p , para $1 \leq j \leq 8$, possui comprimento 4. Por completude do resultado, apresentamos, a seguir, um exemplo de tal caminho para cada um dos oito possíveis casos. Denotamos por $P(u, v)$ um caminho conectando os vértices u e v no grafo. Os caminhos com comprimento 4 são dados a seguir: (i) $P(w_1^{p-1}, w_1^p) = (w_1^{p-1}, w_4^{p-1}, w_5^{p-1}, w_8^{p-1}, w_1^p)$; (ii) $P(w_2^{p-1}, w_2^p) = (w_2^{p-1}, w_3^{p-1}, w_6^p, w_7^p, w_2^p)$; (iii) $P(w_3^{p-1}, w_3^p) = (w_3^{p-1}, w_6^p, w_7^p, w_2^p, w_3^p)$; (iv) $P(w_4^{p-1}, w_4^p) = (w_4^{p-1}, w_5^{p-1}, w_3^{p-1}, w_6^p, w_4^p)$; (v) $P(w_5^{p-1}, w_5^p) = (w_5^{p-1}, w_8^{p-1}, w_1^p, w_4^p, w_5^p)$; (vi) $P(w_6^{p-1}, w_6^p) = (w_6^{p-1}, w_4^{p-1}, w_5^{p-1}, w_3^{p-1}, w_6^p)$; (vii) $P(w_7^{p-1}, w_7^p) = (w_7^{p-1}, w_8^{p-1}, w_1^{p-1}, w_2^{p-1}, w_7^p)$; e (viii) $P(w_8^{p-1}, w_8^p) = (w_8^{p-1}, w_1^p, w_2^p, w_7^p, w_8^p)$.

□

Figura 24 – Subgrafo $H \subset B_i^k$.



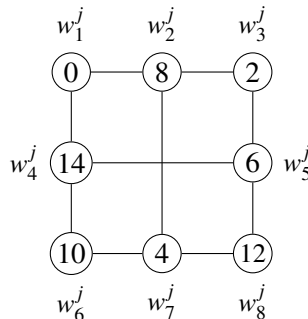
Fonte: Elaborado pelo autor.

O lema a seguir também é usado nas nossas demonstrações.

Lema 16. *Seja L_j , com $1 \leq j \leq i$, um bloco de ligação do snark de Blanuša generalizado B_i^k , com $k \in \{1, 2\}$, munido da rotulação $\pi: V(L_j) \rightarrow \{0, \dots, 14\}$ ilustrada na Figura 25. A rotulação π é uma rotulação-L(3,2,1) de L_j tal que quaisquer dois vértices $u, v \in V(L_j)$ possuem $|\pi(u) - \pi(v)| \geq 2$. Além disso, $|f(w_3^i) - f(w_6^i)| \geq 3$ e $|f(w_1^i) - f(w_8^i)| \geq 3$.*

Demonstração. Por inspeção, é possível checar que π é uma rotulação-L(3,2,1) de L_j . Além disso, note que quaisquer dois rótulos do conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ possuem diferença absoluta maior ou igual a 2 e os rótulos desse conjunto são exatamente os rótulos atribuídos aos vértices de L_j por π . Por fim, pela construção de π , temos que $|f(w_3^j) - f(w_6^j)| = |2 - 10| \geq 3$ e $|f(w_1^j) - f(w_8^j)| = |0 - 12| \geq 3$. □

Figura 25 – Rotulação-L(3,2,1) do grafo de ligação L_j .



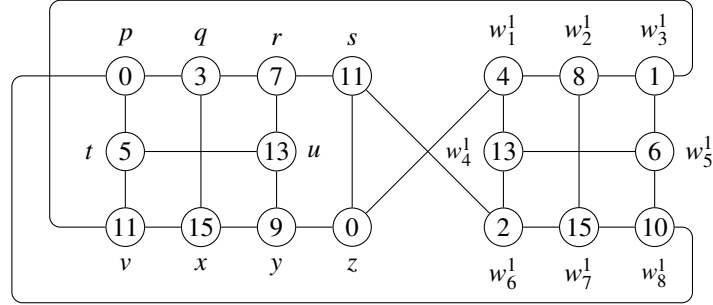
Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, apresentamos um limitante superior para o número cromático L(3,2,1) para a primeira família dos snarks de Blanuša generalizados.

Teorema 17. *Seja B_i^1 um snark de Blanuša generalizado da família \mathcal{B}^1 . Então, $\lambda_{3,2,1}(B_i^1) \leq 15$ e $\lambda_{3,2,1}(B_i^1) \leq 14$ para $i \geq 2$.*

Demonstração. Uma rotulação-L(3,2,1) do snark B_i^1 com span 15 é ilustrada na Figura 26.

Figura 26 – Snark B_i^1 com uma rotulação-L(3,2,1) com span 15.

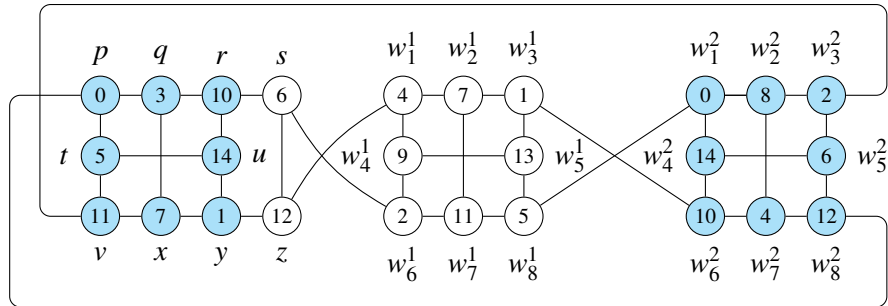


Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de provar o resultado para os snarks B_i^1 , com $i \geq 2$, usamos indução em i . Provamos por indução em i que todo snark B_i^1 com $i \geq 2$ possui uma rotulação-L(3,2,1) $f_i : V(B_i^1) \rightarrow \{0, 1, \dots, 14\}$ dita especial pois atribui rótulos fixos a certos vértices de B_i^1 , como especificado a seguir: $f_i(w_1^i) = 0, f_i(w_2^i) = 8, f_i(w_3^i) = 2, f_i(w_4^i) = 14, f_i(w_5^i) = 6, f_i(w_6^i) = 10, f_i(w_7^i) = 4, f_i(w_8^i) = 12, f_i(p) = 0, f_i(q) = 3, f_i(r) = 10, f_i(t) = 5, f_i(u) = 14, f_i(v) = 11, f_i(x) = 7$ e $f_i(y) = 1$.

Caso Base: O snark B_2^1 possui uma rotulação-L(3,2,1) especial f_2 , que está exibida na Figura 27, e pode ser checada por inspeção.

Figura 27 – Rotulação-L(3,2,1) especial f_2 do snark B_2^1 . Note que os vértices de cor azul possuem rótulos como especificado pela rotulação especial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Hipótese de Indução: Suponha que existe uma rotulação-L(3,2,1) especial f_{i-1} para o snark B_{i-1}^1 com span 14.

Caso Geral: Seja B_i^1 um *snark* de Blanuša generalizado com $i \geq 3$. Pela construção recursiva dos *snarks* de Blanuša generalizados, o grafo B_i^1 é obtido a partir do grafo B_{i-1}^1 e de um bloco de ligação L_i e contém os mesmos vértices que esses dois grafos. Uma rotulação-L(3,2,1) $\pi: V(L_i) \rightarrow \{0, \dots, 14\}$ para o grafo de ligação L_i com span 14 é ilustrada na Figura 25.

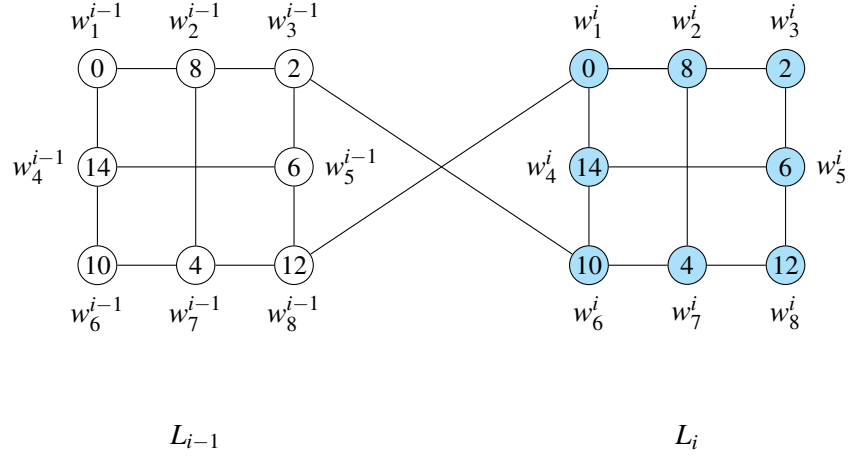
Deste modo, definimos uma rotulação $f_i: V(B_i^1) \rightarrow \{0, \dots, 14\}$ para B_i^1 como a seguir. Para todo vértice $v \in V(B_i^1)$, defina

$$f_i(v) = \begin{cases} f_{i-1}(v) & \text{se } v \in V(B_{i-1}^1); \\ \pi(v) & \text{se } v \in V(L_i). \end{cases}$$

Definida a rotulação f_i , provamos a seguir que f_i é uma rotulação-L(3, 2, 1) especial com span 14. Veja que a rotulação f_i é definida em função das rotulações f_{i-1} e π . Além disso, f_{i-1} tem span 14 pela hipótese de indução e π tem span 14 pela própria construção dada na Figura 25. Portanto, f_i tem span 14.

A seguir, mostramos que f_i é uma rotulação-L(3,2,1) de B_i^1 . Por hipótese de indução sabemos que f_i restrita do subgrafo $B_{i-1}^1 \setminus E_{out}^{i-1}$ é uma rotulação-L(3,2,1). Além disso, pelo Lema 16, sabemos também que f_i restrita ao subgrafo L_i também é uma rotulação-L(3,2,1). Resta apenas mostrar que os rótulos dos vértices de L_i não conflitam com os rótulos dos vértices de $B_{i-1}^1 \setminus E_{out}^{i-1}$. Em outras palavras precisamos mostrar que os rótulos dos vértices dos blocos L_{i-1} e A_1 não conflitam com os rótulos dos vértices do bloco L_i . Note que, pela definição das rotulações f_{i-1} e π , os vértices w_j^i e w_j^{i-1} possuem $f_i(w_j^i) = \pi(w_j^i) = f_{i-1}(w_j^{i-1}) = f_i(w_j^{i-1})$, para todo $i \leq j \leq 8$. Porém, o Lema 15 garante que w_j^i e w_j^{i-1} estão à distância maior que 3. Ademais, o Lema 16 garante que a rotulação f_i restrita ao subgrafo $L_i \cup L_{i-1}$ é uma rotulação-L(3,2,1). Logo, não existe conflito entre os blocos L_i e L_{i-1} . A Figura 28 ilustra esse caso.

Figura 28 – Conectando o L_i ao $L_{i-1} \in B_{i-1}^1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

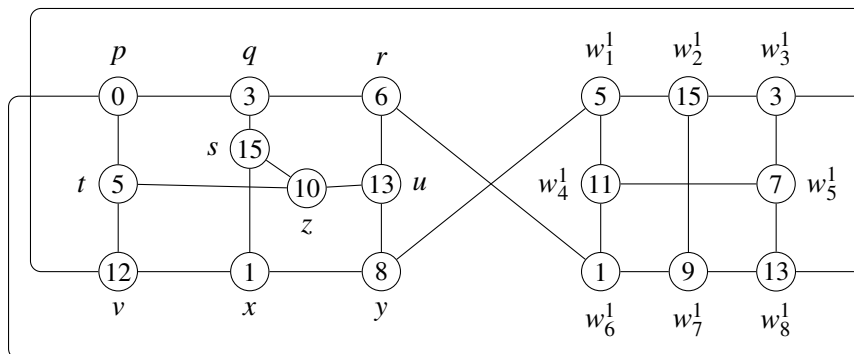
Resta apenas verificar que não há conflitos entre os rótulos dos vértices dos blocos A_1 e L_i . Isto decorre do fato de que, na rotulação f_{i-1} do *snark* B_{i-1}^1 , não existia conflitos entre os rótulos dos vértices dos blocos A_1 e L_{i-1} . Como rotulamos os vértices do bloco L_i com os mesmos rótulos que os seus vértices correspondentes no bloco L_{i-1} , então herdamos a propriedade de que não existe conflito entre os rótulos dos vértices de A_1 e L_i . Portanto, a rotulação f_i do *snark* B_i^1 é uma rotulação-L(3,2,1). Além disso, f_i é especial dado que: $f_i(w_1^i) = \pi(w_1^i) = 0$, $f_i(w_2^i) = \pi(w_2^i) = 8$, $f_i(w_3^i) = \pi(w_3^i) = 2$, $f_i(w_4^i) = \pi(w_4^i) = 14$, $f_i(w_5^i) = \pi(w_5^i) = 6$, $f_i(w_6^i) = \pi(w_6^i) = 10$, $f_i(w_7^i) = \pi(w_7^i) = 4$, $f_i(w_8^i) = \pi(w_8^i) = 12$, $f_i(p) = f_{i-1}(p) = 0$, $f_i(q) = f_{i-1}(q) = 3$, $f_i(r) = f_{i-1}(r) = 10$, $f_i(t) = f_{i-1}(t) = 5$, $f_i(u) = f_{i-1}(u) = 14$, $f_i(v) = f_{i-1}(v) = 11$, $f_i(x) = f_{i-1}(x) = 7$ e $f_i(y) = f_{i-1}(y) = 1$.

□

Teorema 18. *Seja B_i^2 um snark de Blanuša generalizado da família \mathcal{B}^2 . Então, $\lambda_{3,2,1}(B_1^2) \leq 15$ e $\lambda_{3,2,1}(B_i^2) \leq 14$ para $i \geq 2$.*

Demonstração. Uma rotulação-L(3,2,1) do *snark* B_i^2 com span 15 é ilustrada na Figura 29.

Figura 29 – Snark B_1^2 com uma rotulação-L(3,2,1) com span 15.

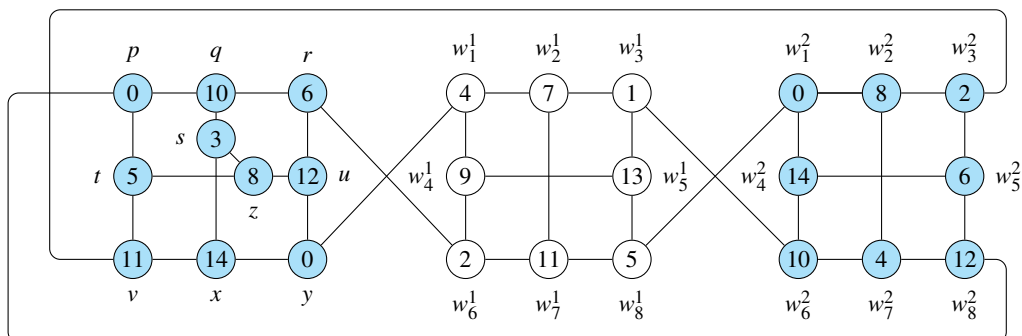


Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de provar o resultado para os *snarks* B_i^2 , com $i \geq 2$, usamos indução em i . Provamos por indução em i que todo *snark* B_i^2 com $i \geq 2$ possui uma rotulação-L(3,2,1) $f_i : V(B_i^2) \rightarrow \{0, 1, \dots, 14\}$ dita *especial* pois atribui rótulos fixos a certos vértices de B_i^2 , como especificado a seguir: $f_i(w_1^i) = 0, f_i(w_2^i) = 8, f_i(w_3^i) = 2, f_i(w_4^i) = 14, f_i(w_5^i) = 6, f_i(w_6^i) = 10, f_i(w_7^i) = 4, f_i(w_8^i) = 12, f_i(p) = 0, f_i(q) = 10, f_i(r) = 6, f_i(s) = 3, f_i(t) = 5, f_i(u) = 12, f_i(v) = 11, f_i(x) = 14, f_i(y) = 0$ e $f_i(z) = 8$.

Caso Base: O *snark* B_2^2 possui uma rotulação-L(3,2,1) especial f_2 , que está exibida na Figura 30, e pode ser checada pro inspeção.

Figura 30 – Rotulação-L(3,2,1) especial f_2 do *snark* B_2^2 . Note que os vértices de cor azul possuem rótulos como especificado pela rotulação especial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Hipótese de Indução: Suponha que existe uma rotulação-L(3,2,1) especial f_{i-1} para o *snark* B_{i-1}^2 com span 14.

Caso Geral: Seja B_i^2 um *snark* de Blanuša generalizado com $i \geq 3$. Pela definição recursiva definida anteriormente, o grafo B_i^2 é obtido a partir do grafo B_{i-1}^2 e de um bloco de ligação L_i e contém os mesmos vértices que esses dois grafos. Uma rotulação-L(3,2,1)

$\pi: V(L_i) \rightarrow \{0, \dots, 14\}$ para o grafo de ligação L_i com span 14 é ilustrada na Figura 25.

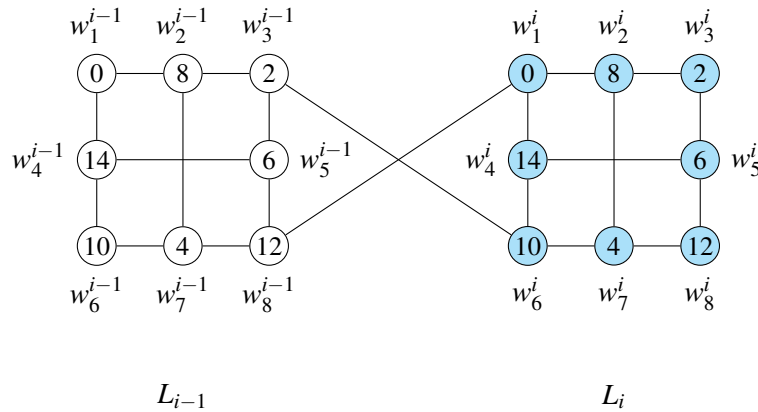
Deste modo, definimos uma rotulação $f_i: V(B_i^2) \rightarrow \{0, \dots, 14\}$ para B_i^2 como a seguir. Para todo vértice $v \in V(B_i^2)$, defina

$$f_i(v) = \begin{cases} f_{i-1}(v) & \text{se } v \in V(B_{i-1}^2); \\ \pi(v) & \text{se } v \in V(L_i). \end{cases}$$

Definida a rotulação f_i , provamos a seguir que f_i é uma rotulação- $L(3, 2, 1)$ especial com span 14. Primeiro, provamos que o span de f_i é igual a 14. Veja que a rotulação f_i é definida em função das rotulações f_{i-1} e π . Além disso, f_{i-1} tem span 14 pela hipótese de indução e π tem span 14 pela própria construção dada na Figura 25. Portanto, f_i tem span 14.

A seguir, mostramos que f_i é uma rotulação- $L(3, 2, 1)$ de B_i^2 . Por hipótese de indução sabemos que f_i restrita do subgrafo $B_{i-1}^2 \setminus E_{out}^{i-1}$ é uma rotulação- $L(3, 2, 1)$. Além disso, pelo Lema 16, sabemos também que f_i restrita ao subgrafo L_i também é uma rotulação- $L(3, 2, 1)$. Resta apenas mostrar que os rótulos dos vértices de L_i não conflitam com os rótulos dos vértices de $B_{i-1}^2 \setminus E_{out}^{i-1}$. Em outras palavras precisamos mostrar que os rótulos dos vértices dos blocos L_{i-1} e A_1 não conflitam com os rótulos dos vértices do bloco L_i . Note que, pela definição das rotulações f_{i-1} e π , os vértices w_j^i e w_j^{i-1} possuem $f_i(w_j^i) = \pi(w_j^i) = f_{i-1}(w_j^{i-1}) = f_i(w_j^{i-1})$, para todo $i \leq j \leq 8$. Porém, o Lema 15 garante que w_j^i e w_j^{i-1} estão à distância maior que 3. Ademais, o Lema 16 garante que a rotulação f_i restrita ao subgrafo $L_i \cup L_{i-1}$ é uma rotulação- $L(3, 2, 1)$. Logo, não existe conflito entre os blocos L_{i-1} e L_i . A Figura 31 ilustra esse caso.

Figura 31 – Ligando o L_i ao $L_{i-1} \in B_{i-1}^1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Resta apenas verificar que não há conflitos entre os rótulos dos vértices dos blocos

A_1 e L_i . Isto decorre do fato de que, na rotulação f_{i-1} do *snark* B_{i-1}^2 , não existia conflitos entre os rótulos dos vértices dos blocos A_1 e L_{i-1} . Como rotulamos os vértices do bloco com os mesmos rótulos que os seus vértices correspondentes no bloco L_{i-1} , então herdamos a propriedade de que não existe conflito entre os rótulos dos vértices de A_1 e L_i . Portanto, a rotulação f_i do *snark* B_i^2 é uma rotulação-L(3,2,1). Além disso, f_i é especial dado que: $f_i(w_1^i) = \pi(w_1^i) = 0$, $f_i(w_2^i) = \pi(w_2^i) = 8$, $f_i(w_3^i) = \pi(w_3^i) = 2$, $f_i(w_4^i) = \pi(w_4^i) = 14$, $f_i(w_5^i) = \pi(w_5^i) = 6$, $f_i(w_6^i) = \pi(w_6^i) = 10$, $f_i(w_7^i) = \pi(w_7^i) = 4$, $f_i(w_8^i) = \pi(w_8^i) = 12$, $f_i(p) = f_{i-1}(p) = 0$, $f_i(q) = f_{i-1}(q) = 10$, $f_i(r) = f_{i-1}(r) = 6$, $f_i(s) = f_{i-1}(s) = 3$, $f_i(t) = f_{i-1}(t) = 5$, $f_i(u) = f_{i-1}(u) = 12$, $f_i(v) = f_{i-1}(v) = 11$, $f_i(x) = f_{i-1}(x) = 14$, $f_i(y) = f_{i-1}(y) = 0$ e $f_i(z) = f_{i-1}(z) = 8$. \square

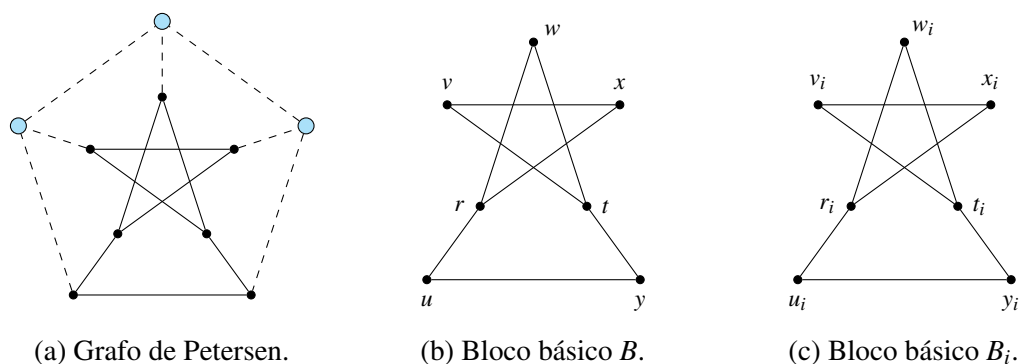
5 SNARKS DE LOUPEKINE

Por volta de 1975, F. Loupekin inventou um método de construção de famílias infinitas de *snarks*. Esse método foi posteriormente comunicado e publicado por R. Isaacs (Isaacs 1976) em 1976. Todos os grafos gerados a partir desse método são chamados de *Snarks* de Loupekin.

Neste capítulo, definimos uma família específica dos *Snarks* de Loupekin, denominada *snarks* LP_0 , e, em seguida, determinamos um limitante superior para o número cromático $L(3,2,1)$ para os membros desta família. Os *snarks* LP_0 podem ser construídos a partir do grafo de Petersen e essa construção é explicitada nos próximos parágrafos.

Seja G o grafo de Petersen e $P_3 \subset G$ um caminho arbitrário em G com três vértices. Denominamos *bloco básico* B o grafo obtido a partir de G pela remoção do caminho P_3 , tal como ilustrado na Figura 32(b). Note que os vértices de B foram nomeados. A seguir, adicionamos um subíndice i ao nome de cada vértice do bloco B , dando origem, assim, ao bloco básico B_i , como ilustrado na Figura 32(c). Os vértices que possuem grau 2 no bloco B_i , mais especificamente w_i, v_i, x_i, u_i e y_i , são chamados *vértices de borda*.

Figura 32 – Construção de um bloco básico B_i .

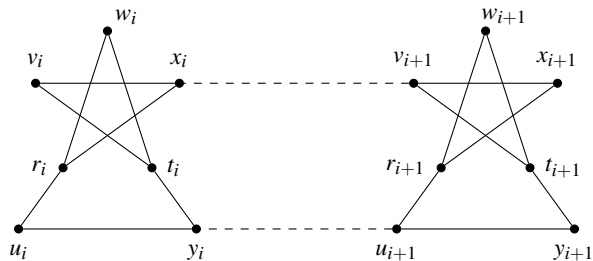


Fonte: Elaborado pelo autor.

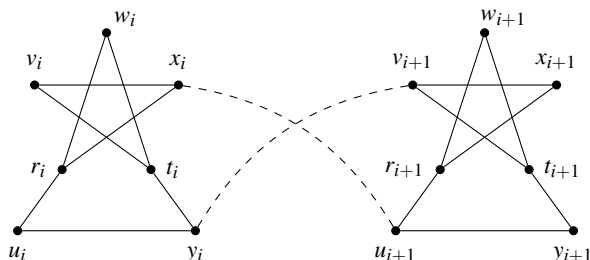
Seja $k \geq 3$ um inteiro ímpar. A fim de construir um *snark* de Loupekin LP_0 , inicialmente considere k blocos básicos B_0, B_1, \dots, B_{k-1} em ordem cíclica. Para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, conectamos os blocos consecutivos B_i e B_{i+1} por meio de *arestas de ligação paralelas* $\{x_i v_{i+1}, y_i u_{i+1}\}$ ou por meio de *arestas de ligação cruzadas* $\{x_i u_{i+1}, y_i v_{i+1}\}$ (índices módulo k) como mostrado na Figura 33. O grafo resultante é chamado de *grafo de blocos*, denotado por G_B , e possui exatamente k vértices de grau dois, w_0, w_1, \dots, w_{k-1} . Um exemplo de

grafo de blocos G_B é ilustrado na Figura 34.

Figura 33 – Dois blocos básicos consecutivos B_i e B_{i+1} conectados por meio de arestas de ligação.



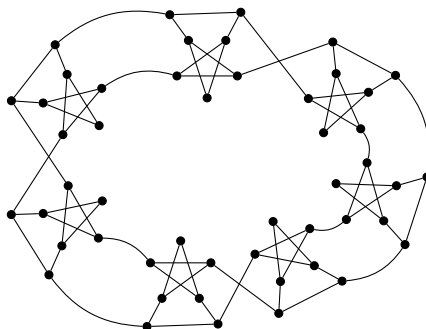
(a) Arestas de ligação paralelas.



(b) Arestas de ligação cruzadas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Grafo de blocos G_B com sete blocos básicos.



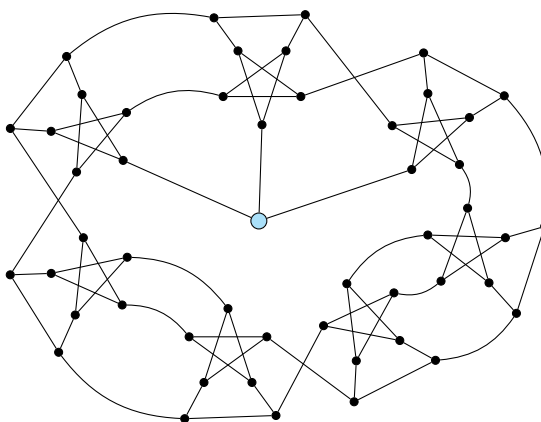
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que o grafo de blocos G_B não é 3-regular devido aos k vértices de grau 2. A fim de torná-lo regular executamos o procedimento a seguir. Seguindo a ordem cíclica $(w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$ dos vértices com grau dois em G_B , selecionamos ou três vértices consecutivos ou dois vértices consecutivos tal que: (i) se dois vértices consecutivos w_i e w_{i+1} são selecionados, então adicionamos a G_B uma nova aresta $w_i w_{i+1}$ conectando esses dois vértices; (ii) se três vértices consecutivos w_i, w_{i+1}, w_{i+2} são selecionados, então adicionamos a G_B um novo vértice

z_i , chamado *vértice estrela*, e adicionamos três novas arestas $z_i w_i, z_i w_{i+1}, z_i w_{i+2}$ conectando o vértice estrela z_i aos três vértices de grau 2 escolhidos. Executamos esse procedimento de modo que o grafo resultante torne-se 3-regular. Esse grafo resultante é denotado por G_L e um exemplo é exibido na Figura 35.

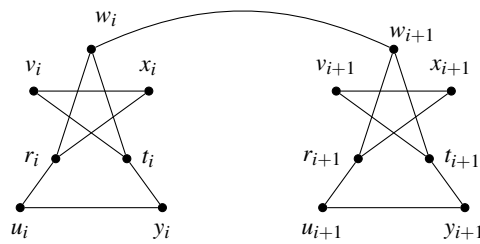
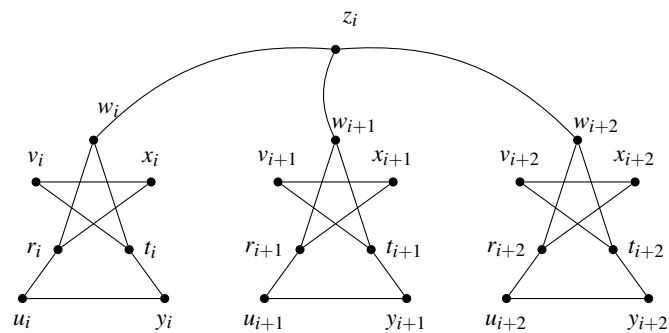
Isaacs (Isaacs 1976) provou que todo grafo G_L , construído como detalhado anteriormente, é um *snark*. Os *snarks* G_L são também chamados *snarks* LP_0 .

Figura 35 – Grafo G_L .



Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de provar o resultado principal deste capítulo, precisamos de mais duas definições adicionais, que são apresentadas a seguir. Seja G um *snark* LP_0 . Denotamos por G_d um *gadget duplo* de G , que é um subgrafo de G , onde $V(G_d) = V(B_i) \cup V(B_{i+1})$ e $E(G_d) = E(B_i) \cup E(B_{i+1}) \cup \{w_i w_{i+1}\}$. Denotamos por G_t um *gadget triplo* de G , que é um subgrafo de G , onde $V(G_t) = V(B_i) \cup V(B_{i+1}) \cup V(B_{i+2}) \cup \{z_i\}$ e $E(G_t) = E(B_{i+1}) \cup E(B_i) \cup E(B_{i+2}) \cup \{w_i z_i, w_{i+1} z_i, w_{i+2} z_i\}$. A Figura 36 ilustra um *gadget duplo* e um *gadget triplo*.

Figura 36 – Esquema dos *gadget* duplo e triplo.(a) *Gadget* duplo formados pelos blocos B_i e B_{i+1} .(b) *Gadget* triplo formados pelos blocos B_i, B_{i+1} e B_{i+2} .

Fonte: Elaborado pelo autor.

O teorema a seguir apresenta um limitante superior para o número cromático $L(3,2,1)$ dos *snarks* de Loupekin LP_0 .

Teorema 19. *Seja G_L um snark LP_0 . Então $\lambda_{3,2,1}(G_L) \leq 21$.*

Demonstração. Seja G_L um snark LP_0 com k blocos básicos B_0, B_1, \dots, B_{k-1} , tal que $k \geq 3$ e k é ímpar. Pela definição de G_L , sabemos que cada dois de seus blocos consecutivos B_i e B_{i+1} são conectados por meio de arestas de ligação paralelas ou cruzadas (índices módulo k). Ademais, sabemos também que G_L contém subgrafos vértice-disjuntos denominados *gadget* duplos ou *gadgets* triplos. De fato, G_L é formado por r *gadgets* G_1, G_2, \dots, G_r , com $r \geq 1$.

A fim de provar o enunciado, provamos um resultado ainda mais forte. Construimos um novo grafo G tal que $G_L \subset G$ e provamos que o supergrafo G possui uma rotulação- $L(3,2,1)$ $f: V(G) \rightarrow \{0, \dots, 21\}$ com *span* 21. Como G_L é um subgrafo de G , obtemos então que $\lambda_{3,2,1}(G_L) \leq 21$ (pelo Lema 4) e o resultado segue.

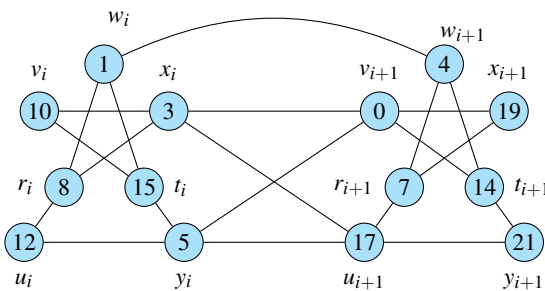
O grafo G é construído a partir de G_L como a seguir. Para cada $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$: (i) se as arestas que ligam os vértices de borda x_i e y_i do bloco B_i aos vértices de borda v_{i+1} e u_{i+1} do bloco B_{i+1} são arestas de ligação cruzadas, então adicione entre esses vértices as arestas de ligação paralelas $x_i v_{i+1}$ e $y_i u_{i+1}$; (ii) se as arestas que ligam os vértices de borda x_i e y_i do

bloco B_i aos vértices de borda v_{i+1} e u_{i+1} do bloco B_{i+1} são arestas de ligação paralelas, então adicione entre esses vértices as arestas de ligação cruzadas $x_i u_{i+1}$ e $y_i v_{i+1}$. Denotamos por G o grafo simples resultante dessas k operações de adição de pares de arestas.

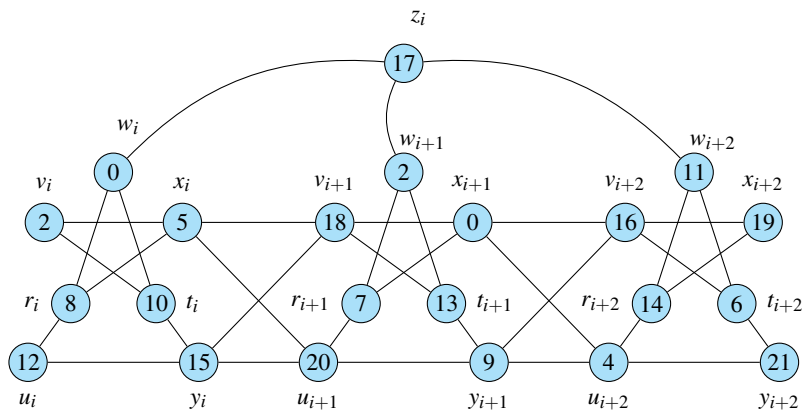
Note que, por construção, $G_L \subset G$. Logo, dado um *gadget* duplo $G_d \subset G_L$, definimos um *gadget* duplo de G como o subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices $V(G_d)$. Similarmente, dado um *gadget* triplo $G_t \subset G_L$, definimos um *gadget* triplo de G como o subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices $V(G_t)$.

A fim de construir uma rotulação-L(3,2,1) com peso 21 para o *snark* G , inicialmente, definimos rotulações-L(3,2,1) fixas para os seus *gadget* duplos e triplos. A Figura 37(a) define uma rotulação-L(3,2,1) $\pi_d: V(G_d) \rightarrow \{0, 1, \dots, 21\}$ para um *gadget* duplo $G_d \subset G$ e a Figura 37(b) define uma rotulação-L(3,2,1) $\pi_t: V(G_t) \rightarrow \{0, 1, \dots, 21\}$ para um *gadget* triplo $G_t \subset G$.

Figura 37 – Rotulações-L(3, 2, 1) dos *gadgets* duplo e triplo.



(a) *Gadget* duplo G_d com uma rotulação-L(3,2,1) π_d com *span* 21.



(b) *Gadget* triplo G_t com uma rotulação-L(3,2,1) π_t com *span* 21.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, temos plenas condições de definir a rotulação f que foi prometida anteri-

ormente. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, seja G_i um *gadget* de G , e, para todo vértice $x \in V(G_i)$, defina:

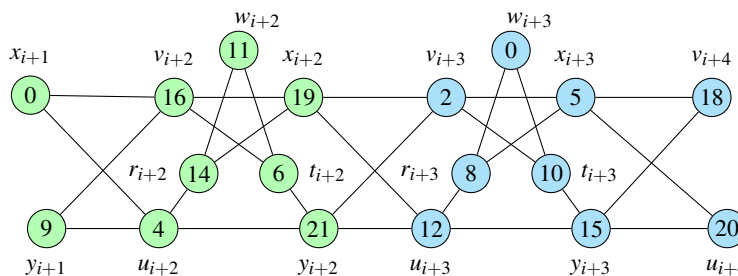
$$f(x) = \begin{cases} \pi_d(x) & \text{se } G_i \text{ for um } \textit{gadget} \text{ duplo;} \\ \pi_t(x) & \text{se } G_i \text{ for um } \textit{gadget} \text{ triplo.} \end{cases}$$

A seguir, provamos que a rotulação de vértices f é uma rotulação-L(3,2,1) do grafo G . Lembre que G é formado por $r \geq 1$ *gadgets* vértice-disjuntos G_1, G_2, \dots, G_r . Além disso, pela definição de f , cada *gadget* G_i de G foi rotulado com umas das rotulações-L(3,2,1) π_d e π_t . Esses fatos implicam que, para quaisquer dois vértices u e v pertencentes a um mesmo *gadget* G_i de G e tais que $d_G(u, v) \leq 3$, os rótulos $f(u)$ e $f(v)$ não conflitam.

Sejam w e z dois vértices de G com distância $d_G(w, z) \leq 3$ e tais que $w \in G_i$ e $z \in G_j$ tais que, $j = i + 1$ e $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$. Logo, a fim de provar que f é uma rotulação-L(3,2,1) resta apenas provar que os rótulos $f(w)$ e $f(z)$ não conflitam. Para cada caso abaixo, o símbolo $\Upsilon^p(v)$ denota o conjunto $N_p(v) \cap V(G_j)$, onde $p \in \{1, 2, 3\}$, $v \in G_i$ onde G_i e G_j são consecutivos com $i < j$. O conjunto $\Upsilon^p(v)$ contém os vértices de $V(G_j)$ que estão a distância p de v . Existem 4 casos a considerar, dependendo dos tipos de G_i e G_j , se são *gadgets* duplos ou triplos.

Caso 1: G_i e G_j são *gadgets* triplos de G . O *gadget* G_i é formado por três blocos consecutivos B_i, B_{i+1} e B_{i+2} , já o *gadget* G_j é formado pelos três blocos consecutivos B_{i+3}, B_{i+4} e B_{i+5} . O bloco B_{i+1} possui dois vértices x_{i+1} e y_{i+1} que estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j . Similarmente, todos os 7 vértices de B_{i+2} estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j . A Figura 38 mostra todos vértices que aparecem nessa análise dos casos. A seguir, analisamos todos os 9 vértices pertencentes ao *gadget* G_i e verificamos que eles não conflitam com sua vizinhança estendida no *gadget* G_j .

Figura 38 – Vértices usados na análise dos casos. Os vértices em cor verde pertencem ao *gadget* G_i e os vértices em azul pertencem ao *gadget* G_j .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 1.1: x_{i+1} com $f(x_{i+1}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(x_{i+1}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(x_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.2: y_{i+1} com $f(y_{i+1}) = 9$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(y_{i+1}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(y_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.3: w_{i+2} com $f(w_{i+2}) = 11$. Neste caso, $\Upsilon^1(w_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(w_{i+2}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(w_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(w_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(w_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.4: v_{i+2} com $f(v_{i+2}) = 16$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$ e $f(y_{i+3}) = 15$. Portanto, $|f(v_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.5: x_{i+2} com $f(x_{i+2}) = 19$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $\Upsilon^2(x_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i+2}) = \{w_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$, $f(y_{i+3}) = 15$, $f(w_{i+3}) = 0$, $f(v_{i+4}) = 18$ e $f(u_{i+4}) = 20$. Portanto, $|f(x_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.6: r_{i+2} com $f(r_{i+2}) = 14$. Neste caso, $\Upsilon^1(r_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(r_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(r_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$ e $f(y_{i+3}) = 15$. Portanto, $|f(r_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(r_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.7: t_{i+2} com $f(t_{i+2}) = 6$. Neste caso, $\Upsilon^1(t_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(t_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(t_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$ e $f(y_{i+3}) = 15$. Portanto, $|f(t_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(t_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

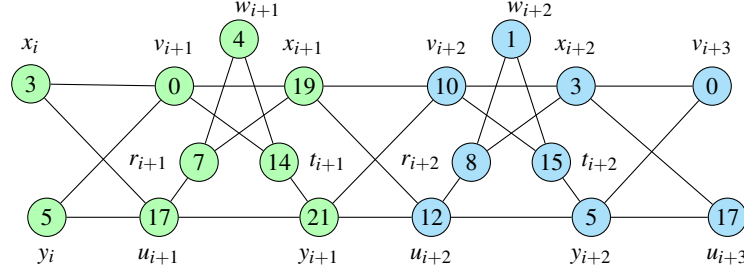
Caso 1.8: u_{i+2} com $f(u_{i+2}) = 4$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(u_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$ e $f(y_{i+3}) = 15$. Portanto, $|f(u_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.9: y_{i+2} com $f(y_{i+2}) = 21$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $\Upsilon^2(y_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i+2}) = \{w_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}\}$, $f(v_{i+3}) = 2$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 5$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 10$, $f(y_{i+3}) = 15$, $f(w_{i+3}) = 0$, $f(v_{i+4}) = 18$ e $f(u_{i+4}) = 20$. Portanto, $|f(y_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2: G_i e G_j são *gadgets* duplos de G . O *gadget* G_i é formado por dois blocos consecutivos B_i e B_{i+1} , já o *gadget* G_j é formado pelos dois blocos consecutivos B_{i+2} , e B_{i+3} . O bloco B_i possui dois vértices x_i e y_i que estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j .

Similarmente, todos os 7 vértices de B_{i+1} estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j . A Figura 39 mostra todos vértices que aparecem nessa análise dos casos. A seguir, tratamos cada um desses 9 casos.

Figura 39 – Vértices usados na análise dos casos. Os vértices em cor verde pertencem ao *gadget* G_i e os vértices em azul pertencem ao *gadget* G_j .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 2.1: x_i com $f(x_i) = 3$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_i) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(x_i) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(x_i) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.2: y_i com $f(y_i) = 5$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_i) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(y_i) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(y_i) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.3: w_{i+1} com $f(w_{i+1}) = 4$. Neste caso, $\Upsilon^1(w_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(w_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(w_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(w_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(w_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.4: v_{i+1} com $f(v_{i+1}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 15$ e $f(y_{i+2}) = 5$. Portanto, $|f(v_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.5: x_{i+1} com $f(x_{i+1}) = 19$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $\Upsilon^2(x_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i+1}) = \{w_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 15$, $f(y_{i+2}) = 5$, $f(w_{i+2}) = 1$, $f(v_{i+3}) = 0$ e $f(u_{i+3}) = 17$. Portanto, $|f(x_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.6: r_{i+1} com $f(r_{i+1}) = 7$. Neste caso, $\Upsilon^1(r_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(r_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(r_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 15$ e $f(y_{i+2}) = 5$. Portanto, $|f(r_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(r_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.7: t_{i+1} com $f(t_{i+1}) = 14$. Neste caso, $\Upsilon^1(t_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(t_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(t_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$,

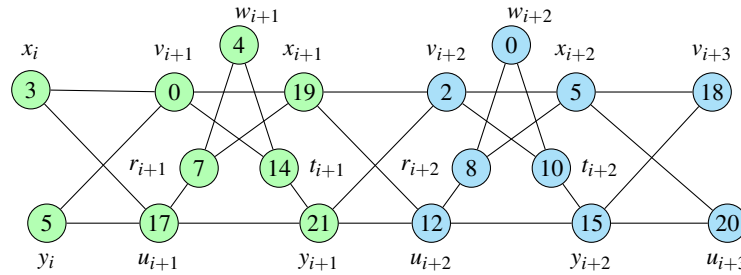
$f(t_{i+2}) = 15$ e $f(y_{i+2}) = 5$. Portanto, $|f(t_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(t_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.8: u_{i+1} com $f(u_{i+1}) = 17$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(u_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 15$ e $f(y_{i+2}) = 5$. Portanto, $|f(u_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.9: y_{i+1} com $f(y_{i+1}) = 21$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+1}) = \{u_{i+2}, v_{i+2}\}$, $\Upsilon^2(y_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i+1}) = \{w_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(x_{i+2}) = 3$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 15$, $f(y_{i+2}) = 5$, $f(w_{i+2}) = 1$, $f(v_{i+3}) = 0$ e $f(u_{i+3}) = 17$. Portanto, $|f(y_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3: G_i é um gadget duplo e G_j é um gadget triplo de G . O gadget G_i é formado por dois blocos consecutivos B_i e B_{i+1} já o gadget G_j é formado pelos três blocos consecutivos B_{i+2} , B_{i+3} e B_{i+4} . O bloco B_i possui dois vértices que estão à distância no máximo 3 de vértices do gadget G_j , que são os vértices x_i e y_i . Similarmente, todos os 7 vértices de B_{i+1} estão à distância no máximo 3 de vértices do gadget G_j . A Figura 40 mostra todos vértices que aparecem nessa análise dos casos. A seguir, tratamos cada um desses 9 casos.

Figura 40 – Vértices usados na análise dos casos. Os vértices em cor verde pertencem ao gadget G_i e os vértices em azul pertencem ao gadget G_j .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 3.1: x_i com $f(x_i) = 3$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_i) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(x_i) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(x_i) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.2: y_i com $f(y_i) = 5$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_i) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(y_i) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(y_i) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.3: w_{i+1} com $f(w_{i+1}) = 4$. Neste caso, $\Upsilon^1(w_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(w_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(w_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$ e $f(u_{i+2}) = 12$. Portanto, $|f(w_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(w_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.4: v_{i+1} com $f(v_{i+1}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e

$\Upsilon^3(v_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$ e $f(y_{i+2}) = 15$. Portanto, $|f(v_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.5: x_{i+1} com $f(x_{i+1}) = 19$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $\Upsilon^2(x_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i+1}) = \{w_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+2}) = 10$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$, $f(y_{i+2}) = 15$, $f(w_{i+2}) = 0$, $f(v_{i+3}) = 18$ e $f(u_{i+3}) = 20$. Portanto, $|f(x_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.6: r_{i+1} com $f(r_{i+1}) = 7$. Neste caso, $\Upsilon^1(r_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(r_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(r_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$ e $f(y_{i+2}) = 15$. Portanto, $|f(r_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(r_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

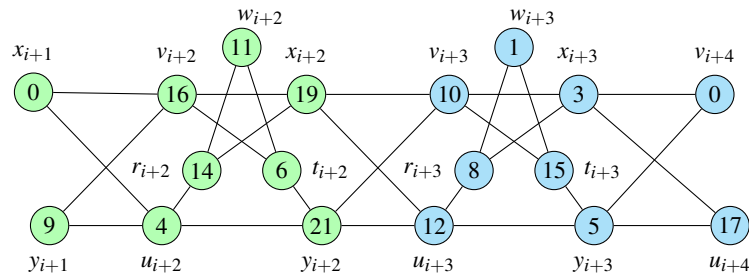
Caso 3.7: t_{i+1} com $f(t_{i+1}) = 14$. Neste caso, $\Upsilon^1(t_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(t_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(t_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$ e $f(y_{i+2}) = 15$. Portanto, $|f(t_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(t_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.8: u_{i+1} com $f(u_{i+1}) = 17$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(u_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$ e $f(y_{i+2}) = 15$. Portanto, $|f(u_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 3.9: y_{i+1} com $f(y_{i+1}) = 21$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+1}) = \{v_{i+2}, u_{i+2}\}$, $\Upsilon^2(y_{i+1}) = \{x_{i+2}, r_{i+2}, t_{i+2}, y_{i+2}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i+1}) = \{w_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+2}) = 2$, $f(u_{i+2}) = 12$, $f(x_{i+2}) = 5$, $f(r_{i+2}) = 8$, $f(t_{i+2}) = 10$, $f(y_{i+2}) = 15$, $f(w_{i+2}) = 0$, $f(v_{i+3}) = 18$ e $f(u_{i+3}) = 20$. Portanto, $|f(y_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4: G_i é um *gadget* triplo e G_j é um *gadget* duplo de G . O *gadget* G_i é formado por três blocos consecutivos B_i , B_{i+1} e B_{i+2} já o *gadget* G_j é formado pelos dois blocos consecutivos B_{i+3} e B_{i+4} . O bloco B_{i+1} possui dois vértices que estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j , que são os vértices x_{i+1} e y_{i+1} . Similarmente, todos os 7 vértices de B_{i+2} estão à distância no máximo 3 de vértices do *gadget* G_j . A Figura 41 mostra todos vértices que aparecem nessa análise dos casos. A seguir, tratamos cada um desses 9 casos.

Figura 41 – Vértices usados na análise dos casos. Os vértices em cor verde pertencem ao *gadget* G_i e os vértices em azul pertencem ao *gadget* G_j .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 4.1: x_{i+1} com $f(x_{i+1}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(x_{i+1}) = \{u_{i+3}, v_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(x_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.2: y_{i+1} com $f(y_{i+1}) = 9$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i+1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(y_{i+1}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(y_{i+1}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.3: w_{i+2} com $f(w_{i+2}) = 11$. Neste caso, $\Upsilon^1(w_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(w_{i+2}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(w_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$ e $f(u_{i+3}) = 12$. Portanto, $|f(w_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(w_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.4: v_{i+2} com $f(v_{i+2}) = 16$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 15$ e $f(y_{i+3}) = 5$. Portanto, $|f(v_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.5: x_{i+2} com $f(x_{i+2}) = 19$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$, $\Upsilon^2(x_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i+2}) = \{w_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 15$, $f(y_{i+3}) = 5$, $f(w_{i+3}) = 1$, $f(v_{i+4}) = 0$ e $f(u_{i+4}) = 17$. Portanto, $|f(x_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.6: r_{i+2} com $f(r_{i+2}) = 14$. Neste caso, $\Upsilon^1(r_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(r_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(r_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(t_{i+3}) = 15$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$ e $f(y_{i+3}) = 5$. Portanto, $|f(r_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(r_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.7: t_{i+2} com $f(t_{i+2}) = 6$. Neste caso, $\Upsilon^1(t_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(t_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(t_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(t_{i+3}) = 15$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$ e $f(y_{i+3}) = 5$. Portanto, $|f(t_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(t_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.8: u_{i+2} com $f(u_{i+2}) = 4$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i+2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i+2}) = \{v_{i+3}, u_{i+3}\}$

e $\Upsilon^3(u_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(t_{i+3}) = 15$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$ e $f(y_{i+3}) = 5$. Portanto, $|f(u_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 4.9: y_{i+2} com $f(y_{i+2}) = 21$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i+2}) = \{u_{i+3}, v_{i+3}\}$, $\Upsilon^2(y_{i+2}) = \{x_{i+3}, r_{i+3}, t_{i+3}, y_{i+3}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i+2}) = \{w_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}\}$, $f(u_{i+3}) = 12$, $f(v_{i+3}) = 10$, $f(x_{i+3}) = 3$, $f(r_{i+3}) = 8$, $f(t_{i+3}) = 15$, $f(y_{i+3}) = 5$, $f(w_{i+3}) = 1$, $f(v_{i+4}) = 0$ e $f(u_{i+4}) = 17$. Portanto, $|f(y_{i+2}) - f(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i+2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

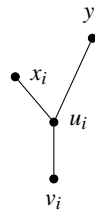
Portanto, provamos que os rótulos de quaisquer dois vértices à distância menor ou igual a 3 entre si não conflitam, e, uma vez que $G_L \subset G$, temos que $\lambda_{3,2,1}(G_L) \leq 21$. Assim, o resultado segue. □

6 SNARKS-FLOR

Em 1975, R. Isaacs (Isaacs 1975) descobriu o primeiro método de geração de famílias infinitas de snarks e, dentre as famílias construídas com esse método, ele descreveu a família dos *snarks-flor*. Essa família é formada pelos grafos $F_3, F_5, \dots, F_{2i+1}, i \geq 1$. Estes grafos podem ser construídos por meio da união disjunta de subgrafos denominados *blocos básicos* e da adição de arestas específicas denominadas *arestas de ligação*. A seguir, definimos os blocos básicos dos *snarks-flor* e determinamos como cada membro da família é obtido.

O *bloco básico* B_i é o grafo com conjunto de vértices $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i\}$ e com o conjunto de arestas $E(B_i) = \{u_i v_i, u_i y_i, u_i x_i\}$. A Figura 42 mostra um *bloco básico* B_i .

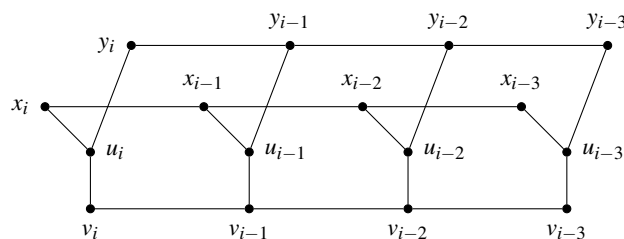
Figura 42 – Bloco básico B_i .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dois blocos básicos B_i e B_j são conectados por meio de *arestas de ligação* definidas pelo conjunto $E_{i,j} = \{v_i v_j, x_i x_j, y_i y_j\}$. Definimos também o *grafo de ligação* L_i como o grafo com conjunto de vértices $V(L_i) = V(B_i) \cup V(B_{i-1}) \cup V(B_{i-2}) \cup V(B_{i-3})$ e com conjunto de arestas $E(L_i) = E(B_i) \cup E(B_{i-1}) \cup E(B_{i-2}) \cup E(B_{i-3}) \cup E_{i,i-1} \cup E_{i-1,i-2} \cup E_{i-2,i-3}$. O grafo de ligação L_i é ilustrado na Figura 43.

Figura 43 – Grafo de ligação L_i .

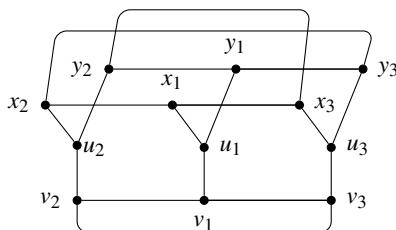


Fonte: Elaborado pelo autor.

O primeiro *snark-flor* é o grafo F_3 que tem o conjunto de vértices $V(F_3) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$ e o conjunto de arestas $E(F_3) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{2,1} \cup E_{1,3} \cup \{v_2 v_3, x_2 y_3\}$,

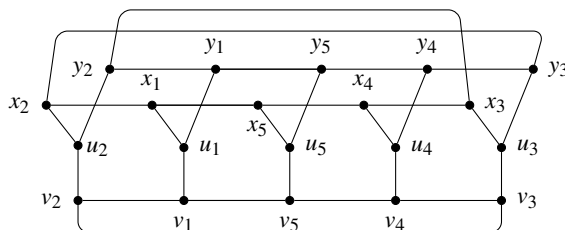
$y_2x_3\}$, como ilustrado na Figura 44. O segundo *snark-flores* é o grafo F_5 com o conjunto de vértices $V(F_5) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3) \cup V(B_4) \cup V(B_5)$ e o conjunto de arestas $E(F_5) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E(B_4) \cup E(B_5) \cup E_{2,1} \cup E_{1,5} \cup E_{5,4} \cup E_{4,3} \cup \{v_2v_3, x_2y_3, y_2x_3\}$. A Figura 45 ilustra o grafo F_5 .

Figura 44 – *Snark-flores* F_3 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – *Snark-flores* F_5 .



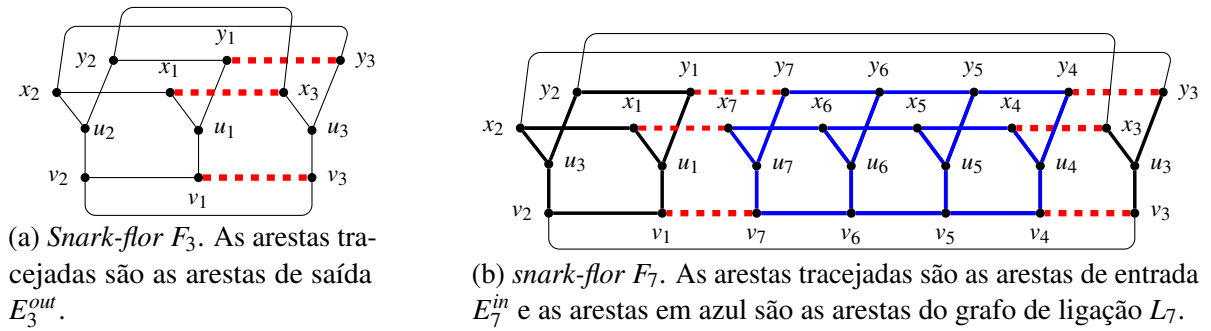
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para todo $i \geq 7$ ímpar, o *snark-flor* F_i é obtido recursivamente a partir do *snark-flor* F_{i-4} e do grafo de ligação L_i como definido a seguir:

- $V(F_i) = V(F_{i-4}) \cup V(L_i)$;
- $E(F_i) = (E(F_{i-4}) \setminus E_{i-4}^{out}) \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ tal que:
 - $E_{(i-4)}^{out} = E_{(i-4),1}$;
 - $E_i^{in} = E_{(i-4),(i-3)} \cup E_{i,1}$.

A Figura 46 ilustra a construção recursiva do *snark-flor* F_7 .

Figura 46 – Ilustração da construção do *snark-flor* F_7 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em 2021, Luiz e Florêncio (Florencio e Luiz 2021) investigaram o problema de determinar um limitante superior para o número cromático $L(3,2,1)$ dos *snarks-flor* e obtiveram o teorema a seguir.

Teorema 20. (Florencio e Luiz 2021) Para todo *snark-flor* F_i com $i \geq 5$ e ímpar, $\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq 12$. Além disso, $\lambda_{3,2,1}(F_3) \leq 14$.

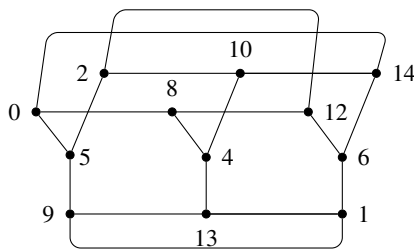
Decidimos, então, investigar essa classe a fim de obter um limitante superior menor do que o proposto no trabalho de Luiz e Florêncio. A seguir, apresentamos um limitante superior mais apertado para o número cromático $L(3,2,1)$ dos *snarks-flor*.

Teorema 21. Se F_i é um *snark-flor* com i ímpar, então

$$\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq \begin{cases} 14 & \text{se } i = 3; \\ 12 & \text{se } i = 5 \text{ ou } i = 7; \\ 11 & \text{se } i \geq 9. \end{cases}$$

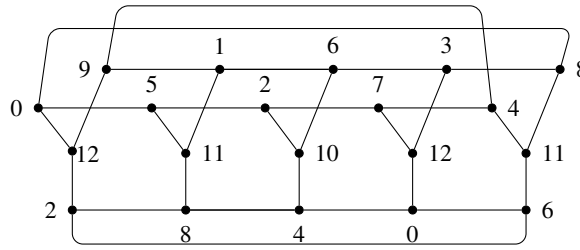
Demonstração. As rotulações- $L(3,2,1)$ dos *snark-flor* F_3, F_5, F_7, F_9 e F_{11} com os *spans* determinados no enunciado do teorema estão exibidas nas Figuras 47, 48, 49, 50 e 51, respectivamente.

Figura 47 – Rotulação- $L(3,2,1)$ do *snark-flor* F_3 com *span* 14.



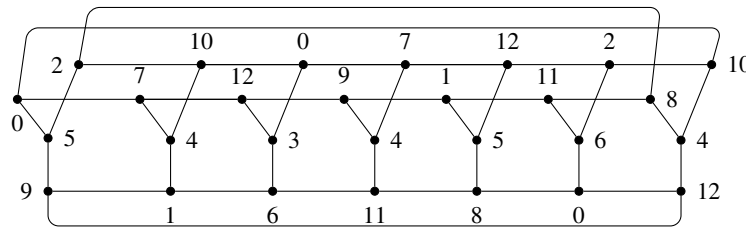
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_5 com *span* 12.



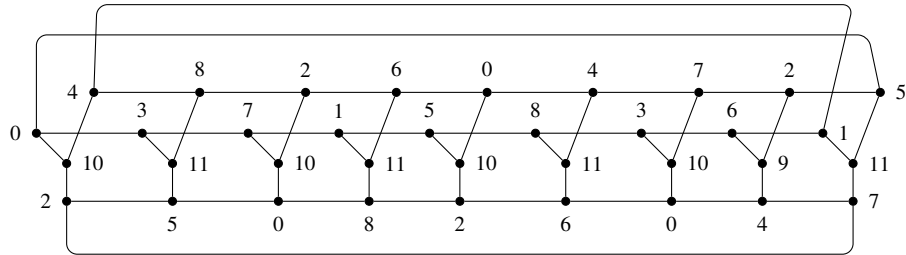
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_7 com *span* 12.



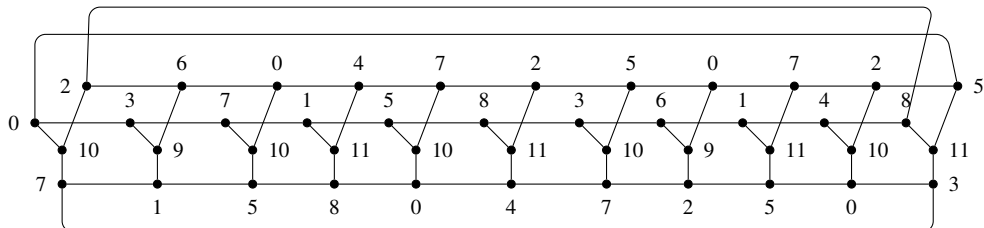
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_9 com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 51 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_{11} com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A construção de um rotulação-L(3,2,1) com *span* 11 para os *snarks-flor* F_i com i

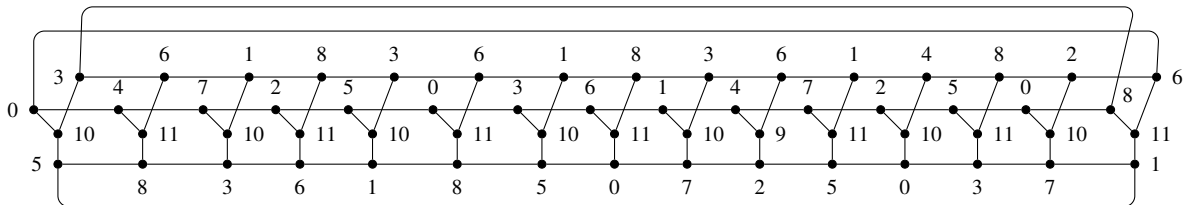
ímpar e $i \geq 13$ é feita por indução no número de blocos i e é dividida em dois casos, dependendo do valor de i módulo 4. A seguir descrevemos cada caso.

Caso 1: $i = 4k + 3$, com $k \geq 3$. Neste caso, construímos uma rotulação especial f_i para F_i que atribui os seguintes rótulos aos seguintes vértices específicos de F_i : $f_i(x_2) = 0, f_i(y_2) = 3, f_i(u_2) = 10, f_i(v_2) = 5, f_i(x_1) = 4, f_i(y_1) = 6, f_i(u_1) = 11, f_i(v_1) = 8, f_i(x_i) = 7, f_i(y_i) = 1, f_i(u_i) = 10, f_i(v_i) = 3, f_i(x_{i-1}) = 2, f_i(y_{i-1}) = 8, f_i(u_{i-1}) = 11, f_i(v_{i-1}) = 6, f_i(x_{i-2}) = 5, f_i(y_{i-2}) = 3, f_i(u_{i-2}) = 10, f_i(v_{i-2}) = 1, f_i(x_3) = 8, f_i(y_3) = 6, f_i(u_3) = 11, f_i(v_3) = 1$.

A prova é realizada por indução em i , o número de blocos de F_i . Como base da indução, a Figura 52 ilustra uma rotulação-L(3,2,1) f_{15} do F_{15} . Como hipótese de indução, suponha que existe uma rotulação-L(3,2,1) especial f_{i-4} para o grafo F_{i-4} . Considere também a rotulação-L(3,2,1) f_L do grafo de ligação L_i exibida na Figura 53. Definimos a rotulação f_i para o *snark-flor* F_i da seguinte maneira: para todo vértice $v \in V(F_i)$, defina

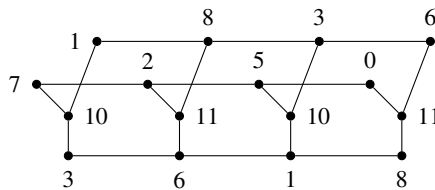
$$f_i(v) = \begin{cases} f_{i-4}(v) & \text{se } v \in V(F_{i-4}); \\ f_L(v) & \text{se } v \in V(L_i). \end{cases}$$

Figura 52 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_{15} com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53 – Grafo de ligação L_i com uma rotulação-L(3,2,1) f_L com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para concluir a prova, demonstramos que os rótulos dos vértices de L_i não conflitam com os rótulos dos vértices de F_{i-4} . Dado que f_L é uma rotulação-L(3,2,1), os rótulos dos

vértices de L_i não conflitam entre si. Portanto, para cada vértice de L_i analisamos sua vizinhança estendida para apenas vértices que não pertencem a L_i . Existem 16 vértices em L_i a serem analisados. Em cada caso abaixo, o símbolo $\Upsilon^p(v)$ denota o conjunto $N_p(v) \cap V(F_{i-4})$, onde $p \in \{1, 2, 3\}$ e $v \in L_i$. O conjunto $\Upsilon^p(v)$ contém os vértices de $V(F_{i-4})$ que estão a distância p de v .

Caso 1.1: x_i com $f_i(x_i) = 7$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_i) = \{x_1\}$, $\Upsilon^2(x_i) = \{u_1, x_2\}$ e $\Upsilon^3(x_i) = \{y_1, u_2, v_1, y_3\}$, $f_i(x_1) = 4$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(x_2) = 0$, $f_i(y_1) = 6$, $f_i(y_3) = 6$, $f_i(v_1) = 8$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(x_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.2: y_i com $f_i(y_i) = 1$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_i) = \{y_1\}$, $\Upsilon^2(y_i) = \{u_1, y_2\}$ e $\Upsilon^3(y_i) = \{x_1, u_2, v_1, x_3\}$, $f_i(y_1) = 6$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(y_2) = 3$, $f_i(x_3) = 8$, $f_i(x_1) = 4$, $f_i(v_1) = 8$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(y_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.3: u_i com $f_i(u_i) = 10$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_i) = \{x_1, v_1, y_1\}$ e $\Upsilon^3(u_i) = \{v_2, u_1, x_2, y_2\}$, $f_i(x_1) = 4$, $f_i(v_1) = 8$, $f_i(y_1) = 6$, $f_i(y_2) = 3$, $f_i(v_2) = 5$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(x_2) = 0$. Portanto, $|f_i(u_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.4: v_i com $f_i(v_i) = 3$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_i) = \{v_1\}$, $\Upsilon^2(v_i) = \{v_2, u_1\}$ e $\Upsilon^3(v_i) = \{v_3, u_2, x_1, y_1\}$, $f_i(v_1) = 8$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(v_2) = 5$, $f_i(v_3) = 1$, $f_i(x_1) = 4$, $f_i(y_1) = 4$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(v_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.5: x_{i-1} com $f_i(x_{i-1}) = 2$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i-1}) = \{x_1\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-1}) = \{u_1, x_2, x_{i-4}\}$, $f_i(x_1) = 10$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(x_{i-4}) = 7$ e $f_i(x_2) = 0$. Portanto, $|f_i(x_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.6: y_{i-1} com $f_i(y_{i-1}) = 8$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i-1}) = \{y_1\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-1}) = \{u_1, y_2, y_{i-4}\}$, $f_i(y_1) = 6$, $f_i(y_2) = 3$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(y_{i-4}) = 1$. Portanto, $|f_i(y_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.7: u_{i-1} com $f_i(u_{i-1}) = 11$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i-1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(u_{i-1}) = \{v_1, y_1, x_1\}$, $f_i(v_1) = 8$, $f_i(y_1) = 6$ e $f_i(x_1) = 4$. Portanto, $|f_i(u_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.8: v_{i-1} com $f_i(v_{i-1}) = 6$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i-1}) = \{v_1\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-1}) = \{u_1, v_2, v_{i-4}\}$, $f_i(v_1) = 5$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(v_2) = 8$. Portanto, $|f_i(v_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.9: x_{i-2} com $f_i(x_{i-2}) = 5$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i-2}) = \{x_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-2}) = \{x_1, u_{i-4}, x_{i-5}\}$, $f_i(x_1) = 4$, $f_i(u_{i-4}) = 10$, $f_i(x_{i-5}) = 2$ e $f_i(x_{i-4}) = 7$. Portanto, $|f_i(x_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.10: y_{i-2} com $f_i(y_{i-2}) = 3$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i-2}) = \{y_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-2}) = \{y_1, y_{i-5}, u_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(y_1) = 6$ e $f_i(u_{i-4}) = 10$. Portanto, $|f_i(y_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.11: u_{i-2} com $f_i(u_{i-2}) = 10$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i-2}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(u_{i-2}) = \{v_{i-4}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(x_{i-4}) = 7$ e $f_i(v_{i-4}) = 3$. Portanto, $|f_i(u_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.12: v_{i-2} com $f_i(v_{i-2}) = 1$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i-2}) = \{v_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-2}) = \{v_1, u_{i-4}, v_{i-5}\}$, $f_i(v_1) = 8$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(u_{i-4}) = 10$ e $f_i(v_{i-5}) = 6$. Portanto, $|f_i(v_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.13: x_{i-3} com $f_i(x_{i-3}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-3}) = \{x_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(x_{i-3}) = \{u_{i-4}, x_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-3}) = \{v_{i-4}, x_{i-6}, u_{i-5}, y_{i-4}\}$, $f_i(x_{i-4}) = 7$, $f_i(u_{i-4}) = 10$, $f_i(x_{i-5}) = 2$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(x_{i-6}) = 5$, e $f_i(u_{i-5}) = 11$. Portanto, $|f_i(x_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.14: y_{i-3} com $f_i(y_{i-3}) = 6$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-3}) = \{y_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(y_{i-3}) = \{u_{i-4}, y_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-3}) = \{v_{i-4}, u_{i-5}, y_{i-6}, x_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(u_{i-4}) = 10$, $f_i(y_{i-5}) = 8$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(u_{i-5}) = 11$, $f_i(y_{i-6}) = 3$ e $f_i(x_{i-4}) = 7$. Portanto, $|f_i(y_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.15: u_{i-3} com $f_i(u_{i-3}) = 11$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-3}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i-3}) = \{v_{i-4}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-3}) = \{v_{i-5}, u_{i-4}, y_{i-5}, x_{i-5}\}$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(x_{i-4}) = 7$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(v_{i-5}) = 6$, $f_i(u_{i-4}) = 10$, $f_i(y_{i-5}) = 8$ e $f_i(x_{i-5}) = 2$. Portanto, $|f_i(y_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.16: v_{i-3} com $f_i(v_{i-3}) = 8$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-3}) = \{v_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(v_{i-3}) = \{u_{i-4}, v_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-3}) = \{x_{i-4}, y_{i-4}, u_{i-5}, v_{i-6}\}$, $f_i(v_{i-4}) = 3$, $f_i(u_{i-4}) = 10$, $f_i(v_{i-5}) = 6$, $f_i(x_{i-4}) = 7$, $f_i(y_{i-4}) = 1$, $f_i(u_{i-5}) = 11$ e $f_i(v_{i-6}) = 1$. Portanto, $|f_i(v_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Pela análise dos rótulos nos vértices de L_i , conclui-se que não há conflito com os rótulos de F_{i-4} . Portanto, f_i é uma rotulação-L(3,2,1). Além disso, note que f_i é especial, dado que os vértices dos blocos B_1 , B_2 e B_3 possuem os mesmos rótulos que tinham na rotulação especial de F_{i-4} e, ademais, os vértices dos blocos B_i , B_{i-1} e B_{i-2} possuem rótulos que vieram da rotulação do grafo de ligação L_i , que por sua vez obedecem aos requisitos da rotulação especial.

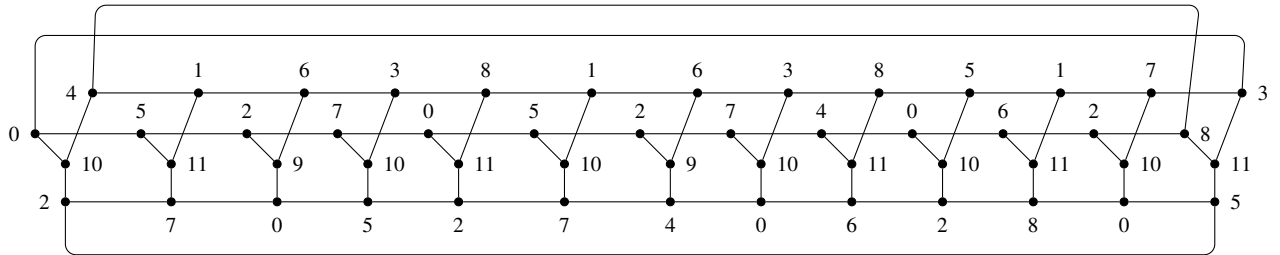
Caso 2: $i = 4k + 1$, onde $k \geq 3$. Neste caso, construímos uma rotulação especial f_i para F_i que atribui os seguintes rótulos aos seguintes vértices específicos de F_i : $f_i(x_2) = 0$,

$f_i(y_2) = 4, f_i(u_2) = 10, f_i(v_2) = 2, f_i(x_1) = 5, f_i(y_1) = 1, f_i(u_1) = 11, f_i(v_1) = 7, f_i(x_i) = 2, f_i(y_i) = 6, f_i(u_i) = 9, f_i(v_i) = 0, f_i(x_{i-1}) = 7, f_i(y_{i-1}) = 3, f_i(u_{i-1}) = 10, f_i(v_{i-1}) = 5, f_i(x_{i-2}) = 0, f_i(y_{i-2}) = 8, f_i(u_{i-2}) = 11, f_i(v_{i-2}) = 2, f_i(x_3) = 8, f_i(y_3) = 3, f_i(u_3) = 11, f_i(v_3) = 5.$

A prova é realizada por indução em i , o número de blocos de F_i . Como base da indução, a Figura 54 ilustra uma rotulação-L(3,2,1) especial f_{13} do *snark-flor* F_{13} . Como hipótese de indução, suponha que existe uma rotulação-L(3,2,1) f_{i-4} para o grafo F_{i-4} . Considere também a rotulação-L(3,2,1) f_L do grafo de ligação L_i exibida na Figura 55. Definimos a rotulação f_i para o *snark-flor* F_i da seguinte maneira: para todo vértice $v \in V(F_i)$, defina

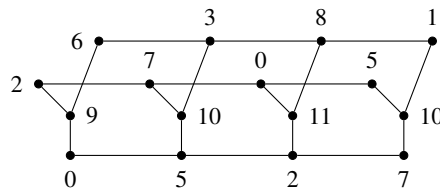
$$f_i(v) = \begin{cases} f_{i-4}(v) & \text{se } v \in V(F_{i-4}); \\ f_L(v) & \text{se } v \in V(L_i). \end{cases}$$

Figura 54 – Rotulação-L(3,2,1) do *snark-flor* F_{13} com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 55 – Grafo de ligação L_i com uma rotulação-L(3,2,1) f_L com *span* 11.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para concluir a prova, demonstramos que os rótulos dos vértices de L_i não conflitam com os rótulos dos vértices de F_{i-4} . Dado que f_L é uma rotulação-L(3,2,1), os rótulos não conflitam. Portanto, para cada vértice de L_i , analisamos sua vizinhança estendida para apenas vértices que não pertencem a L_i . Existe 16 vértices em L_i a serem analisados. Em cada caso

abaixo, o símbolo $\Upsilon^p(v)$ denota o conjunto $N_p(v) \cap V(F_{i-4})$, onde $p \in \{1, 2, 3\}$ e $v \in L_i$. O conjunto $\Upsilon^p(v)$ contém os vértices de $V(F_{i-4})$ que estão a distância p de v .

Caso 2.1: x_i com $f_i(x_i) = 2$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_i) = \{x_1\}$, $\Upsilon^2(x_i) = \{u_1, x_2\}$ e $\Upsilon^3(x_i) = \{y_1, u_2, v_1, y_3\}$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(x_2) = 0$, $f_i(y_1) = 1$, $f_i(y_3) = 3$, $f_i(v_1) = 7$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(x_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.2: y_i com $f_i(y_i) = 6$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_i) = \{y_1\}$, $\Upsilon^2(y_i) = \{u_1, y_2\}$ e $\Upsilon^3(y_i) = \{x_1, u_2, v_1, x_3\}$, $f_i(y_1) = 1$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(y_2) = 4$, $f_i(x_3) = 8$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(v_1) = 7$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(y_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.3: u_i com $f_i(u_i) = 9$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_i) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_i) = \{x_1, v_1, y_1\}$ e $\Upsilon^3(u_i) = \{v_2, u_1, x_2, y_2\}$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(v_1) = 7$, $f_i(y_1) = 1$, $f_i(y_2) = 4$, $f_i(v_2) = 2$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(x_2) = 0$. Portanto, $|f_i(u_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.4: v_i com $f_i(v_i) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_i) = \{v_1\}$, $\Upsilon^2(v_i) = \{v_2, u_1\}$ e $\Upsilon^3(v_i) = \{v_3, u_2, x_1, y_1\}$, $f_i(v_1) = 7$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(v_2) = 2$, $f_i(v_3) = 5$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(y_1) = 1$ e $f_i(u_2) = 10$. Portanto, $|f_i(v_i) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_i)$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.5: x_{i-1} com $f_i(x_{i-1}) = 7$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i-1}) = \{x_1\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-1}) = \{u_1, x_2, x_{i-4}\}$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(u_1) = 11$, $f_i(x_{i-4}) = 2$ e $f_i(x_2) = 0$. Portanto, $|f_i(x_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.6: y_{i-1} com $f_i(y_{i-1}) = 3$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i-1}) = \{y_1\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-1}) = \{u_1, y_2, y_{i-4}\}$, $f_i(y_1) = 1$, $f_i(y_2) = 4$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(y_{i-4}) = 6$. Portanto, $|f_i(y_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.7: u_{i-1} com $f_i(u_{i-1}) = 10$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i-1}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(u_{i-1}) = \{v_1, y_1, x_1\}$, $f_i(v_1) = 7$, $f_i(y_1) = 1$ e $f_i(x_1) = 5$. Portanto, $|f_i(u_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.8: v_{i-1} com $f_i(v_{i-1}) = 5$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-1}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i-1}) = \{v_1\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-1}) = \{u_1, v_2, v_{i-4}\}$, $f_i(v_1) = 7$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(u_1) = 11$ e $f_i(v_2) = 2$. Portanto, $|f_i(v_{i-1}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-1})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.9: x_{i-2} com $f_i(x_{i-2}) = 0$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(x_{i-2}) = \{x_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-2}) = \{x_1, u_{i-4}, x_{i-5}\}$, $f_i(x_1) = 5$, $f_i(u_{i-4}) = 9$, $f_i(x_{i-5}) = 7$ e $f_i(x_{i-4}) = 2$. Portanto, $|f_i(x_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.10: y_{i-2} com $f_i(y_{i-2}) = 8$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(y_{i-2}) = \{y_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-2}) = \{y_1, y_{i-5}, u_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(y_1) = 1$, $f_i(u_{i-5}) = 3$ e $f_i(u_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_i(y_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.11: u_{i-2} com $f_i(u_{i-2}) = 11$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i-2}) = \emptyset$ e $\Upsilon^3(u_{i-2}) = \{v_{i-4}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(x_{i-4}) = 2$ e $f_i(v_{i-4}) = 0$. Portanto, $|f_i(u_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.12:: v_{i-2} com $f_i(v_{i-2}) = 2$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-2}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(v_{i-2}) = \{v_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-2}) = \{v_1, u_{i-4}, v_{i-5}\}$, $f_i(v_1) = 7$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(u_{i-4}) = 9$ e $f_i(v_{i-5}) = 5$. Portanto, $|f_i(v_{i-2}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-2})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.13: x_{i-3} com $f_i(x_{i-3}) = 5$. Neste caso, $\Upsilon^1(x_{i-3}) = \{x_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(x_{i-3}) = \{u_{i-4}, x_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(x_{i-3}) = \{v_{i-4}, x_{i-6}, u_{i-5}, y_{i-4}\}$, $f_i(x_{i-4}) = 2$, $f_i(u_{i-4}) = 9$, $f_i(x_{i-5}) = 7$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(x_{i-6}) = 0$, e $f_i(u_{i-5}) = 10$. Portanto, $|f_i(x_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(x_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.14: y_{i-3} com $f_i(y_{i-3}) = 1$. Neste caso, $\Upsilon^1(y_{i-3}) = \{y_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(y_{i-3}) = \{u_{i-4}, y_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(y_{i-3}) = \{v_{i-4}, u_{i-5}, y_{i-6}, x_{i-4}\}$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(u_{i-4}) = 9$, $f_i(y_{i-5}) = 3$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(u_{i-5}) = 10$, $f_i(y_{i-6}) = 8$ e $f_i(x_{i-4}) = 2$. Portanto, $|f_i(y_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(y_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.15: u_{i-3} com $f_i(u_{i-3}) = 10$. Neste caso, $\Upsilon^1(u_{i-3}) = \emptyset$, $\Upsilon^2(u_{i-3}) = \{v_{i-4}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$ e $\Upsilon^3(u_{i-3}) = \{v_{i-5}, u_{i-4}, y_{i-5}, x_{i-5}\}$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(x_{i-4}) = 2$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(v_{i-5}) = 5$, $f_i(u_{i-4}) = 9$, $f_i(y_{i-5}) = 3$ e $f_i(x_{i-5}) = 7$. Portanto, $|f_i(u_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(u_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.16: v_{i-3} com $f_i(v_{i-3}) = 7$. Neste caso, $\Upsilon^1(v_{i-3}) = \{v_{i-4}\}$, $\Upsilon^2(v_{i-3}) = \{u_{i-4}, v_{i-5}\}$ e $\Upsilon^3(v_{i-3}) = \{x_{i-4}, y_{i-4}, u_{i-5}, v_{i-6}\}$, $f_i(v_{i-4}) = 0$, $f_i(u_{i-4}) = 9$, $f_i(v_{i-5}) = 5$, $f_i(x_{i-4}) = 2$, $f_i(y_{i-4}) = 6$, $f_i(u_{i-5}) = 10$ e $f_i(v_{i-6}) = 2$. Portanto, $|f_i(v_{i-3}) - f_i(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \Upsilon^t(v_{i-3})$, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Pela análise dos rótulos nos vértices de L_i , conclui-se que não há conflito com os rótulos de F_{i-4} . Portanto, f_i é uma rotulação-L(3,2,1). Além disso, note que f_i é especial, dado que os vértices dos blocos B_1 , B_2 e B_3 possuem os mesmos rótulos que tinham na rotulação especial de F_{i-4} e, ademais, os vértices dos blocos B_i , B_{i-1} e B_{i-2} possuem rótulos que vieram da rotulação do grafo de ligação L_i , que por sua vez obedecem aos requisitos da rotulação especial. Assim, concluímos que existe uma rotulação-L(3,2,1) com $span$ 11 para todo $snark-flor$ F_i com i ímpar e $i \geq 9$. \square

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho de conclusão de curso, contribuímos com a área de teoria dos grafos, através da investigação da Rotulação-L(3,2,1) para quatro classes de grafos com grau máximo 3, a saber: os grafos subcúbicos sem vértices adjacentes de grau máximo, os *snarks* de Blanuša generalizados, os *snarks* de Loupekine LP_0 e os *snarks-flor*. As classes de grafos subcúbicos e *snark-flor* já haviam sido investigadas na literatura, e os resultados apresentados neste trabalho melhoram os limitantes superiores para estas duas classes, além de apresentar os primeiros limitantes superiores para as classes de *snarks* de Loupekine LP_0 e *snarks* de Blanuša generalizados.

A Tabela 1 sintetiza os limitantes superiores para o número cromático L(3,2,1) que foram obtidos neste trabalho para as quatro famílias de grafos estudadas. Além disso, a tabela destaca os novos resultados obtidos neste estudo, juntamente aos melhores resultados alcançados anteriormente.

Tabela 1 – Limitantes superiores para o parâmetro $\lambda_{3,2,1}(G)$ para as classes de grafo estudadas neste trabalho.

Famílias de grafos	$\lambda_{3,2,1}(G)$	$\lambda_{3,2,1}(G)$ (Nossa contribuição)
Grafos subcúbicos sem vértices adjacentes de grau máximo.	$\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$ (Florencio e Luiz 2021)	$\lambda_{3,2,1}(G) \leq 12$.
<i>Snarks</i> Blanuša B_i^1		$\lambda_{3,2,1}(B_1^1) \leq 15$ e $\lambda_{3,2,1}(B_i^1) \leq 14$ para $i \geq 2$.
<i>Snarks</i> Blanuša B_i^2		$\lambda_{3,2,1}(B_1^2) \leq 15$ e $\lambda_{3,2,1}(B_i^2) \leq 14$ para $i \geq 2$.
<i>Snarks</i> de Loupekine LP_0		$\lambda_{3,2,1}(LP_0) \leq 21$
<i>Snarks-flor</i> F_i	$\lambda_{3,2,1}(F_3) \leq 14$; F_i com $i \geq 5$ ímpar, $\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq 12$ (Florencio e Luiz 2021)	F_i com i ímpar $\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq 14$ se $i = 3$; $\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq 12$ se $i = 5$ ou $i = 7$; $\lambda_{3,2,1}(F_i) \leq 11$ se $i \geq 9$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Durante a pesquisa, implementamos um algoritmo de *backtracking* recursivo que nos auxiliou na tarefa de determinar limitantes superiores para as famílias de grafos investigadas. O foco deste trabalho foi a investigação de limitantes superiores para o parâmetro $\lambda_{3,2,1}$. Porém, observamos a necessidade da obtenção de melhores limitantes inferiores para esse parâmetro nas classes de grafos investigadas, o que não pôde ser conduzido de forma suficiente devido à restrição de tempo. Com base nessa observação, sugerimos que futuros pesquisadores nesta área

estabeleçam limites inferiores para as classes estudadas neste trabalho. Outro ponto notável deste trabalho é a análise do parâmetro $\lambda_{3,2,1}$ as duas famílias de *snarks* de Blanuša generalizados, as famílias \mathcal{B}^1 e \mathcal{B}^2 . Observamos que os limitantes superiores obtidos para ambas as famílias foram idênticos. Portanto, de acordo com a observação anterior, propomos a seguinte conjectura para estudos futuros:

Conjectura 22. *Seja B_i^1 um grafo da família \mathcal{B}^1 e B_i^2 um grafo da família \mathcal{B}^2 dos snarks de Blanuša, então, $\lambda_{3,2,1}(B_i^1) = \lambda_{3,2,1}(B_i^2)$.*

REFERÊNCIAS

- APPEL, K.; HAKEN, W. The four-color problem. In: _____. **Mathematics Today Twelve Informal Essays**. New York, NY: Springer New York, 1978. p. 153–180.
- BEHZAD, M. **Graphs and their chromatic numbers**. [S. l.]: Michigan State University, 1965.
- BLANUSA, D. Problem cetiriju boja (croatian), hrvatsko priordoslorno drustvo glasnik mat-fiz. **Astr Ser II**, v. 1, p. 31–42, 1946.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 37, n. 2, p. 194–197, 1941.
- CALAMONERI, T. The $L(h, k)$ -Labelling Problem: An Updated Survey and Annotated Bibliography. **The Computer Journal**, v. 54, n. 8, p. 1344–1371, 05 2011. ISSN 0010-4620.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic Graph Theory**. 1. ed. [S. l.]: Chapman and Hall/CRC, 2008.
- CHIA, M.-L.; KUO, D.; LIAO, H. ya; YANG, C.-H.; YEH, R. K. $L(3, 2, 1)$ -labeling of graphs. **Taiwanese Journal of Mathematics**, Mathematical Society of the Republic of China, v. 15, n. 6, p. 2439 – 2457, 2011.
- CLIPPERTON, J.; GEHRTZ, J.; SZANISZLO, Z.; TORKORNOO, D. $L(3, 2, 1)$ -labeling of simple graphs. verum, valparaiso university (2005). **unpublished manuscript**, 2005.
- FEDERAL COMMUNICATIONS COMMISSION. **Minimum distance separation between stations**. 2023. Code of Federal Regulations. Title 47, sec. 73.207, Disponível em: <https://www.law.cornell.edu/cfr/text/47/73.207>. Acessado: em 15 de nov. 2023.
- FLORENCIO, D. G.; LUIZ, A. G. Limites superiores para a rotulação- $L(3,2,1)$ de grafos com grau máximo três. In: **Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. João Pessoa: Galoá, 2021.
- GALLIAN, J. **Electronic Journal of Combinatorics**, Electronic Journal of Combinatorics, v. 1, n. DynamicSurveys, 2022. ISSN 1077-8926.
- GAREY, M.; JOHNSON, D. **Computers and Intractability: A guide to the theory of NPcompleteness**. [S. l.]: Freeman, 1979. (Mathematical Sciences Series). ISBN 9780716710448.
- GRIGGS, J. R.; YEH, R. K. Labelling graphs with a condition at distance 2. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 5, n. 4, p. 586–595, 1992.
- HÄGGLUND, J. On snarks that are far from being 3-edge colorable. **The Electronic Journal of Combinatorics**, p. P2–6, 2016.
- HALE, W. K. Frequency assignment: Theory and applications. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 68, n. 12, p. 1497–1514, 1980.
- HEGGERNES, P.; TELLE, J. A. Partitioning graphs into generalized dominating sets. **Nord. J. Comput.**, v. 5, n. 2, p. 128–142, 1998.
- HEUVEL, J. van den; LEESE, R. A.; SHEPHERD, M. A. Graph labeling and radio channel assignment. **J. Graph Theory**, v. 29, p. 263–283, 1998.

- ISAACS, R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 82, n. 3, p. 221–239, 1975.
- ISAACS, R. Loupekhine's snarks: a bifamily of non-tait-colorable graphs. **J. Combin. Theory B**, 1976.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: _____. **Complexity of Computer Computations**. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103. ISBN 978-1-4684-2001-2.
- LIU, J.-Z.; SHAO, Z.-d. The $L(3, 2, 1)$ -labeling problem on graphs. **Math. Appl**, v. 17, n. 4, p. 596–602, 2004.
- PETERSEN, J. Sur le théoreme de tait. **L'intermédiaire des Mathématiciens**, v. 5, p. 225–227, 1898.
- PICOULEAU, C. Complexity of the hamiltonian cycle in regular graph problem. **Theoretical computer science**, Elsevier, v. 131, n. 2, p. 463–473, 1994.
- ROBERTSON, N.; SANDERS, D.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R. The four-colour theorem. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 70, n. 1, p. 2–44, 1997. ISSN 0095-8956.
- ROSA, A. On certain valuations of the vertices of a graph. **Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)**, Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris, p. 349–355, 1967.
- VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.
- WATKINS, J. J. On the construction of snarks. **Ars Combin**, v. 16, p. 111–124, 1983.