



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

**TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVIDADE: VIOLAÇÃO DE LORENTZ E
GRAVIDADE CÚBICA**

**FORTALEZA
2024**

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVIDADE: VIOLAÇÃO DE LORENTZ E
GRAVIDADE CÚBICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L631t Lessa, Leandro Alcântara.

Teorias modificadas da gravidade : violação de Lorentz e gravidade cúbica / Leandro Alcântara Lessa. – 2024.

161 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

1. Gravitação. 2. Teorias de gravidade modificadas. 3. Violação de Lorentz. 4. Gravidade cúbica. I. Título.

CDD 530

LEANDRO ALCÂNTARA LESSA

TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVIDADE: VIOLAÇÃO DE LORENTZ E
GRAVIDADE CÚBICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 28/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gonzalo Olmo Alba
Universidad de Valencia - CSIC

Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Para minha mãe, com amor.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que tornaram possível a realização desta jornada acadêmica. Primeiramente, agradeço à minha amada mãe e aos demais membros da minha família por seu apoio incondicional, paciência e constante incentivo ao longo deste percurso.

Um agradecimento especial é dedicado ao meu Amor, cujo apoio e compreensão foram fundamentais durante os desafios enfrentados durante a realização deste doutorado. Sua presença e incentivo tornaram esta jornada mais significativa e gratificante.

Às amigades pessoais e aos colegas do laboratório LASSCO, expressei minha profunda gratidão. A colaboração e o companheirismo de vocês foram essenciais para o desenvolvimento do meu trabalho de pesquisa. Compartilhar ideias e experiências com essa equipe incrível enriqueceu minha trajetória acadêmica.

Não posso deixar de agradecer calorosamente aos meus amigos e colaboradores de pesquisa, cujas contribuições foram valiosas para o progresso dos estudos realizados. Cada um de vocês desempenhou um papel importante na construção do conhecimento e no êxito alcançado.

Por último, mas não menos importante, estendo meu agradecimento mais do que especial ao meu orientador de doutorado, José Euclides. Sua orientação competente, sabedoria e dedicação foram fundamentais para minha formação acadêmica. Agradeço por sua paciência, ensinamentos e por compartilhar seu conhecimento de maneira tão inspiradora.

Este trabalho é fruto do esforço coletivo e do apoio de tantas pessoas especiais. A todos vocês, meu profundo agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Nesta tese, exploramos de maneira abrangente modelos e teorias que buscam estender a melhor teoria conhecida para a gravitação: a Relatividade Geral. Na primeira parte, iniciamos com uma revisão abrangente, explicando as motivações teóricas e experimentais que levaram à aceitação da Relatividade Geral de Einstein como a teoria mais adequada para descrever a interação gravitacional. Demonstramos seus sucessos experimentais, mas também apontamos suas limitações. É precisamente nessa incompletude que os modelos de gravidade modificada ganham destaque na literatura atual. Apresentamos os principais modelos de gravidade modificada, destacando suas vantagens e desvantagens. Na segunda parte, exploramos uma forma específica de extensão da Relatividade Geral: a adição de novos campos. Nesse contexto, adotamos o cenário de violação da simetria de Lorentz, introduzindo uma nova perspectiva para a gravitação. Adicionamos ao setor gravitacional puro, descrito pela ação de Einstein-Hilbert, um novo campo vetorial. Devido à sua dinâmica geradora de direções preferenciais no espaço-tempo, esse campo quebra espontaneamente a simetria local mais importante da Relatividade Geral: a simetria de Lorentz. Como aplicação desse novo panorama, exploramos em diferentes geometrias os efeitos das excitações do campo vetorial de auto-interação conhecido como Bumblebee. Na terceira parte, modificamos a teoria de Einstein adicionando novos invariantes à ação gravitacional usual, ou seja, ao escalar de Ricci. Detalhamos os principais modelos na literatura que introduzem esses novos invariantes, destacando seus sucessos e limitações. No final, apresentamos nossos principais resultados por meio de duas aplicações, baseadas na teoria de gravidade cúbica. Essa teoria de alta curvatura é construída por meio de invariantes formados com três tensores de curvatura. Abordamos diferentes gravidades cúbicas, como a chamada Gravidade Cúbica Einsteiniana, que serviu como base para nossa primeira aplicação com soluções de buracos negros, onde a fonte é dada por uma eletrodinâmica não linear. Para concluir a tese, desenvolvemos uma teoria de alta curvatura com interação cúbica no contexto de mundos-brana.

Palavras-chave: gravitação; teorias de gravidade modificadas; violação de Lorentz; gravidade cúbica.

ABSTRACT

In this thesis, we comprehensively explore models and theories aimed at extending the best-known theory for gravity: General Relativity. In the first part of this thesis, we begin with a comprehensive review, explaining the theoretical and experimental motivations that led to the acceptance of Einstein's General Relativity as the most suitable theory to describe gravitational interaction. We showcase its experimental successes but also highlight its limitations. It is precisely in this incompleteness that modified gravity models have been gaining prominence in the current literature. We present the main models of modified gravity, as well as their advantages and disadvantages. In the second part, we explore a specific way to extend General Relativity: the addition of new fields. In this case, we adopt the Lorentz symmetry violation scenario. In this context, we introduce a new perspective on gravitation by adding to the pure gravitational sector described by the Einstein-Hilbert action a new vector field. Due to its dynamics generating preferential directions in spacetime, this field spontaneously breaks the most important local symmetry of General Relativity: Lorentz symmetry. As an application of this new framework, we explore, in different geometries, the effects of excitations of the vector field of self-interaction known as the Bumblebee. In the third part, we modify Einstein's theory by adding new invariants to the usual gravitational action, i.e., to the Ricci scalar. In this case, we detail the main models in the literature that introduce these new invariants, highlighting their successes and limitations. In the end, we present our main results through two applications, based on cubic gravity theory. This high-curvature theory is constructed through invariants formed with three curvature tensors. Different cubic gravities were addressed, such as the so-called Einsteinian Cubic Gravity, which served as the basis for our first application with black hole solutions, where the source is given by nonlinear electrodynamics. To conclude the thesis, we construct a high-curvature theory with up to cubic interaction in the context of braneworlds.

Keywords: gravitation; modified gravity theories; Lorentz violation; cubic gravity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema com as possibilidades de estender a Relatividade Geral.	20
Figura 2 – Modelo Randall-Sundrum I. Duas branas planas e paralelas mergulhadas em um AdS_5 com uma fator de dobra exponencial	28
Figura 3 – Esquema com os espaços-tempo métricos conectadamente afim equipados com uma métrica.	35
Figura 4 – O campo de fundo b_μ definido globalmente em um espaço-tempo de Minkowski M_4	50
Figura 5 – O campo de fundo b_μ , em geral, não pode ser definido globalmente em um espaço-tempo de curvo.	51
Figura 6 – Constante de acoplamento em função da dimensão extra no modelo RS-I . . .	54
Figura 7 – Gráfico de f em função de r , assumindo que $\tilde{Q}^2 = 2$ e $\kappa^2 = 1$. A linha tracejada verde representa a solução de Schwarzschild. Assumimos que $r_S = 1$. . .	63
Figura 8 – Gráfico de K em função de r , assumindo que $\tilde{Q}^2 = 2$ e $\kappa^2 = r_S = 1$	64
Figura 9 – Gráfico de T em função de \tilde{r}_h , assumindo que $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	67
Figura 10 – Gráfico de $l_{PL}^2 C_{\tilde{Q}kk}$ em função de T , assumindo que $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	69
Figura 11 – Diagrama P-V do buraco negro de Einstein-Maxwell-Bumblebee-Dilaton para $\tilde{Q} = 1$. Definimos $G_N = \phi_0 = l^2 = 1$	84
Figura 12 – Calor específico à pressão constante em relação ao raio do horizonte para vários valores de z e $G_N \tilde{Q} = 1$. Definimos $\phi_0 = l^2 = 1$	85
Figura 13 – Energia livre de Gibbs do buraco negro de Einstein-Maxwell-Bumblebee-Dilaton para $G_N \tilde{Q} = 1$. As linhas laranjas correspondem a pressões críticas onde $G_N P_c^{z=1} \approx -0.118$ e $G_N P_c^{z=3/2} \approx -0.139$. Nós fixamos $\phi_0 = l^2 = 1$. . .	86
Figura 14 – Esquema com as possibilidades para teorias gravitacionais com interações cúbicas	99
Figura 15 – A função métrica $f(x)$ com \tilde{q} unitária e pequena para vários valores de λ , onde $x = r/2GM$	107
Figura 16 – Para $\lambda > 0$, plotamos $2GM\tilde{M}$ como uma função de \tilde{r}_h para diferentes classes de Eletrodinâmica Não Linear para pequena carga magnética $\pm q$ comparada ao horizonte, onde $\tilde{M} = \frac{M}{(G^2\lambda)^{\frac{1}{4}}}$ e $\tilde{r} = \frac{r}{(G^2\lambda)^{\frac{1}{4}}}$	114

Figura 17 –Traçamos a carga magnética normalizada em função do horizonte para pequenos e grandes λ , assumindo que $q \ll 2MG$	115
Figura 18 –A temperatura normalizada $\tilde{T} = T(2MG)$ em função do raio do horizonte normalizado \tilde{r}_h com \tilde{q} pequeno e grande para vários λ assumindo o Casos Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$), Hayward ($a = b = 3$) e Nova Classe ($a = 3$ e $b = 1$).	117
Figura 19 –A temperatura normalizada $\tilde{T} = T(2MG)$ em função do raio do horizonte normalizado \tilde{r}_h com \tilde{q} pequeno e grande para vários λ assumindo o Casos Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$), Hayward ($a = b = 3$) e Nova Classe ($a = 3$ e $b = 1$).	119
Figura 20 –Perfil do potencial (3.126) para diferentes valores de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. Assumimos que $\kappa_5 = 1$ e $b = c = 1$	127
Figura 21 –A solução da brana para o superpotencial $W = \xi \phi$. Assumimos que $\kappa_5 = 1$ e $\xi = 1$	128
Figura 22 –Modos massivos para massas KK leves e pesadas gerados por uma brana espessa com superpotencial dado por (3.125). Supomos que $b = c = 1$	134
Figura 23 –Modos de massa para massas KK leves e pesadas geradas por uma brana espessa com $A = \ln[\text{sech}(y)]$	135
Figura 24 –Modo massivo gravitacional de KK para uma interação cúbica fraca. Supomos que $\kappa_5 = 1$	136

LISTA DE SIGLAS

RG	Relatividade Geral
PE	Princípio da Equivalência
PEF	Princípio da Equivalência Fraco
PEE	Princípio da Equivalência de Einstein
KK	Kaluza-Klein
RS	Randall-Sundrum
TQC	Teoria Quântica de Campo
TGC	Transformações Gerais de Coordenadas
MPE	Modelo Padrão Estendido
MQ	Mecânica Quântica
GQ	Gravidade Quântica
VEV	Valor Esperado no Vácuo
KS	Kostelecký-Samuel
SSE	Simetria Esférica e Estática
TQTG	Teoria de Quasi-Topológica Generalizada
TCE	Teoria Cúbica Einsteiniana
ENL	Eletrodinâmica Não Linear

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Letras Latinas Minúsculas Percorrem de 1 à 3
μ	Letras Gregas Percorrem de 0 à 3
A	Letras Latinas Maiúsculas Percorrem de 0 à 4
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$\tilde{\nabla}_{\mu}$	Derivada Covariante Geral
$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Conexão Afim
$K_{\mu\nu}^{\alpha}$	Contorção
$L_{\mu\nu}^{\alpha}$	Deformação
$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}$	Símbolo de Christoffe
$\langle K_{\mu} \rangle$	Valor Esperado no Vácuo de um Campo
$(-, +, +, +, \dots)$	Assinatura da Métrica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Qual a teoria correta para descrever a gravidade?	15
1.2	Como estender a Relatividade Geral?	19
1.2.1	<i>Teorias em Altas-Dimensões</i>	21
1.2.1.1	<i>Teoria de Kaluza-Klein</i>	21
1.2.1.2	<i>Mundos-Branas</i>	24
1.2.1.3	<i>Modelos de Randall-Sundrum</i>	25
1.2.2	<i>Adicionando novos campos</i>	28
1.2.3	<i>Adicionando novos invariantes</i>	29
1.3	Princípio da Equivalência de Einstein: testes experimentais.	29
1.4	Gravidade como uma teoria métrica	32
1.5	Relatividade Geral	35
2	VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	40
2.1	Modelo Padrão Estendido (MPE)	40
2.2	Flutuações de campo Bumblebee	45
2.2.1	<i>Modelo Einstein-Bumblebee com Mecanismo de Higgs Alternativo</i>	48
2.3	Aplicações com excitações de Bumblebee	51
2.3.1	<i>Excitações de Bumblebee em cosmologia de mundo-branas</i>	52
2.3.2	<i>Soluções de buracos negros em um modelo Einstein-Bumblebee-Dilaton</i>	58
2.3.3	<i>Soluções de buracos negros em um modelo Einstein-Bumblebee-Dilaton em um espaço-tempo de Lifshitz</i>	70
3	TEORIA DE ALTAS-DERIVADAS	91
3.1	Teorias quadráticas	91
3.2	Teorias cúbicas em dimensões arbitrárias	96
3.2.1	<i>Teoria Quasi-Topológica Generalizada</i>	97
3.3	Teoria Cúbica Einsteiniana (TCE)	99
3.4	Aplicações Com Gravidade Cúbica	103
3.4.1	<i>Eletrodinâmica Não Linear</i>	103
3.4.2	<i>Mundo-Branas</i>	121

3.4.2.1	<i>Flutuações dos modos tensoriais</i>	127
3.4.2.2	<i>Estabilidade e localização na gravidade cúbica</i>	132
4	CONCLUSÃO	138
	REFERÊNCIAS	143
	APÊNDICE A – REDUÇÃO DIMENSIONAL BUMBLEBEE	154
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO PERTURBADA PARA O BURACO NEGRO MAGNETICAMENTE CARREGADO NA TEORIA CÚBICA EINSTEI- NIANA	156
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA A GRAVIDADE CÚBICA NO CONTEXTO DE MUNDO-BRANA	158

1 INTRODUÇÃO

1.1 Qual a teoria correta para descrever a gravidade?

A gravidade tem sido um desafio constante para os físicos teóricos. Entre as interações fundamentais conhecidas - gravidade, eletromagnetismo e forças nucleares fraca e forte - a gravidade, responsável por governar estruturas em grande escala como planetas, estrelas e galáxias, apresenta os maiores desafios de entendimento. Isso é especialmente frustrante, considerando que a gravidade é a interação mais antiga reconhecida pela humanidade. O chamado “problema da gravidade”, que se refere ao conjunto de fenômenos macroscópicos inexplicáveis e lacunas teóricas não compreendidas no regime microscópico relacionado à gravidade, representa um dos campos de pesquisa mais amplos na física atual.

Vamos explorar cada um desses problemas. No entanto, antes disso, é crucial estabelecer qual teoria é utilizada para descrever a gravidade e compreender por que essa teoria enfrenta esses desafios. Atualmente, a melhor teoria para explicar a gravidade é a Relatividade Geral (RG), formulada por Albert Einstein em 1915 [1]. É necessário entender como essa teoria se tornou a explicação mais eficiente para a dinâmica gravitacional na natureza e, ao mesmo tempo, compreender os limites dessa teoria. Respondendo a essa última questão, surge a pergunta fundamental: é necessário estender a RG? Este será o objetivo central deste primeiro capítulo da tese

Quando nos referimos a fenômenos macroscópicos inexplicáveis, estamos, essencialmente, falando sobre matéria escura e energia escura - costumeiramente chamado de **setor escuro**. A matéria escura está associada à observação astrofísica das curvas de rotação de galáxias [2], sugerindo a existência de uma forma de matéria que interage apenas gravitacionalmente com a matéria comum, sendo denominada “escura”. Até hoje, não temos uma explicação para a origem dessa matéria, que parece desempenhar um papel fundamental na estruturação do universo. Outro problema surge das observações de 1998 por Adam Riess e Saul Perlmutter [3–5], que mostraram que o universo está se expandindo de maneira acelerada. Essa observação não pode ser explicada puramente pela Relatividade Geral (RG).

Esses dois problemas estão incorporados no chamado Modelo Padrão Cosmológico, também conhecido como Λ CDM, que se baseia nas equações de campo da RG. Contudo, talvez o maior desafio da gravidade seja o fato de que, ao contrário das outras três interações

fundamentais, ela não possui uma formulação quântica livre de divergências completamente consistente. Essas divergências no regime microscópico são consideradas lacunas na teoria.

A ausência de evidências diretas para a gravitação em níveis quânticos levanta a questão: por que os físicos buscam tanto quantizar a gravidade? A resposta central é a ideia de unificação, a crença de que deve existir uma teoria completa capaz de unificar todas as quatro forças fundamentais da natureza. No entanto, ao tentar incorporar a gravidade no quadro quântico, nos deparamos com o desafio de que a gravidade descrita pela RG, no nível perturbativo, é não renormalizável e, portanto, não quantizável.

Existem abordagens alternativas para tratar o problema quântico da gravidade, como a Teoria das Cordas [6], Horava-Lifshitz [7] e Gravidade em Laços [8]. No entanto, essas teorias muitas vezes requerem premissas radicais, como a existência de dimensões extras ou a violação da simetria de Lorentz. O campo é complexo e desafiador. Para os propósitos desta tese, a abordagem escolhida é motivar modificações da gravidade apenas no regime macroscópico, que serão referidas como “modificações clássicas”.

A RG é a teoria final capaz de descrever corretamente a gravidade ainda (ou unicamente) no regime clássico? Ao considerarmos apenas o regime macroscópico, como podemos ter certeza de que essa teoria descreve com precisão o funcionamento do universo, desde o Sistema Solar até as proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro? A resposta está nos testes experimentais e observações.

A história dos testes da RG começou logo após Albert Einstein formular a teoria em 1915. Embora a RG fosse uma abordagem inovadora, testá-la tornou-se essencial. Experimentos realizados ainda no Sistema Solar, como a deflexão da luz confirmada em 1919 e a correção da precessão anômala do periélio de Mercúrio, foram cruciais para a aceitação global da RG [9]. No entanto, esses foram apenas os primeiros passos. Os testes mais significativos para a RG ocorreram a partir da década de 1960, quando a teoria foi aplicada a regimes mais energéticos, levando à criação da “Física Gravitacional”. Podemos citar três acontecimentos a partir da 1960 que foram essenciais para responder a pergunta dessa seção:

1. O experimento de Robert Pound e Glen Rebka Jr. (1960): primeira medição laboratorial bem-sucedida do desvio gravitacional para o vermelho da luz (*redshift*) [10];
2. Teoria de Brans-Dicke (1960): uma alternativa “tensor escalar” à teoria RG [11];
3. O experimento de Thomas Matthews e Allan Sandage (1960): a descoberta dos quasares

[12].

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

O primeiro experimento citado completa os chamados “os três principais experimentos da RG”. No entanto, o experimento de Pound-Rebka na verdade prova o Princípio da Equivalência (PE), que é a base teórica da RG, como iremos ver mais adiante. Porém a teoria rival da época, a Teoria de Brans-Dicke, também tem como base o PE. Isso leva ao seguinte questionamento: qual é a teoria correta? Vale a pena pontuar, que na época havia outras teorias candidatas desenvolvidas por físicos como Henri Poincaré, Edward Arthur Milne e George Birkhoff. Para responder a essa pergunta foi preciso fazer experimentos para confirmar ou refutar essas teorias. Em 1964 o próprio Dicke dividiu esses experimentos em duas categorias:

1. Testar os fundamentos da teoria da gravitação;
2. Usar o formalismo PPN (“*Parametrized post-Newtonian*”).

O primeiro teste baseou-se essencialmente em experimentos como os de Eötvös, Pound-Rebka e outros para verificar a validade do Princípio de Equivalência (PE). Toda teoria compatível com o PE é classificada como métrica. A confirmação de alta precisão desse princípio levou à falsificação de muitas teorias não-métricas. A segunda categoria de experimentos é exclusiva para teorias métricas, marcando um marco na física gravitacional experimental. Esses experimentos utilizam o formalismo PPN, que descreve o movimento em campos fracos, de baixa velocidade ou no limite pós-newtoniano das teorias métricas da gravidade, através de dez parâmetros. Para mais detalhes, veja a excelente Ref. [13].

A estrutura PPN mostrou-se altamente útil na análise de experimentos gravitacionais no Sistema Solar, focando na medição dos valores dos parâmetros PPN. Isso possibilita a distinção entre diferentes teorias da gravidade e sua conformidade com os dados observacionais. No entanto, muitas teorias métricas convergem nesse limite, tornando difícil a distinção entre elas. Para superar essa limitação, foi necessário testá-las em campos gravitacionais mais intensos.

Somente em 1974, com a descoberta de pulsares binários por Joseph Taylor e Russell Hulse, obtivemos mais restrições sobre as teorias métricas vigentes na época. Esses sistemas apresentam campos gravitacionais altamente relativísticos, permitindo a medição da taxa de perda de energia orbital devido à emissão de radiação gravitacional. Essa previsão concordava com a Relatividade Geral (RG).

Ao testar as teorias em sistemas gravitacionais que emitem radiação gravitacional, entramos no “regime da gravidade dinâmica”. Isso difere do “regime da gravidade forte”, caracterizado pela quantidade $\varepsilon \sim \frac{Gm}{c^2 r}$, onde G é a constante gravitacional newtoniana, c é a velocidade da luz, m é a escala de massa característica do fenômeno e r é a distância característica. Por exemplo, quando $\varepsilon \sim 1$, estamos próximos de um horizonte de evento de um buraco negro, indicando um regime de gravidade forte. Em contraste, para o Sistema Solar, temos $\varepsilon \sim 10^{-5}$, o que corresponde a um regime de campo fraco.

Até o momento, identificamos três cenários nos quais as teorias da gravidade podem ser testadas. O primeiro é o das **pequenas distâncias**, no chamado regime quântico. Apesar de ser um problema extremamente importante que merece atenção, como já mencionado, não abordaremos a gravidade quântica nesta tese. O segundo cenário é o das **longas distâncias**. Ao mencionar longas distâncias, referimo-nos à cosmologia e aos desafios enfrentados pelo Modelo Padrão Cosmológico, conforme previamente discutido. Por fim, temos o cenário da **gravidade dinâmica e gravidade forte**, que está essencialmente relacionado à física de buracos negros e à evolução estelar.

Motivamos a extensão da Relatividade Geral (RG) para os dois primeiros cenários, restando agora justificar para o último. Por que precisamos modificar a RG para a física dos buracos negros e a evolução estelar? Abordaremos essa pergunta em dois caminhos distintos.

O primeiro está relacionado às patologias encontradas dentro do buraco negro, que podem estar associadas a possíveis aspectos quânticos dele e, em certo sentido, ao colapso estelar também. Após a formação do buraco negro, por meio dos famosos Teoremas de Singularidade [14, 15] formulados nas décadas de 1960 por Stephen Hawking e Roger Penrose, existe uma singularidade protegida pelo horizonte de eventos dentro do buraco negro. Singularidades são problemáticas em qualquer teoria, pois podem indicar o limite de validade dessa teoria. Portanto, muitos acreditam que é nesse ponto que a RG falha em descrever completamente a física de buracos negros, justificando assim a necessidade de estender a RG. Alguns defendem que uma descrição quântica da gravidade seria suficiente para resolver o problema das singularidades [16]. Existe também outra abordagem menos radical para lidar com as singularidades. Uma vez que estamos em um regime de gravidade forte, seria razoável acreditar que podemos resolver esse problema com modelos de gravidade modificada ainda no regime clássico, os quais podem “curar” essas patologias.

O segundo caminho tem uma motivação menos imediata, mas é bastante razoável

do ponto de vista científico. A RG é uma teoria que não possui parâmetros livres, o que significa que, ao ser testada, é tudo ou nada, já que não há ajuste de parâmetros disponíveis. Como veremos mais adiante, a RG foi desenvolvida com base em hipóteses e suposições que, ao longo dos anos, foram sendo testadas. Contudo, esses testes não foram realizados em campos gravitacionais muito intensos. Assim, seria prudente estender essa teoria, suavizando algumas dessas hipóteses e suposições, sem, é claro, descartar os experimentos já realizados. Essa abordagem prepara o terreno para uma possível modificação detectada em futuros experimentos de campo forte. Podemos encerrar esse segundo caminho com a reflexão de Ruth Lazkoz sobre o vasto oceano de possibilidades para estender a RG: “*Yet, in my personal view, the current wide spectrum of enigmas is nothing but a manifestation of our need to improve and extend the standard body of our knowledge in gravity.*”¹[17].

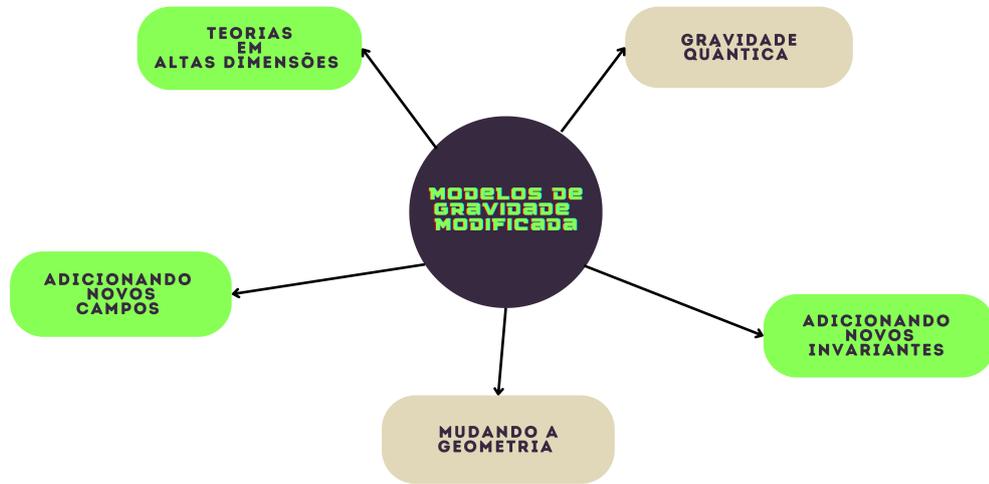
1.2 Como estender a Relatividade Geral?

Nesta seção, discutiremos as possíveis modificações na Relatividade Geral e apresentaremos algumas teorias que propõem essas alterações. Vale ressaltar que este será apenas um panorama geral, dado que as oportunidades de estender a RG são vastas. Para uma melhor organização, categorizamos essas possibilidades em cinco grupos principais: teorias em altas dimensões, adição de novos campos, alteração da geometria, introdução de novos invariantes e gravidade quântica, conforme esquematizado na Figura (1). Embora abordemos todas essas categorias de maneira geral, o foco desta tese estará nas três categorias destacadas (os balões verdes), ou seja, teorias em altas dimensões, adição de novos campos e introdução de novos invariantes. Portanto, nesta seção, daremos maior ênfase a essas categorias, mas antes, faremos breves comentários sobre as outras categorias.

Uma abordagem natural, embora um tanto radical, para modificar a Relatividade Geral (RG) é a introdução de novos graus de liberdade à teoria. A formulação padrão da RG é expressa em uma variedade lorentziana de quatro dimensões equipada com uma estrutura métrica $g_{\mu\nu}$ e uma derivada covariante D_μ . Essa derivada é assumida ser compatível com a métrica, i.e., $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ [18]. Além disso, presume-se a ausência de torção - essa quantidade será definida mais adiante -, implicando que o único campo dinâmico da teoria é a métrica, e sua dinâmica é governada pelas equações de Einstein. As consequências dessas suposições resultam em uma conexão completamente determinada pela métrica, conhecida como a conexão

¹tradução: No entanto, na minha visão pessoal, o amplo espectro atual de enigmas não passa de uma manifestação da nossa necessidade de aprimorar e expandir o corpo padrão do nosso conhecimento em gravidade

Figura 1: Esquema com as possibilidades de estender a Relatividade Geral.



Fonte: elaborado pelo autor.

de Levi-Civita.

O que algumas teorias modificadas propõem é considerar a conexão também como um campo dinâmico. Quando tanto a métrica quanto a conexão são tratadas como variáveis dinâmicas, denominamos a teoria como *métrica-afim* [19]. Nessas teorias, além do tensor de curvatura, novas quantidades geométricas, como o tensor de torção e o tensor de não-metricidade, podem ser definidas. A definição matemática dessas quantidades será apresentada posteriormente. Exemplos de tais teorias incluem a Gravidade Teleparalela e a de Einstein-Cartan. Nestes casos, nós dizemos que houve modificações à RG através de mudanças na sua construção geométrica padrão.

A busca pela gravidade quântica envolve uma variedade de propostas teóricas e desafios substanciais. Dentre os principais candidatos, a Teoria das Cordas destaca-se como uma abordagem que unifica as forças fundamentais, considerando as cordas vibrantes como constituintes fundamentais da realidade. No entanto, ela requer a existência de dimensões extras e enfrenta complexidades matemáticas. A Gravidade Quântica em Loop, por outro lado, aborda a quantização do espaço-tempo, tratando-o como uma rede discreta de volumes mínimos. Embora ofereça insights sobre a natureza discreta do espaço-tempo, ainda não está completamente formulada para casos mais complexos. Além disso, a teoria é criticada por sua falta de reconciliação com a relatividade especial. Ambas as abordagens enfrentam o desafio comum

de realizar experimentos observacionais para validar ou refutar suas previsões, uma vez que as escalas relevantes são muitas ordens de magnitude além das capacidades atuais. O confronto entre a gravidade quântica e observações astrofísicas continua a ser um dos desafios mais significativos, incentivando uma investigação mais profunda e uma busca por novas perspectivas na compreensão fundamental da gravidade no contexto quântico.

1.2.1 Teorias em Altas-Dimensões

Uma abordagem natural para expandir a gravidade é a introdução de novas dimensões ao espaço-tempo. A Relatividade Geral (RG), formulada originalmente em quatro dimensões (três espaciais e uma temporal), levanta a questão de quais seriam as implicações de adicionar dimensões adicionais a essa teoria. Kaluza e Klein foram os pioneiros a explorar essa ideia [20, 21], demonstrando conjuntamente a possibilidade de unificar a RG e a eletrodinâmica clássica ao introduzir uma dimensão extra compactificada. Posteriormente, diversos trabalhos seguiram essa linha, resultando em modelos como os de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dval (ADD) e Randall-Sundrum (RS), inseridos na teoria mais abrangente conhecida como **mundos-branas**. Neste trabalho, focaremos especificamente nos modelos de Kaluza-Klein (KK) e Randall-Sundrum (RS).

1.2.1.1 Teoria de Kaluza-Klein

Até 1914, a busca apaixonada dos físicos teóricos por teorias de unificação já era evidente. Nesse contexto, Gunnar Nordström (1881-1923) destacou-se ao observar as conexões entre o eletromagnetismo de Maxwell e o espaço-tempo de Minkowski em quatro dimensões. Em resposta, propôs uma extensão dessas teorias conhecida como gravitação de Nordström [22]. Esse modelo descreve a gravitação por meio de um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento e adiciona uma dimensão extra ao espaço-tempo, resultando em uma variedade em cinco dimensões. No entanto, devido a várias incompatibilidades com a realidade, esse modelo foi rapidamente abandonado.

Somente por volta de 1921, a ideia de dimensão extra ressurgiu com o físico Theodor Kaluza (1885-1954). Sua abordagem inicial consistiu em assumir uma quinta dimensão extra compactificada no contexto da Relatividade Geral (RG) [20]. Em 1926, o físico sueco Oskar Klein (1894-1977) aprimorou a teoria de Kaluza ao introduzir o princípio de Covariância Geral [21]. Consequentemente, essa teoria ficou conhecida como Kaluza-Klein (KK).

A ideia central do modelo Kaluza-Klein é que o nosso espaço-tempo, uma varie-

dade de quatro dimensões M_4 , está imerso em um espaço-tempo maior M_5 . Dessa forma, eles conseguiram derivar as equações de Maxwell e de Einstein, contanto que a quinta dimensão fosse compacta, ou seja,

$$x^4 \sim x^4 + 2\pi R. \quad (1.2)$$

Esse processo é chamado de compactificação toroidal [23]. Ou seja, o espaço obtido é o produto do espaço-tempo de Minkowski com um círculo, $M_4 \otimes S_1$, que pode ser imaginado como sendo um cilindro em cinco dimensões de raio R . Mas esse modelo mostrou algumas limitações experimentais, como veremos a seguir.

O mecanismo KK considera uma espaço-tempo em cinco dimensões com uma topologia $M_4 \otimes S_1$. Além disso, temos que $x^A = (x^\mu, x^4)$, onde $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ pertence a M_4 e g_{AB} é a métrica em cinco dimensões. Desse modo, nós podemos escrever o elemento de linha como

$$\begin{aligned} ds_5^2 &= g_{AB} dx^A dx^B \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu 4} dx^\mu dx^4 + g_{44} (dx^4)^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Em cinco dimensões para teoria KK, temos um total de 15 graus de liberdades, que são compostos pela métrica $g_{\mu\nu}$, um campo vetorial, que vamos chamar de A_μ , e por um campo escalar, ϕ . A métrica sugerida por Kaluza é escrita como

$$ds_5^2 = e^{2\alpha\phi} ds_4 + e^{2\beta\phi} (dz + A_\mu dx^\mu)^2 \quad (1.4)$$

onde $x^4 = z$ é a dimensão extra, e α e β são constantes que devem ser escolhidas de maneira adequada mais a frente.

Através dessa métrica, Kaluza conseguiu recuperar tanto as equações de Einstein quanto as equações de Maxwell por meio de uma redução dimensional. Para entender esse processo, consideremos a densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert em cinco dimensões, dada por:

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} \hat{R}, \quad (1.5)$$

onde G_5 representa a constante gravitacional newtoniana, $\sqrt{-g_5}$ é o determinante da métrica, e \hat{R} é o escalar de Ricci, todos em cinco dimensões. Essas quantidades serão definidas posteriormente, mas por enquanto, a ausência dessas definições não compromete a análise. Kaluza assumiu que os campos não dependem da dimensão extra, uma hipótese que ficará mais clara

adiante.

Para realizar a redução dimensional da lagrangiana (1.5) na direção das coordenadas z e garantir que a teoria compactificada seja expressa no referencial de Einstein, adotamos o formalismo de Scherk–Schwarz e assumimos que $\beta = -2\alpha$. Dessa forma, a lagrangiana em cinco dimensões, na direção da coordenada z , é dada por:

$$S = \frac{\mathcal{V}}{16\pi G_5} \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{e^{-6\alpha\phi}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),$$

onde $\mathcal{V} = 2\pi R_z$ e R_z representa o raio da dimensão extra. Além disso, R e $\sqrt{-g_4}$ são as quantidades definidas em ds_4^2 . O campo de intensidade de força F_μ é definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde A_μ é o campo vetorial. Vale observar que a ação acima está no referencial conforme de Einstein. A constante de acoplamento, normalmente chamada de constante de acoplamento do dilaton, ϕ , é obtida pela seguinte definição: $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Nota-se que, por meio da redução dimensional, recuperamos os termos de Maxwell e a Relatividade Geral convencional. No apêndice A, nós realizamos a mesma redução dimensional para um modelo específico em (D+d)-dimensões.

Além disso, podemos analisar como a dimensão extra afeta os campos. O campo escalar, por exemplo, é periódico na variável x^4 com um período de $L = 2\pi R$, ou seja,

$$\phi(x^\mu, x^4 + L) = \phi(x^\mu, x^4). \quad (1.6)$$

Dessa forma, podemos expandi-lo em uma série de Fourier como

$$\phi(x^\mu, x^4) = \frac{1}{L^{1/2}} \sum_n \phi_n(x^\mu) \exp\left(2i\pi n \frac{x^4}{L}\right), \quad (1.7)$$

onde os n representam os modos de Kaluza-Klein. Observamos imediatamente na Eq. (1.7) que, para um raio de compactificação pequeno, como inicialmente sugerido por Kaluza, o momento associado $\frac{n}{L}$ é muito grande, resultando na observação apenas do modo zero, ou seja, $n = 0$. Com a decomposição KK, a equação do movimento em 5-dimensões para o campo escalar é expressa como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_n(x^\mu) = \frac{n^2}{L^2} \phi_n(x^\mu). \quad (1.8)$$

Conseqüentemente, é gerada uma torre de Kaluza-Klein de campos com massas $m^2 = \frac{n^2}{L^2}$. Nota-se que, se L está na ordem do comprimento de Planck, $\sim 10^{-33}$, cm, então as massas dos modos de Kaluza-Klein são da ordem de 10^{19} , GeV, que é a escala da massa de Planck. Isso representa uma escala de energia que impossibilita qualquer tentativa de comprovação experimental

na escala de energia atualmente acessível em laboratórios. Essa característica levou a críticas significativas a esse modelo na época. Entretanto, ainda é possível estabelecer um limite superior (*upper-bound*) para o raio de compactificação R , considerando que a massa dos modos de Kaluza-Klein seja menor que a escala de energia atingida nos colisores de partículas, ou seja, menor que a escala de TeV . Assim, o limite superior encontrado para o raio de compactificação R é da ordem de

$$R \sim 10^{-21} \text{cm}, \quad (1.9)$$

um valor extremamente pequeno que impossibilita sua verificação experimental.

1.2.1.2 *Mundos-Branas*

A ideia de estar imerso em um espaço-tempo de dimensões superiores foi temporariamente negligenciada após os pioneiros trabalhos de Kaluza-Klein, uma vez que as perspectivas experimentais para verificar a existência de dimensões extras eram mínimas. Além disso, a Teoria Quântica de Campos (TQC) em (3+1) dimensões já se mostrava eficaz na época. No entanto, nas décadas de 1980, as teorias com dimensões extras ressurgiram com vigor.

A reinserção da ideia de dimensões extras na comunidade científica ocorreu devido a limitações encontradas na Teoria Quântica de Campos em (3+1) dimensões, especialmente na compreensão das interações fortes. Buscando uma descrição mais consistente para essas interações, que não era plenamente alcançada pela TQC, surgiu uma teoria que tentava descrever as interações hadrônicas de maneira mais fundamentada. Experimentos de espalhamento de hádrons revelaram que o espectro dos estados do modelo assemelhava-se ao espectro de uma corda vibrante [24]. A partir dessas observações e de hipóteses que atendiam aos requisitos teóricos, chegou-se a uma descrição das interações fortes conhecida como a fórmula de Veneziano. Esse foi o ponto inicial para o surgimento da Teoria das Cordas, uma teoria que só é consistente se incluir dimensões extras. No espectro bosônico, por exemplo, a Teoria das Cordas torna-se consistente em 26 dimensões; no entanto, se a supersimetria for incluída, são necessárias 10 dimensões. Assim como na Teoria de Kaluza-Klein, a Teoria das Cordas apresenta um caráter unificador, onde todas as interações resultam das vibrações de cordas fundamentais [23].

É relevante mencionar o trabalho crucial de Petr Horava e Edward Witten em 1998, durante o auge da Teoria das Cordas e da supergravidade. Em seu artigo [25], eles desenvolveram um mecanismo para compreender o acoplamento forte em um cenário de supergravidade

em sete dimensões, utilizando duas branas imersas em um hiperespaço de seis dimensões. Essa ideia de empregar duas branas, como veremos mais adiante, tornou-se fundamental para os modelos de Randall e Sundrum.

Paralelamente ao avanço da Teoria das Cordas, novas linhas de pesquisa surgiram para abordar questões como a Constante Cosmológica e o Problema da Hierarquia, aproveitando os conceitos das teorias com dimensões extras. Por volta de 1990, as teorias D-branas e M-branas ganharam destaque, explorando objetos extensos com dimensões extras [26, 27]. Exemplos dessas teorias incluem os modelos de Rubakov-Shaposhnikov [28], Arkani-Dimopoulos-Dvali (ADD) [29] e Randall-Sundrum (RS) [30, 31]

1.2.1.3 Modelos de Randall-Sundrum

Finalmente, abordaremos os modelos de Randall-Sundrum (RS), que se dividem em RS-I [30] e RS-II [31]. Ambos foram propostos em 1999 por Lisa Randall e Raman Sundrum com o propósito de resolver o problema da Hierarquia de Calibre. Esses modelos compartilham semelhanças com o modelo ADD, ou seja, são modelos de branas. No entanto, ao contrário do modelo ADD, o RS trabalha em um espaço-tempo de apenas cinco dimensões, onde a métrica é não fatorável. Além disso, como veremos mais adiante, esses modelos podem ter a dimensão extra tanto compacta quanto não compacta.

No primeiro modelo, Lisa Randall e Raman Sundrum incorporaram ideias tanto do modelo ADD - que aborda o problema da Hierarquia com branas e dimensões extras compactificadas - quanto do modelo Horava-Witten de supergravidade, que utiliza duas branas imersas em dimensões extras. No entanto, no RS, essas duas branas são colocadas em um espaço-tempo ambiente (*bulk*) com a topologia da única dimensão extra sendo S^1/Z_2 , ou seja, a dimensão extra é compacta e segue a simetria orbifold [30]. É importante observar que essas duas branas têm espessuras nulas, o que significa que, ao construirmos suas ações, as integraremos ao longo de um volume em 4D. Na brana “visível”, localizam-se os campos de matéria, correspondendo ao nosso universo. Por outro lado, na brana “escondida”, a constante cosmológica é grande, veja a Fig. (2). Além disso, assume-se que apenas a gravidade pode se propagar na dimensão extra. Mas como esse modelo resolve o problema da Hierarquia? Iniciaremos introduzindo o elemento de linha proposto por RS, dado por:

$$ds_5^2 = -e^{2A(y)} ds_{brana}^2 + dy^2. \quad (1.10)$$

Aqui, $A(y) = -2ky$ é o fator de dobra, dependendo apenas da dimensão extra compacta $0 \leq y \leq L$, e k está relacionado à curvatura escalar do *bulk* (esse ponto ficará mais claro ao abordarmos a dinâmica do modelo). O ds_{brana}^2 é o elemento de linha da brana, que, como veremos mais adiante, pode apresentar um espaço-tempo com curvatura. No entanto, para este primeiro modelo, consideraremos apenas que

$$ds_{brana}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.11)$$

ou seja, assumimos que o espaço-tempo na brana é plano.

Uma outra forma de escrever o *ansatz* (1.10) é escolhendo coordenadas conformes. Podemos alcançar essa mudança se considerarmos que

$$z = \frac{e^{ky}}{k}. \quad (1.12)$$

Se substituirmos (1.12) no *ansatz* (1.10), nós obtemos que

$$ds_5^2 = \frac{l^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (1.13)$$

onde $l = 1/k$ é o raio de curvatura do *bulk*.

Precisamos estudar a dinâmica do modelo, ou seja, resolver as equações de Einstein em 5D considerando (1.10) para explicar o porquê da gravidade ser tão fraca aqui em nossa brana. A ação clássica do nosso modelo pode ser escrita como

$$S = S_{EH} + S_{vis} + S_{esc}, \quad (1.14)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões com um termo cosmológico dado por

$$S_{EH} = 2M^3 \int (R - \Lambda) \sqrt{-g_5} d^5x \quad (1.15)$$

onde $\sqrt{-g_5}$ é o determinante da métrica em 5D e M^3 é introduzido para deixar a ação adimensional. Já as duas outras ações que descrevem as branas visível e escondida, respectivamente, podem ser escritas como

$$S_{vis} = \int (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}) d^4x \quad (1.16)$$

e

$$S_{esc} = \int (\mathcal{L}_{esc} - V_{esc}) d^4x. \quad (1.17)$$

onde \mathcal{L}_{vis} e \mathcal{L}_{esc} são as lagrangianas nas 3-branas.

Se nós variarmos a ação (1.14) em relação a métrica iremos obter as equações de

Einstein em 5D dada, portanto, por

$$R_{AB} - \frac{R}{2}g_{AB} = -\frac{1}{4M^3}(\Lambda + T_{AB}) \quad (1.18)$$

onde o tensor energia-momento T_{AB} é dado por

$$T_{AB} = \delta_A^\mu \delta_B^\nu [V_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} \delta(y-L) + V_{esc} g_{\mu\nu}^{esc} \delta(y)]. \quad (1.19)$$

No final das contas, o que RS encontraram resolvendo as Eqs.(1.18) foi que o fator de dobra é dado por

$$A(y) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}|y|, \quad (1.20)$$

de modo que k pode ser escrito como

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}. \quad (1.21)$$

Em (1.20) usamos a simetria Z_2 . Notamos de imediato que Λ precisa ser negativo, por isso dizemos que as 3-branas estão mergulhadas em um espaço-tempo com $\Lambda < 0$ chamado de Anti de Sitter, AdS_5 . Porém ainda não respondemos como o modelo RS-I resolve o problema da Hierarquia. A resposta está na análise da ação clássica gravitacional (1.14). Depois de ter construído uma métrica que é invariante de Poincaré como (1.10), podemos agora fazer uma redução dimensional para obter uma ação efetiva. O que RS fizeram foi analisar as flutuações gravitacionais, i.e., $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$, onde esse último termo representa as flutuações gravitacionais. Com isso eles encontraram uma teoria efetiva em 4-dimensões que previa que

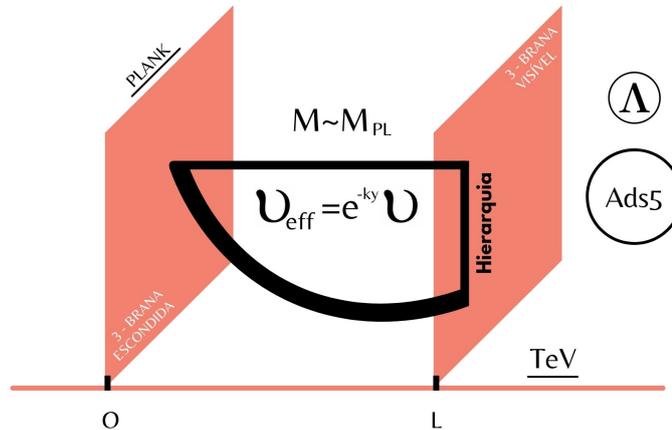
$$M_{Planck}^2 = \frac{M_{5D}^3}{k}(1 - e^{-2kL}) \quad (1.22)$$

Ou seja, as escalas dependem tanto do raio da compactificação, quanto da geometria não-fatorável de M_5 . Assim, podemos ajustar as escalas de energias apenas com os parâmetros k e L .

Porém esse modelo tem uma problema: a tensão negativa da brana visível gera uma gravidade efetiva repulsiva [30]. Para resolver esse problema foi desenvolvido o modelo RS-II, que iremos comentar logo a seguir.

Já no modelo de RS-II, para resolver o problema da gravidade repulsiva, foi observado que a relação entre as escalas de energia (1.22) continua finita se $L \rightarrow \infty$, ou seja, a dimensão extra não é mais compacta. Nesse caso, a 3-brana escondida é removida e nosso

Figura 2: Modelo Randall-Sundrum I. Duas branas planas e paralelas mergulhadas em um AdS_5 com uma fator de dobra exponencial



Fonte: elaborado pelo autor.

universo que está na 3-brana visível tem agora uma tensão positiva. A consequência mais interessante desse modelo é que foi encontrado um estado ligado do gráviton ordinário 4D sem massa e assim como estados massivos, que corrigem o potencial gravitacional da seguinte maneira:

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (1.23)$$

1.2.2 Adicionando novos campos

Outra abordagem para estender a Relatividade Geral (RG) é a adição de novos campos, não relacionados à matéria, mas que incorporam a própria gravidade. Essas teorias são denominadas **Escalar-Tensoriais**. Um exemplo anteriormente mencionado é a teoria de Brans-Dicke. Essa teoria escalar pode ser generalizada para uma família de modelos que envolvem lagrangianas contendo derivadas de segunda ordem do campo, ainda resultando em equações de movimento de segunda ordem, conhecidas como teorias de Horndeski [32].

A vantagem dessas teorias é a ausência de “fantasmas” e instabilidades de Ostrogradski, problemas comuns em teorias que introduzem novos invariantes na ação de Einstein-Hilbert, como será discutido posteriormente. Além disso, é possível estender a RG incorpo-

rando graus de liberdade tensoriais. Exemplos incluem a gravidade massiva [33] e a bigravidade [34]. No entanto, um dos focos desta tese é nas teorias vetoriais para a gravidade, especialmente aquelas que resultam na quebra espontânea da simetria de Lorentz. O campo que será explorado para atingir esse objetivo é denominado **campo de Bumblebee**, e uma seção dedicada desta tese será destinada a esse modelo.

1.2.3 Adicionando novos invariantes

Agora vamos à última forma de estender a RG, i.e., modificando o setor gravitacional puro. A maneira de fazer isso é construindo escalares de Lorentz de tensores métricos, i.e., em função de tensores de curvatura de Riemann, tensores de Ricci e de suas derivadas. Assim, feito isso, nós os adicionamos à ação de Einstein-Hilbert. Um exemplo simples seria a seguinte ação:

$$S = \frac{1}{16G\pi} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (1.24)$$

onde $f(R)$ é alguma função do escalar de curvatura de Ricci. Um exemplo para essa função bastante famoso é $f(R) = R + \alpha R^\beta$, onde $\beta \geq 2$. Os modelos $f(R)$ podem ser renormalizáveis a um-*loop* e descrever uma fase de expansão acelerada do universo [35]. Além disso, podemos contruir outros invariantes como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, i.e., podemos construir uma teoria $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta})$. Talvez a mais famosa é aquela descrita pelo termo de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Porém esse termo em quatro dimensões é topológico, i.e., ele pode ser escrito como uma derivada total e, logo, não vai contribuir na equação do movimento [36]. Note que nada nos proíbe de fazer contrações cúbicas com esses invariantes. A **gravidade cúbica** vai ser explorada mais a fundo mais a diante. Até agora, nós construímos apenas invariantes em quatro dimensões. Mas podemos adicionar dimensões extras. Uma teoria que constrói invariantes de alta-curvaturas em D -dimensões é chamado de teoria de Lovelock [37]. Essa teoria está incluída em uma teoria maior, que iremos abordar com mais detalhes na terceira parte dessa tese.

1.3 Princípio da Equivalência de Einstein: testes experimentais.

Na seção anterior, discutimos a motivação para estender a Relatividade Geral (RG) e exploramos algumas das abordagens para tal extensão. No entanto, não examinamos como a RG se consolidou como a teoria mais adequada para explicar a gravidade, nem discutimos as bases teóricas subjacentes a essa teoria.

A RG é fundamentada no Princípio da Equivalência (PE), que remonta a 1686, quando Isaac Newton, em seu livro “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, afirmou que corpos de diferentes massas e estruturas caem no campo gravitacional com a mesma aceleração. Essa formulação é conhecida como o Princípio da Equivalência Fraco (PEF). Uma outra maneira de expressar essa ideia é afirmar que as massas inerciais (que respondem a forças externas) e as massas gravitacionais (que respondem à força gravitacional) são equivalentes.

O que Einstein fez foi estender essa ideia, conjecturando que não apenas os movimentos mecânicos, mas todas as interações possíveis, como a nuclear, não seriam afetados pela gravidade em queda livre. Ele imaginou um observador em um elevador em queda livre, onde, na prática, a gravidade seria “desligada”. Einstein propôs que todos os experimentos não seriam influenciados pela gravidade em queda livre, o que levou à formulação do Princípio da Equivalência de Einstein (PEE). Este princípio afirma que há uma equivalência entre um campo gravitacional homogêneo e um sistema em aceleração constante.

O PEE, versão forte do PEF ², estabelece dois critérios adicionais: **invariância de Lorentz local**, afirmando que resultados de experimentos não gravitacionais locais não podem depender da velocidade do aparato, e **invariância de posição local**, afirmando que esses experimentos não podem depender de onde e quando foram realizados. O PEE implica que a gravidade é uma propriedade do espaço-tempo curvo, caracterizando teorias *geométricas*. Teorias que seguem o PEF são chamadas de teorias métricas, sendo a RG o exemplo mais proeminente desse tipo de abordagem. Nós podemos resumir sucintamente o que seria uma teoria métrica da gravidade como tendo as seguintes características:

1. O espaço-tempo é dotado de uma métrica;
2. As linhas-mundo de corpos de teste são geodésicas dessa métrica;
3. Em referenciais locais em queda livre, as leis não-gravitacionais da física são aquelas da relatividade especial.

Além disso, nós podemos completar essa passagem do texto adicionando um importe resultado expresso na chamada **conjectura de Schiff**, que afirma que *qualquer teoria da gravidade completa e autoconsistente que incorpore o PEF também incorpora necessariamente o PEE* [13].

²Na verdade, para ser mais preciso, o **Princípio da Equivalência Forte** é diferente ao de Einstein. Para o primeiro, o PEF é válido para qualquer corpo teste descarregado e auto-gravitante, enquanto para o último basta considerar o corpo descarregado. Para uma definição mais precisa de corpo teste não carregado, nós indicamos a Ref. [13]

Para provar empiricamente se o PEE é válido, uma série de experimentos foram feitos. Vamos enumerar alguns e logo após comentar rapidamente cada um.

1. Experimento de Eötvös;
2. Experimento de Hughes-Drever;
3. Experimento do Desvio para o Vermelho (*redshift*);
4. Variação das constantes fundamentais.

O primeiro experimento visa testar a validade do Princípio da Equivalência Fraco (PEF). Para realizar esse teste, é necessário comparar a aceleração de dois corpos de diferentes composições em um campo gravitacional externo. Se esses corpos sentirem esse campo de maneira diferente, isso implicaria a invalidade do PEF. O experimento mais famoso nessa direção foi conduzido por Loránd Eötvös com a chamada balança de torção. Ele comparou uma massa de platina com massas de cristal de antimônio e alcançou uma precisão de $\eta < 10^{-8}$ em 1889. O experimento mais preciso até hoje, realizado por Schlamminger, alcançou uma precisão de $\eta < 10^{-14}$.

O experimento de Hughes-Drever testou a invariância de Lorentz Local, explorando se existe alguma direção preferencial no espaço-tempo que poderia afetar a matéria. Eles investigaram os níveis de energia do núcleo atômico do ${}^7\text{Li}$. O resultado mostrou que se houvesse uma direção preferencial, o singlete formado no estado fundamental do lítio $j = 3/2$ se quebraria devido à rotação da Terra. O parâmetro adimensional que mede a força da anisotropia induzida foi da ordem de 10^{-15} . A possível violação da invariância de Lorentz Local é discutida como indício de uma nova física, sendo algumas teorias, como a teoria das cordas, preditoras dessa violação.

Os dois últimos experimentos estão relacionados ao teste da invariância de posição local. O experimento de *redshift*, mencionado anteriormente, está associado à mudança na frequência do fóton entre seu ponto de emissão e recepção. Experimentos modernos reforçam a validade do *redshift*, indicando que experimentos não gravitacionais locais não dependem de onde são realizados. Além disso, experimentos que buscam por “variações” nas constantes fundamentais da natureza ao longo do tempo, como comparações de linhas espectrais em galáxias distantes e quasares, mostraram que o PEF ainda é válido. Esses resultados contribuem para descartar teorias alternativas e reforçar a consistência do PEF em diferentes contextos experimentais.

1.4 Gravidade como uma teoria métrica

Nós mostramos na seção anterior que há inúmeras razões teóricas e experimentais para acreditar que uma teoria da gravidade consistente é uma teoria geométrica (métrica). Precisamente, para alcançar essa descrição para a gravitação, nós precisamos utilizar as ferramentas matemática da *geometria diferencial*. No entanto, não é o objetivo dessa tese mostrar formalmente essa descrição. Ao invés disso, iremos mostrar apenas os principais resultados dessa área. Para quem tiver interesse em se aprofundar, podemos indicar essa incrível Ref. [38].

O conceito fundamental da geometria diferencial é a variedade (ou *manifold* em inglês). Podemos definir esse conceito como espaços topológicos que se assemelham localmente a um pedaço de \mathfrak{R}^n , onde n é a dimensão da variedade. Para diferentes pedaços, podemos relacioná-los por meio de Transformações Gerais de Coordenadas (TGC), $x'^{\mu}(x)$. Chamamos de tensores os objetos que podem ser definidos globalmente na variedade, ou seja, que apresentem certas propriedades de transformações em relação às TGC.

O espaço-tempo é precisamente uma variedade em 4 dimensões (é possível estender para mais dimensões), onde podemos definir um tensor não-degenerado, portanto inversível, e simétrico, chamado de **métrica** $g_{\mu\nu}$. Essa quantidade mede distâncias e ângulos, além de ser usada para elevar e baixar índices. Além desse tensor, há uma quantidade crucial relacionada ao transporte paralelo (para mais detalhes, consulte a Ref. [39]), denominada **conexão afim** $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Ela também é usada para definir a generalização de derivada em espaços curvos, conhecida como **derivada covariante**, expressa por:

$$\tilde{D}_{\mu}C^{\nu}_{\lambda} = \partial_{\mu}C^{\nu}_{\lambda} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}C^{\alpha}_{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}C^{\nu}_{\alpha}. \quad (1.25)$$

Para um campo escalar, essa derivada coincide com a derivada parcial, ou seja, $\tilde{D}_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$. A principal propriedade da derivada covariante é que ela é um operador diferencial linear que transforma um tensor do tipo (p, q) em um do tipo $(p, q + 1)$ - isso justifica seu nome. Além disso, ela obedece à regra de Leibniz e à identidade de Jacobi.

Quanto à conexão, podemos decompondo-a em dois termos em relação à troca de índices covariantes, uma parte simétrica e outra parte antissimétrica, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\alpha} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha}. \quad (1.26)$$

A parte antissimétrica da conexão está relacionada a uma quantidade importante chamada

torção, definida como

$$T_{\mu\nu}{}^{\alpha} \equiv -2\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\alpha}. \quad (1.27)$$

Existem duas quantidades importantes que podemos definir a partir da conexão: a curvatura e a torção. No entanto, antes de explorar esses conceitos, é relevante definir o que é auto-transporte paralelo, também conhecido como **geodésica**. Se o vetor tangencial a uma curva $v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\xi} \equiv \dot{x}^{\mu}$ é paralelo a si mesmo ao longo da curva, então

$$v^{\nu} \tilde{D}_{\nu} v^{\mu} = \dot{x}^{\mu} + \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\mu} = 0. \quad (1.28)$$

O que aconteceria se utilizássemos o transporte paralelo para mover dois vetores com o intuito de fechar um paralelogramo? No espaço plano, nada de surpreendente aconteceria, afinal o paralelogramo fecharia adequadamente. No entanto, no espaço curvo, isso nem sempre é verdadeiro. O que falta para fechar o paralelogramo é justamente o que mede a torção³.

A outra quantidade mais adequada para nossa formulação, a curvatura, está relacionada ao transporte paralelo em uma curva fechada. Como esse transporte depende apenas da curva e não dos pontos iniciais e finais, se, em uma curva fechada, o vetor inicial não coincidir com o vetor transportado paralelamente, significa que estamos em um espaço-tempo curvo. Essa diferença é medida pelo tensor **curvatura**, cuja expressão pode ser dada por

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu\sigma\lambda} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\sigma}{}^{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}{}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\alpha}. \quad (1.29)$$

Essa quantidade não depende da métrica para essa formulação mais geral. Além disso, observamos que o tensor de curvatura possui apenas uma simetria: é antissimétrico nos últimos dois índices. Para aqueles que já estudaram a Relatividade Geral (RG), pode parecer estranha a ausência das outras simetrias padrões. No entanto, essas simetrias não surgem para uma conexão geral!

É importante notar que não há motivos matemáticos para assumir que a conexão depende da métrica. Nem muito menos que a métrica seja compatível com a derivada covariante, ou seja, $\tilde{D}_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$, embora essa imposição tenha sido feito por Einstein na formulação da RG, como iremos ver mais adiante. De modo que podemos definir o chamado tensor de **não-metricidade** dado por

$$Q_{\mu\nu\lambda} \equiv -\tilde{D}_{\mu} g_{\nu\lambda}. \quad (1.30)$$

³Existem teorias que consideram esse tensor, como as teorias Teleparalelas e Einstein-Cartan. Embora sejam teorias extremamente promissoras, não fazem parte dos objetivos desta tese. Para leitores interessados, as seguintes Refs. [40, 41] podem ser úteis.

Esse tensor relaciona a conexão afim e a métrica do espaço-tempo de maneira geral. Além disso, o vetor de Weyl, obtido pela simetria com os últimos índices no vetor acima, é dado por

$$Q_\mu \equiv \frac{1}{4} Q_{\mu\nu}{}^\nu. \quad (1.31)$$

Para obter a conexão afim geral que descreve um espaço-tempo métrico conectadamente afim, temos que expandir $\tilde{D}_\mu g_{\rho\sigma} + \tilde{D}_\rho g_{\sigma\mu} - \tilde{D}_\sigma g_{\mu\rho}$, fazendo isso é possível mostrar que a conexão é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K_{\mu\nu}{}^\lambda + L_{\mu\nu}{}^\lambda \quad (1.32)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right). \quad (1.33)$$

Essa última quantidade é chamada de símbolo de Christoffel. Note que ela é completamente definida pela métrica. O tensor $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ é chamado de **contorção** e é definido pela torção da seguinte maneira:

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \left(T_{\mu\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\mu} - T_{\mu\nu\sigma} \right). \quad (1.34)$$

Por último temos o tensor $L_{\mu\nu}{}^\lambda$ definido pelo tensor de não-metricidade da seguinte maneira:

$$L_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} \left(Q_{\mu\nu}{}^\lambda + Q_{\nu\mu}{}^\lambda - Q^\lambda{}_{\mu\nu} \right). \quad (1.35)$$

Para diferentes imposições sobre as quantidades R , T e Q , teremos, consequentemente diferentes espaços-tempo. Por exemplo, se nós assumirmos que $Q = 0$ (**Postulado métrico**), dizemos que a conexão é compatível-métrico e o espaço-tempo é chamado de Einstein-Cartan. Resumimos na Fig. (3) os principais tipos de espaços-tempo.

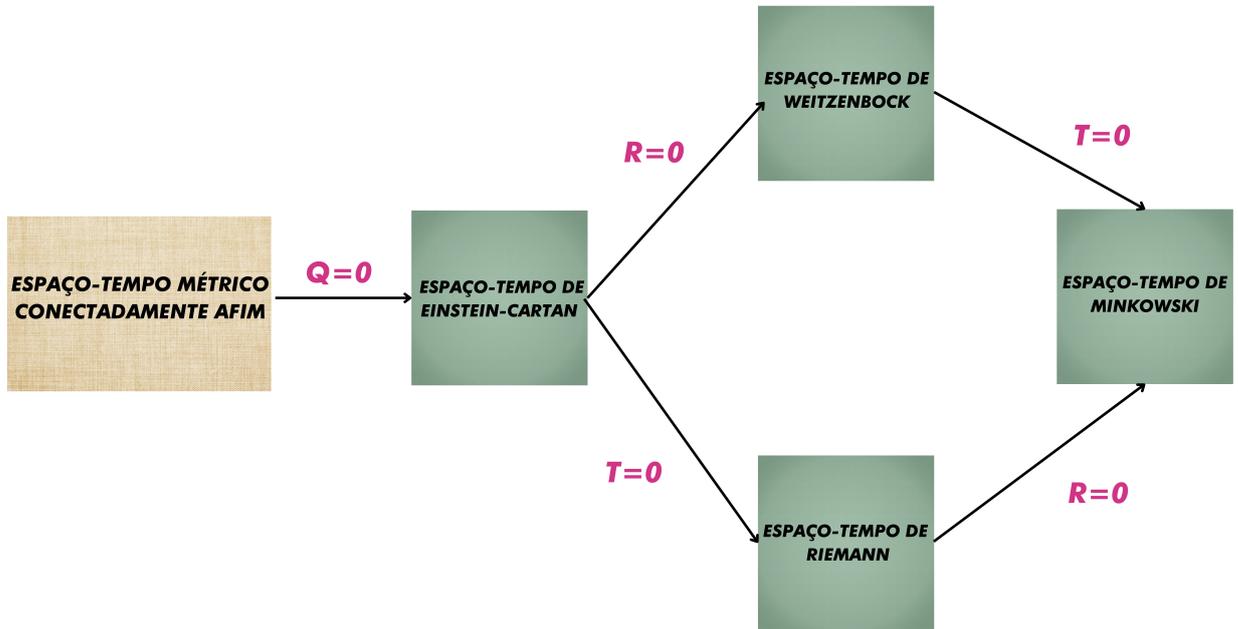
Antes de encerrar esta seção da tese, é crucial definir o chamado tensor e escalar de Ricci, que serão fundamentais para nossas análises futuras. Como mencionado anteriormente, o tensor de curvatura possui apenas uma simetria associada a ele, de maneira geral. Portanto, é necessário ter cautela ao definir o tensor de Ricci. Podemos realizar essa definição de duas maneiras:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = -\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\nu\sigma} \quad (1.36)$$

e

$$\mathcal{R}'_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\sigma{}_{\sigma\mu\nu}. \quad (1.37)$$

Figura 3: Esquema com os espaços-tempo métricos conectadamente afim equipados com uma métrica.



Fonte: elaborado pelo autor.

O primeiro é o tensor de Ricci usual dada por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \quad (1.38)$$

e o segundo é dada por

$$\mathcal{R}'_{\mu\nu} = -\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} \quad (1.39)$$

Note que se a conexão fosse simétrica, o tensor $\mathcal{R}'_{\mu\nu}$ seria justamente a parte antissimétrica de $\mathcal{R}_{\mu\nu}$. O escalar de Ricci é definido como sendo

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

uma vez que $g^{\mu\nu} \mathcal{R}'_{\mu\nu} = 0$, portanto o escalar de Ricci é único.

1.5 Relatividade Geral

Após discutirmos as razões pelas quais a Relatividade Geral é a teoria métrica mais apropriada para descrever a gravidade, inclusive apresentando sua extensão, e explorarmos os fundamentos teóricos com o Princípio da Equivalência e os aspectos matemáticos com a Geometria Diferencial, estamos agora preparados para abordar as suposições feitas por Einstein em 1915. Essas suposições culminaram na formulação de uma das teorias mais bem-sucedidas já

concebidas pelo ser humano: a Relatividade Geral. É importante destacar que a formulação de Einstein para esta teoria emerge como uma extensão natural da Relatividade Especial. Esta teoria métrica, à primeira vista, dispensa a necessidade de conceber a gravidade como uma força separada, tratando-a como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo. Mas, afinal, quais foram as suposições feitas por ele para criar essa teoria? Vamos enumerá-las e depois vamos comentar cada uma.

1. O Princípio da Equivalência de Einstein é válido;
2. O Postulado Métrico também é assumido;
3. A torção não desempenha um papel importante;
4. O campo fundamental da teoria é a métrica;
5. As equações de campo são covariantes.

A primeira suposição já foi exaustivamente comentada. Ela implica que a teoria é métrica, portanto geométrica. Assim, podemos utilizar a geometria diferencial para descrevê-la matematicamente. A segunda é relacionada ao tensor $Q_{\mu\nu\lambda}$ definido na Eq. (1.30) e define que essa quantidade é nula, ou seja,

$$\tilde{D}_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.41)$$

portanto a conexão é compatível com a métrica. Já a terceira suposição assume que $T_{\mu\nu}{}^\alpha = 0$, ou seja, desconsideramos as correções da parte antissimétrica da conexão. Ao assumir essas duas últimas hipóteses, resulta diretamente que a conexão (1.32) é expressa apenas pelo símbolo de Christoffel (1.42), ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right). \quad (1.42)$$

O que implica que a conexão é definida exclusivamente pela métrica. Isso, por sua vez, nos conduz à quarta suposição, na qual a conexão deixa de ser um campo fundamental.

Outra implicação dessas suposições é o surgimento de novas simetrias no tensor de Riemann (1.29). O tensor de Riemann agora apresenta antissimetria nos dois primeiros índices e simetria na troca entre o primeiro par e o segundo par de índices. Assim, podemos construir um tensor de segunda ordem a partir dessa quantidade sem a necessidade da métrica. Este tensor é precisamente o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, conforme definido na Eq. (1.43). Podemos agora definir

isso utilizando esta nova notação, uma vez que a outra quantidade (1.39) é nula devido a essas novas simetrias. Assim, o tensor de Ricci, assumindo tudo isso, é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}. \quad (1.43)$$

Agora vamos analisar a última suposição. Mencionamos que a métrica é o campo dinâmico da teoria gravitacional, mas até esse momento não falamos como podemos descrever essa dinâmica. Bom, Einstein encontrou a resposta para isso através da equação de Poisson, ou seja,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (1.44)$$

onde ρ é a densidade de matéria. O que ele fez inicialmente foi assumir uma versão covariante dessa equação - invariante sobre transformações de coordenadas -, cuja lado esquerdo da equação é dado por equações diferenciais de segunda ordem apenas da métrica, e do lado esquerdo temos apenas a contribuição da matéria. Mas como construir de fato isso covariantemente? O lado direito é o mais fácil, pois podemos usar o chamado tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que é a versão covariante de ρ , para mais detalhes veja a Ref.[42]. Mas e lado esquerdo? Nós teríamos algo mais ou menos parecido com isso

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

Porém, precisamente, qual a quantidade covariante que nós conhecemos composta por derivadas segunda da métrica? Vimos que o tensor de Ricci tem essa qualidade. Porém há um problema em escolher apenas $R_{\mu\nu}$ no lugar de $\nabla^2 \phi$. Sabemos que o tensor $T_{\mu\nu}$ é conservado, portanto

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0.^4 \quad (1.46)$$

Isso implicaria diretamente no seguinte vínculo: $D_\mu R^{\mu\nu} = 0$, que não é zero, em geral. Na verdade, é possível mostrar que $D_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} D^\nu R$, onde R é o escalar de Ricci. Para resolver isso, um novo termo foi colocado justamente para zerar o lado esquerdo da Eq. (1.45), quando contraído com a derivada covariante. E esse termo é exatamente $\frac{1}{2} D^\nu R$. Portanto, a equação covariante inspirada pela equação dinâmica de Poisson gravitacional, que veio a ser conhecida

⁴Observe que não estamos mais utilizando o til sobre a derivada covariante. Isso se deve ao fato de que a conexão agora está associada à derivada covariante de Christoffel. Portanto, daqui em diante, não faremos mais uso desse til em nossas derivadas covariantes.

como equações de campo de Einstein, é dada por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.47)$$

Esse $8\pi G$, onde G é a constante gravitacional universal é encontrado quando analisamos essa equação no limite de campo fraco. Note que quando contraído com a derivada covariante a Eq. (1.47), ambos os lados zeram. Para mais detalhes de como obter as equações de Einstein, veja a Ref.[43].

Outra maneira de derivar a Eq. (1.47) é através do Princípio da Mínima Ação. A formulação lagrangiana para a gravitação é extremamente útil. No entanto, não iremos discutir o processo em detalhes, e as derivadas das equações de Einstein a partir da formulação lagrangiana podem ser encontradas detalhadamente em muitos livros de referência, sendo possível consultar, por exemplo, a Ref. [18]. Vamos, no entanto, analisar este formalismo de maneira mais qualitativa, uma vez que ele nos proporciona valiosas percepções sobre a dinâmica gravitacional.

Antes de aplicar o Princípio da Mínima Ação a uma teoria de campo, é crucial determinar qual campo será considerado como fundamental na teoria. Conforme definido anteriormente, na Relatividade Geral convencional, a descrição é unicamente dada pela métrica, assumindo o Postulado Métrico e a não-contribuição da torção. Esse enfoque é conhecido como o **Formalismo Métrico**. Nesse contexto, nossa conexão não é mais um grau de liberdade dinâmico, pois pode ser expressa em termos da métrica, como demonstrado na Eq. (1.42). Por outro lado, podemos suavizar algumas dessas condições e tornar a própria conexão um campo dinâmico. Nesse caso, teríamos o chamado **Formalismo de Palatini**.

Optaremos pelo Formalismo Métrico, e a ação que utilizaremos para derivar a Eq. (1.47) é a bem conhecida ação de Einstein-Hilbert, dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.48)$$

Existem duas características importantes sobre essa ação. Primeiramente, ela é um escalar covariante, o que implica que o elemento de volume, ou seja, $d^4x \sqrt{-g}$, também é um escalar covariante. Em segundo lugar, o escalar R não depende apenas das derivadas primárias da métrica, mas também das derivadas de segunda ordem. Em princípio, isso sugeriria a presença de equações de movimento para a métrica de terceira ordem. No entanto, na prática, não observamos essa complexidade. Por que não encontramos tal complexidade? A resposta para

isso pode ser encontrada de maneira mais detalhada no livro [44]. Vamos, no entanto, abordar rapidamente o que está acontecendo e como podemos resolver esse problema. Para começar, ao variar a ação (1.48) em relação à métrica, obtemos:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \left[\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 2 \int_{\delta\mathcal{V}} d^3x \sqrt{-h} \delta K \right], \quad (1.49)$$

onde \mathcal{V} e $\delta\mathcal{V}$ são, respectivamente, o volume e a fronteira do volume da variedade. O último termo da ação acima vem exatamente da variação do tensor de Ricci; mais precisamente

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} = -2 \int_{\delta\mathcal{V}} d^3x \sqrt{-h} \delta K, \quad (1.50)$$

onde o K é o traço da curvatura extrínseca dessa fronteira, a expressão exata para essa quantidade pode ser encontrada no livro [18]. No entanto, não podemos simplesmente anular esse último termo, pois isso implicaria em fixar, não só a métrica, mas também suas derivadas na fronteira $\delta\mathcal{V}$. Como não temos graus de liberdade suficientes para fazer isso, o termo de superfície dado pela Eq. (1.50) não pode ser nulo. A solução consiste em corrigir a ação de Einstein-Hilbert para eliminar o termo de superfície. Isso é feito ao adicionar um termo da seguinte forma:

$$S'_{EH} = S_{EH} + \frac{1}{8\pi G} \int_{\delta\mathcal{V}} d^3x \sqrt{-h} \delta K. \quad (1.51)$$

Agora sim, a ação acima leva à equação (1.47) adequadamente.

Nos falta definir como podemos obter o lado direito da Eq. (1.47). Vamos definir uma ação para o campo de matéria dada por

$$S_m = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (1.52)$$

onde ψ é um campo de matéria qualquer. O tensor energia-momento, portanto, é dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.53)$$

2 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Nesta segunda parte, exploraremos um tema amplamente debatido na pesquisa em física de altas energias: a possibilidade de violação da simetria de Lorentz em determinados regimes de energia. Inicialmente, apresentaremos a motivação histórica por trás dessa ideia. Em seguida, introduziremos uma teoria que incorpora os conceitos de violação da simetria de Lorentz, com o intuito de aproximá-la dos resultados experimentais. Essa teoria é conhecida como Modelo Padrão Estendido (MPE). Posteriormente, abordaremos as flutuações de campo do Bumblebee, que fazem parte do setor gravitacional do MPE e representam um exemplo de modelo de gravidade modificada adotado nesta pesquisa. Por fim, aplicaremos esses conceitos a diferentes cenários gravitacionais, como cosmologia em mundos-brana e buracos negros.

2.1 Modelo Padrão Estendido (MPE)

Na física moderna, dois alicerces fundamentais sustentam nosso entendimento do universo: a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Geral (RG). Ambas são cruciais para compreender desde as interações mais elementares da matéria até a dinâmica e origem do cosmos. Embora tenham surgido praticamente na mesma época, esses dois pilares apresentam princípios distintos. O mundo quântico é intrinsecamente probabilístico, enquanto a RG é determinística. Entre as quatro interações fundamentais - eletromagnetismo, nuclear fraca, nuclear forte e gravidade - apenas a gravidade carece de uma descrição quântica fechada, conhecida como gravidade quântica (GQ). Apesar das inúmeras teorias propostas para essa quantização, a falta de evidências empíricas persiste.

A falta de evidências empíricas para o comportamento quântico da gravidade pode ser inicialmente justificada pela limitação tecnológica. Acredita-se que esse comportamento se manifestaria na chamada escala de Planck, onde $m_P \sim 10^{-19} GeV$. Essa escala está muito além da capacidade dos experimentos em altas energias realizados aqui na Terra. No entanto, a busca por esse comportamento está longe de ser encerrada. Existem abordagens para tentar detectá-lo de maneira indireta, e é neste ponto que a violação de Lorentz assume relevância.

A simetria de Lorentz é, inquestionavelmente, uma das simetrias mais fundamentais na física moderna, governando a invariância das leis físicas sob transformações de espaço-tempo. Apesar disso, entre as décadas de 1960 e 1990, surgiu a questão entre alguns físicos

sobre a possibilidade de quebrar essa simetria em algum regime de energia. Violações de simetrias na natureza são ocorrências comuns e bem documentadas. O Mecanismo de Higgs, por exemplo, é responsável pela geração de massa para partículas elementares no Modelo Padrão [45]. Outro exemplo é a violação da Paridade-Carga (CP), que foi experimentalmente observada em 1964 [46]. Ao longo da história, várias violações similares foram identificadas.

Dessa forma, não é surpreendente considerar a possibilidade de violação da simetria de Lorentz. Mas como isso poderia ocorrer? E, se ocorrer, como podemos detectar? Quais seriam as implicações de tal violação? Essas são questões cruciais que motivaram investigações aprofundadas nesse campo

Foi precisamente com as teorias candidatas à gravitação quântica que a quebra da simetria de Lorentz ganhou destaque. Modelos gravitacionais quânticos, indo além da Teoria da Relatividade Geral (GR), sugerem a presença de diversas “assinaturas relíquias” de efeitos gravitacionais quânticos em baixas energias, resultando em desvios das previsões da teoria padrão (Modelo Padrão mais RG) em regimes específicos. Esses fenômenos emergentes, frequentemente agrupados sob o termo “fenomenologia da GQ”, incluem a violação da simetria de Lorentz. Diversas teorias, como gravidade não-comutativa [47], gravidade de Hořava-Lifshitz [48], Gravidade em Laços [49], Relatividade Duplamente Especial [50], entre outras, introduzem essa violação de maneiras distintas. Isso pode ocorrer devido ao tratamento diferenciado do tempo e do espaço em diferentes intervalos de energia, à presença de uma direção preferencial no espaço-tempo, ou à introdução de outros invariantes além da velocidade da luz.

Contudo, o foco desta tese está nos modelos que introduzem a quebra espontânea da simetria de Lorentz por meio de um campo tensorial com valor esperado no vácuo (VEV) não nulo, resultando em uma direção preferencial. Denominamos essa violação como quebra espontânea da simetria de Lorentz. Esse mecanismo foi inicialmente descrito em 1989, em um artigo paradigmático que fundamenta esse conceito nas Teorias de Cordas [51]. Se, no futuro, detectarmos indícios de violação de Lorentz, isso seria uma forte indicação de um comportamento quântico para a gravitação. A questão que se coloca agora é: como podemos formular uma teoria capaz de descrever desvios da simetria de Lorentz, não necessariamente na escala de Planck?

Uma excelente candidata para essa teoria de campo efetiva é o chamado **Modelo Padrão Estendido** (MPE) [52]. Este modelo introduz a violação de Lorentz de maneira independente de qualquer teoria fundamental, embora tenha sido inicialmente inspirada por Teorias

de Cordas [51]. Para assegurar a consistência com a física já conhecida, o MPE deve incorporar o Modelo Padrão das partículas e a Relatividade Geral, incluindo termos que conduzam à violação de Lorentz. Adicionalmente, em 1991, demonstrou-se que além da quebra espontânea da simetria de Lorentz ser possível do ponto de vista do setor bosônico da teoria de cordas, essa violação também implicaria em uma quebra da simetria CPT [53].

Nos anos de 1997 e 1998, dois trabalhos fundamentais de Don Colladay e Alan Kostelecký estabeleceram as bases iniciais do Padrão Estendido do Modelo mínimo em um espaço-tempo plano [52, 54]. Esse *framework* forneceu uma estrutura teórica para violações da simetria de Lorentz em todo o espectro do Modelo Padrão de partículas, oferecendo *insights* sobre os tipos de sinais que poderiam ser observados em futuras pesquisas experimentais. Em 2004, os termos dominantes com violação da simetria de Lorentz no contexto de espaço-tempo curvo foram apresentados [55], completando, assim, o quadro do MPE mínimo. O foco desta parte da tese está direcionado exclusivamente para o setor gravitacional do MPE

Antes de nos aprofundarmos na construção do setor gravitacional do Modelo Padrão Estendido (MPE), é crucial distinguir dois tipos de violação de simetria: a explícita e a espontânea. A violação explícita é diretamente incorporada na lagrangiana do MPE, onde cada termo que infringe a simetria de Lorentz é um escalar sob as transformações de Lorentz do observador. Esses termos são construídos através da contração de operadores de campo padrão, sendo acompanhados por coeficientes de controle denominados coeficientes de violação de Lorentz. Devido à supressão pela escala de Planck, esses coeficientes tendem a ser pequenos.

Por outro lado, a quebra espontânea ocorre no nível das equações do movimento. Quando um campo tensorial adquire um valor esperado no vácuo (VEV) diferente de zero, ou seja,

$$\langle T_{\mu\nu\alpha\dots} \rangle = t_{\mu\nu\alpha\dots}, \quad (2.1)$$

esse VEV pode gerar uma direção preferencial no espaço-tempo. Em outras palavras, a lagrangiana é um invariante de Lorentz, mas o vácuo deixa de ser neste contexto. A interação desse VEV com a matéria ordinária pode deixar vestígios visíveis dessa violação, tornando-se objeto de busca em experimentos. Vale ressaltar que um resultado crucial, demonstrado por Kostelecký em 2004, é que apenas a quebra espontânea da simetria de Lorentz é compatível com as identidades de Bianchi [55]. Portanto, essa forma de quebra é adequada para implementar a violação no setor gravitacional. Embora não seja a única; podemos citar a geometria de Finsler [56]. Dessa forma, dado nosso interesse exclusivo no setor gravitacional, focaremos

especificamente na quebra da simetria de Lorentz gerada pela dinâmica de um campo de fundo.

Um resultado de extrema relevância relacionado a modelos que incorporam a quebra espontânea da simetria de Lorentz foi apresentado por Kostelecký. Utilizando o formalismo do *vierbein*, ele demonstrou que esse processo também acarreta na quebra do difeomorfismo [57]. Essa análise será detalhada a seguir..

Um objeto fundamental no formalismo é o vierbein e_μ^a , que pode ser entendido como fornecendo, em cada ponto da variedade espaço-tempo, uma ligação entre os componentes covariantes $T_{\mu\nu\alpha..}$ de um campo tensorial em uma base de coordenadas e os correspondentes componentes covariantes $T_{abc..}$ de um campo tensorial em um referencial local de Lorentz. Essa ligação é estabelecida por

$$T_{\mu\nu\alpha..} = e_\mu^a e_\nu^b e_\alpha^c T_{abc..} \quad (2.2)$$

O formalismo do *vierbein* permite o tratamento de ambos os tipos básicos de transformações do espaço-tempo relevantes para teorias da gravidade: transformações locais de Lorentz e difeomorfismos. Como? Primeiro, nós temos que diferenciar as duas transformações.

Considere um ponto P na variedade do espaço-tempo. As transformações locais de Lorentz em P agem sobre os componentes tensoriais $T_{abc..}$ por meio de uma matriz de transformação Λ^a_b aplicada a cada índice. Em contraste, um difeomorfismo é um mapeamento de P para outro ponto Q na variedade do espaço-tempo, com um mapeamento associado de tensores em P para tensores em Q . O puxamento de um tensor transformado em Q para P difere do tensor original em P . Portanto, torna-se evidente que, se localmente a simetria de Lorentz é violada, ou seja, $\langle T_{abc} \rangle \neq 0$, então da Eq. (2.2) $\langle T_{\mu\nu\nu} \rangle \neq 0$, uma vez que $\langle e_\mu^a \rangle = \delta_\mu^a$. Assim, a quebra espontânea e local da simetria de Lorentz induz uma violação espontânea da simetria de difeomorfismo também.

No contexto da violação de Lorentz, é essencial distinguir entre as transformações de observadores e as transformações de partículas. As transformações de observadores referem-se às mudanças de coordenadas e tempo entre sistemas de referência inerciais diferentes, mantendo-se a posição e o tempo das partículas inalterados. Essas transformações são fundamentais para preservar a consistência das leis da física em diferentes referenciais. Por outro lado, as transformações de partículas estão relacionadas às propriedades intrínsecas das partículas, como suas energias e momentos. Em cenários de violação de Lorentz, as transformações de observadores podem permanecer inalteradas, preservando a invariância de Lorentz para observações macroscópicas, enquanto as transformações de partículas podem ser afetadas, in-

introduzindo modificações nos valores das energias ou momentos das partículas. Essa distinção é crucial para compreender como a violação de Lorentz pode se manifestar em diferentes escalas, desde observações macroscópicas até propriedades fundamentais das partículas no nível microscópico. Para uma abordagem bastante pedagógica sobre essas transformações no contexto da violação de Lorentz, veja a Ref.[58].

Dentre os campos tensoriais que quebram espontaneamente a simetria de Lorentz, o mais simples é vetorial. Portanto, foram estabelecidos modelos no âmbito da teoria de campos efetivos que englobavam campos gravitacionais e um campo vetorial B_μ com um valor de vácuo não nulo,

$$\langle B_\mu \rangle = b_\mu. \quad (2.3)$$

Esses modelos ficaram conhecidos como **modelos de Bumblebee**¹. Podemos construir a densidade lagrangiana do setor puramente gravitacional do MPE com o campo de Bumblebee da seguinte forma [55]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) - \alpha_1 \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \alpha_2 \frac{1}{2} D_\mu B_\nu D^\mu B^\nu + \alpha_3 \frac{1}{2} D_\mu B^\mu D_\nu B^\nu \\ & + \beta_1 B_\mu B^\mu R + \beta_2 B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) + \mathcal{L}_m, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde \mathcal{L}_m é o termo de matéria e o primeiro termo é justamente o termo de Einstein-Hilbert com constante cosmológica. Os termos com as constantes α e β são os possíveis termos cinéticos e termos com acoplamento não-mínimo com a gravidade, respectivamente. Nós definimos que $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. O potencial V tem um mínimo com respeito ao seu argumento e é vinculado a ser zero quando

$$B_\mu B^\mu \mp b^2 = 0, \quad (2.5)$$

onde definimos e assumimos que

$$b_\mu b^\mu = \pm b^2 = \text{const.} > 0 \quad (2.6)$$

O sinal dessa constante depende da natureza do VEV, podendo ser do tipo-espaço (positivo), tipo-tempo (negativo) e nulo. Note que condição (2.5) é satisfeita quando tomamos a Eq. (2.6). Além disso, a forma do potencial pode ser escolhida de diversas maneiras. Como exemplo, temos o potencial com multiplicador de Lagrange estudado em [60]. No entanto, o exemplo

¹O termo “modelo do Bumblebee”, proposto por Kostelecký [59], é inspirado em um inseto cuja habilidade de voo por vezes foi questionada em termos teóricos, mas que, no entanto, demonstra a capacidade de voar com sucesso.

que iremos explorar mais adiante é um potencial quadrático suave. Esse formato possui características bastante especiais, como veremos.

Antes de estudar as consequências física para um potencial quadrático suave, nós iremos definir uma densidade lagrangiana que nos servirá como base. Essa densidade é dada pelo chamado **modelo Kostelecký-Samuel (KS)** obtido quando $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ na Eq. (2.4), portanto temos que

$$\mathcal{L}_{KS} = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) + \mathcal{L}_m. \quad (2.7)$$

Tanto a lagrangiana mais geral (2.4) quanto a lagrangiana KS (2.14) são invariantes sob as transformações de Lorentz locais e difeomorfismos. A violação ocorre quando um campo de fundo fixado adquire um valor de vácuo não nulo em um referencial de Lorentz local, desencadeando a quebra espontânea.

Como será evidenciado posteriormente, o modelo (2.14), com uma escolha apropriada de potencial, pode gerar modos de Nambu-Goldstone não massivos e modos massivos. No entanto, é relevante mencionar que existem várias soluções na literatura para diferentes configurações das escolhidas para obter a lagrangiana KS (2.14). Uma das configurações mais comuns introduz o acoplamento não-mínimo $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$. Considerando apenas as correções devido ao VEV, soluções foram encontradas para buracos negros [61–63], buracos de minhoca [64], e soluções cosmológicas [65]. Além disso, soluções foram encontradas com campos que são tensoriais antissimétricos, em vez de campos vetoriais, como discutido em [66].

2.2 Flutuações de campo Bumblebee

É amplamente reconhecido na literatura que a quebra espontânea da simetria resulta no surgimento de modos de campos. Esse fenômeno é particularmente evidente no Modelo Padrão das partículas, onde a quebra de simetrias internas ocorre de maneira proeminente. Um exemplo notável ocorre na quebra espontânea da simetria interna global, resultando no surgimento de um ou mais modos não massivos de Nambu-Goldstone [67, 68]. Em contraste, quando a simetria é local, emerge a presença de modos massivos, um fenômeno elucidado pelo bem-conhecido Mecanismo de Higgs [69]. Tanto o modo não massivo quanto o massivo, a quebra espontânea de simetria geralmente é motivada pelo termo potencial na densidade de Lagrange. A configuração do campo de vácuo se encontra no mínimo V_0 de V . Os modos de Nambu-Goldstone sem massa podem ser interpretados como as excitações do campo em

torno do vácuo, preservando o valor V_0 . Por outro lado, em muitos casos de potenciais, surgem excitações adicionais associadas a valores diferentes de V . Essas excitações, comumente denominadas modos de Higgs, representam modos massivos suplementares que se distinguem de quaisquer campos de calibre massivos. Portanto, os modos massivos (Higgs) são excitações que não se mantêm no mínimo do potencial. Nesse contexto, os modos massivos são ortogonais às excitações de Nambu-Goldstone. Agora, surge a indagação: caso optemos por quebrar simetrias externas, como a simetria de Lorentz, em vez de simetrias internas de forma espontânea, esses mesmos modos poderiam emergir?

A resposta para essa pergunta é afirmativa! Em primeiro lugar, foi demonstrado em 2005 que há modos de Nambu-Goldstone que emergem da quebra espontânea da simetria local de Lorentz. Além disso, ficou evidenciado que esses modos estão intrinsecamente relacionados tanto à geometria do espaço-tempo quanto à dinâmica do campo tensorial, desencadeando a violação espontânea das simetrias locais de Lorentz e do difeomorfismo [57]. A propagação, ou seja, a dinâmica desse modo não massivo, depende da lagrangiana adotada. No caso de interesse, isto é, a lagrangiana KS (2.14), é possível demonstrar que os únicos modos de Nambu-Goldstone que se propagam são dois modos transversais sem massa, apresentando propriedades análogas às do fóton em um calibre axial [70].

A produção de modos tipo-Higgs por meio da quebra espontânea da simetria de Lorentz não é tão direta quanto a geração dos modos não massivos. Essa complexidade advém do fato de que, na Relatividade Geral, com quebra espontânea de Lorentz, reconhece-se que um mecanismo de Higgs convencional não pode atribuir massa ao gráviton. Isso ocorre devido ao análogo do termo de massa do Higgs usual, que incorpora derivadas da métrica [71]. No entanto, podemos construir mecanismos gravitacionais de geração de massa com violação de Lorentz, porém distintos do Mecanismo de Higgs convencional [69] e do gravitacional sem violação de Lorentz [72]. Podemos citar o Mecanismo de Higgs de Lorentz, onde usando *vierbein* é possível mostrar que quando o modo de Nambu-Goldstone desempenha o papel de uma componente extra da conexão de spin, alguns componentes da conexão de spin adquirem massa através das derivadas covariantes [57]. Outro exemplo, que será escolhido nesta tese para a geração de massa, é o chamado **Mecanismo de Higgs Alternativo**, introduzido em [70].

Este mecanismo gravitacional de geração de massa difere do mecanismo de Higgs convencional. Isso ocorre porque, no padrão estabelecido por Higgs, o potencial sem derivadas não inclui o próprio campo de calibre, o que impede que o potencial contribua diretamente

para a geração de massa do campo de calibre. O ponto crucial aqui é garantir que o potencial inclua tanto o campo vetorial quanto a métrica. Nesse caso, podemos aplicar isso no contexto da violação espontânea de Lorentz e difeomorfismo de maneira simples, assumindo que o potencial seja quadrático suave da seguinte maneira:

$$V = \frac{\lambda}{2} (B_\mu B^\mu \mp b^2)^2. \quad (2.8)$$

onde λ é uma constante de acoplamento que mede a “força” da violação de Lorentz. Note que a métrica também está presente neste potencial, pois $B_\mu B^\mu = g^{\mu\nu} B_\mu B_\nu$. Neste caso, o valor de vácuo b_μ é uma solução de $V = V' = 0$, onde o $'$ é a derivada em relação ao argumento do potencial, ou seja, $X = B_\mu B^\mu \mp b^2$.

Agora, vamos explorar as excitações dos campos. Para fazer isso, estudaremos essas excitações em torno da solução de vácuo b_μ e, a partir disso, classificaremos essas excitações. Os dois principais tipos de excitações que abordaremos aqui são: os modos de Nambu-Goldstone e o modo massivo. Os primeiros são gerados pela ação virtual dos geradores quebrados de Lorentz e difeomorfismo no vácuo da violação da simetria. Além disso, eles preservam a condição de vácuo $V = 0$ e $V' = 0$. Por outro lado, os modos massivos são excitações para as quais a quebra de simetria gera termos de massa quadrática, com $X \neq 0$ e potencial diferente de zero, $V \neq 0$ e $V' \neq 0$. Para ver isso na prática vamos adotar a seguinte decomposição proposta em Ref.[70], dada por

$$B_\mu = b_\mu + \chi_\mu \quad (2.9)$$

onde χ representa as excitações do campo de Bumblebee em torno do valor do vácuo e que podem ser decompostas em

$$\chi_\mu = \tilde{A}_\mu + \beta \hat{b}_\mu, \quad (2.10)$$

onde \tilde{A}_μ é o modo transversal e $\beta \hat{b}_\mu$ é o modo longitudinal (todos em relação à campo de fundo b_μ). Nós podemos definir isso de uma maneira mais formal através dos operadores de projeção

$$P_{\mu\nu}^{\parallel} = \frac{b_\mu b_\nu}{b^\alpha b_\alpha} \quad (2.11)$$

$$P_{\mu\nu}^{\perp} = g_{\mu\nu} - \frac{b_\mu b_\nu}{b^\alpha b_\alpha} \quad (2.12)$$

onde nós temos que $\tilde{A}_\mu = P_{\mu\nu}^{\perp} \chi^\nu$ e $\beta \hat{b}_\mu = P_{\mu\nu}^{\parallel} \chi^\nu$. Como consequência, nós temos que $\tilde{A}_\mu b^\mu = 0$ - por esse motivo chamamos esse modo de transversal -, e mais $\hat{b}_\mu \hat{b}^\mu = \mp 1$, onde $\hat{b}_\mu = \frac{b_\mu}{\sqrt{b^2}}$. Finalmente, podemos substituir a expansão (2.9) no potencial (2.8), e se nós considerarmos até

o termo quadrático em β , nós encontramos que

$$V \approx 4\lambda[(\hat{b}^\alpha b_\alpha)\beta]^2, \quad (2.13)$$

i.e., $V(X) \neq 0$ e $V' \neq 0$, portanto o modo longitudinal é o nosso modo massivo! Além disso, entre todas as excitações, apenas o modo longitudinal β do campo de Bumblebee é invariante tanto sob difeomorfismos de partículas quanto sob transformações locais de Lorentz. É, portanto, um grau de liberdade físico em qualquer calibre. Isso será um fato importante, pois, como veremos, a teoria KS pode ser uma candidata a eletrodinâmica em um calibre axial, como mostrado na Ref.[70] .

2.2.1 Modelo Einstein-Bumblebee com Mecanismo de Higgs Alternativo

O modelo que vamos explorar no restante da parte II dessa tese é descrito pela seguinte ação

$$S_{KS} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (B_\mu B^\mu \mp b^2)^2 \right] + S_m. \quad (2.14)$$

onde $\sqrt{-g}$ é o determinante da métrica e $\kappa^2 = 8\pi G$. Vamos obter as equações do movimento para esta ação e, posteriormente, vamos substituir a decomposição (2.9) nela, com o objetivo de analisar as flutuações de Bumblebee em espaço-tempo curvo. Variando (2.14) em relação à métrica, nós obtemos que

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein dado por (1.47) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^V \quad (2.16)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^K = B_\mu{}^\alpha B_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} B_{\alpha\sigma} B^{\alpha\sigma} \quad (2.17)$$

e

$$T_{\mu\nu}^V = -V g_{\mu\nu} + 2V' B_\mu B_\nu. \quad (2.18)$$

Por outro lado, se nós variarmos agora (2.14) em relação ao campo de Bumblebee nós obtemos que

$$D_\nu B^{\nu\mu} = J_B^\mu \quad (2.19)$$

onde J_B^μ surge da autointeração do Bumblebee e é dada por

$$J_B^\mu = 2V' B^\mu. \quad (2.20)$$

Além disso, a antissimetria do campo de força de bumblebee $B_{\mu\nu}$ implica uma lei de conservação:

$$D_\mu J_B^\mu = 0. \quad (2.21)$$

Antes de explorarmos as flutuações do Bumblebee em espaço-tempo curvo, precisamos abordar um desafio prévio: como definir o VEV b_μ em um ambiente de espaço-tempo curvo? Ao contrário do espaço-tempo plano, que nos permite estabelecer um VEV constante, $\partial_\mu b_\nu = 0$ (consulte a Figura 4), a curvatura impõe restrições ao VEV de b_μ . De fato, a suposição de um VEV covariante constante, ou seja, $D_\mu b_\nu = 0$, resulta na restrição $b_\mu R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} = 0$ (veja a Figura 5)². Essa restrição implica que a curvatura desaparece na direção do vetor de fundo.

Adotar uma definição de VEV menos restritiva, supondo que a norma do VEV $b^2 = g^{\mu\nu} b_\mu b_\nu$ é constante, leva a seguinte condição no VEV:

$$(D_\nu b^\mu) b_\mu = 0. \quad (2.22)$$

Portanto, daqui em diante, adotaremos essa restrição da norma b^2 constante, conforme expresso na Equação (2.6).

Substituindo a decomposição (2.9) na Eq.(2.19), encontramos que

$$\square \chi^\nu - D^\nu (D_\mu \chi^\mu) - R_\sigma{}^\nu \chi^\sigma + D_\mu b^{\mu\nu} \approx 4\lambda (\chi^\mu b_\mu) b^\nu, \quad (2.23)$$

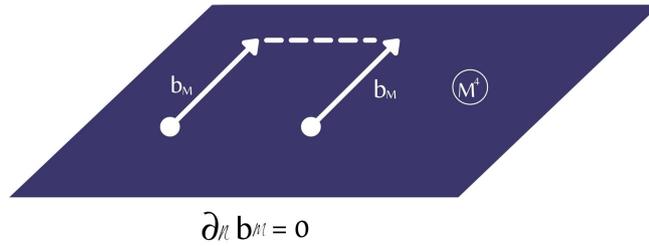
onde $b_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$ e $\chi_{\mu\nu} = \partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu$. Além disso temos que $\square = D_\mu D^\mu = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$ é o operador D' Alembertiano. Podemos fazer a mesma substituição no tensor energia-momento (2.16), assim temos que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \approx & b_\mu{}^\alpha b_{\nu\alpha} + b_{\{\mu}{}^\alpha \chi_{\nu\}\alpha} + \chi_\mu{}^\alpha \chi_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} b_{\alpha\sigma} b^{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} b_{\alpha\sigma} \chi^{\alpha\sigma} \\ & - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \chi_{\alpha\sigma} \chi^{\alpha\sigma} - 2\lambda (b_\alpha \chi^\alpha)^2 g_{\mu\nu} + 4\lambda (b_\alpha \chi^\alpha) b_\mu b_\nu + 8\lambda (b_\alpha \chi^\alpha) b_\mu \chi_\nu, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde descartamos os termos de terceira ordem nas flutuações χ . Além disso, é importante notar que para a solução de vácuo, ou seja, $B_\mu = b_\mu$ a Eq. (2.19) é dado por $D_\mu b^{\mu\nu} = 0$, pois

²Em ambas as figuras, as equações são apresentadas com índices latinos maiúsculos, estendendo nossa análise para modelos com dimensões extras, como os de Randall-Sundrum. Essa escolha é feita porque uma das aplicações desta parte da tese está relacionada a modelos de branas.

Figura 4: O campo de fundo b_μ definido globalmente em um espaço-tempo de Minkowski M_4 .



Fonte: elaborado pelo autor.

temos um mínimo do potencial, $V' = 0$, para a solução de vácuo. Mas, como mostrado na Eq.(2.23), quando assumimos flutuações em torno do valor do vácuo, esta equação de movimento é modificada pelas flutuações. O próximo passo consiste em assumir a decomposição (2.10) na equação acima e estudar os modos transversais (Nambu-Goldstone não massivos) e modos longitudinais (massivos) em um espaço-tempo de fundo curvo. Esta tarefa, nada trivial, envolve tentar desacoplar esses modos.

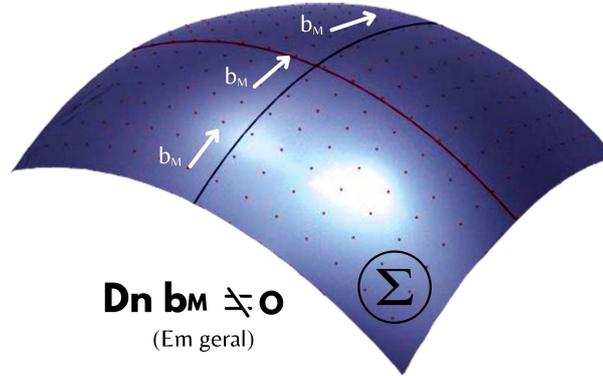
Usando a decomposição (2.10) e as condições (2.6) e $\tilde{A}^\mu b_\mu = 0$, a equação de movimento para o modo longitudinal β é dado por

$$\begin{aligned}
 (\square\beta)(\hat{b}^\mu b_\mu) - [R_\nu{}^\mu \hat{b}^\nu b_\mu - (\square\hat{b}_\mu)b^\mu + 4\lambda(\hat{b}^\mu b_\mu)(b^\nu b_\nu)]\beta \approx \\
 (D_\nu b^{\mu\nu})b_\mu + b_\mu [D^\mu (D_\nu \tilde{A}^\nu)] + R_\sigma{}^\mu \tilde{A}^\sigma b_\mu + 2(D_\nu \tilde{A}^\mu)(D^\nu b_\mu) \\
 + \tilde{A}^\mu (D^\nu D_\nu b_\mu),
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

enquanto o modo transversal \tilde{A}_μ é governado por

$$\begin{aligned}
 \square\tilde{A}^\nu - D^\nu D_\mu \tilde{A}^\mu - R_\mu{}^\nu \tilde{A}^\mu \approx [4\lambda(b^\mu \hat{b}_\mu)b^\nu - R_\mu{}^\nu \hat{b}^\mu]\beta \\
 + \square(\beta\hat{b}^\nu) + D_\mu b^{\nu\mu}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Figura 5: O campo de fundo b_μ , em geral, **não** pode ser definido globalmente em um espaço-tempo de curvo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Além desse conjunto de equações, a Eq.(2.21) de conservação gera um vínculo adicional para o modo massivo dada por

$$D_\mu(\beta b^\mu) \approx 0. \quad (2.27)$$

Ao contrário do espaço-tempo de Minkowski [70], em um espaço-tempo geral, não é possível desacoplar os modos longitudinal e transversal. Essa limitação surge devido à natureza curva do espaço-tempo, resultando em um Valor Esperado no Vácuo (VEV) variável e em novos acoplamentos entre as flutuações e o tensor de curvatura. No entanto, como discutiremos na próxima seção, ao impor certas simetrias no espaço-tempo e selecionar VEVs que preservam essas simetrias, é possível alcançar a desacoplação desses modos.

2.3 Aplicações com excitações de Bumblebee

Nesta seção, exploraremos diversas aplicações envolvendo as excitações de Bumblebee, considerando a presença dessas flutuações e do Valor Esperado no Vácuo (VEV) b_μ em um espaço-tempo curvo. Assim, adotaremos a condição (2.6) para o VEV e as Eqs (2.25), (2.26) e (2.27) para as flutuações. No entanto, é importante destacar que, devido à curvatura, esses modos estão intrinsecamente acoplados. Superar esse desafio se torna possível em deter-

minadas configurações de vácuo e simetrias do espaço-tempo, conforme demonstraremos nos exemplos a seguir. Desta forma, o propósito inicial desta seção da tese é compreender como a geometria modifica a dinâmica das flutuações e, posteriormente, explorar como essas flutuações influenciam a geometria do espaço-tempo.

2.3.1 Excitações de Bumblebee em cosmologia de mundo-branas

Esta primeira aplicação é baseada no artigo [73]. Nesta primeira aplicação, abordaremos a influência da curvatura e da dimensão extra na propagação das excitações de Bumblebee, considerando a métrica (2.102). Em outras palavras, examinaremos como os modelos de Randall-Sundrum afetam a dinâmica dos modos de Bumblebee e, além disso, investigaremos como a presença de uma brana cosmológica e a expansão do universo impactam esses modos.

A ação que exploraremos é análoga à apresentada em (2.14). No entanto, como estaremos fixando a geometria, não incluiremos o termo de Einstein-Hilbert; em outras palavras, não estaremos interessados no *backreaction*, ou seja, não investigaremos como as flutuações de Bumblebee afetam a geometria. Além disso, substituiremos os índices gregos por índices latinos maiúsculos, uma vez que estamos introduzindo uma dimensão extra. Assim, podemos definir o modelo KS em 5D da seguinte maneira:

$$S_{KS} = \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{\alpha}{4} B^{MN} B_{MN} - \frac{\lambda}{2} (B^M B_M \pm b^2)^2 \right], \quad (2.28)$$

onde $\sqrt{-g}$ é o determinante da métrica no espaço-tempo de 5 dimensões, cujo intervalo é $ds_5^2 = g_{MN} dx^M dx^N$. Para manter a dimensão de massa do campo Bumblebee igual a um, introduzimos a constante α também com dimensão de massa igual a um, cujos detalhes discutiremos posteriormente.

Para investigar os efeitos da curvatura do espaço-tempo e das dimensões extras no campo Bumblebee, adotamos uma geometria especial de dobra da forma:

$$ds_5^2 = e^{-2cy} ds_{brana}^2 + dy^2, \quad (2.29)$$

onde e^{-2cy} é o fator de dobra do modelo de Randall-Sundrum (RS), que depende apenas da dimensão extra y . Na verdade, é a mesma métrica já introduzida na parte I dessa tese, veja a Eq. (2.102). A constante c tem dimensão de massa e está relacionada a curvatura do *bulk* [30]. Para um 3-brana plana, ou seja, $ds_{brana}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, essa métrica um espaço-tempo anti-de Sitter,

AdS_5 , que em coordenadas conformes tem a forma de

$$ds_5^2 = \frac{l^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (2.30)$$

onde $l = 1/c$ é o raio de AdS e

$$z = le^{cy}. \quad (2.31)$$

O espaço-tempo anti-de Sitter é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica negativa da forma $R_{MN} - 1/2Rg_{MN} + \Lambda_0g_{MN} = 0$, com $\Lambda_0 = -6c^2$. É nesse espaço-tempo de fundo simétrico que estudamos o comportamento das flutuações do Bumblebee.

Vamos primeiro analisar os efeitos da ação efetiva da curvatura do espaço-tempo extra na dimensão $3 + 1$ e as correspondentes constantes efetivas λ e α . Suponha que o campo Bumblebee e sua expectativa de valor no vácuo (VEV) tenham uma dependência na dimensão extra conforme z , da seguinte forma: $B_M = \tilde{B}_M(x^\mu)\Upsilon(z)$ e $b_M = \tilde{b}_M(x^\mu)\Psi(z)$. Assim, a condição do VEV (2.6) leva a:

$$b_M = (l/z)\tilde{b}_M(x^\mu) \quad (2.32)$$

onde $\tilde{b}_M\tilde{b}^M = \tilde{b}^2$ é constante em relação à métrica plana de 5-dimensões do tipo Minkowski $\eta_{MN}dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2$. Supondo que o campo Bumblebee decai conforme o VEV b_M , obtemos $B_M = (l/z)\tilde{B}_M(x^\mu)$.

Vamos agora considerar duas 3-branas paralelas e fixas, uma na origem e outra em $y = L$, o conhecido modelo RS-I [30]. Para $b_M = (l/z)\tilde{b}_M(x^\mu)$ e $B_M = (l/z)\tilde{B}_M(x^\mu)$, o termo potencial é dada por

$$S_V = -\frac{1}{2} \int dy \lambda e^{-4cy} \int d^4x \sqrt{-g_4} (\eta^{\mu\nu} \tilde{B}_\mu \tilde{B}_\nu \pm b^2)^2. \quad (2.33)$$

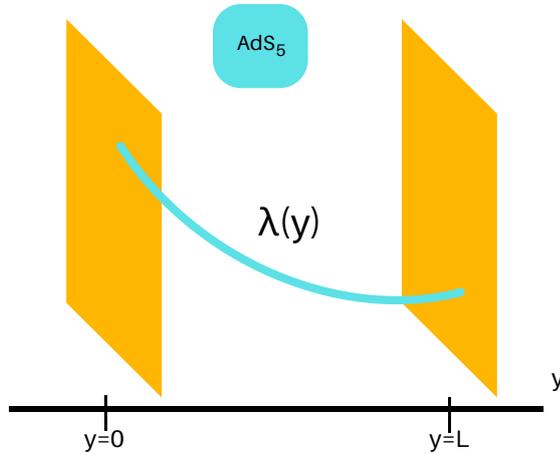
Portanto, podemos definir uma constante de acoplamento auto-interagente dependente de y , $\lambda(y)$, como

$$\lambda(y) = \lambda e^{-4cy}. \quad (2.34)$$

Veja a Fig. (6).

Para uma dada 3-brana, y_0 é fixo e, portanto, $\lambda(y_0)$ é a constante de acoplamento nessa 3-brana. Assim, a curvatura AdS_5 no modelo RS I resulta em uma supressão exponencial da constante de auto-interação do Bumblebee entre a 3-brana em $y = 0$ e em $y = L$. Dessa forma, a curvatura do *bulk* reduz os efeitos da violação de Lorentz na 3-brana localizada em $y = L$

Figura 6: Constante de acoplamento em função da dimensão extra no modelo RS-I



Fonte: elaborado pelo autor.

Realizando a redução dimensional no termo cinético, obtemos

$$S_K = -\frac{1}{4} \int (\alpha e^{-2cy} dy) \int d^4x \tilde{B}^{\mu\nu} \tilde{B}_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Portanto, α tem a seguinte dependência ao longo da dimensão extra

$$\alpha(y) = \alpha e^{-2cy}. \quad (2.36)$$

Portanto, a curvatura AdS_5 reduz os efeitos da dinâmica do Bumblebee na brana visível em $y = L$ tanto nos termos cinéticos quanto nos potenciais.

Outro cenário curvo com dimensão extra é fornecido pelo modelo RS II, no qual há apenas uma 3-brana na origem [31]. Integrando o termo potencial 5-D na dimensão extra, obtemos

$$S_V = -\frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-4cy} dy \int d^4x \sqrt{-g_4} (\eta^{\mu\nu} \tilde{B}^\mu \tilde{B}_\mu \pm b^2)^2. \quad (2.37)$$

Assim, a constante efetiva de acoplamento $(3+1)$ na 3-brana fina na origem é dada por

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{2c} \lambda. \quad (2.38)$$

Como c tem dimensão de massa um, para uma constante de acoplamento auto-interagente do Bumblebee de cinco dimensões λ com dimensão de massa um, então λ_{eff} é uma constante

adimensional. Para o α , integrando o termo cinético ao longo da dimensão extra, obtemos

$$S_K = -2\alpha \int_0^\infty (e^{-2cy} dy) \int d^4x B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Portanto, a relação entre o α de cinco dimensões e o α_{eff} de quatro dimensões é dada por

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{2c}. \quad (2.40)$$

Mais uma vez, o α_{eff} efetivo na brana é adimensional e não depende do comprimento da dimensão extra, mas da curvatura do espaço-tempo AdS_5 . Um resultado de redução dimensional semelhante aparece no modelo original RS II para a constante gravitacional e a escala eletrofraca [31].

• Flutuações de Bumblebee em cosmologia de branas

Agora, vamos analisar como as flutuações do Bumblebee se propagam na 3-brana e ao longo da dimensão extra. Como mencionado anteriormente, os modos transversais e longitudinais estão fortemente acoplados devido à curvatura do espaço-tempo. No entanto, como demonstraremos a seguir, ao assumir espaços-tempo com determinadas simetrias e fazer escolhas apropriadas para VEV b_M , podemos desacoplar esses modos. Para iniciar, consideramos uma 3-brana FRW imersa em um *bulk* AdS_5 , descrita por

$$ds^2 = e^{-2cy} (-dt^2 + a(t)^2 dx^i dx_i) + dy^2, \quad (2.41)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $i = 1, 2, 3$.

Considere um VEV de natureza espacial apontando ao longo da dimensão extra. Então, em coordenadas conforme, b_M possui apenas uma quinta componente não nula na forma

$$b_M = (0, \vec{0}, \tilde{b} \begin{pmatrix} l \\ z \end{pmatrix}), \quad (2.42)$$

onde \tilde{b} é uma constante que surge da condição de norma constante (2.6). A escolha de VEV em (2.42) resulta em uma força de campo nula, ou seja, $b_{MN} = 0$. Além disso, essa escolha de VEV restringe o modo transversal A^M à 3-brana, ou seja, $A^4 = 0$, uma vez que $\tilde{A}^M b_M = 0$

Vamos realizar a decomposição Kaluza-Klein (KK) para o modo transversal na forma

$$A_\mu(x, z) = \tilde{A}_\mu(x) \Gamma(z). \quad (2.43)$$

Da Eq. (2.26), a dependência da brana para o modo transversal \tilde{A}_μ satisfaz

$$\frac{1}{\sqrt{-g_4}} \partial_\mu (\sqrt{-g_4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} \tilde{F}_{\alpha\lambda}) = m^2 \tilde{A}^\nu, \quad (2.44)$$

enquanto a dependência da dimensão extra é regida por

$$\Gamma'' - \frac{1}{z} \Gamma' + m^2 \Gamma = 0, \quad (2.45)$$

onde $\tilde{F}_{\alpha\lambda} = \partial_\alpha \tilde{A}_\lambda - \partial_\lambda \tilde{A}_\alpha$ e m é uma constante chamada massa KK.

A solução da Eq. (2.45) é dada pelas funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, como $\Gamma(z) = \Gamma_1 z J_1(mz) + \Gamma_2 z Y_1(mz)$, onde $\Gamma_{1,2}$ são constantes. Assim, similar ao campo vetor de calibre, o modo transversal de Bumblebee adquire massa devido à redução dimensional [74].

Para o modo sem massa, ou seja, para $m^2 = 0$, a Eq. (2.45) leva a uma solução

$$\Gamma(z) = \Gamma_0 + \frac{c_1}{2} z^2, \quad (2.46)$$

onde Γ_0 e c_1 são constantes. Além disso, observe que $\Gamma(z)$ cresce com z , enquanto \tilde{A}_μ satisfaz $D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Portanto, o modo transversal de Bumblebee se propaga livremente na 3-brana e ao longo da dimensão extra. Similarmente ao campo de calibre de Maxwell, é necessária uma interação adicional, fornecida pelo campo dilatón, para aprisionar o modo transversal de Bumblebee na brana [74].

Para o modo longitudinal, ao assumir a decomposição KK

$$\beta(x, z) = \tilde{\beta}(x) \Upsilon(z), \quad (2.47)$$

a Eq. (2.25) simplifica para

$$\left[D_4 D^4 \Upsilon + \left(\frac{4}{l^2} + \hat{b}^4 \square \hat{b}_4 \right) \Upsilon \right] \tilde{\beta} + \left[D_\mu D^\mu \tilde{\beta} + 4\lambda \tilde{b}^2 \tilde{\beta} \right] \Upsilon = \hat{b}_4 D^4 D_\mu A^\mu. \quad (2.48)$$

Considerando a lei de conservação Eq. (2.27) para o caso tipo-espaço, encontramos que

$$\frac{\tilde{b} \tilde{\beta}}{(l/z)^5} \partial_4 \left((l/z)^4 \Upsilon \right) = 0, \quad (2.49)$$

ou seja, a solução é dada por $\Upsilon(z) = \Upsilon_0 (z/l)^4$, onde Υ_0 é uma constante. Substituindo $\Upsilon(z)$ na equação acima, encontramos que

$$D_\mu D^\mu \tilde{\beta} + 4\lambda \tilde{b}^2 \tilde{\beta} = \Upsilon_0 (l/z)^3 \partial_4 \Gamma D_\mu \tilde{A}^\mu. \quad (2.50)$$

Note que o primeiro termo da Eq. (2.48), que carrega a dependência com a dimensão extra, se anula devido à Eq. (2.49). Além disso, a massa KK do modo transversal acopla \tilde{A}_μ a $\tilde{\beta}$. Para o modo transversal sem massa, $m^2 = 0$, e considerando que o campo Γ se anula no infinito, ou seja, $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const.}$, os modos transversal e longitudinal se desacoplam, recuperando assim a simetria U(1). Outro ponto importante que precisamos enfatizar a partir da Eq. (2.50) é que, devido à lei de conservação de corrente (2.49), o modo longitudinal no caso tipo-espaço não gerou torres de Kaluza-Klein. Uma análise das torres de KK na presença de campos éter que violam Lorentz no espaço-tempo com dimensões extras foi feita em Ref. [75].

Finalmente, vamos explorar os efeitos da expansão cosmológica da brana na dinâmica do modo massivo. Assumindo que $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(t)$ em $m^2 = 0$, a Eq. (2.50) leva a

$$\ddot{\tilde{\beta}} + 3H\dot{\tilde{\beta}} + 4\lambda\tilde{b}^2\tilde{\beta} \approx 0, \quad (2.51)$$

onde o ponto representa a derivada em relação ao tempo e $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ é o fator de Hubble. Podemos ver novamente que os termos da parte cinética de β que dependem de z se anulam com os termos de massa devido à restrição (2.49). Note também que a expansão cosmológica produz um termo dissipativo proporcional a $3H$. Para uma fase acelerada de Sitter, ou seja, $a(t) \propto e^{H_0 t}$, a solução da equação (2.51) é dada por

$$\tilde{\beta} = \beta_0 e^{-\frac{1}{2} \left(3H_0 + \sqrt{9H_0^2 - 16\lambda\tilde{b}^2} \right) t} \quad (2.52)$$

onde β_0 e H_0 são constantes. Supondo $H_0 \approx 10^{16} \text{ GeV}$ (era da inflação), o modo longitudinal decai em um tempo de amortecimento $\Delta t \approx 10^{-16} (\text{GeV})^{-1}$, correspondendo a um tempo cósmico de cerca de 10^{-38} segundos. Para $m^2\beta = \lambda\tilde{b}^2 \sim H_0^2$, o modo longitudinal tem a mesma ordem de grandeza que a escala GUT³ e decai exponencialmente no tempo. Para $m_\beta^2 \ll H_0^2$, β decai exponencialmente. Por outro lado, para $m^2\beta > \frac{9}{16}H_0^2$, o modo massivo exibe uma oscilação amortecida com frequência $\omega_\beta = \sqrt{16m_\beta^2 - 9H_0^2}$.

Principais Resultados

Assumindo duas 3-branas finas paralelas incorporadas em um volume AdS_5 (modelo RS-I), o espaço-tempo curvo leva a uma supressão exponencial da constante de acoplamento auto-interagente λ entre as branas e o VEV do Bumblebee b_M também decai com a dimensão extra. Portanto, a curvatura de AdS_5 no modelo RS-I pode explicar os efeitos de

³Grand Unified Theory, inglês.

violação de Lorentz ainda não observados como resultado da supressão ao longo da dimensão extra. O parâmetro α , que foi incluído para manter o campo Bumblebee com dimensão de massa um, acaba sendo equivalente a uma configuração específica de campo dilaton. Uma vez que o campo dilaton surge devido à simetria conforme da superfície do mundo de corda; uma extensão do presente trabalho analisando a possível invariância conforme e suas respectivas acoplagens ao campo Bumblebee parece promissora.

Também estudamos a propagação das flutuações do campo Bumblebee $\chi_M = B_M - b_M$ sobre o VEV b_M . Ao assumir o VEV b_M ao longo da quinta dimensão, o modo transversal A_M não tem componente na dimensão extra. Ao contrário do campo Bumblebee no espaço-tempo plano [70], a curvatura e o VEV variável b_M tornam o modo NG transversal A_M e os modos longitudinais β altamente acoplados. Assumindo a decomposição de Kaluza-Klein (KK) para os modos, encontramos uma torre de massas KK para o modo transversal. O modo longitudinal adquiriu apenas uma massa que viola a Lorentz, $m_\beta^2 = \lambda b^2$, pois a lei de conservação de corrente impede que β adquira massas KK.

Ao longo da 3-brana fina, a evolução cosmológica da brana também modificou a propagação do modo longitudinal. Ao assumir uma 3-brana FRW incorporada no *bulk* AdS_5 , a curvatura da brana devido à expansão cosmológica leva a um termo dissipativo proporcional à constante de Hubble $H = \dot{a}/a$. Para uma expansão acelerada de de Sitter, a taxa de decaimento temporal é proporcional a $1/H_0$. Assim, a expansão cósmica suprime o modo longitudinal β , deixando apenas o modo NG A_M em tempos tardios. Portanto, se a violação espontânea da simetria de Lorentz ocorreu no início do universo, o período inflacionário pode ter suprimido fortemente os efeitos do modo longitudinal. Assim, essa supressão cosmológica pode explicar o modo longitudinal ainda não ser observado. Este resultado sugere uma análise adicional dos efeitos combinados de flutuações Bumblebee, gravidade e matéria no início do universo.

2.3.2 Soluções de buracos negros em um modelo Einstein-Bumblebee-Dilaton

A segunda aplicação das excitações de Bumblebee é contextualizada no estudo de soluções de buracos negros, conforme detalhado na Ref. [76]. O objetivo central deste estudo é investigar os efeitos do acoplamento do campo escalar dilaton ao campo Bumblebee em um espaço-tempo caracterizado por simetria estática e simetria esfericamente simétrica.

Diferentemente da abordagem anterior, agora estamos tratando o problema de forma mais abrangente. Não nos limitamos a examinar apenas como o espaço-tempo curvo influencia a dinâmica das flutuações, mas também exploramos como essas flutuações modificam a

geometria do buraco negro em questão.

O modelo que adotaremos é definido pela seguinte ação:

$$S_{KS} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \right) - \frac{e^{2\tilde{a}\phi}}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{\lambda e^{2\tilde{a}\phi}}{2} (B^\mu B_\mu - b^2)^2 \right]. \quad (2.53)$$

A principal inovação na ação dada pela Eq. (2.53) reside na presença do campo escalar sem massa ϕ , também conhecido como dilaton. O acoplamento do dilaton introduz uma espécie de amortecimento na dinâmica do campo Bumblebee. Embora a interação do dilaton no modelo Einstein-Maxwell-escalar tenha sido extensivamente estudada [77–79], nosso foco aqui é estender essas análises para o campo Bumblebee e suas flutuações associadas.

É importante notar que a ação apresentada na Eq. (2.53) pode ser formalmente derivada por meio da redução dimensional de Kaluza-Klein, um procedimento detalhado no apêndice (A). Vale ressaltar que na ação não há termos de acoplamento não minimal do tipo $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$. Consequentemente, as análises e resultados apresentados neste estudo diferem significativamente daqueles encontrados na Ref. [80].

Como mostrado por Ref.[73], os modos longitudinal e transversal estão altamente acoplados em espaços-tempo curvos em geral. No entanto, é possível simplificar a análise para espaços-tempo com certas simetrias. Portanto, vamos assumir um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico na forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + R(r)^2 d\Omega_2^2 \quad (2.54)$$

onde $d\Omega_2^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$.

Supondo que o VEV tenha uma direção preferencial apenas na direção radial, é fácil mostrar que a única componente não nula do VEV depende apenas da coordenada radial, ou seja, temos que $b_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} b_{\nu]} = 0$. Além disso, temos que $\tilde{A}^r = 0$, devido à decomposição $b_\mu \tilde{A}^\mu = 0$. Considerando tudo isso, substituímos a decomposição (2.10) na ação (2.53) e assumimos o espaço-tempo (2.54). Isso nos leva à seguinte ação linearizada em relação às flutuações do Bumblebee

$$S_{KS} \approx \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(R - \frac{1}{2} (\partial\phi(r))^2 \right) - \frac{e^{2\tilde{a}\phi(r)}}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - 2\lambda b^2 \beta_0^2 e^{2\tilde{a}\phi(r)} \right]. \quad (2.55)$$

É relevante mencionar que não há termo cinético para o modo longitudinal β . Isso se deve precisamente à escolha do VEV e à simetria estática e esférica do espaço-tempo [73]. Portanto, o $\beta = \beta_0$ é uma constante nessa configuração. Esse resultado concorda com o fato de que, em

espaços-tempo planos, o modo longitudinal β não se propaga.

A ação na Eq.(2.55) se assemelha à ação Einstein-Maxwell-dilaton com um termo de constante cosmológica $\Lambda = \lambda b^2 \beta_0^2$. Esse termo de constante cosmológica também é amortecido pela interação com o dilaton. Portanto, o modo transversal do Bumblebee \tilde{A}_μ é semelhante ao campo de calibre e o modo longitudinal $\tilde{\beta}$ fornece uma fonte para uma constante cosmológica. Através dessa identificação, podemos calcular um limite superior para o modo massivo não dinâmico β_0 em $d = 4$. Combinando o limite superior estabelecido por Ref. [80] no teste clássico de atraso de tempo da luz para o parâmetro $\lambda b^2 \sim 10^{-19}$ com a avaliação experimental da constante cosmológica $c^2 \Lambda \sim 10^{-36} eV^2$, conforme estimado por [81], concluímos que a magnitude do modo massivo está limitada superiormente por uma ordem de $\beta_0^2 \sim 10^{-17} eV^2$.

Agora buscamos soluções de buracos negros em (3+1)-dimensões para um espaço-tempo de Einstein-Bumblebee-Dilaton descrito pela ação métrica (2.55). Variando esta ação em relação à métrica, ao campo vetorial e ao campo escalar, obtemos as seguintes equações, respectivamente:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi} \left(\tilde{F}_\mu{}^\alpha \tilde{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\lambda\sigma} \tilde{F}^{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} - V_0 g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} D_\mu \phi D_\nu \phi + \frac{1}{4} D_\sigma \phi D^\sigma \phi g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.56)$$

$$D_\mu (e^{2\tilde{a}\phi} \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.57)$$

$$D_\sigma D^\sigma \phi = 4\kappa^2 \tilde{a} e^{2\tilde{a}\phi} \left(\frac{1}{4} \tilde{F}_{\lambda\sigma} \tilde{F}^{\lambda\sigma} + V_0 \right), \quad (2.58)$$

onde o termo de potencial de violação de Lorentz V_0 é dado por

$$V_0 \equiv 2\lambda b^2 \beta_0^2. \quad (2.59)$$

Observe que a violação de Lorentz resulta em um potencial positivo, sendo necessário $\lambda > 0$ para induzir uma quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Da ação na Eq.(2.55), o modo transversal tem uma dinâmica semelhante ao campo de calibre. Consequentemente, podemos considerar a existência de uma carga elétrica isolada descrita pela Eq. (2.57), e a força correspondente tem a forma

$$\tilde{F}_{tr} = \frac{\tilde{q} e^{-2\tilde{a}\phi}}{R(r)^2}, \quad (2.60)$$

onde \tilde{q} é uma constante de integração que se relaciona a uma carga elétrica análoga pela fórmula

$\tilde{Q} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{2\tilde{a}\phi} \star \tilde{F}$, onde \star é a dualidade de Hodge e S^2 é uma esfera bidimensional.

As equações do movimento (2.56), (2.57) e (2.58) geralmente não são integráveis. Para superar esse problema, adotamos a mesma abordagem feita em Ref. [82], onde a função R é dada por

$$R(r) = r^N, \quad (2.61)$$

onde N é uma constante. Como resultado, acabamos com quatro equações independentes⁴ e três variáveis que precisam ser determinadas: ϕ , N e f . Portanto, nosso sistema é potencialmente integrável. Podemos expressar as equações do movimento como

$$\tilde{G}^t_t = \frac{1}{r^{2N}} - \frac{N(3N-2)f}{r^2} - \frac{Nf'}{r} - \kappa^2 e^{-2\tilde{a}\phi} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{2r^{4N}} + V_0 e^{4\tilde{a}\phi} \right) - \frac{1}{4} f(\phi')^2 = 0, \quad (2.62)$$

$$\tilde{G}^r_r = \frac{1}{r^{2N}} - \frac{N^2 f}{r^2} - \frac{Nf'}{r} - \kappa^2 e^{-2\tilde{a}\phi} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{2r^{4N}} + V_0 e^{4\tilde{a}\phi} \right) + \frac{1}{4} f(\phi')^2 = 0, \quad (2.63)$$

$$\tilde{G}^\theta_\theta = \frac{2N(N-1)f}{2r^2} + \frac{Nf'}{r} + \frac{f''}{2} - \kappa^2 e^{-2\tilde{a}\phi} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{2r^{4N}} - V_0 e^{4\tilde{a}\phi} \right) + \frac{1}{4} f(\phi')^2 = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{2Nf\phi'}{r} + \phi' f' + f\phi'' = 4\kappa^2 \tilde{a} e^{2\tilde{a}\phi} \left(-\frac{\tilde{Q}^2}{2r^{4N}} e^{-4\tilde{a}\phi} + V_0 \right), \quad (2.65)$$

onde $'$ é a derivada em relação à coordenada radial r .

• Limite do desacoplamento dos modos

Um caso interessante surge quando as flutuações do Bumblebee se desacoplam do campo dilaton, ou seja, quando $\tilde{a} = 0$. Na ação (2.55), recuperamos um termo Einstein-Maxwell com um campo escalar sem massa e um termo de constante cosmológica $\Lambda = \lambda b^2 \beta_0^2$. Assim, esperamos obter uma solução de Sitter-Reissner-Nordström.

De fato, a partir de Eq.(3.112) e Eq.(3.113) com $\tilde{G}^t_t - \tilde{G}^r_r$ e assumindo a Eq. (2.61), obtemos o dilaton na forma

$$\phi(r) = \phi_0 + 2\sqrt{N(1-N)} \ln r, \quad (2.66)$$

onde ϕ_0 é uma constante. Substituindo a solução do dilaton Eq.(2.66) em Eq.(2.64) e Eq.(2.110),

⁴Três equações independentes de (2.56) e uma equação adicional de (2.58), considerando que a Eq. (2.57) já foi resolvida usando a solução (2.60).

obtemos o elemento de linha

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q}{r^2} - \frac{\lambda b^2 \beta_0^2}{3} r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q}{r^2} - \frac{\lambda b^2 \beta_0^2}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.67)$$

A partir de Eq.(2.66), a condição $N = 1$ leva a um dilaton constante. Portanto, a ação Einstein-Maxwell-de Sitter é recuperada da ação em Eq.(2.55).

Vale ressaltar que a flutuação do modo transversal do Bumblebee \tilde{A}_μ dá origem a um buraco negro eletricamente carregado, enquanto o modo longitudinal massivo é uma fonte para um termo de constante cosmológica. No espaço-tempo plano, o modo transversal do Bumblebee é um campo não massivo que pode ser identificado com o fóton. Por outro lado, o modo longitudinal β é um campo massivo que pode ser mostrado como não propagante. A Eq.(2.119) revela que, no regime de campo forte, o modo transversal do Bumblebee ainda pode ser identificado com o fóton, pois fornece a mesma solução métrica. No entanto, o modo massivo longitudinal adquire uma nova interpretação. Apesar de não ser propagante, esse modo fornece uma fonte para a constante cosmológica.

• Solução dilatônica

Depois de estudarmos as soluções que incluem apenas os termos de violação de Lorentz, vamos agora examinar a influência do campo escalar dilaton proveniente das dimensões extras.

Ao substituirmos a equação (2.66) nas equações (3.112) a (2.110), obtemos as seguintes soluções:

$$N = \frac{4\tilde{a}^2}{1 + 4\tilde{a}^2}, \quad (2.68)$$

$$f(r) = r^{\frac{1-4\tilde{a}^2}{1+4\tilde{a}^2}} \left[-\frac{(1+4\tilde{a}^2)\mathcal{M}}{4\tilde{a}^2} + \left(\frac{1+4\tilde{a}^2}{1-4\tilde{a}^2} \right) (\tilde{Q}^2 \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} - 1)r \right], \quad (2.69)$$

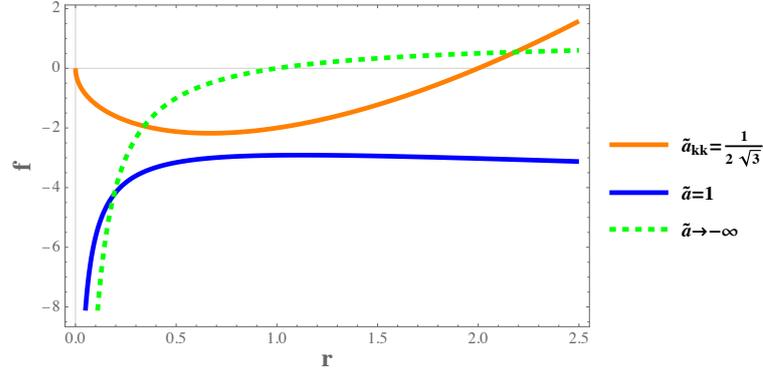
$$V_0 \equiv 2\lambda b^2 \beta_0^2 = \frac{\left(2e^{2\tilde{a}\phi_0} - \tilde{Q}^2 \kappa^2 (1 + 4\tilde{a}^2) \right)}{2(1 - 4\tilde{a}^2) \kappa^2} e^{-4\tilde{a}\phi_0}, \quad (2.70)$$

$$\phi(r) = \phi_0 - \frac{4\tilde{a}}{1 + 4\tilde{a}^2} \ln r, \quad (2.71)$$

onde \mathcal{M} é uma constante de integração relacionada à massa. Utilizando o formalismo de massa quasilocal [83, 84], com \mathcal{M} como referência de fundo, podemos calcular a massa M da solução como $\mathcal{M} = r_S$, onde r_S é o raio de Schwarzschild, ou seja, $r_S = 2MG$.

É importante observar que a métrica se reduz ao buraco negro de Schwarzschild quando $\tilde{a}^2 \rightarrow -\infty$. De fato, pela Eq. (2.68), $N = 1$, ou seja, recuperamos o elemento de métrica

Figura 7: Gráfico de f em função de r , assumindo que $\tilde{Q}^2 = 2$ e $\kappa^2 = 1$. A linha tracejada verde representa a solução de Schwarzschild. Assumimos que $r_S = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

esférica usual. Além disso, a Eq. (2.71) mostra que o campo dilatoniano é constante e, portanto, o termo cinético na ação da Eq. (2.55) se anula. Além disso, a função métrica $f(r)$ torna-se

$$f(r) \rightarrow 1 - \frac{\mathcal{M}}{r}, \quad (2.72)$$

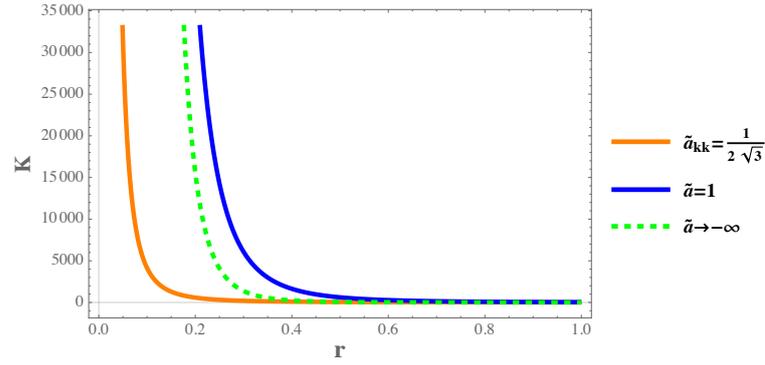
à medida que $\tilde{a} \rightarrow -\infty$. Curiosamente, o acoplamento dilatoniano $e^{\tilde{a}\phi}$ amortecia tanto os efeitos de violação de Lorentz quanto os efeitos dilatônicos no regime $\tilde{a} \rightarrow -\infty$. Neste limite superamortecido, os efeitos de carga e a constante cosmológica provenientes das flutuações do Bumblebee são exponencialmente suprimidos.

Ao realizar uma transformação $\tilde{r} \rightarrow r^{\frac{4\tilde{a}^2}{1+4\tilde{a}^2}}$ na Eq. (2.69), obtemos a seguinte solução

$$ds^2 = - \left[- \frac{(1+4\tilde{a}^2)r_S}{4\tilde{a}^2\tilde{r}^{\frac{4\tilde{a}^2-1}{4\tilde{a}^2}}} + \left(\frac{1+4\tilde{a}^2}{1-4\tilde{a}^2} \right) (\tilde{Q}^2\kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} - 1) \tilde{r}^{\frac{1}{2\tilde{a}^2}} \right] dt^2 \\ + \left(\frac{1+4\tilde{a}^2}{4\tilde{a}^2} \right)^2 \tilde{r}^{\frac{1}{2\tilde{a}^2}} \left[- \frac{(1+4\tilde{a}^2)r_S}{4\tilde{a}^2\tilde{r}^{\frac{4\tilde{a}^2-1}{4\tilde{a}^2}}} + \left(\frac{1+4\tilde{a}^2}{1-4\tilde{a}^2} \right) (\tilde{Q}^2\kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} - 1) \tilde{r}^{\frac{1}{2\tilde{a}^2}} \right]^{-1} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_2^2. \quad (2.73)$$

A função métrica $f(r)$ fornecida na Eq. (2.73) é bastante complexa e, portanto, plotamos essa função na Fig. (7) para estudar seu comportamento. Para $\tilde{a} \rightarrow -\infty$ (linha verde), obtemos a solução usual de Schwarzschild. Para $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (linha laranja), a função $f(r)$ é finita na origem e diverge conforme $r \rightarrow \infty$. Conforme elucidado no Apêndice A, esse valor particular para a constante de acoplamento dilatoniano encontra motivação em uma redução de Kaluza-Klein. Assim, atribuímos uma nomenclatura distintiva a ela. Note que o buraco negro para essa solução tem apenas um horizonte. Por outro lado, para $\tilde{a} = 1$ (linha azul), o buraco negro não possui horizonte, ou seja, $f(r_h) = 0$.

Figura 8: Gráfico de K em função de r , assumindo que $\tilde{Q}^2 = 2$ e $\kappa^2 = r_S = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Para investigar as singularidades da solução de buraco negro dada pela Eq. (2.73), vamos estudar o comportamento do escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, plotado na Fig. (8). Observe que a curvatura diverge na origem para todos os valores considerados. Portanto, a solução para $\tilde{a} = 1$ (linha azul) representa uma singularidade nua. Assintoticamente, a curvatura se anula para os três casos. Assim, o acoplamento do dilaton suprime os efeitos assintóticos do termo cosmológico $\lambda b^2 \beta_0^2$ proveniente do modo longitudinal do Bumblebee.

A partir da Eq. (2.69) e Eq. (2.70), o parâmetro do dilaton \tilde{a} deve satisfazer $\tilde{a} \neq \frac{1}{2}$. Além disso, como λ deve ser positivo para induzir a quebra espontânea da simetria de Lorentz [70], o potencial V_0 também deve ser positivo. Assim, para $\tilde{a} < \frac{1}{2}$ obtemos a restrição

$$\tilde{Q}^2 \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} \leq \frac{2}{1 + 4\tilde{a}^2}. \quad (2.74)$$

Por outro lado, para $\tilde{a} > \frac{1}{2}$, temos

$$\tilde{Q}^2 \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} \geq \frac{2}{1 + 4\tilde{a}^2}. \quad (2.75)$$

Portanto, a carga do Bumblebee \tilde{Q} deve ser inversamente proporcional à constante gravitacional κ .

Para obter os horizontes de eventos para a solução (2.73), basta definir que $g^{rr} = 0$. Portanto, encontramos apenas um horizonte dado por

$$r_h = \tilde{r}_h^{\frac{1+4\tilde{a}^2}{4\tilde{a}^2}} = \left(\frac{1 - 4\tilde{a}^2}{4\tilde{a}^2} \right) \frac{r_S}{(\tilde{Q}^2 \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} - 1)}. \quad (2.76)$$

Observe que a restrição (2.74) sempre garante que o horizonte gerado pelos efeitos da violação de Lorentz junto com o dilaton é maior do que o horizonte de Schwarzschild. Como podemos ver na Fig. (7).

A solução para $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ tem propriedades interessantes, como mostrado nas figuras (7) e (8). De fato, esse valor pode ser obtido por redução dimensional com uma dimensão extra compactificada usando o formalismo desenvolvido por Scherk e Schwarz [85]. O elemento de linha para essa configuração é

$$ds_{kk}^2 = - \left[-4r_S \tilde{r}^2 + 2(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{3}}} - 1) \tilde{r}^6 \right] dt^2 + 16\tilde{r}^6 \left[-4r_S \tilde{r}^2 + 2(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{3}}} - 1) \tilde{r}^6 \right]^{-1} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_2^2, \quad (2.77)$$

enquanto a relação entre a carga do Bumblebee e a VEV da violação de Lorentz é dada por

$$V_0 \equiv 2\lambda b^2 \beta_0^2 = \left(\frac{3}{2} e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{3}}} - 8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 \right) e^{\frac{-2\phi_0}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\kappa^2}. \quad (2.78)$$

Aqui, usamos a definição do comprimento de Planck $l_{Pl}^2 = \frac{\kappa^2}{8\pi}$ e definimos a carga KK como

$$\tilde{Q}_{kk}^2 \equiv 2\pi R_y \tilde{Q}^2, \quad (2.79)$$

onde R_y é o raio da dimensão extra. Além disso, assumindo as soluções acima, encontramos que o horizonte de eventos e a restrição para garantir a quebra espontânea da simetria de Lorentz são dados por

$$r_h = \tilde{r}_h^4 = \frac{2r_S}{(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{3}}} - 1)}, \quad (2.80)$$

e

$$8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{3}}} - 1 \leq \frac{1}{2}. \quad (2.81)$$

É importante notar que no limite superior da desigualdade acima, o horizonte r_h (2.80) leva a um deslocamento no raio de Schwarzschild, ou seja, $r_h = 4r_S$.

Finalmente, vamos examinar como a solução (2.69) afeta a componente radial do VEV. Substituindo as Eqs. (2.66) e (2.69) na Eq. (2.6), encontramos que

$$b_r = b \left[-\frac{(1+4\tilde{a}^2)r_S}{4\tilde{a}^2} r^{\frac{1-4\tilde{a}^2}{1+4\tilde{a}^2}} + \left(\frac{1+4\tilde{a}^2}{1-4\tilde{a}^2} \right) (\tilde{Q}^2 \kappa^2 e^{2\tilde{a}\phi_0} - 1) r^{\frac{2}{4\tilde{a}^2+1}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.82)$$

Para $\tilde{a} < \frac{1}{2}$, a componente VEV acima se anula conforme $r \rightarrow \infty$ e diverge na origem. E o comportamento oposto ocorre no caso em que $\tilde{a} > \frac{1}{2}$.

• Termodinâmica

Agora calculamos várias quantidades termodinâmicas importantes para estudar a

estabilidade termodinâmica da solução (2.119). Concentramos nossa análise na redução dimensional KK em um círculo S^1 , mas a generalização para a solução (2.73) é direta. Como mostrado por Ref.[86], é possível associar estabilidade termodinâmica com flutuações microscópicas do sistema. As condições de estabilidade podem ser expressas como

$$C_{\tilde{Q}} \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\tilde{Q}} \geq 0, \quad \chi_T \equiv \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \psi} \right)_T \geq 0. \quad (2.83)$$

A primeira quantidade, $C_{\tilde{Q}}$, representa o calor específico à carga elétrica constante. Ela é um análogo do calor específico à volume constante em sistemas fluidos. A outra quantidade, χ_T , é a suscetibilidade dielétrica isoterma. Explicaremos e calcularemos cada uma dessas grandezas mais tarde.

Agora, calculemos a temperatura do buraco negro usando o horizonte de eventos (2.80). No entanto, antes de fazê-lo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\phi_0 = 0$ daqui em diante, pois essa constante é apenas um fator geral na análise termodinâmica. Portanto, a temperatura pode ser calculada usando a expressão $T = \frac{f'(\tilde{r}_h)}{16\pi\tilde{r}_h^3}$ ⁵. Substituindo as Eqs.(2.80) e (2.119) nesta expressão, obtemos que

$$T = \frac{(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 - 1)}{2\pi} \tilde{r}_h^2. \quad (2.86)$$

Assim, a temperatura do buraco negro diminui à medida que sua massa diminui. Na Fig. (9), plotamos a temperatura em função do horizonte para $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. É evidente que a temperatura diminui à medida que o horizonte, e conseqüentemente a massa, diminui. Além disso, constatamos que o limite extremal, caracterizado por uma temperatura nula, é alcançado quando $r_S = 0$ ou $8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 = 1$, de acordo com a Eq. (2.80). Portanto, neste último caso, se a carga KK estiver na ordem da massa de Planck, ou seja, $\tilde{Q}_{kk} \sim M_{Pl}$, a temperatura do buraco negro torna-se zero.

Podemos definir uma carga crítica de violação de Lorentz \tilde{Q}_{LV} , que indica os efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz. Esta carga crítica é obtida considerando o limite superior da desigualdade (2.81). Quando $\tilde{Q}_{LV} < \tilde{Q}_{kk}$, ou seja, quando $\lambda < 0$ de acordo com a restrição (2.74), os efeitos de violação de Lorentz são suprimidos. Na Fig. (9), isso corresponde

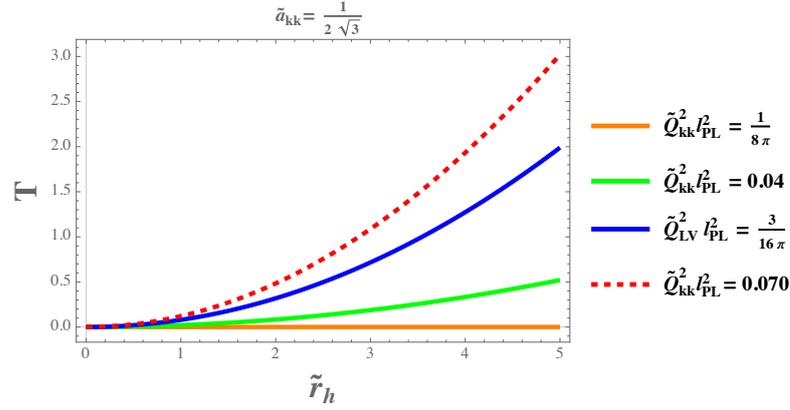
⁵Podemos calcular a gravidade superficial κ , e conseqüentemente a temperatura $T = \frac{\kappa}{2\pi}$, para o espaço-tempo estático e esféricamente simétrico com a métrica dada por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.84)$$

através da seguinte fórmula

$$\kappa = -\frac{\partial_r g_{tt}}{2\sqrt{-g_{rr}g_{tt}}} \quad (2.85)$$

Figura 9: Gráfico de T em função de \tilde{r}_h , assumindo que $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$



Fonte: elaborado pelo autor.

à linha tracejada. Para $\phi_0 = 0$, podemos expressar a carga crítica de violação de Lorentz como:

$$\tilde{Q}_{LV}^2 \equiv \frac{3}{32\pi^2 R_y l_{Pl}^2}. \quad (2.87)$$

Além disso, podemos determinar uma temperatura crítica de violação de Lorentz a partir da Eq. (2.86). Esta temperatura é dada por

$$T_{LV} \equiv \frac{r_S^{1/2}}{2\pi}. \quad (2.88)$$

Imediatamente, podemos observar que a temperatura (2.88) é bastante diferente da temperatura associada ao buraco negro de Schwarzschild padrão, que diminui com r_S .

Outra quantidade termodinâmica crucial relacionada ao horizonte de eventos é a entropia. Ela pode ser expressa como $S = \frac{2\pi A}{\kappa^2}$, onde A é a área do horizonte. É importante notar que a entropia é determinada pelo volume das fatias constantes no tempo do horizonte de eventos. Supondo que o horizonte tenha uma topologia de S^2 , a entropia para (2.80) é dada por

$$S = \frac{\pi}{l_{Pl}^2} \left(\frac{2r_S}{(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.89)$$

Novamente, podemos associar a entropia ao limite crítico de violação de Lorentz da seguinte maneira

$$S_{LV} = \frac{2\pi}{l_{Pl}^2} r_S^{\frac{1}{2}}. \quad (2.90)$$

É importante destacar que o fluxo elétrico dado pela Eq. (2.60) é constante, como implícito nas Eqs. (2.68) e (2.71). Como resultado, a solução apresentada difere das solução padrão de Reissner-Nordström (RN), onde o termo de carga elétrica no coeficiente métrico é

proporcional a r^{-2} . Além disso, o potencial escalar associado ao horizonte é definido usando a seguinte relação padrão [87]:

$$\tilde{\psi}(r) = \tilde{A}_\mu \chi^\mu \Big|_{\text{referência}} - \tilde{A}_\mu \chi^\mu \Big|_{r \rightarrow r_h}, \quad (2.91)$$

onde $\chi = C\partial_t$ é o gerador nulo do horizonte, e C é uma constante arbitrária que será fixada em seguida. Substituindo a Eq. (2.60) na equação acima, encontramos que o potencial escalar cresce linearmente com o raio, ou seja, $\tilde{\psi}(r) = A\tilde{Q}e^{-2\tilde{a}\phi_0}r + \tilde{\psi}_0$, onde $\tilde{\psi}_0$ é uma constante dada por:

$$\tilde{\psi}_0 = C\tilde{Q}e^{-2\tilde{a}\phi_0}r_h. \quad (2.92)$$

Assumindo o ensemble canônico, onde o potencial $\tilde{\psi}$ é fixado na fronteira com um valor de $\tilde{\psi}_0 = C\tilde{Q}r_h^A$, e considerando a energia E neste ensemble como sendo a massa do buraco negro M , pode-se verificar que a primeira lei da termodinâmica se mantém,

$$dM = TdS + \tilde{\psi}_0 d\tilde{Q}, \quad (2.93)$$

se fixarmos a constante na Eq.(2.92) como $C = 4\pi\sqrt{2\pi R_y}$.

Agora podemos estudar a estabilidade da solução (2.119). Primeiramente, consideramos o ensemble canônico, cuja carga \tilde{Q}_{kk} é mantida fixa. Para este ensemble, podemos definir a capacidade térmica à carga constante como $C_{\tilde{Q}_{kk}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\tilde{Q}_{kk}}$. Considerando a temperatura (2.86), a capacidade térmica é dada por

$$C_{\tilde{Q}_{kk}} = \frac{\pi}{l_{Pl}^2} \left(\frac{2r_S}{(8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.94)$$

Para uma melhor compreensão dessa quantidade, podemos reescrevê-la como uma função da temperatura (2.86), em vez do horizonte. Substituindo a Eq.(2.86) na Eq.(2.94), obtemos

$$C_{\tilde{Q}_{kk}} = \frac{2\pi^2 T}{l_{Pl}^2 (8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 - 1)}. \quad (2.95)$$

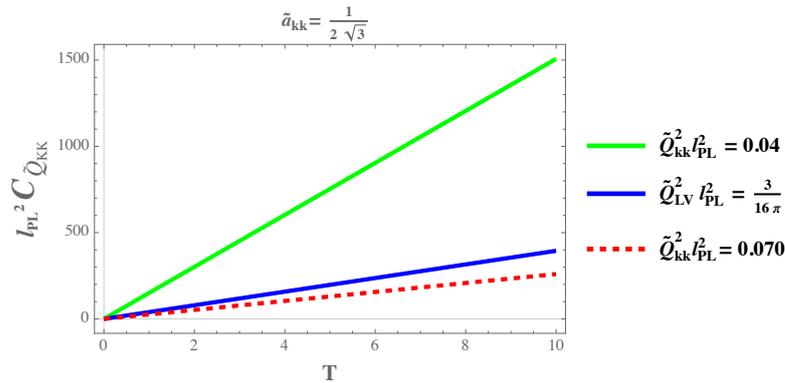
Assim, a estabilidade termodinâmica é sempre alcançada quando $8\pi l_{Pl}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 > 1$, como mostrado na Fig. (10). Além disso, a capacidade térmica crítica de violação de Lorentz é dada por

$$C_{\tilde{Q}_{LV}} = \frac{2\pi}{l_{Pl}^2} r_S^{\frac{1}{2}}. \quad (2.96)$$

A curva associada a esta quantidade é a linha azul fina na Fig.(10).

Outra condição importante que determina a estabilidade elétrica do buraco negro, ou

Figura 10: Gráfico de $l_{PL}^2 C_{\tilde{Q}_{kk}}$ em função de T , assumindo que $\tilde{a}_{kk} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$



Fonte: elaborado pelo autor.

seja, se a solução é estável contra flutuações elétricas, é dada pela suscetibilidade dielétrica isoterma χ_T [86]. Para analisar essa condição, precisamos obter as curvas isotérmicas da equação de estado $T = T(\tilde{\psi}, \tilde{Q})$. O primeiro passo é expressar a temperatura (2.86) como uma função do potencial $\tilde{\psi}$ usando a Eq. (2.92). Finalmente, obtemos a equação de estado $T = T(\tilde{\psi}, \tilde{Q})$, e ao resolver para $\tilde{\psi}$, encontramos que

$$\tilde{\psi} = \frac{32\pi^3 l_{PL}^2 \tilde{Q}_{kk}^2}{(8\pi l_{PL}^2 \tilde{Q}_{kk}^2 - 1)^2} T^2. \quad (2.97)$$

Observe que à medida que $\tilde{\psi} \rightarrow \infty$, $8\pi l_{PL}^2 \tilde{Q}_{kk}^2$ se aproxima da unidade para um T fixo. Com a equação de estado em mãos, podemos verificar se existem pontos críticos. Esses pontos são determinados pelas seguintes condições:

$$\left(\frac{\partial \tilde{Q}_{kk}}{\partial \tilde{\psi}} \right)_{T_{crit}} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}_{kk}}{\partial \tilde{\psi}^2} \right)_{T_{crit}} = 0. \quad (2.98)$$

No entanto, é possível mostrar que essas equações não podem admitir nenhum ponto crítico para um valor real positivo de $\tilde{\psi}$. Para concluir, a suscetibilidade dielétrica isoterma (2.166) para a equação de estado (2.155) é dada por

$$\chi_T = -\frac{\pi T}{2\tilde{r}^6 + 3\pi\tilde{r}^4 T}. \quad (2.99)$$

Imediatamente, observamos que essa quantidade é negativa, indicando que nossa solução é electricamente instável. Além disso, pode-se inferir que nossa solução não apresenta fenômenos críticos, uma vez que as Eqs. (2.98) não têm soluções e não aparecem discontinuidades no gráfico da capacidade térmica.

Principais Resultados

Obtivemos uma solução de buraco negro carregado que não exhibe planicidade assintótica ou comportamento de (anti-) de Sitter. Para garantir a quebra espontânea da simetria de Lorentz, derivamos uma restrição que garante a positividade do potencial. A solução apresenta um horizonte de eventos deslocado em comparação com o horizonte de Schwarzschild devido à presença de violação de Lorentz. Além disso, a solução é singular na origem.

Para concluir o artigo, conduzimos uma análise da estabilidade termodinâmica do sistema com flutuações microscópicas. Para essa análise, consideramos uma dimensão extra compactificada em um círculo S^1 . Descobrimos que a temperatura e a entropia associadas à solução são significativamente diferentes daquelas das soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström, ilustrando a influência da dinâmica do dilaton nas soluções. Observamos que a temperatura diminui à medida que a massa do buraco negro diminui, e o limite extremo ($T = 0$) é atingido quando a carga KK está na ordem da massa de Planck. Além disso, assumimos que a entropia segue a lei da área e demonstramos que a primeira lei da termodinâmica se mantém para nosso sistema. Além disso, estabelecemos um limite crítico determinado pela restrição (2.81), indicando uma potencial transição de fase para um sistema com quebra espontânea de simetria de Lorentz.

Quanto à estabilidade, descobrimos que a capacidade térmica específica de nossa solução é positiva, indicando estabilidade termodinâmica. No entanto, também encontramos uma suscetibilidade dielétrica isoterma negativa, indicando instabilidade elétrica em nossa solução. Esse resultado sugere uma análise mais profunda sobre a relação da geometria de um buraco negro estático e com simetria esférica na propagação do modo transversal do Bumblebee. Embora a influência das flutuações do Bumblebee na geração dinâmica para a constante cosmológica na solução (2.119) tenha se tornado evidente, ainda há a necessidade de um exame mais aprofundado do impacto da violação de Lorentz em objetos compactos, como a análise de estruturas de fases para explorar possíveis transições de fase. Isso será foco de futuras pesquisas.

2.3.3 Soluções de buracos negros em um modelo Einstein-Bumblebee-Dilaton em um espaço-tempo de Lifshitz

Finalmente, vamos agora para a terceira e última aplicação dessa parte da tese. Essa aplicação é baseada na Ref. [88]. Nós investigamos o comportamento crítico dos buracos negros de Lifshitz na gravidade de Einstein-dilaton no contexto da quebra espontânea de simetria de Lorentz. Antes de qualquer coisa, nós precisamos introduzir o assunto: simetria de escala de Lifshitz; depois veremos como estender isso para a gravitação.

Os estudos sobre a dualidade entre teoria de calibre e gravidade têm se mostrado uma área altamente promissora na física teórica nos últimos anos. Isso se deve principalmente à facilidade operacional que essa ferramenta oferece para obter descrições duais computáveis e fracamente acopladas de teorias conformais fortemente acopladas [89]. Sistemas fortemente acoplados exibem uma simetria de escala próxima a pontos críticos. Quando o ponto crítico não é dinâmico, a invariância de escala mais familiar que surge no grupo conformal é dada por:

$$t \rightarrow \lambda t, \quad x_i \rightarrow \lambda x_i \quad (2.100)$$

Aqui, λ é uma constante real, t representa a coordenada temporal e x_i são as coordenadas espaciais. A correspondência AdS/CFT continua a ganhar força ao longo do tempo, com inúmeros trabalhos aplicando essa dualidade [90–93]. No entanto, estamos interessados no desenvolvimento da descrição dual gravitacional de modelos que exibem invariância de escala anisotrópica do tipo:

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x_i \rightarrow \lambda x_i \quad (2.101)$$

Aqui, z é chamado de expoente dinâmico. A mencionada simetria de escala é conhecida como simetria de escala Lifshitz [94]. No entanto, quando $z = 1$, a escala torna-se isotrópica, o que corresponde à invariância relativística. Portanto, nosso foco específico é examinar soluções de buracos negros geradas pela violação de Lorentz em proximidade ao ponto crítico caracterizado por uma simetria de escala Lifshitz.

Propôs-se em [95, 96] que os duais gravitacionais de teorias de campo com escalamento Lifshitz devem possuir soluções métricas que exibem comportamento assintótico da seguinte forma:

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2} d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.102)$$

Para $z = 1$, que corresponde às transformações (2.100), obtemos o espaço-tempo anti-de Sitter (AdS), onde o parâmetro l representa o raio do AdS. Isso corresponde à invariância relativística. Por outro lado, ao considerar um expoente dinâmico não trivial, referimo-nos à métrica (2.102) como Lifshitz. Existem valores intrigantes de z a serem considerados. Por exemplo, em $z = 2$, a simetria da teoria pode ser estendida para o grupo de Schrödinger. Consulte [97, 98] para detalhes adicionais. Além disso, é importante observar que, para a escala

Lifshitz (2.101) se manter na métrica (2.102), a coordenada radial deve ser transformada como $r \rightarrow \lambda^{-1}r$.

É importante enfatizar que o próprio espaço-tempo Lifshitz não é uma solução de vácuo para as equações de Einstein [99]. Portanto, para obter soluções Lifshitz, torna-se necessário introduzir campos de matéria. No trabalho [100], são empregados campos de calibre, enquanto no trabalho [101], campos de Proca são utilizados no contexto do espaço-tempo Lifshitz. Nesse contexto, nosso foco é explorar soluções Lifshitz considerando a presença de campos de calibre e campos que exibem violação de Lorentz. Ao incorporar esses campos adicionais, pretendemos investigar a interação entre gravidade, campos de calibre e violação de Lorentz no contexto do espaço-tempo Lifshitz. Além disso, como demonstrado em [102], a inclusão de um campo dilaton dá origem a soluções exatas. Soluções significativas que incorporam dilatação, mas desprovidas de simetria Lifshitz, são discutidas em Refs.[103, 104]. Isso serve como a principal motivação para considerar sua presença na ação. Além disso, a inspiração para incluir um campo dilaton surge das teorias de cordas, onde, em seu limite de baixa energia, reduzem-se à gravidade de Einstein acoplada a um campo dilaton escalar junto com outros campos [38]. Ao incorporar o campo de dilaton na ação gravitacional, buscamos explorar as implicações e as potenciais conexões entre essas duas estruturas.

Nesta aplicação, nosso objetivo é buscar soluções de buracos negros (3+1)-dimensionais caracterizadas por excitações do tipo Bumblebee que exibem comportamento assintoticamente Lifshitz. Para isso, consideramos a seguinte métrica como ponto de partida [105]:

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}}f(r)dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\Omega_2^2 \quad (2.103)$$

onde $d\Omega_2^2$ é a métrica de uma esfera S^2 de raio unitário e $f(r)$ é a função de *blackening*. Imponhamos a condição de que a função $f(r)$ satisfaça o seguinte requisito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1, \quad (2.104)$$

garantindo que a métrica se aproxime assintoticamente da forma dada por (2.102). Além disso, consideramos especificamente o cenário estático e simetricamente esférico, onde todos os campos variam exclusivamente ao longo da direção radial do espaço-tempo Lifshitz assintótico.

Inspirados no trabalho [70], consideramos o setor de violação de Lorentz ser governado por excitações do tipo bumblebee no regime linear de flutuações. Considerando a métrica (2.103) que exhibe simetrias esféricas e temporais, assumimos ainda que o valor esperado no

vácuo (VEV) b_μ tem apenas uma componente radial não nula. Sob essas condições, a seguinte ação pode ser derivada:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - (\partial\phi)^2 - 2\Lambda_0 e^{-2\xi_0\phi} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N F_i^2 e^{-2\chi_i\phi} - \frac{1}{4} \tilde{F}^2 e^{-2\xi_2\phi} - V_0 e^{-2\xi_3\phi} \right]. \quad (2.105)$$

Aqui, definimos $\tilde{F} = \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, onde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \tilde{A}_{\nu]}$ com a condição $\tilde{A}^r = 0$ quando $b_r \neq 0$. Além disso, introduzimos a notação:

$$V_0 \equiv 2\lambda b^2 \beta_0^2. \quad (2.106)$$

Na prática, o modelo consiste em $N + 1$ campos vetoriais combinados com dois potenciais de Liouville para o dilaton. No entanto, é importante observar que, como demonstraremos posteriormente, os N campos de calibre servem principalmente como campos auxiliares dentro desta proposta.

Com a ação dada à nossa disposição, podemos derivar as equações de movimento (EoM) variando a ação (2.102) em relação à métrica, aos campos vetoriais e ao campo escalar. Isso nos leva às seguintes equações, respectivamente:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda_0 e^{-2\xi_0\phi} g_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^N \frac{e^{-2\chi_i\phi}}{2} T_{\mu\nu}^{EM,i} + \frac{e^{-2\xi_2\phi}}{2} T_{\mu\nu}^{BUM} + \frac{V_0}{2} e^{-2\xi_3\phi} g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (2.107)$$

$$\sum_{i=1}^N D_\mu (e^{-2\chi_i\phi} F^{\mu\nu} i) = 0, \quad (2.108)$$

$$D_\mu (e^{-2\xi_2\phi} \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.109)$$

$$\square\phi + 2\xi_0\Lambda_0 e^{-2\xi_0\phi} + \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{2} F_i^2 e^{-2\chi_i\phi} + \frac{\xi_2}{2} \tilde{F}^2 e^{-2\xi_2\phi} + \xi_3 V_0 e^{-2\xi_3\phi}. \quad (2.110)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{EM,i} = (F_i)_\mu{}^\sigma (F_i)_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_i^2 \quad (2.111)$$

$$T_{\mu\nu}^{BUM} = \tilde{F}_\mu{}^\sigma \tilde{F}_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \tilde{F}^2. \quad (2.112)$$

Observe que utilizamos em Eq. (3.112) o fato de que as duas quantidades acima têm traço nulo em 4-dimensões.

Assumindo que $(F_i)_{rt} \neq 0$ e $\tilde{F}_{rt} \neq 0$, indicando uma configuração de campo elétrico, podemos derivar as seguintes expressões das Eqs. (3.113) e (3.114), respectivamente, para o ansatz (2.103):

$$(F_i)_{rt} = \frac{q_i e^{2\chi_i\phi}}{r^{3-z}}, \quad (2.113)$$

$$\tilde{F}_{rt} = \frac{\tilde{q}e^{2\xi_2\phi}}{r^{3-z}}, \quad (2.114)$$

onde q_i e \tilde{q} são constantes de integração. Essas constantes estão relacionadas à carga total por meio de considerações adicionais

$$Q_i = \frac{1}{16\pi G_N} \int e^{-2\chi_i\phi} \star F_i, \quad (2.115)$$

$$\tilde{Q} = \frac{1}{16\pi G_N} \int e^{-2\xi_2\phi} \star \tilde{F}. \quad (2.116)$$

Esta última carga está relacionada ao modo transversal que se originou através de uma quebra espontânea de simetria de Lorentz.

Substituindo as soluções (2.113) e (2.114) nas componentes tt e rr da Eq. (3.112), podemos encontrar a partir da combinação $R^t_t - R^r_r$ que

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \ln r, \quad (2.117)$$

onde ϕ_0 é uma constante de integração e ϕ_1 é dada por

$$\phi_1 = 2\sqrt{z-1}. \quad (2.118)$$

A partir da expressão para ϕ_1 apresentada acima, fica evidente que requeremos $z \geq 1$. Vale ressaltar que, além do contexto de soluções de buracos negros de dilaton e Lifshitz, campos escalares da forma (2.117) também são soluções em vários modelos de espaços-tempo assintoticamente anti-de Sitter (AdS) [106, 107]. Para obter a função $f(r)$, podemos substituir Eqs. (2.113), (2.114) e (2.117) nas equações de Einstein (3.112). Fazendo essa substituição, obtemos a seguinte expressão para $f(r)$:

$$\begin{aligned} f(r) = & \frac{l^2}{r^2 z^2} - mr^{-z-2} - \frac{\Lambda_0 l^2 e^{-2\xi_0\phi_0} (\xi_0\phi_1 + 1) r^{-2\xi_0\phi_1}}{z(-2\xi_0\phi_1 + z + 2)} - \frac{l^2 V_0 e^{-2\xi_3\phi_0} (\xi_3\phi_1 + 1) r^{-2\xi_3\phi_1}}{2z(-2\xi_3\phi_1 + z + 2)} \\ & + \sum_i 1^N \frac{q_i^2 l^{2z} e^{2\chi_i\phi_0} (-\chi_i\phi_1 + 2z - 5) r^{2\chi_i\phi_1 - 4z + 8}}{4z(3z - 2(\chi_i\phi_1 + 5))} + \frac{\tilde{q}^2 l^{2z} e^{2\xi_2\phi_0} (-\xi_2\phi_1 + 2z - 5) r^{2\xi_2\phi_1 - 4z + 8}}{4z(3z - 2(\xi_2\phi_1 + 5))}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Na expressão acima, a constante de integração m está relacionada à massa, como discutiremos posteriormente. Para obter uma solução que seja assintoticamente Lifshitz, é crucial que a condição (2.104) seja satisfeita. Para alcançar isso, fixamos o termo da constante cosmológica. Consequentemente, a partir da Eq. (2.119), precisamos determinar a constante de acoplamento

ξ_0 da seguinte forma:

$$\xi_0 = 0. \quad (2.120)$$

Isto é, ao fazer essa escolha específica, o campo dilatoniano não se acopla ao termo da constante cosmológica, resultando em uma contribuição pura da constante cosmológica. Certamente, poderíamos aplicar uma abordagem semelhante aos outros termos na Equação (2.119), como o termo com V_0 . No entanto, escolher um valor específico para V_0 fixaria a contribuição da violação de Lorentz, resultando em uma solução que não exhibe os efeitos da violação de Lorentz. Uma vez que o principal objetivo do artigo é investigar os efeitos da violação de Lorentz, não é desejável fixar o termo associado à violação de Lorentz dessa maneira.

É importante notar que ainda não utilizamos a equação de movimento (EoM) do campo escalar. Essa equação fornecerá uma equação algébrica que auxilia na relação entre os parâmetros da teoria. Substituindo a solução (2.119) na Eq. (2.110), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & -\Lambda_0\phi_1 + \frac{V_0[4z\xi_3 - \phi_1(1 + \xi_3\phi_1)]e^{-2\xi_3\phi}}{2} + \frac{\phi_1}{r^2} \\ & = -\frac{1}{4} \left[\sum^N i = 1 F_i^2 [4\chi_i + \phi_1] e^{-2\chi_i\phi} + \tilde{F}^2 [4\xi_2 + \phi_1] e^{-2\xi_2\phi} \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

Esta equação pode ser resolvida de várias maneiras. No entanto, nosso objetivo é obter uma solução que destaque não apenas a contribuição da carga de violação de Lorentz \tilde{q} , mas também os efeitos do modo massivo de violação de Lorentz V_0 discutidos no artigo. Para alcançar isso, podemos escolher o primeiro campo de gauge para cancelar o termo da constante cosmológica e o segundo campo de gauge para cancelar o terceiro termo no lado esquerdo na Eq. (2.121). Ao fazer essa escolha, encontramos a seguinte expressão:

$$\chi_1 = \frac{2}{\phi_1}, \quad \chi_2 = \frac{1}{\phi_1}. \quad (2.122)$$

De modo que o primeiro é fixado pela constante cosmológica através de

$$q_1^2 = \frac{4(1-z)l^{2-2z}e^{-\frac{4\phi_0}{\phi_1}}\Lambda_0}{z+1} \quad (2.123)$$

e usamos as segundas cargas $U(1)$ para cancelar o termo $\frac{\phi_1}{r^2}$ com

$$q_2^2 = \frac{4(z-1)l^{2-2z}e^{-\frac{2\phi_0}{\phi_1}}}{z}. \quad (2.124)$$

Além disso, os $N - 2$ campos de gauge restantes podem ser cancelados pela seguinte escolha

$$\chi_j = -\frac{\phi_1}{4}, \quad (2.125)$$

onde $j = 2, \dots, N - 1$. Finalmente, para cancelar os termos de modo transversal e longitudinal da violação de Lorentz em Eq. (2.121), respectivamente, temos que

$$\xi_2 = -\frac{\phi_1}{4}, \quad \xi_3 = \frac{\phi_1}{4}. \quad (2.126)$$

Como nosso interesse primário reside em explorar as contribuições associadas à quebra espontânea de simetria de Lorentz, daqui em diante consideraremos apenas dois campos $U(1)$. Conseqüentemente, esses campos não contribuirão para a métrica, ilustrando sua natureza auxiliar nessa configuração específica, já que estão fixados em (2.123) e (2.124). É importante notar que, para obter uma solução de buraco negro usando a ação (2.105), é necessário incorporar pelo menos três campos vetoriais, como mencionado anteriormente na referência [102]. Portanto, nesse caso, apenas dois campos de gauge são suficientes para alcançar uma solução de buraco negro com simetria esférica. Isso ocorre porque a função do campo vetorial adicional necessário para a simetria esférica será desempenhada pelo modo transversal da violação de Lorentz. Essa justificativa explica por que não utilizamos mais os campos de gauge remanescentes $N - 2$ em nossa análise. Além disso, conforme assumido em (3.167), consideramos o termo da constante cosmológica como unidade, impondo a condição de que

$$\Lambda_0 = -\frac{(z+1)(z+2)}{2l^2}. \quad (2.127)$$

Considerando todas as considerações mencionadas, podemos concluir que a solução é caracterizada apenas por quatro parâmetros livres: m , \tilde{q} , V_0 e ϕ_0 .

Em resumo, a solução que encontramos para a ação (2.105) é

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} f(r) dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.128)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{z+2}} + \frac{l^2}{r^2 z^2} + \frac{V_0 l^2 e^{-\phi_0 \sqrt{z-1}}}{2(z-4)r^{2z-2}} + \frac{\tilde{q}^2 l^{2z} e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{4zr^{2(z+1)}}. \quad (2.129)$$

$$(F_1)_{rt} = 2\sqrt{\frac{z-1}{z}} \frac{l^{1-z} e^{\frac{\phi_0}{2\sqrt{z-1}}}}{r^{1-z}}, \quad (2.130)$$

$$(F_2)rt = \sqrt{2(z-1)(z+2)}l^{-1}e^{\frac{\phi_0}{\sqrt{z-1}}}r^{z+1}, \quad (2.131)$$

$$\tilde{F}rt = \frac{\tilde{q}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{r^{z+1}}, \quad (2.132)$$

$$\phi = \phi_0 + 2\sqrt{z-1}\ln r, \quad (2.133)$$

onde $\Lambda_0 = -\frac{(z+1)(z+2)}{2l^2}$ e $V_0 = 2\lambda b^2\beta_0^2$. Note que um limite especial para o parâmetro z é quando $z = 1$. Em primeiro lugar, o campo escalar torna-se constante para este limite. Além disso, as cargas fixas $q_{1,2}$ se anulam e a constante cosmológica é dada por $\Lambda_0 = -\frac{3}{l^2}$. Portanto, recuperamos a solução de buraco negro carregado, ou seja,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{m}{r} + \frac{\tilde{q}^2}{r^2} - \Lambda_{eff}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r} + \frac{\tilde{q}^2}{r^2} - \Lambda_{eff}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2. \quad (2.134)$$

onde a constante cosmológica efetiva é dada por

$$\Lambda_{eff} \equiv \Lambda_0 + \lambda b^2\beta_0^2. \quad (2.135)$$

Resultado semelhante ao encontrado em [73]. Assim, podemos recuperar os buracos negros carregados AdS [86] para $\lambda b^2\beta_0^2 < \frac{3}{l^2}$. Por outro lado, para $z \neq 1$, a solução exibe diferenças significativas em comparação com os buracos negros carregados AdS. Isso destaca o impacto profundo do campo dilatoniano na solução, mostrando as mudanças drásticas que ele induz. É precisamente essa mudança dramática que investigaremos mais a fundo ao abordar os comportamentos críticos da solução (2.128).

Agora, vamos analisar algumas propriedades geométricas da solução (2.128). Primeiramente, podemos determinar a posição do horizonte r_h estabelecendo $f = 0$. Isso resulta na seguinte equação algébrica para r_h :

$$r_h^{2z-2} - mr_h^{z-4} + \frac{l^2}{z^2}r_h^{2z-4} + \frac{V_0l^2e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{2(z-4)} + \frac{\tilde{q}^2l^{2z}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}r_h^{-4}}{4z} = 0. \quad (2.136)$$

Neste caso, assumimos que r_h representa a maior raiz real positiva da equação $f = 0$. Infelizmente, uma solução exata para $r_h = r_h(m, \tilde{q}, \phi_0, V_0)$ não está prontamente disponível. No entanto, como observado por Ref.[102], o parâmetro de massa m não é um parâmetro fundamental da teoria. Em vez disso, os parâmetros fundamentais são \tilde{q} , ϕ_0 , V_0 e a temperatura T . Motivados por isso, podemos resolver a Eq. (2.136) em relação à massa, resultando em

$$m = r_h^{z+2} \left(\frac{\tilde{q}^2l^{2z}r_h^{-2(z+1)}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{4z} + \frac{V_0l^2r_h^{2-2z}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{2(z-4)} + \frac{l^2}{r_h^2z^2} + 1 \right). \quad (2.137)$$

Essa quantidade desempenhará um papel crucial, pois a utilizaremos para derivar uma expressão para a temperatura que depende exclusivamente de \tilde{q} , r_h , ϕ_0 e V_0 . Além disso, conforme exploraremos mais adiante, no limite em que o buraco negro se torna extremal, ou seja, $T = 0$, a geometria próximo ao horizonte é dada por $AdS_2 \times S^2$.

• Termodinâmica e Estabilidade

Uma abordagem para investigar as características das soluções de buracos negros é analisar sua termodinâmica. O estudo da termodinâmica de buracos negros teve uma importância científica significativa por muitos anos. As semelhanças entre a termodinâmica convencional e os buracos negros são verdadeiramente notáveis, abrangendo várias variáveis termodinâmicas, incluindo pressão, volume, temperatura, entropia e muito mais, assim como estruturas de fase. O estudo dessas estruturas de fase é particularmente crucial na investigação de fenômenos críticos. Talvez a descoberta mais emblemática sobre fenômenos críticos tenha sido feita por Hawking e Page [108]. Eles mostraram que há uma transição de fase no espaço de fases do buraco negro Schwarzschild-AdS. Após essa descoberta, outras transições de fase foram descobertas, como a transição de fase de primeira ordem no espaço-tempo do buraco negro carregado Reissner-Nordström-AdS (RN-AdS) [86]. Em ambos os artigos mencionados, a constante cosmológica assume um papel significativo; no entanto, ela não contribui para a formulação da primeira lei da termodinâmica.

Recentemente, houve um crescente interesse em incorporar a variabilidade da constante cosmológica Λ_0 na primeira lei da termodinâmica de buracos negros [109–111]. Para atingir esse objetivo, observou-se que a massa M é agora caracterizada por *entalpia* em vez de energia interna. A Ref.[109] demonstrou que, ao reavaliar o comportamento crítico do buraco negro carregado AdS, considerando a constante cosmológica como uma variável termodinâmica, nos deparamos com um sistema que se assemelha de perto ao comportamento do fluido de van der Waals. O espaço $P - V$ possui uma importância significativa para a análise do comportamento crítico, dada sua analogia direta com a termodinâmica convencional. No artigo [110], podemos encontrar pesquisas focadas no comportamento crítico dos buracos negros de dilaton Lifshitz por meio do uso do diagrama $P - V$. Embora inicialmente possa parecer incomum considerar a variação de uma constante cosmológica, isso é justificável em certas teorias mais fundamentais, onde certas constantes surgem como valores de expectativa do vácuo [109]. Inspirados nisso, pretendemos elevar a variável termodinâmica para incluir o modo massivo das flutuações do bumblebee, que surgem precisamente de um processo dinâmico. Assim, estamos

sugerindo aqui conduzir um exame do comportamento crítico dentro do espaço $P-V$ expandido de um buraco negro de Lifshitz, influenciado pela quebra espontânea de simetria de Lorentz. Em última análise, nossas descobertas revelam um sistema com expoentes críticos idênticos aos do fluido de van der Waals

Como mencionado, alguns estudos sugerem que a constante cosmológica pode exercer uma forma de pressão sobre buracos negros, e essa consideração é crucial para a investigação da criticidade em sistemas. Inspirando-se nesses trabalhos e reconhecendo as semelhanças entre a constante cosmológica e o modo massivo de violação de Lorentz, é razoável especular que esse modo também pode exercer pressão sobre o buraco negro. A partir da Eq. (3.112), é possível associar uma pressão a V_0 . Consequentemente, pode-se mostrar que a pressão devida ao modo massivo é dada por⁶

$$P_{LV} = \frac{-V_0 e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{16\pi G_N r_h^{2z-2}}. \quad (2.138)$$

Observe que, devido ao fato de $V_0 > 0$, a pressão obtida acima é negativa, assemelhando-se à pressão associada a uma solução de de Sitter. Por outro lado, a pressão associada à constante cosmológica pode ser expressa como:

$$P_{\Lambda_0} = \frac{z+2}{8\pi G_N l^2}. \quad (2.139)$$

Note que esta pressão é positiva e, no limite $z = 1$, recuperamos o caso usual $P_{\Lambda_0} = \frac{3}{8\pi G_N l^2}$. Embora seja possível definir diferentes pressões para os parâmetros V_0 e Λ_0 , em nossa análise, assumimos que apenas V_0 exerce pressão sobre o buraco negro. Em outras palavras, consideramos V_0 como uma variável termodinâmica. Por outro lado, tratamos Λ como uma constante que não entra na primeira lei da termodinâmica. Essa escolha parece razoável, pois a pressão associada a V_0 é resultado do processo dinâmico de quebra espontânea de simetria de Lorentz, que é bem estabelecido na literatura. Esse processo é inerentemente dinâmico, ao contrário da natureza a priori da constante cosmológica.

Antes de aprofundarmos na análise da estrutura de fase, é essencial estudar as propriedades termodinâmicas das soluções (2.128-2.133) e verificar se a primeira lei é válida. No entanto, para prosseguir, devemos definir formalmente como o parâmetro m se relaciona com a massa do buraco negro. Mas antes, vamos definir explicitamente a carga de violação de Lorentz

⁶Podemos modelar o tensor de energia-momento como $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -P_r, -P_t, -P_t)$, onde ρ é a densidade de energia e P_r, P_t são as pressões radial e tangencial, respectivamente. Utilizando a Eq. (3.112), podemos determinar as pressões associadas aos parâmetros V_0 e Λ_0 . Considerando que o espaço-tempo de Lifshitz é não isotrópico, levamos em conta um fluido não isotrópico. Além disso, nos concentramos apenas na componente radial, uma vez que os componentes tangenciais não contribuem para o trabalho exercido pela pressão sobre o buraco negro.

a partir da Eq. (2.116) como:

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{q}l^{z-1}}{4G_N}. \quad (2.140)$$

Além disso, o potencial associado a essa carga nas relações termodinâmicas, medido no infinito em relação ao horizonte, é definido por:

$$\tilde{\Phi}(r) = \tilde{A}_\mu \chi^\mu|_{r \rightarrow \infty} - \tilde{A}_\mu \chi^\mu|_{r=r_h}, \quad (2.141)$$

onde $\chi = \partial_t$ é o gerador nulo do horizonte. Considerando a Eq. (2.132) e a equação acima, obtemos que

$$\tilde{\Phi}(r) = -\frac{\tilde{q}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{z}(r^{-z} - r_h^{-z}), \quad (2.142)$$

Utilizando o formalismo modificado de Brown e York [83], podemos calcular a massa da solução como:

$$M = \frac{ml^{-z-1}}{2G_N}. \quad (2.143)$$

A primeira propriedade termodinâmica que calculamos é a temperatura, que pode ser expressa por $T = \frac{l^{-1-z}r^z(rf'+2zf)}{4\pi}$. Substituindo as Eqs. (2.129) e (2.137) nesta expressão, encontramos que:

$$T = \frac{l^{-z-1}r_h^{-z-2} \left[4r_h^{2z} (l^2 + r_h^2 z(z+2)) - ze^{-\sqrt{z-1}\phi_0} (\tilde{q}^2 l^{2z} + 2l^2 r_h^4 V_0) \right]}{16\pi z}, \quad (2.144)$$

onde usamos a Eq. (2.143). Assim, o limite extremal ($T = 0$) é dado por

$$V_0^{ext} = \frac{4e^{\sqrt{z-1}\phi_0} r_{ext}^{2z} (z(z+2)r_{ext}^2 + l^2) - \tilde{q}^2 z l^{2z}}{2l^2 z r_{ext}^4}, \quad (2.145)$$

onde r_{ext} é a posição do horizonte no extremo. Notavelmente, se substituirmos as Eqs. (2.137) e (2.145) em (2.129), de fato encontramos que a geometria próxima ao horizonte é descrita por $AdS_2 \times S^2$. A outra quantidade é a entropia de Bekenstein-Hawking, que é dada por

$$S = \frac{\pi r_h^2}{G_N}. \quad (2.146)$$

Tendo definido as quantidades termodinâmicas e geométricas para a solução (2.128), agora estamos prontos para verificar a primeira lei da termodinâmica. No entanto, antes de prosseguir, é essencial entender o papel dos parâmetros da violação de Lorentz, expressos por V_0 e

\tilde{q} , na primeira lei. Inspirados pelo limite $z \rightarrow 1$, podemos assumir que a constante cosmológica é fixa, o que significa que os parâmetros do buraco negro variam em um 'background AdS fixo'. Por outro lado, como mencionado anteriormente, consideramos que o modo massivo de violação de Lorentz contribui para uma forma de pressão na primeira lei. Estabelecendo paralelos entre V_0 e a constante cosmológica, adotaremos a análise feita por Refs [112, 113] para entender as implicações de V_0 na primeira lei da termodinâmica. De fato, esses artigos demonstraram que, quando a constante cosmológica é considerada como uma variável termodinâmica por meio de um termo de pressão, a massa do buraco negro não é mais identificada apenas com a energia livre, mas sim com a *entalpia*. Essa abordagem inovadora atraiu considerável atenção, pois revelou as notáveis semelhanças entre as soluções de buracos negros carregados AdS e o fluido de van der Waals [86], proporcionando uma perspectiva mais clara e esclarecedora sobre seu comportamento termodinâmico. Certamente, essa suposição levanta algumas preocupações, especialmente a falta de um mecanismo conhecido que trate a constante cosmológica como valores de expectativa de vácuo. No entanto, para nossa proposta, isso não representa um problema, pois as excitações de Bumblebee que geram esses novos termos surgem precisamente como valores de expectativa de vácuo de B_μ . Essa característica única distingue nossa abordagem, permitindo a incorporação natural da constante cosmológica e evitando os problemas associados ao tratamento tradicional dela como uma variável termodinâmica.

Portanto, assumindo que o modo de massa de violação de Lorentz V_0 é uma variável termodinâmica, estabelecemos que o parâmetro de massa (2.143) é análogo à entalpia. Este potencial termodinâmico pode então ser relacionado à entropia, pressão e carga em um espaço de fase estendido que inclui as variáveis P_{LV} e V_{LV} . A relação pode ser expressa da seguinte forma:

$$dH = TdS + V_{LV}dP_{LV} + \tilde{\Phi}(\infty)d\tilde{Q}, \quad (2.147)$$

onde o potencial $\tilde{\Phi}$ é mantido fixo na fronteira com valor $\tilde{\Phi}(\infty) = \frac{\tilde{Q}l^{z-1}r_h^{-z}e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{4G_N z}$, e serve como a variável conjugada à carga \tilde{Q} . Assim, temos que

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{V_0, \tilde{Q}, \phi_0} \quad (2.148)$$

$$V_{LV} = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S, \tilde{Q}, \phi_0}. \quad (2.149)$$

$$\tilde{\Phi}(\infty) = \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \right)_{S, V_0, \phi_0}. \quad (2.150)$$

De fato, é evidente que a relação (2.148) é válida, pois a entalpia é dada pela Eq. (2.143). Da mesma forma, descobrimos que a Eq. (2.150) é válida para (2.140). Finalmente, podemos confirmar que a primeira lei realmente se mantém quando o “volume termodinâmico”(2.149) é dado por:

$$V_{LV} = \frac{4\pi l^{1-z} r_h^{z+2}}{4-z}, \quad (2.151)$$

onde assumimos que a pressão termodinâmica é dada pela pressão (2.138). De fato, a quantidade (2.151) possui dimensão de volume, [*comprimento*]³. Em casos limitantes, nossas expressões recuperam naturalmente as definições em [109, 114, 115].

Substituindo Eq.(2.146) e (2.138) na expressão (2.137), obtemos a entalpia dada por

$$H(S, P_{LV}, \tilde{Q}) = \frac{\pi^{z/2} \left(-\frac{16G_N^3 l^2 P_{LV} S^2 z^2 r_h^{2z-2}}{\pi(z-4)} + 8G_N^2 l^2 \tilde{Q}^2 z e^{-\sqrt{z-1}\phi_0} + 2\pi^{-z} (SG_N)^z \left(\frac{G_N S z^2}{\pi} + l^2 \right) \right)}{4G_N z^2 l^{z+1} (\sqrt{SG_N})^z}. \quad (2.152)$$

De fato, a Eq. (2.147) é válida, uma vez que as quantidades (2.148), (2.149) e (2.150) são confirmadas com as Eqs. (2.144), (2.151) e (3.122), respectivamente. Além disso, no limite $z = 1$ ($\tilde{Q} = 0$) recuperamos a entalpia encontrada por Ref.[112], como esperado.

Para explorar as semelhanças entre a solução do buraco negro com violação de Lorentz no espaço-tempo de Lifshitz (2.128) e o fluido de van der Waals, fazemos a suposição de que tanto a carga quanto a constante cosmológica são parâmetros externos fixos, não variáveis termodinâmicas. Para seguir nessa direção, obtemos a equação de estado do buraco negro, ou seja, a equação que depende apenas de P_{LV} e V_{LV} , da Eq. (2.144), e ela é dada por:

$$P_{LV}(T, V_{LV}) = -P_{\Lambda_0} + \frac{T l^{z-1} r_h^{-z}}{2G_N} + \frac{G_N \tilde{Q}^2 r_h^{-2(z+1)} e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}}{2\pi} - \frac{1}{8\pi G_N r_h^2 z}, \quad (2.153)$$

onde V_{LV} é dado em termos do raio do horizonte de eventos r_h através da Eq. (2.151). Além disso, P_{Λ_0} é definido em (2.139), mas reiterando, essa quantidade é um parâmetro fixo. Uma vez que temos a equação de estado (2.153), podemos proceder para calcular os pontos críticos do diagrama P-V. No entanto, antes disso, seria mais apropriado reescrever a Eq. (2.153) de uma forma semelhante à equação de estado para o fluido de van der Waals [86]. Para conseguir isso, definimos uma espécie de “volume específico” dado por:

$$v \equiv \left(\frac{2G_N}{l^{z-1}} \right) r_h^z. \quad (2.154)$$

Assim, temos que a Eq. (2.153) pode ser reescrita como

$$P_{LV} = -\frac{a}{2\pi v^{2/z}} + \frac{b}{\pi v^{\frac{2(z+1)}{z}}} + \frac{T}{v} - P_{\Lambda_0}, \quad (2.155)$$

onde

$$a = \frac{2^{\frac{2}{z}-4} G_N^{\frac{2}{z}-1} l^{\frac{2}{z}-2}}{z} \quad (2.156)$$

$$b = 2^{\frac{z+2}{z}} \tilde{Q}^2 G_N^{\frac{2}{z}+3} l^{\frac{2}{z}-2z} e^{-\sqrt{z-1}\phi_0}. \quad (2.157)$$

Além disso, podemos definir o “volume específico” como $v = \frac{V_{LV}}{N}$, onde N representa o “número de estados”[111]. Assim, é fácil obter que para (2.151), o geral N é dado por:

$$N = \frac{2}{4-z} S, \quad (2.158)$$

onde S é a entropia (2.146). De fato, esse resultado notável indica que a entropia do buraco negro está de alguma forma relacionada ao número de graus de liberdade do sistema. O fato de que a expressão para N é proporcional à entropia do buraco negro sugere uma conexão mais profunda entre as propriedades microscópicas do buraco negro e seu comportamento termodinâmico macroscópico, fornecendo insights valiosos sobre a natureza subjacente da solução do buraco negro.

Os pontos críticos são obtidos a partir de

$$\left(\frac{\partial P_{LV}}{\partial v} \right)_{T, \tilde{Q}, \phi_0} = \left(\frac{\partial^2 P_{LV}}{\partial v^2} \right)_{T, \tilde{Q}, \phi_0} = 0, \quad (2.159)$$

o que leva a

$$v_c = 4G_N^2 \tilde{Q} l^{1-z} e^{-\frac{\sqrt{z-1}\phi_0}{2}} \sqrt{\frac{z(z+1)(z+2)}{2-z}} \quad (2.160)$$

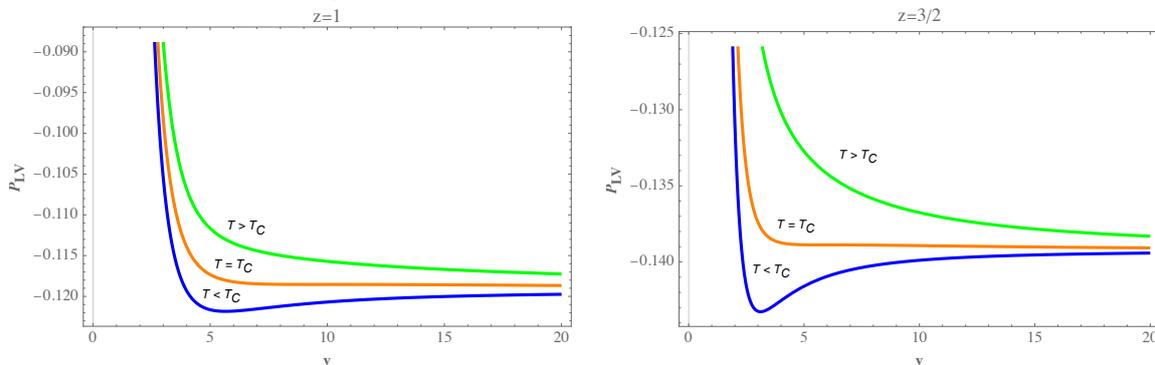
$$T_c = \frac{2^{\frac{z-2}{z}} G_N^{\frac{z-2}{z}} l^{1-z} \tilde{Q}^{\frac{z-2}{z}} e^{-\frac{(z-2)\sqrt{z-1}\phi_0}{2z}} \left(\frac{z(z+1)(z+2)}{2-z} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{z}}}{\pi z(z+2)} \quad (2.161)$$

$$P_c = \frac{2^{-\frac{2}{z}-3} G_N^{-\frac{z+2}{z}} \tilde{Q}^{-2/z} e^{\frac{\sqrt{z-1}\phi_0}{z}} (z+2) \left(\frac{z(z+1)(z+2)}{2-z} \right)^{-\frac{z+1}{z}}}{\pi} - P_{\Lambda_0}. \quad (2.162)$$

Das equações apresentadas acima, fica evidente que, para identificar pontos críticos, nos quais tanto a temperatura quanto o horizonte crítico são reais e não negativos, o coeficiente dinâmico precisa estar dentro do intervalo $1 \leq z < 2$. Ao traçar dois diagramas P-V para dois va-

lores de z dentro deste intervalo, observamos o surgimento de uma 'parte oscilante' na isoterma, assemelhando-se de perto ao diagrama P-V de van der Waals (Fig. 11). Notavelmente, a pressão perto do ponto crítico é negativa para essa configuração. Isso é uma característica de cenários onde a simetria de Lorentz é quebrada espontaneamente (2.138) para $V_0 > 0$. No entanto, à medida que a temperatura aumenta, nos afastamos dos pontos críticos, até alcançarmos uma pressão positiva P_{LV} , indicando um cenário onde a quebra espontânea da simetria de Lorentz não está mais presente, como teríamos $\lambda < 0$.

Figura 11: Diagrama P-V do buraco negro de Einstein-Maxwell-Bumblebee-Dilaton para $\tilde{Q} = 1$. Definimos $G_N = \phi_0 = l^2 = 1$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Também podemos encontrar uma relação universal para z geral que relaciona as três quantidades críticas (2.160), (2.161) e (2.162). Assim, é fácil mostrar que

$$\frac{P_c^{eff} v_c}{T_c} = \frac{4 - z^2}{4(1 + z)} \quad (2.163)$$

onde $P_c^{eff} = P_c + P_{\Lambda_0}$. Note que em $z = 1$, recuperamos a mesma relação que para o fluido de van der Waals.

Além disso, a partir da equação de estado (2.155), é possível obter 'a lei dos estados correspondentes'. Definindo as seguintes quantidades

$$p = \frac{P^{eff}}{P_c^{eff}}, \quad v = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (2.164)$$

onde $P^{eff} = P_{LV} + P_{\Lambda_0}$, temos que

$$8\tau = 2(2 + z)v \left[\frac{2 - z}{1 + z} p + \frac{1}{v^{\frac{z}{2} - 1}} \right] - \frac{2(2 - z)}{(1 + z)v^{-1 - \frac{z}{2}}}. \quad (2.165)$$

No limite $z = 1$, recuperamos 'a lei dos estados correspondentes' de Ref. [86]. Essa equação será crucial para calcular os expoentes críticos posteriormente.

Como mostrado por Ref. [116], é possível associar a estabilidade termodinâmica com flutuações microscópicas do sistema. A condição de estabilidade pode ser expressa como

$$C_{P,V} \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P_{LV}, V_{LV}, \tilde{Q}} \geq 0 \quad (2.166)$$

onde $C_{P,V}$ é o calor específico à pressão ou volume constante. Usando as Eqs. (2.144) e (2.146), temos que o calor específico à pressão constante é dado por

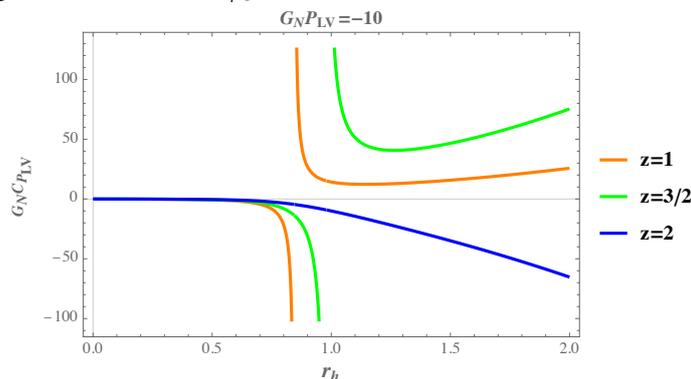
$$C_P = \frac{8\pi^2 z l^{z+1} r_h^{z+4} e^{\sqrt{z-1}\phi_0} T}{\tilde{B}},$$

onde T é dado por (2.144) e

$$\tilde{B} \equiv 4G_N^3 l^2 \tilde{Q}^2 z(z+2) + G_N r_h^{2z} e^{\sqrt{z-1}\phi_0} [r_h^2 z^2 (z+2) - l^2 (z-2) (8\pi G_N P_{LV} r_h^2 z - 1)] \quad (2.167)$$

Imediatamente, podemos observar que o calor específico C_P se torna singular em $\tilde{B} = 0$, precisamente no ponto crítico. Na Fig. (12), plotamos o calor específico à pressão constante em relação ao horizonte, considerando vários valores de z . As linhas laranja e verde exibem descontinuidades, que são resultado dessas linhas estarem dentro da faixa permitindo pontos críticos $1 \leq z < 2$. A linha azul, situada fora deste intervalo, não apresenta descontinuidades. Além disso, podemos observar que apenas as duas linhas dentro do intervalo demonstram estabilidade termodinâmica. Por outro lado, o calor específico à volume constante se anula, pois a entropia (2.146) permanece inalterada quando o volume é fixo.

Figura 12: Calor específico à pressão constante em relação ao raio do horizonte para vários valores de z e $G_N \tilde{Q} = 1$. Definimos $\phi_0 = l^2 = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

• Estrutura de Fase

Nos estudos de transição de fase, analisar a energia livre de Gibbs é de extrema importância. Isso ocorre porque as transições de primeira ordem são identificadas pelo compor-

tamento divergente de sua primeira derivada. Com isso em mente, podemos expressar a energia livre de Gibbs da seguinte forma:

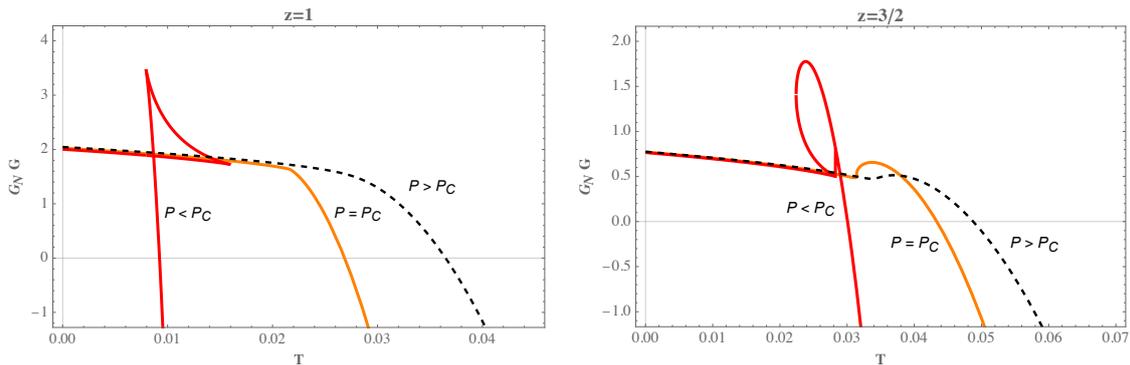
$$G = H - TS, \quad (2.168)$$

onde a entalpia H é identificada como a massa (2.137), conforme discutido anteriormente. Assim, temos que a energia de Gibbs para \tilde{Q} fixo para nossa solução é dada por

$$G(T, P_{LV}) = \frac{\left[l^2 \left(4G_N^2 \tilde{Q}^2 z(z+2) e^{-\sqrt{z-1}\phi_0} - \frac{(z-2)r_h^{2z} (8\pi G_N P_{LV} r_h^2 z^2 + z-4)}{z-4} \right) - z^3 r_h^{2z+2} \right]}{4G_N z^2 l^{z+1} r_h^z} \quad (2.169)$$

onde $r_h = r_h(T, P_{LV})$ é expresso através da Eq.(2.153). No limite $z = 1$, obtemos o mesmo resultado de Ref.([109]) que utilizou a abordagem euclidiana para a gravidade quântica para obter o mesmo resultado.

Figura 13: Energia livre de Gibbs do buraco negro de Einstein-Maxwell-Bumblebee-Dilaton para $G_N \tilde{Q} = 1$. As linhas laranjas correspondem a pressões críticas onde $G_N P_c^{z=1} \approx -0.118$ e $G_N P_c^{z=3/2} \approx -0.139$. Nós fixamos $\phi_0 = l^2 = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Fig. (13), apresentamos a energia livre de Gibbs como função da temperatura para dois valores de z que se encontram dentro da faixa que permite pontos críticos. Para $z = 1$, observamos um gráfico muito semelhante ao obtido em [109]. De fato, podemos ver que, para $P < P_c$, o fenômeno da “swallow tail” emerge. Por outro lado, quando fixamos $z = 3/2$, o comportamento da “swallow tail” é alterado. No entanto, para ambos os casos, é evidente que quando $T < T_c$, ocorre uma transição de fase de primeira ordem entre um (buraco negro pequeno) e um (buraco negro grande).

• Expoentes críticos

O comportamento de quantidades físicas próximas a um ponto crítico pode ser caracterizado por expoentes críticos. Esses expoentes são independentes dos detalhes da teoria,

tornando-os universais. No entanto, eles podem depender do tamanho do sistema ou da extensão das interações. Utilizando a mesma abordagem do artigo [86], obtemos quatro expoentes críticos: α , β , γ e δ abaixo.

- *Parâmetro de ordem η*

Para obter o parâmetro de ordem, expandimos a equação de estados correspondentes (2.165) nas proximidades do ponto crítico. Para isso, definimos:

$$t = \tau - 1 \quad \omega = \nu - 1. \quad (2.170)$$

Assim, obtemos que:

$$p \approx 1 - \frac{4(z+1)t}{z^2-4} + \frac{4z(z+1)t\omega}{z^2-4} - \frac{2z(z+1)\omega^3}{3} + \dots, \quad (2.171)$$

onde as reticências levam em consideração os termos de ordem igual ou maior que ω^4 , que desconsideramos. Também negligenciamos os termos $t\omega^2$. Agora, podemos calcular a diferencial da série truncada acima, e obtemos que:

$$dP_{LV} = 2z(z+1)P_c^{eff} \left(\frac{2t}{z^2-4} - \omega^2 \right) d\omega. \quad (2.172)$$

Vale lembrar que P_{Λ_0} é fixo, então sua diferencial se anula. Supondo que ω_l e ω_s são os 'volumes' dos buracos negros grande e pequeno, respectivamente, e que durante a transição de fase as pressões são iguais, podemos obter a seguinte equação:

$$1 - \frac{4(z+1)t}{z^2-4} + \frac{4z(z+1)t\omega_l}{z^2-4} - \frac{2z(z+1)\omega_l^3}{3} = 1 - \frac{4(z+1)t}{z^2-4} + \frac{4z(z+1)t\omega_s}{z^2-4} - \frac{2z(z+1)\omega_s^3}{3}. \quad (2.173)$$

Além disso, podemos empregar a lei de área igual de Maxwell para obter a seguinte equação:

$$\int_{\omega_l}^{\omega_s} \omega \left(\frac{2t}{z^2-4} - \omega^2 \right) d\omega = 0. \quad (2.174)$$

Supondo $t < 0$ fixo, a única solução não trivial para o sistema de equações (2.173) e (2.174) é $\omega_l = -\omega_s \propto \sqrt{-t}$. Assim, o parâmetro de ordem é dado por

$$\eta = v_c(\omega_l - \omega_s) \propto \sqrt{-t}. \quad (2.175)$$

Portanto, encontramos que o primeiro expoente crítico é $\beta = 1/2$.

- *Compressibilidade isotérmica κ_T*

O outro expoente crítico γ é encontrado através da compressibilidade isotérmica dada por [86]:

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P_{LV}} \Big|_T \propto t^{-\gamma}. \quad (2.176)$$

Conseguimos isso diferenciando a Eq. (2.171). Assim, podemos facilmente obter que

$$\kappa_T \propto \frac{1}{P_c^{eff} t}. \quad (2.177)$$

Portanto, encontramos que o segundo expoente crítico é $\gamma = 1$.

- *Isoterma crítico* $T = T_c$

O próximo expoente crítico δ está relacionado ao 'formato do isoterma crítico' $t = 0$ através da relação:

$$|P - P_c| \propto |v - v_c|^\delta. \quad (2.178)$$

Podemos obter essa relação assumindo $t = 0$ na Eq.(2.171). Assim, obtemos:

$$p - 1 = -\frac{2z(z+1)\omega^3}{3}. \quad (2.179)$$

Portanto, encontramos que o terceiro expoente crítico é $\delta = 3$.

- *Calor específico a volume constante* C_v

Finalmente, temos que o expoente α governa o comportamento do calor específico a volume constante,

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_v \propto |t|^\alpha. \quad (2.180)$$

Mas, como mencionado acima, o C_v se anula. Portanto, encontramos que o último expoente crítico é $\alpha = 0$.

Em conclusão, descobrimos que os expoentes críticos para um buraco negro Lifshitz dilaton com excitações bumblebee são os mesmos encontrados no fluido de van der Waals. Essa notável semelhança indica que os comportamentos críticos em ambos os sistemas compartilham características universais, apesar de suas diferentes origens físicas. O estudo dos fenômenos críticos nessa solução de buraco negro fornece insights valiosos sobre as propriedades termodinâmicas de sistemas com simetria Lifshitz e violação de Lorentz.

Principais Resultados

Descobrimos uma nova solução de buraco negro carregado dentro de um espaço-tempo assintoticamente Lifshitz. Quando $z = 1$, essa solução reverte para a solução do buraco negro carregado AdS, embora gerada no contexto de quebra espontânea de simetria de Lorentz. Para $z \neq 1$, derivamos uma solução que exibe uma estrutura de fase complexa altamente dependente do expoente crítico.

Para revelar as semelhanças entre nossa solução de violação de Lorentz e o sistema de van der Waals, empregamos uma análise de criticidade no espaço $P - V$. Aqui, tratamos o modo massivo como a pressão termodinâmica e sua quantidade conjugada como o volume termodinâmico. Notavelmente, reconhecemos que essa pressão assume um valor negativo, uma condição necessária para a quebra espontânea da simetria de Lorentz, levando ao surgimento do modo β_0 e sua associação com uma fase de de Sitter. Embora seja concebível elevar a constante cosmológica a uma pressão termodinâmica, representando efetivamente a fase Anti de Sitter, elevamos especificamente V_0 a uma variável termodinâmica. Essa escolha deliberada permitiu um exame focado do comportamento crítico da solução através do diagrama $P - V$. Justificamos essa decisão considerando a dinâmica contínua do modo massivo longitudinal da violação de Lorentz, que surge de flutuações em torno do valor esperado do vácuo b_μ . Dessa forma, fornecemos uma justificativa dinâmica para nossa seleção.

Na seção conclusiva do artigo, nossa atenção se voltou para uma análise abrangente das estruturas de fase. Iniciamos esse exame derivando quantidades termodinâmicas-chave. Em primeiro lugar, estava a temperatura. Estabelecemos que no limite extremal ($T = 0$), a geometria próxima ao horizonte pode ser precisamente descrita como $AdS_2 \times S^2$. Além disso, calculamos a entropia usando a fórmula de Bekenstein-Hawking. Além disso, enfatizamos a necessidade, no contexto de um espaço de fase estendido $P - V$, de interpretar a massa do buraco negro como a entalpia para que a primeira lei da termodinâmica seja válida. No entanto, o aspecto mais crucial desse empreendimento reside nos comportamentos críticos que descobrimos durante nossa análise das estruturas de fase.

Determinamos os pontos críticos da equação de estado e construímos o diagrama de fase $P - V$. Na faixa $1 \leq z < 2$, observamos o surgimento de um 'componente oscilante' na isotérmica, semelhante às nossas descobertas no sistema de van der Waals. Além disso, descobrimos uma relação universal e 'a lei dos estados correspondentes' dependente de z que vincula os pontos críticos. Notavelmente, em $z = 1$, recuperamos as relações para o fluido de van der Waals. Em relação à estabilidade da solução, demonstramos que C_P exibe descontinuidades

(indicativas de transições de fase) e positividade (indicativa de estabilidade termodinâmica) para $1 \leq z < 2$. Além disso, o comportamento de “swallowtail” da energia livre de Gibbs em $z = 1$ indica uma transição de fase de primeira ordem dentro do sistema. Por outro lado, para $z = 3/2$, observamos um comportamento de “swallowtail” distinto, que também sinaliza uma transição de primeira ordem. Finalmente, calculamos os expoentes críticos do sistema e os determinamos como universais, espelhando os de um sistema de fluido de van der Waals.

3 TEORIA DE ALTAS-DERIVADAS

Nesse último capítulo iremos explorar as chamadas **teorias gravitacionais de altas-derivadas**. A ideia de estender a RG adicionando novos invariantes não é nova, aliás a proposta de modificar a teoria de Einstein para a gravitação considerando novos invariantes em altas-ordens foi introduzida apenas quatro anos depois da publicação da teoria da RG por Hermann Weyl em 1919 [117] e posteriormente por Arthur Stanley Eddington em 1923 [118]. Essas teorias têm inúmeros aspectos importantes, dentre eles podemos citar o seu caráter renormalizável a um-*loop* [119], sendo essa talvez sua melhor motivação. Outra forte motivação para teorias em altas-derivadas, essa mais recente, vem de correções quânticas e de teorias de cordas que mostram que esses novos invariantes podem ser obtidos de ações gravitacionais efetivas à baixas-energias dessas teorias [120,121]. No entanto, essas teorias também, normalmente, apresentam as famosas instabilidades de Ostrogradsky que é um problema de unitariedade [119]. Esses aspectos serão discutidos detalhadamente mais a frente. Além disso, nós iremos trabalhar no formalismo métrico, ou seja, o campo fundamental que descreve a dinâmica gravitacional é a métrica. Nós utilizaremos esse formalismo para estudar teorias que são construídas com termos invariantes na curvatura até ordem cúbicas. Mas antes de abordar as teorias gravitacionais cúbicas, nós iremos fazer uma rápida revisão sobre a chamada gravidade R^2 . Esse modelo nos servirá como protótipo para revelar as principais características das teorias que adicionam novos invariantes à ação de Einstein-Hilbert.

3.1 Teorias quadráticas

As teorias gravitacionais em altas-ordens ficaram mais famosas a partir da década de 60, principalmente com os trabalhos [122, 123] que mostraram que o setor gravitacional pode ser renormalizável a um-*loop* se for adicionado novos invariantes na curvatura ao termo de Einstein-Hilbert motivados por correções quânticas. O exemplo mais simples para essa modificação é construindo novos invariantes com o escalar de Ricci, a chamada teoria $f(R)$. Podemos construir essa função de maneira geral como

$$f(R) = \dots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda_0 + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + \dots \quad (3.1)$$

Vale a pena lembrar que é possível construir outros invariantes quadráticos como os já mencionados $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. A esperança desde então é encontrar indícios experimentais dessas correções. Como mencionada antes, a RG é um sucesso experimental. Nenhum indício de desvio no regime clássico nem quântico foi detectado até hoje. Na verdade, esse último, ou seja, um possível comportamento quântico para a gravitação nunca foi observado. No entanto, alguns trabalhos sugerem que essas modificações contribuiriam no universo primordial [124] e nos regimes de gravidade extremamente forte [125], ou seja, em objetos muito compactos. Além disso, esses modelos quadráticos na curvatura podem evitar singularidades presentes em modelos cosmológicos [126] e no interior de buracos negros [127].

Uma outra característica singular dos modelos quadráticos na curvatura no formalismo métrico é que eles podem explicar a fase acelerada do universo [128]. Sabemos a partir de análise do desvio para o vermelho de supernovas do tipo IA [4] e da Radiação Cósmica de Fundo (CMB)[129]¹ que estamos em uma era cosmológica dominada por vácuo que está expandindo o universo aceleradamente, chamamos isso de **energia escura**.

Para revelar as já mencionadas características de alguns modelos em altas-derivadas: renormalizabilidade, instabilidade (não unitariedade) e era cosmológica acelerada, vamos assumir a seguinte ação [130]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \beta R^2). \quad (3.2)$$

onde α e β são parâmetros da teoria. Note que a lagrangiana é quadrática na curvatura e, portanto, temos derivadas quárticas na ação. Podemos inicialmente provar que a teoria acima é livre de divergências, portanto renormalizável no regime perturbativo. Para checarmos isso, vamos considerar a ação de Einstein-Hilbert (1.48). Vamos agora assumir pequenas flutuações na métrica dadas por

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é o chamado métrica de fundo² que vamos considerar nessa análise que $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, ou seja, espaço-tempo de Minkowski. O campo $h_{\mu\nu}$ é justamente a flutuação gravitacional ou o próprio gráviton. Substituindo a perturbação (3.3) na ação (1.48), nós obtemos a conhecida ação de Fierz–Pauli, dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} \partial_\mu h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\beta^\beta - \frac{1}{2} \partial_\beta h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\mu^\beta - \frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\alpha h_{\mu\beta} \partial^\nu h^{\alpha\beta}. \quad (3.4)$$

¹ *cosmic microwave background*, em inglês.

² *background*, em inglês.

Na equação acima nós calculamos até ordem quadrática em $h_{\mu\nu}$. Agora vamos substituir a Eq.(3.3) nas equações de Einstein (1.47). Considerando apenas os termos lineares na flutuação, obtemos que

$$G_{\mu\nu}^0 = -\frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\sigma\mu}) + \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_\sigma^\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h_\sigma^\sigma = 0, \quad (3.5)$$

onde não consideramos a contribuição da matéria, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. No entanto, nos temos uma simetria de calibre associada à gravidade dada por

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (3.6)$$

Além disso, temos a identidade de Bianchi linearizada, ou seja, $\partial^\mu G_{\mu\nu}^0 = 0$. De modo, que é preciso fixar o calibre. Isso pode ser feito se nós adicionarmos o seguinte termo na lagrangiana

$$\mathcal{L}_{cal} = -\frac{1}{2}C_\mu C^\mu, \quad (3.7)$$

onde $C_\mu = \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_\alpha^\alpha$. Assim, a nova lagrangiana independente do calibre é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{cal} = \frac{1}{8}\partial_\mu h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\beta^\beta - \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta}. \quad (3.8)$$

Isso implica que o propagador para uma perturbação em relação ao espaço-tempo de Minkowski pode ser dada por

$$\langle h_{\alpha\beta}(-k)h_{\mu\nu}(k) \rangle = i \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}}{k^2 - i\epsilon}, \quad (3.9)$$

onde D é a dimensão do espaço-tempo. Assumindo um $\bar{g}_{\mu\nu}$ geral é possível mostrar que isso é suficiente para nós obtermos cálculos a um-*loop* para a ação de Einstein-Hilbert [131]. E o mais importe é que esses cálculos nos levam a um resultado histórico [131]: os contra-termos a um-*loop* do setor gravitacional puro são dados por

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi^2(D-4)} \left(\frac{1}{120}R^2 + \frac{7}{20}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right). \quad (3.10)$$

Onde foi usada a técnica de regularização dimensional. O objetivo dessa tese não é esclarecer os detalhes das correções quânticas para o gravidade. Na verdade, nós usamos esse resultado paradigmático apenas para motivar a necessidade de introduzir novos invariantes ao termo de Einstein-Hilbert. Note o seguinte: como podemos ver os contra-termos da Eq. (3.10) são justamente os termos que aparecem na ação gravitacional modificada (3.2), é por esse motivo

que dizemos que esse modelo é renormalizável pelo menos até a um-*loop* [131]. Porém é possível mostrar que esse modelo não apresenta nenhuma outra divergência [132].

Agora vamos estudar duas características muito importantes para o modelo (3.2). Mas antes vamos calcular a equação do movimento. Para fazer isso, vamos variar essa ação em relação à métrica. Assim nós obtemos que

$$H_{\mu\nu} \equiv (\alpha - 2\beta)D_\mu D_\nu R - \alpha \square R_{\mu\nu} - \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)g_{\mu\nu} \square R + 2\alpha R^{\rho\lambda} R_{\mu\rho\nu\lambda} - 2\beta R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\alpha R^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda} - \beta R^2) + \frac{1}{G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R\right) = T_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

De fato, o termo $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\alpha R^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda} - \beta R^2)$ será o termo de massa para a flutuação $h_{\mu\nu}$. Além disso, note que a conservação da matéria, ou seja, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica que $D_\mu H^{\mu\nu} = 0$. A primeira característica é que essa teoria envolve modos massivos tipo-Yukawa para o potencial gravitacional [119]. Podemos ver isso se nós assumirmos o limite estático newtoniano à Eq. (3.11). Assim, temos que o potencial gravitacional no limite não relativístico é dada por [130]

$$\phi = h^{00} = \frac{2MG}{r} - \frac{4MG}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} + \frac{MG}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \quad (3.12)$$

onde $m_0 = (16\pi G\alpha)^{-1/2}$ e $m_2 = (32\pi G(3\beta - \alpha))^{-1/2}$.

Outra característica, e talvez a razão pela qual este modelo tem sido tão estudado, é a capacidade de modelos quadráticos na curvatura explicarem a fase acelerada do universo. Para vermos isso, vamos primeiro assumir uma métrica maximamente simétrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.13)$$

conhecida como métrica cosmológica plana ou métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). É possível mostrar que para essa métrica, não há criação de partículas sem massa e polarização do vácuo não-local, de modo que valor esperado do vácuo do tensor energia-momento de um campo escalar conformemente invariante em uma geometria de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana pode ser dada por ([133]):

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle = & k_1 \left(R_\mu^\lambda R_{\nu\lambda} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2 \right) \\ & + k_2 \left(D_\mu D_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R - 2R R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Note que se $\alpha = 0$ na Eq.(3.11) e $k_1 = 0$ na Eq. (3.14), ambas as equações coincidem. Agora podemos substituir na equação $G_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle$ a métrica FRW,

assim obtemos a seguinte equação de Friedmann modificada

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 - \frac{1}{M^2} \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \ddot{a} - \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4\right), \quad (3.15)$$

onde $H^2 = \frac{\pi}{8Gk_1}$ e $M^2 = -\frac{\pi}{8Gk_2}$ com $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$. A primeira condição é necessária para a existência da solução de Sitter, enquanto a última surge do requisito de estabilidade das soluções clássicas das equações de Einstein. Como mostrado por Starobinsky na Ref. [124], podemos encontrar uma solução de-Sitter para equação acima com o fator de escala dada por $a(t) = a_0 e^{Ht}$. Portanto, foi mostrado que teorias quadráticas para a gravidade podem explicar a fase acelerada do universo.

O último assunto que queremos abordar aqui brevemente é sobre **estabilidade**. É, por motivos óbvios, importante que seja feita uma análise cuidadosa sobre estabilidades das teorias com altas-derivadas, para garantir que essas teorias possam descrever a gravidade em regimes mais energéticos sem nenhuma problema de instabilidades. Existem inúmeras formas de fazer isso. Por exemplo, nós podemos pôr restrições sobre a forma de $f(R)$ para garantir a estabilidade através das instabilidades de Dolgov-Kawasaki no setor de matéria [134] ou restrições impostas pela quantização à um-*loop* [135]. Um outro assunto importante para essas teorias, que também está relacionado a estabilidade do modelo, é o problema dos **graus de liberdade** das teorias com altas derivadas. Isso porque essas teorias normalmente apresentam estados massivos de norma negativa que causam aparente falta de unidade [136], chamamos isso de **fantasmas**³. Vamos pegar as teorias quadráticas, como exemplo. Essas teorias envolvem derivadas quárticas e é possível demonstrar que, devido a isso, o propagador será proporcional ao momento da seguinte maneira:

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M^2}, \quad (3.16)$$

onde M^2 é a escala de energia na qual as teorias de altas-derivadas se tornam relevantes. Portanto, temos graus de liberdade massivo e não massivo. Uma análise hamiltoniana desses modelos revela que, devido a esses dois graus de liberdade, a energia não possui um limite inferior. Portanto, não podemos definir de forma consistente um estado de vácuo na teoria [132]. Chamamos isso de instabilidade de Ostrogradsky. No entanto, algumas teorias em altas derivadas conseguem contornar esse problema como em [137, 138]. As teorias $f(R)$ não têm fantasmas também, veja alguns exemplos em [121, 123].

³*ghosts*, em inglês.

3.2 Teorias cúbicas em dimensões arbitrárias

Agora nós vamos estender a RG adicionado novos invariantes até a ordem cúbica, ou seja, vamos construir uma ação que contem os termos de Einstein-Hilbert (primeira ordem), mais os termos quadráticos na curvatura (segunda ordem) e, finalmente, os termos cúbicos na curvatura (terceira ordem). Além disso, nós iremos fazer isso assumindo que nossa variedade tem D dimensões. Vale a pena pontuar que a adição dessas duas formas de extensão (novos invariantes e dimensões extras) é essencial para que sejamos capazes de contornar o chamado **Teorema de Lovelock**, que afirma que a ação de Einstein-Hilbert é a única se nós assumirmos uma teoria métrica com até derivadas de segunda ordem na métrica em quatro dimensões. Diante disso, nós poderíamos nos perguntar o seguinte: como podemos construir, então, os possíveis invariantes de curvatura cúbicos (ou mais precisamente, derivadas sextas)?

Quem respondeu a pergunta acima primeiro foi David Lovelock em 1971 com a famosa **teoria de Lovelock** da gravidade. Essa teoria é a teoria métrica mais geral da gravidade, produzindo equações de movimento de segunda ordem em um número arbitrário de dimensões do espaço-tempo D . A densidade lagrangiana de Lovelock é construída através de densidades de Euler dimensionalmente estendidas da seguinte maneira[37]:

$$\mathcal{L}_{LL} = \sqrt{-g} \sum_{n=0}^j \lambda_n \mathcal{R}^n, \quad (3.17)$$

onde λ_n é a constante de acoplamento com dimensão [*comprimento*] $^{2n-d}$ e

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{2^n} \delta_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n} \prod_{a=1}^n R^{\alpha_a \beta_a}_{\mu_a \nu_a} \quad (3.18)$$

onde δ é a delta de Kronecker generalizada definido como

$$\delta_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n} = \begin{cases} 1, & \text{Se } \mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n \text{ são inteiros distintos e uma permutação par dos } \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n, \\ -1 & \text{Se } \mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n \text{ são inteiros distintos e uma permutação ímpar dos } \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n, \\ 0, & \text{Para os outros casos.} \end{cases} \quad (3.19)$$

e $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann. Note que densidade de Euler quarta ($n = 2$) leva exatamente ao termo de Gauss-Bonnet, ou seja,

$$\chi_4 \equiv \mathcal{R}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.20)$$

O próximo termo é justamente o termo de interação cúbica, representado pela densidade de Euler sexta ($n = 3$) dada por

$$\begin{aligned} \chi_6 \equiv \mathcal{E}^3 = & -8R_\mu^\rho{}_\nu{}^\sigma R_\rho^\gamma{}_\sigma{}^\delta R_\gamma^\mu{}_\delta{}^\nu + 4R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu} + 24R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + 16R_\mu^\nu R_\nu^\rho R_\rho^\mu \\ & + 3R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} R - 12R_\nu^\mu R_\mu^\nu R - 24R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma R^{\sigma\beta} + R^3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Na literatura há uma ampla gama de trabalhos que aplicam essa teoria, incluindo soluções para buracos negros [139], cosmologia [140] e branas [141]. No entanto, essa teoria gravitacional de altas-derivadas é bastante restritiva. Por exemplo, em quadro dimensões apenas o termo usual de Einstein-Hilbert é considerado, uma vez que o termo de Gauss-Bonnet é topológico em $D = 4$. Podemos escrever essas restrições da seguinte maneira:

$$D = 2j + 2, \text{ dimensões pares,} \quad (3.22)$$

$$D = 2j + 1, \text{ dimensões ímpares.} \quad (3.23)$$

Assim, podemos ver que para trabalharmos com as interações cúbicas na gravidade de Lovelock, nós precisamos estar em um espaço-tempo com pelo menos sete dimensões! No entanto, é possível desenvolver novos invariantes cúbicos que sejam menos restritivos do que aqueles construídos a partir das densidades de Euler. Apresentaremos a seguir uma classe de teorias de altas derivadas que engloba Lovelock e outras que generalizam essas interações, denominada **Teoria Quasi-Topológica Generalizada**.

3.2.1 Teoria Quasi-Topológica Generalizada

Na seção anterior, nós construímos novos invariantes na curvatura em qualquer ordem através da gravidade de Lovelock. No entanto, mostramos que essa teoria é muito restritiva (na inclusão de interação cúbica a teoria só existe em sete dimensões, por exemplo). Será que podemos construir soluções com até derivadas de segunda ordem na equação do movimento menos restritiva na dimensão para altas interações? A resposta é sim. Porém vamos ter que assumir que estamos interessados em encontrar soluções com simetria esférica e estática, como os buracos negros. A teoria mais geral que pode ser construída em qualquer ordem nos invariantes de curvatura pode ser dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{(D-1)(D-2)}{L^2} + R + \sum_{n=2} \sum_{j_n} L^{2(n-1)} \mu_{j_n}^{(n)} \mathcal{E}_{j_n}^{(n)} \right] \quad (3.24)$$

onde L é a escala de comprimento, \mathcal{R} são densidades construídas a partir de n tensores de Riemann e da métrica, μ_{j_n} são constante de acoplamento adimensional e j_n é um índice que percorre todos os independentes invariantes de ordem n . Para obter a equação do movimento para essa teoria basta variá-la em relação à métrica. Assim, nós obtemos que

$$E_{\mu\nu} = P_{\mu}^{\lambda\sigma\alpha} R_{\nu\lambda\sigma\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2D^{\lambda} D^{\sigma} P_{\mu\lambda\sigma\nu} = 0, \quad (3.25)$$

onde $P_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}}$.

Diferentemente de Lovelock, esses invariantes são construídos não com as densidades de Euler, mas assumindo todas as contrações possíveis. Vamos escrever abaixo todas as possíveis contrações da interação cúbica (mais precisamente, derivadas sextas na métrica) para essa teoria [142], isso inclui os termos com derivadas covariantes de tensores de Ricci e de Riemann.

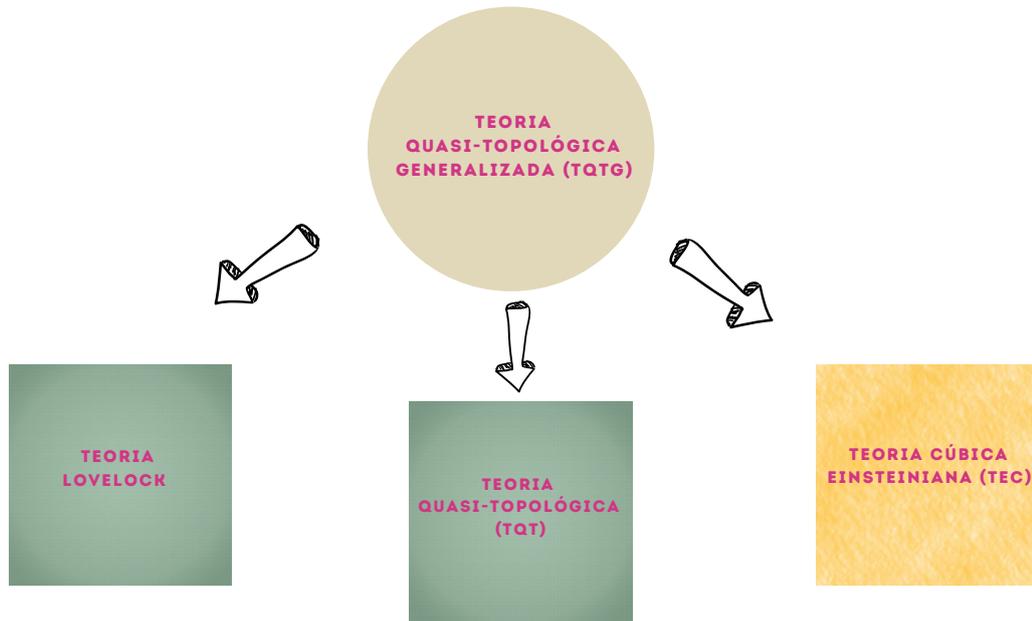
- | | | |
|--|--|---|
| 1. $R_{\mu}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\gamma}{}_{\sigma}{}^{\delta} R_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\delta}{}^{\nu}$ | 6. $R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda} R$ | 11. $D_{\alpha} R_{\mu\nu} D^{\alpha} R^{\mu\nu}$ |
| 2. $R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}$ | 7. $R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\mu} R$ | 12. $D^{\alpha} R_{\alpha\beta} D^{\beta} R$ |
| 3. $R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}$ | 8. R^3 | 13. $D_{\alpha} R D^{\alpha} R$ |
| 4. $R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\rho} R_{\rho}{}^{\mu}$ | 9. $D_{\alpha} R_{\mu\nu\rho\lambda} D^{\alpha} R^{\mu\nu\rho\lambda}$ | |
| 5. $R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha} R^{\alpha\lambda}$ | 10. $D^{\alpha} D^{\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} R^{\mu\nu}$ | |

No entanto, como mostrado em [142], vamos ter no total apenas dez termos cúbicos se descartamos os termos de derivada total (desconsideramos, portanto, os termos (9), (10), (12)). Porém vamos mostrar que para uma métrica específica, é possível obter equações para o movimento que são na verdade de segunda ordem, ao invés de sexta. Para vermos isso, nós vamos assumir o *ansatz* com simetria esférica e estática (SEE) ou podemos chamá-la de solução tipo-Schwarzschild de uma única função

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_{d-2}^2, \quad (3.26)$$

onde f são funções que dependem apenas da coordenada radial e $d\Sigma_{(d-2),k}^2$ é o elemento de linha de uma superfície de curvatura constante com $k = -1, 0, 1$ que corresponde, respectivamente, topologia hiperbólica, plana e esférica. É possível mostrar que essa teoria é a mais geral que gera soluções tipo-Schwarzschild em D dimensões cuja equação do movimento é de segunda ordem. Chamamos essa teoria de Quasi-Topológica Generalizada (TQTG) [143].

Figura 14: Esquema com as possibilidades para teorias gravitacionais com interações cúbicas



Fonte: elaborado pelo autor.

Na verdade, a TQTG é uma grande classe de teoria gravitacional que nos fornece soluções tipo-Schwarzschild “sem cabelo” de uma única função, ou seja, $g_{rr}g_{tt} = -1$ na qual satisfaz uma equação diferencial de segunda-ordem. Além disso, essas teorias possuem equações linearizadas de segunda ordem em torno de uma métrica de fundo **maximamente simétrica**. Inicialmente, foi mostrado que isso era alcançado até as interações cúbicas [143], mas posteriormente foi estendido a quaisquer interações. Essa classe de teoria contém mais três subclasses, as chamadas teorias Quasi-Topológicas (TQT), Lovelock e Cúbica Einsteiniana, veja a Fig.14. As duas primeiras teorias, quando assumimos o *ansatz* (3.26), nós obtemos uma equação algébrica para f ; mas para qualquer outra métrica a teoria de Lovelock fornece uma equação de segunda-ordem, enquanto para TQT temos uma equação de quarta-ordem. Além disso, a TQT é menos restritiva, uma vez que ela existe para interações cúbicas já em $D = 5$. Por outro lado, a última teoria nos fornece equações de segunda-ordem para f em $D = 4$. Essa teoria será um dos focos dessa tese, por isso iremos elaborar uma seção só para ela.

3.3 Teoria Cúbica Einsteiniana (TCE)

Até a ordem cúbica, a teoria mais geral da gravidade, independente de dimensões, formulada através de contrações arbitrariamente escolhidas na métrica e no tensor de Riemann em curvatura, cujo espectro linearizado coincide com o da gravidade de Einstein, é chamada

de Teoria Cúbica Einsteiniana. Essa teoria pode ser expressa como uma combinação linear dos termos de Lovelock, acrescida de uma nova contribuição cúbica P , que pode ser representada por:

$$P = 12R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} R_{\rho}^{\gamma} R_{\sigma}^{\delta} R_{\gamma}^{\mu} R_{\delta}^{\nu} + R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\mu\nu} - 12R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + 8R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\rho} R_{\rho}^{\mu}. \quad (3.27)$$

Ou seja, a lagrangiana para essa teoria pode ser dada por

$$\mathcal{L}_{TCE} = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda_0) + \alpha\chi_4 + 8\pi G(\beta\chi_6 + \lambda P) + \mathcal{L}_m, \quad (3.28)$$

onde χ_4 e χ_6 são os termos quadráticos e cúbicos de Lovelock, respectivamente. A constante de acoplamento λ é adimensional e para definir um vácuo único, é necessário que $\lambda \geq 0$, como iremos ver mais a frente.

O que iremos fazer agora é explicar passo-a-passo de como obter as combinações de invariantes de curvatura dentre todas as 13 possíveis mostradas anteriormente que levaram a definição de (3.124). Essa análise é baseada na Ref.[144]. A construção dessa teoria é baseada em três propriedades:

1. A teoria compartilha o espectro com a RG;
2. Os coeficientes relativos dos diferentes invariantes de curvatura são independentes da dimensão;
3. Em $D = 4$, a teoria não é nem topológica nem trivial.

A primeira condição está relacionada ao conjunto de graus de liberdade propagantes pela métrica perturbada no vácuo. Nós estamos aqui impondo que o espectro linearizada da teoria coincide com o da RG. Dito de uma outra forma, essa condição assegura que a teoria no regime linear descreve o gráviton com um modo transversal propagante que é sem massa e tem spin-2. Como podemos assegurar isso? Primeiro vamos assumir a flutuação padrão dada por

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo e $h_{\mu\nu}$ é a flutuação gravitacional assumida $h_{\mu\nu} \ll 1$. Como mostrado em Ref.[144], se nós linearizáramos a Eq.(3.25) em torno de um espaço-tempo **maximamente simétrico**, ou seja,

$$\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 2\Lambda\bar{g}_{\mu[\alpha}\bar{g}_{\beta]\nu}, \quad (3.30)$$

é possível mostrar que, assumindo a seguinte decomposição para a métrica perturbada:

$$h_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}^{(m)} + t_{\mu\nu}^{(M)} + \frac{[\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\square}]h}{m_s^2 + d\Lambda} + \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} h \quad (3.31)$$

onde $h = h_\alpha^\alpha$, os tensores sem traço $t_{\mu\nu}^m$ e $t_{\mu\nu}^M$ e o traço h obedecem as seguintes equações:

$$-\frac{1}{2\kappa_{eff}} \left[\bar{\square} - 2\Lambda \right] t_{\mu\nu}^{(m)} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{2\kappa_{eff}} \left[\bar{\square} - 2\Lambda - m_g^2 \right] t_{\mu\nu}^{(M)} = 0, \quad (3.33)$$

$$-\left[\frac{(D-1)(D-2)\Lambda(m_g^2 - (d-2)\Lambda)}{4\kappa_{eff}m_g^2(m_s^2 + d\Lambda)} \right] [\bar{\square} - m_s^2]h = 0, \quad (3.34)$$

onde

$$\kappa_{eff}^{-1} = 4e - 8\Lambda(D-3)a, \quad (3.35)$$

$$m_g^2 = \frac{(-e + 2\Lambda(D-3)a)}{2a + c}, \quad (3.36)$$

$$m_s^2 = \frac{e(D-2) - 4\Lambda(a + (bD+c)(d-1))}{2a + Dc + 4b(D-1)}, \quad (3.37)$$

onde a , b , c e e são constantes dependentes do modelo, veja a Eq. (4) da Ref. [144]. Note o seguinte: a primeira Eq. (3.32) é para o gráviton usual sem massa, enquanto a Eq. (3.33) descreve um outro modo tensorial massivo. Além disso, nós temos o campo escalar h de massa m_s descrito pela Eq. (3.34). Assim, finalmente podemos mostrar que para um teoria gravitacional métrica geral construída com n invariantes de curvatura compartilhar seu espectro com a RG, é necessário que as massas dos modos massivos tensorial e escalar sejam infinitamente pesados, ou seja, $|m_g^2| = |m_s^2| = +\infty$ [144]. Isso gera a partir das Eqs (3.35) e (3.36) os seguintes vínculos

$$2a + c = 0, \quad (3.38)$$

$$4b + c = 0. \quad (3.39)$$

Isso assegura que no regime linear essas teorias tenham apenas modos tensoriais não massivos (gráviton), assim evitando possíveis fantasmas e assegurando a unitariedade. Agora, quais as implicações dos vínculos (3.38) e (3.39) nas combinações dos invariantes tanto na interação quadrática e cúbica? Vamos escrever a lagrangiana com essas duas interações da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda_0) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathcal{L}_i^{(2)} + \kappa \sum_{i=1}^8 \beta_i \mathcal{L}_i^{(3)}, \quad (3.40)$$

onde $\mathcal{L}_i^{(3)}$ é a lagrangiana cúbica com os possíveis invariantes já mencionados ⁴ e $\mathcal{L}_i^{(2)}$ é a lagrangiana quadrática que tem os seguintes possíveis invariantes:

$$1. R^2 \qquad 2. R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \qquad 3. R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Seguindo o processo de linearização adotado em [144], nós podemos identificar as constantes dependente do modelo até a interação cúbica como

$$a = \alpha_3 - \frac{\kappa\Lambda}{2}[3\beta_1 - 12\beta_2 - 2(D-1)\beta_3 - 2d(D-1)\beta_4], \quad (3.41)$$

$$b = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\kappa\Lambda}{2}[4\beta_4 + \beta_5 + 2(D-1)\beta_7 + 3D(D-1)\beta_8], \quad (3.42)$$

$$c = \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\kappa\Lambda}{2}[3\beta_1 + 4\beta_3 + 2(2D-3)\beta_5 + 3D(D-1)\beta_6 + D(D-1)\beta_7], \quad (3.43)$$

$$e = \frac{1}{4\kappa} + \Lambda[D(D-1)\alpha_1 + (D-1)\alpha_2 + 2] + \frac{\kappa\Lambda^2}{2}[3(D-2)\beta_1 + 12\beta_2 + 6(D-1)\beta_3 + 6D(D-1)\beta_4 + 3(D-1)^2(\beta_5 + \beta_6 + D\beta_7 + D^2\beta_8)]. \quad (3.44)$$

Note o seguinte, assumindo os vínculos (3.38) e (3.39) para os termos quadráticos, encontramos que $\alpha_1 = \alpha_3 = -\frac{\alpha_2}{4}$, portanto encontramos exatamente a lagrangiana de Gauss-Bonnet, ou seja,

$$\mathcal{L}_{GB} = \alpha\chi_4 = \alpha(R^2 - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}). \quad (3.45)$$

Para o caso cúbico, os dois vínculos vão diminuir os oito parâmetros para seis. No entanto, esses acoplamentos β_i vão depender da dimensão do espaço-tempo. Assim, vamos agora assumir a segunda condição para TCE, ou seja, vamos exigir que essas quantidades são independente de D . Dessa forma é possível mostrar que no final, nós vamos ter apenas duas constante de acoplamento, para mais detalhes veja a Ref.[144]. Uma delas é relacionado a χ_6 e a outra é justamente relacionada à P . Portanto, com essas duas condições é suficiente para nós deduzirmos a ação (A.1). Note o seguinte, em $D = 4$ nós temos que $\chi_6 = 0$ e χ_4 é topológico, e P é nem trivial nem topológico, portanto a terceira condição da TCE é obedecida. Além disso, para alcançamos um vácuo estável, no sentido que a energia associada ao gráviton sem massa seja positivo, é necessário que λ na ação (A.1) seja positivo.

A condição adicional à Teoria Cúbica Einsteiniana (TCE), que a insere na classe de Teoria Quasi-Topológica Generalizada (TQTG), é que suas equações de movimento são de

⁴Dentre esses 13 possíveis, nós iremos descartar aqueles que são construídos de derivadas de tensor de curvatura.

segunda ordem quando consideramos um espaço-tempo com simetria estática e esférica. Vamos explorar isso mais a fundo em nossas próximas aplicações.

3.4 Aplicações Com Gravidade Cúbica

Até o momento, nós analisamos as principais características das teorias gravitacionais métricas com altas-derivadas através de modelos quadráticos e cúbicos. A seguir, compartilharemos os resultados-chave que conseguimos obter utilizando os modelos de gravidade cúbica. Em essência, aplicamos a Teoria Cúbica Einsteiniana (TCE) considerando métricas de buracos negros com uma fonte de matéria dada por uma eletrodinâmica não linear (ENL). Posteriormente, em um segundo estudo, buscamos soluções de branas para modelos com interações cúbicas mais abrangentes.

3.4.1 Eletrodinâmica Não Linear

A essência dessa parte do trabalho é obter soluções de buracos negros com simetria estática e esférica em quatro dimensões assumindo interações cúbicas. Como mostramos anteriormente, a única teoria cúbica que não é nem topológica nem trivial em $D = 4$ é a TCE. Assim, nós iremos assumir a seguinte ação

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(R - 2\Lambda_0) - G^2 \lambda P + \mathcal{L}(F) \right], \quad (3.46)$$

onde já assumimos que χ_4 e χ_6 são desconsiderados em $d = 4$. Por outro lado, o termo $\mathcal{L}(F)$, o termo de matéria, é um campo eletromagnético não linear (ENL), onde F é a intensidade do campo vetorial A definido por $F^2 := F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. O *ansatz* mais geral para A é dado por

$$A = \phi(r)dt + Q_m \cos\theta d\phi, \quad (3.47)$$

onde $\phi(r)$ é um potencial escalar tipo-Maxwell e Q_m é a carga magnética total definida por

$$Q_m = \frac{1}{4\pi} \int F. \quad (3.48)$$

Além disso, a equação de movimento tipo-Maxwell (basta variar a ação acima em relação ao campo A_μ) e as identidades de Bianchi para ENL, respectivamente, são dadas por

$$D_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}) = 0 \quad D_\mu(*F^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.49)$$

onde $\mathcal{L}_F = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^2}$ e $*F^{\mu\nu}$ é o campo dual.

A densidade lagrangiana da matéria que nós adotamos aqui que descreve a ENL pode ser dada por [145]

$$\mathcal{L}(F) = \frac{4a}{\alpha} \frac{(\alpha F^2)^{\frac{b+3}{4}}}{[1 + (\alpha F^2)^{\frac{b}{4}}]^{1+\frac{a}{b}}}, \quad (3.50)$$

onde $a > 0$ é uma constante adimensional que caracteriza a força da não linearidade do campo eletrodinâmico, b é um parâmetro extra adimensional e $\alpha > 0$ é um parâmetro constante ($[\alpha] = L^2$). É crucial destacar que, na ação (A.1), o campo gravitacional e o campo de matéria exibem características distintas. Embora tenhamos escolhido trabalhar com uma ampla categoria de eletrodinâmica não linear exata, permitindo todas as ordens de derivadas para o campo de calibre, a métrica foi restrita a incluir apenas termos de até sexta ordem na derivada. Essa discrepância ressalta nosso empenho em compreender o impacto da curvatura cúbica nesta ENL. Esse contexto nos leva além da ação convencional de Einstein-Maxwell, onde ambos os campos compartilham o mesmo domínio.

Aqui nós iremos adotar apenas uma configuração magnética, ou seja, vamos assumir, no decorrer da tese, que $\phi = 0$. A motivação dessa escolha é baseada nas soluções bem conhecidas de buracos negros regulares magneticamente carregados gerados pelas correções devido à ENL. Essas soluções são ditas regulares, pois as divergências físicas encontradas na origem dos buracos negros convencionais, como de Schwarzschild, são removidas com a introdução da ENL. É importante ressaltar que esse resultado é obtido de forma clássica. Em outras palavras, é possível demonstrar que essas soluções resolvem o problema da singularidade dos buracos negros sem a necessidade de correções quânticas ou de mecanismos previamente desconhecidos de uma teoria quântica da gravidade. Isso se torna possível devido ao fato de que a fonte de matéria em questão, a ENL, viola certas condições de energia, permitindo, assim, a contornagem dos teoremas de Hawking-Penrose [146]. De modo geral, a solução gerada por essa fonte de matéria (com $\Lambda_0 = 0$) para um ação de Einstein-Hilbert pode ser dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MGr^{a-1}}{(q^b + r^b)^{\frac{a}{b}}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MGr^{a-1}}{(q^b + r^b)^{\frac{a}{b}}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.51)$$

onde q é o monopolo magnético e se relaciona com a carga magnética total através de $Q_m = \frac{q^2}{\sqrt{2\alpha}}$ e M é a massa gravitacional.

No caso de cargas magnéticas podemos encontrar diferentes soluções regulares para buracos negros. Por exemplo, se $a = 3$ e $b = 2$ na Eq.(3.50) encontramos a solução de **Bardeen** [147], mas se $a = b$, então temos a solução de **Hayward** [148]. Para uma intensidade de campo

fraca F , temos que a densidade Lagrangiana (3.50) é dada por $\mathcal{L}(F) \sim \alpha^{\frac{b-1}{4}} (F^2)^{\frac{b+3}{4}}$. Portanto, apenas para o valor crítico $b = 1$ é possível recuperar o limite Maxwelliano. Além disso, conforme observado pela Ref.[145], a regularidade das soluções de buracos negros encontradas para $a = b$ acontece quando $a \geq 3$. Então escolhemos $a = 3$ na Eq. (3.50) que leva à solução do buraco negro de Hayward [149]. Além disso, existe uma classe de soluções que gera muito interesse, pois no limite do campo fraco, a densidade Lagrangiana (3.50) é a mesma que a Lagrangiana de Maxwell, esta classe é alcançada quando $a = 3$ e $b = 1$ [145], e é conhecido como **Nova Classe**.

O objetivo dessa parte da tese é simples: como a introdução das interações cúbicas (3.124) podem modificar a solução (3.51)? Para responder a essa pergunta, nós vamos começar assumindo um *ansatz* para uma métrica com simetria estática e esférica dada por [150]

$$ds^2 = -N(r)^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.52)$$

Agora, nós iremos obter a equação do movimento para a ação (A.1) com a métrica (3.52) através do chamado **método de Weyl**, ou seja, nós iremos substituir a métrica acima diretamente na ação (A.1), assim essa última vai ficar como um funcional de f e N , $S[f, N]$. Motivado pela Ref.[150], é possível mostrar que se a variação da ação (A.1) em relação às funções N e f se anular, ou seja,

$$\frac{\delta S[N, f]}{\delta N} = \frac{\delta S[N, f]}{\delta f} = 0, \quad (3.53)$$

então as componentes $E_{tt} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{tt}}$ e $E_{rr} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{rr}}$ da equação de movimento também desaparecem. Além disso, as equações angulares são garantidas através das identidades de Bianchi, $D^\mu \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right] = 0$ quando as equações $E_{tt} = 0$ e $E_{rr} = 0$ são válidas. Substituindo (3.52) em (A.1), descobrimos com o auxílio da integração por parte quando necessário (termos de superfície são desconsiderados) que

$$\begin{aligned} S[N, f] = & \frac{1}{8\pi G} \int dr N(r) \left\{ -r \left(f(r) - 1 \right) - 2GM r^a \left(q^b + r^b \right)^{-\frac{a}{b}} - \frac{\Lambda_0 r^3}{3} \right. \\ & - G^2 \lambda \left[-\frac{24f(r)(f(r)-1)f'(r)}{r^2} + 4f'(r)^3 + \frac{12f'(r)^2}{r} - 12f(r) \left(f'(r) - \frac{2(f(r)-1)}{r} \right) \right. \\ & \left. \left. \left. f''(r) \right] \right\}' + \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $' = \frac{d}{dr}$ e as reticências denotam termos envolvendo pelo menos duas derivadas de N . No entanto, pode ser demonstrado que para $N(r) = 1$, surgem soluções correspondentes a bura-

cos negros. Este resultado idêntico também foi corroborado pelos resultados apresentados na Ref. [150]. Uma metodologia semelhante é observável em teorias com altas derivadas que se estendem além da TCE, conforme ilustrado nas Refs.[142, 143]. Além disso, a partir daqui, não analisaremos nessa seção mais os efeitos da constante cosmológica em nossas soluções, então assumiremos que $\Lambda_0 = 0$. Portanto, assumindo a condição (3.53) para $N = \text{constante}$, nós obtemos a seguinte equação do movimento

$$r \left(f(r) - 1 \right) + 2GM r^a \left(q^b + r^b \right)^{-\frac{a}{b}} = -G^2 \lambda \left[-\frac{24f(r)(f(r)-1)f'(r)}{r^2} + 4f'(r)^3 + \frac{12f'(r)^2}{r} - 12f(r) \left(f'(r) - \frac{2(f(r)-1)}{r} \right) f''(r) \right]. \quad (3.55)$$

Esta é a equação central desta seção. Nosso objetivo, a partir deste ponto, é tentar resolvê-la. No entanto, antes de prosseguirmos, é crucial fazer alguns comentários pertinentes sobre ela. Em primeiro lugar, observe que, ao desconsiderarmos as correções da interação cúbica, ou seja, quando $\lambda = 0$, recuperamos precisamente a solução (3.51), como era esperado. Em seguida, podemos notar que na parte cúbica, temos até derivadas de segunda ordem em relação a f . Dessa forma, a Teoria Einsteiniana Cúbica, de fato, admite soluções de buracos negros simetricamente esféricos e estáticos em quatro dimensões, governadas por uma única função que obedece a uma equação do movimento de até segunda ordem. Para finalizar os comentários, temos que quando desconsideramos as correções devido à eletrodinâmica não linear, ou seja, $q = 0$, nós recuperamos o resultado da Ref. [150].

Embora seja um resultado bastante intrigante por si só, é importante destacar que essa equação não possui uma solução analítica. Portanto, para compreendermos os efeitos da gravidade cúbica na física do buraco negro, optaremos por uma análise numérica desta equação. Para facilitar essa análise, vamos introduzir as seguintes variáveis adimensionais:

$$x \equiv \frac{r}{2MG}, \quad \tilde{\lambda} \equiv \frac{\lambda G^2}{(MG)^4} \quad \text{and} \quad \tilde{q} \equiv \frac{q}{2MG}. \quad (3.56)$$

Assim, a ação (A.1) leva à seguinte equação:

$$x \left(f(x) - 1 \right) + \frac{x^a}{(\tilde{q}^b + x^b)^{\frac{a}{b}}} + \frac{\tilde{\lambda}}{16} \left[-\frac{24f(x)(f(x)-1)}{x^2} \frac{df}{dx} + 4 \left(\frac{df}{dx} \right)^3 + \frac{12}{x} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - 12f(x) \left(\frac{df}{dx} - \frac{2(f(x)-1)}{x} \right) \frac{d^2f}{dx^2} \right] = 0 \quad (3.57)$$

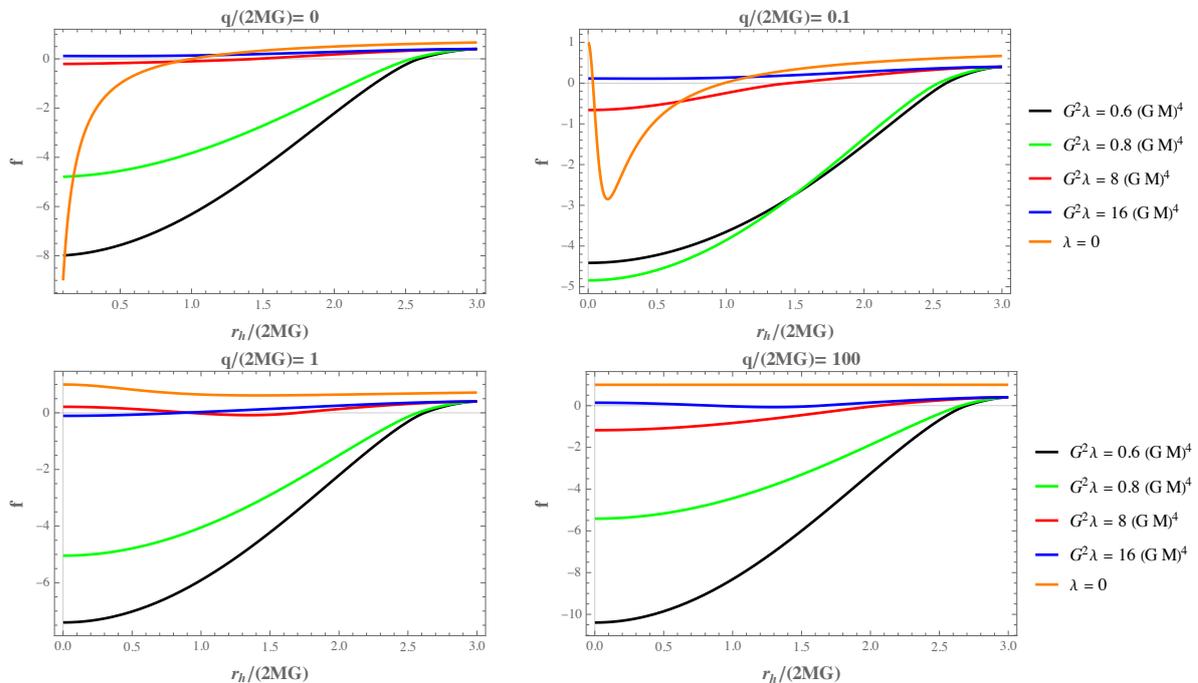
A Eq.(3.57) é uma equação não linear bastante complicada de resolver. Vale a pena mencionar que, para $q = 0$ (sem carga magnética) e $\lambda = 0$ (ação de Einstein-Hilbert), a Eq.(3.57)

produz $x(f - 1) = -1$, cuja solução é

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad (3.58)$$

que é a solução de Schwarzschild, como esperado. Portanto, a inclusão dos termos do TCE transforma a Eq.(3.57) de uma equação algébrica em uma equação diferencial. Vamos integrar numericamente assumindo que quando $x \rightarrow \infty$, então $f \rightarrow 1$ enquanto $f' \rightarrow 0$, ou seja, assumimos que nossa solução é assintoticamente plana. Assumindo isso para o caso de Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$),⁵ nós conseguimos construir para diferentes valores de λ os plots das Fig[15].

Figura 15: A função métrica $f(x)$ com \tilde{q} unitária e pequena para vários valores de λ , onde $x = r/2GM$.



Fonte: elaborado pelo autor.

A partir das Figs.[15], nós podemos concluir de imediato que os efeitos da curvatura cúbica modificam drasticamente a solução usual (3.51). Isso se aplica não apenas ao caso com carga magnética, mas também ao caso no vácuo. No primeiro gráfico ($q = 0$), observe que na ausência dos efeitos da gravidade cúbica, geralmente temos apenas um horizonte. Ao ativar a gravidade cúbica, ainda permanecemos com apenas um horizonte em alguns casos, mas eles são maiores do que o definido pelo raio de Schwarzschild. Além disso, à medida que aumentamos o valor de λ , perdemos o horizonte. Portanto, nessa configuração, nos deparamos com uma singularidade nua. Quando consideramos a carga magnética, novos horizontes potenciais

⁵Qualitativamente, os resultados numéricos para os demais casos - caso Hayward ($a = b = 3$) e Nova Classe ($a = 3$ e $b = 1$) - são os mesmos obtidos para Bardeen

surtem. Por exemplo, ao assumir uma carga unitária ($\frac{q}{2MG} = 1$), novos horizontes só podem surgir quando levamos em conta os efeitos da TCE. Por outro lado, a gravidade cúbica também pode remover horizontes, como no caso em que ($\frac{q}{2MG} = 0.1$). Mas a principal característica introduzida pela TCE é a finitude da solução na origem. Embora isso não garanta que a solução seja livre de divergências, ou seja, de singularidades, mas nos garante que, pelo menos nesse sistema de coordenadas, a solução não explode na origem. Para compreender melhor se há singularidade ou não - vale a pena lembrar que a solução usual (3.51) para uma carga $q < 1$ “cura” a singularidade - temos que calcular escalares.

Conforme mencionado anteriormente, a Eq. (3.57) não admite uma solução analítica. Como consequência, não temos uma expressão exata que possamos utilizar para calcular os escalares de curvatura e de Kretschmann, os quais são cruciais para determinar se há divergências em nossa solução. No entanto, nada nos impede de assumir uma expansão de Taylor em torno da origem, ou seja, $f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i$, o que nos permite realizar uma análise aproximada do comportamento na origem. Assumindo que $f(0) \equiv c_0$ e $f''(0) \equiv c_2$ e substituindo essa expansão na Eq. (3.57), nós obtemos que

$$f(r) = c_0 + c_2 r^2 + \frac{(48c_2^2 G^2 \lambda - 1)}{192c_0 G^2 \lambda} r^4 - \frac{(-16c_2^3 G^2 \lambda q^4 + c_2 q^4 + 2GMq)}{576(c_0 - 1)c_0 G^2 \lambda q^4} r^6 + \dots, \quad (3.59)$$

onde nós assumimos que $f'(0) = 0$ e $c_{0,2}$ são parâmetros livres. Agora nós podemos calcular algumas quantidades com esse resultado aproximado. Considerando o termo líder, o escalar de Kretschmann é dada por

$$K \sim \frac{(c_0 - 1)^2}{r^4}. \quad (3.60)$$

Dessa forma, a solução é livre de singularidades quando $c_0 = 1$. Ao ajustar cuidadosamente o parâmetro c_0 para se aproximar de 1, é possível reduzir consideravelmente o tamanho da região de curvatura forte, até mesmo a ponto de torná-la arbitrariamente pequena. No entanto, para alcançar esse resultado, é necessário impor $M = 0$ e $q = 0$. Na verdade, uma análise abrangente, desprovida de singularidades, só pode ser conduzida ao considerar a solução completa. Curiosamente, observamos que a solução (13) é a mesma para os três casos de interesse: Bardeen, Hayward e Nova Classe. Portanto, ao contrário do caso padrão da Relatividade Geral ($\lambda = 0$), a presença das correções da TCE pode resultar em buracos negros com singularidades, mesmo quando um campo eletrodinâmico não linear é adicionado. A seguir, empregaremos uma análise perturbativa sobre uma solução magnética regular para investigar as correções introduzidas pela TCE.

Embora a Eq. (3.57) não admita uma solução analítica, podemos compreender como as correções introduzidas pela TCE podem alterar a solução do buraco negro magnético ENL (3.51) por meio de uma análise perturbativa. Considerando uma função $f(r)$ da forma

$$f(r) = 1 - \frac{2MG r^{a-1}}{(q^b + r^b)^{\frac{a}{b}}} + h(r), \quad (3.61)$$

onde $h(r) \ll 1$, ou seja, nós podemos linearizar a equação de campo (3.57) em torno do métrica de fundo carregado magneticamente. Substituindo essa expansão na Eq. (3.57) e levando em conta apenas os termos líderes em h , nós encontramos a seguinte equação para a flutuação

$$h''(r) + \gamma(r)h'(r) + \omega^2 h(r) = j(r), \quad (3.62)$$

onde as expressões para as funções γ , ω^2 e j de r têm uma expressão bastante complicada e as mostramos no Apêndice A. Exploramos o comportamento das soluções para a região assintótica e na origem. Depois iremos explorar a solução no horizonte de evento através de outra expansão.

• Comportamento assintótico

Vamos agora examinar o comportamento da solução da Eq. (3.62) para grandes r . Neste regime, os termos principais das funções γ e ω^2 são

$$\gamma(r) \approx -\frac{2}{r} \quad (3.63)$$

e

$$\omega(r)^2 = -\frac{r^3}{72G^3M\lambda}. \quad (3.64)$$

Observe que as modificações dadas pela carga magnética da ENL são suprimidas assintoticamente quando comparadas às correções conduzidas pelo TCE. Além disso, o termo ENL pode ser expandido como

$$-2GM r^a (q^b + r^b)^{-\frac{a}{b}} \approx -2GM \left[1 - \frac{a}{b} \left(\frac{q}{r} \right)^b + \dots \right], \quad (3.65)$$

que tende assintoticamente para $-2GM$. Assim, a solução da Eq. linearizada (3.62) para r grande é dado por

$$f_{r \rightarrow \infty}(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \left[1 - \frac{a}{b} \left(\frac{q}{r} \right)^b + \dots \right] - G^2 \lambda \left[\frac{432(MG)^2}{r^6} - \frac{736(MG)^3}{r^7} \right] + O\left(\frac{\lambda^2}{r^{11}}\right), \quad (3.66)$$

que tem a mesma forma encontrada na Ref.[150] para $q = 0$.

• **Comportamento na origem**

Agora considere a Eq. (3.62) para r pequenos, ou seja, próximos à origem. A competição entre o comportamento singular do TCE e a dinâmica regular do ENL determinará a presença ou a resolução da singularidade.

◇ Solução de Bardeen

A densidade Lagrangiana de Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$ na Eq. (3.50)) tem γ e ω^2 dados por

$$\gamma(r) \approx \frac{3}{r} \quad (3.67)$$

e

$$\omega(r)^2 \approx \frac{\xi_B^2}{r^2}, \quad (3.68)$$

onde $\xi_B^2 \equiv -8 + \frac{8MG}{3q} - \frac{q^5}{72G^3M\lambda}$. A solução homogênea ($j(r) = 0$) é dada por $h_h^{a=3,b=2}(r) \approx c_1 r^{-(1+\sqrt{1-\xi_B^2})} + c_2 r^{(\sqrt{1-\xi_B^2}-1)}$, onde c_1 e c_2 são constantes. Para um regular na origem, escolhamos $c_1 = 0$, de modo que

$$h_h^{a=3,b=2}(r) \approx c_2 r^{(\sqrt{1-\xi_B^2}-1)}, \quad (3.69)$$

onde $\xi_B^2 \leq 0$. Considerando a ordem líder, uma solução particular para a densidade Lagrangiana de Bardeen é

$$h_p^{a=3,b=2}(r) \approx -\frac{128G^5M^3\lambda}{q^9}r^2 + \frac{576G^4M^2\lambda(3q+GM)}{q^{11}}r^4 + O(\lambda^2, r^3). \quad (3.70)$$

Assim, a solução geral da Eq.(3.62) para solução de Bardeen modificada pelo TCE próximo à origem é dada por

$$h(r)_{r \rightarrow 0}^{a=3,b=2} = c_2 r^{(\sqrt{1-\xi_B^2}-1)} - \frac{128G^5M^3\lambda}{q^9}r^2 + \frac{576G^4M^2\lambda(3q+GM)}{q^{11}}r^4 + O(\lambda^2, r^3). \quad (3.71)$$

Vale a pena mencionar a presença de um núcleo do tipo De Sitter próximo à origem, como mostrado pelo termo $\frac{128G^5M^3\lambda}{q^9}r^2$. Da Eq.(3.61), para $c_2 = 0$ a função f satisfaz $f(0) = 1$, e assim, o escalar de Kretschmann desaparece na origem. Portanto, pequenas perturbações do buraco negro regular de Bardeen impulsionadas pelo TCE preservam a ausência da singularidade na origem.

◇ Solução de Hayward

Agora vamos analisar a densidade Lagrangiana de Hayward ($a = b = 3$ na Eq. (3.50)). Para este caso limite de campo fraco não-Maxwelliano, descobrimos que γ e ω^2 perto da origem são dados por

$$\gamma(r) \approx \frac{4}{r} \quad (3.72)$$

e

$$\omega(r)^2 \approx \frac{\xi_H^2}{r^3} \quad (3.73)$$

onde $\xi_H^2 \equiv \frac{8GM}{3} - \frac{q^6}{72G^3M\lambda}$. Assim, a solução para a equação homogênea perturbada na Eq.(3.61) é dada por

$$h_h^{a=b=3}(r) = 2\xi_H^3 r^{-3/2} \left[-3AI_3 \left(2\xi_H r^{-1/2} \right) + BK_3 \left(2\xi_H r^{-1/2} \right) \right], \quad (3.74)$$

onde A, B são constantes e $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipos, respectivamente. Para ordem inicial em r pequeno, isso pode ser expandido como

$$h_h^{a=b=3}(r) \approx c_2 \sqrt{\pi \xi_H^5} r^{-5/4} \exp[-\xi_H r^{-1/2}], \quad (3.75)$$

onde $A = 0$ para garantir que a solução seja regular na origem. Finalmente, temos que a solução particular linear em λ é dada por

$$h_p^{a=b=3}(r) \approx -\frac{128G^5M^3\lambda}{q^9} r^2 + \frac{384G^5M^3\lambda}{q^{12}} r^5 + O(\lambda^2, r^6). \quad (3.76)$$

Assim, a solução geral da Eq.(3.62) para Hayward perto da origem é dada por

$$h(r)_{r \rightarrow 0}^{a=b=3} = c_2 \sqrt{\pi \xi_H^5} r^{-5/4} \exp[-\xi_H r^{-1/2}] - \frac{128G^5M^3\lambda}{q^9} r^2 + \frac{384G^5M^3\lambda}{q^{12}} r^5 + O(\lambda^2, r^6). \quad (3.77)$$

Para uma solução de buraco negro regular, podemos considerar a escolha particular $c_2 = 0$.

◇ Solução da Nova Classe

Como última configuração possível para o lagrangiana (3.50), adotamos uma nova classe de soluções obtidas pela Ref.[145], cujo limite de campo fraco leva ao lagrangiana de Maxwell. Esta nova classe é definida quando $b = 1$. Como já mencionado, é necessário que $a \geq 3$ atinja a regularidade das soluções na origem. Assim, novamente escolhemos o caso em que $a = 3$. Os γ e ω^2 para esta escolha são

$$\gamma(r) \approx \frac{2}{r} \quad (3.78)$$

e

$$\omega(r)^2 \approx -\frac{6}{r^2}, \quad (3.79)$$

de modo que temos que a solução homogênea é dada por $h_h^{b=1, a=3}(r) \approx \tilde{c}r^2 + \frac{\tilde{d}}{r^3}$, onde \tilde{c} e \tilde{d} são constantes. Para $\tilde{d} = 0$ obtemos uma solução regular homogênea na origem dada por

$$h_h^{a=3, b=1}(r) \approx \tilde{c}r^2. \quad (3.80)$$

Por outro lado, a solução particular de primeira ordem em λ é dada por

$$h_p^{a=3, b=1}(r) \approx \frac{16G^4M^2(81q - 8GM)\lambda}{q^9}r^2 + \frac{576G^4M^2(2GM - 21q)\lambda}{q^{10}}r^3 + O(\lambda^2, r^4). \quad (3.81)$$

Assim, a solução regular geral da Eq.(3.62) para Nova Classe próxima à origem é dada por

$$h(r)_{r \rightarrow 0}^{a=3, b=1} = \tilde{c}r^2 + \frac{16G^4M^2(81q - 8GM)\lambda}{q^9}r^2 + \frac{576G^4M^2(2GM - 21q)\lambda}{q^{10}}r^3 + O(\lambda^2, r^4). \quad (3.82)$$

Portanto, para todas as soluções eletrodinâmicas não lineares estudadas (Bardeen, Hayward, New class), as perturbações dadas pelo ECG ainda rendem buracos negros regulares. O resultado é um tanto esperado, pois as perturbações surgem dos fracos efeitos de campo do TCE. Não seria razoável prever que estes ajustes por si só pudessem efetivamente reintroduzir a singularidade, anteriormente mitigada pelo ENL. Além disso, em torno da origem, a métrica exibe um comportamento do tipo de Sitter cuja constante cosmológica local é proporcional à carga magnética, à massa e à constante λ .

• Comportamento no horizonte de eventos

Depois de estudarmos as modificações realizadas pelo TCE nas soluções regulares na origem e na região assintótica, vamos agora explorar os efeitos do TCE no horizonte do buraco negro. Assumimos que a solução da equação do movimento (3.57) desaparece em r_h , ou seja, $f(r_h) = 0$ e $f'(r_h) \geq 0$. Começamos resolvendo a equação de campo (3.57) através de uma expansão em série em torno do horizonte usando o ansatz

$$f(r) = 2\kappa_g(r - r_h) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(r - r_h)^i \quad (3.83)$$

onde $\kappa_g = \frac{f'(r_h)}{2}$ é a chamada gravidade superficial. Substituindo a expansão de Taylor (3.83) na Eq. (3.57) e resolvendo-a ordem por ordem em $(r - r_h)^i$, as duas equações de ordem mais

baixa são dadas por, respectivamente,

$$r_h - \frac{2GM r_h^a}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a}{b}}} - G^2 \lambda \left(\frac{48\kappa_g^2}{r_h} + 32\kappa_g^3 \right) = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{2GM a q^b r_h^{a-1}}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} + \frac{48G^2 \kappa_g^2 \lambda}{r_h^2} + 2r_h \kappa_g - 1 = 0. \quad (3.85)$$

Os coeficientes de ordem superior a_i com $i \geq 3$ são determinados por expressões bastante complicadas envolvendo κ_g , M , q e a_2 (parâmetro livre). Na verdade, como a massa M , a carga magnética q e a constante de acoplamento do TCE λ são fixas, o parâmetro a_2 é o parâmetro livre no intervalo próximo ao horizonte. Além disso, quando fazemos análise numérica da Eq.(3.57), se integrarmos a partir do horizonte, este parâmetro deve ser escolhido adequadamente para expressar o comportamento assintoticamente plano da solução

Resolvendo a Eq. (3.85) para $\kappa_g(r_h)$, descobrimos que a gravidade superficial é dada por

$$\kappa_g = \frac{r_h^2 - \frac{2MG a q^b r_h^{a+1}}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}}}{r_h^3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2 \lambda}{r_h^4} \left(1 - \frac{2MG a q^b r_h^{a-1}}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} \right)} \right)} \quad (3.86)$$

É importante notar que, para $\lambda = 0$, obtemos o resultado padrão previsto pela Relatividade Geral, juntamente com as correções devidas ao ENL. Existe, evidentemente, outra solução possível para a Eq. (3.85), no entanto, ela não reproduz corretamente o resultado no limite $\lambda = 0$. Além disso, assumindo que $\frac{q}{r_h} \ll 1$, a gravidade superficial até a primeira ordem em $\left(\frac{q}{r_h}\right)^b$ é dada por

$$\kappa_g \approx \frac{1}{r_h \left[1 + \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}} \right]} - \frac{aMG}{r_h^2 \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}}} \left(\frac{q}{r_h} \right)^b \quad (3.87)$$

Para $q = 0$, a gravidade superficial na Eq.(3.87) leva à expressão neutra da TCE encontrada na Ref.[150].

Substituindo a Eq.(3.87) na Eq.(3.85) e mantendo os termos lineares em $\left(\frac{q}{r_h}\right)^b$, isso leva a

$$\frac{2GM}{r_h} \approx \mu_0 \left[1 + \left[\frac{a}{b} - \frac{48a\lambda G^2}{r_h^4 \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}}} \frac{\left(2 + \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}} \right)^2} \right] \left(\frac{q}{r_h} \right)^b \right], \quad (3.88)$$

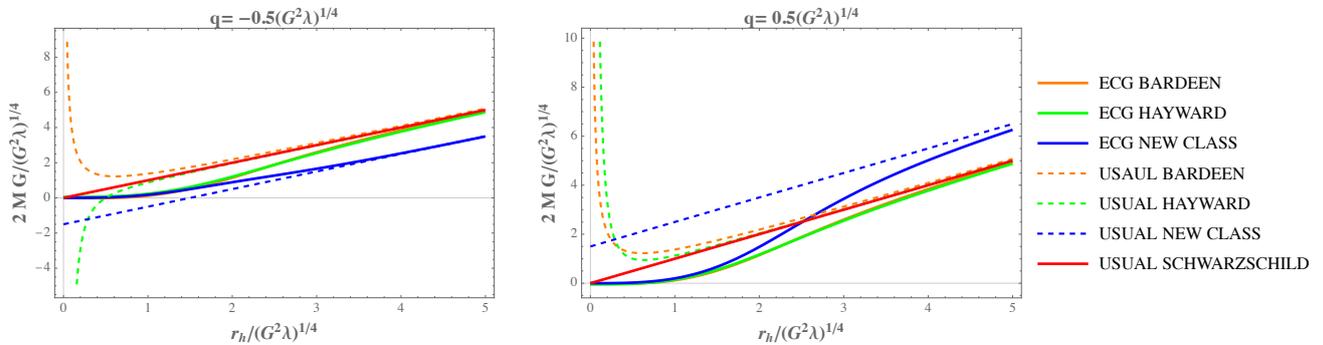
onde $\mu_0 = \mu_0(r_h)$ é a correção de TCE dada por [150]

$$\mu_0 = 1 - \frac{16\lambda G^2}{r_h^4} \frac{\left(5 + 3\sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}}\right)^3}. \quad (3.89)$$

A Eq.(3.88) nos permite relacionar a massa M com o raio do horizonte r_h . Para $\lambda = q = 0$, obtemos o raio de Schwarzschild usual, ou seja, $r_h = r_s = 2GM$. Para $\lambda \neq 0$ e $q = 0$ (TCE neutro), o fator μ_0 garante que $r_h \geq r_s$ [150]. Por outro lado, para $\lambda \neq 0$ e $q \neq 0$, a Eq.(3.88) mostra que o deslocamento do raio do horizonte depende da carga magnética q e da carga específica modelo dado por a e b .

Na verdade, como mostrado na Fig.(21), para um pequeno q os buracos negros regulares modificados por TCE têm raio de horizonte maior para o mesmo M . No entanto, para um q maior, o buraco negro Hayward tem um raio de horizonte menor. Observe que o TCE não produz novos horizontes.

Figura 16: Para $\lambda > 0$, plotamos $2GM\tilde{M}$ como uma função de \tilde{r}_h para diferentes classes de Eletrodinâmica Não Linear para pequena carga magnética $\pm q$ comparada ao horizonte, onde $\tilde{M} = \frac{M}{(G^2\lambda)^{1/4}}$ e $\tilde{r} = \frac{r}{(G^2\lambda)^{1/4}}$.

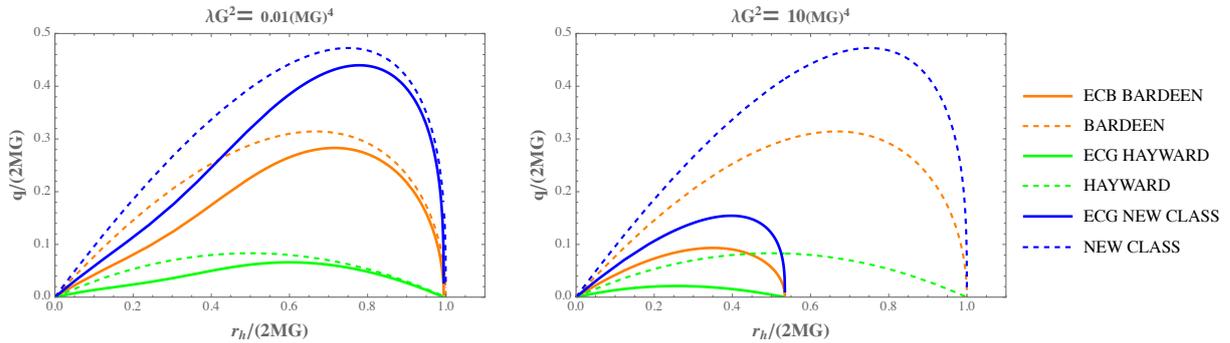


Fonte: elaborado pelo autor.

Da mesma forma, é possível obter uma expressão para $q(r_h)$ para um dado M a partir da Eq. (3.84) assumindo $q \ll 2MG$. Vale ressaltar que para obter a Eq.(3.88) comparamos a carga magnética com o horizonte de eventos, por outro lado, para obter uma expressão $q(r_h)$, assumimos que a carga é muito menor que o raio de Schwarzschild em vez de r_h . Traçamos a carga magnética normalizada \tilde{q} como uma função do horizonte normalizado x para valores grandes e pequenos de λ na Fig (17).

Para concluir esta parte do comportamento no horizonte de eventos, é crucial destacar um aspecto importante das Eq. (3.84) e (3.85). Embora a Eq. (3.57) não tenha uma solução analítica geral, conseguimos obter uma solução exata para certas quantidades, como a gravidade

Figura 17: Traçamos a carga magnética normalizada em função do horizonte para pequenos e grandes λ , assumindo que $q \ll 2MG$.



Fonte: elaborado pelo autor.

superficial, a partir dela. Isso representa um avanço significativo. Essa mesma abordagem foi utilizada na Ref. [150]. Com isso em mente, vamos empregar algumas dessas quantidades para realizar uma análise termodinâmica desta solução.

Conforme discutido anteriormente, a TCE fornece novas modificações interessantes para o horizonte de eventos regular do buraco negro. Como as características do horizonte de eventos estão relacionadas à termodinâmica do buraco negro, nesta parte nós vamos explorar os efeitos da TCE nas funções termodinâmicas do buraco negro.

Começemos com a entropia do buraco negro. É possível avaliar a entropia dessas soluções de buracos negros pela fórmula de Wald [151, 152]. É conhecido que a teoria de gravidade de alta ordem não segue a lei da área de Bekenstein-Hawking para o cálculo da entropia. Nesse contexto, é necessário empregar a fórmula de Wald. Portanto, a entropia associada a um buraco negro estaticamente simétrico e esfericamente simétrico na TCE é dada por:

$$S = -2\pi \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (3.90)$$

onde $\frac{\delta}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}}$ é a derivada de Euler-Lagrange, h é o determinante da métrica induzida no horizonte Σ e $\epsilon_{\mu\nu}$ é o binormal do horizonte.

Aplicando a fórmula (3.91) à ação (A.1) e assumindo *ansatz* (3.52) ($N'(r) = 0$), descobrimos que

$$S = \frac{\pi r_h^2}{G} \left[1 - \frac{48G^2 \lambda \kappa_g^2}{r_h^2} \left(\frac{2}{\kappa_g r_h} + 1 \right) \right], \quad (3.91)$$

onde usamos o fato de que $f'(r_h) = 2\kappa_g$. Substituindo a Eq. (3.86) na expressão acima, desco-

brimos que a entropia é dada por

$$S = \frac{\pi r_h^2}{G} - \frac{48\pi G\lambda \left(r_h - \frac{2aGM r_h^a q^b}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} \right)^2}{r_h^4 \left(\sqrt{\frac{48G^2\lambda \left(1 - \frac{2aGM r_h^{a-1} q^b}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} \right)}{r_h^4} + 1 + 1} \right)^2} \left(\frac{2r_h \left(\sqrt{\frac{48G^2\lambda \left(1 - \frac{2aGM r_h^{a-1} q^b}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} \right)}{r_h^4} + 1 + 1} \right)}{r_h - \frac{2aGM r_h^a q^b}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}}} + 1 \right). \quad (3.92)$$

Podemos encontrar uma expressão mais simples para entropia. Nesse caso, nós vamos assumir que $q \ll r_h$ para a equação acima. Assim, nós obtemos a seguinte equação

$$\mathbf{S} \approx \frac{\pi r_h^2}{G} \left[1 - \frac{48G^2\lambda \left(3 + 2\sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4}} \right)}{r_h^4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4}} \right)^2} - \frac{2aMG}{r_h^5 \left(1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4} \right)} \left(r_h^4 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4}} \right) - 48G^2\lambda \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4}} \right) \right) \left(\frac{q}{r_h} \right)^b \right] \quad (3.93)$$

Para $q = 0$ recuperamos a entropia modificada da TCE obtida em Ref.[150]. Observe que tanto a TCE quanto o ENL modificam a fórmula de entropia do buraco negro na RG usual $\mathbf{S} = \frac{A}{4G}$, onde A é a área do horizonte de eventos. Na verdade, isso é esperado para teorias modificadas da gravidade [142].

Além disso, podemos calcular a temperatura de Hawking associada ao buraco negro magnético da TCE utilizando a Eq. (3.86) através da fórmula $T = \frac{\kappa_g}{2\pi}$. Portanto, a temperatura de Hawking é dada por

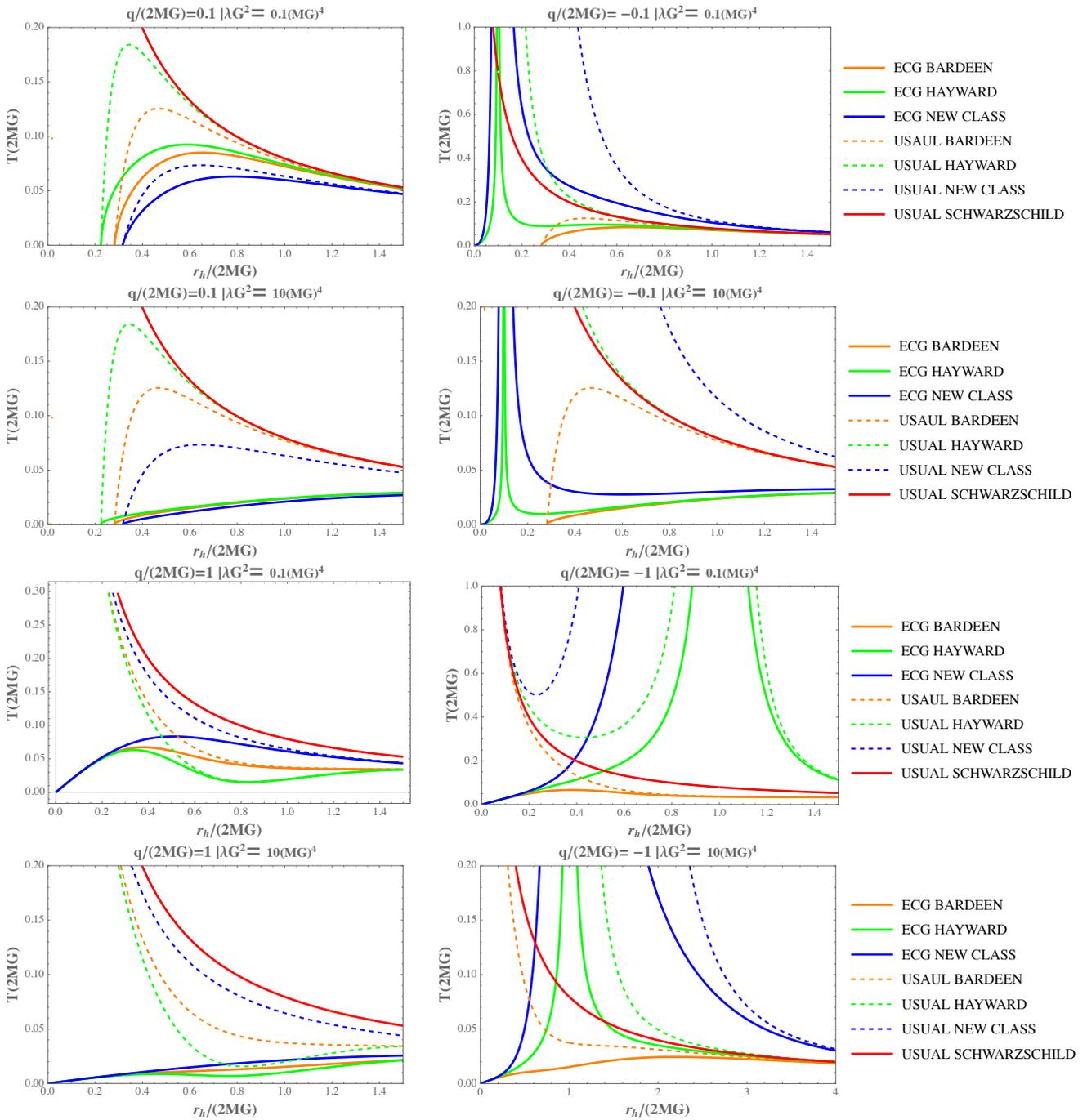
$$T = \frac{r_h^2 - \frac{2MGaq^b r_h^{a+1}}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}}}{2\pi r_h^3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4} \left(1 - \frac{2MGaq^b r_h^{a-1}}{(q^b + r_h^b)^{\frac{a+b}{b}}} \right)} \right)}, \quad (3.94)$$

onde usamos a expressão (3.86). Para $q \ll r_h$, a temperatura tem a forma

$$T \approx \frac{1}{2\pi r_h} \left\{ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48G^2\lambda}{r_h^4}} \right)^{-1} - \frac{aGM}{r_h \sqrt{1 + \frac{48\lambda G^2}{r_h^4}}} \left(\frac{q}{r_h} \right)^b \right\}. \quad (3.95)$$

Observe que para $q = 0$ obtemos a temperatura de Hawking modificada na TCE encontrada na Ref.[150]. Uma vez que nós obtemos essas expressões para a temperatura, nós agora podemos construir gráficos de temperatura em função do horizonte de evento.

Figura 18: A temperatura normalizada $\tilde{T} = T(2MG)$ em função do raio do horizonte normalizado \tilde{r}_h com \tilde{q} pequeno e grande para vários λ assumindo o Casos Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$), Hayward ($a = b = 3$) e Nova Classe ($a = 3$ e $b = 1$).



Uma característica notável que observamos é que a temperatura de Hawking T_h tende a zero para algum valor de r_h próximo à origem. As Figuras [18] ilustram o comporta-

mento da temperatura para os casos de Bardeen, Hayward e New Class em função do horizonte de eventos, tanto para valores grandes quanto pequenos de q em comparação com o raio de Schwarzschild. Ao contrário da temperatura de Schwarzschild, que diverge à medida que r_h se aproxima de zero, para $q > 0$ (painel esquerdo) a temperatura se anula para algum valor de $r_h \neq 0$. Nesse cenário, com $M \neq 0$, o buraco negro atinge um estado termodinâmico estável no qual não emite mais radiação, caracterizando-se como um remanescente. Além disso, à medida que aumentamos a carga magnética, a temperatura dos buracos negros magnéticos regulares convencionais tende a divergir na origem, enquanto as soluções modificadas pela TCE resultam em uma temperatura de Hawking que se anula para $r_h = 0$.

O comportamento da temperatura de Hawking sofre uma mudança drástica quando $q < 0$ (painel direito). Para valores pequenos de q e sem as correções da TCE, apenas a temperatura do buraco negro de Bardeen se anula para $r_h \neq 0$. Ao introduzir os termos da TCE, a temperatura de Bardeen ainda se anula para $r_h \neq 0$, enquanto as soluções de Hayward e da Nova Classe passam por uma transição de fase. De fato, as temperaturas exibem um comportamento semelhante ao de Schwarzschild para $r_h \geq r_c$ e um comportamento decrescente de TCE para $r_h \approx 0$ [150]. É precisamente neste raio crítico r_c que o calor específico, conforme calculado abaixo, experimenta divergência, servindo como um indicador claro da transição de fase. À medida que a carga aumenta, a solução de Bardeen se assemelha à temperatura da TCE, a solução de Hayward sofre a transição de fase descrita e a nova classe diverge como $r_h \rightarrow \infty$. Estamos nomeando o comportamento e a temperatura da TCE como linhas sólidas dos gráficos acima. Ao aumentar o acoplamento da TCE, as três soluções regulares mostram um comportamento da TCE próximo à origem e desaparecem assintoticamente

Após a análise do comportamento da temperatura de Hawking, vamos agora investigar a estabilidade termodinâmica da solução magnética da TCE descrita na Eq. (3.57), por meio da análise do calor específico. Utilizando a entropia de Wald obtida na Eq. (3.92) e a temperatura de Hawking encontrada na Eq. (3.94), podemos calcular o calor específico dado por

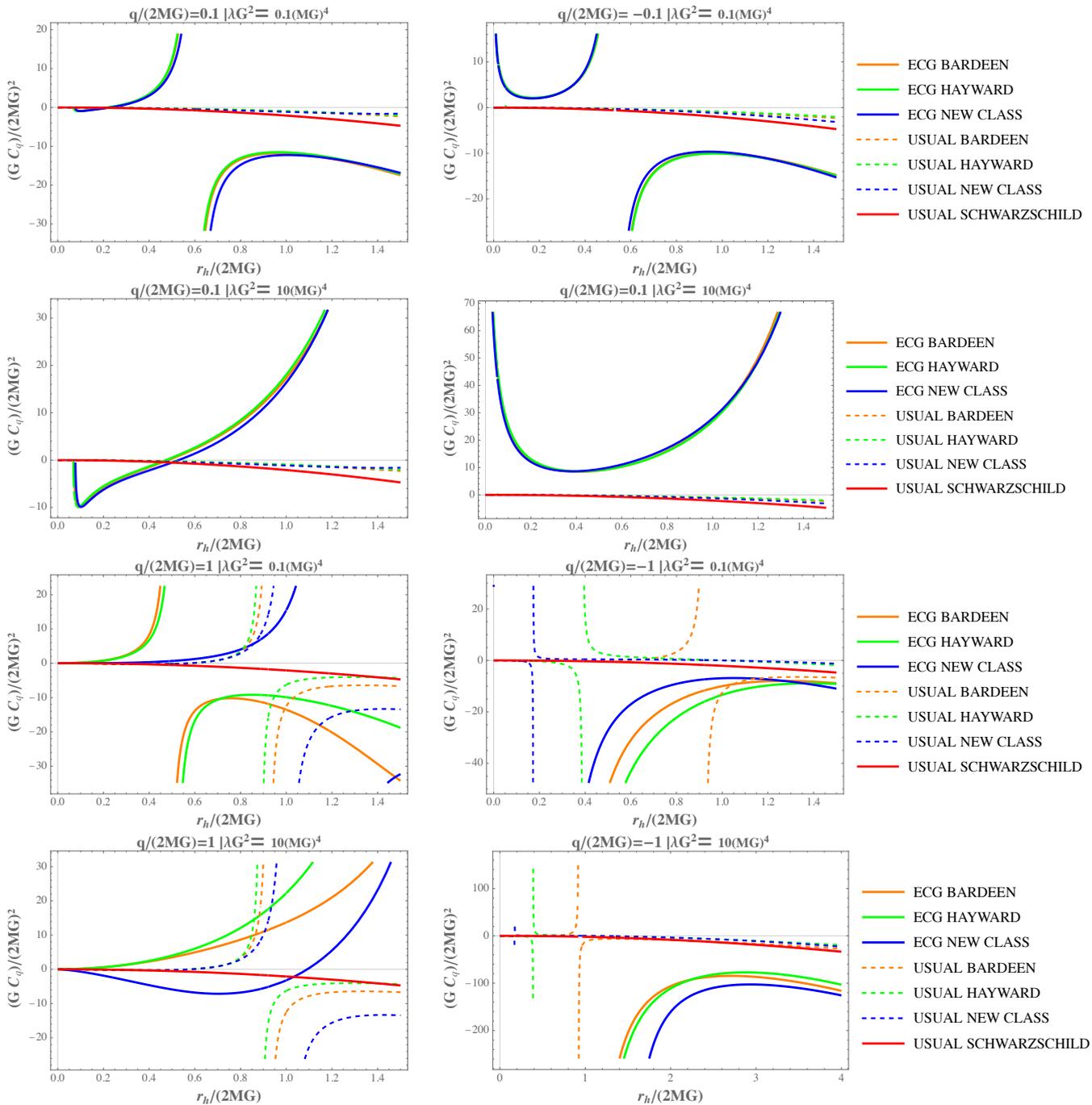
$$C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_q. \quad (3.96)$$

onde q é fixo.

Devido à expressão bastante complexa obtida, recorreremos a uma análise gráfica da capacidade térmica para vários valores de λ nas Fig. (19), assumindo que q pode ser grande ou pequeno em comparação com o raio de Schwarzschild. Embora uma representação gráfica ilus-

trando a correlação entre calor específico e temperatura fosse mais apropriada, especialmente para a análise de transições de fase, a obtenção do valor de $r_h(T)$ a partir da Eq. (3.94) permanece desafiadora. No entanto, ainda podemos conduzir uma investigação detalhada, que inclui uma avaliação da positividade de C , mesmo sem a disponibilidade de gráficos de C em função de r_h .

Figura 19: A temperatura normalizada $\tilde{T} = T(2MG)$ em função do raio do horizonte normalizado \tilde{r}_h com \tilde{q} pequeno e grande para vários λ assumindo o Casos Bardeen ($a = 3$ e $b = 2$), Hayward ($a = b = 3$) e Nova Classe ($a = 3$ e $b = 1$).



Fonte: elaborado pelo autor.

Para $q > 0$ (painel esquerdo), a Fig. (19) ilustra uma transição de fase de uma capacidade térmica negativa para uma positiva em valores baixos de q e λ . Nesse cenário, à medida que o buraco negro emite radiação, ele encolhe até alcançar um raio de horizonte crítico r_c , onde a capacidade térmica positiva indica a presença de um pequeno remanescente estável. Ao manter uma carga magnética baixa e aumentar o acoplamento constante da TCE, o buraco negro passa por uma transição de fase inversa, resultando em uma capacidade térmica negativa para valores baixos de r_h . Conforme o acoplamento da TCE aumenta, as soluções de Bardeen e Hayward recuperam uma capacidade térmica negativa para $r_h \rightarrow \infty$. Para um valor de λ suficientemente grande, as três soluções exibem uma exótica capacidade térmica positiva divergente.

As soluções com carga negativa (painel direito) também demonstram uma transição de fase para valores baixos de q e λ , embora a capacidade térmica diverja à medida que $r_h \rightarrow 0$. Ao aumentar a carga e a constante de acoplamento da TCE, a capacidade térmica negativa é recuperada para $r_h \rightarrow \infty$. Entretanto, a capacidade térmica tende a menos infinito à medida que nos aproximamos da origem. Portanto, as soluções com $q < 0$ apresentam instabilidades nos regimes $r_h \rightarrow 0$ e $r_h \rightarrow \infty$. Com esta análise da estabilidade termodinâmica da solução, concluímos a investigação da primeira aplicação da gravidade cúbica. Para encerrar, iremos resumir os principais resultados e perspectivas deste estudo.

Principais Resultados

Para uma constante de acoplamento de TCE muito maior que a carga magnética do ENL, as soluções regulares tornaram-se singulares na origem. O aparecimento de singularidades nuas para constantes de TCE ainda mais altas sugere um limite superior para a TCE, a fim de satisfazer a conjectura da censura cósmica, um resultado semelhante foi encontrado na Ref. [153]. Porém, no nível perturbativo, a TCE leva a soluções regulares modificadas com o núcleo de Sitter usual.

Investigamos a estabilidade do buraco negro por meio de sua análise termodinâmica. A TCE e o ENL não apenas regularizam a singularidade, mas também evitam a divergência da temperatura de Hawking para pequenos buracos negros. Conforme mostrado na Ref.[150], a temperatura desaparece para $r_h \rightarrow 0$ devido à TCE. Ao adicionar a fonte ENL, descobrimos que a temperatura desaparece para $r_h \neq 0$ e $M \neq 0$. Assim, o buraco negro regular deixa um pequeno remanescente não emissor. A capacidade térmica revelou que os buracos negros regulares passaram por transições de fases para um raio de horizonte crítico r_h . À medida que o

buraco negro emite e o seu horizonte diminui, a capacidade térmica torna-se positiva e, assim, o buraco negro acaba num remanescente final estável.

3.4.2 *Mundo-Branas*

A segunda aplicação para a gravidade cúbica ocorre no contexto de mundos-brana. Esta análise é baseada na Ref.[154]. Como discutido anteriormente, existem várias maneiras de construir teorias gravitacionais com interação cúbica, como a teoria de Lovelock, a teoria (generalizada) Quase-topológica e a teoria Cúbica Einsteiniana. No entanto, nenhuma delas foi aplicada a uma métrica de dobra ⁶ em 5 dimensões dada pela Eq. (1.10).

Na teoria de Lovelock, não há correções cúbicas em $D = 5$, e teorias Quase-topológicas, assim como a Cúbica Einsteiniana, levam a equações do movimento com derivadas de alta ordem para o fator de dobra $A(y)$. Portanto, é necessário construir uma teoria que introduza novos invariantes até a potência cúbica, proporcionando equações de movimento de segunda ordem para $A(y)$

Considerando um espaço-tempo de 5-dimensões descrito por uma métrica de dobra, a ordem quadrática, como veremos, não pode ser negligenciada. Além disso, sob certas condições, essa interação, construída por contrações de dois tensores de Riemann, é de fato o termo de GB (Gauss-Bonnet). Por outro lado, a interação cúbica, sendo uma interação de seis derivadas, é mais intrincada do que a quadrática. Isso se deve à maior possibilidade de contrações entre tensores de Riemann e derivadas desses tensores. Como demonstrado em 3.2.1, existem um total de 13 contrações possíveis, mas apenas 10 persistem quando descartamos os termos de derivada total. Podemos simplificar as possibilidades focando apenas nas contrações com o tensor de curvatura, **excluindo as derivadas do tensor e do escalar de Ricci**. Isso reduz as opções para apenas 8. Por uma questão de simplicidade, esta tese adota esse conjunto mais direto.

A ação de tal teoria pode ser escrita como

$$S = \int d^5x \sqrt{-g_5} \left[\frac{1}{2\kappa_5} (R - 2\Lambda_0) + \sum_{i=0}^3 \alpha_i \mathcal{L}^{(i)(2)} + \lambda \sum_{i=0}^8 \beta_i \mathcal{L}^{(i)(3)} + \mathcal{L}_m \right], \quad (3.97)$$

onde $\kappa_5 = 8\pi G_5$ é a constante de Newton em cinco dimensões e Λ_0 é a constante cosmológica. Além disso, \mathcal{L}_m é a Lagrangiana da matéria. As $\mathcal{L}^{(2)}$ são conjuntos completos de invariantes

⁶*warped*, tradução para o inglês. Usaremos durante a tese a palavra em português, uma vez que julgamos que sua tradução pode levar a erros de interpretação. Pois essa tradução pode levar o leitor a acreditar que estamos falando de torção.

quadráticos e α_i são constantes de acoplamento com dimensão de massa. Por outro lado, temos que $\mathcal{L}^{(3)}$ compõe os invariantes cúbicos, onde λ é um parâmetro com dimensão de comprimento e β_i são constantes de acoplamento adimensionais. Essas Lagrangianas são escolhidas para serem compostas pelos seguintes invariantes:

$$\mathcal{L}^{(2)} = [R^2, R_{MN}R^{MN}, R^{MNAB}R_{MNAB}] \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)} = [& R_M^A N^B R_A^C B^D R_C^M D^N, RMN^{AB}R_{AB}^{CD}R_{CD}^{MN}, R_{MNCD}R^{MNC}{}_E R^{DE}, \\ & R_{MNCD}R^{MNCD}R, R_{MNCD}R^{MC}R^{ND}, R_M^N R_N^C R_C^D R_D^M, R_{MN}R^{MN}R, R^3] \end{aligned} \quad (3.99)$$

O principal objetivo desta aplicação é focar na análise dos efeitos da interação cúbica no contexto de um espaço-tempo de cinco dimensões. Nesse cenário, o termo cúbico mais geral P é expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P = & \beta_1 R_M^A N^B R_A^C B^D R_C^M D^N + \beta_2 RMN^{AB}R_{AB}^{CD}R_{CD}^{MN} + \beta_3 R_{MNCD}R^{MNC}{}_E R^{DE} \\ & + \beta_4 R_{MNCD}R^{MNCD}R + \beta_5 R_{MNCD}R^{MC}R^{ND} + \beta_6 R_M^N R_N^C R_C^D R_D^M + \beta_7 R_{MN}R^{MN}R + \beta_8 R^3. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Ao contrário da teoria de Lovelock, que exclui contribuições de espaços-tempo com $D < 6$ em interações cúbicas [37], o termo mencionado contribui para a equação de movimento em $D = 5$, como demonstraremos posteriormente. Além disso, existem oito parâmetros livres independentes, reduzíveis a seis sob a suposição de que essa teoria compartilha o espectro da Relatividade Geral, no nível perturbativo. Em termos mais simples, a perturbação métrica em um espaço-tempo de fundo maximamente simétrico transmite apenas um gráviton transversal e sem massa. Essa condição é atendida ao impor as relações de parâmetros prescritas[144].

$$\beta_7 = \frac{1}{20}(3\beta_1 - 24\beta_2 - 20\beta_3 - 80\beta_4 - 7\beta_5 - 12\beta_6), \quad (3.101)$$

$$\beta_8 = \frac{1}{200}(-9\beta_1 + 52\beta_2 + 40\beta_3 + 160\beta_4 + 6\beta_5 + 16\beta_6). \quad (3.102)$$

Notavelmente, essas condições levam ao famoso termo de Gauss-Bonnet (GB) para o termo quadrático, ou seja, $\mathcal{L}^{(2)} = R^2 - 4R_{MN}R^{MN} + R_{MNAB}R^{MNAB}$ [144]. Enquanto o termo GB mantém sua natureza topológica em quatro dimensões, ele perde essa característica no contexto de cinco dimensões. Essa transição destaca a necessidade de incluir esse termo no escopo de nosso estudo.

Assim, a ação, abrangendo curvatura até a ordem cúbica e compartilhando o mesmo

espectro que a RG no contexto de cinco dimensões, pode ser expressa da seguinte forma:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g_5} \left[\frac{1}{2\kappa_5} (R - 2\Lambda_0) + \alpha \mathcal{L}_{GB} + \lambda P + \mathcal{L}_m \right], \quad (3.103)$$

onde $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_{GB}$. Além disso, assumimos como campo de matéria o campo escalar real na forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g^{MN} D_M \phi D^N \phi - V(\phi), \quad (3.104)$$

onde V é o potencial escalar e D_M é a derivada covariante em relação à métrica g_{MN} . Assim, as equações de campo dessa teoria podem ser escritas como

$$G_{MN} + \Lambda_0 g_{MN} = \kappa_5 (T_{MN} + \alpha Q_{MN} + \lambda H_{MN}), \quad (3.105)$$

$$g^{MN} D_M D_N \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.106)$$

onde T_{MN} é o tensor de energia-momento da matéria dado por

$$T_{MN} = g_{MN} \mathcal{L}_m + \partial_M \phi \partial_N \phi. \quad (3.107)$$

O tensor de Lanczos Q_{MN} , atribuído ao termo GB, é dado por

$$Q_{MN} = g_{MN} \mathcal{L}_{GB} - 4RR_{MN} + 8R_{MC}R^C{}_N + 8R_{MCND}R^{CD} - 4R_{MCDE}R^{CDE} \quad (3.108)$$

e a contribuição do termo cúbico é dada por

$$H_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{g_5}} \frac{\delta(\sqrt{-g_5}P)}{\delta g^{MN}}.$$

Devido à complexidade dos termos gerados, H é fornecido explicitamente no apêndice C.

A estrutura da Eq. (3.105) implica que as equações de movimento para um espaço-tempo genérico podem envolver derivadas de alta ordem, estendendo-se até derivadas de quártica ordem. Essa possibilidade pode levar a instabilidades de Ostrogradsky no nível clássico dentro do modelo [155]. Para garantir precisão, é essencial realizar uma análise hamiltoniana para esse modelo de forma geral, determinando se derivadas de alta ordem introduzem graus de liberdade indesejados. No entanto, dada a forma complexa de $H_{\mu\nu}$, conduzir essa análise torna-se desafiador. No entanto, podemos superar esse desafio escolhendo cuidadosamente os parâmetros da teoria, possibilitando a derivação de equações de movimento com derivadas de segunda ordem. Antes de entrar nisso, consideremos um espaço-tempo distorcido em 5-dimensões representado pela seguinte métrica 1.10. Assim, pode ser demonstrado que as equações de movimento des-

critas pela Eq. (3.105) para um campo de matéria, conforme definido por (3.104) e sujeito às condições (3.101) e (3.102), exibem equações de campo de segunda ordem se escolhermos:

$$\beta_6 = -\frac{2}{81}(3\beta_1 - 84\beta_2 - 55\beta_3 - 320\beta_4 - 27\beta_5). \quad (3.109)$$

Mas antes, como meio de verificar que esta é a escolha correta para esse propósito, podemos observar que, no domínio lagrangiana, o termo de interação cúbica (3.100), para as escolhas especificadas (3.101), (3.102), e (3.109), dentro de um espaço-tempo distorcido (1.10), assume a seguinte expressão:

$$P = -4\beta A'^4(5A'^2 + 6A''), \quad (3.110)$$

onde

$$\beta = -3\beta_1 + 12\beta_2 + 8\beta_3 + 40\beta_4. \quad (3.111)$$

Vale ressaltar que a escolha única de (3.109) é suficiente para eliminar termos na ação que resultariam em derivadas de alta ordem na equação de movimento, como demonstraremos mais adiante. Em outras palavras, esse conjunto de escolhas (3.101), (3.102), e (3.109) é adequado para derivar equações de movimento com derivadas de segunda ordem. Além disso, a teoria resultante exibe um espectro idêntico ao de GR ao assumir que as flutuações gravitacionais “vivem” em uma espaço-tempo de fundo maximamente simétrico.

De fato, assumindo que $\phi = \phi(y)$ depende apenas da dimensão extra y , essas escolhas levam às seguintes equações de movimento

$$3A'' + 6A'^2 = -\frac{1}{2}\kappa_5(\phi'^2 + 2V) - \Lambda_0 + 24\kappa_5\alpha A'^2(A'^2 + A'') + 2\kappa_5\lambda\beta A'^4(2A'^2 + 3A''), \quad (3.112)$$

$$6A'^2 = \frac{1}{2}\kappa_5(\phi'^2 - 2V) - \Lambda_0 + 24\kappa_5\alpha A'^4 + 4\kappa_5\lambda\beta A'^6, \quad (3.113)$$

$$\phi'' + 4A'\phi' - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.114)$$

O apóstrofo indica a derivada em relação a y . Note que tanto a gravidade de GB quanto a gravidade cúbica introduzem modificações nas equações usuais da brana. Portanto, quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, recuperamos as equações de Einstein da brana baseadas em RG. Além disso, é digno de nota que, entre as equações de movimento (3.112), (3.113), e (3.114), apenas duas são verdadeiramente independentes. Esse fato pode ser iluminado pela aplicação da identidade de Bianchi.

- **Solução de brana fina**

Vamos considerar a modificação quadrática e cúbica em uma brana fina no vácuo do espaço anti-de Sitter AdS_5/Z_2 , ou seja, no modelo de Randall-Sundrum (RS). Supondo que $A(y) = -c|y|$ e $\phi = 0$, a solução da Eq. (3.113) nos fornece:

$$\Lambda_0 = -2c^2 (3 - 12\alpha c^2 \kappa_5 - 2\lambda \beta c^4 \kappa_5). \quad (3.115)$$

Para obtermos uma solução de espaço anti-de Sitter AdS_5 no *bulk*, ou seja, $\Lambda_5 < 0$, a Eq. (3.115) demanda que:

$$0 \leq \lambda \beta < \frac{3}{2c^2} \left(\frac{1}{c^2 \kappa_5} - 4\alpha \right). \quad (3.116)$$

Dado que $R = -20c^2$, a força do termo cúbico $\lambda \beta$ diminui à medida que a curvatura do *bulk* aumenta. Assim, a Eq. (3.116) fornece um limite superior para o acoplamento cúbico proveniente do modelo de dimensão extra.

Vale mencionar que ambos os termos quadrático e cúbico resultam em termos positivos na constante cosmológica do *bulk* na Eq. (3.115). De fato, para a escolha $A' = -c$, a densidade de energia cúbica efetiva é dada por:

$$\rho_{cubic} = -p_{cubic} = 4\lambda \beta c^4, \quad (3.117)$$

enquanto para o modelo GB,

$$\rho_{GB} = -p_{GB} = 24\alpha c^4. \quad (3.118)$$

Conseqüentemente, as correções de ordem superior ao modelo RS levam a uma transição de AdS_5 para dS_5 . Como dS_5 é uma solução da Relatividade Geral com equação de estado $p = -\rho$, as correções quadráticas e cúbicas são equivalentes a uma fonte efetiva que viola a condição de energia dominante $\rho \geq P$. Portanto, para mantermos uma solução compactificada com curvatura, devemos considerar que, para $\alpha = 0$,

$$0 \leq \frac{2}{3} \lambda \beta \kappa_5 c^4 < 1, \quad (3.119)$$

ou seja, a correção cúbica é considerada como uma perturbação na solução de brana da Relatividade Geral.

- **Solução BPS com o campo escalar no *bulk***

Agora, vamos investigar as modificações feitas pela gravidade cúbica em uma 3-brana espessa. Como estamos interessados em uma fonte localizada, vamos primeiro discutir o comportamento

assintótico.

Fora do núcleo da brana, esperamos que o campo atinja um valor de vácuo, ou seja, $\phi' = V = 0$. Nesse regime, a equação de movimento leva a:

$$3A''(1 - 2\kappa_5\lambda\beta A'^4) = 0. \quad (3.120)$$

Assumindo que $(1 - 2\kappa_5\lambda\beta A'^4) > 0$, então $A'' = 0$. Assim, fora do núcleo da brana, o fator de dobra se comporta como na solução da brana fina, ou seja, $A' = -c$. Além disso, a constante de acoplamento cúbico é limitada por:

$$0 \leq \lambda\beta < \frac{1}{2\kappa_5 c^4}. \quad (3.121)$$

Dado que assintoticamente $e^A \rightarrow e^{-c|y|}$, à medida que $\lambda\beta$ aumenta, a taxa de decaimento exponencial da função de dobra diminui.

Para examinar os efeitos da gravidade modificada no núcleo da brana, vamos empregar o conhecido formalismo BPS. Primeiro, assumimos a relação entre o fator de dobra e o chamado superpotencial $W(\phi)$ na forma:

$$A'(y) = -\frac{1}{3}\kappa_5 W(\phi). \quad (3.122)$$

Subtraindo a Eq. (3.112) da Eq. (3.113) sob a suposição de Eq. (3.122), obtemos a expressão:

$$\phi'(y) = -\frac{1}{81} \left(-81 + 72\tilde{\alpha}W^2 + 2\tilde{\beta}W^4 \right) W_\phi, \quad (3.123)$$

onde $W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}$. O potencial escalar pode ser derivado substituindo Eq. (3.123) em Eq. (3.113), resultando em:

$$V = \frac{W_\phi^2 \left(2\tilde{\beta}W^4 + 72\tilde{\alpha}W^2 - 81 \right)^2 + 36\kappa_5 W^2 \left(2\tilde{\beta}W^4 + 108\tilde{\alpha}W^2 - 243 \right)}{13122}. \quad (3.124)$$

onde $\tilde{\alpha} = \alpha\kappa_5^3$ e $\tilde{\beta} = \lambda\beta\kappa_5^5$. Assim, ao fazer isso, transformamos o par de equações lineares de segunda ordem (3.112)-(3.113) em um conjunto de duas equações de primeira ordem (3.122)-(3.123). Note que a gravidade cúbica leva a termos adicionais de quarta e sexta potências do superpotencial no potencial.

Considere o conhecido modelo Sine-Gordon, onde o superpotencial é dado por:

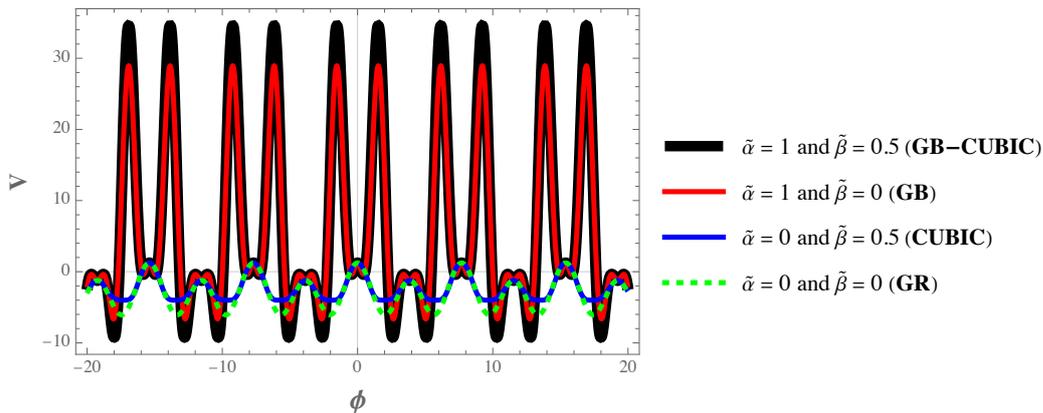
$$W(\phi) = 3bc \sin \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right), \quad (3.125)$$

onde b e c são constantes. Essa seleção direta fornece uma solução exata para o potencial (3.124), de modo que:

$$V = \frac{1}{2}c \left[4b^2 c \kappa_5 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) \left(2b^4 \tilde{\beta} c^4 \sin^4 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) + 12\tilde{\alpha} b^2 c^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) - 3 \right) + \sqrt{\frac{6}{b}} \cos \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) \left(2b^4 \tilde{\beta} c^4 \sin^4 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) + 8\tilde{\alpha} b^2 c^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right) - 1 \right)^2 \right]. \quad (3.126)$$

Na Fig.20, plotamos esse potencial para diferentes configurações. Observe que os termos GB e cúbico aumentam a altura das barreiras e a profundidade dos poços do potencial. Um comportamento semelhante foi encontrado em braneworld teleparalela simétrica [156]. A densidade de energia é esboçada na Fig.21-a, a função de dobra é mostrada na Fig.21-b, e o perfil do campo escalar é plotado na Fig.21-c. Note que para valores pequenos dos parâmetros GB e cúbico, não há grande diferença em relação às soluções baseadas na Relatividade Geral (GR).

Figura 20: Perfil do potencial (3.126) para diferentes valores de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. Assumimos que $\kappa_5 = 1$ e $b = c = 1$.

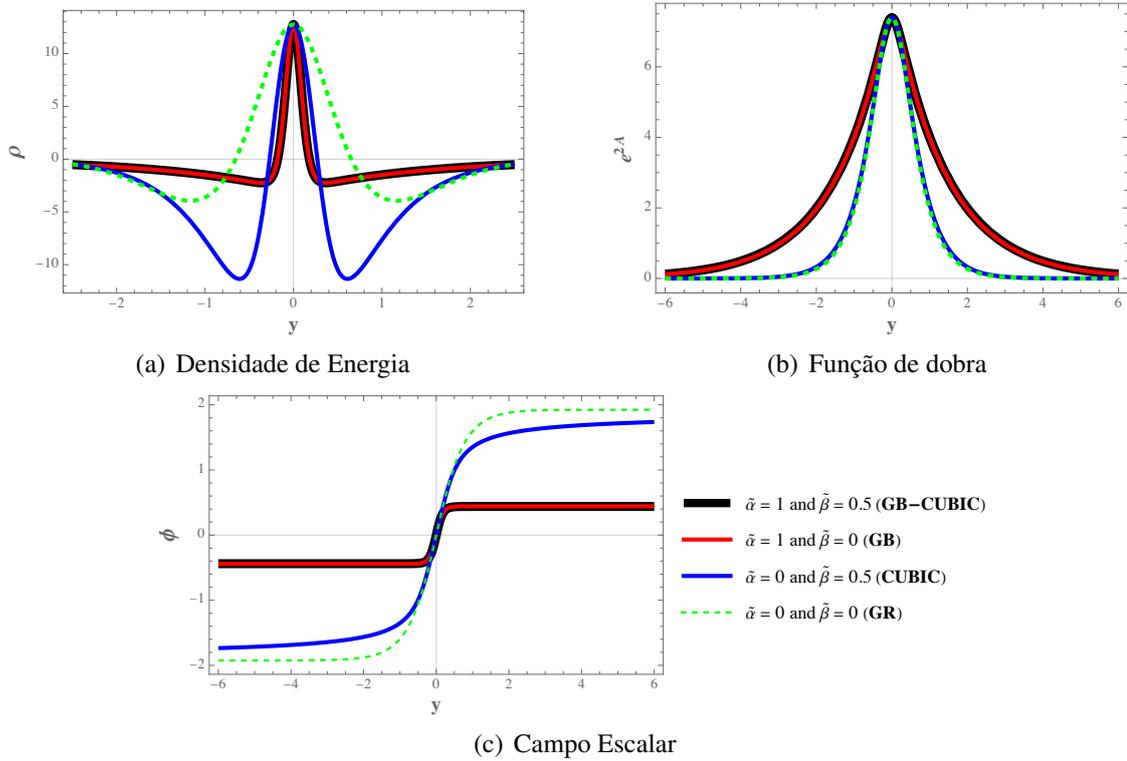


Fonte: elaborado pelo autor.

3.4.2.1 Flutuações dos modos tensoriais

Anteriormente, estendemos a gravidade cúbica para um modelo de brana-mundo curvado. Ao assumir condições adicionais nos acoplamentos cúbicos, obtivemos equações de movimento gravitacional contendo termos de até segunda ordem em derivadas. Além disso, encontramos uma solução exata para uma brana fina e uma solução numérica para uma brana espessa. Em ambos os casos, utilizamos as equações de movimento completas. Nesta seção, estudamos o comportamento das soluções de brane mundo no nível perturbativo. Investigamos a propagação de pequenas perturbações sobre a brane mundo curvada pela gravidade modificada encontrada anteriormente.

Figura 21: A solução da brana para o superpotencial $W = \xi \phi$. Assumimos que $\kappa_5 = 1$ e $\xi = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Vamos considerar as flutuações tensoriais na solução da brane do tipo:

$$ds^2 = e^{2A(y)} [(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] + dy^2, \quad (3.127)$$

onde $h_{\mu\nu}(x^\mu, y)$ é a perturbação tensorial da métrica de fundo (1.10). Começaremos derivando explicitamente expressões para as flutuações nos casos do GB e cúbico. Somente após essa análise procederemos assumindo as condições de calibre transversa e sem traço.

As componentes não nulas do escalar de Ricci, tensor de Ricci e tensor de Riemann são:

$$R = -4(2A'' + 5A'^2), \quad (3.128)$$

$$R_{\mu\nu} = -e^{2A}(A'' + 4A'^2)\eta_{\mu\nu}, \quad (3.129)$$

$$R_{44} = -4(A'' + A'^2), \quad (3.130)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -e^{4A}A'^2(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}), \quad (3.131)$$

$$R_{\mu 4\nu 4} = -e^{2A}(A'' + A'^2)\eta_{\mu\nu}. \quad (3.132)$$

As expansões de perturbação não nulas para o escalar de Ricci, tensor de Ricci e

tensor de Riemann são, respectivamente:

$$\delta R = e^{-2A} \left[\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square^{(4)} h \right] - 5A'h' - h'', \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right) \\ & - \frac{1}{2} e^{2A} \left[h''_{\mu\nu} + A' \left(h' \eta_{\mu\nu} + 4h'_{\mu\nu} \right) + 2 \left(A'' + 4A'^2 \right) h_{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\delta R_{\mu 4} = \frac{1}{2} \left(\partial^\nu h'_{\mu\nu} - \partial_\mu h' \right), \quad (3.135)$$

$$\delta R_{44} = -\frac{1}{2} \left(h'' + 2A'h' \right), \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\rho\delta} = & \frac{1}{2} e^{2A} \left[\partial_\mu \partial_\delta h_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\delta h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\delta\nu} + \partial_\rho \partial_\nu h_{\delta\mu} + e^{2A} \left(2A' \left(\eta_{\mu\delta} h_{\nu\rho} - 2\eta_{\nu\delta} h_{\mu\rho} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_{\nu\rho} \left(2h_{\mu\delta} A' + h'_{\mu\delta} \right) - \eta_{\mu\rho} \left(2h_{\nu\delta} A' + h'_{\nu\delta} \right) - \eta_{\nu\delta} h'_{\mu\rho} + \eta_{\mu\delta} h'_{\nu\rho} \right) A' \right], \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\delta R_{\mu\nu\rho 4} = \frac{1}{2} e^{2A} \left[\partial_\mu h'_{\nu\rho} - \partial_\nu h'_{\mu\rho} \right], \quad (3.138)$$

$$\delta R_{\mu 4\rho 4} = -\frac{1}{2} e^{2A} \left[2h_{\mu\rho} \left(A'' + A'^2 \right) + 2A' h'_{\mu\rho} + h''_{\mu\rho} \right], \quad (3.139)$$

onde $h = h_\mu^\mu$ e $\square^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ é o operador de d'Alembert de quatro dimensões na brana.

Tomando a perturbação do campo escalar como $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$, encontra-se a perturbação do tensor de energia-momento como:

$$\delta T_{\mu\nu} = -e^{2A} \left(\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \bar{\phi}'^2 + h_{\mu\nu} V + \eta_{\mu\nu} \delta\phi' \bar{\phi}' + \eta_{\mu\nu} \delta\phi V_\phi \right), \quad (3.140)$$

$$\delta T_{\mu 4} = \delta\phi' \partial_\mu \bar{\phi} + \bar{\phi}' \partial_\mu \delta\phi, \quad (3.141)$$

$$\delta T_{44} = \bar{\phi}' \delta\phi' - V_\phi \delta\phi, \quad (3.142)$$

onde $\bar{\phi} = \bar{\phi}(x^\mu, y)$, e $\delta\phi = \delta\phi(x^\mu, y)$ representam, respectivamente, o campo escalar de fundo e sua perturbação.

• Caso Gauss-Bonnet

Usando as quantidades linearizadas acima, a perturbação linear para a Eq. (3.105) (para $\lambda = 0$), assumindo a perturbação tensorial transversal e sem traço (TT), ou seja, $\partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0$, torna-

se:

$$\begin{aligned}
& h''_{\mu\nu} + 4A'h'_{\mu\nu} + e^{-2A}\square^{(4)}h_{\mu\nu} \\
& \quad - 2\kappa_5\eta_{\mu\nu}(\delta\phi'\bar{\phi}' + \delta\phi V_\phi) \\
& - 8\alpha\kappa_5 \left[A'^2 h''_{\mu\nu} + 2A'(2A'^2 + A'') h'_{\mu\nu} + e^{-2A}(A'' + A'^2)\square^{(4)}h_{\mu\nu} \right] \\
& - h_{\mu\nu} \left[6(A'' + 2A'^2) + \kappa_5(\phi'^2 + 2V) - 48\alpha\kappa_5 A'^2(A'' + A'^2) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Observe que, na expressão acima, a segunda linha envolve apenas o campo escalar de fundo e sua perturbação. Além disso, a quarta linha é anulada, uma vez que é a EoM para a ordem zero (3.112), quando desconsideramos ρ_{cubic} . Assim, a equação de perturbação linear se reduz a:

$$\left[1 - 8\alpha\kappa_5 A'^2 \right] h''_{\mu\nu} + 4A' \left[1 - 4\alpha\kappa_5 (2A'^2 + A'') \right] h'_{\mu\nu} + e^{-2A} \left[1 - 8\alpha\kappa_5 (A'' + A'^2) \right] \square^{(4)} h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.144}$$

Definindo $\zeta \equiv 2\alpha\kappa_5$, temos a equação de flutuação com o termo GB:

$$\begin{aligned}
& \left[1 - 4\zeta A'^2 \right] h''_{\mu\nu} + 4A' \left[1 - 2\zeta (2A'^2 + A'') \right] h'_{\mu\nu} \\
& \quad + e^{-2A} \left[1 - 4\zeta (A'' + A'^2) \right] \square^{(4)} h_{\mu\nu} = 0.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

A equação de perturbação tensorial (3.145) foi obtida e estudada em detalhes em Ref.[157]. Tomamos grande cuidado em derivar minuciosamente o procedimento passo a passo que conduz a Eq. (3.145).

• Caso Cúbico

Depois de revisar a linearização com o termo GB, vamos considerar as equações de flutuação devido ao termo cúbico. Como estamos lidando com flutuações em um espaço-tempo não maximalmente simétrico, obtivemos cuidadosamente a equação gravitacional linearizada.

Após cálculos complicados, verifica-se que, para manter a EOM para as flutuações com termos de até segunda ordem, devemos impor, além das condições já escolhidas, as seguintes condições (3.101), (3.102) e (3.109), a condição adicional sobre o coeficiente β_4 :

$$\beta_4 = \frac{1}{32} (3\beta_1 - 12\beta_2 - 7\beta_3), \tag{3.146}$$

e de maneira semelhante para o coeficiente β_5 :

$$\beta_5 = \frac{1}{9} (6\beta_1 - 60\beta_2 - 29\beta_3 - 64\beta_4). \tag{3.147}$$

Surpreendentemente, para o mesmo β_4 em Eq.(3.146), existem outras duas escolhas para β_5 , a saber, $\beta_5 = -\frac{1}{9}(3\beta_1 + 24\beta_2 + 8\beta_3 - 32\beta_4)$ ou $\beta_5 = \frac{1}{9}(-12\beta_1 + 12\beta_2 + 13\beta_3 + 128\beta_4)$. Assim, usando a condição de calibre transversal e sem traço (TT), a EOM linearizada para a flutuação torna-se:

$$\begin{aligned}
& h''_{\mu\nu} + 4A' h'_{\mu\nu} + e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \\
& - 2\kappa_5 \eta_{\mu\nu} (\delta\phi' \bar{\phi}' + \delta\phi V_\phi) \\
& - \frac{3}{2} \lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3) A'^2 \left[A'^2 h''_{\mu\nu} + 4A' (A'' + A'^2) h'_{\mu\nu} + e^{-2A} (2A'' + A'^2) \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right] \\
& - h_{\mu\nu} \left[2\Lambda + 6(A'' + 2A'^2) + \kappa_5 (\phi'^2 + 2V) - 3\lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3) A'^4 (3A'' + 2A'^2) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Observe que, na expressão acima, a segunda linha envolve apenas o campo escalar de fundo e sua perturbação. Além disso, a quarta linha é anulada, uma vez que é a EoM para a ordem zero (3.112), quando desconsideramos ρ_{GB} . A equação de perturbação linear reduz-se a:

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{3}{2} \lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3) A'^4 \right] h''_{\mu\nu} \\
& + 4A' \left[1 - \frac{3}{2} \lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3) A'^2 (A'' + A'^2) \right] h'_{\mu\nu} \\
& + e^{-2A} \left[1 - \frac{3}{2} \lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3) A'^2 (2A'' + A'^2) \right] \square^{(4)} h_{\mu\nu} = 0.
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \equiv \frac{3}{2} \lambda \kappa_5 (\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3)$, as flutuações tensoriais gravitacionais obedecem à equação:

$$\left[1 - \varepsilon A'^4 \right] h''_{\mu\nu} + 4A' \left[1 - \varepsilon A'^2 (A'' + A'^2) \right] h'_{\mu\nu} + e^{-2A} \left[1 - \varepsilon A'^2 (2A'' + A'^2) \right] \square^{(4)} h_{\mu\nu} = 0, \tag{3.150}$$

onde $\square^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Observe que, para $\varepsilon = 0$, recuperamos a equação de flutuações baseada em GR.

Os sinais dos coeficientes nos termos $\square^{(4)} h_{\mu\nu}$ e h'' determinam a propagação causal das perturbações tensoriais. Para que o coeficiente do termo líder em Eq.(3.150) seja positivo, então a constante de acoplamento cúbica ε deve satisfazer:

$$0 \leq \varepsilon < \frac{1}{\text{Máx}(A')^4}. \tag{3.151}$$

Para uma brana fina com modificação cúbica, onde $A' = -c$, a constante de acoplamento cúbica

satisfaz:

$$0 \leq \varepsilon < \frac{1}{c^4}. \quad (3.152)$$

Portanto, as modificações cúbicas devem ser tratadas como pequenas perturbações em comparação com o termo de GR. O limite da restrição obtida no regime linearizado em Eq.(3.152) está de acordo com a encontrada para a solução exata em Eq.(3.119).

3.4.2.2 Estabilidade e localização na gravidade cúbica

Após obtermos a equação para a flutuação dos modos tensoriais no espaço-tempo de 5-dimensões, ou seja, Eq. (3.150), nesta seção, analisamos a propagação das flutuações na 3-brana e ao longo da dimensão extra. Essa análise é importante para garantir que a ação efetiva (3+1) na 3-brana seja bem definida. Além disso, a propagação ao longo das dimensões extras pode levar a instabilidades gravitacionais que valem a pena ser investigadas.

Vamos começar realizando a decomposição usual de Kaluza-Klein, onde

$$h_{\mu\nu}(x,y) = \chi_{\mu\nu}(x^\mu)\varphi(y). \quad (3.153)$$

Substituindo a Eq. (3.153) na equação de flutuação (3.150), obtemos

$$(\square^{(4)} - m^2)\chi_{\mu\nu}(x^\mu) = 0 \quad (3.154)$$

$$B^2\varphi''(y) + C\varphi'(y) + m^2\varphi(y) = 0. \quad (3.155)$$

onde

$$B^2 = \frac{e^{2A}[1 - \varepsilon A'^4]}{[1 - \varepsilon A'^2(2A'' + A'^2)]} \quad (3.156)$$

e

$$C = \frac{4A'e^{2A}[1 - \varepsilon A'^2(A'' + A'^2)]}{[1 - \varepsilon A'^2(2A'' + A'^2)]}. \quad (3.157)$$

A Eq. (3.154) descreve o gráviton KK (3+1) com massa m na 3-brana, enquanto a Eq. (3.155) governa a propagação do gráviton ao longo da dimensão extra.

• Espectro de estabilidade de Kaluza-Klein

A propagação das flutuações tensoriais ao longo da 3-brana na Eq. (3.154) tem um termo de massa originado da dimensão extra. Essa massa, conhecida como massa KK, pode ser obtida utilizando a propagação ao longo da dimensão extra na Eq. (3.155). Para analisar a estabilidade do espectro KK, empregamos a abordagem quântico-mecânica análoga supersimétrica.

Realizemos a mudança de coordenadas

$$z = \int B^{-1}(y)dy, \quad (3.158)$$

onde $B(y)$ é dado pela Eq. (3.156). Como resultado, a Eq. (3.155) assume a forma

$$\ddot{\varphi}(z) + E(z)\dot{\varphi}(z) + m^2\varphi(z) = 0, \quad (3.159)$$

onde $E(z) = \frac{C-\dot{B}}{B}$ e o ponto representa a derivada em relação à coordenada z . Agora, assumindo a seguinte mudança na função de onda

$$\varphi(z) = e^{-\frac{1}{2}\int E dz}\Phi(z), \quad (3.160)$$

então a função Φ satisfaz uma equação semelhante à de Schrödinger dada por

$$(-\partial_z^2 + V_{eff})\Phi = m^2\Phi, \quad (3.161)$$

onde o potencial efetivo V_{eff} é dado por

$$V_{eff}(z) = \left(\frac{E}{2}\right)^2 + \partial_z\left(\frac{E}{2}\right). \quad (3.162)$$

A forma do potencial efetivo mostra que ele possui uma estrutura análoga à supersimetria da mecânica quântica. Essa simetria tipo SUSY garante a análise de estabilidade para os modos KK [158]. De fato, definindo um superpotencial $U_g = -\frac{E}{2}$ e o operador hamiltoniano tipo SUSY $Q^\dagger Q$, onde $Q = \partial_z + U_g$, então a equação semelhante à de Schrödinger Eq.(3.161) toma a forma

$$Q^\dagger Q\Phi = m^2\Phi. \quad (3.163)$$

Portanto, o valor próprio da massa é positivo, $m^2 \geq 0$, e assim, não há modos gravitacionais KK taquiônicos. Dessa forma, concluímos que as modificações cúbicas preservam a estabilidade do gráviton, pelo menos no regime linearizado.

• Modo Massivo

Após determinarmos a estabilidade do espectro KK, agora exploramos os efeitos da gravidade cúbica nesses modos KK massivos. Infelizmente, a mudança de coordenada $z = z(y)$ na Eq. (3.158) não pode ser obtida analiticamente para soluções de branas espessas. Assim, estudamos os modos massivos na coordenada y , usando a Eq. (3.155).

Iniciemos com a brana fina, ou seja, onde $A' = -c$ e $A'' = 0$. Consequentemente, a

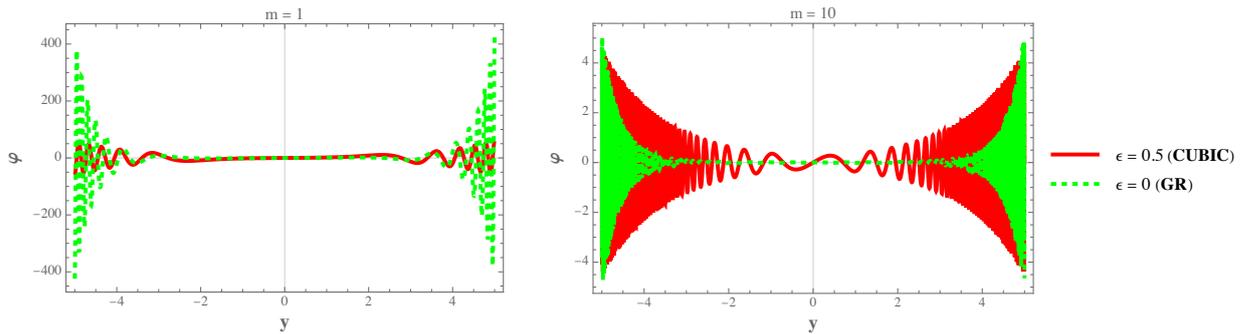
Eq. (3.155) leva a

$$\varphi''(y) - 4c\varphi'(y) + m^2 e^{2c|y|} \varphi(y) = 0, \quad (3.164)$$

essencialmente a mesma equação KK no modelo de RS. As soluções envolvem combinações de funções de Bessel, que, no entanto, não são normalizáveis, ou seja, não estão localizadas em torno da 3-brana. Portanto, as modificações introduzidas pela gravidade cúbica resultam no mesmo espectro gravitacional KK para uma 3-brana fina em um espaço-tempo AdS_5 . Este é um resultado esperado, uma vez que os termos cúbicos einsteinianos foram escolhidos para preservar o espectro de GR sobre espaços-tempo maximalmente simétricos.

Para a brana espessa no modelo de Sine-Gordon, resolvemos numericamente a Eq. (3.155). O comportamento dos modos massivos de KK é apresentado na Fig. (22). Observa-se que, à medida que a massa KK aumenta, a amplitude dos modos KK próximos à brana também aumenta.

Figura 22: Modos massivos para massas KK leves e pesadas gerados por uma brana espessa com superpotencial dado por (3.125). Supomos que $b = c = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Para contrapor este exemplo, consideremos agora outra brana espessa gerada por um fator de dobra com a seguinte *ansatz*

$$A(y) = \ln[\text{sech}(\chi y)], \quad (3.165)$$

onde χ é uma constante. Ao contrário do exemplo anterior, agora temos a forma exata do fator de dobra, então podemos substituí-lo nas Eqs. (3.156) e (3.157), de modo que

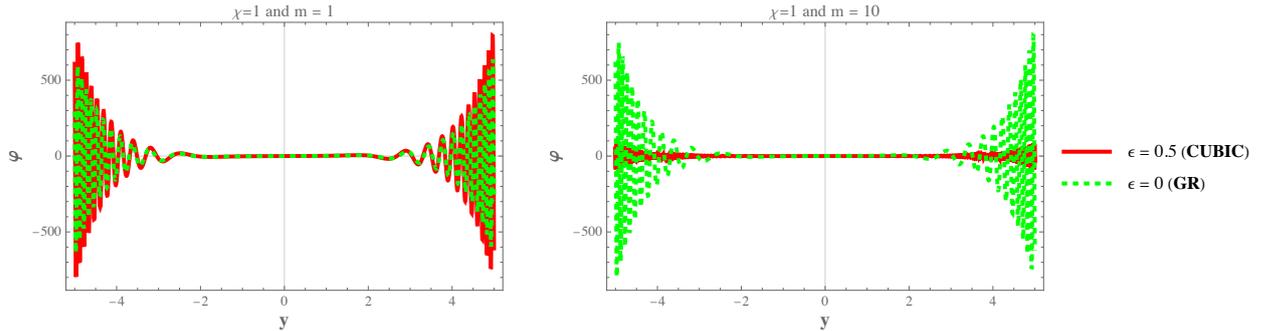
$$B^2 = \frac{\text{sech}^2(\chi y) (1 - \chi^4 \epsilon \tanh^4(\chi y))}{\chi^4 \epsilon \tanh^4(\chi y) - 2\chi^4 \epsilon \tanh^2(\chi y) \text{sech}^2(\chi y) - 1} \quad (3.166)$$

$$C = -\frac{4(\chi \tanh(\chi y) - \chi^5 \epsilon \tanh^5(\chi y) + \chi^5 \epsilon \tanh^3(\chi y) \text{sech}^2(\chi y))}{-\chi^4 \epsilon \tanh^4(\chi y) + 2\chi^4 \epsilon \tanh^2(\chi y) \text{sech}^2(\chi y) + 1} \quad (3.167)$$

A partir deste exemplo com Eq. (3.101), já é evidente que a transformação $\frac{dy}{dz} = B$ usada para

obter a Eq. (3.161) pode não levar a uma transformação reversível entre as coordenadas y e z . Por esse motivo, utilizamos com segurança a Eq. (3.155). Assim, realizando numericamente a Eq. (3.155) com (3.101) e (3.167), construímos os gráficos na Fig. (23). É imediatamente perceptível que há um comportamento inverso em comparação com a Fig. (21), onde para uma massa KK pesada, as amplitudes da gravidade cúbica são suprimidas pela GR.

Figura 23: Modos de massa para massas KK leves e pesadas geradas por uma brana espessa com $A = \ln[\text{sech}(y)]$.



Fonte: elaborado pelo autor.

• Modo Não-Massivo

Finalmente, vamos considerar o modo sem massa $m = 0$. Este modo deve ser confinado à brana para garantir que nossa teoria leve a uma ação finita em $(3 + 1)$ dimensões. A partir da Eq. (3.163), o modo sem massa pode ser expresso como:

$$\Phi_0(y) = \tilde{\Phi}_0 e^{-\int U g dz} \quad (3.168)$$

onde $\tilde{\Phi}_0$ é uma constante de normalização. Além disso, o modo zero do gráviton localizado deve satisfazer a condição $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^2 dz = 1$. Agora, empregando a transformação $\frac{dy}{dz} = B(y)$, procedemos a gerar numericamente gráficos que representam os modos zero em função da variável y . É essencial destacar que a solução correspondente nesta variável é expressa da seguinte forma:

$$\Phi_0(z) = \tilde{\Phi}_0 e^{-\int U g(y) dy} \quad (3.169)$$

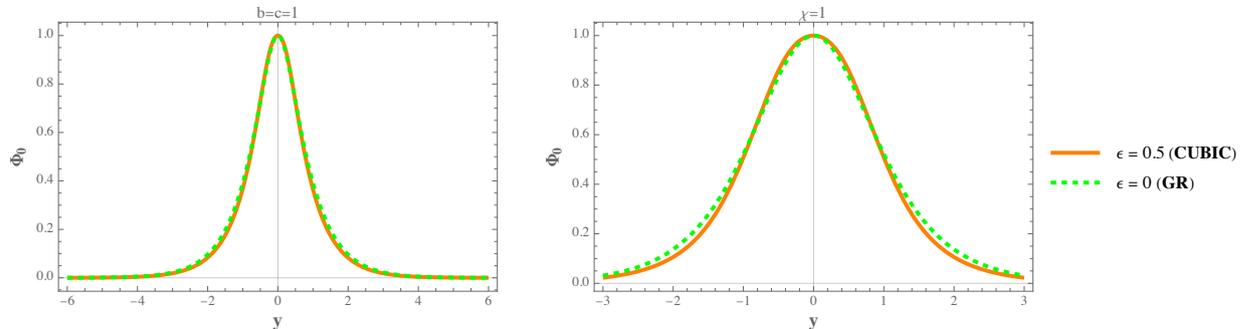
onde

$$U_g(y) = -\frac{C - B'B}{2B^2}. \quad (3.170)$$

Considerando a solução de brana espessa derivada do superpotencial (3.125) e do fator de dobra (3.165), nossa análise indica que o modo zero exibe localização na origem, semelhante ao comportamento observado no caso RG padrão, conforme mostram as Figs. (24).

Esse fenômeno é particularmente proeminente sob a suposição de uma interação cúbica fraca ($\epsilon = 0.5$).

Figura 24: Modo massivo gravitacional de KK para uma interação cúbica fraca. Supomos que $\kappa_5 = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Principais Resultados

Introduzimos o formalismo BPS de primeira ordem para derivar soluções de branas espessas, incorporando um campo escalar para representar o conteúdo de matéria no *bulk*. Nossa investigação se concentrou em soluções geradas pelo superpotencial de Sine-Gordon, resultando em um potencial (3.126). Utilizando métodos numéricos, construímos com sucesso o perfil do campo escalar, revelando que a teoria cúbica suplementada pelo termo de GB produz soluções de único solitão. Além disso, ao considerar uma interação quadrática-cúbica fraca, o perfil da densidade de energia assemelha-se de perto ao da GR padrão.

Antes de entrar em uma análise de estabilidade detalhada do modelo, derivamos a equação que governa a perturbação tensorial gravitacional explicitamente. Nossos cálculos para a interação quadrática estão alinhados com o resultado previamente previsto em Ref.[157]. No entanto, no caso da interação cúbica, uma extensa computação de termos revelou que a fixação de dois parâmetros adicionais (β_4 e β_5) é necessária para obter equações de movimento de segunda ordem para as flutuações gravitacionais. Consequentemente, alcançar uma teoria cúbica isenta de instabilidade exigiria até três parâmetros β livres. Notavelmente, essa análise estende a premissa inicial da condição (i), que assume que as flutuações ocorrem em um espaço-tempo de fundo maximamente simétrico, como destacado em [144]. Finalmente, com essas restrições especificadas e aproveitando a estrutura análoga supersimétrica da mecânica quântica, demonstramos a estabilidade do nosso modelo. Isso implica na ausência de modos táquions de Kaluza-Klein (KK) dentro do nosso *framework* proposto.

O exemplo inicial que investigamos foi a solução de brana fina. Observamos que a inclusão de curvatura cúbica, assumindo interação fraca, não se desvia significativamente dos modos de Kaluza-Klein (KK) observados no caso padrão da GR. No entanto, são observadas modificações sutis na torre maciça de KK para soluções de branas espessas. A amplitude das oscilações exibe variações dependentes do parâmetro de massa, levando a um aumento ou diminuição. Além disso, demonstramos que os modos tensoriais massivos de quatro dimensões podem ser efetivamente localizados nas branas espessas, permitindo a recuperação do potencial Newtoniano de quatro dimensões.

4 CONCLUSÃO

Nesta tese, exploramos diversas abordagens para a modificação da Relatividade Geral, abrangendo desde a introdução de novos campos por meio de teorias que violam a simetria de Lorentz até a adição de novos invariantes até a ordem cúbica no termo de Einstein-Hilbert, passando por teorias com dimensões extras.

Na primeira parte, concentramo-nos em compreender o chamado “problema da gravidade”, investigando as dificuldades teóricas subjacentes à força responsável pela dinâmica de corpos massivos. Inicialmente, explicamos por que a Relatividade Geral é a melhor teoria para compreender a gravidade, baseando-nos em uma revisão de experimentos que evidenciaram a eficácia dessa teoria. Em seguida, destacamos as limitações da Relatividade Geral, apresentando um conjunto de observações astrofísicas, como energia e matéria escura, que a teoria não consegue explicar adequadamente, e as limitações intrínsecas da teoria, como o problema da singularidade. Além disso, buscamos motivar a extensão da Relatividade Geral, considerando suas limitações em regimes de altas energias, como no horizonte de eventos ou no interior de buracos negros. Para isso, resumimos diversas abordagens para entender a Relatividade Geral. Finalizando a primeira parte, detalhamos os fundamentos teóricos da teoria que pretendíamos estender, deduzindo as principais equações no formalismo métrico.

Na segunda parte desta tese, investigamos as modificações na Relatividade Geral resultantes da introdução de campos vetoriais que violam espontaneamente a simetria de Lorentz, conhecidos como campos de Bumblebee, os quais adquirem uma direção preferencial no espaço-tempo. Inicialmente, realizamos uma revisão sucinta da literatura sobre violação de Lorentz, com ênfase em modelos que apresentam tal violação de maneira espontânea, dado que o enfoque da tese reside no setor gravitacional. Destacamos as características principais do chamado Modelo Padrão Estendido, com ênfase no modelo Kostelecký-Samuel.

A partir desse embasamento teórico, concentramo-nos nas excitações do campo de Bumblebee. Nesse contexto, examinamos detalhadamente os modos gerados pela quebra espontânea da simetria de Lorentz devido a esse campo, identificando a presença de modos não massivos de Nambu-Goldstone. Além disso, discutimos as dificuldades associadas à busca por um mecanismo de Higgs para a gravidade, propondo a escolha de potenciais quadráticos suaves que induzem a essa quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Prosseguimos, então, para a construção de modelos nos quais as flutuações do campo de Bumblebee podem ser decompostas em modos transversais e longitudinais em relação ao valor esperado no vácuo. Demonstramos que o modo transversal corresponde precisamente ao modo não massivo de Nambu-Goldstone, enquanto o modo longitudinal representa o modo massivo. Embora esse modelo apresente grande promessa, enfrenta desafios, destacando-se a complexidade no tratamento dessas flutuações em espaços-tempos curvos.

Para superar esse desafio, demonstramos a possibilidade de desacoplar as equações das flutuações em determinados espaços-tempo, utilizando simetrias específicas e escolhas adequadas para o vetor de fundo b_μ . Essa abordagem permitiu o estudo separado da dinâmica dos modos de Bumblebee. Para ilustrar essa técnica, exploramos exemplos específicos.

No primeiro exemplo, investigamos como a curvatura do espaço-tempo e dimensões extras afetam as flutuações de um campo vetorial auto-interagente B_M que sofre uma quebra espontânea de simetria de Lorentz. Consideramos o campo Bumblebee em um espaço-tempo *bulk* de 5 dimensões, com uma dimensão extra do tipo espacial e uma geometria deformada com uma constante cosmológica no *bulk*. Nesse caso, nosso foco foi entender o impacto da geometria nas flutuações.

No segundo exemplo, abordamos o problema completo, analisando como as flutuações de Bumblebee modificam a geometria, adotando uma configuração de buracos negros. Investigamos o acoplamento do dilaton nas excitações Bumblebee em soluções de buracos negros em (3+1) dimensões. Realizando uma redução Kaluza-Klein, desenvolvemos um modelo que combina a teoria de Kostelecký-Samuel com o dilaton, apresentando um potencial de Liouville positivo. Ao considerar a presença de um buraco negro estático e esfericamente simétrico, conseguimos desacoplar os modos transversais e longitudinais do valor esperado do vácuo radial (VEV). Construimos um modelo que acopla o dilaton a esses modos de maneira semelhante, onde o potencial do dilaton é gerado pelo modo massivo β_0 , enquanto o modo massless de Nambu-Goldstone resulta em um campo do tipo Maxwell

Para finalizar a aplicação para as excitações de Bumblebee, nós investigamos o impacto do acoplamento do dilaton em múltiplos campos de calibre e excitações bumblebee em soluções de buracos negros assintoticamente Lifshitz em (3+1) dimensões. No contexto de um buraco negro estático e esfericamente simétrico, novamente os modos transversais e longitudinais se desacoplam do valor esperado do vácuo radial. Nesse exemplo, nós estudamos detalhadamente as transições de fase geradas pela violação de Lorentz. Consideramos o modo

massivo longitudinal da Violação de Lorentz como pressão termodinâmica, levando-nos a estabelecer um espaço de fase estendido ($P - V$). Dentro desse contexto, derivamos a equação de estado $P(T, V)$ e, posteriormente, identificamos os pontos críticos, que se manifestam como descontinuidades no calor específico a pressão constante. Em seguida, calculamos a energia livre de Gibbs, revelando uma transição de fase de primeira ordem dentro do modelo. Finalmente, determinamos os expoentes críticos, demonstrando sua equivalência aos observados no sistema de van der Waals.

Na terceira e última parte da tese, investigamos teorias gravitacionais com altas-curvaturas. Iniciamos com uma revisão das principais teorias que incorporam derivadas de ordem superior, abordando suas vantagens e desvantagens. Em seguida, aprofundamos a exploração das teorias que introduzem invariantes até a ordem cúbica, adicionando as contrações com três escalares de Riemann ao termo de Einstein-Hilbert (para $D > 4$, ao termo de Gauss-Bonnet também). Destacamos a Teoria Quasi-Topológica Generalizada como uma ampla classe de teorias com altas-curvaturas que, quando assumimos uma geometria de buraco negro de uma única função (ou seja, $g_{tt}g_{rr} = f$), fornece equações de movimento de segunda ordem. Além disso, discutimos outras subclasses relacionadas a essa teoria, como a Teoria de Lovelock e a Quasi-Topológica. No entanto, enfocamos mais detalhadamente uma subclasse específica, conhecida como Teoria Cúbica Einsteiniana (TCE), que utilizamos como aplicação específica

Para a primeira aplicação dessas teorias com altas-curvaturas, nós exploramos os efeitos da gravidade cúbica einsteiniana em soluções regulares de buracos negros. Apesar da presença de derivadas superiores, a TCE compartilha o mesmo número de graus de liberdade da gravidade de Einstein, pelo menos no nível perturbativo. Em regimes de campo forte, estudos anteriores demonstraram que a gravidade da TCE mantém a singularidade na origem de um buraco negro estático. Introduzimos uma lagrangiana de eletrodinâmica não linear (ENL) para investigar os efeitos da TCE nas soluções regulares de Bardeen, Hayward e da nova classe.

Por outro lado, no segundo exemplo nós investigamos os efeitos de termos de alta curvatura até a ordem cúbica no modelo de mundo brana. Propusemos uma teoria cúbica inspirada na Gravidade Cúbica Einsteiniana (ECG), caracterizada pelo invariante P (3.100) determinado por oito parâmetros de teoria β . Através da suposição de que a teoria compartilha um espectro gravitacional análogo ao da Relatividade Geral (GR) no regime linear, conseguimos restringir com sucesso dois desses parâmetros. Esta parametrização específica não só definiu o termo quártico, mas também levou à especificação completa do termo de Gauss-Bonnet (GB).

Notavelmente, em $D = 5$, o termo de GB emergiu como mais do que um termo topológico, justificando sua inclusão em nossos cálculos. Ao estabelecermos uma geometria de brana compactificada e deformada conforme definida pela Eq. (??), tornou-se evidente que a condição (i) da TCE, ou seja, a teoria compartilha o espectro com a RG, sozinha era insuficiente para fornecer equações de movimento de segunda ordem para o fator deformado. Para lidar com essa limitação, um parâmetro adicional precisava ser fixado, de modo que tivéssemos que relaxar a condição (ii) da TCE, que diz que os coeficientes relativos dos diferentes invariantes de curvatura são independentes da dimensão. Consequentemente, através da fixação de três parâmetros, formulamos com sucesso uma teoria cúbica apresentando uma equação de movimento de segunda ordem para o modelo de brana. Notavelmente, essa teoria descreve com precisão o regime linear do gráviton usual para um fundo maximamente simétrico (MSB). Além disso, demonstramos que essa teoria gera soluções de branas finas remissivas do tipo Randall-Sundrum (RS), exibindo potencial para uma fase de de Sitter.

Com esse último exemplo, nós concluímos a tese. Mostramos que há inúmeras formas de estender a RG, uma vez que ficou claro que esta teoria, de fato, é incompleta. Sobre os trabalhos apresentados aqui em forma de exemplificações, podemos apresentar algumas perspectivas de novas ideias e trabalhos.

Violação de Lorentz: no contexto da quebra espontânea, destacamos a perspectiva de incorporar as flutuações de Bumblebee em outros cenários, especialmente na cosmologia. Uma questão intrigante surge: se a natureza de fato viola a simetria de Lorentz, por que ainda não observamos tal fenômeno? Uma possível explicação é que, devido a algum mecanismo, essa violação pode ter decaído ao longo de uma era cosmológica. Portanto, consideramos relevante explorar as flutuações de Bumblebee durante essas eras cosmológicas, como no período inflacionário.

Altas-curvatura: neste contexto, existem inúmeras possibilidades de contribuições significativas. Como mencionado ao longo do texto, a Relatividade Geral é uma teoria que possui poucos parâmetros, gerando a sensação, após experimentos, de que é “tudo ou nada”. Portanto, consideramos crucial explorar essa teoria além de seus limites. O estudo de modelos que introduzem novos invariantes parece ser uma abordagem natural. Especificamente, os termos cúbicos desempenham um papel importante em $D = 4$, uma vez que, ao impor certas condições previamente mencionadas, como compatibilidade espectral com a RG, o próximo termo relevante é exatamente esse. Portanto, explorar essas teorias em diferentes contextos,

especialmente na física dos buracos negros com geometrias mais realísticas, é bastante interessante

REFERÊNCIAS

- [1] EINSTEIN, A. The Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- [2] RUBIN, V. C.; JR, W. K. F. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophysical Journal*, vol. 159, p. 379, v. 159, p. 379, 1970.
- [3] PERLMUTTER, S.; SCHMIDT, B. P. Measuring cosmology with supernovae. *Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, Springer, p. 195–217, 2003.
- [4] RIESS, A. G. *et al.* The rise time of nearby type ia supernovae. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 118, n. 6, p. 2675, 1999.
- [5] RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P. Supernova search team. *Astron. J*, v. 116, p. 1009, 1998.
- [6] WITTEN, E. String theory dynamics in various dimensions. *Nucl. Phys. B*, v. 443, p. 85–126, 1995.
- [7] HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009.
- [8] ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- [9] CRISPINO, L. C.; KENNEFICK, D. J. A hundred years of the first experimental test of general relativity. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 15, n. 5, p. 416–419, 2019.
- [10] POUND, R. V.; JR, G. A. R. Apparent weight of photons. *Physical review letters*, APS, v. 4, n. 7, p. 337, 1960.
- [11] BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961.
- [12] MATTHEWS, T. A.; SANDAGE, A. R. Optical identification of 3c 48, 3c 196, and 3c 286 with stellar objects. *Astrophysical Journal*, vol. 138, p. 30, v. 138, p. 30, 1963.
- [13] WILL, C. M. *Theory and experiment in gravitational physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2018.
- [14] PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, APS, v. 14, n. 3, p. 57, 1965.

- [15] HAWKING, S. W. The occurrence of singularities in cosmology. . causality and singularities. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 300, n. 1461, p. 187–201, 1967.
- [16] BOJOWALD, M. Singularities and quantum gravity. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2007. v. 910, n. 1, p. 294–333.
- [17] AKRAMI, Y. *et al. Modified Gravity and Cosmology: An Update by the CANTATA Network*. [S.l.]: Springer, 2021. ISBN 978-3-030-83714-3, 978-3-030-83717-4, 978-3-030-83715-0.
- [18] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [19] ORTÍN, T. *Gravity and strings*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [20] KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [21] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, 1926.
- [22] NORDSTRÖM, G. Über die möglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. *Physikalische Zeitschrift*, v. 15, p. 504 – 506, 2007.
- [23] POLCHINSKI, J. *String theory*. [S.l.: s.n.], 2005.
- [24] VENEZIANO, G. Construction of a crossing-symmetric, regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 57, p. 190–197, 1968.
- [25] HORAHA, P.; WITTEN, E. Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys. B*, v. 475, p. 94–114, 1996.
- [26] HOROWITZ, G. T.; STROMINGER, A. Black strings and p-branes. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 360, n. 1, p. 197–209, 1991.
- [27] POLCHINSKI, J. Dirichlet branes and ramond-ramond charges. *Physical Review Letters*, APS, v. 75, n. 26, p. 4724, 1995.
- [28] RUBAKOV, V.; SHAPOSHNIKOV, M. Do we live inside a domain wall? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 125, n. 2-3, p. 136–138, 1983.
- [29] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, 1998.
- [30] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, APS, v. 83, n. 17, p. 3370, 1999.

- [31] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 23, p. 4690, 1999.
- [32] HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, p. 363–384, 1974.
- [33] RHAM, C. D.; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. J. Resummation of massive gravity. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 23, p. 231101, 2011.
- [34] AKRAMI, Y. *et al.* Neutron star merger gw170817 strongly constrains doubly coupled bigravity. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 12, p. 124010, 2018.
- [35] SÁEZ, R. L.; BAÑOS, M. O.; SALZANO, V. *f(r)* gravity modifications: from the action to the data. Springer, 2018.
- [36] FERNANDES, P. G. *et al.* The 4d einstein–gauss–bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 39, n. 6, p. 063001, 2022.
- [37] LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 12, n. 3, p. 498–501, 1971.
- [38] ORTÍN, T. *Gravity and Strings*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [39] D’INVERNO, R. *Introducing Einstein’s relativity, part C*. [S.l.]: Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [40] LAZKOZ, R. *et al.* Observational constraints of $f(Q)$ gravity. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 10, p. 104027, 2019.
- [41] TRAUTMAN, A. *Einstein-cartan theory*. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0606062>. Acesso em: 12 mar. 2024.
- [42] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation* wh freeman and co. *San Francisco*, v. 660, 1973.
- [43] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [44] KIEFER, C. T. *Padmanabhan: Gravitation, Foundations and frontiers: Cambridge University Press, 2010, 728p., GBP50. 00, USD85. 00, ISBN-13: 9780521882231, ISBN-10: 0521882230*. [S.l.]: Springer, 2011.
- [45] HIGGS, P. W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, p. 508–509, 1964.

- [46] CHRISTENSON, J. H. *et al.* Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, p. 138–140, 1964.
- [47] CARROLL, S. M. *et al.* Noncommutative field theory and lorentz violation. *Physical Review Letters*, APS, v. 87, n. 14, p. 141601, 2001.
- [48] HOŘAVA, P. Membranes at quantum criticality. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 03, p. 020, 2009.
- [49] GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum space-time. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- [50] AMELINO-CAMELIA, G. Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues. *Symmetry*, v. 2, p. 230–271, 2010.
- [51] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [52] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- [53] KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Cpt and strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 359, n. 2-3, p. 545–570, 1991.
- [54] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [55] KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004.
- [56] SILVA, J. E. G. d.; ALMEIDA, C. A. S. d. Gravitational lorentz violating effects through a finsler geometry of bipartite type. 2013.
- [57] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. *Phys. Rev. D*, v. 71, p. 065008, 2005.
- [58] BELICH, H. *et al.* Violação da simetria de lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 57–64, 2007.
- [59] BLUHM, R. *et al.* Constraints and stability in vector theories with spontaneous lorentz violation. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 12, p. 125007, 2008.
- [60] ALTSCHUL, B.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz violation and nonpolynomial interactions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 628, n. 1-2, p. 106–112, 2005.

- [61] BERTOLAMI, O.; PARAMOS, J. Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous lorentz symmetry breaking. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 4, p. 044001, 2005.
- [62] CASANA, R. *et al.* Exact schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [63] MALUF, R.; NEVES, J. C. Black holes with a cosmological constant in bumblebee gravity. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 4, p. 044002, 2021.
- [64] ÖVGÜN, A.; JUSUFI, K.; SAKALLI, İ. Exact traversable wormhole solution in bumblebee gravity. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 2, p. 024042, 2019.
- [65] CAPELO, D.; PÁRAMOS, J. Cosmological implications of bumblebee vector models. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 10, p. 104007, 2015.
- [66] LESSA, L. *et al.* Modified black hole solution with a background kalb–ramond field. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, p. 1–9, 2020.
- [67] NAMBU, Y. Axial vector current conservation in weak interactions. *Physical Review Letters*, APS, v. 4, n. 7, p. 380, 1960.
- [68] GOLDSTONE, J. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 19, p. 154–164, 1961.
- [69] HIGGS, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, v. 12, p. 132–133, 1964.
- [70] BLUHM, R.; FUNG, S.-H.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 6, p. 065020, 2008.
- [71] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. *Physical Review D*, APS, v. 40, n. 6, p. 1886, 1989.
- [72] PERCACCI, R. The higgs phenomenon in quantum gravity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 353, n. 1, p. 271–290, 1991.
- [73] LESSA, L. A.; SILVA, J.; ALMEIDA, C. A. S. The bumblebee field excitations in a cosmological braneworld. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 141, n. 2, p. 29001, 2023.
- [74] KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 504, n. 1-2, p. 38–46, 2001.

- [75] CARROLL, S. M.; TAM, H. Aether compactification. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 4, p. 044047, 2008.
- [76] LESSA, L.; SILVA, J. Einstein–bumblebee-dilaton black hole solution. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 83, n. 11, p. 1035, 2023.
- [77] ZHANG, C.-Y. *et al.* Dynamical scalarization in einstein-maxwell-dilaton theory. *Physical Review D*, APS, v. 105, n. 2, p. 024073, 2022.
- [78] CAI, R.-G.; WANG, A. Nonasymptotically ads/ds solutions and their higher dimensional origins. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 8, p. 084042, 2004.
- [79] CAI, R.-G.; JI, J.-Y.; SOH, K.-S. Topological dilaton black holes. *Physical Review D*, APS, v. 57, n. 10, p. 6547, 1998.
- [80] CASANA, R. *et al.* Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [81] AGHANIM, N. *et al.* Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.
- [82] CHAN, K. C.; HORNE, J. H.; MANN, R. B. Charged dilaton black holes with unusual asymptotics. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 447, n. 2-3, p. 441–461, 1995.
- [83] BROWN, J. D.; YORK, J. W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 47, p. 1407–1419, Feb 1993. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.1407>.
- [84] HAWKING, S. W.; HOROWITZ, G. T. The gravitational hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 13, n. 6, p. 1487, 1996.
- [85] SCHERK, J.; SCHWARZ, J. H. How to get masses from extra dimensions. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 153, p. 61–88, 1979.
- [86] CHAMBLIN, A. *et al.* Charged ads black holes and catastrophic holography. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 6, p. 064018, 1999.
- [87] ZANGENEH, M. K.; SHEYKHI, A.; DEHGHANI, M. Thermodynamics of higher dimensional topological dilation black holes with a power-law maxwell field. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 4, p. 044035, 2015.
- [88] LESSA, L. A.; SILVA, J. E. G. Einstein-Bumblebee-Dilaton black hole in Lifshitz spacetimes. 9 2023.
- [89] MALDACENA, J. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999.

- [90] WITTEN, E. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 2, p. 505–532, 1998.
- [91] KARCH, A.; KATZ, E. Adding flavor to AdS / CFT. *JHEP*, v. 06, p. 043, 2002.
- [92] SON, D. T.; STARINETS, A. O. Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications. *JHEP*, v. 09, p. 042, 2002.
- [93] HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Holographic Superconductors. *JHEP*, v. 12, p. 015, 2008.
- [94] BALASUBRAMANIAN, K.; MCGREEVY, J. Gravity duals for nonrelativistic conformal field theories. *Physical Review Letters*, APS, v. 101, n. 6, p. 061601, 2008.
- [95] KACHRU, S.; LIU, X.; MULLIGAN, M. Gravity duals of lifshitz-like fixed points. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 10, p. 106005, 2008.
- [96] MANN, R. B. Lifshitz Topological Black Holes. *JHEP*, v. 06, p. 075, 2009.
- [97] SON, D. T. Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 046003, 2008.
- [98] GUICA, M. *et al.* Holography for schrödinger backgrounds. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2011, n. 2, p. 1–63, 2011.
- [99] TAYLOR, M. Non-relativistic holography. *arXiv preprint arXiv:0812.0530*, 2008.
- [100] DANIELSSON, U. H.; THORLACIUS, L. Black holes in asymptotically Lifshitz spacetime. *JHEP*, v. 03, p. 070, 2009.
- [101] BERTOLDI, G.; BURRINGTON, B. A.; PEET, A. Black Holes in asymptotically Lifshitz spacetimes with arbitrary critical exponent. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 126003, 2009.
- [102] TARRIO, J.; VANDOREN, S. Black holes and black branes in lifshitz spacetimes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2011, n. 9, p. 1–27, 2011.
- [103] ALISHAHIHA, M.; COLGAIN, E. O.; YAVARTANOO, H. Charged Black Branes with Hyperscaling Violating Factor. *JHEP*, v. 11, p. 137, 2012.
- [104] LI, L. Hyperscaling Violating Solutions in Generalised EMD Theory. *Phys. Lett. B*, v. 767, p. 278–284, 2017.
- [105] ZANGENEH, M. K.; SHEYKHI, A.; DEHGHANI, M. Thermodynamics of topological nonlinear charged lifshitz black holes. *Physical Review D*, APS, v. 92, n. 2, p. 024050, 2015.
- [106] ACENA, A. *et al.* Hairy planar black holes in higher dimensions. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2014, n. 1, p. 1–21, 2014.

- [107] ANABALÓN, A. *et al.* Hairy black holes and duality in an extended supergravity model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 4, p. 1–32, 2018.
- [108] HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 87, p. 577–588, 1983.
- [109] KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. P- v criticality of charged ads black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 1–25, 2012.
- [110] DAYYANI, Z.; SHEYKHI, A. Critical behavior of lifshitz dilaton black holes. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 10, p. 104026, 2018.
- [111] KUBIZNAK, D.; MANN, R. B.; TEO, M. Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda. *Class. Quant. Grav.*, v. 34, n. 6, p. 063001, 2017.
- [112] KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 19, p. 195011, 2009.
- [113] DOLAN, B. P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 12, p. 125020, 2011.
- [114] DEGHANI, M.; SHEYKHI, A.; DAYYANI, Z. Critical behavior of born-infeld dilaton black holes. *Physical Review D*, APS, v. 93, n. 2, p. 024022, 2016.
- [115] DAYYANI, Z. *et al.* Critical behavior and phase transition of dilaton black holes with nonlinear electrodynamics. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, p. 1–19, 2018.
- [116] CHAMBLIN, A. *et al.* Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged ads black holes. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 10, p. 104026, 1999.
- [117] WEYL, H. A new extension of the theory of relativity. *Ann. Phys*, v. 59, p. 101, 1919.
- [118] EDDINGTON, A. S. *The mathematical theory of relativity*. [S.l.]: The University Press, 1923.
- [119] STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, APS, v. 16, n. 4, p. 953, 1977.
- [120] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- [121] VILKOVISKY, G. Effective action in quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 9, n. 4, p. 895, 1992.
- [122] UTIYAMA, R.; DEWITT, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 3, n. 4, p. 608–618, 1962.

- [123] BUCHBINDER, I. L.; ODINTSOV, S.; SHAPIRO, L. *Effective action in quantum gravity*. [S.l.]: CRC Press, 1992.
- [124] STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980.
- [125] RESCO, M. A. *et al.* On neutron stars in $f(R)$ theories: Small radii, large masses and large energy emitted in a merger. *Physics of the dark universe*, Elsevier, v. 13, p. 147–161, 2016.
- [126] SHAHID-SALESS, B. Curvature-squared cosmology in the first-order formalism. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 31, n. 10, p. 2429–2433, 1990.
- [127] TRODDEN, M.; MUKHANOV, V. F.; BRANDENBERGER, R. H. A nonsingular two dimensional black hole. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 316, n. 4, p. 483–487, 1993.
- [128] ALVAREZ-GAUME, L. *et al.* Aspects of quadratic gravity. *Fortschritte der Physik*, Wiley Online Library, v. 64, n. 2-3, p. 176–189, 2016.
- [129] SPERGEL, D. N. *et al.* Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: implications for cosmology. *The astrophysical journal supplement series*, IOP Publishing, v. 170, n. 2, p. 377, 2007.
- [130] PETROV, A.; NASCIMENTO, J. R.; PORFIRIO, P. *Introduction to Modified Gravity*. [S.l.]: Springer, 2020. (SpringerBriefs in Physics). ISBN 978-3-031-46633-5, 978-3-031-46634-2, 978-3-030-52861-4, 978-3-030-52862-1.
- [131] HOOFT, G. t; VELTMAN, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. In: *Annales de l'IHP Physique théorique*. [S.l.: s.n.], 1974. v. 20, n. 1, p. 69–94.
- [132] PETROV, A. *Introduction to modified gravity*. [S.l.]: Springer Nature, 2020.
- [133] DAVIES, P. *et al.* Energy-momentum tensor of a massless scalar quantum field in a robertson-walker universe. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 109, n. 1, p. 108–142, 1977.
- [134] DOLGOV, A. D.; KAWASAKI, M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 573, p. 1–4, 2003.
- [135] COGNOLA, G. *et al.* One-loop $f(R)$ gravity in de sitter universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2005, n. 02, p. 010, 2005.
- [136] HAWKING, S. W.; HERTOOG, T. Living with ghosts. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 10, p. 103515, 2002.

- [137] CODELLO, A.; PERCACCI, R. Fixed points of higher-derivative gravity. *Physical Review Letters*, APS, v. 97, n. 22, p. 221301, 2006.
- [138] DEDEO, S.; PSALTIS, D. Stable, accelerating universes in modified-gravity theories. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 6, p. 064013, 2008.
- [139] GARRAFFO, C.; GIRIBET, G. The Lovelock Black Holes. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 23, p. 1801–1818, 2008.
- [140] WANG, P. *et al.* Derive lovelock gravity from string theory in cosmological background. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2021, n. 5, p. 1–8, 2021.
- [141] KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Lovelock branes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 34, n. 19, p. 195005, 2017.
- [142] MYERS, R. C.; ROBINSON, B. Black Holes in Quasi-topological Gravity. *JHEP*, v. 08, p. 067, 2010.
- [143] HENNIGAR, R. A.; KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B. Generalized quasitopological gravity. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 10, p. 104042, 2017.
- [144] BUENO, P.; CANO, P. A. Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 104005, 2016.
- [145] FAN, Z.-Y.; WANG, X. Construction of regular black holes in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 12, p. 124027, 2016.
- [146] SINGH, B.; SINGH, R. Thermodynamics of regular black holes inspired by noncommutative geometry journal of physics: Conference series. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2021. v. 1947, n. 1, p. 012010.
- [147] AYÓN-BEATO, E.; GARCIA, A. The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 493, n. 1-2, p. 149–152, 2000.
- [148] HAYWARD, S. A. Formation and evaporation of nonsingular black holes. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 3, p. 031103, 2006.
- [149] TSUDA, R.; SUZUKI, R.; TOMIZAWA, S. Existence conditions of nonsingular dyonic black holes in nonlinear electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:2308.02146*, 2023.
- [150] BUENO, P.; CANO, P. A. Four-dimensional black holes in einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 12, p. 124051, 2016.
- [151] WALD, R. M. Black hole entropy is the noether charge. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 8, p. R3427, 1993.

- [152] IYER, V.; WALD, R. M. Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical review D*, APS, v. 50, n. 2, p. 846, 1994.
- [153] BUENO, P.; CANO, P. A.; RUIPÉREZ, A. Holographic studies of einsteinian cubic gravity. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 3, p. 1–58, 2018.
- [154] LESSA, L. A. *et al.* Braneworlds in cubic gravity. 12 2023.
- [155] WOODARD, R. P. Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, v. 10, n. 8, p. 32243, 2015.
- [156] SILVA, J. E. G. *et al.* Braneworlds in $f(Q)$ gravity. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 2, p. 024033, 2022.
- [157] XU, N. *et al.* Multikink brane in Gauss-Bonnet gravity and its stability. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 12, p. 124011, 2023.
- [158] DANTAS, D. M. *et al.* Fermionic Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 10, p. 104007, 2015.
- [159] MARTÍN-GARCÍA, J. M. *xAct: efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language*. Disponível em: <http://www.xact.es/>. Acesso em: 12 mar. 2024.

APÊNDICE A – REDUÇÃO DIMENSIONAL BUMBLEBEE

Neste apêndice, discutimos inicialmente como a redução dimensional de Kaluza-Klein modifica as equações do modelo KS (Kostelecky-Samuel) [70]. Iniciamos com a ação KS em (D+d) dimensões dada por

$$S_{KS} = \int d^{D+d}x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa_{D+d}^2} - \frac{1}{4}B_2^2 - \frac{\lambda}{2}(B^M B_M \pm b^2)^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

onde $\kappa_{D+d}^2 = 8\pi G_{D+d}$ com G_{D+d} sendo a constante gravitacional de Newton em (D+d) dimensões, o \tilde{g} e o \tilde{R} são o determinante métrico e o escalar de curvatura, respectivamente, em (D+d) dimensões. Temos também um 2-form definido por $B_2 := \frac{1}{2}B_{MN}dx^M \wedge dx^N$, onde $B_{MN} = \partial_{[M}B_{N]}$ e B_M é conhecido como campo Bumblebee. O potencial quadrático escolhido induz a violação espontânea da simetria de Lorentz, onde λ é uma constante de acoplamento auto-interativa positiva de dimensão de massa um, b^2 é uma constante positiva com dimensão de massa ao quadrado e o sinal \pm indica se b_M é do tipo espaço ou tempo. Além disso, a condição de vácuo $V = 0$ implica a existência de um valor de expectativa do vácuo $\langle B_M \rangle = b_M$ na forma

$$g^{MN}b_M b_N = \mp b^2. \quad (\text{A.2})$$

Observe que a compensação entre o VEV e a curvatura do espaço-tempo é sentida a partir da Eq. (A.2), de modo que podemos determinar os componentes do vetor de fundo b_μ conhecendo o espaço-tempo que nos interessa. Nós vimos antes como um VEV do tipo espaço modifica objetos gravitacionais com simetria esférica e estática, como buracos negros.

Agora, para realizar a redução dimensional da ação (A.1), adotamos o seguinte elemento de linha

$$ds_{D+d}^2 = e^{2\alpha(x)} ds_D^2 + e^{2\beta(x)} ds_d^2, \quad (\text{A.3})$$

onde $ds_d^2 = \delta_{ij}dy^i dy^j$ é um espaço euclidiano plano d-dimensional, ou seja, a curvatura escalar se anula, e os α e β são funções da coordenada x do subespaço descrito por ds_D^2 . Note que este elemento de linha é o mesmo introduzido na parte I desta tese na Eq.(1.4). Para realizar a redução dimensional da ação (A.1) na direção das coordenadas x e para que a teoria compactificada também seja escrita no quadro de Einstein, assumimos que $\beta = \frac{(2-D)\alpha}{d}$. Assim, a ação

KS em D dimensões na direção da coordenada x é dada por

$$S_{KS} = \mathcal{V} \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa_{D+d}^2} \left(R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \right) - \frac{e^{2\tilde{a}\phi}}{4} B_2^2 - \frac{\lambda e^{2\tilde{a}\phi}}{2} (B^M B_M - b^2)^2 \right], \quad (\text{A.4})$$

onde \mathcal{V} é o volume do subespaço descrito por ds_d^2 . Além disso, o R e o $\sqrt{-g}$ são as quantidades definidas em ds_D^2 . Note que a ação acima está no quadro de Einstein conforme. O campo escalar ϕ é obtido através da seguinte definição

$$\alpha^2 = \left(\frac{d}{2(D-2)(D+d-2)} \right) \phi^2 \quad (\text{A.5})$$

e o parâmetro $\tilde{a}^2 = \frac{d}{2(D-2)(D+d-2)}$ é a constante de acoplamento entre os campos e o campo escalar, conhecido como campo dilaton. Observe também que não levamos em conta os graus de liberdade do vetor na Eq. (A.3). Além disso, a redução de KK da gravidade pura $(D+1)$ -dimensional, ou seja, $d = 1$, fixa a constante de acoplamento da seguinte forma

$$\tilde{a}_{kk}^2 = \frac{1}{2(D-2)(D+1)}. \quad (\text{A.6})$$

Um caso interessante que abordaremos posteriormente é quando $D = 4$.

**APÊNDICE B – EQUAÇÃO PERTURBADA PARA O BURACO NEGRO
MAGNETICAMENTE CARREGADO NA TEORIA CÚBICA
EINSTEINIANA**

A equação perturbada (3.57) pode ser escrita como

$$h''(r) + \gamma(r)h'(r) + \omega^2(r)h(r) = j(r) \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(r) = & \frac{1}{r \left(q^a + r^a \right) \left((b-3)q^a - 3r^a \right) \left(r \left(q^a + r^a \right)^{b/a} - 2GMr^b \right)} \times \left[q^a r^a \left(2GM(ab+b-6)r^b \right. \right. \\ & - r((a+5)b-12) \left(q^a + r^a \right)^{b/a} + 6r^{2a} \left(r \left(q^a + r^a \right)^{b/a} - GMr^b \right) + (b-3)q^{2a} \left((b-2)r \left(q^a + r^a \right)^{b/a} \right. \\ & \left. \left. + 2GMr^b \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \omega^2(r) = & \frac{1}{24G^3\lambda M \left(q^b + r^b \right)^2 \left((a-3)q^b - 3r^b \right) \left(2GMr^a - r \left(q^b + r^b \right)^{a/b} \right)} \left[r^{-a-2} \left(-3q^{2b}r^b \right. \right. \\ & \times \left(a^2 - a(b+8) + 9 \right) r^{a+1} \left(q^b + r^b \right)^{a/b} + 16G^4\lambda M^2 \left(a^2(b+8) - a(5b+42) + 42 \right) r^{2a} \\ & + r^6 \left(q^b + r^b \right)^{\frac{2a}{b}} + q^{3b} \left(48 \left(a^2 - 4a + 3 \right) G^3\lambda M r^{a+1} \left(q^b + r^b \right)^{a/b} + 48 \left(a^3 - 8a^2 \right) G^4\lambda M^2 r^{2a} \right. \\ & + 48 \left(21a - 14 \right) G^4\lambda M^2 r^{2a} - r^6 \left(q^b + r^b \right)^{\frac{2a}{b}} \left. \right) - 3q^b r^{2b} \left(16G^3\lambda M(a(b+4) - 9) r^{a+1} \left(q^b + r^b \right)^{a/b} \right. \\ & + r^6 \left(q^b + r^b \right)^{\frac{2a}{b}} - 16G^4\lambda M^2(a(5b+21) - 42) r^{2a} \left. \right) - r^{3b} \left(-144G^3\lambda M r^{a+1} \left(q^b + r^b \right)^{a/b} \right. \\ & \left. \left. + r^6 \left(q^b + r^b \right)^{\frac{2a}{b}} + 672G^4\lambda M^2 r^{2a} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e

$$\begin{aligned}
j(r) = & -\frac{1}{72G^3\lambda M\left((a-3)q^b - 3r^b\right)\left(2GMr^a - r\left(q^b + r^b\right)^{a/b}\right)} \left[r^{-a-3}\left(q^b + r^b\right)^{-\frac{a}{b}-2} \right. \\
& \times \left(-3q^{2b}r^b\left(96G^5\lambda M^3\left(a^2(b+5) - 3a(b+8) + 23\right)r^{3a} - 48(a-3)G^4\lambda M^2(a(b+7) - 9) \right. \right. \\
& \times r^{2a+1}\left(q^b + r^b\right)^{a/b} + q^{3b}\left(96\left(2a^3 - 15a^2 + 36a - 23\right)G^5\lambda M^3r^{3a} - 144(a-3)^2(a-1)G^4\lambda M^2 \right. \\
& \times r^{2a+1}\left(q^b + r^b\right)^{a/b} + 3q^br^{2b}\left(-144G^4\lambda M^2(a(b+5) - 9)r^{2a+1}\left(q^b + r^b\right)^{a/b} \right. \\
& \left. \left. \left. + 96G^5\lambda M^3(3a(b+4) - 23)r^{3a}\right) + r^{3b}\left(1296G^4\lambda M^2r^{2a+1}\left(q^b + r^b\right)^{a/b} - 2208G^5\lambda M^3r^{3a}\right) \right) \right] \\
& \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Observe que no caso limite $q = 0$, recuperamos a equação homogênea obtida pela Ref. [150]. Como já mencionado no texto, é fácil mostrar que para o limite de r grande (limite assintótico) os coeficientes $\gamma(r)$ e $\omega^2(r)$ coincidem com os obtidos em Ref.[150]. Porém, no limite de r pequeno (próximo à origem), é necessário especificar de qual eletrodinâmica não linear estamos tratando. Para o caso Bardeen, obtemos que os termos líderes na origem são dados pela Eq. (3.67) e (3.68). Por outro lado, no caso Hayward com $a = b = 3$, os coeficientes são dados por (3.72) e (3.73). Finalmente, no caso de $a = 3$ e $b = 1$, eles são dados por (3.78) e (3.79).

APÊNDICE C - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA A GRAVIDADE CÚBICA NO CONTEXTO DE MUNDO-BRANA

Nesse apêndice, nós fornecemos as expressões explícitas para o tensor H_{MN} na Eq. (3.105) que corresponde ao caso da gravidade cúbica, definido como

$$H_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{g_5}} \frac{\delta(\sqrt{-g_5 P})}{\delta g^{MN}}, \quad (\text{C.1})$$

onde P é definido na Eq. (3.100). Para aumentar a clareza, dividimos a apresentação em oito partes distintas:

$$H_{AB} \equiv H_{AB}^{(1)} + H_{AB}^{(2)} + H_{AB}^{(3)} + H_{AB}^{(4)} + H_{AB}^{(5)} + H_{AB}^{(6)} + H_{AB}^{(7)} + H_{AB}^{(8)}. \quad (\text{C.2})$$

Para derivar cada termo mencionado acima, empregamos o conjunto XACT de pacotes MATHEMATICA para cálculos algébricos [159]. Os resultados detalhados são descritos abaixo:

$$\begin{aligned} H_{AB}^{(1)} = \frac{1}{2} \beta_1 \left\{ -3R^{FG} (4R_A^H B^J R_{FHGJ} - (3R_{AFB}^H + R_A^H B_F) R_G^J H_J) + 2 \left[-g^{(5)AB} R_F^L H^M R^{FGHJ} R_{GLJM} \right. \right. \\ + 3R_A^{FGH} (3R_{BG}^{JL} R_{FJHL} + 2R_B^J G^L (R_{FJHL} + R_{FLHJ}) + R_B^J F^L R_{GJHL} - 2R_{BGF}^J R_H^L J_L) \\ + 6D_B R_{FG} D^G R_A^F - 6D_F R_{BG} D^G R_A^F + 6D_A R_{FG} D^G R_B^F - 3R_{AFBG} D^G D^F R + 6R_{AFBG} D_H D^H R^{FG} \\ - 6D_G R_{AFBH} D^H R^{FG} - 6D_G R_{AHBF} D^H R^{FG} + 12D_H R_{AFBG} D^H R^{FG} + 6R_{BFGH} D^H D_A R^{FG} \\ + 6R_{AFGH} D^H D_B R^{FG} - 6R_{BFGH} D^H D^G R_A^F - 6R_{AFGH} D^H D^G R_B^F + 6R^{FGHJ} D_J D_G R_{AFBH} \\ \left. \left. - 6D_H R_{BGFJ} D^J R_A^{FGH} \right] \right\}, \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{AB}^{(2)} = \beta_2 \left\{ -24R^{FG} (R_A^H F^J R_{BGHJ} + R_{AF}^{HJ} R_{BHGJ}) + 24R_B^F R_A^{GHJ} R_{FHGJ} + 24R_A^F R_B^{GHJ} R_{FHGJ} \right. \\ + 6R_A^{FGH} R_{BG}^{JL} R_{FHJL} + 24R_A^{FGH} R_B^J G^L R_{FJHL} - 12R_A^{FGH} R_B^J G^H R_F^L J_L - 6R_A^{FGH} R_{BF}^{JL} R_{GHJL} \\ + 6R_A^{FGH} R_B^J F^L R_{GHJL} + g^{(5)AB} R_{FG}^{LM} R^{FGHJ} R_{HJLM} + 24D_F R_{BG} D^G R_A^F - 24D_G R_{BF} D^G R_A^F \\ \left. - 24R_{BGFH} D^H D^G R_A^F - 24R_{AGFH} D^H D^G R_B^F - 12D_F R_{BJGH} D^J R_A^{FGH} \right\}, \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(3)} = & -\frac{1}{2}\beta_3 \left\{ 4R^{FG}R_{AF}{}^{HJ}R_{BGHJ} + 4R^{FG}R_A{}^H{}_F{}^J R_{BGHJ} + 4R^{FG}R_{AF}{}^{HJ}R_{BHGJ} + 8R^{FG}R_A{}^H{}_F{}^J R_{BHGJ} \right. \\
& - 8R^{FG}R_A{}^H{}_F{}^J R_{BJGH} - 8R^{FG}R_A{}^H{}_B{}^J R_{FHGJ} + 2R_A{}^{FGH}R_{BG}{}^{JL}R_{FHJL} + 8R_A{}^{FGH}R_B{}^J{}_G{}^L R_{FJHL} \\
& - 2R_A{}^{FGH}R_B{}^J{}_J{}^L R_{FLGH} + 2R_A{}^F{}_F{}^G R_B{}^{HJL}R_{GHJL} + 2R_A{}^{FGH}R_B{}^J{}_F{}^L R_{GHJL} + 4R^{FG}R_{AFB}{}^H R_G{}^J{}_{HJ} \\
& + 4R^{FG}R_A{}^H{}_BF R_G{}^J{}_{HJ} - 4g^{(5)}{}_{AB}R_F{}^L{}_H{}^M R^{FGHJ}R_{GLJM} - g^{(5)}{}_{AB}R_{FG}{}^{LM}R^{FGHJ}R_{HJLM} - 2D_A R_{BF}D^F R \\
& - 2D_B R_{AF}D^F R + 4D_F R_{AB}D^F R - 2R_{BF}D^F D_A R - 2R_{AF}D^F D_B R - 4R^{FG}D_G D_A R_{BF} \\
& + 2R^{FGHJ}D_G D_A R_{BFHJ} - 4R^{FG}D_G D_B R_{AF} + 2R^{FGHJ}D_G D_B R_{AFHJ} + 8R^{FG}D_G D_F R_{AB} \\
& + 4R_A{}^F \left(R^{GH}R_{BGFH} + R_F{}^G R_B{}^H{}_{GH} - 4R_B{}^G R_F{}^H{}_{GH} + D_G D^G R_{BF} \right) \\
& + 4R_B{}^F \left(R^{GH}R_{AGFH} + R_F{}^G R_A{}^H{}_{GH} + D_G D^G R_{AF} \right) - 4D_B R_{FG}D^G R_A{}^F \\
& - 8D_F R_{BG}D^G R_A{}^F + 16D_G R_{BF}D^G R_A{}^F - 4D_A R_{FG}D^G R_B{}^F + 2R_{AFBG}D^G D^F R \\
& + 2R_{AGBF}D^G D^F R + 4D_A R_{BFGH}D^H R^{FG} + 4D_B R_{AFGH}D^H R^{FG} + 4D_G R_{AFBH}D^H R^{FG} \\
& + 4D_G R_{AHBF}D^H R^{FG} + 4R_{BFGH}D^H D_A R^{FG} + 4R_{AFGH}D^H D_B R^{FG} + 4R_{BFGH}D^H D^G R_A{}^F \\
& + 4R_{BGFH}D^H D^G R_A{}^F + 4R_{AFGH}D^H D^G R_B{}^F + 4R_{AGFH}D^H D^G R_B{}^F \\
& + 8g^{(5)}{}_{AB}R^{FGHJ}D_J D_G R_F{}^L{}_{HL} + 2R_B{}^{FGH}D_J D^J R_{AFGH} + 2R_A{}^{FGH}D_J D^J R_{BFGH} \\
& + 2D_B R_{FJGH}D^J R_A{}^{FGH} + 4D_J R_{BFGH}D^J R_A{}^{FGH} + 2D_A R_{FJGH}D^J R_B{}^{FGH} \\
& \left. - 4g^{(5)}{}_{AB}D_H R_G{}^L{}_{JL}D^J R_F{}^G{}_{F^H} + 4g^{(5)}{}_{AB}D_J R_G{}^L{}_{HL}D^J R_F{}^G{}_{F^H} + g^{(5)}{}_{AB}D_L R_{FGHJ}D^L R^{FGHJ} \right\}, \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(4)} = & \beta_4 \left\{ -8R^{FG}R R_{AFBG} + 2R_B{}^F R R_A{}^G{}_{FG} - 4R R_A{}^{FGH}R_{BFGH} + 6R_A{}^F R R_B{}^G{}_{FG} - 2R_{AB}R_{FGHJ}R^{FGHJ} \right. \\
& + g^{(5)}{}_{AB}R R_{FGHJ}R^{FGHJ} + 16g^{(5)}{}_{AB}R_F{}^L{}_H{}^M R^{FGHJ}R_{GLJM} + 4g^{(5)}{}_{AB}R_{FG}{}^{LM}R^{FGHJ}R_{HJLM} \\
& - 8g^{(5)}{}_{AB}R^{FG}{}_F{}^H R_G{}^{JLM}R_{HJLM} + 4D_A R^{FGHJ}D_B R_{FGHJ} + 4R D_B D_A R + 4R^{FGHJ}D_B D_A R_{FGHJ} \\
& - 8R D_F D^F R_{AB} + 8D_A R_{BF}D^F R + 8D_B R_{AF}D^F R - 16D_F R_{AB}D^F R - 4R_{AFBG}D^G D^F R \\
& \left. - 4R_{AGBF}D^G D^F R - 16g^{(5)}{}_{AB}R^{FGHJ}D_J D_G R_F{}^L{}_{HL} - 4g^{(5)}{}_{AB}D_L R_{FGHJ}D^L R^{FGHJ} \right\}, \tag{C.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(5)} = & -\frac{1}{2}\beta_5 \left\{ 8R_F^H R^{FG} R_{AGBH} + 4R_B^F R^{GH} R_{AGFH} - 4R^{FG} R_A^H R^J R_{BFGJ} + 4R_A^F R^{GH} R_{BGFH} \right. \\
& + 4R^{FG} R_A^H R^J R_{BGHJ} + 4R^{FG} R_{AF}^{HJ} R_{BHGJ} - 8R^{FG} R_A^H R^J R_{BJGH} + 4R^{FG} R_{AFG}^H R_B^J R_{HJ} \\
& + 8R^{FG} R_A^H R^J R_{FHGJ} - 4R_A^F R_B^G R_F^H R_{GH} + 4g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H R_G^J R^L R_H^M R_{LM} \\
& + 2g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H R_G^J R^L R_J^M R_{LM} - 8D_A R^{FG} D_B R_{FG} - D_A R D_B R - 8R^{FG} D_B D_A R_{FG} \\
& + 4D_F R_{AB} D^F R - 2R_{BF} D^F D_A R - 2R_{AF} D^F D_B R + 4R^{FG} D_G D_A R_{BF} \\
& + 4R^{FG} D_G D_B R_{AF} + 4R^{FG} D_G D_F R_{AB} + 4D_B R_{FG} D^G R_A^F - 4D_F R_{BG} D^G R_A^F \\
& + 4D_A R_{FG} D^G R_B^F - 2g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H D_H D_G R^{JL} R_{JL} + 4R_{AFBG} D_H D^H R^{FG} \\
& + 4R^{FG} D_H D^H R_{AFBG} + 2R_{AB} D_H D^H R^{FG} R_{FG} + 4D_A R_{BFGH} D^H R^{FG} \\
& + 4D_B R_{AFGH} D^H R^{FG} + 8D_H R_{AFBG} D^H R^{FG} + 4R_{BFGH} D^H D_A R^{FG} \\
& + 4R_{AFGH} D^H D_B R^{FG} + 4g^{(5)}_{AB} R^{FGHJ} D_J D_G R^L R_{HL} - 8g^{(5)}_{AB} D_H R_G^L R_{JL} D^J R^{FG} R^H \\
& \left. + 8g^{(5)}_{AB} D_J R_G^L R_{HL} D^J R^{FG} R^H + 4g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H D_L D^L R_G^J R_{HJ} \right\}, \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(6)} = & \frac{1}{4}\beta_6 \left\{ 8g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H R_G^J R^L R_H^M R_{LM} + 12g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H R_G^J R^L R_J^M R_{LM} + 6D_A R_{BF} D^F R \right. \\
& + 6D_B R_{AF} D^F R + 6R_{BF} D^F D_A R + 6R_{AF} D^F D_B R + 12R^{FG} D_G D_A R_{BF} + 12R^{FG} D_G D_B R_{AF} \\
& + 12D_A R_{FG} D^G R_B^F + 12D_B R_{FG} D^G R_A^F - 12R_B^F \left(R^{GH} R_{AGFH} - R_F^G R_A^H R_{GH} + D_G D^G R_{AF} \right) \\
& - 12R_A^F \left(2R_B^G R_{FG} + R^{GH} R_{BGFH} - R_F^G R_B^H R_{GH} + D_G D^G R_{BF} \right) - 24D_G R_{BF} D^G R_A^F \\
& \left. - 12g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H D_H D_G R^{JL} R_{JL} - 3g^{(5)}_{AB} D_H R^{JL} R_{JL} D^H R^{FG} R_{FG} - 12g^{(5)}_{AB} D_H R_G^L R_{JL} D^J R^{FG} R^H \right\}, \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(7)} = & \beta_7 \left\{ 2R_B^F R R_A^G R_{FG} + 2R_A^F R (-2R_{BF} + R_B^G R_{FG}) - 2R_{AB} R^{FG} R^H R_G^J R_{HJ} + g^{(5)}_{AB} R R^{FG} R^H R_G^J R_{HJ} \right. \\
& + 4D_A R^{FG} D_B R_{FG} + 2D_A R D_B R + R^{FG} (-4R R_{AFBG} + 4D_B D_A R_{FG}) + 2R D_B D_A R - 2R D_F D^F R_{AB} \\
& + 2D_A R_{BF} D^F R + 2D_B R_{AF} D^F R - 4D_F R_{AB} D^F R - 2R_{AB} D_H D^H R^{FG} R_{FG} + 2R_{BF} D^F D_A R \\
& + 2R_{AF} D^F D_B R - 2g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H D_H D_G R^{JL} R_{JL} - g^{(5)}_{AB} R D_H D^H R^{FG} R_{FG} - 2g^{(5)}_{AB} D_H R^{JL} R_{JL} D^H R^{FG} R_{FG} \\
& \left. - 4g^{(5)}_{AB} D_J R_G^L R_{HL} D^J R^{FG} R^H - 4g^{(5)}_{AB} R^{FG} R^H D_L D^L R_G^J R_{HJ} \right\}, \tag{C.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{AB}^{(8)} = \beta_8 \left\{ 6R_{AB}R^{FG}_{FG}R^{HJ}_{HJ} - 12 \left(D_A R^F{}_F D_B R^G{}_G + R^{GH}{}_{GH} D_B D_A R^F{}_F \right) + g^{(5)AB} \left[12D_H R^{JL}_{JL} \right. \right. \\
\left. \left. D^H R^{FG}_{FG} - R^{FG}_{FG} \left(R^{HJ}_{HJ} R^{LM}_{LM} - 12D_L D^L R^{HJ}_{HJ} \right) \right] \right\}. \tag{C.10}
\end{aligned}$$