UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

JUNIOR DA SILVA BESSA

REGULARIDADE ELÍPTICA PARA MODELOS NÃO-LINEARES COM CONDIÇÃO DE BORDO OBLÍQUO E APLICAÇÕES

FORTALEZA

2024

JUNIOR DA SILVA BESSA

REGULARIDADE ELÍPTICA PARA MODELOS NÃO-LINEARES COM CONDIÇÃO DE BORDO OBLÍQUO E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.
Coorientador: Prof. Dr. João Vitor da Silva.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B465r Bessa, Junior da Silva.
Regularidade elíptica para modelos não-lineares com condição de bordo oblíquo e aplicações / Junior da Silva Bessa. – 2024.
181 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.
Coorientação: Prof. Dr. João Vitor da Silva .

1. Equações totalmente não-lineares. 2. Equações elípticas. 3. Condição de bordo oblíquo. 4. Teoria da regularidade. 5. Regularidade ótima. I. Título.

CDD 510

JUNIOR DA SILVA BESSA

REGULARIDADE ELÍPTICA PARA MODELOS NÃO-LINEARES COM CONDIÇÃO DE BORDO OBLÍQUO E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 23 / 02 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Vitor da Silva (Coorientador)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres
Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus para glorificá-lo, à minha família por ter me ajudado em todos os momentos do curso e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter realizado um sonho que aos olhos humanos é praticamente impossível, dentro das condições que eu tinha para obter o título de doutor em matemática pura. Por Ele ter conduzido em cada detalhe com toda maestria e os cuidados que só Ele sabe ter com a minha vida. Por sua misericórdia comigo e o seu amor imensurável que me conduziu até aqui e por todos os dias da minha vida estar comigo sem reservas. O sentimento que me vem nesse trabalho com Ele é de gratidão por tudo o que passei até aqui e ele ter me conduzido a essa vitória, mesmo com todos os problemas que passei até aqui, seja na esfera salutar até em questões financeiras.

À minha maravilhosa e amada esposa Isaelly bem como à minha filha e princesa Thalita que estiveram comigo desde o começo até o presente momento desse curso ajudando muito e dando ânimo para prosseguir. Sempre tiveram grande contribuição em todos os momentos, seja em uma fase boa, seja em fases ruins. Aos meus familiares, meus pais Sebastião e Evaneide, minha irmã Jussara, meus sogros Francisco e Isaira e minha cunhada Micaely. A ajuda de cada um destes foi de inestimável valor em vários momentos do doutorado. Cada um deles contribuiu da forma que podia e até ultrapassou os próprios limites para me ajudar em diversas áreas sempre com o intuito de contribuir em prol deste sonho tão distante há tempos passados.

A todos que me ajudaram, que me atrapalharam, que foram a favor, que foram contra e de certa forma participaram do processo até o presente momento, pois de todas estas formas, no fundo, cooperaram para o meu bem.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte, pela excelente orientação, destacando-se pelo vasto conhecimento da literatura sobre o tema deste trabalho, por sua simplicidade e grande ajuda na árdua caminhada objetivando esse trabalho. Desde quando comecei a ser orientado, o professor Gleydson sempre confiou em mim, mais precisamente, sempre acreditou que eu tinha capacidade de concluir este trabalho. Agradeço por ele sempre ter a preocupação em me inserir de forma gradual e intensa ao mesmo tempo no "mundo da pesquisa" em matemática. Ao meu coorientador, Prof. Dr. João Vitor da Silva, por todo auxílio e contribuições matemáticas de grande ajuda nesse trabalho bem como a vasta experiência na pesquisa como o professor Gleydson que foi transmitida para mim ao longo do processo.

Em especial, quero destacar a imensa gratidão ao meu orientador no curso de Mestrado em Matemática e parte desse curso do Doutorado em Matemática, Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, por ter caminhado junto comigo toda minha trajetória na pós-graduação da Universidade Federal do Ceará (UFC). Toda a sua ajuda, tranquilidade, humildade, disponibilidade para me ajudar em aspectos que até tangenciam um pouco o âmbito do ensino e pesquisa, grande conhecimento na área da Análise Geométrica e seus conselhos sobre vários temas contribuíram de forma imensurável até os dias atuais e sendo mais preciso, o professor Fábio transmitiu para mim um legado de grande importância para decisões e atitudes a serem tomadas em projetos e caminhos no âmbito acadêmico.

Aos demais professores participantes da banca examinadora Dr. Cleon da Silva Barroso, Dr. José Ederson Melo Braga e Dr. Disson Soares dos Prazeres por toda dedicação em prol de valiosas colaborações e sugestões para o presente trabalho, além de uma avaliação bem rigorosa e criteriosa do mesmo.

A todos os professores da pós-graduação da UFC por toda a ajuda de forma direta ou indireta no meu processo de formação. Em particular, além dos professores Fábio e Gleydson, quero destacar os professores Cleon da Silva Barroso e Antônio Caminha Muniz Neto por todo empenho que tiveram em ajudar nas disciplinas que cursei e conselhos de grande utilidade na vida acadêmica.

À Andréa e a Jessyca por toda ajuda e simplicidade no que se refere às questões burocráticas do curso.

Aos colegas da turma de mestrado e de doutorado que cursaram ou ainda estão cursando na UFC, pelas reflexões, críticas e sugestões. Vale destacar: Erivamberto, Otávio, Rodrigo, Peron, Cristina, Tiago Almeida, Tiago Gadelha, Paulo Henryque, João Vitor, Davi Ribeiro, Douglas, Johnatan, Alan Pio, André, Edilson, Pedro, Flaviano, Diego, Elisafã, Elzon, Rafael, Danuso, Rosa, Emanuel, Valricélio e Wanderley.

Aos professores Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão e Dr. Wanderley de Oliveira Pereira. A professora Cristiane me orientou no curso de Licenciatura plena em Matemática na Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos (FAFIDAM) que é um polo da Universidade Estadual do Ceará (UECE), sempre atuante e me ajudando muito sobre o contexto e ambiente da pós-graduação na UFC, tendo dado vários conselhos de suma importância na área da própria matemática. Sobre o professor Wanderley, tive o prazer de por um breve momento ser companheiro do corpo discente da pós-graduação da UFC e ter sido aluno do mesmo em algumas disciplinas na FAFIDAM, sempre atuante e claro, deu vários conselhos dicas sobre o mestrado e doutorado na UFC, bem como outros tópicos na carreira acadêmica. Em resumo, os dois professores acima têm grande contribuição na minha formação acadêmica até aqui e deixaram um grande legado para eu usufruir e repassar para outros alunos em um futuro não muito distante.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ó profundidade da riqueza, da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis os seus caminhos! Pois, quem conheceu a mente do Senhor? Quem se tornou seu conselheiro? Quem primeiro lhe deu alguma coisa, para que Ele lhe recompense? Portanto dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele seja a glória perpetuamente! Amém. (Bíblia, 1993, Rm. 11, 33-36, p. 1415).

RESUMO

Nesta Tese, faremos um estudo de regularidade de soluções no sentido da viscosidade para equações elípticas totalmente não lineares com condição de bordo oblíquo. Neste aspecto, primeiramente sob condições assintóticas e outras hipóteses, serão garantidas estimativas do tipo Calderón-Zygmund para tais soluções, a saber, no contexto dos espaços de Lebesgue, Lorentz com peso e Orlicz com peso. A técnica usada remonta a conceitos de Análise Tangencial que consistem em importar ”estimativas de regularidade finas” de um perfil limite, sendo ele, o *Operador Recessão* associado ao original de segunda ordem via procedimentos de compacidade e estabilidade. Tal processo garantirá tais estimativas sob condições estruturais enfraquecidas sobre o operador que governa o problema. Além disso, faremos algumas importantes aplicações desta teoria em um caso de Problema de Fronteira Livre, em estimativas do tipo BMO e em teoremas do tipo de densidade de soluções em uma classe geral de soluções no sentido da viscosidade. Por fim, trataremos de um estudo da regularidade ótima dessas soluções em que o termo fonte será estudado em vários cenários de integrabilidade até o caso limite que seria o caso em que tal termo está no espaço BMO.

Palavras-chave: equações totalmente não-lineares; equações elípticas; condição de bordo oblíquo; teoria da regularidade; regularidade ótima.

ABSTRACT

In this Thesis we will study the regularity of viscosity solutions for fully nonlinear elliptic equations with oblique boundary condition. In this regard, firstly, under asymptotic conditions and other hypotheses, Calderón-Zygmund type estimates will be guaranteed for the same viscosity solutions, namely, in context of Lebesgue, weighted Lorentz and weighted Orlicz spaces. The technique used goes back to Tangential Analysis concepts that consist of importing ”fine regularity estimates”of a boundary profile, that is the *Recession Operator* associated with the second-order original via compactness and stability procedures. Such a process will guarantee such estimates under weakened structural conditions on the operator that governs the problem. Furthermore, we will make some importants applications of this result in a Free Boundary Problem case, in BMO-type Estimates and in density-type theorems of solutions in a general class of viscosity solutions. Finally, we will deal with a study of the optimal regularity of these solutions where the source term will be studied in various integrability scenarios up to the limiting case which would be the case in which such term is in the BMO space.

Keywords: fully nonlinear equations; elliptic equations; oblique boundary condition; regularity theory; optimal regularity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esboço geométrico da ideia da decomposição por cubos diádicos do cubo $\mathcal{Q}^{n-1} \times (0,1)$ 32

Figura 2 – Gráfico da função $\Phi(t) = t^3 \log(t+1)$ 44

Figura 3 – Ideia sobre o operador Recessão $F^{\sharp}$ 65

Figura 4 – Ideia para construir a sequência de operadores F_j 105

Figura 5 – Esboço geométrico da ideia da construção da bola $\mathrm{B}_{\tilde{r}}(w)$ 119

Figura 6 – Esquema do módulo de continuidade universal em função da integrabilidade do termo fonte 126

Figura 7 – Gráfico da função $\omega(t) = t \log \frac{1}{t}$ 137

Figura 8 – Gráfico da função $i(t) = -t^{\frac{1}{2}} \log t$ 138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estado-da-Arte para estimativas de Lorentz com peso 16
Tabela 2 – Estado da arte para estimativas de Orlicz com peso 16
Tabela 3 – Quadro para modelos com operador governante uniformemente elítico 17
Tabela 4 – Quadro para modelos com operadores convexos/côncavos 17

LISTA DE SÍMBOLOS

x'	Dado $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotaremos $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$.
Ω	Domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, isto é, um aberto conexo e limitado do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{B}_r(x)$	Bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, ou seja, $\mathrm{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \lvert y - x\rvert < r\}$ (quando $x = 0$ usamos a notação B_r).
$\mathrm{B}_r^+(x)$	Semi-bola aberta de centro x e raio $r > 0$, como o conjunto $\mathrm{B}_r^+(x) = \mathrm{B}_r \cap \mathbb{R}^n_+ + x$. Se $x = 0$, usaremos a notação abreviada B_r^+.
T_r	Bordo plano da semi-bola B_r^+, dado por $\mathrm{T}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x'\rvert < r \text{ e } x_n = 0\}$.
$\Omega(x, r)$	Parte de Omega na bola $\mathrm{B}_r(x)$, ou seja, $\Omega(x, r) = \Omega \cap \mathrm{B}_r(x)$.
u^+	Parte positiva da função u, definida por $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.
u^-	Parte negativa da função u, definida por $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$.
Du	Gradiente da função u, dado por $Du(x) = (u_{x_1}(x), \cdots, u_{x_n}(x))$.
D^2u	Matriz Hessiana da função u, dada por $D^2u(x) = (u_{x_ix_j})_{1\le i,j\le n}$.
$a \ll 1$	O número a é suficientemente pequeno.
$a \gg 1$	O número a é suficientemente grande.
O	Dizemos que $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ quando $x \to a$ e lê-se f *é* O-*grande de* g se existem constantes $\mathrm{C} > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\lvert f(x)\rvert \le \mathrm{C}\lvert g(x)\rvert$ para todo x tal que $\lvert x - a\rvert < \delta$.
o	Dizemos que $f(k) = o(g(k))$ quando $k \to \infty$ e lê-se f *é* o-*pequeno de* g se existem constantes $\mathrm{C} > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\lvert f(k)\rvert \le \mathrm{C}\lvert g(k)\rvert$ para todo $k > k_0$.
$A \subset\subset B$	A está compactamente contido em B, ou seja, $\overline{A} \subset B$ e $\overline{A}$ é compacto.
Sym(n)	espaço das matrizes simétricas de ordem n.
$⨍_A u(x)dx$	A média da função u no conjunto A, mais precisamente, $$⨍_A u(x)dx = \frac{1}{\lvert A\rvert}\int_A u(x)dx.$$

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	14
2	**RESULTADOS PRELIMINARES**	19
2.1	**Sobre paraboloides tangentes, diferenciabilidade de segunda ordem e alguns resultados sobre o espaço da funções p-integráveis**	19
2.2	**Um repasso sobre alguns espaços funcionais**	32
2.3	**Equações elípticas totalmente não-lineares com condições de bordo oblíquo**	53
3	**ESTIMATIVAS $W^{2,p}$ COM CONDIÇÃO DE BORDO OBLÍQUO SOB REGIME ASSINTÓTICO**	62
3.1	**Uma abordagem tangencial**	64
3.2	**Prova do Teorema 3.0.5**	69
4	**ESTIMATIVAS DE LORENTZ-SOBOLEV COM PESO**	81
5	**ESTIMATIVAS DE ORLICZ-SOBOLEV COM PESO**	88
6	**APLICAÇÕES**	94
6.1	**Problema de obstáculo**	94
6.2	**Densidade de soluções de viscosidade**	104
6.3	**Estimativas BMO para a Hessiana**	107
6.4	**Regularidade de Morrey com expoente variável**	114
7	**MÓDULO DE CONTINUIDADE UNIVERSAL PARA PARA SOLUÇÕES DE VISCOSIDADE DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO OBLÍQUA**	122
7.1	**Caso $p \in [n-\varepsilon_0, n)$ - Hölder regularidade ótima**	126
7.2	**Caso $p = n$ - Regularidade $Log - Lip$**	136
7.3	**Caso $n < p < \infty$ - Regularidade ótima do gradiente**	144
7.4	**Caso BMO - Regularidade $Log - Lip$ do gradiente e estimativas de Schauder**	148
7.4.1	**Estimativas BMO em proveito da estratégia do operador recessão**	159
7.4.2	**Teoria Schauder para operadores com coeficientes variáveis**	163
8	**CONCLUSÃO**	175
	REFERÊNCIAS	177

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de regularidade para soluções no sentido da viscosidade de equações elípticas totalmente não-lineares é um tópico de muito interesse para vários pesquisadores. Um dos motivos desse grande interesse é o vasto campo de aplicações em áreas como a geometria diferencial, física, química, análise harmônica, análise funcional e em teoria de jogos. Tal área teve pontapé inicial de desenvolvimento em meados do século XX com os célebres trabalhos de Evans e Krylov em [33] e [34], que provaram a desigualdade de Harnack para equações elípticas de segunda ordem na forma não divergente com coeficientes mensuráveis e outros aspectos de tal espécie de equações. Crandall e Lions em [19] e Evans em [23] e [24] conceituaram um novo tipo de solução fraca para equações da forma não divergente, denominado *método de viscosidade*, cujo conceito é bem posto para trabalhar com tais modelos que ainda não se trabalhava na época. Outro grande trabalho nessa linha foi o de Caffarelli em [14], no ano de 1989, que abordou estimativas dos tipos $C^{1,\alpha}$, $C^{2,\alpha}$ e $W^{2,p}$ para equações elípticas totalmente não-lineares, dando abertura a teoria de regularidade $W^{2,p}$ para tais tipos de equações com respeito ao conceito de solução de viscosidade. Vale destacar o célebre trabalho de Caffarelli, Crandall, Kocan e ŚwieĘch em [16] estabeleceram o conceito L^p- solução de viscosidade, além de desenvolver várias propriedades sobre o conceito de solução de viscosidade de equações totalmente não-lineares. Vários outros trabalhos foram desenvolvidos até os dias atuais e ainda é uma área em grande desenvolvimento.

Especificando um pouco a linha de raciocínio acima de acordo com o interesse do presente trabalho, o estudo de equações elípticas totalmente não-lineares com condições de bordo oblíquo, em particular, vem com o intuito de generalizar o problema com condição de bordo de Neumann. Em geral, uma condição de bordo oblíqua é dada da seguinte forma

$$\beta(x) \cdot Du(x) + \gamma(x)u(x) = g(x),\ x \in \Gamma, \tag{1}$$

onde γ e g são funções reais definidas em $\Gamma \subset \partial\Omega$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado e Γ aberto relativo de $\partial\Omega$. O termo oblíquo deve ser entendido de modo que β tem uma direção inclinada com respeito a normal exterior $\mathbf{n}$ de Ω. Notemos que quando $\beta \equiv \mathbf{n}$ e $\gamma \equiv g \equiv 0$, a condição (1) se torna a condição de bordo de Neumann. A equação (1) é prescrita em termos de derivada direcional em relação a um campo vetorial $\beta : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, definido em $\partial\Omega$. Em geral, uma condição de contorno oblíqua é dada pela seguinte forma

$$\mathfrak{B}(Du, u, x) \colon = \beta(x) \cdot Du + \gamma(x) \cdot u, \tag{2}$$

onde g, β e γ são funções. Na teoria dos problema de derivada oblíqua, o termo oblíquo significa que $|\beta(x) \cdot \mathbf{n}(x)| \geq \mu_0 > 0$ em $\partial\Omega$, onde $\mathbf{n}(x)$ denota a normal exterior de Ω. Essa imposição se deve à condição complementar de Shapiro-Lopatinskii, que afirma que o problema

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) = f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

é bem posto (isto é, regular, não degenerado, não singular) se, e somente se, $\beta(x) \cdot \mathbf{n}(x)$ é não nulo em $\partial\Omega$ (Para mais detalhes, cf.[41]), onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado. Esta condição de fronteira aparece, por exemplo no estudo da dinâmica de uma hipersuperfície orientável em movimento ao longo do tempo em domínio fixado cuja fronteira dessa hipersuperfície intersectando a fronteira da domínio com ângulo de contato fixo (veja, por exemplo, [21]). O comentário anterior motiva nossas considerações na condição oblíqua, sempre assumimos que

$$\beta(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq \mu_0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \quad \text{e} \quad \|\beta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq 1,$$

para alguma constante positiva μ_0. O caso particular da condição de contorno oblíquo regular é a condição de contorno de Neumann, ou seja, o caso $\beta = \mathbf{n}(x)$ e $\gamma = 0$, onde $\mathbf{n}(x)$ é o vetor normal externo de $\partial\Omega$ ou condição de contorno de Robin quando $\beta = a\mathbf{n}(x)$ e $\gamma \equiv c$ para $a > 0$ e c constantes. O grande interesse pelo problema com condição oblíqua se deve a aplicações em áreas além da própria matemática, como a Física Matemática e a Matemática Aplicada em geral. Por exemplo, na teoria dos processos de Markov (como no caso do movimento browniano), a equação com condição oblíqua

$$\beta \cdot Du + \gamma u = g \tag{4}$$

aparece na teoria, onde o primeiro termo do lado esquerdo de (4) descreve a reflexão do processo ao longo do campo β, enquanto o segundo termo está relacionado ao fenômeno de absorção. No entanto, a teoria de EDPs com condições de fronteiras oblíquas possui uma gama de exemplos clássicos além desse, como outras aplicações importantes na mecânica de corpos celestes, teoria de controle estocástico, choques refletidos em fluxos transônicos e assim por diante (cf. [38]). Um estudo mais minucioso desse tipo de condição pode ser encontrado no clássico livro do Lieberman [38]. O estudo de Equações elípticas totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo vem crescendo muito nos últimos anos, vide trabalhos como o de Byun e Han em [8] sobre estimativas do tipo $W^{2,p}$ para problemas dessa natureza com o operador convexo, desenvolvido em 2020. Em 2021, Zhang et al. em [59] desenvolveram um estudo de tais estimativas em um contexto assintótico nos casos elíptico e parabólico. Um pouco mais tarde em 2022, Byun, et al. desenvolveram nessa linha um estudo sobre estimativas do tipo $W^{2,p}$ para o problema de obstáculo quando o operador governante é convexo no trabalho [10]. Nesse mesmo ano, Zhang e Zheng em [61] trabalharam tal problema no ponto de vista de estimativas do tipo Lorentz com peso.

Nesse contexto, o presente trabalho traz como contribuição uma série de resultados de estimativas globais do tipo Calderón-Zygmund para soluções de viscosidade de equações totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo sob condição assintótica, além de um estudo do módulo de continuidade universal para soluções de viscosidade de tal problema onde o operador F depende apenas da Hessiana D^2u e dos coeficientes variáveis. Mais precisamente, em um primeiro momento apresentaremos o estudo obtido em [6] e [5], que objetivam, do ponto de vista da teoria de regularidade, sob certas condições, o problema (3), onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com bordo $\partial\Omega$ regular a ser especificada mais adiante para operadores com condições de relaxamento de convexidade. Desta forma, desenvolveremos uma teoria do tipo Calderón-Zygmund no contexto dos espaços de Lebesgue, Lorentz com peso e de Orlicz com peso. A técnica que será abordada nesta tese remonta a argumentos de análise tangencial, tendo como inspiração os célebres trabalhos de Pimentel e Teixeira [46], em 2016, que estudaram estimativas $W^{2,p}$ para soluções de viscosidade de equações totalmente não-lineares com condições assintóticas; Da Silva e Ricarte em [51] que exploraram estimativas do tipo $W^{2,p}$ sob o contexto assintótico para equações elípticas totalmente não-lineares com condição de bordo de Dirichlet; Byun e Han em [8] que garantiram estimativas $W^{2,p}$ para (3) quando F é convexo e $\gamma \equiv g \equiv 0$. No contexto dos espaços de Lorentz com peso, temos o Estado-da-Arte representado na Tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Estado-da-Arte para estimativas de Lorentz com peso

	Equação	**Referência**
Regularidade interior	$F(D^2u, x) = f$	[58]
Problema de Dirichlet	$\begin{cases} F(D^2u, x) = f(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$	[60]
Problema oblíquo	$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) = f & \text{em } \Omega \\ \beta(x) \cdot Du = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$	[61]

Fonte:Elaborada pelo autor.

Pontuamos no caso do Problema de Dirichlet que foram também obtidas estimativas no caso parabólico e no contexto dos espaços de Lorentz-Morrey. E por último, caso das estimativas de Orlicz com peso, a Tabela 2 abaixo apresenta alguns desenvolvimentos recentes sobre teoria de regularidade em tais espaços funcionais que motivou as estimativas para o problema com condição de bordo oblíquo:

Tabela 2 – Estado da arte para estimativas de Orlicz com peso

Regularidade	**Modelo de Equação**	**Referência**
Global do gradiente	$\begin{cases} u^i_t - D_\alpha(a^{\alpha\beta}_{ij}(x,t)D_\beta u^j) = D_\alpha f^\alpha_i(x,t) & \text{em } \Omega_T \\ u^i(x) = 0 & \text{sobre } \partial_p\Omega_T \end{cases}$	[13]
Global da Hessiana	$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) = f(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$	[12]
Regularidade interior	$F(D^2u, x) = f(x)$ em Ω	[35]

Fonte:Elaborada pelo autor.

Vale observar que nos dois primeiros casos temos operadores que são assumidos côncavos/convexos, enquanto no regime de regularidade interior foi desenvolvido para equações elípticas totalmente não-lineares assintoticamente convexas.

Subsequentemente, para a segunda parte do objetivo, os grandes trabalhos de Teixeira [54], em 2014, Castillo e Pimentel [17], em 2017, e o trabalho de Amaral e Dos Prazeres em [2] no ano de 2022, motivaram um estudo de regularidade ótima do problema

$$\begin{cases} F(D^2u, x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{5}$$

onde F é um operador uniformemente elíptico e sob certas condições sobre os termos β, γ e g sob cenários distintos do termo fonte f. Em linhas gerais, podemos resumir o estudo do módulo de continuidade de soluções para (5) pela seguinte tabela no caso em que o operador governante é apenas uniformemente elíptico:

Tabela 3 – Quadro para modelos com operador governante uniformemente elítico

Termo fonte	**Dados de bordo**	**Regularidade da solução**
$f \in L^p(\Omega),\ p \in [n-\varepsilon_0, n)$	$\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$	$C^{0,2-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$
$f \in L^n(\Omega)$	$\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$	$C^{0,Log-Lip}(\overline{\Omega})$
$f \in L^p(\Omega),\ n < p < \infty$	$\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$	$C^{1,\min\left\{\alpha_h^-, \frac{p-n}{p}\right\}}(\overline{\Omega})$

Fonte:Elaborada pelo autor.

O interessante na esquematização acima é que percebemos que a medida que pedimos mais integrabilidade do termo fonte e mantemos a regularidade dos dados de bordo obtemos uma melhor regularidade para as soluções de (5).

Para o caso de termos a estrutura adicional de convexidade/concavidade para o operador F temos o seguinte quadro esquematizando a regularidade de soluções de (5):

Tabela 4 – Quadro para modelos com operadores convexos/côncavos

Termo fonte	**Dados de bordo**	**Regularidade da solução**
$f \in p$-BMO$(\Omega) \cap L^p(\Omega), p \in [n-\varepsilon_0, \infty)$	$\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$	$C^{1,Log-Lip}(\overline{\Omega})$
$f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$	$\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$	$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

Fonte:Elaborada pelo autor.

Para cumprir com os objetivos descritos acima, o restante do texto está dividido em mais sete capítulos. Além da introdução, o segundo capítulo intitulado RESULTADOS PRELIMINARES, descreve alguns conceitos e resultados que são de suma importância para os demais capítulos, fazendo desde um aporte sobre diferenciabilidade de segunda ordem e paraboloides tangentes, os espaços funcionais que estão envolvidos no trabalho, equações elípticas totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo, além de propriedades clássicas de regularidade para tal problema.

No capítulo três, abordamos as estimativas do tipo $W^{2,p}$ para o problema (3), onde tais estimativas estão em [6]. Nesta parte, desenvolvemos toda as ferramentas que remontam a análise tangencial para obter tais estimativas e generalizamos, em um certo sentido, as estimativas $W^{2,p}$ obtidas por Byun e Han em [8] bem como as do trabalho de Zhang et al. em [59]. Devemos destacar que, no resultado principal deste capítulo, temos um enfraquecimento na hipótese clássica sob o operador governante F para estimativas do tipo $W^{2,p}$ que é a convexidade do mesmo, além de que trabalhamos com os termos g e γ diferentemente dos dois trabalhos citados acima que são identicamente nulos.

Com respeito ao capítulo quatro, faremos um estudo similar ao do capítulo três a respeito do problema (3) sob a ótica dos espaços de Lorentz com peso, onde tais ideias estão desenvolvidas em [5]. Inicialmente sob o regime assintótico, estabeleceremos sob certas condições estimativas de Lorentz-Sobolev com peso para soluções de viscosidade de (3). Nessa parte generalizamos o trabalhos de Zhang e Zheng em [61]. Vale ressaltar que, além dos espaços de integrabilidade distintos que o caso das estimativas $W^{2,p}$ no capítulo três, ainda tem-se que a classe de solução de viscosidade tem uma ligação diferente com o termo fonte.

No capítulo cinco, em consonância com os capítulos três e quatro desenvolvemos estimativas de Orlicz-Sobolev com peso para soluções de (3). Os resultados nesse capítulo são os desenvolvidos em [4], onde inspirados nas ideias dos dois capítulos anteriores a esse, conseguimos reproduzir uma teoria de regularidade para o problema (3) quando o termo fonte está no âmbito dos espaços de Orlicz com peso.

No capítulo seis, destinamos nossa atenção à aplicações das estimativas obtidas nos capítulos três, quatro e cinco. Em um primeiro momento, sob a ótica do problema de obstáculo obtemos estimativas de Orlicz-Sobolev com peso e de Lorentz-Sobolev com peso para o problema de obstáculo com condição de bordo oblíquo. Em particular, temos estimativas $W^{2,p}$ para tal classe de problemas e assim temos um melhoramento com respeito ao trabalho de Byun et al. em [10]. No contexto dos espaços de Lorentz com peso e Orlicz com peso, obtemos a densidade de soluções de viscosidade de (5) de caráter local na classe usual de soluções de viscosidade. Outra aplicação são estimativas BMO para a Hessiana de soluções de viscosidade para (3), no contexto dos últimos dois espaços funcionais citados acima. Por fim, obtemos estimativas de Morrey com expoente variável do mesmo problema.

No capítulo sete, direcionamos nossa atenção para o problema (5). Estudaremos o módulo de continuidade universal para soluções de viscosidade desse problema com o termo fonte f sob diferentes cenários em termos de integrabilidade. Nesse sentido, um destaque dos resultados apresentados nesse capítulo são inovadores devido à grande dificuldade na abordagem do problema com condição de bordo oblíquo que muda quando fazemos um comparativo ao problema associado à condição de Dirichlet (Ver [2]).

Finalmente no capítulo oito, fazemos um apanhado conclusivo do presente trabalho e levantando possíveis questões em aberto sobre o problema com condição de bordo oblíquo bem como suas dificuldades.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados de caráter preliminar de grande importância para os capítulos posteriores. Vale ressaltar que, pelos objetivos do presente trabalho, não apresentaremos todas as provas dos resultados apreciados nessa parte, porém indicaremos referências para o leitor consultar os mesmos com mais detalhes. Para este capítulo bem como o restante do trabalho, salvo menção contrária, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sempre será um domínio limitado, ou seja, um aberto, conexo e limitado do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

2.1 Sobre paraboloides tangentes, diferenciabilidade de segunda ordem e alguns resultados sobre o espaço da funções p-integráveis

Nesta seção vamos explorar propriedades geométricas a respeito de uma função contínua, a saber, a propriedade da função poder ser tangenciada por paraboloides de segunda ordem. Mais especificamente, tal propriedade, como veremos a seguir, garante informações importantes sobre questões de regularidade da função. Após isso, veremos alguns fatos sobre as funções p-integráveis no sentido de Lebesgue bem como sobre o operador maximal de Hardy-Littlewood. Para isso, começaremos com a seguinte

Definição 2.1.1 *Dizemos que:*

- *Uma função $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita afim se*

$$L(x) = l_0 + l(x),$$

onde $l_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante e l é uma função linear.

- *Um paraboloide é um polinômio de grau 2 nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Qualquer paraboloide P pode ser escrito como*

$$P(x) = L(x) + \frac{1}{2}x^t Ax,$$

onde L é uma função afim e $A = D^2P$ é a matriz Hessiana de P.

Observação 2.1.2 *Observemos que toda função afim é convexa e côncava. De fato, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} L((1-t)x+ty) &= (1-t)l(x) + tl(y) + l_0 = (1-t)(l(x)+l_0) + t(l(y)+l_0) \\ &= (1-t)L(x) + tL(y), \ \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Definição 2.1.3 *Dizemos que P é um paraboloide com abertura $M > 0$ quando*

$$P(x) = l_0 + l(x) \pm \frac{M}{2}|x|^2,$$

onde l_0 é uma constante e l é uma função linear. P é convexo (resp. côncavo) se o sinal da *última parcela é + (resp. −).*

Definição 2.1.4 *Dadas duas funções u e v definidas em um conjunto aberto A e um ponto $x_0 \in A$, dizemos que v toca u por cima (respectivamente por baixo) em x_0 no conjunto A, se $u(x) \leq v(x)$, $\forall x \in A$ (respectivamente $u(x) \geq v(x)$, $\forall x \in A$) e $u(x_0) = v(x_0)$.*

Veremos a seguir que podemos, a partir da propriedade de uma função meramente contínua poder ser tangenciada por paraboloides côncavos e convexos por cima e por baixo do gráfico dessa função, podermos extrair informações de regularidade dessa função.

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \Omega$ aberto, $M > 0$ e $u \in C^0(\Omega)$, definimos,

$$\overline{G}_M(H) = \overline{G}_M(u, H) = \{x_0 \in \ H |\ \text{existe um paraboloide convexo P de abertura} \\ \text{M tal que } P(x_0) = u(x_0) \text{ e } u(x) \leq P(x), \forall x \in H\}.$$

e

$$\overline{A}_M(H) = \overline{A}_M(u, H) = H \setminus \overline{G}_M(u, H).$$

Por outro lado, usando paraboloides côncavos, podemos definir de maneira similar anterior os conjuntos $\underline{G}_M(H) = \underline{G}_M(u, H)$ e $\underline{A}_M(H) = \underline{A}_M(u, H)$ modificando o fato desses paraboloides tocarem u por baixo ao invés de por cima. Também definimos

$$G_M(H) = G_M(u, H) = \overline{G}_M(u, H) \cap \underline{G}_M(u, H)$$

e

$$A_M(H) = A_M(u, H) = \overline{A}_M(u, H) \cap \underline{A}_M(u, H)$$

Agora podemos definir

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}(x) = \overline{\Theta}(u, H)(x) &= \inf\{M > 0; x \in \overline{G}_M(H)\}, \\ \underline{\Theta}(x) = \underline{\Theta}(u, H)(x) &= \inf\{M > 0; x \in \underline{G}_M(H)\} \end{aligned}$$

e

$$\Theta(x) = \Theta(u, H)(x) = \sup\{\overline{\Theta}(x), \underline{\Theta}(x)\} \leq +\infty,$$

onde acima omitimos nas definições o conjunto H e a função u quando os mesmos estiverem explícitos no contexto. Vale ressaltar que aqui convencionamos $\inf \emptyset = +\infty$. Ainda nesse contexto, é possível verificar que $\Theta(u, H)$ definida acima é mensurável em H (ver Capítulo 1 de [15]).

Definição 2.1.5 *Seja $x_0 \in \Omega$. Dizemos que uma função $u \in C^0(\Omega)$ é $C^{1,1}$ no ponto x_0 por cima (respectivamente, $C^{1,1}$ no ponto x_0 por baixo) se*

$$\underline{\Theta}(u,H)(x_0) < +\infty \text{ (respectivamente se } \overline{\Theta}(u,H) < +\infty)$$

para alguma vizinhança H de x_0. Dizemos que u é $C^{1,1}$ em x_0 se u é $C^{1,1}$ em x_0 por baixo e por cima.

Observação 2.1.6 *É possível checar que se u é $C^{1,1}$ em x_0, então u é diferenciável em x_0. Para mais detalhes ver Capítulo 1 de [15].*

O quociente diferencial de segunda ordem de u em x_0 é definido

$$\Delta_h^2 u(x_0) = \frac{u(x_0+h)+u(x_0-h)-2u(x_0)}{|h|^2}, \tag{6}$$

para vetores $h \in \mathbb{R}^n$ tais que x_0+h e x_0-h estão em Ω. A partir desta definição notemos que $\Delta_h^2 P \equiv M$ (respectivamente, $\Delta_h^2 P \equiv -M$) quando P é um paraboloide convexo (respectivamente, côncavo) de abertura M. De fato, sendo P como na Definição 2.1.3 e convexo, temos para cada $x \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$ como acima,

$$\begin{aligned}
\Delta_h^2 P(x) &= \frac{P(x+h)+P(x-h)-2P(x)}{|h|^2} \\
&= \frac{1}{|h|^2}\left[l_0 + l(x+h) + \frac{M}{2}|x+h|^2 + l_0 + l(x-h) + \right. \\
&+ \left. \frac{M}{2}|x-h|^2 - 2l_0 - 2l(x) - 2\frac{M}{2}|x|^2\right] \\
&= \frac{1}{|h|^2}\left[\cancel{2l_0} + \cancel{2l(x)} + \cancel{l(h)} - \cancel{l(h)} + \frac{M}{2}(|x+h|^2 + |x-h|^2 - \right. \\
&- \left. 2|x|^2) - \cancel{2l_0} - \cancel{2l(x)}\right] \\
&= \frac{1}{\cancel{|h|^2}}\frac{M}{\cancel{2}}\cancel{2|h|^2} \\
&= M.
\end{aligned}$$

O caso em que P é côncavo é inteiramente análogo.

Feita essa observação, para cada $x_0 \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tais que $\mathrm{B}_{|h|}(x_0) \subset\subset \Omega$ (ou seja, tal que $\overline{\mathrm{B}_{|h|}(x_0)} \subset \Omega$), temos, para cada $M > 0$ tal que $x_0 \in \overline{G}_M(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))$, que existe paraboloide convexo P de abertura M que toca u por cima em x_0. Logo, vale que

$$\begin{aligned}
\Delta_h^2 u(x_0) &\leq \frac{P(x_0+h)+P(x_0-h)-2u(x_0)}{|h|^2} = \frac{P(x_0+h)+P(x_0-h)-2P(x_0)}{|h|^2} \\
&= \Delta_h^2 P(x_0) = M,
\end{aligned}$$

que pela arbitrariedade de $M > 0$ tal que $x_0 \in \overline{G}_M(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))$ concluímos que

$$\Delta_h^2 u(x_0) \leq \overline{\Theta}(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))(x_0). \tag{7}$$

Similarmente a (7), vemos que

$$\Delta_h^2 u(x_0) \geq -\underline{\Theta}(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))(x_0). \tag{8}$$

Por (7), (8) e pela definição de $\Theta(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))(x_0)$, concluímos que

$$|\Delta_h^2 u(x_0)| \leq \Theta(u, \mathrm{B}_{|h|}(x_0))(x_0). \tag{9}$$

O lema a seguir, garante uma caracterização da norma L^p $(1 < p < +\infty)$ de uma função, como uma consequência um pouco mais fraca que o clássico Teorema da representação de Riesz.
Lema 2.1.7 *Seja $f \in L^p(\Omega)$, onde $1 < p < +\infty$. Então, sendo q o conjugado de, p temos*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right|.$$

Prova: Se $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, então $f = 0$ q.t.p. e assim segue trivialmente a tese do Lema segue trivialmente. Então, podemos supor que $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1$. Temos pela Desigualdade de Hölder que

$$\left| \int_\Omega f\varphi dx \right| \leq \int_\Omega |f\varphi| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

e assim, pela arbitrariedade de φ, podemos concluir que

$$\sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{10}$$

Por outro lado, como $1 < p < +\infty$, temos como uma consequência do Teorema da Representação de Riesz para os espaços L^p's que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in L^q(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right| = \sup_{\substack{\varphi \in L^q(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \int_\Omega f\varphi dx.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $g_\varepsilon \in L^q(\Omega)$ com $\|g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq 1$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} - \varepsilon < \int_\Omega f g_\varepsilon dx.$$

Agora, como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^q(\Omega)$, dado $\delta > 0$, existe uma sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade

$$\|\varphi_k - g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\delta}{2k\|f\|_{L^p(\Omega)}},$$

para todo $k \geq k_0$. Neste cenário, afirmamos que podemos supor que tal sequência satisfaça, para $k \geq k_0$, $\|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)} > 0$ e

$$\|\varphi_k - g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\delta}{k\|f\|_{L^p(\Omega)}}, \tag{11}$$

para todo $k \geq k_0$. Com efeito, fixemos uma função $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 < \eta \leq 1$ em $\operatorname{supp}\eta$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se $\|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)} = 0$ e pelo fato de φ_k ser contínua, temos que $\varphi_k \equiv 0$. Daí, trocando φ_k por

$$\tilde{\varphi_k} = \frac{\delta}{2k|\Omega|^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}\eta,$$

temos que $\|\tilde{\varphi_k}\|_{L^q(\Omega)} > 0$, $\tilde{\varphi_k} \in C_c^\infty(\Omega)$ e, se $k \geq k_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\varphi_k} - g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|\tilde{\varphi_k}\|_{L^q(\Omega)} + \|g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \underbrace{=}_{\varphi_k\equiv 0} \|\tilde{\varphi_k}\|_{L^q(\Omega)} + \|\varphi_k - g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \\
&< \|\tilde{\varphi_k}\|_{L^q(\Omega)} + \frac{\delta}{2k\|f\|_{L^p(\Omega)}} \underbrace{\leq}_{0<\eta\leq 1} \left\|\frac{\delta}{2k|\Omega|^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right\|_{L^q(\Omega)} + \\
&+ \frac{\delta}{2k\|f\|_{L^p(\Omega)}} = \frac{\delta}{2k\|f\|_{L^p(\Omega)}} + \frac{\delta}{2k\|f\|_{L^p(\Omega)}} = \frac{\delta}{k\|f\|_{L^p(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Isto justifica a afirmação. Desta forma, considerando a sequência (φ_k) satisfazendo (11) para $k \geq k_0$, temos pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)} - \varepsilon &< \left|\int_\Omega f g_\varepsilon dx\right| \leq \left|\int_\Omega f(g_\varepsilon - \varphi_k)dx\right| + \left|\int_\Omega f\varphi_k dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f(g_\varepsilon - \varphi_k)|dx + \|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)}\left|\int_\Omega f\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)}}dx\right| \\
&\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g_\varepsilon - \varphi_k\|_{L^q(\Omega)} + \|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)} \sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\leq 1}} \left|\int_\Omega f\varphi dx\right| \\
&\leq \frac{\delta}{k} + \|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)} \sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\leq 1}} \left|\int_\Omega f\varphi dx\right| \\
&\leq \delta + \|\varphi_k\|_{L^q(\Omega)} \sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\leq 1}} \left|\int_\Omega f\varphi dx\right|,
\end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0$. Segue de (11) que $\varphi_k \to g_\varepsilon$ quando $k \to \infty$ e daí fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} - \varepsilon &\leq \delta + \|g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right| \\ &\underbrace{\leq}_{\|g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq 1} \delta + \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right|, \end{aligned}$$

donde,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta + \varepsilon + \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right|.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, podemos concluir que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_\Omega f\varphi dx \right|. \tag{12}$$

Portanto, a partir de (10) e (12), concluímos o desejado. ■

Feitas essas observações, a proposição a seguir traz um dos principais fatos entre a função $\Theta(u, H)$ e a regularidade da função u que a priori é apenas contínua.

Proposição 2.1.8 *Sejam $1 < p < \infty$ e $u \in C^0(\Omega)$. Para cada $r > 0$ ponhamos*

$$\Theta(u, r)(x) := \Theta(u, \Omega \cap \mathrm{B}_r(x))(x), \text{ para } x \in \Omega.$$

Se $\Theta(u, r) \in L^p(\Omega)$, então a Hessiana D^2u satisfaz $D^2u \in L^p(\Omega)$, no sentido das distribuições. Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\|\Theta(u, r)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: Afirmamos inicialmente que, para quaisquer índices $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, vale a seguinte estimativa

$$\left| \int_\Omega u \partial_{ij} \varphi \right| \leq 2\|\Theta(u, r)\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{13}$$

onde q é o conjugado de Lebesgue de p, ou seja, p e q satisfazendo a seguinte identidade

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Com efeito, observemos que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale

$$\begin{aligned}\partial_{ij}\varphi &= \frac{1}{2}(\partial_{e_i+e_j,e_i+e_j}\varphi - \partial_{ii}\varphi - \partial_{jj}\varphi)\\ &= \frac{1}{2}(2\partial_{vv}\varphi - \partial_{ii}\varphi - \partial_{jj}\varphi),\end{aligned}$$

onde $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_j)$ e $(e_i)_{i=1}^n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Portanto, para garantir (13) é suficiente provar que

$$\left|\int_\Omega u\partial_{ii}\varphi\right| \leq \|\Theta(u,r)\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)},\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1,\cdots,n \tag{14}$$

e

$$\left|\int_\Omega u\partial_{vv}\varphi\right| \leq \|\Theta(u,r)\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)},\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Para tal, seja $K = \operatorname{supp}\varphi$. Temos, pela Invariância por simetrias da Integral de Lebesgue, que

$$\int_\Omega u\partial_{ii}\varphi = \int_K u\partial_{ii}\varphi = \lim_{\delta\to 0}\int_K u\Delta^2_{\delta e_i}\varphi = \lim_{\delta\to 0}\int_K (\Delta^2_{\delta e_i}u)\varphi. \tag{16}$$

Mas, recordando a definição do quociente diferencial de segunda ordem (vide (6)) e (9), temos para $0 < \delta < \min\{r, \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$, que

$$|\Delta^2_{\delta e_i}u(x)| \leq \Theta(u,r)(x), \forall x \in K.$$

Juntando esse fato com (16), temos a estimativa (14). A prova da estimativa (15) é análoga a feita acima para (14). Com isto temos (13).
Com essa estimativa, para $1 < p < +\infty$, temos que a derivada $D_{ij}T_u$, associada a distribuição T_u, é um funcional contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$ como subespaço de $L^q(\Omega)$. Daí, por $C_c^\infty(\Omega)$ ser denso em $L^q(\Omega)$, segue que podemos estendê-lo para todo $L^q(\Omega)$ e ainda denotaremos tal extensão por $D_{ij}T_u$, ou seja, $D_{ij}T_u \in (L^q(\Omega))$. Daí, pelo Teorema da Representação de Riesz para os espaços L^p's, segue que existe $D_{ij}u \in L^p(\Omega)$ tal que

$$D_{ij}T_u g = \int_\Omega D_{ij}ug\,dx, \forall g \in L^q(\Omega).$$

Em particular, como essa identidade vale para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que $D_{ij}T_u = T_{D_{ij}u}$, no sentido das distribuições, ou seja, existe $D_{ij}u \in L^p(\Omega)$. Assim, pelo Lema 2.1.7

$$\|\partial_{ij}u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\|\Theta(u,r)\|_{L^p(\Omega)},\ \forall i,j \in \{1,\cdots,n\}.$$

Consequentemente, usando a norma do máximo em $\mathbb{R}^{n^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} &= \sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\le 1}} \left|\int_\Omega |D^2u|\varphi dx\right| = \max_{1\le i,j\le n}\left(\sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\le 1}} \left|\int_\Omega D_{ij}u\varphi dx\right|\right)\\ &\le 2\|\Theta(u,r)\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

Observação 2.1.9 *Ainda sobre a Proposição 2.1.8, recomendamos ao leitor com menos familiaridade com a teoria das distribuições consultar o livro [18], de Marcelo Moreira Cavalcanti juntamente com a Valéria Neves Moreira Cavalcanti, para uma ajuda nos conceitos usados acima.*

Para o próximo resultado, precisaremos do seguinte lema clássico.

Lema 2.1.10 (Layer-Cake Representation) *Sejam $p \in (0,\infty)$ e f uma função mensurável em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt,$$

onde λ_f é a função distribuição de f definida por

$$\lambda_f(\alpha) = |\{x\in\Omega : |f(x)| > \alpha\}|, \alpha > 0.$$

Prova: Inicialmente, temos que se $|f|$ for infinita em um conjunto $A \subset \Omega$ de medida positiva então,

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \ge \int_A |f(x)|^p dx = \infty.$$

Por outro lado,

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt \ge p\int_0^\infty t^{p-1}|A|dt = |A|p\int_0^\infty t^{p-1}dt = \infty$$

e assim temos a identidade desejada. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que f é finita q.t.p. em Ω. Neste caso, para cada $x \in \Omega$ tal que $|f(x)| < \infty$, temos

$$|f(x)|^p = p\int_0^{|f(x)|} t^{p-1}dt = \int_0^\infty pt^{p-1}\chi_{(t,\infty)}(|f(x)|)dt.$$

Assim, como a função $\Omega \times (0,\infty) \ni (x,t) \longmapsto pt^{p-1}\chi_{(t,\infty)}(|f(x)|)$ é mensurável e não-negativa, podemos usar o Teorema de Tonelli (Ver [56, Teorema 6.10]) e garantir que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p dx &= p\int_0^\infty \left(\int_\Omega t^{p-1}\chi_{(t,\infty)}(|f(x)|)dt\right)dx\\
&= p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\int_\Omega \chi_{(t,\infty)}(|f(x)|)dx\right)dt\\
&= p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt,
\end{aligned}$$

em que, nesta última igualdade, usamos que $\chi_{(t,\infty)}(|f(x)|) = \chi_{\{|f|>t\}}(x)$, sendo

$$\{|f| > t\} =: \{x \in \Omega; |f(x)| > t\}.$$

O que encerra a prova. ■

Agora, com o Layer-Cake Representation 2.1.10, apresentaremos uma caracterização dos espaços de funções p-integráveis a Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Lema 2.1.11 *Seja g uma função mensurável em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\eta > 0$ e $M > 1$ constantes. Então, para $0 < p < \infty$,*

$$g \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow S := \sum_{k\geq 1} M^{pk}\lambda_g(\eta M^k) < +\infty.$$

Ademais, existe uma constante $C > 0$ que depende apenas de η, M e p tal que

$$C^{-1}S \leq \|g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C(|\Omega| + S).$$

Prova: Suponhamos que $S < \infty$. Pelo Layer-Cake Representation 2.1.10, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x)|^p dx &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha\\
&= p\int_0^{\eta M} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha + p\int_{\dot{\bigcup}_{k\geq 1}(\eta M^k,\eta M^{k+1}]} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha\\
&\leq p\int_0^{\eta M} \alpha^{p-1}|\Omega|d\alpha + \sum_{k\geq 1} p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

Usando o pelo fato de que a função λ_g ser não-crescente, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x)|^p dx &\leq |\Omega|\left(p\int_0^{\eta M} \alpha^{p-1}d\alpha\right) + \sum_{k\geq 1} p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}\lambda_g(\eta M^k)d\alpha\\
&= (\eta M)^p|\Omega| + \sum_{k\geq 1}\lambda_g(\eta M^k)p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}d\alpha
\end{aligned}$$

que podemos simplificar com o cálculo da integral que compõe o termo geral da série na última parcela do lado direito e obter que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x)|^p dx &\leq (\eta M)^p|\Omega| + p\sum_{k\geq 1}\lambda_g(\eta M^k)[(\eta M^{k+1})^p - (\eta M^k)^p] \\
&= (\eta M)^p\left[|\Omega| + \sum_{k\geq 1} M^{pk}\lambda_g(\eta M^k)[1 - M^{-p}]\right] \\
&= (\eta M)^p[|\Omega| + [1 - M^{-p}]S] \leq C_1[|\Omega| + S] < \infty,
\end{aligned}$$

em que $C_1 = (\eta M)^p$, visto que, pelo fato de $M > 1$ e $0 < p < \infty$ tem-se $M^{-p} < 1$. Assim, $g \in L^p(\Omega)$ e vale a estimativa

$$\|g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C_1(|\Omega| + S). \tag{17}$$

Reciprocamente, suponhamos que $g \in L^p(\Omega)$. Temos novamente pelo Layer-Cake Representation 2.1.10 que

$$\begin{aligned}
\|g\|^p_{L^p(\Omega)} &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha \\
&\underbrace{=}_{M>1} p\int_0^\eta \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha + p\int_{\dot{\bigcup}_{k\geq 0}(\eta M^k, \eta M^{k+1}]} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha \\
&\geq p\int_{\dot{\bigcup}_{k\geq 0}(\eta M^k, \eta M^{k+1}]} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha = \sum_{k\geq 0} p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

em que usamos na penúltima desigualdade o fato de λ_g ser uma função não-crescente. Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|g\|^p_{L^p(\Omega)} &\geq \sum_{k\geq 0} p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}\lambda_g(\eta M^{k+1})d\alpha = \sum_{k\geq 0}\lambda_g(\eta M^{k+1})p\int_{\eta M^k}^{\eta M^{k+1}} \alpha^{p-1}d\alpha \\
&\geq \sum_{k\geq 0}\lambda_g(\eta M^{k+1})[(\eta M^{k+1})^p - (\eta M^k)^p] \\
&= \eta^p\sum_{k\geq 0}\mu_g(\eta M^{k+1})[M^{(k+1)p} - M^{kp}] \\
&= \eta^p\left(1 - \frac{1}{M^p}\right)S \\
&= C_2^{-1}S,
\end{aligned}$$

em que $C_2 = \dfrac{M^p}{\eta^p(M^p - 1)} > 0$. (na penúltima igualdade usamos a mudança de índice na série a saber $j = k+1$.) Portanto, $S < +\infty$ e, além disso, vale a estimativa

$$C_2^{-1} S \leq \|g\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{18}$$

Agora, tomando $C = \max\{C_1, C_2\} > 0$ (vemos que a constante C depende apenas de η, M e p), segue das estimativas (17) e (18) que

$$C^{-1} S \leq C_2^{-1} S \leq \|g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C_1(|\Omega| + S) \leq C(|\Omega| + S),$$

o que encerra a prova da proposição. ■

Agora voltaremos nossa atenção aos operadores maximais de Hardy-Littlewood centrado e não centrado.

Definição 2.1.12 *Dada uma função $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a função maximal de g é definida por*

$$m(g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q_r(x)|} \int_{Q_r(x)} |g(y)| dy = \sup_{r>0} ⨍_{Q_r(x)} |g(y)| dy,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 2.1.13 *A função maximal de g, $m(g)$, também é conhecido por operador maximal de Hardy-Littlewood centrado da função g. Também define-se $m(g)$ onde o supremo é tomado em vez da média em cubos abertos, por bolas abertas. Tais operadores são equivalentes no sentido que os valores deles podem ser comparados entre si. Devido a esse fato, quando usarmos tal operador especifiquemos o supremo, porém usaremos a mesma notação $m(g)$ para ambos.*

Sobre tal operador temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.14 (Hardy-Littlewood-Wiener) *Seja $1 < p \leq \infty$. Se $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $m(g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com estimativa*

$$\|m(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{19}$$

onde C é uma constante positiva que só depende de n e p.

Demonstração: Ver [56], Teorema 9.16, p.227. ■

Como mencionado anteriormente, podemos também definir o operador maximal de Hardy-Littlewood não centrado.

Definição 2.1.15 *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ também definimos o operador maximal de Hardy-Littlewood não centrado de g pondo*

$$m^*(g)(x) = \sup_{\mathrm{B}} ⨍_{\mathrm{B}} |g(y)| dy,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as bolas que contém o ponto x.

No caso $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos algumas propriedades interessantes sobre $m^*(g)$, porém fazendo paralelo ao Teorema 2.1.14 não temos que $m^*(g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$(Ver [53, Capítulo 3]). Mesmo assim temos uma condição mais fraca de integrabilidade sobre o operador maximal. Esse é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 2.1.16 (Hardy-Littlewood) *Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então:*

(i) $m^*(g)$ é uma função mensurável.

(ii) $m^*(g)(x) < \infty$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Vale a seguinte estimativa

$$\lambda_{m^*(g)}(t) \leq \frac{\mathrm{C}}{t}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\ \forall t > 0$$

onde $C = 3^n$.

Demonstração: Ver [53], Teorema 1.1, p. 101. ■

Ainda sobre o operador maximal de Hardy-Littlewood não centrado m^*, como comentado acima é conhecido que se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então, não necessariamente o mesmo ocorre com $m^*(f)$. Vimos no Teorema 2.1.16 que se g é integrável a Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ então temos uma estimativa para a função $t \longmapsto t\lambda_{m^*(g)}(t)$ (mais adiante tal limitação descreverá que $m^*(g)$ está num espaço de funções importante na Análise Matemática). Contudo, em conjuntos de medida finita podemos garantir que $m^*(f)$ está incluso em qualquer espaço L^p para $0 < p < 1$. Tal resultado é o conteúdo do próximo teorema que será útil mais adiante no presente manuscrito.

Teorema 2.1.17 (Desigualdade de Kolmogorov) *Sejam $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in (0,1)$. Então, para todo subconjunto mensurável $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita vale que*

$$\int_{\mathrm{E}} (m^*(g)(x))^\theta dx \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta}|\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de n e θ. Em particular, se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então para qualquer mensurável E de medida finita e $\theta \in (0,1)$ temos que $m^*(g) \in L^\theta(\mathrm{E})$ com estimativa,

$$\|m^*(g)\|_{L^\theta(\mathrm{E})} \leq \mathrm{C}'|\mathrm{E}|^{\frac{1}{\theta}-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para $\mathrm{C}' = \mathrm{C}'(n,\theta)$ constante positiva.

Demonstração: Realmente, é suficiente provarmos o caso em que $0 < |\mathrm{E}| < \infty$, sendo que, o caso $|\mathrm{E}| = 0$ segue imediatamente devido a ambos os membros da estimativa a ser verificada serem iguais a zero. Para tal fim, pelo Layer-Cake Representation 2.1.10,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}} (m^*(g)(x))^\theta dx &= \theta\int_0^\infty t^{\theta-1}\lambda_{m^*(g)}(t)dt \\ &= \theta\int_0^{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} t^{\theta-1}\lambda_{m^*(g)}(t)dt + \theta\int_{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}^\infty t^{\theta-1}\lambda_{m^*(g)}(t)dt.\end{aligned}$$

Majorando $\lambda_{m^*(g)}(t)$ por $|\mathrm{E}|$ na primeira integral do lado direito da desigualdade acima, obtemos que

$$\int_{\mathrm{E}}(m^*(g)(x))^\theta dx \leq \theta\int_0^{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} t^{\theta-1}|\mathrm{E}|dt + \theta\int_{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}^{\infty} t^{\theta-1}\lambda_{m^*(g)}(t)dt.$$

Aplicando o item (iii) do Teorema de Hardy-Littlewood 2.1.16 temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}}(m^*(g)(x))^\theta dx &\leq |\mathrm{E}|\theta\int_0^{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} t^{\theta-1}dt + \theta\int_{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}^{\infty} t^{\theta-1}\frac{3^n}{t}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}dt\\ &= |\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 3^n\theta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{|\mathrm{E}|^{-1}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}^{\infty} t^{\theta-2}dt.\end{aligned}$$

Agora, calculando a segunda integral imprópria acima, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}}(m^*(g)(x))^\theta dx &\leq |\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)} +\\ &+ 3^n\theta\|g\|_{L^1(\mathbb{R})^n}\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{1}{1-\theta}\left(|\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^{\theta-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{\varepsilon^{1-\theta}}\right)\right)\\ &= |\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \frac{3^n\theta}{1-\theta}|\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &= \frac{\mathrm{C}}{1-\theta}|\mathrm{E}|^{1-\theta}\|g\|^\theta_{L^1(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

onde, usando o fato que $\theta \in (0,1)$, a segunda parcela no limite acima tende a zero quando $\varepsilon \to \infty$ e a constante C é dada por $\mathrm{C} = 1-\theta+3^n\theta$. Por fim, para a última parte, temos pela estimativa acima que $m^*(g) \in L^\theta(\mathrm{E})$ e a estimativa desejada segue elevando os dois membros da desigualdade à θ^{-1}. ∎

Para finalizar essa seção, vamos apresentar o clássico Teorema da Decomposição de Calderón-Zygmund para cubos que garante uma precisão maior na estimativa entre a medida de dois conjuntos via uma técnica de decomposição de cubos que deixaremos de forma clara a seguir.

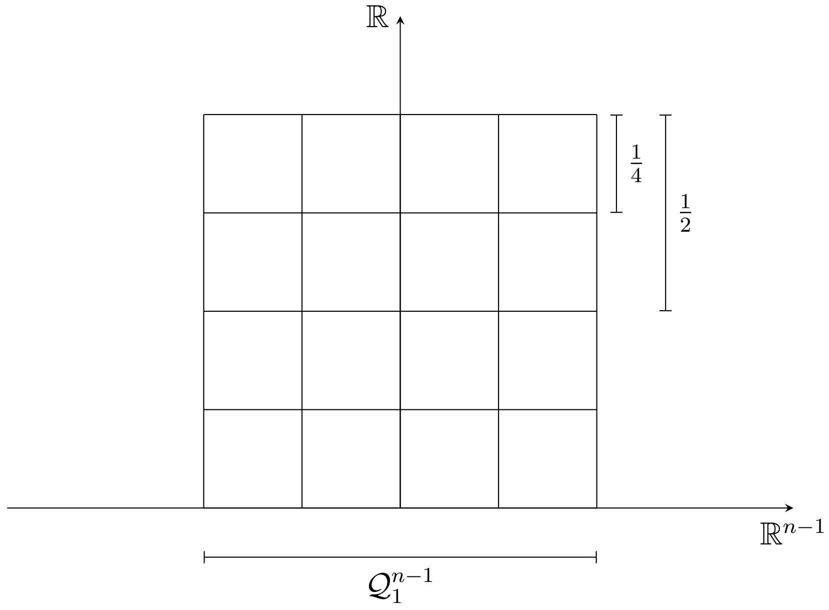
Definição 2.1.18 *Denotaremos por*

$$\mathcal{Q}_r^n(x_0) := \prod_{i=1}^{n}\left(x_0^i - \frac{r}{2}, x_0^i + \frac{r}{2}\right)$$

o cubo n-dimensional aberto centrado no ponto $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ e de arestas com comprimento $r > 0$. Quando $x_0 = 0$ usaremos a notação simplificada $\mathcal{Q}_r^n$.

Visando o próximo Teorema, considere $\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)$ cubo unitário. Divida $\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)$ em 2^n cubos de arestas de comprimento $\frac{1}{2}$. Fazemos o mesmo procedimento de divisão com cada um desses 2^n-cubos obteremos 2^{2n} cubos de aresta $\frac{1}{4}$. Repetimos essa divisão sucessivamente. Cada cubo em tal procedimento é chamado de *cubo diádico*. Dados dois cubos diádicos tais que $\mathcal{Q}, \tilde{\mathcal{Q}} \neq \mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é um *cubo predecessor* de $\tilde{\mathcal{Q}}$ se $\mathcal{Q}$ é um dos 2^n cubos obtidos na partição de $\tilde{\mathcal{Q}}$. Feitas essas observações podemos enunciar o seguinte Teorema.

Figura 1 – Esboço geométrico da ideia da decomposição por cubos diádicos do cubo $\mathcal{Q}^{n-1} \times (0,1)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 2.1.19 (Teorema da decomposição de Calderón-Zygmund por cubos) *Dados dois conjuntos mensuráveis $A \subset B \subset \mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)$ e um número $\delta \in (0,1)$ tais que*

(a) $|A| \leq \delta$;

(b) Se $\mathcal{Q}$ é um cubo diádico tal que $|A \cap \mathcal{Q}| > \delta|\mathcal{Q}|$, então $\tilde{\mathcal{Q}} \subset B$.

Então, $|A| \leq \delta|B|$.

Demonstração: Ver, [15, Lema 4.2], p.30. ■

2.2 Um repasso sobre alguns espaços funcionais

Nesse segundo momento abordaremos alguns espaços funcionais além dos espaços L^p's que aparecerão nos capítulos subsequentes. Inicialmente, necessitaremos falar sobre o conceito de peso e as classes de pesos de Muckenhoupt que serão de grande importância para definirmos alguns desses espaços funcionais.

Definição 2.2.1 *Dizemos que uma função ω é um **peso** se $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, é não-negativa e assume valores em $(0,\infty)$ em quase todo ponto. Nesse caso, identificamos ω com a medida*

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx,$$

para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável.

Relacionados ao conceito de peso temos as classes de Muckenhoupt que é descrita pela seguinte definição:

Definição 2.2.2 *Seja $q \in [1, \infty)$. Dizemos que um peso ω pertence a classe $\mathcal{A}_q$ de Muckenhoupt e denotamos $\omega \in \mathcal{A}_q$ se:*

(i) Para $q = 1$, existe constante positiva C tal que

$$\fint_{\mathrm{B}} \omega dx \leq \mathrm{C} \operatorname*{infess}_{\mathrm{B}} \omega \tag{20}$$

para toda bola $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $[\omega]_1$ o ínfimo do conjunto de todas constantes positivas C tais que ocorre (20).

(ii) Para $q \in (1, \infty)$ quando

$$[\omega]_q := \sup_{\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n} \left(\fint_{\mathrm{B}} \omega(x) dx \right) \left(\fint_{\mathrm{B}} \omega(x)^{\frac{-1}{q-1}} dx \right)^{q-1} < \infty,$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as bolas $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 2.2.3 *O conceito das classes de pesos $\mathcal{A}_q$ foi introduzido por Muckenhoupt em meados da década de 1970 em [44] e aparece em várias partes na análise harmônica e suas aplicações.*

O primeiro desses espaços usando o conceito de pesos que explanaremos nessa seção é o espaço de Lorentz com peso cuja vem a seguir acompanhada após dela de alguns fatos relevantes sobre tais espaços.

Definição 2.2.4 *O espaço de* ***Lorentz com peso*** *$L^{p,q}_{\omega}(E)$ para $(p, q) \in (0, \infty) \times (0, \infty]$, $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável e peso ω é o conjunto de todas as funções h mensuráveis em E tais que*

$$\|h\|_{L^{p,q}_{\omega}(E)} =: \left(q \int_0^{\infty} t^{q-1} \omega(\{x \in E : |h(x)| > t\})^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

quando $q \in (0, \infty)$ e

$$\|h\|_{L^{p,\infty}_{\omega}(E)} =: \sup_{t>0} t \omega(\{x \in E ; |h(x)| > t\})^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Observação 2.2.5 *Vale salientar que, no caso particular, $p = q \in (0, \infty)$ e $\omega \equiv 1$, recuperamos a definição do espaço $L^p(\Omega)$, uma vez que,*

$$\begin{aligned} \|h\|^p_{L^{p,p}_{\omega}(E)} &= p \int_0^{\infty} t^{p-1} \omega(\{x \in E : |h(x)| > t\})^{\frac{p}{p}} dt \\ &= p \int_0^{\infty} t^{p-1} \left(\int_{\{x \in E : |h(x)| > t\}} \omega(x) dx \right) dt \end{aligned}$$

e como $\omega(x) = 1$ a integral acima dentro dos parênteses se torna exatamente a medida do *conjunto* $\{x \in E | h(x)| > t\}$ *e assim*

$$\begin{aligned} \|h\|^p_{L^{p,p}_\omega(E)} &= p\int_0^\infty t^{p-1}|\{x \in E : |h(x)| > t\}|dt = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_h(t)dt \\ &= \int_E |h(x)|^p dx, \end{aligned}$$

onde usamos o Layer-Cake Representation 2.1.10 na última identidade.

Observação 2.2.6 *Ainda com respeito a definição dos espaços de Lorentz com peso, percebamos que se* $\omega \equiv 1$ *e* $q = \infty$, *o espaço* $L^{p,\infty}_\omega(E)$ *é o espaço* L^p *fraco* $L^p_w(E)$. *De fato, tal afirmação segue da seguinte observação: para toda* h *mensurável em* E,

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^{p,\infty}_\omega(E)} &= \sup_{t>0} t\omega(\{x \in E; |h(x)| > t\})^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t\left(\int_{\{x\in E;|h(x)|>t\}} \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{t>0} t\lambda_h(t)^{\frac{1}{p}} = \|h\|_{L^p_w(E)}. \end{aligned}$$

Pela identidade acima segue que $h \in L^{p,\infty}(E) \Leftrightarrow h \in L^p_w(E)$ *e que a norma coincide. Doravante, no item (iii) do Teorema 2.1.16 pela notação acima estamos concluindo que se* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então* $m^*(g) \in L^1_w(\mathbb{R}^n)$ *com estimativa*

$$\|m^*(g)\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq 3^n\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Analogamente como define-se os espaços de Sobolev a partir dos espaços L^p's temos a seguinte definição.

Definição 2.2.7 *O espaço de Lorentz-Sobolev com peso* $W^kL^{p,q}_\omega(E)$ *para* $k \in \mathbb{N}$ *e* $E \subset \mathbb{R}^n$ *domínio é o o conjunto das funções* h *mensuráveis em* E *tais que todas as derivadas no sentido das distribuições* $D^\alpha h$ *pertencem ao espaço de Lorentz com peso* $L^{p,q}_\omega(E)$ *para qualquer* α *multi-índice de comprimento* $|\alpha| = 0, 1, \cdots, k$. *Em* $W^kL^{p,q}_\omega(E)$ *temos a norma* $\|\cdot\|_{W^kL^{p,q}_\omega(E)}$ *dada por*

$$\|h\|_{W^kL^{p,q}_\omega(E)} =: \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha h\|_{L^{p,q}_\omega(E)}.$$

Observação 2.2.8 *Pela definição acima juntamente com a Observação 2.2.5 segue que o espaço* $W^kL^{p,q}_\omega(E)$ *é o espaço de Sobolev* $W^{k,p}(E)$ *quando* $p = q \in (1, \infty)$ *e* $\omega \equiv 1$.

Agora listaremos algumas propriedades conhecidas sobre pesos que são indispensáveis para o transcorrer do restante deste trabalho. Para mais detalhes recomendamos [55, Capítulo 1].

Lema 2.2.9 *Seja* ω *um peso na classe* $\mathcal{A}_s$ *para algum* $s \in (1, \infty)$. *Então,*

(a) *(crescimento) Se* $r \geq s$, *então* ω *pertence a classe* $\mathcal{A}_r$ *e* $[\omega]_r \leq [\omega]_s$.

(b) *(extremidade aberta) Existe uma constante(suficientemente pequena)* $\varepsilon_0 > 0$ *dependendo apenas de* n, s *e* $[\omega]_s$ *tal que* $\omega \in \mathcal{A}_{s-\varepsilon_0}$ *com* $s - \varepsilon_0 > 1$.

(c) (dobramento forte) Existe duas constantes positivas c_1 e $\theta \in (0,1)$ dependendo apenas de n, s e $[\omega]_s$ tais que

$$\frac{1}{[\omega]_s}\left(\frac{|E|}{|\Omega|}\right)^s \leq \frac{\omega(E)}{\omega(\Omega)} \leq c_1\left(\frac{|E|}{|\Omega|}\right)^\theta.$$

para todo conjunto $E \subset \Omega$ Lebesgue mensurável.

O próximo resultado garante, sob certas condições, um mergulho dos espaços de Lorentz com peso sobre os espaços de Lebesgue.

Lema 2.2.10 *Sejam $(p,q) \in (n,\infty) \times (0,\infty]$, ω um peso em $\mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ e um conjunto mensurável limitado $E \subset \mathbb{R}^n$. Se $f \in L^{p,q}_\omega(E)$, então para qualquer $r \in [n,p)$, temos que $f \in L^r(E)$ com a seguinte estimativa*

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq C\|f\|_{L^{p,q}_\omega(E)},$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p, r, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$ e $|E|$. Ademais, C independe de f.

Prova: Ver [61, Lema 2.10]. ∎

Aqui temos uma versão da Proposição 2.1.8 para os espaços de Lorentz com peso provado por Zhang e Zheng em [60, Lema 2.2].

Lema 2.2.11 *Seja $(p,q) \in (1,\infty) \times (0,\infty]$ e $\omega \in \mathcal{A}_s$ peso para algum $s \in (1,\infty)$. Assuma que $u \in C^0(\Omega)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e defina para cada $r > 0$*

$$\Theta(u,r)(x) =: \Theta(u, \mathrm{B}_r(x) \cap E)(x),\ x \in E.$$

Se $\Theta(u,r) \in L^{p,q}_\omega(E)$, então a Hessiana no sentido das distribuições $D^2u \in L^{p,q}_\omega(E)$ com estimativa

$$\|D^2u\|_{L^{p,q}_\omega(E)} \leq C(n,p,q)\|\Theta(u,r)\|_{L^{p,q}_\omega(E)}.$$

Necessitaremos da seguinte caracterização das funções nos espaços de Lorentz com peso análoga ao Lema 2.1.11 que está em [42, Lema 3.12]). Daremos uma prova desse resultado por questões didáticas com respeito aos leitores.

Lema 2.2.12 *Seja ω um peso $\mathcal{A}_s$ para algum $s \in (1,\infty)$, $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função mensurável em um domínio limitado $E \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\eta > 0$ e $\mathrm{M} > 1$ constantes. Então,*

$$h \in L^{p,q}_\omega(E) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{M}^{qj}\omega(\{x \in E; |h(x)| > \eta\mathrm{M}^j\})^{\frac{q}{p}} =: S < \infty$$

para cada $p, q \in (0,\infty)$ e

$$\mathrm{C}^{-1}S \leq \|h\|^q_{L^{p,q}_\omega(E)} \leq \mathrm{C}(\omega(E)^{\frac{q}{p}} + S), \tag{21}$$

com $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q, \eta, \mathrm{M})$ *é uma constante positiva. Além disso, para* $p \in (0, \infty)$ *e* $q = \infty$ *temos*

$$\overline{\mathrm{C}}^{-1} T \leq \|h\|_{L^{p,\infty}_{\omega}(E)} \leq \overline{\mathrm{C}}(\omega(E)^{\frac{1}{p}} + \mathrm{T}),$$

onde $\overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{C}}(\eta, \mathrm{M})$ *é a constante positiva e*

$$\mathrm{T} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{M}^j \omega(\{x \in E; |h(x)| > \eta \mathrm{M}^j\})^{\frac{1}{p}}. \tag{22}$$

Prova: Por simplicidade, usaremos a notação $\omega_h(t) = \omega(\{x \in E; |h(x)| > t\})$ para cada $t > 0$. Para a primeira parte, suponha que $h \in L^{p,q}_{\omega}(E)$. Observamos que, como a função $t \longmapsto \omega_h(t)^{\frac{q}{p}}$ é não-crescente e $M > 1$,

$$\begin{aligned}
\|h\|^q_{L^{p,q}_{\omega}(E)} &= q \int_0^{\eta} t^{q-1} \omega_h(t)^{\frac{q}{p}} dt + q \int_{\dot{\bigcup}_{k=0}^{\infty} (\eta \mathrm{M}^k, \eta \mathrm{M}^{k+1}]} t^{q-1} \omega_h(t)^{\frac{q}{p}} dt \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} q \int_{\eta \mathrm{M}^k}^{\eta \mathrm{M}^{k+1}} t^{q-1} \omega_h(t)^{\frac{q}{p}} dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} q \int_{\eta \mathrm{M}^k}^{\eta \mathrm{M}^{k+1}} t^{q-1} \omega_h(\eta \mathrm{M}^{k+1})^{\frac{q}{p}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \eta^q \mathrm{M}^{q(k+1)} (1 - \mathrm{M}^{-q}) \omega_h(\eta \mathrm{M}^{k+1})^{\frac{q}{p}} = \mathrm{C}_1^{-1} S,
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{C}_1 = (\eta^q(1 - \mathrm{M}^{-q}))^{-1} > 0$. Com essa estimativa podemos concluir que $S < \infty$. Reciprocamente, assumindo que $S < \infty$, então analogamente acima, segue que

$$\|h\|^q_{L^{p,q}_{\omega}(E)} \leq \mathrm{C}_2(\omega(E)^{\frac{q}{p}} + S) < \infty,$$

para $\mathrm{C}_2 = (\eta \mathrm{M})^q > 0$. Assim, $h \in L^{p,q}_{\omega}(E)$. A estimativa em (21) segue das estimativas acima onde $\mathrm{C} = \max\{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2\}$.
Agora, no caso $p \in (0, \infty)$ e $q = \infty$, temos para todo $j \in \mathbb{N}$ que,

$$\mathrm{M}^j \omega_h(\eta \mathrm{M}^j)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\eta} \|h\|_{L^{p,\infty}_{\omega}(E)}$$

consequentemente $\|h\|_{L^{p,\infty}_{\omega}(E)} \geq (\mathrm{C}'_1)^{-1} T$, por $\mathrm{C}'_1 = \eta^{-1}$. Por outro lado, assumindo que $\mathrm{M} > 1$, podemos escrever

$$(0, \infty) = (0, \eta \mathrm{M}] \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} (\eta \mathrm{M}^k, \eta \mathrm{M}^{k+1}] \right).$$

Portanto, dado $t > 0$, temos que $t \in (0, \eta \mathrm{M}]$ ou $t \in (\eta \mathrm{M}^k, \eta \mathrm{M}^{+1})$ para algum $k \in \mathbb{N}$. No primeiro caso,

$$t \omega_h(t)^{\frac{1}{p}} \leq (\eta M) \omega(E)^{\frac{1}{p}}$$

e em outro caso,

$$t\omega_h(t)^{\frac{1}{p}} \leq (\eta \mathrm{M}^{k+1})\omega_h(\eta \mathrm{M}^k)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, $t\omega_h(t)^{\frac{1}{p}} \leq \mathrm{C}_2'(\omega(E)^{\frac{1}{p}} + \mathrm{T})$, para $\mathrm{C}_2' = \max\{\mathrm{M}, \eta\mathrm{M}\} > 0$, o que implica na estimativa

$$\|h\|_{L^{p,\infty}_{\omega}(E)} \leq \mathrm{C}_2'(\omega(E)^{\frac{1}{p}} + \mathrm{T}).$$

Finalmente, tomando $\overline{\mathrm{C}} = \max\{\mathrm{C}_1', \mathrm{C}_2'\}$ temos (22). ∎

Por fim, no contexto do espaços de Lorentz com peso temos ainda uma versão do Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener sob a atenção na classe dos pesos. Tal resultado é devido a Mengesha e Phuc em [42, Lema 3.11].

Lema 2.2.13 *Seja ω um peso na classe $\mathcal{A}_s$ para $s \in (1,\infty)$. Então, para qualquer $q \in (0,\infty]$ existe uma constante positiva C dependendo apenas de n, s, q, $[\omega]_s$ tal que*

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{s,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{C}\|f\|_{L^{s,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \tag{23}$$

para todas $f \in L^{s,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$. Reciprocamente, se a desigualdade (23) *ocorre para toda função $f \in L^{s,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$, então ω necessariamente é um peso.*

Agora falaremos de outra classe de espaço de funções, a saber, os espaço de Morrey com expoente variável. Para o que segue, consideremos duas funções $\varsigma, \varrho \in C^0(\Omega)$ tais que existem constantes $\varsigma_1, \varsigma_2 \in (n,\infty)$ e $\varrho_0 \in [0,n)$ satisfazendo

$$\varsigma_1 \leq \varsigma(x) \leq \varsigma_2 \;\text{ e }\; 0 \leq \varrho(x) \leq \varrho_0 \tag{24}$$

para todo $x \in \Omega$.

Definição 2.2.14 *O espaço de **Morrey com expoente variável** ς **e potência** ϱ é o conjunto $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ de todas as funções h mensuráveis em Ω tais que*

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(h) := \sup_{x\in\Omega, r>0}\left(\frac{1}{r^{\varrho(x)}}\int_{\Omega(x,r)}|h(y)|^{\varsigma(y)}dy\right) < \infty,$$

onde $\Omega(x,r) = \mathrm{B}_r(x) \cap \Omega$. Podemos munir $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ com a norma de Luxemburg

$$\|h\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{t > 0; \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{h}{t}\right) \leq 1\right\}.$$

Observação 2.2.15 *Salvo menção contrária, sempre quando referirmos ao espaço $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ estaremos assumindo que ς e ϱ cumprem a condição* (24).

Observação 2.2.16 *É possível verificar que a função $h \longmapsto\rightarrow \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(h)$ é uma **função modular** em $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$, isto é, $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ é uma função desse espaço assumindo valores em $[0,\infty]$*

que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$.

(b) $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda h) = \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(h)$ *se* $|\lambda| = 1$.

(c) $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ *é uma função convexa.*

(d) $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ *é contínua à esquerda, ou seja, para toda* $h \in L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ *a função que associa cada* $\lambda \in [0,\infty)$ *ao valor* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda h)$ *é contínua à esquerda em* $[0,\infty)$.

(e) *Se* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda h) = 0$ *para todo* $\lambda > 0$*, então* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(h) = 0$.

Nessas condições, é possível verificar que $\|\cdot\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$ *é uma norma no espaço de Morrey com expoente variável(Ver [20, Teorema 2.17]). Vale ainda observar que as propriedades acima implicam que* $\lambda \to \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda h)$ *é não-decrescente no intervalo* $[0,\infty)$ *para cada* $h \in L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$*(Ver [20, Página 23]). Além disso, ainda em [20, Página 23] vê-se que*

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda f) = \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(|\lambda| f) \leq |\lambda| \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f), \text{ se } |\lambda| \leq 1$$
$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda f) = \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(|\lambda| f) \geq |\lambda| \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f), \text{ se } |\lambda| \geq 1.$$

Para mais detalhes sob o conceito de modular e suas propriedades recomendamos o livro de Diening et al. [20] para um aprofundamento mais claro sobre tais conceitos.

Definição 2.2.17 *O espaço de Morrey-Sobolev com expoente variável* ς *e potência* ϱ*, denotado por* $W^k L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ *onde* $k \in \mathbb{N}$ *é o conjunto das funções* h *mensuráveis em* Ω *tais que suas derivadas no sentido das distribuições* $D^\alpha h$ *pertencem a* $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ *para todo multi-índice* α *de comprimento* $|\alpha| = 0, 1, \cdots, k$*. Munimos* $W^k L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ *de forma natural com a seguinte norma*

$$\|h\|_{W^k L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha h\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}.$$

A respeito dos espaços de Morrey com expoente variável temos uma propriedade útil sobre a sua norma.

Proposição 2.2.18 (Propriedade da bola unitária norma-modular) *Em* $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ *temos a seguinte equivalência:*

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq 1 \Leftrightarrow \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 1.$$

Prova: Suponhamos que $1 \geq \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f)$. Então, pela definição de ínfimo segue que

$$\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \overset{t=1}{\leq} \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq 1.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$. Assim, para cada $t > 1 \geq \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$

temos pela definição de ínfimo que existe $s = s(t) > 0$ tal que

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{f}{s(t)}\right) \leq 1. \tag{25}$$

e $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq s(t) < t$. Mas como $0 < s(t) < t$ segue que $\frac{1}{t} < \frac{1}{s(t)}$, daí pela não-decrescência da função $\lambda \to \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda f)$(Ver Observação 2.2.16) e por (25),

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{f}{t}\right) \leq \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{f}{s(t)}\right) \leq 1.$$

Como para todo $t > 1$, tem-se

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{h}{t}\right) \leq 1 \tag{26}$$

pela continuidade à esquerda da função $\lambda \to \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\lambda f)$, podemos fazer $t \to 1^+$(e assim $\frac{1}{t} \to 1^-$) em ambos os membros de (26) e obtermos que

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq 1.$$

O que encerra a prova da Proposição. ■

Observação 2.2.19 *Ainda nessa linha de raciocínio, observemos que se* $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$, *então* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$. *De fato, tal desigualdade é clara quando* $f = 0$. *Caso contrário, temos que* $0 < \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$. *Daí,* $w = \frac{f}{\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}}$ *satisfaz* $\|w\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = 1$, *donde pela Propriedade da bola unitária norma-modular 2.2.18 tem-se* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(w) \leq 1$. *Daí, como* $\frac{1}{\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}} \geq 1$, *pela super-homogeneidade de* $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ *podemos concluir que*

$$1 \geq \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(w) \geq \frac{1}{\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}}\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \Longrightarrow \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}.$$

Definição 2.2.20 *O espaço de Lebesgue de expoente variável* $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ *com peso* ω *o qual denotaremos por* $L^{p(\cdot)}_{\omega}(\Omega)$ *é o conjunto das funções* h *mensuráveis em* Ω *tais que*

$$\rho_{p(\cdot),\omega}(h) := \int_{\Omega} |h(x)|^{p(x)}\omega(x)dx < \infty$$

e com a seguinte norma de Luxemburg associada

$$\|h\|_{L^{p(\cdot)}_{\omega}(\Omega)} = \inf\left\{t > 0; \rho_{p(\cdot),\omega}\left(\frac{h}{t}\right) \leq 1\right\}.$$

Observação 2.2.21 *Notemos que na definição dos espaços de Morrey com expoente variável quando a potência* $\varrho \equiv 0$ *segue que* $L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega) = L^{\varsigma(\cdot)}_{\omega}(\Omega)$ *no caso do peso* ω *ser identicamente igual a função contante* 1.

Dados esses dois espaços definidos acima temos, sob certas condições, como relacioná-los. Para isso, precisaremos impor sobre o expoente ς um módulo de continuidade específico, a saber, o módulo de continuidade Log-Hölder.

Definição 2.2.22 *Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Log-Hölder contínua em Ω, se existe uma constante positiva $\mathrm{C}' > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq -\mathrm{C}' \frac{1}{\log|x-y|}, \tag{27}$$

para todos $x, y \in \Omega$ tais que $0 < |x-y| \leq \frac{1}{2}$.

Observação 2.2.23 *Uma condição necessária e suficiente para que f seja Log-Hölder contínua em Ω é que exista um módulo de continuidade ρ para f tal que*

$$\sup_{0<t\leq\frac{1}{2}} \left(\rho(t) \log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \leq \mathrm{C}_f, \tag{28}$$

onde C_f é uma constante positiva. Realmente, assumindo que f é Log-Hölder contínua sabemos que existe $\mathrm{C}' > 0$ tal que (27) *ocorre. Assim, definamos $\rho : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ pondo*

$$\rho(t) := \begin{cases} 0, & \textit{se } t = 0 \\ \mathrm{C}' \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1}, & \textit{se } t > 0. \end{cases}$$

Inicialmente, notemos que ρ está bem definida, uma vez que, pela continuidade da função logarítmica,

$$\lim_{t\to 0^+} \rho(t) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{C}' \left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1} = 0 = \rho(0),$$

pois $\lim_{t\to 0^+} -\log t = +\infty$. Ademais, ρ é crescente e portanto, um módulo de continuidade e claramente, temos que

$$\sup_{0<t\leq\frac{1}{2}} \left(\rho(t) \log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \leq \mathrm{C}'$$

Portanto, ρ satisfaz (28) *com $\mathrm{C}_f = \mathrm{C}'$. Reciprocamente, assumindo que existe ρ módulo de continuidade para f satisfazendo* (28)*, temos para todos $x, y \in \Omega$ tais que $0 < |x-y| \leq \frac{1}{2}$, temos*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \rho(|x-y|) = \left(\rho(|x-y|)\log\frac{1}{|x-y|}\right)\left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)^{-1} \\ &\overset{(28)}{\leq} \mathrm{C}_f \frac{1}{\log\frac{1}{|x-y|}} = -\mathrm{C}_f \frac{1}{\log|x-y|}, \end{aligned}$$

isto é, f é Log-Hölder contínua em Ω, provando a equivalência desejada.

A partir desta equivalência e a definição de função Log-Hölder contínua, podemos concluir que é equivalente a f possuir módulo de continuidade $\tau(t) = \mathrm{C}'\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1}$ para alguma constante $\mathrm{C}' > 0$.

Com essa condição temos a relação citada acima formulada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.2.24 (Extrapolação de expoente variável com peso) *Suponhamos que para algum $p_0 \in [1, \infty)$ a seguinte desigualdade ocorre: para todo $\omega \in \mathcal{A}_1$,*

$$\int_\Omega |F(x)|^{p_0}\omega(x)dx \leq \mathrm{C}(n, p_0, [\omega]_1)\int_\Omega |G(x)|^{p_0}\omega(x)dx$$

onde F e G são funções mensuráveis em Ω. Então, dada uma função ς Log-Hölder contínua em Ω, satisfazendo (24) *e tal que $\varsigma_1 > p_0$, então temos que*

$$\|F\|_{L^{\varsigma(\cdot)}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C}(n, \varsigma_1, \varsigma_2, \mathrm{C}'_\varsigma, \Omega)\|G\|_{L^{\varsigma(\cdot)}_\omega(\Omega)}$$

onde tal constante C é maior que 1.

Demonstração: Ver [61, Proposição 4.1]. ∎

Agora falaremos um pouco sobre os espaços de Orlicz com peso. Para isso, necessitaremos inicialmente falar sobre o conceito de N- função e algumas propriedades interessantes.

Definição 2.2.25 *Uma N-função é uma função $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ que é convexa, crescente, contínua e satisfaz as seguintes condições:*

a) $\Phi(t) > 0, \ \forall t > 0$ *e* $\Phi(0) = 0$.

b) Valem os seguintes limites

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad e \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$$

Vejamos alguns exemplos para ilustrar melhor tal conceito:

Exemplo 2.2.26 *Considere a função $\Phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por $\Phi(t) = t^p$ para $p \in (1, \infty)$. Não é difícil de verificar que Φ é uma N-função.*

Exemplo 2.2.27 *A função $\Phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por $\Phi(t) = t$ não é uma N-função, sendo que, ela descumpre a condição $b)$ da definição, pois*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 1.$$

Exemplo 2.2.28 *A função $\Phi(t) = t^p \log(t + 1), \ t \geq 0$, onde $p \in (1, \infty)$ é uma N-função.*
Realmente, claramente $\Phi(0) = 0$, Φ é crescente e contínua devido ser o produto de duas funções crescentes e contínuas. Ademais, por Φ ser crescente e $\Phi(0) = 0$ segue a condição $a)$ da Definição 2.2.25.

Por outro lado, por $p > 1$ segue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} t^{p-1}\log(t+1) = 0,$$

bem como

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to +\infty} t^{p-1}\log(t+1) = +\infty,$$

uma vez que, $p > 1$ então t^{p-1} é uma potência positiva de t. Por fim, para verificar que Φ é convexa, percebamos que

$$\Phi''(t) = p(p-1)t^{p-2}\log(t+1) + \frac{(2p-1)t^p + 2pt^{p-1}}{(t+1)^2} \geq 0,\ \forall t > 0.$$

Enquanto, pelo fato de

$$\Phi'(t) = pt^{p-1}\log(t+1) + \frac{t^p}{t+1}, \forall t \geq 0$$

segue que

$$\Phi''(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi'(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left(pt^{p-2}\log(t+1) + \frac{t^{p-1}}{t+1}\right) = 0,$$

sendo que, o fato de $p > 1$ implica que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{p-1}}{t+1} = 0$$

enquanto pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t+1} = 1$$

e consequentemente,

$$\lim_{t\to 0^+} pt^{p-2}\log(t+1) = p\lim_{t\to 0^+} t^{p-1}\frac{\log(t+1)}{t} = p\underbrace{\lim_{t\to 0^+} t^{p-1}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(t+1)}{t}}_{=1} = 0.$$

Com isso, $\Phi''(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Assim, Φ é uma função convexa (Ver [40, Corolário 2] p.111). Logo, Φ é uma N-função.

Observação 2.2.29 *Outros exemplos mais sofisticados de N-funções podem ser encontrados em [47], onde tal referência é recomendada fortemente para um estudo sobre tal conceito bem como sobre os espaços de Orlicz.*

Uma classe de N-funções interessante que será de suma importância adiante está descrita pela seguinte definição:

Definição 2.2.30 *Dizemos que uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 (resp. condição ∇_2) se existe uma constante $\mathrm{K} > 1$ (resp. $\mathrm{L} > 1$) tal que*

$$\Phi(2t) \leq \mathrm{K}\Phi(t) \left(\textit{resp. } \Phi(t) \leq \frac{1}{2\mathrm{L}}\Phi(\mathrm{L}t) \right), \ \forall t > 0.$$

Em caso afirmativo, usaremos a notação $\Phi \in \Delta_2$ (resp. $\Phi \in \nabla_2$) para indicar que Φ cumpre a condição Δ_2 (resp. condição ∇_2). Ademais, se Φ cumpre ambas condições, por simplicidade usaremos a notação $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$.

Com o conceito de condições Δ_2 e ∇_2 podemos falar da seguinte.

Definição 2.2.31 *Dada uma função $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, podemos definir o* ***índice inferior*** *de Φ por*

$$i(\Phi) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log(h_\Phi(t))}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log(h_\Phi(t))}{\log t},$$

onde

$$h_\Phi(t) = \sup_{s>0} \frac{\Phi(st)}{\Phi(s)}, \ t > 0.$$

Observação 2.2.32 *O limite está bem definido e vale que $i(\Phi) > 1$ (Ver [25, p. 436]). O índice acima definido será importante mais adiante para relacionar com o operador maximal de Hardy-Littlewood no âmbito dos espaços de Orlicz com peso que serão definidos abaixo.*

Vejamos alguns exemplos de tais classes de funções.

Exemplo 2.2.33 *Considere $\Phi(t) = t^p$ com $p \in (1, \infty)$ vista no Exemplo (2.2.27). Claramente $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ com constantes $\mathrm{K} = 2^p$ e $\mathrm{L} = 2^{\frac{1}{p-1}}$. Assim podemos calcular o índice inferior de Φ, $i(\Phi)$.*

Para isso, notemos que

$$h_\Phi(t) \sup_{s>0} \frac{\Phi(st)}{\Phi(s)} = \sup_{s>0} \frac{\cancel{s^p} t^p}{\cancel{s^p}} = t^p, t > 0,$$

donde

$$i(\Phi) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log(h_\Phi(t))}{\log t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{p\cancel{\log t}}{\cancel{\log t}} = p.$$

Exemplo 2.2.34 *Revisitando o Exemplo 2.2.28, onde $\Phi(t) = t^p \log(t+1)$ para $p > 1$ é uma N-função temos que $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ e que $i(\Phi) = p$ (Ver Figura 2 para o caso $p = 3$).*

De fato, temos que

$$\Phi(2t) = 2^p t^p \log(2t+1) \leq 2^p t^p \log(t+1)^2 \leq K\Phi(t), \ \forall t > 0,$$

para $K = 2^{p+1}$ e assim $\Phi \in \Delta_2$. Por outro lado, para $L = 2^{\frac{1}{p-1}}$ obtemos

$$\Phi(Lt) = 2^{\frac{p}{p-1}} t^p \log(2^{\frac{1}{p-1}} t + 1) \geq 2^{\frac{p}{p-1}} \log(t+1) = 2L\Phi(t), \ \forall t > 0.$$

Ou seja, $\Phi \in \nabla_2$ e com isso provamos que $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$.
Para provar o restante da afirmação, fixemos um número real t tal que $0 < t < 1$. Temos para todo $s > 0$ que $st + 1 < s + 1$, donde pela função logarítmica ser crescente segue que

$$\log(st+1) < \log(s+1) \implies \frac{\log(st+1)}{\log(s+1)} < 1, \quad \forall s > 0.$$

Assim, para $0 < t < 1$ obtemos

$$h_\Phi(t) = \sup_{s>0} \frac{\Phi(st)}{\Phi(s)} = \sup_{s>0} \left(t^p \frac{\log(st+1)}{\log(s+1)} \right) \leq t^p.$$

E tal supremo é exatamente t^p, uma vez que, pela Regra de L'Hôpital

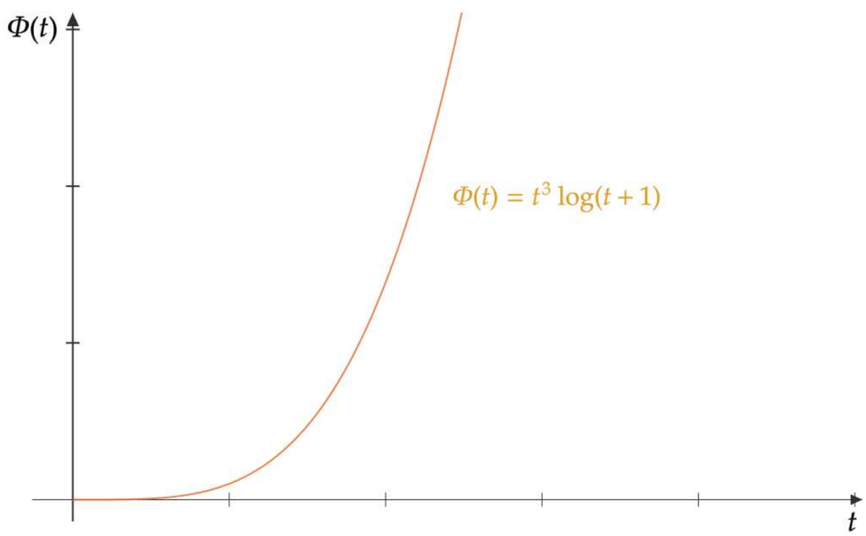
$$h_\Phi(t) \geq \lim_{s \to 0^+} \frac{\Phi(st)}{\Phi(s)} = t^p \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{st+1}}{\frac{1}{s+1}} = t^p.$$

Logo, $h_\Phi(t) = t^p$ para qualquer $0 < t < 1$.
Portanto,

$$i(\Phi) = \sup_{0<t<1} \frac{\log(h_\Phi(t))}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{p\cancel{\log t}}{\cancel{\log t}} = p.$$

Isso encerra o desejado neste exemplo.

Figura 2 – Gráfico da função $\Phi(t) = t^3 \log(t+1)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.2.35 *No contexto das N-funções temos que se $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, então existem duas constantes p_1 e p_2 tais que $1 < p_1 \leq p_2 < +\infty$*

$$c^{-1} \min\{s^{p_1}, s^{p_2}\}\Phi(t) \leq \Phi(st) \leq c \max\{s^{p_1}, s^{p_2}\}\Phi(t), \ \forall t, s \geq 0, \tag{29}$$

onde $c > 0$ é uma constante que independe de t e s(cf. [31]).

Agora podemos definir os espaços Orlicz com peso.

Definição 2.2.36 *Dados um peso ω, $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ uma N-função podemos definir o* ***espaço de Orlicz com peso*** *sendo o conjunto $L^{\Phi}_{\omega}(E)$ de todas as funções mensuráveis g em E tais que*

$$\rho_{\Phi,\omega}(g) =: \int_E \Phi(|g(x)|)\omega(x)dx < +\infty,$$

que é uma modular. Assim dotamos com a seguinte norma de Luxemburg

$$\|g\|_{L^{\Phi}_{\omega}(E)} =: \inf \left\{ t > 0 : \rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{g}{t}\right) \leq 1 \right\}.$$

Além disso, o espaço de Orlicz-Sobolev com peso $W^{k,\Phi}_{\omega}(E)$ (para um inteiro $k \geq 0$) é o conjunto de todas funções mensuráveis g em E tais que todas as derivadas no sentido das distribuições $D^{\alpha}g$, para α multi-índice com comprimento $|\alpha| = 0, 1, \cdots, k$ pertencem a $L^{\Phi}_{\omega}(E)$ onde dotamos com a seguinte norma

$$\|g\|_{W^{k,\Phi}_{\omega}(E)} =: \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^j g\|_{L^{\Phi}_{\omega}(E)}.$$

Observação 2.2.37 *A respeito da definição acima temos que:*

i. *A condição $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ é para garantir que $L^{\Phi}_{\omega}(E)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

ii. *Vale ressaltar que os espaços de Orlicz com peso aparecem naturalmente na análise harmônica, como no estudo de potenciais e transformadas de Riesz (cf. [31] para mais detalhes).*

iii. *Ressaltamos aqui que se $\Phi(t) = t^q$ para $q > 1$, $L^{\Phi}_{\omega}(E)$ coincide com o clássico espaço de Lebesgue com peso $L^q_{\omega}(E)$ bem como $W^{k,\Phi}_{\omega}(E)$ coincide com o espaço de Sobolev com peso $W^{k,q}_{\omega}(E)$. Além desse caso, se ainda impormos que $\omega = 1$ segue-se que $L^{\Phi}_{\omega}(E)$ e $W^{k,\Phi}_{\omega}(E)$ são os espaços de Lebesgue e Sobolev $L^q(E)$ e $W^{k,q}(E)$, respectivamente.*

iv. *Pela definição acima e a Observação* (2.2.35) *seguem as seguintes inclusões*

$$L^{\infty}(E) \subset L^{p_2}_{\omega}(E) \subset L^{\Phi}_{\omega}(E) \subset L^{p_1}_{\omega}(E) \subset L^1(E),$$

Ou seja, os espaços de Orlicz com peso, são espaços de transição entre os espaços de Lebesgue com peso L^p_{ω}'s. Além disso, sobre as condições acima temos a seguinte estima-

tiva

$$\rho_{\Phi,\omega}(g) \leq \mathrm{C}(\|g\|^{p_2}_{L^\Phi_\omega(E)} + 1), \tag{30}$$

onde $\mathrm{C} > 0$ *independe de* g *(confira [12]).*

Agora vamos explorar algumas propriedades pertinentes de tais espaços. Inicialmente, estabeleceremos quando podemos mergulhar o espaço de Orlicz sobre os espaços de Lebesgue. Para isso, recordemos pela Observação 2.2.32 que $i(\Phi) > 1$ para N-funções $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Agora podemos enunciar o resultado de mergulho comentado.

Lema 2.2.38 *Sejam* $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ *uma* N*-função,* $\omega \in A_{i(\Phi)}$ *um peso e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto mensurável e limitado. Então, existe* $p_0 \in (1, i(\Phi))$ *dependendo apenas de* $i(\Phi)$ *e* ω *tal que* $L^\Phi_\omega(\Omega)$ *pode ser mergulhado continuamente em* $L^{p_0}(\Omega)$*. Sobre tal mergulho temos ainda a seguinte estimativa*

$$\|g\|_{L^{p_0}(\Omega)} \leq \mathrm{C}'\|g\|_{L^\Phi_\omega(\Omega)}, \ \forall g \in L^\Phi(\Omega),$$

onde $\mathrm{C}' = \mathrm{C}'(n, i(\Phi), \omega) > 0$ *independe de* g*.*

Prova: Ver [12, Lema 2.5]. ■

Agora fazendo paralelo à subseção anterior também temos uma versão do clássico Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener 2.1.14 para os espaços de Orlicz com peso que iremos precisar mais adiante.

Lema 2.2.39 *Sejam* $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ *uma* N*- função e* $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ *um peso. Então,*

$$\rho_{\Phi,\omega}(g) \leq \rho_{\Phi,\omega}(\mathcal{M}(g)) \leq \mathrm{C}\rho_{\Phi,\omega}(g)$$

para toda $g \in L^\Phi_\omega(\mathbb{R}^n)$*, onde a constante* $\mathrm{C} > 0$ *é independente de* g*.*

Prova: Ver [31, Teorema 2.1.1]. ■

Também precisaremos de uma condição suficiente para a Hessiana no sentido das distribuições pertencer ao espaço de Orlicz com peso.

Lema 2.2.40 *Sejam* Φ *uma* N*-função que atende a condição* $\Delta_2 \cap \nabla_2$ *e* $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ *um peso. Considere* $u \in C^0(E)$*, onde* $E \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio limitado e ponha para cada* $r > 0$

$$\Theta(u, r)(x) =: \Theta(u, \mathrm{B}_r(x) \cap E)(x), \ x \in E.$$

Se $\Theta(u, r) \in L^\Phi_\omega(E)$*, então a Hessiana no sentido das distribuições* $D^2u \in L^\Phi_\omega(E)$ *com a seguinte estimativa*

$$\|D^2u\|_{L^\Phi_\omega(E)} \leq 8\|\Theta(u, r)\|_{L^\Phi_\omega(E)}.$$

Prova: Isso é garantido em [12, Lema 3.4]. ■

Como nos cenários dos espaços de Lebesgue e os e Lorentz com peso temos a seguinte caracterização variacional de funções com respeito aos espaços de Orlicz com peso.

Proposição 2.2.41 *Sejam $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ uma N-função, ω um A_s peso para algum $s \in (1, \infty)$ e $g : E \to \mathbb{R}$ uma função mensurável em um domínio limitado $E \subset \mathbb{R}^n$. Considere $\eta > 0$ e $M > 1$ constantes. Então,*

$$g \in L^{\Phi}_{\omega}(E) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(M^j)\omega(\{x \in E; |g(x)| > \eta M^j\}) =: S < \infty$$

e

$$\mathrm{C}^{-1} S \leq \rho_{\Phi,\omega}(g) \leq \mathrm{C}(\omega(E) + S),$$

com $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\eta, \mathrm{M}, \Phi, \omega)$ constante positiva.

Prova: Ver Lema 4.6 de Byun et al. em [13]. ■

Na Teoria dos espaços funcionais, um dos espaços mais notórios são os espaços das funções α-Hölder contínuas. Vários resultados da Teoria de Regularidade de EDP's são expressos ou tem relação íntima com as funções α-Hölder contínuas. Nessa perspectiva temos a seguinte definição.

Definição 2.2.42 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\alpha \in (0, 1]$ um número real. O **Espaço de Hölder** $C^{0,\alpha}(\Omega)$ trata-se do conjunto das funções contínuas $u \in C^0(\Omega)$ tais que*

$$[u]_{0,\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty.$$

Desta forma, podemos definir a norma Hölder pondo

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + [u]_{0,\alpha,\Omega}$$

Observação 2.2.43 *Sobre a Definição 2.2.42:*

i. *Define-se analogamente o espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ onde basta apenas trocar Ω por $\overline{\Omega}$ acima.*

ii. *$C^{0,\alpha}(\Omega)$ (resp. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$) é um subespaço vetorial de $C^0(\Omega)$ (resp. $C^0(\overline{\Omega})$) e munindo-o com $\|\cdot\|$ torna-se um espaço de Banach.*

iii. *Quando $\alpha = 1$, o espaço $C^{0,1}(\Omega)$ (resp. $C^{0,1}(\overline{\Omega})$) é denominado espaço das funções Lipschitz e será denotado por $\mathrm{Lip}(\Omega)$ (resp. $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$).*

Uma propriedade básica que será de grande utilidade mais adiante é a relação entre os espaços Hölder para índices diferentes.

Proposição 2.2.44 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, vale o seguinte mergulho*

$$C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

para $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, isto é, temos a inclusão $i : C^{0,\beta}(\Omega) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ é um operador contínuo.

Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \mathrm{C}(\alpha, \beta, \textit{diam}(\Omega))\|u\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}, \quad \forall u \in C^{0,\beta}(\Omega).$$

Prova: Realmente, dada $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$ temos para quaisquer $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= |x-y|^{\beta-\alpha}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}} \\ &\leq |x-y|^{\beta-\alpha}[u]_{0,\beta,\Omega} \\ &\leq \mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\alpha}[u]_{0,\beta,\Omega} < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que, $\beta - \alpha \geq 0$, Ω é limitado e $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$. Portanto, tomando o supremo acima variando $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$ segue que,

$$[u]_{0,\alpha,\Omega} \leq \mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\alpha}[u]_{0,\beta,\Omega}. \tag{31}$$

E como $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$, em particular, $u \in C^{0}(\Omega)$. Logo, por essa pertinência e a estimativa (31) segue que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Por fim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + [u]_{0,\alpha,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\alpha}[u]_{0,\beta,\Omega} \\ &\leq \mathrm{C}\|u\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $\mathrm{C} = \max\left\{1, \mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\alpha}\right\}$. O que finaliza a prova do desejado. ∎

Observação 2.2.45 *Vale o mesmo resultado para os espaços* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Podemos definir também os espaços Hölder de ordem superior como segue.

Definição 2.2.46 *Dados* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0, 1]$, *definimos o espaço* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *como o conjunto das funções* $u \in C^{k}(\Omega)$ *tal que a seguinte norma é finita,*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^{k}(\Omega)} + [D^k u]_{\alpha,\Omega},$$

em que

$$\|u\|_{C^{k}(\Omega)} := \sum_{|\zeta| \leq k} \|D^{\zeta}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad e \quad [D^k u]_{\alpha,\Omega} = \sum_{|\zeta|=k} [D^{\zeta}u]_{0,\alpha,\Omega}.$$

Observação 2.2.47 *Sobre a definição acima:*

i. Define-se analogamente acima os espaços $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Tais espaços (*$C^{k,\alpha}(\Omega)$ *e* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*) munidos das respectivas normas são espaços de Banach.*

ii. Pela Proposição 2.2.44, temos analogamente para domínios limitados,

$$C^{\infty}(\Omega) \subset \ldots \subset C^{2,\alpha}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\Omega) \subset C^{1}(\Omega) \subset C^{0,1}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0}(\Omega),$$

para qualquer $\alpha \in (0,1)$.

iii. Em $C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_r^+})$ podemos definir a norma adimensional

$$\begin{aligned}\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{B_r^+})} &= \|u\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}_r^+})} + r\|Du\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}_r^+})} + r^2\|D^2u\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}_r^+})} + \\ &+ r^{2+\alpha} \sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}_r^+} \\ x \neq y}} \frac{\|D^2u(x) - D^2u(y)\|}{|x-y|^\alpha}.\end{aligned}$$

Um fato interessante sobre essa norma é sua invariância por processo de escalonamento. Tal norma será de grande utilidade no capítulo 7.

Na Teoria dos Espaços Funcionais, existe uma generalização natural para a caracterização dos Espaços Hölder como veremos abaixo. Essa visão será de suma importância para a abordagem de certos tópicos nos capítulos posteriores desse manuscrito. Para isso, vem de extrema importância a Definição dos *Espaços de Campanato*:

Definição 2.2.48 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $k \geq 0$ um inteiro, $1 \leq p < \infty$ e $\lambda \geq 0$. Definimos o **Espaço de Campanato** $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ como o conjunto das funções $f \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$[u]_{k,p,\lambda;\Omega} = \sup_{\substack{x_0 \in \overline{\Omega} \\ 0 < r \leq diam(\Omega)}} \left[\frac{1}{r^\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,r)} |u(x) - P(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde $\mathcal{P}_k$ é o espaço das funções polinomiais em $\mathbb{R}^n$ de grau menor ou igual a k sendo adotado acima a notação $\Omega(x_0,r) = \overline{\mathrm{B}_r(x_0)} \cap \Omega$ para cada $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Em $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ podemos definir uma norma que o torne um espaço de Banach (Veja [32]), considerando

$$\|u\|_{\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{k,p,\lambda,\Omega}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O principal resultado a respeito de tais espaços é o conhecido *Mergulho de Campanato* que afirma sob certas condições vale que

$$\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\Omega) \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{\lambda - n - kp}{p}, \tag{32}$$

provado em [32]. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.49 (Mergulho de Campanato) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado que não tem cúspides externas, isto é, se existe uma constante $\mathfrak{U} > 0$ tal que para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $[0, diam(\Omega)]$, vale que*

$$|\Omega(x_0,r)| \geq \mathfrak{U} r^n.$$

Se $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ com $n + kp < \lambda \leq n + (k+1)p$, então $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ em que $\alpha = \frac{\lambda-n-kp}{p}$ e *vale a seguinte estimativa,*

$$[D^k u]_{k,\alpha} \leq \mathrm{C}_0(n,k,p,\mathfrak{U})[u]_{k,p,\lambda,\Omega}.$$

Demonstração: Ver [32, p. 8]. ■

Outro espaço de funções relevante nessa linha dos espaços de Campanato é o clássico de Espaço de Morrey o qual definimos a seguir.

Definição 2.2.50 *Sejam E um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \theta \leq n$. Por $L^{p,\theta}(E)$ será denotado o Espaço de Morrey das funções $h \in L^p_{loc}(E)$ tais que*

$$\|h\|_{L^{p,\theta}(E)} = \sup_{\substack{x_0 \in E \\ 0<r\leq diam(E)}} \left(r^{\theta-n} \int_{E(x_0,r)} |h(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde $E(x_0,r) = E \cap \mathrm{B}(x_0,r)$.

Observação 2.2.51 *No contexto acima, é possível ver que $L^{p,\lambda}(E) \subset L^p(E)$ e*

$$\|h\|_{L^p(E)} \leq (diam(E))^{\frac{n-\lambda}{p}} \|h\|_{L^{p,\lambda}(E)},\ \forall f \in L^{p,\lambda}(E).$$

Para mais detalhes sobre tal fato e outras propriedade dos espaços de Morrey recomendamos ao leitor consultar [1, Capítulo 2] e [28, p. 47].

Tais espaços estão interligados pelo seguinte resultado.

Teorema 2.2.52 (Campanato-Morrey) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado que não tem cúspides externas, $0 \leq \lambda < n$ e $1 \leq p < \infty$. Então, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ é isomorfo a $\mathcal{L}^{p,\lambda}_0(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [28, Proposição 2.3]. ■

Observação 2.2.53 *A constante λ no Teorema 2.2.52 é assintótica no sentido que não pode ser igual a dimensão n. De fato, em $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $p = 1$ temos que $u(x) = -\log x,\ x \in (0,1)$ pertence a $\mathcal{L}^{1,1}_0(0,1)$, contudo não pertence à $L^{1,1}(0,1)$ (Ver [28, Capítulo 2]).*

Mais geralmente, Kovats em [32], generalizou o Teorema do Mergulho de Campanato no contexto dos espaços de *Dini-Campanato*. Explicitaremos, sobre tal resultado que justificará a abordagem adequada no capítulo 7. Para tal fim, necessitaremos de algumas definições e observações preliminares.

Definição 2.2.54 *Um módulo de continuidade é qualquer função $\omega : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ crescente tal que*

$$\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = \omega(0) = 0.$$

Observação 2.2.55 *A função $\omega(t) = t^\alpha,\ t \in [0,\infty)$ para $\alpha \in (0,1]$ é um exemplo de módulo de continuidade.*

Um exemplo mais sofisticado de módulo de continuidade vem a seguir na seguinte definição:

Definição 2.2.56 *Um módulo de continuidade $\omega : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é dito **Dini** se*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty.$$

O termo *módulo de continuidade* é associado a utilidade de tais funções para medir quantitatividade a continuidade uniforma de uma função dada. Isso fica mais claro com a seguinte Definição

Definição 2.2.57 *Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admite módulo de continuidade ω se*

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|), \forall x, y \in \Omega,$$

onde ω é um módulo de continuidade. Ademais, definimos o módulo de continuidade da função f para $t \geq 0$

$$\omega_f(t) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|\leq t}} |f(x) - f(y)|.$$

Observação 2.2.58 *Neste caso dizer que f admite módulo de continuidade ω garante que existe módulo de continuidade ω tal que $\omega \geq \omega_f$. Se $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, então $\omega_f(t) \leq [f]_{0,\alpha,\Omega} t^\alpha$. Por outro lado, dizemos que f é Hölder contínua em $x_0 \in \Omega$ se existir constante $c_0 > 0$*

$$\omega_f(x_0)(t) =: \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |x-x_0|\leq t}} |f(x) - f(x_0)| \leq c_0 t^\alpha$$

e denotamos $f \in C^{0,\alpha}(x_0)$. Neste caso,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \omega_f(x_0)(|x-x_0|) \leq c_0|x-x_0|^\alpha, \forall x \in \Omega.$$

Para mais detalhes recomendamos aos leitores o livro de Da Silva e Ricarte [52].

Com o conceito de módulo de continuidade podemos generalizar a definição dos espaços Hölder como segue:

Definição 2.2.59 *Definimos o espaço $C^{k,\omega}(\Omega)$ para k inteiro não-negativo e ω módulo de continuidade das funções $u \in C^k(\Omega)$ que tais que*

$$[D^k u]_{\omega;\Omega} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y \\ |\kappa|=k}} \frac{|D^\kappa u(x) - D^\kappa u(y)|}{\omega(|x-y|)} < \infty.$$

Agora podemos definir o conceito de módulo de continuidade Dini.

Definição 2.2.60 *Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Dini contínua se f admite um módulo de continuidade ω que é Dini no sentido da Definição 2.2.56.*

Observação 2.2.61 *Neste caso, ω_1 definido por*

$$\omega_1(t) := \begin{cases} 0, & se\ t = 0 \\ \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau, & se\ t > 0. \end{cases}$$

é um módulo de continuidade. De fato, sabemos que para cada $t > 0$, tem-se

$$\omega_1(t) \leq \begin{cases} \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau, & se\ t \in (0,1] \\ \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau + \omega(t)\ln(t), & se\ t \in (1,\infty) \end{cases}$$

que é finito pela hipótese de f ser Dini contínua e por $\omega_1(0) = 0$ segue que ω_1 está bem definida. Agora, provemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \omega_1(t) = 0 = \omega_1(0).$$

Para isso, dado $\varepsilon > 0$ como ω é Dini, tem-se

$$\int_0^1 \frac{\tau}{\tau} d\tau < \infty$$

tem-se pela Continuidade da Integral de Lebesgue (confira [53, Teorema 1.12]) que existe $t_0 > 0$ tal que para todo $0 < t < t_0$

$$|\omega_1(t) - 0| = \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \varepsilon.$$

Isso prova o afirmado. Logo, ω_1 é crescente. Portanto, ω_1 é um módulo de continuidade.

Definição 2.2.62 *Dados um módulo de continuidade Dini $\omega : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ e Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ definimos os espaços de* ***Dini-Campanato*** *$\mathcal{M}_p^{k,\omega}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$[u]'_{k,p,\omega;\Omega} = \sup_{\substack{x_0\in\overline{\Omega} \\ 0<r\leq diam(\Omega)}} \left[\frac{1}{r^{kp+n}\omega(r)^p} \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,r)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde $\mathcal{P}_k$ é o espaço das funções polinomiais em $\mathbb{R}^n$ de grau menor ou igual a k e para cada $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ usamos a notação $\Omega(x_0,r) = \overline{\mathrm{B}_r(x_0)} \cap \Omega$.

Agora podemos enunciar o mergulho de Dini-Campanato provado em [32]:

Teorema 2.2.63 (Mergulho de Dini-Campanato) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado que não tem cúspides externas, $1 \leq p < \infty$ e ω um módulo de continuidade Dini. Se $u \in \mathcal{M}_p^{k,\omega}(\Omega)$, então $u \in C^{k,\omega_1}(\Omega)$ para $\omega_1(t) = \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau$ e vale as seguintes estimativas*

$$|D^k u(x) - D^k u(y)| \leq \mathrm{C}_0(n,k,p,\mathfrak{U})\omega_1(|x-y|),\ \forall x,y \in \Omega.$$

2.3 Equações elípticas totalmente não-lineares com condições de bordo oblíquo

Nesta última parte sobre conceitos preliminares abordaremos de forma breve alguns resultados sobre soluções de viscosidade seguinte problema

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{33}$$

onde $F : \text{Sym}(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ (aqui $\text{Sym}(n)$ é o espaço das matrizes simétricas de ordem n) é um **operador uniformemente elíptico**, ou seja, existem constantes reais $0 < \lambda \leq \Lambda$, chamadas *constantes de elipticidade do operador F*, tais que

$$\lambda \|N\| \leq F(M+N, p, r, x) - F(M, p, r, x) \leq \Lambda \|N\|,$$

para todos $(p, r, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ e $M, N \in \text{Sym}(n)$ com $N \geq 0$, onde entendemos aqui por essa desigualdade matricial que a matriz N é não-negativa definida e $\|N\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Nx\|$. Além disso, $\gamma, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $\beta : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ é um campo dado que satisfaz a **condição de bordo oblíquo** a qual diz que existe constante $\mu_0 > 0$ tal que $\beta(x) \cdot \mathbf{n} \geq \mu_0$ para todo $x \in \Gamma$ sendo $\Gamma \subset \partial\Omega$ um aberto relativo e $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior de Ω.

Observação 2.3.1 *Por simplicidade, diremos que F é um operador (λ, Λ)-elíptico para indicar que $0 < \lambda \leq \Lambda$ são as constantes de elipticidade para o operador uniformemente elíptico F.*

Observação 2.3.2 *Em algumas partes do texto trabalharemos com operadores uniformemente elípticos que não dependem das segunda e terceira entradas, mais precisamente operadores da forma,*

$$F(M, p, q, x) = F(M, 0, 0, x)$$

neste caso usaremos a notação $F(M, x)$ para indicar a dependência apenas da entrada de ordem dois e dos coeficientes.

Equações da forma descrita em (33) juntamente com a condição sob a parte do bordo Γ e dentro das hipóteses acima é conhecido **Equações elípticas totalmente não lineares com condição de bordo oblíquo**.

Observação 2.3.3 *Salvo menção contrária quando referirmos ao problema* (33)*, estaremos assumindo as condições descritas acima. Também no restante desse trabalho, sempre estaremos assumindo a condição de bordo oblíquo e que a função γ é não-positiva. Esse último fato ficará mais claro um pouco adiante.*

Feitas essas considerações pertinentes, podemos definir o conceito de solução de viscosidade para (33). Mais precisamente, trabalharemos com dois conceitos de solução de viscosidade para (33), as C^0- soluções de viscosidade e as L^p-soluções de viscosidade.

Definição 2.3.4 (C^0-solução de viscosidade) *Sejam $F \in C^0(Sym(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega)$ um operador (λ, Λ)-elíptico e $f \in C^0(\Omega)$. Uma função $u \in C^0(\Omega \cup \Gamma)$ é dita uma C^0-solução de* *viscosidade para o problema* (33) *se as seguintes condições ocorrem:*

a) **(*Subsolução*)** *Para quaisquer $x_0 \in \Omega \cup \Gamma$ e $\forall\ \varphi \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ tais que φ toca u por cima em x_0 tem-se,*

$$\begin{cases} F\left(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0\right) \geq f(x_0) & \textit{quando} \quad x_0 \in \Omega \\ e \quad \beta(x_0) \cdot D\varphi(x_0) + \gamma(x_0)\varphi(x_0) \geq g(x_0) & \quad \textit{em} \quad\quad x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

b) **(*Supersolução*)** *Para quaisquer $x_0 \in \Omega \cup \Gamma$ e $\forall\ \varphi \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ tais que φ toca u por baixo em x_0 tem-se,*

$$\begin{cases} F\left(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0\right) \leq f(x_0) & \textit{quando} \quad x_0 \in \Omega \\ e \quad \beta(x_0) \cdot D\varphi(x_0) + \gamma(x_0)\varphi(x_0) \leq g(x_0) & \quad \textit{em} \quad\quad x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

Para a próxima definição recordemos da Análise Real que uma propriedade P ocorre em quase todo ponto (q.t.p.) de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se o conjunto dos pontos onde P não ocorre tem medida nula.

Definição 2.3.5 (L^p-Solução de viscosidade) *Sejam F um operador (λ, Λ)-elíptico, $p > \frac{n}{2}$ e $f \in L^p(\Omega)$. Assuma que F é contínua nas variáveis X, q, r e mensurável na variável x. Uma função $u \in C^0(\Omega \cup \Gamma)$ é dita uma L^p-solução de viscosidade* (33) *se as seguinte condições são satisfeitas:*

a) **(*Subsolução*)** *Para todos $\varphi \in W^{2,p}(\Omega \cup \Gamma)$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}$ aberto relativo de $\Omega \cup \Gamma$ com*

$$F\left(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x\right) \geq f(x) + \varepsilon \quad \textit{q.t.p. em} \quad \Omega \cap \mathcal{O}$$

e

$$\beta(x) \cdot D\varphi(x) + \gamma(x)\varphi(x) \geq g(x) + \varepsilon \quad \textit{q.t.p em} \quad \Gamma \cap \mathcal{O}$$

então $u - \varphi$ não atinge mínimo local em $\mathcal{O}$.

b) **(*Supersolução*)** *Para todos $\varphi \in W^{2,p}(\Omega \cup \Gamma)$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}$ aberto relativo de $\Omega \cup \Gamma$ com*

$$F\left(D^2\varphi(x), D\varphi(x), \varphi(x), x\right) \leq f(x) - \varepsilon \quad \textit{q.t.p. em} \quad \Omega \cap \mathcal{O}$$

e

$$\beta(x) \cdot D\varphi(x) + \gamma(x)\varphi(x) \leq g(x) - \varepsilon \quad \textit{q.t.p em} \quad \Gamma \cap \mathcal{O}$$

então $u - \varphi$ não atinge máximo local em $\mathcal{O}$.

Observação 2.3.6 *O conceito de solução de viscosidade foi introduzido em [19] por Crandall e Lions no contexto das equações de Hamilton-Jacobi. Tal ideia remonta por motivação o Princípio do Máximo. Desde então tal conceito vem sendo vastamente explorado no contexto das equações diferenciais parciais, tendo ênfase nos problemas totalmente não-lineares seja elíptico ou parabólico. Para mais detalhes o leitor pode consultar* [*15*] *no contexto introdutório de equações elípticas totalmente não-lineares,* [*37*] *para o problema de natureza oblíquo com* *coeficientes constantes no contexto elíptico e [9] no caso parabólico.*

Para exemplificar os conceitos de solução de viscosidade acima, apresentaremos a seguinte proposição:

Proposição 2.3.7 (Normalização e escalonamento) *Seja u uma C^0- solução de viscosidade para*

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad\quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{34}$$

$K > 0$ *e* $r \in (0,1)$*, onde* F *é* (λ, Λ) *elíptico. Então,* $v(x) = Ku(r^{-1}x), x \in \mathrm{B}_r^+ \cup \mathrm{T}_r$ *é* C^0*-solução de viscosidade para*

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2v, Dv, v, y) &= \tilde{f}(y) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_r^+ \\ \tilde{\beta} \cdot Dv + \tilde{\gamma} v &= \tilde{g} \quad\quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_r, \end{cases}$$

onde temos

$$\tilde{F}(M,p,q,y) = \frac{K}{r^2} F\left(\frac{r^2}{K}M, \frac{r}{K}p, \frac{1}{K}q, \frac{1}{r}y\right),$$

$$\tilde{f}(y) = \frac{K}{r^2} f\left(\frac{1}{r}y\right), \ \tilde{\beta}(y) = \beta\left(\frac{1}{r}y\right), \ \tilde{\gamma}(y) = \frac{1}{r}\gamma\left(\frac{1}{r}y\right) \quad e \quad \tilde{g}(y) = \frac{K}{r} g\left(\frac{1}{r}y\right).$$

Ademais, $\tilde{F}$ *também é* (λ, Λ)*-uniformemente elíptico.*

Prova: Provemos que v é subsolução de viscosidade e o caso de ser também supersolução é de maneira análoga. Com efeito, seja $x_0 \in \mathrm{B}_r^+ \cup \mathrm{T}_r$ e $\varphi \in C^2(\mathrm{B}_r^+ \cup \mathrm{T}_r)$ tal que φ toque v por cima em x_0. Definamos $y_0 = r^{-1}x_0 \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1$. Agora definindo a função auxiliar $\varrho(x) = \frac{1}{K}\varphi(rx), x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1$ e notemos que claramente pela regularidade de φ segue que $\varrho \in C^2(\mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1)$. Além disso, por φ tocar v em x_0 segue para todo $x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1$ que

$$\varrho(x) = \frac{1}{K}\varphi(rx) \overset{rx \in \mathrm{B}_r^+ \cup \mathrm{T}_r}{\geq} \frac{1}{\cancel{K}}\cancel{K}u\left(\frac{1}{\cancel{r}}\cancel{r}x\right) = u(x),$$

com igualdade em y_0. Daí, ϱ toca u por cima em $y_0 \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1$. Portanto, por u ser em particular subsolução de viscosidade para (34) segue que

$$\begin{cases} F\left(D^2\varrho(y_0), D\varrho(y_0), \varrho(y_0), y_0\right) \geq f(y_0) & \text{se} \quad y_0 \in \mathrm{B}_1^+ \\ \beta(y_0) \cdot D\varrho(y_0) + \gamma(y_0)\varrho(y_0) \geq g(y_0) & \text{se} \quad y_0 \in \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Se $x_0 \in \mathrm{B}_r^+$ então $y_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e assim estamos no primeiro caso acima. Daí pela definição de ϱ e pela Regra da Cadeia obtemos que

$$F\left(\frac{r^2}{K}D^2\varphi(x_0), \frac{r}{K}D\varphi(x_0), \frac{1}{K}\varphi(x_0), \frac{1}{r}x_0\right) \geq f\left(\frac{1}{r}x_0\right),$$

ou seja, pela definição de $\tilde{F}$ e $\tilde{f}$,

$$\tilde{F}(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0) \geq \tilde{f}(x_0).$$

Por outro lado, se $x_0 \in \mathrm{T}_1$, então $y_0 \in \mathrm{T}_r$, donde pela desigualdade acima envolvendo ϱ em T_r obtemos

$$\beta\left(\frac{1}{r}x_0\right) \cdot \left(\frac{r}{K}D\varphi(x_0)\right) + \gamma\left(\frac{1}{r}x_0\right)\frac{1}{K}\varphi(x_0) \geq g\left(\frac{1}{r}x_0\right) \tag{35}$$

pela linearidade do produto interno e as definições de $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{g}$, podemos reescrever a equação (35),

$$\tilde{\beta}(x_0) \cdot D\varphi(x_0) + \tilde{\gamma}(x_0)\varphi(x_0) \geq \tilde{g}(x_0).$$

E assim v é de fato subsolução de viscosidade para o problema desejado. Por fim, notemos que a definição de $\tilde{F}$ implica na seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\tilde{F}(M+N, p, q, y) - \tilde{F}(M, p, q, y) &= \frac{K}{r^2}\Bigg(F\left(\frac{r^2}{K}(M+N), \frac{r}{K}p, \frac{1}{K}q, \frac{1}{r}y\right) - \\ &- F\left(\frac{r^2}{K}N, \frac{r}{K}p, \frac{1}{K}q, \frac{1}{r}y\right)\Bigg),\end{aligned}$$

para todos $(p, q, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathrm{B}_1^+$, $M, N \in Sym(n)$ com $N \geq 0$. Assim a (λ, Λ)-elipticidade de F implica que

$$\tilde{F}(M+N, p, q, y) - \tilde{F}(M, p, q, y) \leq \frac{K}{r^2}\Lambda\left\|\frac{r^2}{K}N\right\| = \frac{\cancel{K}}{\cancel{r^2}}\Lambda\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{K}}\|N\| = \Lambda\|N\|.$$

Bem como

$$\tilde{F}(M+N, p, q, y) - \tilde{F}(M, p, q, y) \geq \frac{K}{r^2}\lambda\left\|\frac{r^2}{K}N\right\| = \frac{\cancel{K}}{\cancel{r^2}}\lambda\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{K}}\|N\| = \lambda\|N\|.$$

Isso garante a condição de (λ, Λ)-elipticidade uniforme para o operador $\tilde{F}$ e assim finalizamos a prova da proposição. ■

Observação 2.3.8 *Na Proposição 2.3.7 mostramos, em particular, que o operador $\tilde{F}$ ainda está na mesma "classe"do operador F no sentido de elipticidade uniforme.*

Para o que segue, definiremos no sentido fraco a classe de "todas as soluções para todas as equações elípticas". Para isso, introduziremos os *operadores extremais de Pucci*.

Definição 2.3.9 *Sejam $0 < \lambda \leq \Lambda$. Para qualquer $M \in Sym(n)$, os **operadores extremais de***

Pucci *$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}$ e $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}$ são definidos como segue:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M) &= \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i, \\ \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) &= \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i \end{aligned}$$

onde e_i são os autovalores de M.

Com esses operadores extremais podemos usar a seguinte notação por conveniência para $b \geq 0$

$$\mathcal{L}^{\pm}(u) =: \mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}(D^2u) \pm b|Du|.$$

Definição 2.3.10 *Sejam $f \in C^0(\Omega)$ uma função, $\lambda \leq \Lambda$ e b três constantes positivas. Denotamos por $\underline{S}(\lambda, \Lambda, b, f)$ o espaço das funções $u \in C^0(\Omega)$ tais que*

$$\mathcal{L}^+(u) \geq f(x)$$

no sentido da viscosidade em Ω. Similarmente, $\overline{S}(\lambda, \Lambda, b, f)$ é o espaço das funções $u \in C^0(\Omega)$ tais que

$$\mathcal{L}^-(u) \leq f(x)$$

no sentido da viscosidade em Ω.

Também definimos a partir das classes fundamentais de sub e super soluções no sentido da viscosidade acima as seguintes classes que usaremos no decorrer do texto

$$S(\lambda, \Lambda, b, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, b, f) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda, b, f) \text{ e } S^*(\lambda, \Lambda, b, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, b, -|f|) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda, b, |f|).$$

Observação 2.3.11 *Com respeito à definição acima, quando $b = 0$ abreviaremos a notação $\underline{S}, \overline{S}, S, S^*(\lambda, \Lambda, 0, f)$ por apenas $\underline{S}, \overline{S}, S, S^*(\lambda, \Lambda, f)$, respectivamente.*

Sobre essa classe de soluções temos o seguinte resultado que mostra a ligação com as equações elípticas totalmente não lineares.

Proposição 2.3.12 *Seja $u \in C^0(\Omega)$ satisfazendo no sentido da viscosidade*

$$F(D^2u, x) \geq f(x) (\textit{respectivamente } F(D^2u, x) \leq f(x)) \text{ em } \Omega.$$

Então,

$$u \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(0, x)\right) \left(\textit{respectivamente } u \in \overline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(0, x)\right)\right).$$

Mais geralmente, para qualquer $\phi \in C^2(\Omega)$ temos que

$$u - \phi \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(D^2\phi(x), x)\right)$$

$$\left(\textit{respectivamente } u - \phi \in \overline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(D^2\phi(x), x)\right)\right).$$

Demonstração: Ver [15], Proposição 2.13, p. 16. ■

Agora voltando ao interesse do problema (33) introduziremos alguns resultados de extrema importância nesse contexto para os capítulos seguintes.

Lema 2.3.13 (Estimativa ABP) *Sejam* $\Omega \subset \mathrm{B}_1$ *e* $u \in C^0(\overline{\Omega})$ *tal que*

$$\begin{cases} u \in \mathrm{S}(\lambda, \Lambda, b, f) & \textit{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \textit{sobre} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Suponha que exista $\varsigma \in \partial \mathrm{B}_1$ *tal que* $\beta \cdot \varsigma \geq \mu_0$ *e* $\gamma \leq 0$ *em* Γ. *Então,*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \Gamma)} + \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, b, \mu_0)(\|g\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|f\|_{L^n(\Omega)}).$$

Ademais, se $b = 0$ *então existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, \lambda, \Lambda, \mu_0) \in \left(0, \frac{n}{2}\right)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \Gamma)} + \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, b, \mu_0)(\|g\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|f\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\Omega)}).$$

Demonstração: Ver [37, Teorema 2.1] e [8], p.7. ■

Observação 2.3.14 *A constante* ε_0 *é chamada* ***constante de Escauriaza*** *em homenagem ao matemático espanhol Luis Escauriaza que estendeu no artigo* $W^{2,n}$ *A Priori Estimates for Solutions to Fully Non-linear Equations (Ver [22]) as estimativas* $W^{2,p}$ *interiores obtidas por Caffarelli em [14] para* $p > n - \varepsilon_0$*, onde essa constante positiva* $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{n}{2}\right)$ *depende apenas de* n*,* λ *e* Λ*.*

A seguir temos resultados de regularidade $C^{0,\alpha}$, $C^{1,\alpha}$ e $C^{2,\alpha}$ regularidade para o problema (45) com apenas a dependência do termo D^2u.

Teorema 2.3.15 (Regularidade $C^{0,\alpha'}$) *Seja* $u \in C^0(\Omega \cup \Gamma)$ *satisfazendo no sentido da viscosidade*

$$\begin{cases} u \in \mathrm{S}(\lambda, \Lambda, f) & \textit{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g & \textit{sobre} \quad \Gamma \end{cases}$$

Então, para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega \cup \Gamma$*,* $u \in C^{0,\alpha'}(\overline{\Omega'})$ *e*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\Omega'})} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)}, \Omega', \Omega)\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}\right)$$

onde $\alpha' \in (0,1)$ *depende apenas de* n, λ, Λ *e* μ_0 *e* $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{n}{2}\right)$ *é a constante de Escauriaza.*

Demonstração: Ver [37, Teorema 1.1]. ■

Teorema 2.3.16 (Regularidade $C^{1,\alpha'}$) *Sejam* u *solução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(D^2u) &= f(x) & \textit{em} & \Omega, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g & \textit{sobre} & \Gamma, \end{cases}$$

e $0 < \alpha' < \overline{\alpha}$*, onde* $\overline{\alpha} \in (0,1)$ *é uma constante que depende apenas de* n*,* λ*,* Λ *e* μ_0*. Suponha ainda que* $\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha'}(\overline{\Gamma})$ *e que* f *cumpre a seguinte condição*

$$\left(\fint_{\Omega(x_0,r)} |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \mathrm{C}_f r^{\alpha'-1}, \ \forall x_0 \in \Omega, \forall r > 0.$$

Então, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega \cap \Gamma$*,* $u \in C^{1,\alpha'}(\overline{\Omega'})$ *e*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha'}(\overline{\Omega'})} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathrm{C}_f + \|g\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\Gamma})} + |F(0)|),$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* n*,* λ*,* Λ*,* μ_0*,* α'*,* $\|\beta\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\Gamma})}$*,* $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\Gamma})}$*,* Ω' *e* Ω*.*

Demonstração: Ver [37, Teorema 1.2]. ∎

Teorema 2.3.17 (Regularidade $C^{2,\alpha'}$) *Seja* u *solução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(D^2u) &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \qquad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Assuma que F *é convexa,* $0 < \alpha' < \overline{\alpha}$ *onde* $\overline{\alpha} \in (0,1)$ *é uma constante dependendo apenas de* n*,* λ*,* Λ *e* μ_0 *e* $\Gamma \in C^{1,\alpha'}$*. Se* $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha'}(\overline{\Gamma})$ *e* $f \in C^{0,\alpha'}(\Omega)$*, então para qualquer* $\Omega' \subset\subset \Omega \cup \Gamma$*,* $u \in C^{2,\alpha'}(\overline{\Omega'})$ *e vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha'}(\overline{\Omega'})} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^{0,\alpha'}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha'}(\overline{\Gamma})} + |F(0)|)$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* n*,* λ*,* Λ*,* μ_0*,* α'*,* $\|\beta\|_{C^{1,\alpha'}(\overline{\Gamma})}$*,* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha'}(\overline{\Gamma})}$*,* Ω *e* Ω'*.*

Demonstração: Ver [37, Teorema 1.3] ∎

Nessa linha do problema com bordo oblíquo também ressaltaremos alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções de viscosidade do problema,

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \qquad \text{sobre} \quad \Gamma \\ u(x) &= \varphi(x) \quad \text{em} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases}$$

onde Γ é um aberto relativo de $\partial\Omega$. Para isso, precisaremos da seguinte hipótese estrutural adicional:

(**SC**) Existe um módulo de continuidade $\tilde{\omega}$(Isso quer dizer que $\tilde{\omega} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função não-decrescente com $\lim\limits_{t\to 0} \tilde{\omega}(t) = 0$) tal que

$$\psi_F(x,y) \leq \tilde{\omega}(|x-y|),$$

onde para $x_0 \in \Omega$ fixado, definimos a função:

$$\psi_F(x;x_0) =: \sup_{\mathrm{X}\in\mathrm{Sym}(n)} \frac{|F(\mathrm{X},0,0,x) - F(\mathrm{X},0,0,x_0)|}{1+\|\mathrm{X}\|},$$

que mede a oscilação dos coeficientes do operador F em torno de x_0. Por simplicidade de notação quando $x_0 = 0$ escreveremos $\psi_F(x,0) = \psi_F(x)$. Em outros termos, os coeficientes do operador F admitem um módulo de continuidade $\tilde{\omega}$.

A saber, temos os seguintes três Teoremas:

Teorema 2.3.18 (Princípio de Comparação) *Suponhamos que* $\Gamma \in C^2$ *e* $\beta \in C^2(\overline{\Gamma})$. *Assuma que* F *satisfaz a condição* $(\mathbf{SC})$. *Sejam* u *e* v *tais que no sentido da viscosidade satisfazem*

$$\begin{cases} F(D^2u,x) & \geq & f_1(x) & \textit{em} & \Omega, \\ \beta\cdot Du+\gamma u & \geq & g_1 & \textit{sobre} & \Gamma \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F(D^2v,x) & \leq & f_2(x) & \textit{em} & \Omega, \\ \beta\cdot Dv+\gamma v & \leq & g_2 & \textit{sobre} & \Gamma \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} u-v \in \underline{\mathcal{S}}\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda,f_1-f_2\right) & \textit{em} & \Omega, \\ \beta\cdot D(u-v)+\gamma(u-v) \geq g_1-g_2 & \textit{sobre} & \Gamma \end{cases}$$

Demonstração: Segue na mesma linha da prova de [37, Teorema 3.1] com mínimas alterações usando a hipótese estrutural $(\mathbf{SC})$. ∎

Teorema 2.3.19 (Unicidade) *Sejam* $\Gamma \in C^2$, $\beta \in C^2(\overline{\Gamma})$, $\gamma \leq 0$ *e* $\varphi \in C^0(\partial\Omega\setminus\Gamma)$. *Suponhamos que exite* $\varsigma \in \partial\mathrm{B}_1$ *tal que* $\beta\cdot\varsigma \geq \mu_0$ *sobre* Γ. *Assuma ainda que* F *satisfaz a condição estrutural* $(\mathbf{SC})$. *Então, existe no máximo uma solução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(D^2u,x) & = & f(x) & \textit{em} & \Omega, \\ \beta\cdot Du+\gamma u & = & g & \textit{sobre} & \Gamma \\ u(x) & = & \varphi(x) & \textit{em} & \partial\Omega\setminus\Gamma. \end{cases}$$

Demonstração: A prova é consequência direta do Teorema 2.3.18 junto com a Estimativa ABP 2.3.13. ∎

Além da unicidade temos garantido a existência de única solução no sentido da viscosidade de equações elípticas totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo e condição de Dirichlet no complementar do bordo, via os teoremas 2.3.18 e 2.3.19. Esse resultado é descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 2.3.20 (Existência e Unicidade) *Sejam* $\Gamma \in C^2$, $\beta \in C^2(\overline{\Gamma})$ *e* $\varphi \in C^0(\partial\Omega\setminus\Gamma)$. *Assuma que a função* γ *satisfaz* $\gamma \leq 0$. *Suponhamos que existe* $\varsigma \in \partial\mathrm{B}_1$ *tal que* $\beta\cdot\varsigma \geq \mu_0$ *sobre* Γ *e assumamo a condição* $(\mathbf{SC})$. *Em adição, suponhamos que* Ω *cumpre as condições do cone exterior em qualquer* $x \in \partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}$ *e a condição da esfera exterior para qualquer* $x \in \overline{\Gamma}\cap(\partial\Omega\setminus\Gamma)$.

Então, existe única solução de viscosidade $u \in C^0(\overline{\Omega})$ *para*

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &= f(x) \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad\ \ \textit{sobre} \ \ \Gamma \\ u(x) &= \varphi(x) \quad \textit{em} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Demonstração: A prova segue na mesma linha como em [37, Teorema 3.3] com mínimas modificações. A saber, invocamos o Teorema 2.3.19 em vez do [37, Teorema 3.2]. Outras modificações necessárias são as mesmas feitas na prova de 2.3.18. ■

Por fim, temos a condição de estabilidade de soluções de viscosidade, a qual é imprescindível para argumentos de compacidade em geral.

Lema 2.3.21 (Lema de Estabilidade) *Para* $k \in \mathbb{N}$ *consideremos* $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ *sequência crescente de domínios e* $\Omega =: \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$*. Sejam* $p \geq n$ *e* F, F_k *operadores* $(\lambda, \Lambda, \sigma, \xi)$*-elípticos. Assumamos que* $f \in L^p(\Omega)$*,* $f_k \in L^p(\Omega_k)$ *e que* $u_k \in C^0(\Omega_k)$ *são* L^p*-subsoluções(respectivamente supersoluções) de viscosidade de*

$$F_k(D^2u_k, Du_k, u_k, x) = f_k(x) \quad \textit{in} \quad \Omega_k.$$

Além disso, suponhamos que $u_k \to u_\infty$ *localmente uniformemente em* Ω *e que para quaisquer* $\mathrm{B}_r(x_0) \subset \Omega$ *e* $\varphi \in W^{2,p}(\mathrm{B}_r(x_0))$ *temos que*

$$\|(\hat{g} - \hat{g}_k)^+\|_{L^p(\mathrm{B}_r(x_0))} \to 0 \quad \big(\textit{resp.} \ \|(\hat{g} - \hat{g}_k)^-\|_{L^p(\mathrm{B}_r(x_0))} \to 0\big), \tag{36}$$

onde $\hat{g}(x) =: F(D^2\varphi, D\varphi, u, x) - f(x)$ *e* $\hat{g}_k(x) = F_k(D^2\varphi, D\varphi, u_k, x) - f_k(x)$*. Então,* u *é* L^p*-subsolução (resp. supersolução) de viscosidade para*

$$F(D^2u, Du, u, x) = f(x) \quad \textit{in} \quad \Omega. \tag{37}$$

Ademais, se F, f *são contínuas, então* u *é uma* C^0*-subsolução (resp. supersolução) e viscosidade de* (37) *provando a condição em* (36) *ocorre para todas funções teste* $\varphi \in C^2(\mathrm{B}_r(x_0))$.

Demonstração: Ver [16, Teorema 3.8]. ■

3 ESTIMATIVAS $W^{2,p}$ COM CONDIÇÃO DE BORDO OBLÍQUO SOB REGIME ASSINTÓTICO

Nesta parte, estaremos interessados em estudar a seguinte classe de problemas elípticos totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo

$$\begin{cases} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \beta(x)\cdot Du(x) + \gamma(x)u(x) &= g(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{38}$$

no contexto da Teoria de regularidade $W^{2,p}$ sob certas condições e exibiremos algumas consequências de grande relevância desse fato. Vale pontuar que os resultados que serão apresentados neste capítulo fazem parte do artigo "Sharp Hessian estimates for fully nonlinear elliptic equations under relaxed convexity assumptions, oblique boundary conditions and applications"publicado na Revista Journal of Differential Equations (JDE), disponível em `https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022039623003339`, feito juntamente em colaboração com os professores Dr. João Vitor da Silva, Dra. Maria Nilde Barreto Frederico e Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

Para o restante do capítulo precisaremos das seguintes condições estruturais:

(A1) Assumiremos que $F \in C^0(\text{Sym}(n), \mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \Omega)$. Além disso, também assumiremos que existem constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$, $\sigma \geq 0$ e $\xi \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) - \sigma|q_1-q_2| - \xi|r_1-r_2| &\leq F(\mathrm{X}, q_1, r_1, x) - F(\mathrm{Y}, q_2, r_2, x) \\ &\leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) + \sigma|q_1-q_2| + \xi|r_1-r_2| \end{aligned}$$

para todos $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathit{Sym}(n)$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, onde $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda} : \text{Sym}(n) \to \mathbb{R}$ são os operadores extremais de Pucci. Além disso, por questões de normalização assumiremos que $F(0,0,0,x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

(A2) O termo fonte f satisfaz $f \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ para $n < p < \infty$. Além disso, assumiremos que $g, \gamma \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ (para algum $\alpha \in (0,1)$) com $\gamma \leq 0$ e $\beta \in C^0(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a condição de bordo oblíquo com constante μ_0.

(A3) Assumiremos que a função $F^\sharp(\mathrm{X}, 0, 0, x)$, $x \in \Omega$(confira a Definição 3.1.1) é Hölder contínua no sentido da média L^p para todo $\mathrm{X} \in \text{Sym}(n)$. Mais precisamente, existem constantes universais (isto é, constantes que só dependem de $n, \lambda, \Lambda, p, \mu_0, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ e $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$) $\hat{\alpha} \in (0,1)$, $\theta_0 > 0$ e $0 < r_0 \leq 1$ tais que

$$\left(\fint_{\Omega(x_0,r)} \psi_{F^\sharp}(x, x_0)^p dx\right)^{1/p} \leq \theta_0 r^{\hat{\alpha}}$$

para $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $0 < r \leq r_0$.

(A4) (**Estimativas $C^{1,1}$ *a priori***) Assumiremos que o operador recessão $F^\sharp$ (Ver definição

3.1.1) existe e tem estimativas $C^{1,1}$ *a priori* no bordo, isto é, para $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e $g_0 \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ (para algum $\alpha \in (0,1)$), existe uma solução $\mathfrak{h} \in C^{1,1}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\overline{\mathrm{B}_1^+})$ para o problema

$$\begin{cases} F^\sharp(D^2\mathfrak{h}, x_0) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} + \gamma\mathfrak{h} &= g_0 \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

que goza da seguinte estimativa

$$\|\mathfrak{h}\|_{C^{1,1}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}_1 \left(\|\mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_0\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \right)$$

para alguma constante universal $\mathrm{C}_1 > 0$.

Observação 3.0.1 *A condição de normalização em (A1) não é restritiva, devido ao fato que dado F satisfazendo a condição $(A1)$ sem a questão de normalização definindo*

$$G(\mathrm{M}, p, r, x) = F(\mathrm{M}, p, r, x) - F(0,0,0,x), \quad (\mathrm{M}, p, r, x) \in \mathit{Sym}(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$$

tem-se que G satisfaz

$$G(\mathrm{M}, p_1, r_1, x) - G(\mathrm{N}, p_2, r_2, x) = F(\mathrm{M}, p_1, r_1, x) - F(\mathrm{N}, p_2, r_2, x),$$

para todos $\ddot{}(\mathrm{M}, p_1, r_1, x), (\mathrm{N}, p_2, r_2, x) \in \mathit{Sym}(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ *e assim G cumpre as mesmas condições impostas sobre F em (A1) adicionado com o fato que $G(0,0,0,x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.*

Observação 3.0.2 *A condição de Hölder continuidade em (A3) é claramente válida quando $x \longmapsto \psi_F(x, x_0)$ é uma função $\hat{\alpha}$-Hölder contínua para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$ e*

$$K = \sup_{x_0 \in \overline{\Omega}} \|\psi_{F^\sharp}(\cdot, x_0)\|_{C^{0,\hat{\alpha}}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

uma vez que, para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\fint_{\Omega(x_0,r)} \psi_{F^\sharp}(x, x_0)^p dx \right)^{1/p} &= \left(\fint_{\Omega(x_0,r)} |\psi_{F^\sharp}(x, x_0) - \psi_{F^\sharp}(x_0, x_0)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\fint_{\Omega(x_0,r)} (K|x - x_0|^{\hat{\alpha}})^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq Kr^{\hat{\alpha}} \end{aligned}$$

para todo $r > 0$ pequeno. E assim nesse caso, $K = \theta_0$.

Observação 3.0.3 *Vale observar que a condição $(A4)$ é cumprida quando o operador F é **convexo** com respeito a Sym(n), uma vez que, nesse caso é possível verificar que existe $F^\sharp$ e coincide com F.*

Observação 3.0.4 *Ao longo deste trabalho, quando dizermos que uma constante é univer-*

sal estaremos referindo-se que tal constante depende apenas de $n, \lambda, \Lambda, p, \mu_0, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ *e* $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$.

Sobre essas condições estruturais podemos enunciar o principal resultado desse capítulo que é o seguinte:

Teorema 3.0.5 (Estimativas $W^{2,p}$ sobre condições de bordo oblíquo) *Sejam* $n \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ *(para algum* $\alpha \in (0,1)$*) e* u *uma* L^p*-solução de viscosidade* (38). *Assuma as hipóteses estruturais (A1)-(A4). Então,* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *e vale ainda a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, p, \mu_0, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}})$ *é uma constante positiva.*

Com o intuito de demonstrar o Teorema 3.0.5 passaremos por duas etapas principais: Primeiramente, investigaremos equações governadas por operadores sem dependência da função e entrada do gradiente. Na sequência, reduzimos a análise para operadores com dependência total. Para o primeiro passo precisaremos de uma técnica de aproximação e compacidade de tais problemas, os quais precisam de um repasso em argumentos da Análise Tangencial.

3.1 Uma abordagem tangencial

Nesta parte apresentaremos uma ferramenta chave que possibilitará provarmos o Teorema 3.0.5. Ela perpassa pela Análise Tangencial, onde necessitaremos inicialmente da seguinte

Definição 3.1.1 *Seja* $F(\mathrm{X}, \varsigma, s, x)$ *um operador elíptico totalmente não linear. Denotaremos por* $F^\sharp$ *o* ***Operador Recessão*** *associado a* F*, o qual é definido por*

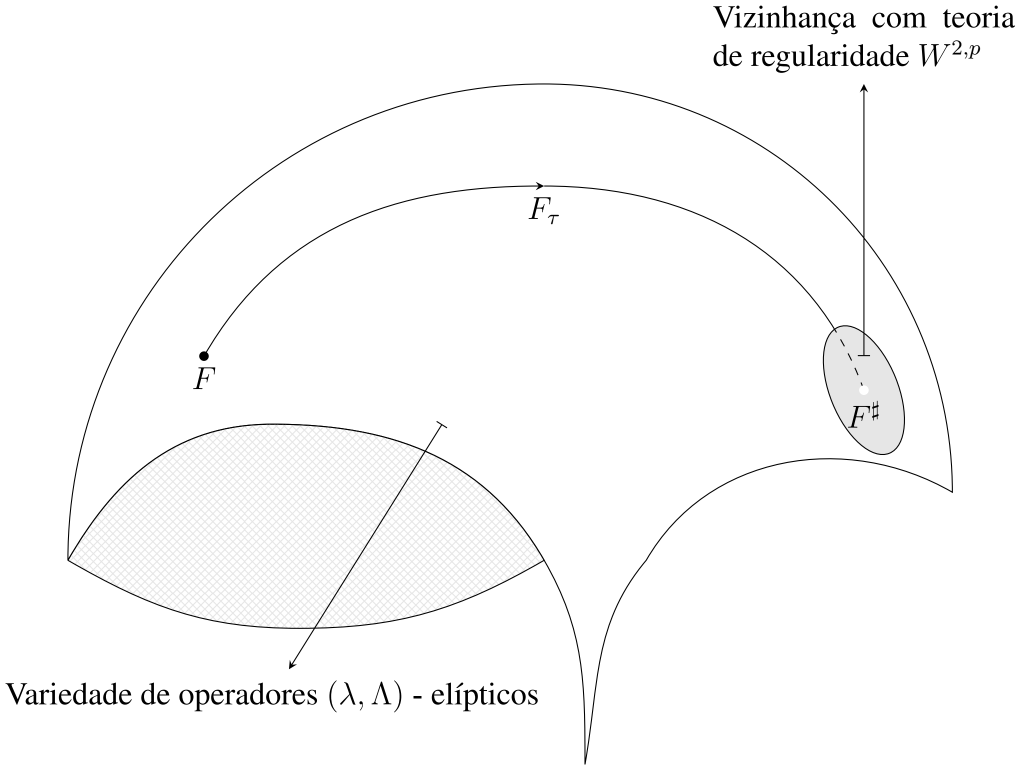
$$F^\sharp(\mathrm{X}, \varsigma, s, x) =: \lim_{\tau \to 0^+} \tau \cdot F\left(\frac{1}{\tau}\mathrm{X}, \varsigma, s, x\right) \tag{39}$$

para todos $\mathrm{X} \in Sym(n)$, $\varsigma \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \Omega$.

O termo operador recessão surge no trabalho de Giga e Sato em [27] sobre a teoria de EDP's de Hamilton-Jacobi. Mais detalhadamente, a motivação do operador recessão vem da análise convexa (Ver a introdução de [46]). Se colocarmos hipóteses de regularidade sobre $F^\sharp$, estamos colocando regularidade no "fim" de $Sym(n)$ e esperamos "voltar com regularidade" para F. Tal estratégia nos permite enfraquecer a hipótese de convexidade/concavidade do operador em questão para ser trabalhado com estimativas $W^{2,p}$. Geometricamente, temos na Figura 3 a ideia do operador Recessão $F^\sharp$ bem como o caminho F_τ.

Observação 3.1.2 *Recomendamos aos leitores [51], [26], [45] e [46] para um aprofundamento mais amplo sobre o operador recessão com exemplos e propriedades e aplicações em diversos contextos.*

Figura 3 – Ideia sobre o operador Recessão $F^\sharp$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.1.3 *Ilustremos a importância do operador recessão no contexto da teoria de regularidade. Consideremos a seguinte pertubação do operador de Bellman*

$$F(\mathrm{X}, \varsigma, s, x) =: \inf_{\iota \in \hat{\mathcal{A}}} \left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\iota} \mathrm{X}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\iota}(x).\varsigma_i + c^{\iota}(x) s \right) + \sum_{i=1}^{n} \mathit{arctg}(1 + \lambda_i(\mathrm{X}))$$

onde $(\lambda_i(\mathrm{X}))_{i=1}^n$ são os autovalores da matriz $\mathrm{X} \in Sym(n)$, $b_i^{\iota}, c^{\iota} : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções reais paca cada $\iota \in \hat{\mathcal{A}}$ ($\hat{\mathcal{A}}$ é um conjunto de índices), e $\left(a_{ij}^{\iota}\right)_{i,j=1}^{n}$ tem autovalores em $[\lambda, \Lambda]$ para cada $x \in \Omega$ e $\iota \in \hat{\mathcal{A}}$. Observemos que tal classe de operadores não é convexa e nem côncava. Entretanto, o interessante é que o operador recessão $F^\sharp$ associado a F tem boas propriedades estruturais. Vemos que

$$F^\sharp(\mathrm{X}, \varsigma, s, x) = \inf_{\iota \in \mathcal{A}} \left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\iota} \mathrm{X}_{ij} \right)$$

é um operador convexo. Assim o problema

$$\begin{cases} F^\sharp(D^2\mathfrak{h}, D\mathfrak{h}, \mathfrak{h}, x) = \inf_{\iota \in \mathcal{A}} \left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\iota} \mathfrak{h}_{ij} \right) = 0 & \textit{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} + \gamma \mathfrak{h} = g & \textit{sobre} \quad \Gamma \subset \partial\Omega, \end{cases}$$

admite estimativas $C^{2,\alpha}$ *pelo Teorema* 2.3.17*, para algum* $\alpha \in (0,1)$*, isto é, em* $\mathfrak{h} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$ *para* $\Omega' \subset\subset \Omega \cup \Gamma$*, sendo* $\Gamma \in C^{1,\alpha} \subset \partial\Omega$*,* $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\Gamma})$*, vale*

$$\|\mathfrak{h}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq \mathrm{C}\left(n, \lambda, \Lambda, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Gamma})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Gamma})}, \Omega', \Omega\right)\left(\|\mathfrak{h}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Gamma})}\right).$$

Se em certo sentido aproximarmos soluções do problema original com F *de soluções associadas a* $F^\sharp$ *espera-se que as soluções associadas a* F *"herdem"em parte a regularidade das associadas ao operador* $F^\sharp$*.*

Com o sentimento da análise no exemplo acima, o próximo resultado é uma ferramenta chave na aproximação tangencial. Mais precisamente, ele descreve a convergência pontualmente de F_τ para $F^\sharp$.

Lema 3.1.4 *Seja* F *um operador uniformemente elíptico e assuma que existe o operador recessão* $F^\sharp$*. Então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\tau_0(\lambda, \Lambda, \epsilon, \psi_{F^*}) > 0$ *tal que para todo* $\tau \in (0, \tau_0)$ *tem-se*

$$\frac{\left|\tau F\left(\tau^{-1}\mathrm{X}, 0, 0, x\right) - F^\sharp(\mathrm{X}, 0, 0, x)\right|}{1 + \|\mathrm{X}\|} \leq \epsilon,$$

para toda matriz $\mathrm{X} \in Sym(n)$*.*

Demonstração: A prova segue as mesmas linha de [17, Proposição 3.1] (veja também [46, Lema 4.1]). Por isso omitiremos aqui. ■

O principal resultado desta seção fornece um método de compacidade que será usado como ponto-chave ao longo de todo o trabalho. De fato, mostraremos que, se nossa equação "estiver próxima" o suficiente da equação homogênea com coeficientes constantes, então nossa solução estará suficientemente próxima de uma solução da equação homogênea com coeficientes congelados. No centro de nossas técnicas, está a noção de operador de recessão. A maneira apropriada de formalizar essa intuição é por um lema de aproximação.

Lema 3.1.5 (Lema de Aproximação do Operador Recessão) *Sejam* $n \leq p < \infty$, $0 \leq \nu \leq 1$ *e assuma as hipóteses* $(A1) - (A4)$*. Então, para todos* $\delta > 0$*,* $\varphi \in C^0(\partial \mathrm{B}_1(0', \nu))$ *com* $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial \mathrm{B}_1(0',\nu))} \leq \mathfrak{c}_1$ *e* $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}}_2)$ *para algum* $0 < \alpha < 1$ *com* $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}}_2)} \leq \mathfrak{c}_2$ *para alguma constante positiva* $\mathfrak{c}_2 > 0$*, existem constantes positivas* $\epsilon = \epsilon(\delta, n, \mu_0, p, \lambda, \Lambda, \gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) < 1$ *e* $\tau_0 = \tau_0(\delta, n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *tais que, se*

$$\max\left\{|F_\tau(\mathrm{X}, x) - F^\sharp(\mathrm{X}, x)|,\ \|\psi_{F^\sharp}(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathrm{B}_r^+)},\ \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_r^+)}\right\} \leq \epsilon \quad \textit{and} \quad \tau \leq \tau_0$$

então, quaisquer duas C^0*-soluções de viscosidade* u *(normalizada, isto é,* $\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_r^+(0',\nu))} \leq 1$*) e* $\mathfrak{h}$ *de*

$$\begin{cases} F_\tau(D^2u, x) &= f(x) & \text{em} & \mathrm{B}_r^+(0', \nu) \cap \mathbb{R}^n_+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g & \text{sobre} & \mathrm{B}_r(0', \nu) \cap \mathrm{T}_r \\ u(x) &= \varphi(x) & \text{em} & \overline{\partial \mathrm{B}_r(0', \nu) \cap \mathbb{R}^n_+} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F^{\sharp}(D^2\mathfrak{h}, 0) &= 0 \quad \textit{em} \quad \mathrm{B}^{+}_{\frac{7}{8}r}(0', \nu) \cap \mathbb{R}^n_+ \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} + \gamma\mathfrak{h} &= g \quad \textit{sobre} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}r}(0', \nu) \cap \mathrm{T}_r \\ \mathfrak{h}(x) &= u(x) \quad \textit{em} \quad \overline{\partial \mathrm{B}_{\frac{7}{8}r}(0', \nu) \cap \mathbb{R}^n_+} \end{cases}$$

satisfazem

$$\|u - \mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^{+}_{\frac{7}{8}r}(0',\nu))} \leq \delta.$$

Demonstração: Por argumento de reescalonamento, podemos supor sem perda de generalidade que $r = 1$. Provaremos o lema por argumento de redução ao absurdo. Assim, assumiremos que a tese do lema não é satisfeita, dessa forma existem $\delta_0 > 0$ e sequências de funções $(F_{\tau_j})_{j\in\mathbb{N}}$, $(F^{\sharp}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\mathfrak{h}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ associadas no sentido da viscosidade para

$$\begin{cases} F_{\tau_j}(D^2u_j, x) &= f_j(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1(0', \nu_j) \cap \mathbb{R}^n_+ \\ \beta \cdot Du_j + \gamma u_j &= g_j \quad \text{sobre} \quad \mathrm{B}_1(0', \nu_j) \cap T_1 \\ u_j(x) &= \varphi_j(x) \quad \text{em} \quad \overline{\partial \mathrm{B}_1(0', \nu_j) \cap \mathbb{R}^n_+} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F^{\sharp}_j(D^2\mathfrak{h}_j, 0) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}(0', \nu_j) \cap \mathbb{R}^n_+ \\ \beta \cdot D\mathfrak{h}_j + \gamma\mathfrak{h}_j &= g_j \quad \text{sobre} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}(0', \nu_j) \cap \mathrm{T}_1 \\ \mathfrak{h}_j(x) &= u_j(x) \quad \text{em} \quad \overline{\partial \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}(0', \nu_j) \cap \mathbb{R}^n_+} \end{cases}$$

onde τ_j, $\|\psi_{F^{\sharp}_{\tau_j}}(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)}$, $\|f_j\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)}$ tende para 0 quando $j \to \infty$, porém

$$\|u_j - \mathfrak{h}_j\|_{L^\infty(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}(0',\nu)\cap\mathbb{R}^n_+)} > \delta_0. \tag{40}$$

Além disso, $\varphi_j \in C^0(\partial \mathrm{B}_1(0', \nu_j))$ e $g_j \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_2})$ são tais que $\|\varphi_j\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1(0',\nu_j))} \leq \mathfrak{c}_1$ e $\|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_2})} \leq \mathfrak{c}_2$, respectivamente. Usando o Teorema 2.3.15, temos para todo $0 < \rho < 1$

$$\|u_j\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\mathrm{B}_{1-\rho}(0',\nu_j)\cap\mathbb{R}^n_+})} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mu_0)\rho^{-\alpha'} \tag{41}$$

para algum $\alpha' = \alpha'(n, \lambda, \Lambda, \mu_0)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Por (ν_j) ser limitada sabemos que existem $\nu_\infty \in [0, 1]$ e uma subsequência $\{\nu_{j_k}\}$ tais que $\nu_{j_k} \to \nu_\infty$ as $k \to +\infty$. Pelo fato que toda sequência de números reais admite uma subsequência monótona podemos assumir que tal subsequência é monótona. Se v_{j_k} é não-crescente, é possível verificar que

$$\mathrm{B}_1(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+ \subset \mathrm{B}_1(0', \nu_{j_k}) \cap \mathbb{R}^n_+$$

para todo k. Portanto, observemos que

$$\|u_{j_k}\|_{C^{0,\alpha'}(\overline{\mathrm{B}_{15/16}(0',\nu_\infty)\cap\mathbb{R}^n_+})} \leq C(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, n, \lambda, \Lambda, \mu_0), \tag{42}$$

onde usamos (41) acima. Por outro lado, se ν_{j_k} é não-decrescente, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{B}_{31/32}(0', \nu_{k_j}) \cap \mathbb{R}^n_+ \supset \mathrm{B}_{15/16}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+ \quad \text{for} \quad k \geq k_0.$$

Assim, podemos novamente deduzir (42) para alguma subsequência própria u_{j_k}. Daí, podemos usar o Teorema de Ascoli-Arzelà e obter subsequências (u_{j_k}) e (g_{j_k}) e funções $u_\infty \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{15/16}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+})$, $g_\infty \in C^0(\partial \mathrm{B}^+_1)$ tais que $u_{j_k} \to u_\infty$ em $C^{0,\alpha'}(\mathrm{B}^+_1)$ e $u_\infty = g_\infty$ em $\mathrm{B}_{15/16}(0', \nu_\infty) \cap \mathrm{T}_1$.
Ademais, como $F^\sharp_j(\cdot, 0) \to F^\sharp_\infty(\cdot, 0)$ uniformemente em conjuntos compactos de *Sym*(n) e para toda $\varphi \in C^2(\overline{\mathrm{B}^+_2})$,

$$\begin{aligned}
|F_{\tau_{j_k}}(D^2\varphi, x) - f_{j_k}(x) - F^\sharp_\infty(D^2\varphi, 0)| &\leq |F_{\tau_{j_k}}(D^2\varphi, x) - F^\sharp_{j_k}(D^2\varphi, x)| + |f_{j_k}| + \\
&+ |F^\sharp_{j_k}(D^2\varphi, x) - F^\sharp_{j_k}(D^2\varphi, 0)| + \\
&+ |F^\sharp_{j_k}(D^2\varphi, 0) - F^\sharp_\infty(D^2\varphi, 0)| \\
&\leq |F_{\tau_{j_k}}(D^2\varphi, x) - F^\sharp_{j_k}(D^2\varphi, x)| + |f_{j_k}| + \\
&+ \psi_{F^\sharp_{\tau_{j_k}}}(x, 0)(1 + |D^2\varphi|)
\end{aligned}$$

então

$$\lim_{k \to +\infty} \|F_{\tau_{j_k}}(D^2\varphi, x) - f_{j_k}(x) - F^\sharp_\infty(D^2\varphi, 0)\|_{L^p(\mathrm{B}_r(x_0))} = 0,$$

para qualquer bola $\mathrm{B}_r(x_0) \subset \mathrm{B}_{15/16}(0, \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+$. Consequentemente pelo Lema de Estabilidade 2.3.21 garante que u_∞ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases}
F^\sharp_\infty(D^2u_\infty, 0) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_{15/16}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+ \\
\beta \cdot Du_\infty + \gamma u_\infty &= g_\infty \quad \text{sobre} \quad \mathrm{B}_{15/16}(0', \nu_\infty) \cap \mathrm{T}_1.
\end{cases}$$

Agora, definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ a função $w_{j_k} =: u_\infty - \mathfrak{h}_{j_k}$. Então, pelo Critério de Comparação 2.3.18, w_{j_k} satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases}
w_{j_k} &\in \mathcal{S}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, 0) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+ \\
\beta \cdot Dw_{j_k} + \gamma w_{j_k} &= g_\infty - g_{j_k} \quad \text{sobre} \quad \mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathrm{T}_1 \\
w_{j_k}(x) &= u_\infty(x) - u_{j_k}(x) \quad \text{em} \quad \overline{\partial \mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+}.
\end{cases}$$

Por fim, usando a Estimativa ABP 2.3.13 obtemos que

$$\begin{aligned}
\|w_{j_k}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+)} &\leq \|u_\infty - u_{j_k}\|_{L^\infty(\partial \mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty))} + \\
&+ \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0)\|g_\infty - g_{j_k}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathrm{T}_1)} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathfrak{h}_{j_k}$ converge uniformemente para u_∞ em $\overline{\mathrm{B}_{7/8}(0', \nu_\infty) \cap \mathbb{R}^n_+}$, o que contradiz (40) para k suficientemente grande. ∎

3.2 Prova do Teorema 3.0.5

Para a prova do Teorema 3.0.5 usaremos a ideia descrita na seção anterior. Mais precisamente, com a técnica de aproximação descrita pelo Lema 3.1.5, a ideia a seguir é trabalhar com os operadores F_τ dentro das hipóteses desse mesmo lema, apresentar que sob certas condições ocorre um decaimento da medida de Lebesgue dos conjuntos A_t (relembre a definição dos conjuntos $A_M(H)$ e $G_M(H)$ no capítulo anterior) em potência de t. Inicialmente, temos um decaimento até o bordo desse tipo quando $u \in S(\lambda, \Lambda, f)$ sendo u normalizada e f normalizada no espaço de integrabilidade L^n. Mais precisamente,

Proposição 3.2.1 (Decaimento na ordem potencial sobre o bordo) *Sejam* $u \in \mathcal{S}(\lambda, \Lambda, f)$ *em* $\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n_+$, $u \in C^0(\Omega)$ *e* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. *Então, exitem constantes universais* $\mathrm{C} > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $\|f\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}})} \leq 1$ *implica*

$$|A_t(u, \Omega) \cap \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1) + x_0\right)| \leq \mathrm{C}.t^{-\delta}$$

para qualquer $x_0 \in \mathrm{B}_{9\sqrt{n}} \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$ *e* $t > 1$.

Demonstração: Ver [15, Lema 7.8] e [57, Lema 2.7] para mais detalhes. ∎

Pela definição de $A_t(u, \Omega)$ e $G_t(u, \Omega)$, a proposição a seguir juntamente com a Proposição 3.2.1 garantem a informação chave sobre a medida do conjunto

$$G_{\mathrm{M}}(u, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right),$$

desde que

$$G_1(u, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_2^{n-1} \times (0,2)) + x_0\right) \neq \emptyset,$$

se verifique.

Proposição 3.2.2 *Suponhamos que as hipóteses estruturais* $(A1) - (A4)$ *ocorrem. Sejam* $\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ *e* u *uma solução de viscosidade para*

$$\begin{cases} F_\tau(D^2u, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}. \end{cases} \tag{43}$$

Além disso, suponhamos que

$$\max\left\{\|f\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})}, \ \tau\right\} \leq \epsilon$$

e que para algum $\tilde{x}_0 \in \mathrm{B}_{9\sqrt{n}} \cap \{x_n \geq 0\}$ *ocorra*

$$G_1(u, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_2^{n-1} \times (0,2)) + \tilde{x}_0\right) \neq \emptyset.$$

Então,

$$|G_{\mathrm{M}}(u;\Omega)\cap\big((\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1))+x_0\big)\,|\geq 1-\epsilon_0,$$

onde $x_0\in \mathrm{B}_{9\sqrt{n}}\cap\{x_n\geq 0\}$, $\mathrm{M}>1$ *depende apenas de* n*,* λ*,* Λ*,* μ_0*,* α*,* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}}_{14\sqrt{n}})}$, C_1 *(da hipótese* $(A4)$*) e* $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_{14\sqrt{n}})}$ *sendo* $\epsilon_0\in(0,1)$.

Demonstração: Consideremos $x_1\in\mathcal{G}_1(u,\Omega)\cap\big(\mathcal{Q}_2^{n-1}\times(0,2)+\tilde{x}_0\big)$. Então, por definição existem paraboloides com abertura $t=1$ tocando u em x_1 por cima e por baixo, ou seja,

$$-\frac{1}{2}|x-x_1|^2\leq u(x)-\ell(x)\leq\frac{1}{2}|x-x_1|^2$$

para $x\in\Omega$ e uma função afim ℓ.

Agora, definamos a seguinte função auxiliar

$$v(x)=\frac{u(x)-\ell(x)}{\mathrm{C}_*},$$

onde C_* é uma constante dimensional positiva e suficientemente grande de tal forma ocorra $\|v\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}})}\leq 1$ e

$$-|x|^2\leq v(x)\leq|x|^2\quad\text{in}\quad\Omega\setminus\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}}.$$

Por u ser solução de viscosidade do problema (23) segue que v é solução de viscosidade para

$$\begin{cases}\tilde{F}_\tau(D^2v,x) &= \tilde{f}(x) & \text{em}\quad \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}},\\ \beta\cdot Dv+\gamma v &= \frac{1}{\mathrm{C}_*}[g-\beta\cdot D\ell-\gamma\ell] & \text{sobre}\quad \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}.\end{cases}$$

onde

$$\tilde{F}_\tau(\mathrm{X},x)=:\frac{1}{\mathrm{C}_*}F_\tau(\mathrm{C}_*\mathrm{X},x)\quad\text{e}\quad\tilde{f}(x)=:\frac{1}{\mathrm{C}_*}f(x)$$

Usando o Lema de Aproximação para o Operador Recessão 3.1.5, podemos considerar função $\mathfrak{h}$ ϵ-próxima de u, mais precisamente, podemos considerar $\mathfrak{h}\in C^{1,1}(\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}})\cap C^0(\overline{\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}}})$(pela hipótese estrutural $(A4)$) solução de viscosidade de

$$\begin{cases}\tilde{F}^\sharp(D^2\mathfrak{h},0) &= 0 & \text{em}\quad \mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}},\\ \beta\cdot D\mathfrak{h}+\gamma\mathfrak{h} &= \frac{1}{\mathrm{C}_*}[g-\beta\cdot D\ell-\gamma\ell] & \text{sobre}\quad \mathrm{T}_{13\sqrt{n}}.\end{cases}$$

de tal sorte que ocorra

$$\|v-\mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}})}\leq 2.$$

Observemos que $\beta\cdot D\ell\in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}}_{14\sqrt{n}})$ sendo que, $\beta\in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_{14\sqrt{n}}})$ e $D\ell$ é um vetor constante.

Feita essa observação, usando estimativa ABP 2.3.13 garantimos que

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}})} &\leq \|v\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}}\setminus\mathrm{T}_{13\sqrt{n}})} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_*}\big[\|g\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}}_{13\sqrt{n}})} + |D\ell|\|\beta\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}}_{14\sqrt{n}})} + \\ &+ \|\gamma\ell\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}}_{13\sqrt{n}})}\big] \\ &\leq \mathrm{C}(n, \|\ell\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}}_{14\sqrt{n}})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_{14\sqrt{n}})}, \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}}_{14\sqrt{n}})}) \\ &=: \widetilde{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

Usando esta estimativa em conjunto com a condição estrutural $(A4)$ temos que

$$\|\mathfrak{h}\|_{C^{1,1}(\overline{\mathrm{B}^+}_{12\sqrt{n}})} \leq \mathrm{C}(\mathrm{C}_1, \widetilde{\mathrm{C}}) \Longrightarrow A_{\mathrm{N}}\left(\mathfrak{h}, \mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}}\right) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right) = \emptyset$$

para alguma constante $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\mathrm{C}_1, \widetilde{C}) > 1$. Estendamos $\mathfrak{h}\Big|_{\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}}}$ (continuamente) fora de $\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}}$ tal que $\mathfrak{h} = v$ fora de $\mathrm{B}^+_{13\sqrt{n}}$ e $\|v - \mathfrak{h}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v - \mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}})}$. Dessa forma,

$$\|v - \mathfrak{h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_1, \widetilde{\mathrm{C}})$$

e

$$-(\overline{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_1, \widetilde{\mathrm{C}}) + |x|^2) \leq \mathfrak{h}(x) \leq \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_1, \widetilde{\mathrm{C}}) + |x|^2 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus \mathrm{B}^+_{12\sqrt{n}}.$$

Portanto, existe constante $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_0(\mathrm{C}_1, \tilde{\mathrm{C}}) \geq \mathrm{N} > 1$ satisfazendo

$$A_{\mathrm{M}_0}(\mathfrak{h}, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right) = \emptyset.$$

Com tal escolha e pela relação complementar entre $A_{\mathrm{M}_0}(\mathfrak{h}, \Omega)$ e $G_{\mathrm{M}_0}(\mathfrak{h}, \Omega)$ temos

$$\left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1) + x_0\right) \subset G_{\mathrm{M}_0}(\mathfrak{h}, \Omega). \tag{44}$$

Definamos agora a função

$$w(x) =: \frac{1}{2\mathrm{C}\epsilon}(v - \mathfrak{h})(x).$$

Note que w satisfaz as hipótese da Proposição 3.2.1 e assim podemos obter para $t > 1$

$$|A_t(w, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right)| \leq \mathrm{C}t^{-\kappa}.$$

Usando que $A_{2\mathrm{M}_0}(u) \subset A_{\mathrm{M}_0}(w) \cup A_{\mathrm{M}_0}(\mathfrak{h})$ e (44) garantimos que

$$|G_{2\mathrm{M}_0}(v - \mathfrak{h}, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right)| \geq 1 - \mathrm{C}\epsilon^{-\kappa}.$$

Por fim, concluímos que

$$|G_{2\mathrm{M}_0}(v, \Omega) \cap \left((\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)) + x_0\right)| \geq 1 - \mathrm{C}\epsilon^{-\kappa}.$$

A demonstração é finalizada escolhendo $\epsilon \ll 1$ e pondo $\mathrm{M} \equiv 2\mathrm{M}_0$. ∎

Com a Proposição 3.2.2 podemos fazer o processo interativo entre a medida dos conjuntos A_t no seguinte

Lema 3.2.3 *Dado $\epsilon_0 \in (0,1)$, seja u uma solução de viscosidade normalizada para*

$$\begin{cases} F_\tau(D^2u, x) &= f(x) \quad \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \quad \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Assuma as hipóteses estruturais $(A1) - (A4)$ verdadeiras e estenda f por zero fora de $\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}$ e assumamos que

$$\max\left\{\tau, \|f\|_{L^n(\mathrm{B}_{14\sqrt{n}})}\right\} \leq \epsilon$$

para algum $\epsilon > 0$ dependendo apenas de $n, \epsilon_0, \lambda, \Lambda, \mu_0$ e α. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &=: A_{\mathrm{M}^{k+1}}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right) \\ \mathcal{B} &=: \left(A_{\mathrm{M}^k}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(Q_1^{n-1} \times (0,1)\right)\right) \cup \left\{x \in \mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1); m(f^n) \geq (\mathrm{C}_0\mathrm{M}^k)^n\right\}, \end{aligned}$$

onde $\mathrm{M} = \mathrm{M}(n, \mathrm{C}_0) > 1$. *Então,*

$$|\mathcal{A}| \leq \epsilon_0(n, \epsilon, \lambda, \Lambda)|\mathcal{B}|.$$

Demonstração: A ideia para provar esse lema é essencialmente usar o Teorema da decomposição de Calderón-Zygumund para cubos 2.1.19. Observe que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right)$ e da Proposição 3.2.2 concluímos que $|\mathcal{A}| \leq \delta < 1$ para a escolha de $\delta = \epsilon_0$. Portanto, resta-nos verificar a seguinte condição para aplicar o Teorema 2.1.19: Para cubos diádicos $\mathcal{Q}$

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{Q}| > \epsilon_0 |\mathcal{Q}| \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{B}.$$

Para este fim, assuma que para algum $i \geq 1$, $\mathcal{Q} = \left(\mathcal{Q}^{n-1}_{\frac{1}{2^i}} \times \left(0, \frac{1}{2^i}\right)\right) + x_0$ é um cubo diádico com cubo predecessor $\tilde{\mathcal{Q}} = \left(\mathcal{Q}^{n-1}_{\frac{1}{2^{i-1}}} \times \left(0, \frac{1}{2^{i-1}}\right)\right) + \tilde{x}_0$. Assumamos que $\mathcal{Q}$ satisfaz

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{Q}| = |A_{\mathrm{M}^{k+1}}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \mathcal{Q}| > \epsilon_0 |\mathcal{Q}|, \tag{45}$$

contudo a inclusão $\tilde{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{B}$ não ocorre. Neste caso, existe $x_1 \in \tilde{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{B}$, ou seja,

$$x_1 \in \tilde{\mathcal{Q}} \cap G_{\mathrm{M}^k}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \quad \text{e} \quad m(f^n)(x_1) < (\mathrm{C}_0\mathrm{M}^k)^n. \tag{46}$$

Na sequência, devemos dividir a análise em dois casos:

Caso 1: $|x_0 - (x_0', 0)| < \frac{1}{2^{i-3}}\sqrt{n}$.

Neste caso, definindo $\mathrm{T}(y) =: (x_0', 0) + \frac{1}{2^i} y$ e $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, onde $\tilde{\Omega} = \mathrm{T}^{-1}(\Omega)$, pondo

$\tilde{u}(y) =: \frac{2^{2i}}{\mathrm{M}^k} u(\mathrm{T}(y))$. Neste cenário, observemos que $\mathcal{Q} \subset \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right)$ implica que $\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}/2^i}(x_0', 0) \subset \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}$. Além disso, notemos que $\tilde{u}$ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \tilde{F}_\tau(D^2\tilde{u}, y) &= \tilde{f}(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \tilde{\beta} \cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} &= \tilde{g} \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{F}_\tau(\mathrm{X}, q, r, y) &=: \frac{\tau}{\mathrm{M}^k} F\left(\frac{\mathrm{M}^k}{\tau}\mathrm{X}, \mathrm{T}(y)\right), \\ \tilde{f}(y) &=: \frac{1}{\mathrm{M}^k} f(\mathrm{T}(y)), \\ \tilde{\beta}(y) &=: \beta(\mathrm{T}(y)), \\ \tilde{\gamma}(y) &=: \frac{1}{2^i}\gamma(\mathrm{T}(y)), \\ \tilde{g}(y) &=: \frac{2^i}{\mathrm{M}^k} g(\mathrm{T}(y)) \end{cases}$$

Agora, notemos que $\tilde{F}^\sharp$ cumpre também estimativas $C^{1,1}$ com a mesma constante de $F^\sharp$. Além disso, de (46) obtemos que

$$\|\tilde{f}\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \frac{2^i}{\mathrm{M}^k} \left(\int_{\mathcal{Q}_{\frac{28\sqrt{n}}{2^i}}(x_1)} |f(x)|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq 2^n \mathrm{C}_0;$$

Como consequência dessa última estimativa, $\|\tilde{f}\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \epsilon$ para C_0 suficientemente pequeno em (46). Novamente por (46) concluímos ainda que

$$G_1(\tilde{u}, \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})) \cap \left(\mathcal{Q}_2^{n-2} \times (0,2) + 2^i\left(\tilde{x}_0 - (x_0', 0)\right)\right) \neq \emptyset.$$

Ademais, $|x_0 - \tilde{x}_0| \leq \frac{1}{2^i}\sqrt{n}$ implica $|2^i(\tilde{x}_0 - (x_0', 0))| < 9\sqrt{n}$. Consequentemente, acabamos de garantir as hipóteses da Proposição 3.2.2. Portanto, segue que

$$|G_{\mathrm{M}}(\tilde{u}, \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})) \cap \left(\left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right) + 2^i(x_0 - (x_0', 0))\right)| \geq 1 - \epsilon_0.$$

Assim,

$$|G_{\mathrm{M}^{k+1}}(u; \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \mathcal{Q}| \geq (1 - \epsilon_0)|\mathcal{Q}|,$$

que contradiz a desigualdade em (45).

Caso 2: Se $|x_0 - (x_0', 0)| \geq \frac{1}{2^{i-3}}\sqrt{n}$.

Neste último caso, temos imediatamente que $\mathrm{B}_{\frac{\sqrt{n}}{2^{i-3}}}\left(x_0 + \frac{1}{2^{i+1}}e_n\right) \subset \mathrm{B}^+_{8\sqrt{n}}$, onde e_n é o n-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como no primeiro caso, definimos a seguinte transformação $\mathrm{T}(y) =: \left(x_0 + \frac{1}{2^{i+1}}e_n\right) + \frac{1}{2^i}y$. Neste caso, basta proceder analogamente ao **Caso 1** para finalizar a prova e aplicarmos [46, Lema 5.2] em vez da Proposição 3.2.2 obtemos novamente contradição com (45).

Com a análise dos dois casos acima, temos uma contradição. Isso completa a prova do lema. ■

Com as ferramentas desenvolvidas até aqui podemos começar o estudo da equação governada por operadores sem a dependência dos termos que envolvem a ”função”e o ”gradiente”. O nosso primeiro resultado de regularidade nessa linha é a seguinte

Proposição 3.2.4 *Seja u uma C^0-solução de viscosidade normalizada de*

$$\left\{\begin{array}{rclcl} F(D^2u,x) & = & f(x) & \textit{em} & \mathrm{B}_1^+, \\ \beta\cdot Du+\gamma u & = & g & \textit{sobre} & \mathrm{T}_1, \end{array}\right. \tag{47}$$

onde $\beta,\gamma,g\in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e β satisfaz a condição de bordo oblíquo com constante positiva μ_0, $\gamma\le 0$ e $f\in L^p(\mathrm{B}_1^+)\cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$, para $n\le p<\infty$. Além disso, assuma que as condições estruturais (A1)-(A4) ocorrem. Então, $D^2u\in L^p\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)$ e

$$\|D^2u\|_{L^p\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)}\le \mathrm{C}\cdot\left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)}+\|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)}+\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

onde $\mathrm{C}=\mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})},\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})},\alpha,r_0)>0$.

Demonstração: Fixemos inicialmente $x_0\in \mathrm{B}_{1/2}\cap\{x_n\ge 0\}$. Então, temos duas possibilidades, a saber, $x_0\in\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ ou $x_0\in\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+$. Se $x_0\in\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$, então escolhamos $r\in\mathbb{R}$ tal que $0<r<\frac{1-|x_0|}{14\sqrt{n}}$ e definamos a seguinte constante

$$\kappa=:\frac{\epsilon r}{\epsilon r^{-1}\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))}+\|f\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))}+\epsilon r^{-1}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_{14r\sqrt{n}}(x_0)})}}$$

onde a constante $\epsilon=\epsilon(n,\epsilon_0,\lambda,\Lambda,p,\mu_0,\alpha,\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ é como na Proposição 3.2.2 para uma constante $\epsilon_0\in(0,1)$ a ser escolhida mais adiante. Definida tal constante κ, podemos definir a função $\tilde{u}(y)=:\frac{\kappa}{r^2}u(x_0+ry), x\in\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\cup\mathrm{T}_{14\sqrt{n}}$. Então, não é difícil verificar que $\tilde{u}$ é uma C^0-solução de viscosidade para

$$\left\{\begin{array}{rclcl} \tilde{F}(D^2\tilde{u},y) & = & \tilde{f}(x) & \text{em} & \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \tilde{\beta}\cdot D\tilde{u}+\tilde{\gamma}\tilde{u} & = & \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}. \end{array}\right.$$

onde

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{F}(\mathrm{X},y) & =: & \kappa F\left(\frac{1}{\kappa}\mathrm{X},ry+x_0\right) \\ \tilde{f}(y) & =: & \kappa f(x_0+ry) \\ \tilde{\beta}(y) & =: & \beta(x_0+ry) \\ \tilde{\gamma}(y) & =: & r\gamma(x_0+ry) \\ \tilde{g}(y) & =: & \frac{\kappa}{r}g(x_0+ry). \end{array}\right.$$

Observemos que $\tilde{F}$ cumpre as condições (A1)-(A4). Além disso,

$$\|\tilde{f}\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\right)} = \frac{\kappa}{r}\|f\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0)\right)}\le\epsilon \;\text{ e }\; \|\tilde{\beta}\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_{14\sqrt{n}}})}\le 1 \tag{48}$$

e assim as hipóteses do Lema 3.2.3 ocorrem. Agora, consideremos $\mathrm{M}>0$ e $\mathrm{C}_0>0$ como no

Lema 3.2.3 e escolhamos $\epsilon_0 =: \frac{1}{2\mathrm{M}^p}$. Assim, definindo para cada $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha_k &=: \left| A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1) \right) \right| \\ \beta_k &=: \left| \left\{ x \in \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1) \right) ; \; m(\tilde{f}^n)(x) \geq (\mathrm{C}_0 \mathrm{M}^k)^n \right\} \right| \end{aligned}$$

temos que a tese do Lema 3.2.3 garante que $\alpha_{k+1} \leq \epsilon_0 \left(\alpha_k + \beta_k \right)$ e indutivamente temos ainda que

$$\alpha_k \leq \epsilon_0^k + \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon_0^{k-i} \beta_i. \tag{49}$$

Por outro lado, como $f \in L^p(\mathrm{B}_1^+)$ segue por (48) que $\tilde{f} \in L^p(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})$. Agora aplicando o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener 2.1.14, $m(\tilde{f}^n) \in L^{\frac{p}{n}}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})$ com estimativa

$$\| m(\tilde{f}^n) \|_{L^{\frac{n}{p}}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \mathrm{C}(n,p) \| \tilde{f}^n \|_{L^{\frac{n}{p}}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \mathrm{C}(n,p) \| \tilde{f} \|^n_{L^p(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \mathrm{C}(n,p,\epsilon),$$

em que usamos (48) na última desigualdade. Portanto, como $m(\tilde{f}^n) \in L^{\frac{p}{n}}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})$ temos pela Proposição 2.1.11 que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \beta_k \leq \mathrm{C}(n,p). \tag{50}$$

Daí, pela escolha de ϵ_0, (49) e (50) garantem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \alpha_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \beta_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \epsilon_0^k \right) \leq \mathrm{C}(n,p). \tag{51}$$

Sob outra perspectiva, notemos que a inclusão $\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}} \subset \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}$ fornece

$$A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}) \subset A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}).$$

Nesse ponto, como $\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}} \subset \mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)$, tem-se $A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}) \subset A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1) \right)$. Usando esse fato juntamente com a desigualdade

$$\lambda_{\Theta(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{1/2})}(\mathrm{M}^k) \leq |A_{\mathcal{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{1/2})|, \; \forall k \in \mathbb{N},$$

obtemos de (51)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \lambda_{\Theta(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{1/2})}(\mathrm{M}^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{pk} \alpha_k \leq \mathrm{C}(n,p). \tag{52}$$

Portanto, aplicado a Proposição 2.1.11 e (52), segue que $\Theta(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{1/2}) \in L^p(\mathrm{B}^+_{1/2})$. Daí, pela

Proposição 2.1.8 $\|D^2\tilde{u}\|_{L^p\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C}(n,p,\mathrm{M})$ e consequentemente,

$$\|D^2u\|_{L^p\left(\mathrm{B}^+_{\frac{r}{2}}(x_0)\right)} \leq \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,p,r)\left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Por fim, se $x_0 \in \mathrm{B}^+_{1/2}$, podemos aplicar o resultado de estimativas interiores (confira [46, Teorema 6.1], veja também [51]) e obter também que para um $\tilde{r}$ suficientemente pequeno

$$\|D^2u\|_{L^p\left(\mathrm{B}_{\frac{\tilde{r}}{2}}(x_0)\right)} \leq \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,p,r)\left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Agora, tomando $r' = \min\{r,\tilde{r}\}$ podemos cobrir a semi-bola $\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}$ com uma cobertura finita por bolas e semi-bolas do tipos acima de raio r' e com as estimativas para cada uma delas e daí segue a proposição. ■

A ideia agora é melhorar a Proposição 3.2.4 para operadores com a dependência dos termos D^2u, Du, u e x.

Proposição 3.2.5 (Estimativas $W^{1,p}$) *Seja u uma C^0-solução de viscosidade para*

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &=& f(x) & \textit{em} & \mathrm{B}^+_1, \\ \beta\cdot Du + \gamma u &=& g & \textit{sobre} & \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{53}$$

onde $f \in L^p(\mathrm{B}^+_1) \cap C^0(\mathrm{B}^+_1)$ ($n \leq p < \infty$), $\beta,\gamma,g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$. Assuma ainda a condição estrutural $(A1)$. Então, existe constante $\tilde{\varepsilon_0} = \tilde{\varepsilon_0}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\alpha) > 0$ tal que se

$$\fint_{(\mathrm{B}^+_1)(y,r)} \Psi_F(x,y)^p dx \leq \tilde{\varepsilon_0}^p,\ \forall y \in \mathrm{B}^+_1, \forall r \in (0,r_0],$$

para alguma constante $r_0 > 0$, então $u \in C^{1,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ com $0 < \tilde{\alpha} < 1 - \frac{n}{p}$ com estimativa

$$\|u\|_{C^{1,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de n, λ, Λ, p, μ_0, α, σ, ξ, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$.

Demonstração: Segue na mesma linha do Teorema 4.4 de [8] com mínimas alterações. ■

Corolário 3.2.6 *Seja u uma C^0-solução e viscosidade para*

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &=& f(x) & \textit{em} & \mathrm{B}^+_1, \\ \beta\cdot Du + \gamma u &=& g & \textit{sobre} & \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde $f \in L^p(\mathrm{B}^+_1)$ (para $n \leq p < \infty$), $\beta,\gamma,g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ com β cumprindo a condição de bordo oblíquo para algum $\mu_0 > 0$ e $\gamma \leq 0$. Além disso, assuma que as condições (A1)-(A4) são *satisfeitas. Então,* $u \in W^{2,p}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ *com estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,p}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

onde C *é uma constante positiva dependendo apenas de* n, λ, Λ, p, μ_0, α, σ, ξ, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* r_0.

Prova: Observemos inicialmente que u também é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2u, x) &= \tilde{f}(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}^+_1, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

onde $\tilde{F}(\mathrm{X}, x) =: F(\mathrm{X}, 0, 0, x)$ e $\tilde{f}$ é uma função satisfazendo

$$|\tilde{f}| \leq \sigma|Du| + \xi|u| + |f|.$$

Portanto, podemos aplicar a Proposição 3.2.4 para concluir que $D^2u \in L^p\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ e

$$\|D^2u\|_{L^p\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right). \tag{54}$$

Por outro lado, pela Proposição 3.2.5 concluímos que $u \in W^{1,p}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})$ com estimativa

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathrm{B}^+_1)} \leq \mathrm{C} \cdot (\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)}). \tag{55}$$

Por fim, combinando as estimativas (54) e (55) finalizamos a prova do corolário. ■

Agora estenderemos o Corolário 3.2.6 para L^p-soluções de viscosidade via argumentos de densidade e estabilidade de tais soluções de viscosidade. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3.2.7 *Seja* u *uma* L^p-*solução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &= f(x) \quad \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_1, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ *e* $f \in L^p(\mathrm{B}^+_1)$, *para* $n \leq p < \infty$. *Além disso, assuma as condições estruturais (A4) e* (**SC**). *Então, existem constantes positivas* $\beta_0 = \beta_0(n, \lambda, \Lambda, p)$, $r_0 = r_0(n, \lambda, \Lambda, p)$ *e* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p, \mu_0, \alpha, \sigma, \xi, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, r_0) > 0$, *tais que se*

$$\left(⨍_{(\mathrm{B}^+_1)(x_0,r)} \psi_{F^\sharp}(x, x_0)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \psi_0$$

para quaisquer $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ *e* $r \in (0, r_0)$*, Então,* $u \in W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)$ *e*

$$\|u\|_{W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Prova: Como em [57, Theorem 4.3] é suficiente provar o resultado sem a dependência de Du e u na equação. Para o desejado notemos que podemos aproximar f em L^p por uma sequência de funções $f_j \in C^\infty(\overline{\mathrm{B}_1^+}) \cap L^p(\mathrm{B}_1^+)$ tais que $f_j \to f$ in $L^p(\mathrm{B}_1^+)$. Também podemos aproximar g por uma sequência (g_j) in $C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ tal que $g_j \to g$ in $C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$. Pelo Teorema 2.3.20, existe sequência de funções $u_j \in C^0(\overline{\mathrm{B}_1^+})$, onde cada u_j é solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F(D^2u_j, x) &= f_j(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Du_j + \gamma u_j &= g_j \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_j(x) &= u(x) \quad \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Portanto, as hipóteses da Proposição 3.2.4 são satisfeitas. Logo,

$$\|u_j\|_{W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)} \leq \mathrm{C}\left(\|u_j\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_j\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

para uma constante universal $\mathrm{C} > 0$ que independe de j. Além disso, por argumento de cobertura padrão, $u_j \in W^{2,p}_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$. Da Estimativa ABP 2.3.13, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $W^{2,p}(\overline{\mathrm{B}_\rho^+})$ para $\rho \in (0,1)$. Mais uma vez pela Estimativa ABP 2.3.13 obtemos que

$$\|u_j - u_k\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}_1^+\right)} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0)(\|f_j - f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_j - g_k\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

Portanto, $u_j \to u_\infty \quad \text{in} \quad C^0(\overline{\mathrm{B}_1^+})$. Além disso, uma vez que, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)$ obtemos que $u_j \rightharpoonup u_\infty$ em $W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)$. Portanto,

$$\|u_\infty\|_{W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u_\infty\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Por fim, pelo Lema Estabilidade 2.3.21 asseguramos que u_∞ é uma L^p-solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F(D^2u_\infty, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Du_\infty + \gamma u_\infty &= g(x) \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_\infty(x) &= u(x) \quad \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Agora observemos que $w =: u_\infty - u$ satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} w \in S(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, 0) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Dw + \gamma w = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Pela Estimativa ABP 2.3.13 concluímos que $w = 0$ em $\overline{\mathrm{B}_1^+} \setminus \mathrm{T}_1$ e, por continuidade, $w = 0$ em $\overline{\mathrm{B}_1^+}$ o que finaliza a prova. ∎

Finalmente provaremos o Teorema 3.0.5.

Demonstração do Teorema 3.0.5**:** Fixemos inicialmente $x_0 \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ sabemos que podemos tomar uma vizinhança de x_0, a qual denotaremos por $\mathcal{V}(x_0)$ e um difeomorfismo de classe $C^{2,\alpha}$ $\Phi : \mathcal{V}(x_0) \to \mathrm{B}_1(0)$ tal que $\Phi(x_0) = 0$ e $\Phi(\Omega \cap \mathcal{V}(x_0)) = \mathrm{B}_1^+$. Agora, definamos para $\tilde{\varphi} \in W^{2,p}(\mathrm{B}_1^+)$, $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \Phi \in W^{2,p}(\mathcal{V}(x_0))$. Portanto, obtemos que

$$D\varphi = (D\tilde{\varphi} \circ \Phi)D\Phi \quad \text{e} \quad D^2\varphi = D\Phi^t \cdot (D^2\tilde{\varphi} \circ \Phi) \cdot D\Phi + ((D\tilde{\varphi} \circ \Phi)\partial_{ij}\Phi)_{1 \le i,j \le n}.$$

Consequentemente, definindo $\tilde{u} =: u \circ \Phi^{-1} \in C^0(\mathrm{B}_1^+)$ podemos notar que $\tilde{u}$ é uma L^p-solução de viscosidade para

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}, \tilde{u}, y) &= \tilde{f}(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \tilde{\beta} \cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} &= \tilde{g} \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

onde para $y = \Phi^{-1}(x)$ temos definidos

$$\begin{cases} \tilde{F}\left(D^2\tilde{\varphi}, D\tilde{\varphi}, \tilde{u}, x\right) &=: F\left(D\Phi^t(y)D^2\tilde{\varphi}D\Phi(y) + D\tilde{\varphi}D^2\Phi(y), D\tilde{\varphi}D\Phi(y), \tilde{u}, y\right) \\ \tilde{f}(x) &=: f \circ \Phi^{-1}(x) \\ \tilde{\beta}(x) &=: (\beta \circ \Phi^{-1}) \cdot (D\Phi \circ \Phi^{-1})^t \\ \tilde{\gamma}(x) &=: (\gamma \circ \Phi^{-1}) \cdot (D\Phi \circ \Phi^{-1})^t \\ \tilde{g}(x) &=: g \circ \Phi^{-1} \end{cases}$$

Além disso, percebemos que $\tilde{F}(\mathrm{X}, \varsigma, \eta, y) = F\left(D\Phi^t(y) \cdot \mathrm{X} \cdot D\Phi(y) + \varsigma D^2\Phi, \varsigma D\Phi(y), \eta, y\right)$ é um operador uniformemente elíptico com constantes de elipticidade $\lambda\mathrm{C}(\Phi)$, $\Lambda\mathrm{C}(\Phi)$ e

$$\tilde{F}^\sharp(\mathrm{X}, \varsigma, \eta, x) = F^\sharp\left(D\Phi^t(y) \cdot \mathrm{X} \cdot D\Phi(y) + \varsigma D^2\Phi(y), \varsigma D\Phi(y), \eta, y\right), \text{ onde } y = \Phi^{-1}(x).$$

Daí segue que $\psi_{\tilde{F}^\sharp}(x, x_0) \le \mathrm{C}(\Phi)\psi_{F^\sharp}(x, x_0)$ e isso garante que estamos nas hipóteses da Proposição 3.2.7 e assim obtemos que $\tilde{u} \in W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)$ com estimativa

$$\|\tilde{u}\|_{W^{2,p}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)} \le \mathrm{C} \cdot \left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|\tilde{g}\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Por fim, pela arbitrariedade do ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e este por sua vez ser compacto, podemos tomar uma quantidade finita de vizinhanças $\mathcal{V}_{x_1}, \cdots, \mathcal{V}_{x_m}$ de tal maneira que formemos uma cobertura aberta para $\partial\Omega$ onde em cada um desses abertos satisfaça a condição acima de estimativas $W^{2,p}$. Por outro lado, também podemos cobrir Ω por uma quantidade finita de abertos que garanta estimativas interiores $W^{2,p}$ por exemplo, usando Teorema 6.1 de [46]. Usando essas coberturas finitas e reescalonando essas estimativas temos o desejado. Isso finaliza a prova do Teorema

3.0.5. ■

Observação 3.2.8 *Vale ressaltar que as estimativas* $W^{2,p}$ *do Teorema 3.0.5 dependem não apenas de constantes universais, mas também do "módulo de convergência"de* $F_\tau \to F^\sharp$*. Em termos mais precisos, definindo* $\varsigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *da seguinte forma*

$$\varsigma(\varepsilon) =: \sup_{\substack{\mathrm{X} \in Sym(n) \\ \tau \in (0,\tau_0)}} \left\{ \frac{\left|\tau F\left(\tau^{-1}\mathrm{X}, 0, 0, x\right) - F^\sharp(\mathrm{X}, 0, 0, x)\right|}{1 + \|\mathrm{X}\|} \leq \varepsilon \right\},$$

então a constante $\mathrm{C} > 0$ *que aparece na estimativa* $W^{2,p}$ *a priori até o bordo do Teorema 3.0.5 também depende de* ς*.*

4 ESTIMATIVAS DE LORENTZ-SOBOLEV COM PESO

Neste capítulo continuaremos estudando o problema apresentado no capítulo anterior, a saber,

$$\begin{cases} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) &=& f(x) & \text{em} & \Omega \\ \beta(x)\cdot Du(x)+\gamma(x)u(x) &=& g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{56}$$

sob a ótica da teoria de regularidade no contexto dos espaços de Lorentz com peso. Após isso, exibiremos algumas variações de tais estimativas em outros contextos.

Aqui usaremos algumas ideias esboçadas anteriormente com algumas alterações. Inicialmente necessitaremos da seguinte condição estrutural:

(A2)’ O termo fonte f satisfaz $f \in L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$ para $(p,q) \in (n,\infty)\times(0,\infty]$. Além disso, $\gamma, g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ com $\gamma \leq 0$ e $\beta \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega;\mathbb{R}^n)$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

Como no capítulo 3, estudaremos a regularidade de C^0-soluções de viscosidade de (56) sem a dependência dos termos Du e u. Isso é o conteúdo da seguinte proposição.

Proposição 4.0.1 *Considere* $(p,q) \in (n,\infty)\times(0,\infty]$, $f \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)\cap C^0(\mathrm{B}^+_1)$ *e* ω *um peso na classe* $\mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$. *Seja* u *uma* C^0*-solução de viscosidade normalizada de*

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &=& f(x) & \textit{em} & \mathrm{B}^+_1, \\ \beta\cdot Du+\gamma u &=& g(x) & \textit{sobre} & \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Assuma as hipóteses (A1), (A2’), (A3) e (A4) são válidas. Então, $D^2u \in L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ *e*

$$\|D^2u\|_{L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C}\cdot\left(\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}^+_1)}+\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)}+\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

onde $\mathrm{C}=\mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,p,q,[\omega]_{\frac{p}{n}},\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)},\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)},\alpha,r_0,\theta_0,\mu_0)>0.$

Prova: Fixemos $x_0 \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\cup\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$. Se $x_0 \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$, escolhamos $0<r<\frac{1-|x_0|}{14\sqrt{n}}$ e definamos

$$\kappa =: \frac{\epsilon r}{\epsilon r^{-1}\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))}+C(n,[\omega]_{\frac{p}{n}},p)\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))}+\epsilon r^{-1}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_{14r\sqrt{n}}(x_0))}}$$

onde a constante $\epsilon=\epsilon(n,\epsilon_0,\lambda,\Lambda,p,\mu_0,\alpha,\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ acima é da Proposição 3.2.2 para uma constante $\epsilon_0 \in (0,1)$ a ser escolhida mais adiante e $C(n,[\omega]_{\frac{p}{n}},p)>0$ é a constante do Lema de mergulho 2.2.10. Agora partindo de r e κ podemos definir a função auxiliar

$$\tilde{u}(y) =: \frac{\kappa}{r^2}u(x_0+ry),\ y \in \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\cup\mathrm{T}_{14\sqrt{n}}.$$

Observemos inicialmente que $\tilde{u} \in C^0(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\cup\mathrm{T}_{14\sqrt{n}})$ devido a continuidade de u em $\mathrm{B}^+_1\cup\mathrm{T}_1$.

Também notemos que $\tilde{u}$ é uma C^0-solução de viscosidade normalizada de

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2\tilde{u}, x) &=& \tilde{f}(x) & \text{em} & \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \tilde{\beta} \cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} &=& \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}. \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{F}(\mathrm{X}, y) &=:& \kappa F\left(\frac{1}{\kappa}\mathrm{X}, x_0 + ry\right) \\ \tilde{f}(y) &=:& \kappa f(x_0 + ry) \\ \tilde{\beta}(y) &=:& \beta(x_0 + ry) \\ \tilde{\gamma}(y) &=:& r\gamma(x_0 + ry) \\ \tilde{g}(y) &=:& \frac{\kappa}{r} g(x_0 + ry) \\ \tilde{\omega}(y) &=:& \omega(x_0 + ry). \end{cases}$$

Assim, $\tilde{F}$ cumpre as condições (A1), (A2'), (A3), (A4) e ainda temos $\tilde{\omega} \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ (uma vez que, $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$). Além disso, o Lema 2.2.10 garante que

$$\|\tilde{f}\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\right)} \quad = \quad C(n, [\omega]_{\frac{p}{n}}, p)\|\tilde{f}\|_{L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\right)} \leq \epsilon. \tag{57}$$

Escolhamos $\epsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{c_1}\right)^{\frac{1}{\theta}} \in (0,1)$, onde c_1 e θ são as constantes do Lema 2.2.9. Agora, para $k \geq 0$ definimos

$$\begin{aligned} A^k &=: A_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right) \\ B^k &=: \left\{x \in \left(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1)\right);\ \mathcal{M}(\tilde{f}^n)(x) \geq (\mathrm{C}_0\mathrm{M}^k)^n\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.2.3 implica que $|A^{k+1}| \leq \left(\frac{\epsilon_0}{c_1}\right)^{\frac{1}{\theta}} |A^k \cup B^k|$ e consequentemente pelo dobramento forte (item (c) do Lema 2.2.9)

$$\tilde{\omega}(A^{k+1}) \leq c_1 \left(\frac{|A^{k+1}|}{|A^k \cup B^k|}\right)^{\theta} \tilde{\omega}(A^k \cup B^k) \leq \epsilon_0 \tilde{\omega}(A^k \cup B^k) \leq \epsilon_0 \tilde{\omega}(A^k) + \epsilon_0 \tilde{\omega}(B^k).$$

Consequentemente,

$$\omega(\tilde{A}^k) \leq \epsilon_0^k \tilde{\omega}(A_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon_0^i \tilde{\omega}(B^{k-i}) \tag{58}$$

Por outro lado, pelo Lema 2.2.13 obtemos que

$$\|\mathcal{M}(\tilde{f}^n)\|_{L^{\frac{p}{n},\frac{q}{n}}_{\tilde{\omega}}(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1))} \leq C \|\tilde{f}^n\|_{L^{\frac{p}{n},\frac{q}{n}}_{\tilde{\omega}}(\mathcal{Q}_1^{n-1} \times (0,1))} < \infty,$$

uma vez que, $f \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)$. Portanto, usando (58) juntamente com o Lema de caracterização dos espaços de Lorentz com peso 2.2.12 obtemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{qk}\tilde{\omega}(A^k)^{\frac{q}{p}} \leq C(n,p,q)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(M^q\epsilon_0^{\frac{q}{p}})^k\tilde{\omega}(A_0)^{\frac{q}{p}} + \sum_{k=1}^{\infty} M^{qk}\sum_{i=1}^{k}\epsilon_0^{\frac{q}{p}i}\tilde{\omega}^{\frac{q}{p}}(B^{k-i})\right)$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}^{qk}\tilde{\omega}(A^k)^{\frac{q}{p}} &\leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}(M^q\epsilon_0^{\frac{q}{p}})^k\tilde{\omega}^{\frac{q}{p}}(\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}(M^q\epsilon_0^{\frac{q}{p}})^i M^{q(k-i)}\tilde{\omega}^{\frac{q}{p}}(B^{k-i})\right)\\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(M^q\tilde{\epsilon}_0^{\frac{q}{p}})^k\left(\tilde{\omega}(\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)) + \sum_{i=1}^{\infty}M^{qi}\tilde{\omega}(B^i)^{\frac{q}{p}}\right) \leq C(n,p,q,[\omega]_{\frac{p}{n}}),\end{aligned}$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $M^q\epsilon_0^{\frac{q}{p}} < 1$. Tal estimativa juntamente com o Lema 2.2.12 garante que $\Theta(\tilde{u},\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}) \in L^{p,q}_{\tilde{\omega}}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})$ donde pelo Lema 2.2.11, $\|D^2\tilde{u}\|_{L^{p,q}_{\tilde{\omega}}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})} \leq C$, para alguma constante positiva C que depende apenas de n, λ, Λ, p, q, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}$, μ_0, r_0 e θ_0 (constantes da condição (A3)). Reescalonando para u, obtemos

$$\|D^2u\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{\frac{r}{2}}(x_0))} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}),$$

onde $C>0$ depende apenas de n, λ, Λ, p, q, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}$,$\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}$, μ_0, r_0, θ_0 e r.

Por outro lado, se $x_0 \in \mathrm{B}^+_{1/2}$, procedendo de maneira análoga as estimativas interiores em [46] com mínimas alterações para o contexto dos espaços de Lorentz-Sobolev com peso para obtermos $\tilde{r}$ suficientemente pequeno tal que

$$\|D^2u\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_{\frac{\tilde{r}}{2}}(x_0))} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}).$$

Finalmente, combinando as estimativas interiores e no bordo, obtemos o resultado desejado via argumento de cobertura padrão. Isso finaliza a prova no caso $q \in (0,\infty)$. Para o caso $q=\infty$ segue as mesmas linhas da prova acima fazendo as mínimas alterações devidas como por exemplo o uso do caso $q=\infty$ no Lema 2.2.12. Isso encerra a prova da proposição. ■

Com essa proposição em mãos, podemos encontrar estimativas de Lorentz-Sobolev com peso para C^0-soluções de viscosidade para o problema (53) devido ao seguinte resultado.

Proposição 4.0.2 *Seja u uma C^0-solução de viscosidade normalizada de* (53). *Assuma que $f \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)$ $((p,q) \in (n,+\infty)\times(0,+\infty])$, $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$, $\beta,\gamma,g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e que as condições (A1), (A2)', (A3) e (A4) ocorrem. Então, $u \in W^2L^{p,q}_{\omega}\left(B^+_{\frac{1}{2}}\right)$ com estimativa*

$$\|u\|_{W^2L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C}\cdot\left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}\right).$$

onde C *é uma constante positiva dependendo apenas de n, λ, Λ, ξ, σ, p, q, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, α, r_0, θ_0 e μ_0.*

Prova: Notemos que u também é uma solução de viscosidade para

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2u, x) &= \tilde{f}(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g(x) \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

onde $\tilde{F}(\mathrm{X}, x) =: F(\mathrm{X}, 0, 0, x)$ e $\tilde{f}$ é uma função satisfazendo

$$|\tilde{f}| \leq \sigma|Du| + \xi|u| + |f|.$$

Portanto, podemos usar a Proposição 4.0.1 para concluir que

$$\|D^2u\|_{L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1^+)} + \|\tilde{f}\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}\right). \tag{59}$$

Agora, similarmente a [61, Lema 3.2] para obtermos a estimativa do gradiente,

$$\|Du\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})} \leq \mathrm{C} \cdot (\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}). \tag{60}$$

Por fim, combinando as estimativas (59), (60) e usando o fato que $u \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})$ com estimativa $\|u\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})} \leq \mathrm{C}\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1^+)}$ completamos a prova do desejado. ■

Agora, usando as ideias vistas no capítulo 3 podemos estender a Proposição 4.0.2 para $L^{\tilde{p}}$-soluções de viscosidade.

Corolário 4.0.3 *Considere u uma $L^{\tilde{p}}$-solução de viscosidade normalizada para* (53)*, onde $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ com $\beta \cdot \nu \geq \mu_0$ para algum $\mu_0 > 0$, $\gamma \leq 0$, $f \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)$, para $(p, q) \in (n, \infty) \times (0, \infty]$, $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ com condição $\tilde{p} \in [n, p)$. Além disso, assuma que $F^{\sharp}$ cumpre $(A4)$ e F cumpre a condição (SC). Então, existem constantes positivas $\beta_0 = \beta_0(n, \lambda, \Lambda, p, q, \tilde{p})$, $r_0 = r_0(n, \lambda, \Lambda, p, q, \tilde{p})$ e $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, p, q, \tilde{p}, [\omega]_{\frac{p}{n}}, \theta_0, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}, r_0) > 0$, tais que se*

$$\left(\fint_{(\mathrm{B}_1^+)(x_0,r)} \psi_{F^{\sharp}}(x, x_0)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \psi_0$$

para qualquer $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e $r \in (0, r_0)$, então $u \in W^2L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ e

$$\|u\|_{W^2L^{p,q}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)}\right).$$

Prova: A prova desse resultado é de maneira inteiramente análoga a prova de Corolário 3.2.7 com mínimas alterações trocando os espaços variacionais e os resultados com respeito aos espaços L^p's pelos resultado respectivos com respeito aos espaços de Lorentz com peso. ■

Observação 4.0.4 *Observemos que temos uma diferença sútil na relação do tipo de solução de viscosidade do Corolário 4.0.3 com o termo fonte f quando comparamos com o Corolário 3.2.7.*

Isso evidência que a natureza dos resultados nesse capítulo não se tratam de uma generalização dos resultados obtidos de natureza semelhante do capítulo anterior, mas sim um conjunto de resultados distintos sobre o mesmo problema (56).

Agora estamos aptos a enunciar e provar o principal resultado desse capítulo que é o uma versão

Teorema 4.0.5 (Estimativa de Lorentz-Sobolev com peso) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ $(\alpha \in (0,1))$ *e* $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ *um peso. Assuma as condições estruturais (A1), (A2)', (A3) e (A4) são válidas e que* u *é uma* $L^{\tilde{p}}$*-solução de viscosidade de* (56) *com* $\tilde{p} \in [n, p)$*. Então,* $u \in W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$ *com estimativa*

$$\|u\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)} \right), \tag{61}$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* n, λ, Λ, ξ, σ, p, q, $\tilde{p}$, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$, μ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ *e* $\|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}$.

Demonstração: Como no Teorema 3.0.5 somos motivados pelo argumento clássico de cobertura (cf. [57] e [60]) e analogamente a este Teorema citado para cada $x_0 \in \partial\Omega$, by $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ existe uma vizinhança de x_0, que iremos denotar por $\mathcal{V}(x_0)$ e um difeomorfismo de classe $C^{2,\alpha}$, $\Phi : \mathcal{V}(x_0) \to \mathrm{B}_1(0)$ tal que $\Phi(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi(\Omega \cap \mathcal{V}(x_0)) = \mathrm{B}_1^+$. Definindo $\tilde{u} =: u \circ \Phi^{-1} \in C^0(\mathrm{B}_1^+)$ vemos que $\tilde{u}$ é uma $L^{\tilde{p}}$-solução de viscosidade para

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \tilde{F}(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}, \tilde{u}, y) & = & \tilde{f}(x) & \text{em} & \mathrm{B}_1^+, \\ \tilde{\beta} \cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} & = & \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_1. \end{array} \right.$$

onde para $y = \Phi^{-1}(x)$ temos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{F}(\mathrm{X}, \varsigma, \eta, y) & = & F\left(D\Phi^t(y) \cdot \mathrm{X} \cdot D\Phi(y) + \varsigma D^2\Phi, \varsigma D\Phi(y), \eta, y\right) \\ \tilde{f}(x) & =: & f \circ \Phi^{-1}(x) \\ \tilde{\beta}(x) & =: & (\beta \circ \Phi^{-1}) \cdot (D\Phi \circ \Phi^{-1})^t \\ \tilde{\gamma}(x) & =: & (\gamma \circ \Phi^{-1}) \cdot (D\Phi \circ \Phi^{-1})^t \\ \tilde{g}(x) & =: & g \circ \Phi^{-1} \\ \tilde{\omega}(x) & = & \omega \circ \Phi^{-1}(x). \end{array} \right.$$

Ademais, notemos que $\tilde{F}$ também é uniformemente elíptico com constantes de elipticidade $\lambda\mathrm{C}(\Phi)$, $\Lambda\mathrm{C}(\Phi)$. Portanto,

$$\tilde{F}^\sharp(\mathrm{X}, \varsigma, \eta, x) = F^\sharp\left(D\Phi^t(\Phi^{-1}(x)) \cdot \mathrm{X} \cdot D\Phi(\Phi^{-1}(x)) + \varsigma D^2\Phi(\Phi^{-1}(x)), \varsigma D\Phi(y), \eta, \Phi^{-1}(x)\right).$$

Daí pela definição de $F^\sharp$ segue que $\psi_{\tilde{F}^\sharp}(x, x_0) \leq \mathrm{C}(\Phi)\psi_{F^\sharp}(x, x_0)$, logo estamos sob as hipóteses do Corolário 4.0.3. Daí, $\tilde{u} \in W^2 L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{1/2})$ e vale a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

Agora utilizando o mesmo de cobertura descrito no final do Teorema 3.0.5 podemos concluir que $\tilde{u} \in W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$ sendo que ainda temos a estimativa

$$\|u\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}). \tag{62}$$

O que finaliza a prova do Teorema. ■

Podemos refinar as estimativa (61) obtida no Teorema 4.0.5, contudo, é necessário que os dados de bordo sejam mais regulares para isso. Tal resultado é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 4.0.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ($\alpha \in (0,1)$) e $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ um peso. Assuma as condições estruturais (A1), (A2)', (A3) e (A4) são válidas, sendo $\beta, \gamma \in C^2(\partial\Omega)$ e que u é uma $L^{\tilde{p}}$-solução de viscosidade de* (56) *com $\tilde{p} \in [n, p)$. Então, $u \in W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$ com estimativa*

$$\|u\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right), \tag{63}$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de n, λ, Λ, ξ, σ, p, q, $\tilde{p}$, $[\omega]_{\frac{p}{n}}$, μ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ e $\|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}$.

Demonstração: Realmente, pelo mergulho natural $C^2(\partial\Omega)$ em $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ (pela Proposição 2.2.44), estamos nas hipóteses do Teorema 4.0.5 e assim $u \in W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$. Logo, para demonstrar o desejado, resta-nos provar a estimativa (63). Suponhamos por absurdo que a estimativa seja falsa. Então, existem sequências de funções $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que u_j é $L^{\tilde{p}}$-solução de viscosidade

$$\begin{cases} F(D^2 u_j, Du_j, u_j, x) &= f_j(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \beta \cdot Du_j + \gamma u_j &= g_j(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

porém ocorre a estimativa

$$\|u_j\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} > j(\|f_j\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} + \|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}). \tag{64}$$

Em particular, temos que $\|u_j\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. A partir dessa observação, a menos de normalização podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_j\|_{W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} = 1$. Consequentemente, por (64) ganhamos que $\|f_j\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} \to 0$ e $\|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)} \to 0$ quando j tender a ∞.

Por outro lado, pelo Teorema 4.0.5 e as convergências acima, a menos de passagem a subsequência, temos que $u_j \rightharpoonup u_0$ em $W^2 L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$. Pelo Lema 2.2.10 e o mergulho de Sobolev também temos que $u_j \to u_0$ em $C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ quando $j \to \infty$. Assim, pelo Lema de estabilidade 2.3.21, u_0 é solução do seguinte problema com condição de derivada oblíqua ao longo da fronteira

$$\begin{cases} F(D^2u_0, Du_0, u_0, x) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du_0 + \gamma u_0 &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{65}$$

Agora como o operador $\mathfrak{B}(p, s, x) = \beta(x) \cdot p + \gamma(x)s$ é classe C^2 em p e x, uma vez que, $\beta, \gamma \in C^2(\partial\Omega)$ segue de [39, Teorema 7.19] que o problema (65) admite única solução e como $v = 0$ é claramente uma solução desse problema segue que $u_0 = 0$. Mas para cada $j \in \mathbb{N}$ a estimativa do Teorema 4.0.5 é válida para u_k

$$\|u_j\|_{W^2L^{p,q}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C}(\|u_j\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_j\|_{L^{p,q}_\omega(\Omega)} + \|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}).$$

Mas pela convergência fraca $u_j \rightharpoonup u_0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{W^2L^{p,q}_\omega(\Omega)} &\leq \liminf_{j\to+\infty} \|u_j\|_{W^2L^{p,q}_\omega(\Omega)} \\ &\leq \mathrm{C}\liminf_{j\to+\infty}(\|u_j\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_j\|_{L^{p,q}_\omega(\Omega)} + \|g_j\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}) = 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, uma vez que, $\|u_j\|_{W^2L^{p,q}_\omega(\Omega)} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso encerra a prova. ■

5 ESTIMATIVAS DE ORLICZ-SOBOLEV COM PESO

Ainda interessados no problema (38), apresentaremos nesse capítulo uma teoria de regularidade desse problema no âmbito dos espaços de Orlicz com peso. A estratégia para obter tal objetivo faz um paralelo ao que foi feito no capítulo anterior nas estimativas de Lorentz-Sobolev com peso. As ideias aqui apresentadas são do artigo intitulado ”Weighted Orlicz regularity for fully nonlinear elliptic equations with oblique derivative at the boundary via asymptotic operators” publicado na revista Journal of Functional Analysis (JFA) e disponível no endereço eletrônico: `https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022123623004524`.

Precisamos das seguintes hipóteses estruturais:

(O2)’ O termo fonte f satisfaz $|f|^n \in L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)$ para $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ e $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$. Além disso, $\gamma, g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ com $\gamma \leq 0$ e $\beta \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ (para algum $\alpha \in (0,1)$).

(O5)’(**Estimativas $C^{1,1}$-interior**) Assumimos que o problema homogêneo com coeficientes constantes tem estimativas $C^{1,1}_{loc}$ a priori. Mais precisamente, entendemos esse fato com que solução de viscosidade de $F^{\sharp}(D^2h) = 0$ em B_1 é tal que $h \in C^{1,1}(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}})$ e

$$\|h\|_{C^{1,1}(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}})} \leq c_1 \|h\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1)}$$

para uma constante $c_1 \geq 1$. Inspirados nas ideias dos capítulos anteriores, estudaremos a regularidade de C^0-soluções de viscosidade de (56) sem a dependência dos termos Du e u. Para isso, precisamos do seguinte lema de iteração

Lema 5.0.1 *Dado $\epsilon_0 \in (0,1)$ e sendo u uma solução de viscosidade normalizada para*

$$\begin{cases} F_{\tau}(D^2u, x) &= f(x) \quad \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \quad \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Assuma as hipóteses estruturais $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$ e $(A4)$ ocorrem e estenda f por zero fora de $\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}$ e assumamos que

$$\max\left\{\tau, \|f\|_{L^n(\mathrm{B}_{14\sqrt{n}})}\right\} \leq \epsilon$$

para algum $\epsilon > 0$ dependendo apenas de $n, \epsilon_0, \lambda, \Lambda, \mu_0$ e α. Então, para $k \in \mathbb{N}$ definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &=: A_{\mathrm{M}^{k+1}}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}^{n-1}_1 \times (0,1)\right) \\ \mathcal{B} &=: \left(A_{\mathrm{M}^k}(u, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(Q^{n-1}_1 \times (0,1)\right)\right) \cup \left\{x \in \mathcal{Q}^{n-1}_1 \times (0,1); m(f^n) \geq (\mathrm{C}_0\mathrm{M}^k)^n\right\}, \end{aligned}$$

onde $\mathrm{M} = \mathrm{M}(n, \mathrm{C}_0) > 1$. *Então, para qualquer $k \geq 0$,*

$$\omega\left(A^k\right) \leq \epsilon_0^k \omega(A^0) + \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon_0^{k-i} \omega(B^i).$$

Prova: Realmente, pela hipótese (O2)' temos pelo mergulho do Lema 2.2.38 que $f \in L^{p_0 n}(\mathrm{B}_1^+)$ e por conseguinte, $f \in L^n(\mathrm{B}_1^+)$ (pois, $p_0 > 1$) e assim faz sentido a hipótese da pequenez da norma $L^n(\mathrm{B}_1^+)$ de f, logo estamos nas hipóteses do Lema 3.2.3. Seja $\epsilon_0 \in (0,1)$. Daí, podemos aplicar o Lema 3.2.3 para a constante $\tilde{\epsilon_0} = \left(\frac{\epsilon_0}{k_1}\right)^{\frac{1}{\theta}}$, onde θ e k_1 são as constantes do Lema 2.2.9, obtemos a seguinte estimativa

$$|A^{k+1}| \leq \tilde{\epsilon_0}|A^k \cup B^k|$$

e consequentemente pelo dobramento duplo (item (c) do Lema 2.2.9)

$$\omega(A^{k+1}) \leq k_1 \left(\frac{|A^{k+1}|}{|A^k \cup B^k|}\right)^{\theta} \omega(A^k \cup B^k) = \epsilon_0 \omega(A^k \cup B^k) \leq \epsilon_0 \omega(A^k) + \epsilon_0 \omega(B^k), \forall k \geq 0.$$

Iterando essas estimativas acima obtemos o desejado. ■

Com isso podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 5.0.2 *Sejam $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ uma N-função, $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ onde $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ é um peso e $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$. Seja u uma C^0-solução de viscosidade limitada de*

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &= f(x) \quad \textit{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

Assuma as condições $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$, $(A4)$ e $(O5)'$ são válidas. Então, $D^2 u \in L^{\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ e

$$\|D^2u\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, i(\Phi), p_2, \omega, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \alpha, r_0, \theta_0, \mu_0) > 0.$

Prova: Inicialmente, observemos que Υ é uma N-função que satisfaz $\Upsilon \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, porque Φ cumpre tais condições. Além disso, é interessante observar que as constantes de Υ para a condição $\Delta_2 \cap \nabla 2$ são as mesmas que para Φ. No entanto, não é difícil mostrar que $i(\Upsilon) = ni(\Phi)$ e portanto, $\mathcal{A}_{i(\Phi)} \subset \mathcal{A}_{i(\Upsilon)}$ pelo item (a) do Lema 2.2.9. Isso garante, por exemplo, que o Lema 2.2.38 aplicado a L^{Υ}_{ω} depende apenas de n, ω e $i(\Phi)$ ainda. Após esta digressão, provemos o desejado.

Fixemos $x_0 \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}} \cup \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$. Quando $x_0 \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$, escolhamos $0 < r < \frac{1-|x_0|}{14\sqrt{n}}$ e definamos

$$\kappa =: \frac{\epsilon r}{\left(\epsilon^n r^{-n}\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))} + (\mathrm{C}')^n\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))} + \epsilon^n r^{-n}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_{14r\sqrt{n}}(x_0))}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

onde a constante $\epsilon > 0$ é do Lema 5.0.1 para a constante $\epsilon_0 > 0$ que será escolhadia a posteriori e C' é a constante do lema de mergulho 2.2.38. Pela escolha do r, podemos definir a seguinte função auxiliar $\tilde{u}(y) =: \frac{\kappa}{r^2}u(x_0 + ry), y \in \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}$. Observe que, $\tilde{u}$ é uma C^0-solução de viscosidade normalizada para

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2\tilde{u}, x) &=& \tilde{f}(x) & \text{em} & \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}, \\ \tilde{\beta}\cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} &=& \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_{14\sqrt{n}}, \end{cases}$$

sendo que,

$$\begin{cases} \tilde{F}(\mathrm{X}, y) &=:& \kappa F\left(\frac{1}{\kappa}\mathrm{X}, x_0 + ry\right) \\ \tilde{f}(y) &=:& \kappa f(x_0 + ry) \\ \tilde{\beta}(y) &=:& \beta(x_0 + ry) \\ \tilde{\gamma}(y) &=:& r\gamma(x_0 + ry) \\ \tilde{g}(y) &=:& \frac{\kappa}{r} g(x_0 + ry) \\ \tilde{\omega}(y) &=:& \omega(x_0 + ry). \end{cases}$$

Portanto, $\tilde{F}$ satisfaz as mesmas condições estruturais que F e claramente $\tilde{\omega} \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ (uma vez que, $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$). Doravante, pelo Lema 2.2.38 e a Desigualdade de Hölder segue que

$$\|\tilde{f}\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}\right)} \;=\; \frac{\kappa}{r}\|f\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))} \leq \frac{\kappa}{r}\mathrm{C}'\|f\|^{\frac{1}{n}}_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))} \leq \epsilon.$$

Portanto, estamos nas hipóteses do Lema 5.0.1 e consequentemente para cada $k \geq 0$, sendo

$$A^k =: \mathcal{A}_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}) \cap \left(\mathcal{Q}^{n-1}_1 \times (0,1)\right)$$

e

$$B^k =: \left\{x \in \left(\mathcal{Q}^{n-1}_1 \times (0,1)\right); \mathcal{M}(\tilde{f}^n)(x) \geq (\mathrm{C}_0\mathrm{M}^k)^n\right\}$$

obtemos que

$$\tilde{\omega}(A^k) \leq \epsilon_0^k \tilde{\omega}(A^0) + \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon_0^{k-i}\tilde{\omega}(B^i). \tag{66}$$

Por outro lado, a condição $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)$ equivale ao fato que $|\tilde{f}|^n \in L^{\Phi}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})$ e assim pelos Lemas 2.2.39 e (30),

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi,\tilde{\omega}}(\mathcal{M}(|\tilde{f}|^n)) &\leq \mathrm{C}\rho_{\Phi,\tilde{\omega}}(|\tilde{f}|^n) = \frac{\mathrm{C}}{r^n}\int_{\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0)} \Phi\left(\kappa^n |f(y)|^n\right)\omega(y)dy \\ &\leq \frac{\mathrm{C}}{r^n}\left(\|(\kappa f)^n\|^{p_2}_{L^{\Phi}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}}(x_0))} + 1\right) = \frac{\mathrm{C}}{r^n}\left(\kappa^{np_2}\|f\|^{p_2}_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14r\sqrt{n}}(x_0))} + 1\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{C}}{r^n}((\epsilon r)^{np_2} + 1) \leq \mathrm{C}, \end{aligned}$$

daí temos que $\mathcal{M}(|\tilde{f}|^n) \in L^{\Phi}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})$ e com a seguinte estimativa

$$\|\mathcal{M}(|\tilde{f}|^n)\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\mathrm{B}^+_{14\sqrt{n}})} \leq \mathrm{C} \tag{67}$$

Portanto, por $\Phi \in \Delta_2$, existe uma constante $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}_0(\mathrm{M}^n) > 0$ tal que , $\Phi(\mathrm{M}^n t) \leq \mathrm{K}_0\Phi(t)$ para todo $t \geq 0$. Consequentemente, pela iteração acima segue que para todo $k \in \mathbb{N}$ as seguintes desigualdades ocorrem: $\Phi(M^{kn}) \leq \mathrm{K}_0^k\Phi(1)$ e $\Phi(\mathrm{M}^{kn}) \leq \mathrm{K}_0^{k-i}\Phi(\mathrm{M}^{in})$, para todo $1 \leq i \leq k-1$. Desta forma, usando (66) e (67), tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\Upsilon(\mathrm{M}^k)\tilde{\omega}(A^k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\Phi(\mathrm{M}^{kn})\tilde{\omega}(\mathcal{A}^k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Phi(1)\mathrm{K}_0^k\epsilon_0^k\tilde{\omega}(A^0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Phi(\mathrm{M}^{kn})\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_0^{k-i}\tilde{\omega}(B^i) \\
&\leq \Phi(1)\omega(\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1))\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{K}_0\epsilon)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}(\Phi(\mathrm{M}^{in})(\mathrm{K}_0\epsilon)^{k-i}\tilde{\omega}(B^i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{K}_0\epsilon_0)^k\left(\Phi(1)\tilde{\omega}(\mathcal{Q}_1^{n-1}\times(0,1)) + \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\mathrm{M}^{in})\tilde{\omega}(B^i)\right) < +\infty,
\end{aligned}$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $\mathrm{K}_0\epsilon_0 < 1$. Essa estimativa juntamente com a Proposição 2.2.41 implica que $\Theta(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}) \in L^{\Upsilon}_{\tilde{\omega}}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})$, visto que

$$\left\{x \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}} : \Theta(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})(x) > \mathrm{M}^k\right\} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{M}^k}(\tilde{u}, \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}).$$

Por conseguinte, o Lema 2.2.40 garante que $\|D^2\tilde{u}\|_{L^{\Upsilon}_{\tilde{\omega}}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})} \leq C$, para C constante positiva dependendo apenas de n, λ, Λ, $i(\Phi)$, ω, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, μ_0, r_0 e θ_0. Reescalonando u, temos

$$\|D^2u\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{r}{2}}(x_0)\right)} \leq C(\|u\|^n_{L^{\infty}(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

onde $C > 0$ depende apenas de n, λ, Λ, $i(\Phi)$, p_2, ω, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, μ_0, r_0, θ_0 e r. Por outro lado, se $x_0 \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}$ então, com condição $(O5)'$ obtemos estimativas interiores por [35, Teorema 2.4] da forma,

$$\|D^2u\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)\right)} \leq C(\|u\|^n_{L^{\infty}(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)}).$$

Por fim, combinando as estimativas interiores e no bordo, obtemos o resultado desejado por argumento de cobertura padrão. Isso finaliza a prova. ∎

Agora temos estimativas de Orlicz-Sobolev com peso para C^0-soluções de viscosidade do problema (53) pela seguinte proposição

Proposição 5.0.3 *Seja u C^0-solução de viscosidade limitada de* (53). *Assuma as condições estruturais* $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$, $(A4)$ *e* $(O5)'$, $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)$ *para* $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ *e* $\omega \in A_{i(\Phi)}$. *Então, existe constante* $\mathrm{C} > 0$ *dependendo apenas* n, λ, Λ, ξ, σ, p_2, $i(\Phi)$, ω, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, α, r_0, θ_0 *e* μ_0, *tal que* $u \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}\left(B^+_{\frac{1}{2}}\right)$ *e*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Prova: Segue na mesma linha das provas do Corolário (3.2.6) e da Proposição (4.0.2) com mínimas alterações. ■

Como nos dois capítulos anteriores via argumentos análogos de densidade, compacidade, estabilidade e as estimativas obtidas acima na Proposição (5.0.3), podemos estender as estimativas para L^p- soluções de viscosidade de (53). Por isso omitiremos a prova da próxima proposição que traz tal extensão.

Proposição 5.0.4 *Seja u uma L^p-solução de viscosidade limitada de* (53) *para* $p =: p_0 n \in (n, +\infty)$, *onde* $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$ *com* $\beta \cdot \nu \geq \mu_0$ *para algum* $\mu_0 > 0$, $\gamma \leq 0$, $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)$, *para* $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ *sendo que* $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ *é uma N-função e* $\omega \in A_{i(\Phi)}$ *um peso. Ademais, suponhamos as hipóteses estruturais* $(A4)$ *e* $(O5)'$ *para* $F^\sharp$ *e que* F *cumpre a condição* (**SC**). *Então, existem constantes positivas* $\beta_0 = \beta_0(n, \lambda, \Lambda, p_0, p_2)$, $r_0 = r_0(n, \lambda, \Lambda, p_0, p_2)$ *e* $\mathrm{C} > 0$ *que depende apenas de* n, λ, Λ, ξ, σ, p_0, p_2, $i(\Phi)$, ω, θ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* r_0, *tais que se*

$$\left(\fint_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap \mathrm{B}^+_1} \psi_{F^\sharp}(x, x_0)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \psi_0$$

para qualquer $x_0 \in \mathrm{B}^+_1$ *e* $r \in (0, r_0)$, *então* $u \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ *e*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right).$$

Com essa Proposição 5.0.4 podemos provar o resultado principal desse capítulo, cuja demonstração é idêntica a dos Teoremas (3.0.5) e (61) e por esse motivo omitiremos sua demonstração.

Teorema 5.0.5 (Estimativas de Orlicz-Sobolev com peso) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ *domínio limitado com* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ $(\alpha \in (0,1))$. *Suponhamos as condições estruturais* $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$, $(A4)$ *e* $(O5)'$ *são válidas e u seja uma L^p-solução de viscosidade de* (38) *onde* $p = p_0 n$ *para a constante* $p_0 > 1$ *do Lema 2.2.38. Então,* $u \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ *onde* $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$, *com a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|^n_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* n, λ, Λ, ξ, σ, p_0, p_2, Φ, ω, μ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ *e* $\|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}$.

Fazendo um ajuste nas hipóteses do Teorema 5.0.5 podemos obter estimativas mais refinadas onde o lado direito das estimativas obtidas acima não tenha o termo $\|u\|^n_{L^\infty(\Omega)}$. Para isso, devemos pagar o preço de melhorar a regularidade de alguns termos de bordo. Isso é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 5.0.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ($\alpha \in (0,1)$). Assuma as mesmas condições estruturais do Teorema 5.0.5 com exceção que $\beta, \gamma \in C^2(\partial\Omega)$ em vez de pertencerem a $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ e u seja uma L^p-solução de viscosidade de* (38) *onde $p = p_0 n$ é tal que $p_0 > 1$ é a constante do Lema 2.2.38. Então, $u \in W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)$ onde $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ e vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^\Upsilon_\omega(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)} \right), \tag{68}$$

onde C é uma constante positiva dependendo apenas de n, λ, Λ, ξ, σ, p_0, p_2, Φ, ω, μ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$ e $\|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}$.

Demonstração: Segue a mesma linha da demonstração do Teorema 4.0.6, com as mínimas alterações fazendo alusão aos espaços funcionais. ∎

Observação 5.0.7 *O Teorema 5.0.6 tem sua importância para estimativas sob os dados que temos controle. Mais precisamente, na modelagem de alguns problemas do tipo* (38)*, sob dados de controle de f e g podemos controlar a solução u apenas por esses dados.*

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo, usufruiremos da teoria de regularidade desenvolvida nos capítulos 3, 4 e 5 para apresentarmos algumas aplicações relevantes dos resultados obtidos em diversas áreas. Em um primeiro momento, voltaremos a atenção a teoria de problemas de fronteira livre, mais precisamente, estudaremos o problema de obstáculo com condição de bordo oblíquo. Mudando um pouco a vertente de aplicação, trabalharemos com a classe fundamental de soluções de EDP's elípticas garantido densidade dos espaços $W^2L^{p,q}_\omega$ (resp. W^Φ_ω e $W^{2,p}$) para soluções de viscosidade de modelos totalmente não-lineares com condição de bordo oblíquo. Após isso, estaremos interessados em estudar nossos modelos de EDP's quando o termo de força (ou termo fonte) f está em um espaço de integrabilidade um pouco mais complicado que o espaço das funções limitadas, mais precisamente, garantiremos estimativas BMO com respeito ao espaço de Orlicz com peso para a Hessiana quando o termo f pertence ao respectivo espaço funcional. Por fim, explanaremos com ajuda das estimativas de Lorentz com peso, estimativas de Morrey com expoente variável para um caso particular de modelo que estudamos regularidade global nos capítulos antecedentes a esse.

6.1 Problema de obstáculo

Neste primeiro momento, gostaríamos de destacar que as estimativas globais da Hessianas também são úteis no contexto de problemas do tipo obstáculo. Fisicamente, o problema clássico do obstáculo refere-se à posição de equilíbrio de uma membrana elástica (ou seja, $u : \Omega \to \mathbb{R}$), cuja fronteira é mantida fixa (ou seja, $u_{|\partial\Omega} = g$), situada acima de um determinado obstáculo e sujeito à ação de uma força transversal $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tal posição de equilíbrio é a que minimiza a energia potencial envolvida no processo.

Além da ação realizada pela força transversal, devemos levar em consideração outra componente da energia potencial da membrana: o trabalho necessário para esticá-la. Nesse experimento, a membrana é considerada perfeitamente elástica, por isso, o trabalho é proporcional à diferença de área entre a superfície esticada e a parte que não sofreu deformação. A constante de proporcionalidade é conhecida por tensão, que por simplificação assumiremos que é igual a 1. Assim, a energia potencial é dada por

$$E = \int_\Omega \left(\sqrt{1+|Du(x)|^2} - 1\right) dx + \int_\Omega u(x)f(x)dx \tag{69}$$

que fazendo a imposição que o gradiente Du é pequeno e lembrando que $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$ (Via expansão de Taylor) obtemos em (69)

$$E = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(x)|^2 dx + \int_\Omega u(x)f(x)dx. \tag{70}$$

Via essa expressão da energia potencial, em busca da posição de equilíbrio, podemos olhar a expressão (70) como um funcional em u e busquemos minimizar no espaço de Sobolev $H^1(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$.

Para isso, se a membrana estiver sobre um obstáculo definido, como gráfico de uma função φ de classe C^2 em Ω, o problema de minimização é reduzido a minimizar o funcional

$$\mathcal{J}(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2 dx + \int_\Omega wf dx,$$

sob o conjunto $\mathcal{K} = \{w \in H^1(\Omega) : w - g \in H_0^1(\Omega) \text{ e } w > \varphi \text{ em } \Omega\}$, onde as funções em $\mathcal{K}$ são ditas *admissíveis* (ou *representantes*) e $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Façamos a suposição que $g > \varphi$ em Ω para garantir que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Seguindo as ideias de [52] e [49], iremos fazer algumas reduções do problema de minimização. Suponhamos que o funcional $\mathcal{J}$ admita um minimizante u. Então, dados $0 \leq \varsigma \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, a função $w = u + \varepsilon\varsigma$ é admissível e assim pela minimalidade de u com respeito ao funcional $\mathcal{J}$, tem-se $\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(w)$ e assim

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathcal{J}(w) - \mathcal{J}(u)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |D(u+\varepsilon\varsigma)|^2 dx + \int_\Omega (u+\varepsilon\varsigma) f dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega uf dx\\
&= \cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx} + \varepsilon\int_\Omega Du\cdot D\varsigma dx + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega |D\varsigma|^2 dx + \cancel{\int_\Omega uf dx} + \varepsilon\int_\Omega \varsigma f dx -\\
&- \cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx} - \cancel{\int_\Omega uf dx}\\
&= \varepsilon^2\frac{1}{2}\int_\Omega |D\varsigma|^2 dx + \varepsilon\left(\int_\Omega Du\cdot D\varsigma dx + \int_\Omega \varsigma f dx\right).
\end{aligned} \tag{71}$$

Dividindo ambos os membros de (71) e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, podemos concluir que

$$0 \leq \int_\Omega Du\cdot D\varsigma dx + \int_\Omega \varsigma f dx,\ \forall \varsigma \in C_0^\infty(\Omega), \text{ com } \varsigma \geq 0. \tag{72}$$

Em outros termos, (72) nos diz que uma solução do problema de obstáculo satisfaz no sentido fraco

$$\Delta u \leq f(x) \text{ em } \Omega.$$

De forma similar a dedução realizada acima, usando funções $\varsigma \in C_0^\infty(\Omega)$ com suporte no domínio $\{u > \varphi\}$ que o minimizante deve satisfazer

$$\Delta u = f(x) \text{ em } \{u > \varphi\}.$$

Para mais detalhes, recomendamos aos leitores as referências [52] e [49], bem como para mais deduções físicas sobre o problema de obstáculo.

Assim, o problema de obstáculo pode ser estudado no sentido fraco o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u & \leq & f & \text{no sentido fraco em} & \Omega \\ \Delta u & = & f & \text{no sentido fraco em} & \{u > \varphi\} \\ u & \geq & \varphi & \text{em} & \Omega \end{cases}$$

com $u - g \in H_0^1(\Omega)$ no sentido do traço. Alguns conjuntos destacamos sua nomenclatura no contexto do problema de obstáculo:

✓ $\{u = \varphi\}$ - Conjunto de contato com o obstáculo;

✓ $\{u > \varphi\}$ - Conjunto de não-contato com o obstáculo;

✓ $\partial\{u > \varphi\}$ - Fronteira livre.

A abordagem acima é de caráter variacional, uma vez que, o caráter de solução é no sentido distribucional (solução fraca). O problema de obstáculo pode também ser estudado no contexto não-variacional, via soluções no sentido da viscosidade. O de soluções não-variacionais é bem posto para estudar problemas onde o operador que define a EDP é da forma não-divergente e/ou modelos não-lineares ou totalmente não-lineares. Nosso interesse nesta aplicação é abordar o problema de obstáculo no contexto não-variacional.

Sobre teoria de regularidade para problemas do tipo obstáculo, Lieberman em [38] sobre estimativas de gradientes para problemas de obstáculos de modelos elípticos (sob estrutura convexa/convexa) com condições de contorno oblíquas.

Também citamos Byun et al. em [11] estudaram estimativas de Calderón-Zygmund para os seguintes modelos de problemas de obstáculos:

$$\begin{cases} a^{ij}(x)Du_{ij} & \leq & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (a^{ij}(x)Du_{ij} - f)(u - \phi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geq & \phi(x) & \text{em} & \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u & = & g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F(D^2u, x) & \leq & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (F(D^2u, x) - f)(u - \phi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geq & \phi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde a matriz $(a^{ij}(x))_{n\times n}$ e F são (λ, Λ)-elípticos com o fato que F é um operador convexo. Tais problemas de obstáculo foram estudados com coeficientes descontínuos e obstáculos irregulares (isto é, $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$).

Um pouco mais tarde, Koike e Tateyama em [30], obtiveram estimativas globais para L^p-soluções de viscosidade do problema de obstáculos bilateral com ingredientes ilimitados para obstáculos apenas contínuos na seguinte classe de problemas de obstáculos

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, x) & \leq & f(x) & \text{em} & \{x \in \Omega : u(x) > \varphi(x)\} \\ F(D^2u, Du, x) & \geq & f(x) & \text{em} & \{x \in \Omega : u(x) < \psi(x)\} \\ \varphi(x) \leq u(x) & \leq & \psi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

e também garantiram estimativas Hölder para a primeira derivada de soluções desse problema para obstáculos suficientemente regulares.

Recentemente, Byun et al. [10, Teorema 1.1] estabeleceram estimativas $W^{2,p}$ problema de obstáculo com condições de bordo oblíquo

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) & \leq & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (F(D^2u, Du, u, x) - f)(u - \phi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geq & \phi(x) & \text{em} & \Omega \\ \beta \cdot Du + \gamma u & = & g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{73}$$

para um dado obstáculo $\phi \in W^{2,p}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\beta(x) \cdot D\phi + \gamma\phi \geq g$ q.t.p. em $\partial\Omega$, quando F é um operador convexo e $\gamma = g \equiv 0$.

Motivados pelas referências acima, investigaremos estimativas $W^{2,\Upsilon}_{\omega}$ e $W^2L^{p,q}_{\omega}$ para o problema de obstáculo (73) sobre condições assintóticas mais fracas que convexidade.

Para esse propósito, precisaremos assumir as seguintes hipóteses:

(A5) Existe um módulo de continuidade $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ com $\omega(0) = 0$, tal que

$$F(\mathrm{X}_1, q, r, x_1) - F(\mathrm{X}_2, q, r, x_2) \leq \omega\left(|x_1 - x_2|\right)\left[(|q| + 1) + \alpha_0|x_1 - x_2|^2\right]$$

para todos $x_1, x_2 \in \Omega$, $q \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 > 0$ e $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \in \mathrm{Sym}(n)$ satisfazendo

$$-3\alpha_0 \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{X}_1 \end{pmatrix} \leq 3\alpha_0 \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & -\mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix},$$

onde Id_n é a matriz identidade de ordem n.

(A6) F é um operador próprio no seguinte sentido:

$$d \cdot (r_2 - r_1) \leq F(\mathrm{X}, q, r_1, x) - F(\mathrm{X}, q, r_2, x),$$

para quaisquer $\mathrm{X} \in \mathrm{Sym}(n)$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 \leq r_2$, $x \in \Omega$, $q \in \mathbb{R}^n$, e para alguma constante $d > 0$.

As condições $(A5) - (A6)$ são necessárias para garantir o Princípio de Comparação para o problema oblíquo (45) (veja [16, Teorema 2.10] e [39, Teorema 7.17]), consequentemente asseguramos de empregar o Método de Perron para soluções de viscosidade (veja [39, Seções 7.4 e 7.6]).

Para enunciar o resultado principal no contexto dos espaços de Orlicz-Sobolev com peso, assumiremo que nosso obstáculo obstáculo $\phi \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\overline{\Omega})$, onde $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ sendo Φ a N-função nas condições do Teorema 5.0.5 satisfazendo $\beta(x) \cdot D\phi + \gamma\phi \geq g$ q.t.p. em $\partial\Omega$.

Teorema 6.1.1 (Estimativas $W^{2,\Upsilon}_{\omega}$ para o prolema de obstáculo) *Seja u uma L^p-solução de viscosidade para o problema de obstáculo* (73)*, onde $p = p_0 n$, F satisfaz as condições estruturais* $(A1)$*,* $(O2)'$*,* $(A3)$*,* $(A4)$ *e* $(O5)'$*, com a condição $\beta \in C^2(\partial\Omega)$ e $(O1) - (O2)$, $\partial\Omega \in C^3$ e $\phi \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$, onde $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ e $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$. Então, $u \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ e vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)} \right),$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p_0, p_2, \mu_0, \sigma, \xi, \omega, i(\Phi), \|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \partial\Omega, \mathit{diam}(\Omega), \theta_0)$.

Demonstração: A ideia da demonstração desse resultado consiste em construir uma família de soluções de viscosidade do seguinte problema penalizado

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) & = & \mathrm{h}^+(x)\Psi_\varepsilon(u_\varepsilon - \phi) + f(x) - \mathrm{h}^+(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du_\varepsilon + \gamma u_\varepsilon & = & g & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{74}$$

para $\varepsilon \in (0, 1)$, onde $\Psi_\varepsilon(s)$ é uma função suave não-decrescente tal que

$$\Psi_\varepsilon(s) \equiv 0 \quad \text{se} \quad s \leq 0; \quad \Psi_\varepsilon(s) \equiv 1 \quad \text{se} \quad s \geq \varepsilon,$$

$$0 \leq \Psi_\varepsilon(s) \leq 1 \quad \text{par qualquer} \quad s \in \mathbb{R}.$$

e

$$\mathrm{h}(x) =: f(x) - F(D^2\phi, D\phi, \phi, x).$$

Essa penalização no termo fonte nos ajudará, sob certas condições, que tendo limitação da sequência u_ε que independe de ε que tal sequência converge para uma função u_∞ que será a nossa candidata a solução de (73) e também goza das estimativas desejadas.

Para o desejado, definamos $\hat{f}_{u_\varepsilon}(x) =: \mathrm{h}^+(x)\Psi_\varepsilon(u_\varepsilon - \phi) + f(x) - \mathrm{h}^+(x)$. Observemos que pela condição estrutural $(A1)$ temos que

$$\begin{array}{rcl} |h(x)| & \leq & |f(x)| + \mathrm{C}(n\lambda, \Lambda)|D^2\phi| + \sigma|D\phi| + \xi|\phi| \\ & \leq & \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \sigma, \xi)(|f(x)| + |D^2\phi(x)| + |D\phi(x)| + |\phi(x)|), \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{array}$$

donde por desigualdade triangular, garantimos que $\mathrm{h} \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ com estimativa

$$\|\mathrm{h}\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \right), \tag{75}$$

onde a constante positiva C depende apenas de n, λ, Λ, σ e ξ. Agora estimemos $\hat{f}_{u_\varepsilon}$. Para cumprir tal objetivo, analisaremos em dois casos sobre a função h^+:

(i) $\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} > 0$.
Nesse caso, pela desigualdade triangular temos para q.t.p. x em Ω,

$$|\hat{f}_{u_\varepsilon}(x)| \leq 2|h^+(x)| + |f(x)|$$

e assim pelo fato de $\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} > 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\hat{f}_{u_\varepsilon}}{\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}} \right\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} &\leq 2 \left\| \frac{h^+}{\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}} \right\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \\ &+ \left\| \frac{f}{\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}} \right\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_{u_\varepsilon}\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} &\leq 3(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}) \\ &\leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \sigma, \xi)(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}). \end{aligned}$$

(ii) $\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} = 0$.
Neste caso, $\|h^+\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} = 0$ implica que $h^+ = 0$ q.t.p. em Ω e daí $\hat{f}_{u_\varepsilon} = f$ que independe de v_0.

Portanto, a partir desses dois casos podemos concluir que

$$\|\hat{f}_{u_\varepsilon}\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C}(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}), \tag{76}$$

onde $\mathrm{C} > 0$ independe de u_ε.Como consequência temos que

$$\|\hat{f}_{u_\varepsilon}\|_{L^{\Upsilon}(\Omega)} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \sigma, \xi)\left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)}\right). \tag{77}$$

Agora, afirmamos que o problema (74) admite uma solução de viscosidade que goza de estimativas *a priori*. De fato, pelo Método de Perron (confira [39, Teorema 7.19]) segue que para cada $v_0 \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ fixada, existe única solução de viscosidade $u_\varepsilon \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ satisfazendo no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, u_\varepsilon, x) &= \mathrm{h}^+(x)\Psi_\varepsilon(v_0 - \phi) + f(x) - \mathrm{h}^+(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \beta \cdot Du_\varepsilon + \gamma u_\varepsilon &= g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

cumprindo o Teorema 5.0.5 com estimativas

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|u_\varepsilon\|^n_{L^\infty(\Omega)} + \|\hat{f}_{v_0}\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right) \tag{78}$$

para alguma constante $\mathrm{C} > 0$ dependendo apenas de n, λ, Λ, ξ, σ, p_0, p_2, Φ, ω, μ_0, σ, ω, $\|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}$, $\|\gamma\|_{C^2(\partial\Omega)}$, θ_0 e diam(Ω). Invocando as Estimativas ABP 2.3.13 e o Teorema de mergulho dos espaços de Orlicz com peso 2.2.38, obtemos em (78)

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|\hat{f}_{v_0}\|_{L^{\Upsilon}_\omega(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right). \tag{79}$$

Contudo, similar à (77) temos a seguinte estimativa

$$\|\hat{f}_{v_0}\|_{L^{\Upsilon}(\Omega)} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \sigma, \xi)\left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_\omega(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)}\right). \tag{80}$$

Assim, por (79) e (80) podemos concluir que

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C}_0,$$

onde $\mathrm{C}_0 > 0$ é uma constante que depende apenas de n, λ, Λ, μ_0, σ, ω, p_0, p_2, Φ, ω, $\|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}$, θ_0, diam(Ω), $\|f\|_{L^{\Upsilon}_\omega(\Omega)}$, $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}$, $\|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)}$ e que independente de v_0.

Nessa linha de raciocínio, definindo o operador $\mathcal{T} : L^{\Upsilon}_\omega(\Omega) \to W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega) \subset L^{\Upsilon}_\omega(\Omega)$ dado por $\mathcal{T}(v_0) = u_\varepsilon$, podemos concluir que $\mathcal{T}$ aplica C_0-bola (em $L^{\Upsilon}_\omega(\Omega)$) sobre si própria. Portanto, $\mathcal{T}$ é um operador compacto. Consequentemente, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Ver [7, Capítulo 6]), existe u_ε tal que $\mathcal{T}(u_\varepsilon) = u_\varepsilon$, que é solução de viscosidade para(74).

De (79) e (80) garantimos que a sequência $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é limitada em $W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)$. Daí, temos por $W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)$ ser reflexivo e o mergulho de Sobolev garantimos a existência de uma subsequência $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $\varepsilon_j \to 0$ e uma função $u_\infty \in W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)$ tais que $u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u_\infty$ em $W^{2,\Upsilon}_\omega(\Omega)$ e $u_{\varepsilon_j} \to u_\infty$ em $C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$, devido aos mergulhos de Sobolev mais a inclusão dos espaços de Orlicz nos espaços de Lebesgue dada pelo Lema 2.2.38.

Agora, afirmamos que u_∞ é uma solução de viscosidade de (73). De fato, observemos inicialmente que $\beta(x) \cdot Du_{\varepsilon_j}(x) + \gamma(x)u_{\varepsilon_j}(x) = g(x)$ e $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas e eqüicontínuas sobre $\partial\Omega$, então de (79) e a convergência $u_{\varepsilon_j} \to u_\infty$ em $C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ temos no sentido da viscosidade (mais que isso, pontualmente)

$$\beta(x) \cdot Du_\infty(x) + \gamma(x)u_\infty(x) = g(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Por outro lado, de (74) e pela definição de Ψ temos que

$$\begin{aligned} F(D^2u_{\varepsilon_j}, Du_{\varepsilon_j}, u_{\varepsilon_j}, x) &= \mathrm{h}^+(x)\Psi_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \phi) + f(x) - \mathrm{h}^+(x) \\ &\leq f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde pela Lema de Estabilidade 2.3.21 segue fazendo $j \to +\infty$,

$$F(D^2u_\infty, Du_\infty, u_\infty, x) \leq f \quad \text{em} \quad \Omega$$

no sentido da viscosidade. Feito isso, provaremos agora que

$$u_\infty \geq \phi \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Realmente, observemos que no conjunto $\mathcal{O}_j =: \{x \in \overline{\Omega} : u_{\varepsilon_j}(x) < \phi(x)\}$ tem-se pela definição de Ψ que $\Psi_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \phi) \equiv 0$. Agora se $\mathcal{O}_j = \emptyset$, não temos nada a provar. Portanto, suponhamos que $\mathcal{O}_j \neq \emptyset$. Então,

$$F(D^2 u_{\varepsilon_j}, Du_{\varepsilon_j}, u_{\varepsilon_j}, x) = f(x) - \mathrm{h}^+(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{O}_j.$$

Mas como $\mathcal{O}_j$ é aberto em $\overline{\Omega}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ uma vez que $u_{\varepsilon_j} \in C^0(\overline{\Omega})$. Além disso, pela definição da função h segue que

$$F(D^2\phi, D\phi, \phi, x) = f(x) - \mathrm{h}(x) \geq F(D^2 u_{\varepsilon_j}, Du_{\varepsilon_j}, u_{\varepsilon_j}, x) \text{ em } \mathcal{O}_j.$$

Ademais, sabemos que $u_{\varepsilon_j} = \phi$ em $\partial\mathcal{O}_j \setminus \partial\Omega$. Portanto, podemos usar o Critério de Comparação (veja [16, Teorema 2.10] e [39, Teorema 7.17]) para concluirmos que $u_{\varepsilon_j} \geq \phi$ em $\mathcal{O}_j$, o que é uma contradição. Consequentemente, $\mathcal{O}_j = \emptyset$ e $u_\infty \geq \phi$ em $\overline{\Omega}$. Por fim, resta-nos mostrarmos que

$$F(D^2 u_\infty, Du_\infty, u_\infty, x) = f(x) \text{ em } \{u_\infty > \phi\}$$

no sentido da viscosidade. Para este fim, vejamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ ocorre

$$\mathrm{h}^+(x)\Psi_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \phi) + f(x) - \mathrm{h}^+(x) \to f(x) \text{ q.t.p. em } \left\{x \in \Omega : u_\infty(x) > \phi(x) + \frac{1}{k}\right\}.$$

E assim aplicando novamente o Lema de Estabilidade 2.3.21 temos no sentido da viscosidade que

$$F(D^2 u_\infty, Du_\infty, u_\infty, x) = f(x) \text{ em } \{u_\infty > \phi\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{u_\infty > \phi + \frac{1}{k}\right\} \quad \text{quando} \quad j \to +\infty,$$

e assim segue a afirmação. Logo, u_∞ é solução de (73) com estimativa $W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$

$$\|u_\infty\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \liminf_{j\to+\infty} \|u_{\varepsilon_j}\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \cdot \left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p_0, p_2, \mu_0, \sigma, \xi, \omega, i(\Phi), \|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \partial\Omega, \mathrm{diam}(\Omega), \theta_0)$ sendo a primeira desigualdade acima verídica devido a convergência fraca $u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u_\infty$. Resta-nos garantir que $u \equiv u_\infty$ para concluir a prova do Teorema. Para este objetivo, suponhamos por absurdo que $u \neq u_\infty$. Então, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\mathcal{O}_\sharp = \{u_\infty > u\} \neq \emptyset.$$

Uma vez que, $u_\infty > u \geq \phi$ em $\mathcal{O}_\sharp$, obtemos no sentido da viscosidade que

$$F(D^2u_\infty, Du_\infty, u_\infty, x) = f(x) \quad \text{em} \quad \mathcal{O}_\sharp$$

Assim podemos concluir que

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) & \leq & f(x) & \leq & F(D^2u_\infty, Du_\infty, u_\infty, x) & \text{em} & \mathcal{O}_\sharp \\ & & u(x) & = & u_\infty(x) & \text{em} & \partial\mathcal{O}_\sharp \setminus \partial\Omega, \\ \beta \cdot Du + \gamma u & = & g & = & \beta \cdot Du_\infty + \gamma u_\infty & \text{sobre} & \partial\mathcal{O}_\sharp \cap \partial\Omega \end{cases}$$

Consequentemente, pelo Princípio de Comparação para problemas com condições de bordo oblíquo [16, Teorema 2.10] e [39, Theorem 7.17], concluímos que $u \geq u_\infty$ em $\mathcal{O}_\sharp$ caso $\partial\mathcal{O}_\sharp \cap \partial\Omega = \emptyset$ ou não. Em qualquer caso, temos uma contradição pela definição do conjunto $\mathcal{O}_\sharp$, e consequentemente conseguimos provar que $u \equiv u_\infty$. O que encerra a prova. ∎

Observação 6.1.2 *Sobre o Teorema 6.1.1:*

✓ *No final da prova, do Teorema 6.1.1 provamos na realidade unicidade de solução de viscosidade para* (73). *Ademais, na prova desse teorema ficou evidenciado a condição de $n < p$ e não $n \leq p$, devido a recorrermos aos mergulhos de Sobolev.*

✓ *O Teorema 6.1.1 garante boas estimativas nos espaços de Orlicz-Sobolev com peso que são espaços mais refinados de propriedades quando comparamos aos espaços de Sobolev $W^{k,p}$'s.*

✓ *Fazendo $\Phi = t^p$ ($p \in (n, \infty)$) e $\omega \equiv 1$ temos imediatamente que $L^\Phi_\omega(\Omega)$ é o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e daí recuperamos pelo Teorema 6.1.1 estimativas de Sobolev para o problema de obstáculo* (73).

✓ *Em consonância com a observação precedente, notemos que diferente do caso L^p ($p \in [1, \infty]$) a norma $\|\cdot\|_{L^\Phi_\omega(\Omega)}$ não tem a propriedade de ser crescente no seguinte sentido: Para todas $f, g \in L^p(\Omega)$ tem-se*

$$|f| \leq |g| \quad \textit{em} \quad \Omega \Longrightarrow \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

E mais que isso, em $L^\Phi_\omega(\Omega)$ a função $|f| \longmapsto \|f\|_{L^\Phi_\omega(\Omega)}$ é não-crescente, no sentido que

$$|f| \leq |g| \quad \textit{em} \quad \Omega \Longrightarrow \|f\|_{L^\Phi_\omega(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\Phi_\omega(\Omega)},$$

devido a definição da norma de Luxemburg. Realmente, se $|f| \leq |g|$, então por Φ ser crescente

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|)\omega(x)dx \leq \int_\Omega \Phi(|g(x)|)\omega(x)dx.$$

Nesse caso, se $t > 0$ é tal que $\rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{g}{t}\right) \leq 1$, então pela observação acima

$$\rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{f}{t}\right) \leq \rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{g}{t}\right) \leq 1.$$

Com isso, acabamos de mostrar que

$$\left\{t > 0; \rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{g}{t}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{t > 0; \rho_{\Phi,\omega}\left(\frac{f}{t}\right) \leq 1\right\}.$$

E assim tomando o ínfimo desses dois conjuntos temos que

$$\|f\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)} \geq \|g\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)}.$$

Devido a esse fato não podemos ter repetido o argumento no caso L^p na estimativa de $\hat{f}_{v_0}$ para garantir a independência da função v_0.

Agora em vista de pedir menos regularidade acima para β e γ também temos a seguinte versão do Teorema 6.1.1.

Teorema 6.1.3 *Seja u uma L^p-solução de viscosidade de* (73)*, onde $p = p_0 n$, F satisfaz as condições estruturais $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$, $(A4)$, $(O5)'$ e $(O1)-(O2)$, $\partial\Omega \in C^3$ e $\psi \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$, onde $\Upsilon(t) = \Phi(t^n)$ e $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$. Então, $u \in W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ com a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \max\{\|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|g\|^n_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\}\right).$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p_0, p_2, \mu_0, \sigma, \xi, \omega, i(\Phi), \|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \partial\Omega, diam(\Omega), \theta_0)$.

Demonstração: Similar a demonstração do Teorema 6.1.1, com os seguintes ajustes: quando tomamos a família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de soluções para o problema penalizado (74), garantimos que estão em $W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)$ via o Teorema 5.0.5 em vez do Teorema 5.0.6 e portanto obter as seguintes estimativas,

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq C \cdot (\|u_\varepsilon\|^n_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}),$$

Donde pela estimativa ABP 2.3.13 e o Lema de mergulho 2.2.38, concluímos da última estimativa acima que

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} \leq C \cdot (\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,\Upsilon}_{\omega}(\Omega)} + \max\{\|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|g\|^n_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\}).$$

Daí, basta prosseguir inteiramente análogo a demonstração do Teorema 6.1.1. ■

Como antecipado acima, também temos de estimativas de Lorentz com peso para o problema de obstáculo (73). A prova do resultado é inteiramente análoga ao Teorema 6.1.1, com o ajuste nos espaços respectivos, por omitiremos aqui.

Teorema 6.1.4 (Estimativas $W^2L^{p,q}_{\omega}$ para o problema de obstáculo) *Sejam $p, q, \tilde{p}$ constantes tais que $(p,q) \in (n,\infty) \times (1,\infty)$, $\tilde{p} \in (n,p)$ e $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$ um peso. Seja u uma $L^{\tilde{p}}$-solução de viscosidade de* (73). *Assuma que as condições estruturais $(A1)-(A6)$ são satisfeitas, $\beta \in C^2(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^3$ e $\phi \in W^2L^{p,q}_{\omega}(\overline{\Omega})$ é tal que $\beta \cdot \phi + \gamma\phi \geq g$ q.t.p em $\partial\Omega$. Então, $u \in W^2L^{p,q}_{\omega}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{W^2L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C} \cdot \left(\|f\|_{L^{p,q}_{\omega}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^2L^{p,q}(\Omega)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)} \right).$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p, q, \tilde{p}, \mu_0, \sigma, \xi, [\omega]_{\frac{p}{n}}, \|\beta\|_{C^2(\partial\Omega)}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \partial\Omega, \mathit{diam}(\Omega), \theta_0)$.

Observação 6.1.5 *Fazendo $p = q \in (n,\infty)$ e $\omega \equiv 1$ obtemos pelo novamente estimativas $W^{2,p}$ para o problema de obstáculo* (73).

6.2 Densidade de soluções de viscosidade

Nesta parte, como consequência das estimativas obtidas nos três capítulos anteriores apresentaremos que uma C^0-solução de viscosidade do problema

$$\begin{cases} F(D^2u, x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{81}$$

sob certas condições, pode ser aproximada por uma sequência de funções na mesma classe de soluções de viscosidade e que ainda estão no espaço $(W^2L^{p,q}_{\omega})_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$ (resp. $(W^{2,\Upsilon}_{\omega})_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$ e $W^{2,p}_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$). Sobre esse problema de densidade podemos citar [46] no estudo de equações sem condição de fronteira e no livro [45] de Pimentel até sobre os aspectos de densidade fraca.

Teorema 6.2.1 (Densidade $W^2L^{p,q}_{\omega}$) *Seja u uma C^0-solução de viscosidade do problema* (81), *onde $f \in L^{p,q}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ (para $(p,q) \in (n,\infty) \times (0,\infty]$), $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{p}{n}}$, $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\mathrm{T}_1)$. Então, dado $\delta > 0$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (W^2L^{p,q}_{\omega})_{loc}(\mathrm{B}_1^+) \cap \mathcal{S}(\lambda-\delta, \Lambda+\delta, f)$ que converge localmente uniformemente para a função u.*

Demonstração: Como em [46, Teorema 8.1], para exibir tal sequência desejada construiremos uma sequência de operadores $F_j : Sym(n) \times \mathrm{B}_1^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ como segue: Dado $\delta > 0$ consideremos o Operador Maximal de Pucci

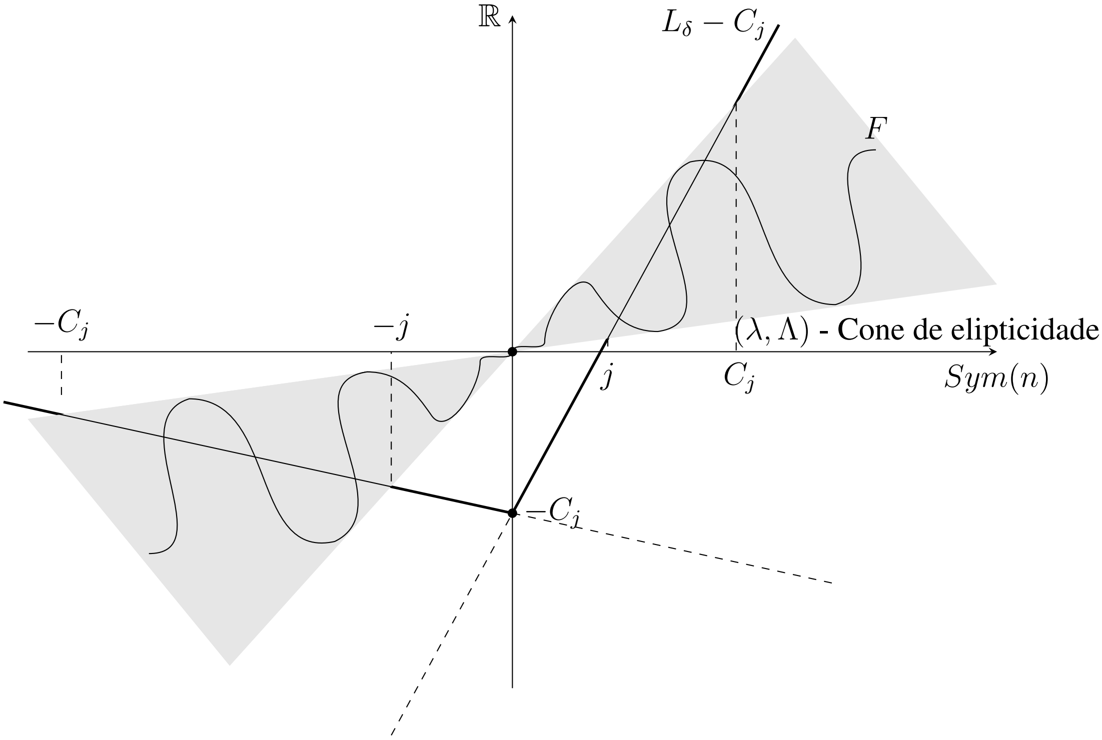
$$L_\delta(M) := \mathcal{M}^+_{(\lambda-\delta),(\Lambda+\delta)}(M) = (\Lambda+\delta)\sum_{e_i>0} e_i + (\lambda-\delta)\sum_{e_i<0} e_i,$$

onde e_i são os autovalores da matriz $M \in Sym(n)$. A partir de L_δ definimos

$$\begin{aligned} F_j : \quad Sym(n) \times \mathrm{B}_1^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (M, x) &\longmapsto \max\{F(M,x), L_\delta(M) - C_j\}, \end{aligned}$$

sendo $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos divergente que será determinada a posteriori.

Figura 4 – Ideia para construir a sequência de operadores F_j



Fonte: Elaborada pelo autor.

Intuitivamente, como em [46], a Figura 4 ilustra a construção do operador F_j. Como por hipótese, o gráfico do operador F, que é (λ, Λ)-elíptico, encontra-se no cone de elipticidade (λ, Λ). Inclinando um pouco a abertura do cone e colocando seu vértice em um ponto com ordenada $-C_j$ para C_j grande, a fronteira do novo cone, que contém o gráfico de $L_\delta - C_j$, fica abaixo do cone original de abertura (λ, Λ) dentro da bola B_j, e acima no complemento da bola de raio $\sim C_j$. Agora detalharemos analiticamente o operador F_j. Realmente, observemos preliminarmente que F_j é contínuo(pois é máximo de duas funções contínuas) e uniformemente elíptico com constantes elipticidade $\lambda - \delta \leq \Lambda + \delta$, uma vez que, F e L_δ também são. Feitas essas observações preliminares vemos por outro lado que pela (λ, Λ)-elipticidade de F segue que

$$\begin{aligned} F(M,x) &\geq \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i \geq \lambda \sum_{e_i>0} e_i - \Lambda \|M\| \\ &= L_\delta(M) - (\Lambda + \delta - \lambda) \sum_{e_i>0} e_i - (\lambda - \delta) \sum_{e_i>0} e_i - \Lambda \|M\| \\ &\geq L_\delta(M) - (2\Lambda - \lambda + \delta)\|M\| \\ &\geq L_\delta(M) - C_j, \ \forall \mathrm{B}_j \subset Sym(n), \ \forall x \in \mathrm{B}_j^+ \end{aligned}$$

onde $C_j := j(2\Lambda - \lambda + \delta)$. Isso prova que $F \equiv F_j$ em $\mathrm{B}_j \times \mathrm{B}_1^+ \subset Sym(n) \times \mathrm{B}_1^+$. Por outro lado, determinaremos o operador recessão de F_j. Para isso, para cada $\mu > 0$ vale que

$$(F_j)_\mu(M,x) = \mu F_j(\mu^{-1}M,x) = \max\{F_\mu(M,x), L_\delta(M) - \mu C_j\}.$$

Como F_μ é (λ,Λ)-elíptico para todo $\mu > 0$ segue que

$$\begin{aligned} F_\mu(M,x) &\leq \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i = L_\delta(M) - \delta \sum_{e_i>0} e_i + \delta \sum_{e_i<0} e_i \\ &\leq L_\delta(M) - \delta\|M\| \leq L_\delta(M) - \mu C_j, \end{aligned}$$

para todos $M \in \mathrm{B}_{\frac{\mu C_j}{\delta}} \subset Sym(n)$ e $x \in \mathrm{B}_1^+$. Com isso, podemos concluir, em particular, que $F_j(M,x) = L_\delta(M) - C_j$ fora de uma bola de raio $\sim C_j$ e assim $F_j^\sharp = L_\delta$. Agora, notemos que $F_j^\sharp$ satisfaz a condição de estimativas $C^{1,1}$ locais, isso é, dados $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e $g_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ temos que solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F_j^\sharp(D^2v, x_0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Dv + \gamma v = g_0(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

é tal que $v \in C^{1,1}(\overline{\mathrm{B}_{1/2}^+})$ com estimativa

$$\|v\|_{C^{1,1}(\overline{\mathrm{B}_{1/2}^+})} \leq C(\|v\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

devido ao Teorema 2.3.17, soluções acima estão em $C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{1/2}^+})$ com estimativa

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{1/2}^+})} \leq C(\|v\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

Por outro lado, claramente vale que $\psi_{F_j^\sharp}(x,y) \equiv 0,\ \forall x,y \in \mathrm{B}_1^+$ e assim vale que

$$\left(\fint_{(\mathrm{B}_1^+)(x_0,r)} \psi_{F_j^\sharp}(x,x_0)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

para todo $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e $0 < r < 1$. Logo, estamos nas hipóteses da Proposição $4.0.2$ e assim para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, soluções de viscosidade do problema

$$\begin{cases} F_j(D^2v, x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Dv + \gamma v = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

tem estimativas interiores $W^2L_\omega^{p,q}$ a priori. Mais precisamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe constante $\kappa_j > 0$ tal que

$$\|v\|_{W^2L_\omega^{p,q}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+\right)} \leq \kappa_j(\|v\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L_\omega^{p,q}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

Finalmente, construiremos u_j desejada para ser solução de viscosidade do problema

$$\begin{cases} F_j(D^2u_j, x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du_j + \gamma u_j = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_j = u & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

que existe pelo Teorema 2.3.20. Pela discussão acima, cada $u_j \in (W^2L^{p,q}_{\omega})_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$. Como os operadores F_j são uniformemente elípticos segue que $F_j(\cdot, x) \to F_0(\cdot, x)$ localmente uniformemente em $Sym(n)$ para cada $x \in \mathrm{B}_1^+$. E por $F_j \equiv F$ em $\mathrm{B}_j \times \mathrm{B}_1^+$, segue que $F_0 \equiv F$. Agora pela regularidade local C^{α} junto com estimativa ABP (Teorema 2.3.15 e Lema 2.3.13, respectivamente) vale que a sequência u_j, a menos de passagem à subsequência, converge para alguma u_0 localmente na topologia C^{α}. Agora pelo Lema de Estabilidade 2.3.21 segue que u_0 é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2u_0, x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du_0 + \gamma u_0 = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_0 = u & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

Tomando $w = u_0 - u$ segue que w satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} w \in S(\lambda/n, \Lambda, 0) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Dw + \gamma w = 0 & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ w = 0 & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

e pela Estimativa ABP 2.3.13 segue que $w = 0$ em $\overline{\mathrm{B}_1^+} \setminus \mathrm{T}_1$ e por continuidade segue que $w \equiv 0$, ou seja, $u \equiv u_0$, o que encerra a prova. ■

Observação 6.2.2 *Fazendo $p = q$ e $\omega \equiv 1$, obtemos densidade $W^{2,p}_{loc}$ para soluções na classe das soluções de viscosidade S via o Teorema* (6.2.1).

Observação 6.2.3 *Podemos aplicar a Proposição 5.0.3 para obter densidade de $W^{2,\Upsilon}_{\omega}$ em uma classe de C^0-soluções de viscosidade. Mais precisamente, seguindo fielmente a prova do Teorema 6.2.1 com mínimas alterações garantimos que se u é uma C^0-solução de viscosidade de* (81)*, onde $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ (Υ como na Proposição 5.0.3), $\omega \in A_{i(\Phi)}$, $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ com $\gamma \leq 0$ e $\beta \cdot \nu \geq \mu_0$ sobre T_1, para algum $\mu_0 > 0$. Então, para qualquer $\delta > 0$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (W^{2,\Upsilon}_{\omega})_{loc}(\mathrm{B}_1^+) \cap \mathcal{S}(\lambda - \delta, \Lambda + \delta, f)$ convergindo localmente uniformemente para u.*

6.3 Estimativas BMO para a Hessiana

Agora voltaremos nossa atenção para estimativas a priori no contexto das funções de oscilação média limitada (ou simplesmente BMO do termo em língua inglesa *Bounded Mean*

Oscilation) no espaço de Orlicz com peso para o problema

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{cases} \tag{82}$$

Mais precisamente, apresentaremos uma aplicação de estimativas da Hessiana de soluções de (82), quando o termo fonte f tem L^{Υ}_{ω}-oscilação média limitada ou apenas $L^{\Upsilon}_{\omega} - BMO$. É conhecido da teoria de regularidade de soluções de equações elípticas totalmente não lineares que mesmo se o termo fonte f for limitado em Ω disso não implica que a Hessiana D^2u seja limitada, muito menos esperamos isso quando temos soluções de (82).

Definição 6.3.1 *Dizemos que uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ pertence ao espaço $L^{\Phi}_{\omega} - BMO(\Omega)$ para $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ uma N-função e ω um peso se*

$$\|f\|_{L^{\Phi}_{\omega}-BMO(\Omega)} := \sup_{\substack{\mathrm{B}\subset\mathbb{R}^n \\ \Omega\cap\mathrm{B}\neq\emptyset}} \frac{\|(f - f_{\mathrm{B}})\chi_{\mathrm{B}}\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)}}{\|\chi_{\mathrm{B}}\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)}} < +\infty$$

onde o supremo acima é tomado sob todas as bolas abertas $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ que tem interseção não-vazia e para cada uma dessas bolas estamos usando a notação

$$f_{\mathrm{B}} = ⨍_{\mathrm{B}} f(x)dx.$$

Observação 6.3.2 *Observemos que $\|\cdot\|_{L^{\Phi}_{\omega}-BMO(\Omega)}$ define uma seminorma no espaço das funções que são e Orlicz com peso oscilação média limitada, devido as funções constantes q.t.p. claramente terem seminorma $L^{\Phi}_{\omega} - BMO(\Omega)$ zero.*

Exemplo 6.3.3 *Considere a função $\Phi(t) = t^p$ para $p > 1$. Recordemos do Exemplo que $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Agora considerando $\omega \equiv 1$ recuperamos a definição de espaços $p - BMO(\Omega)$. Lembremos que pelas desigualdades de John-Nirenberg e de John-Strömberg as seminormas p-BMO sao equivalentes para qualquer $p \in [1, \infty)$. Para mais detalhes confira [36].*

De fato, para qualquer bola $B = B(x, r)$ em $\mathbb{R}^n$ que intersecte Ω temos para Φ e ω como acima

$$\frac{\|(f - f_{\mathrm{B}})\chi_{\mathrm{B}}\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)}}{\|\chi_{\mathrm{B}}\|_{L^{\Phi}_{\omega}(\Omega)}} = \frac{\|f - f_{\mathrm{B}}\|_{L^p(\mathrm{B}\cap\Omega)}}{|\mathrm{B}\cap\Omega|^{\frac{1}{p}}} = \frac{\|f - (f)_{x,r}\|_{L^p(\Omega(x,r))}}{|\Omega(x,r)|^{\frac{1}{p}}} = \left(⨍_{\Omega(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donde, por essa identidade segue que $\|f\|_{L^{\Phi}_{\omega}-BMO(\Omega)} = \|f\|_{p-BMO(\Omega)}$.

Observação 6.3.4 *Note que pelo fato que $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ e assumindo que $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ segue de [29, Teorema 2.3] que existem constantes universais $0 < \mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ tais que*

$$\mathrm{A}\|f\|_{BMO(\mathrm{B}_1^+)} \leq \|f\|_{L^{\Phi}_{\omega}-BMO(\mathrm{B}_1^+)} \leq \mathrm{B}\|f\|_{BMO(\mathrm{B}_1^+)}, \; \forall f \in L^1_{loc}(\mathrm{B}_1^+)$$

Feitas essas observações sobre as funções nos espaços BMO's nessa parte, assumiremos a seguinte hipótese adicional

(A5) (**Estimativas $C^{2,\tilde{\alpha}}$ a priori**) $F^\sharp$ cumpre estimativas $C^{2,\tilde{\alpha}}$ *a priori* para algum $\tilde{\alpha} \in (0,1)$ para o problema oblíquo, isto é, para qualquer $g_0 \in C^0(\overline{\mathrm{T}_1}) \cap C^{1,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{T}_1})$, existe constante universal $\mathrm{C}_* > 0$, tal que para qualquer solução de viscosidade de

$$\left\{\begin{array}{rcll} F^\sharp(D^2\mathfrak{h}, 0, 0, x) & = & 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} & = & g_0 & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{array}\right.$$

pertence à $C^{2,\tilde{\alpha}}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\overline{\mathrm{B}_1^+})$ e vale a seguinte estimativa

$$\|\mathfrak{h}\|_{C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}_\rho^+}\right)} \leq \frac{\mathrm{C}_*}{\rho^{2+\psi}}\left(\|\mathfrak{h}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_0\|_{C^{1,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right) \ \ \forall\, 0 < \rho \ll 1.$$

Novamente, a classe de problemas que cumpre a condição $(A5)$ é não vazia, uma vez que, quando F é convexo segue que $F^\sharp$ também é convexo e podemos invocar o Teorema 2.3.17 para garantir tal condição. Agora para provar o desejado apresentaremos alguns resultados que vão ser de grande utilidade na demonstração do Teorema principal dessa subseção. O primeiro deles é uma versão similar ao Lema de Aproximação $3.1.5$.

Lema 6.3.5 (Lema de Aproximação II) *Sejam $g \in C^{1,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{T}_1})$ tal que $\|g\|_{C^{1,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \mathrm{C}_g$ e $\beta, \gamma \in C^{1,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Sejam F e F^∞ dois operadores $\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right)$-elípticos. Dado $\delta > 0$, existe constante positiva $\epsilon_0 = \epsilon_0(\delta, n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \mathrm{C}_g) < 1$ tal que, se*

$$\max\left\{|F(\mathrm{X}, x) - F^\infty(\mathrm{X}, x_0)|,\ \psi_{F^\infty}(x),\ \|f\|_{L^\Phi_\omega(\mathrm{B}_1^+)}\right\} \leq \epsilon_0,\ \forall \mathrm{X} \in Sym(n),$$

então quaisquer duas L^p-soluções de viscosidade u e v de

$$\left\{\begin{array}{rcll} F(D^2u, x) & = & f(x) & \textit{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u & = & g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{rcll} F^\infty(D^2\mathfrak{h}, x_0) & = & 0 & \textit{em} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} + \gamma\mathfrak{h} & = & g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}. \end{array}\right.$$

satisfazem

$$\|u - \mathfrak{h}\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+\right)} \leq \delta.$$

Demonstração: A prova segue na mesma linha do Lema 3.1.5 com mínimas mudanças. ■

Observação 6.3.6 *Vale observar no Lema 6.3.5, usamos dois fatos essenciais: A observação 6.3.4 e*

Com essa versão temos o seguinte lema:

Lema 6.3.7 (Aproximação quadrática) *Sob as hipóteses do Lema 6.3.5, assumamos que F^∞ cumpre a condição (A4)*. Seja u uma L^p-solução de viscosidade para*

$$\left\{\begin{array}{rcll} F(D^2u, x) & = & f(x) & \textit{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Du + \gamma u & = & g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{array}\right.$$

Então, existem constantes universais $\mathrm{C}_\sharp > 0$, $r_0 \in (0, 1/2)$ e um polinômio quadrático $\mathfrak{P}$, tal *que* $\|\mathfrak{P}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \leq \mathrm{C}_\sharp$ *satisfazendo*

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |u(x) - \mathfrak{P}(x)| \leq r^2 \quad \textit{para todo} \quad r \leq r_0$$

Demonstração: Fixemos $\delta \in (0,1)$ o qual explicitaremos *a posteriori*, e apliquemos o Lema 6.3.5 para obter $\epsilon_0 > 0$ e uma L^p-solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F^\infty(D^2\mathfrak{h}, x) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}, \\ \beta \cdot D\mathfrak{h} + \gamma\mathfrak{h} &= g(x) \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}. \end{cases}$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - \mathfrak{h}| \leq \delta.$$

Recordando que F^∞ cumpre a condição (A4)*, então $\mathfrak{h}$ goza de estimativas clássicas. Assim, podemos tomar a expansão de Taylor de segunda ordem em torno de 0 e definir $\mathfrak{P}$ como tal polinômio quadrático. Além disso, por essa construção segue que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |\mathfrak{h} - \mathfrak{P}| \leq \mathrm{C}_* \rho^{2+\tilde{\alpha}} \quad \forall \ \rho \leq r_0.$$

Daí, escolhamos $0 < r \ll 1$ de tal maneira que

$$r \leq \min\left\{ r_0, \left(\frac{1}{10\mathrm{C}_*}\right)^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}} \right\}.$$

Portanto,

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |\mathfrak{h} - \mathfrak{P}| \leq \frac{1}{10} r^2.$$

Por outro lado, escolhendo $\delta =: \frac{1}{10} r^2$ temos que

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |u - \mathfrak{h}| \leq \frac{1}{10} r^2.$$

Por fim, obtemos

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |u - \mathfrak{P}| \leq r^2.$$

■

Como consequência do resultado acima, podemos fazer uma aproximação quadrática para operadores F_τ associados ao operador recessão. A prova também segue o cálculo no Lema 6.3.7 com mínimos ajustes.

Lema 6.3.8 *Assuma as condições* $(A1)$, $(O2)'$, $(A3)$, $(A5)$ *e* $(O5')$. *Então, existem constantes universais* $\mathrm{C}^* > 0$, $\tau_0 > 0$ *e* $r > 0$, *tais que se* u *é uma solução de viscosidade (normalizada)* *de*

$$\begin{cases} F_\tau(D^2u,x) &=& f(x) & em & \mathrm{B}_1^+, \\ \beta\cdot Du+\gamma u &=& g(x) & sobre & \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

com $\max\left\{\tau,\ \|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO(\mathrm{B}_1^+)}\right\} \leq \tau_0$*, existe um polinômio de grau 2* $\mathfrak{P}$*, com* $\|\mathfrak{P}\|_\infty \leq \mathrm{C}^*$ *satisfazendo*

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+}|u(x)-\mathfrak{P}(x)| \leq r^2.$$

Com isso podemos enunciar a principal aplicação nessa seção:

Teorema 6.3.9 (Regularidade L^{Υ}_{ω}-BMO para a Hessiana) *Seja* u *uma* L^p*-solução de viscosidade para o problema* (47) *onde* $f \in L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO(\mathrm{B}_1^+)\cap L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)$*, para* $p=p_0n$ *e* $\Upsilon(t)=\Phi(t^n)$ *sendo* Φ *e* $\omega \in \mathcal{A}_{i(\Phi)}$ *como nas hipóteses* $(O2)'$*. Assuma ainda que as condições* $(A1)$*,* $(O2)'$*,* $(A3)$*,* $(A5)$ *e* $(O5)'$ *são verdadeiras. Então,* $D^2u \in L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$*, e ainda vale a seguinte estimativa*

$$\|D^2u\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C}\left(\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)}+\|f\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO(\mathrm{B}_1^+)}+\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right), \tag{83}$$

onde $\mathrm{C}>0$ *depende apenas de* n*,* λ*,* Λ*,* p_0*,* ω*,* $i(\Phi)$*,* c^**,* μ_0*,* $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$*.*

Demonstração: Seja u uma solução de (82). Por argumento de normalização podemos tomar $\kappa \in (0,1)$ a ser determinado a posteriori e definir a função auxiliar $w(x)=\kappa u(x)$ tal que é solução normalizada no sentido L^p- da viscosidade para

$$\begin{cases} F_\tau(D^2w,x) &=& \tilde{f}(x) & \text{em} & \mathrm{B}_1^+, \\ \beta\cdot Dw+\gamma w &=& \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde $\tau := \kappa$, $\tilde{f}(x)=\kappa f(x)$, e $\tilde{g}(x) := \kappa g(x)$. Agora escolhamos κ de tal maneira que $\max\{\tau, \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\|\tilde{f}\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)}\} \leq \tau_0$ onde τ_0 é a constante do Lema 6.3.8 e as contantes $\mathrm{A},\mathrm{B}>0$ são as constantes universais da Observação 6.3.4. Como $\|\cdot\|_{L^{\Upsilon}_{\omega}(\mathrm{B}_1^+)}$ é positivamente homogênea e pela definição de w, provar a estimativa $L^{\Upsilon}_{\omega}-BMO$ for D^2w garante o mesmo para Du e portanto iremos garantir a estimativa desejada para D^2w. Para tal fim, afirmamos que existe sequência de polinômios quadráticos $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da forma

$$P_k(x)=a_k+b_k\cdot x+\frac{1}{2}x^tM_kx \tag{84}$$

e cumprindo as seguintes condições:

(i) $F^\sharp(M_k,x)=\tilde{f}_1 =: \tilde{f}_{\mathrm{B}_1^+}$.

(ii) $\sup_{\mathrm{B}^+_{r^k}}|w-P_k| \leq r^{2k}$, $\forall k\geq 1$, onde $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ é o raio da semi-bola aberta no Lema 6.3.8.

(iii) Para todo inteiro $k\geq 0$, $r^{2(k-1)}|a_k-a_{k-1}|+r^{k-1}|b_k-b_{k-1}|+|M_k-M_{k-1}| \leq \mathrm{C}^*r^{2(k-1)}$, sendo que, C^* é a constante do Lema 6.3.8.

A prova é feita por indução em k. Ponhamos inicialmente P_0 e P_{-1} para serem

$$P_0(x) = P_{-1}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot M_0 \cdot x,$$

onde $M_0 \in \mathit{Sym}(n)$ satisfaz $F^\sharp(M_0, x) = (\tilde{f})_1$.

O caso em que $k = 0$, é imediato. Agora suponhamos que tenhamos estabelecido a existência de polinômios quadráticos P para $k = 0, 1, \ldots, j$. Então definamos a seguinte função auxiliar $v_j : \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$w_j(x) =: \frac{(w - P_j)(r^j x)}{r^{2j}},$$

onde temos por hipótese de indução e a definição de w_j que a mesma é uma L^p-solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F_j(D^2 w_j, x) &=& \tilde{f}_j(x) & \text{em} & \mathrm{B}_1^+ \\ \tilde{\beta}(x) \cdot D w_j(x) + \tilde{\gamma} w_j &=& \tilde{g}_j(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_j(\mathrm{X}, x) &=:& \tau F\left(\frac{1}{\tau}(\mathrm{X} + M_j), r^j x\right) \\ \tilde{f}_j(x) &=:& \tilde{f}(r^j x) \\ \tilde{\gamma}_j(x) &=:& r^j \gamma(r^j x) \\ \tilde{g}_j(x) &=:& r^{-j}(\tilde{g}(r^j x) - \tilde{\beta}(x) \cdot DP_j(r^j x) - \gamma(r^j x) P_j(r^j x)) \\ \tilde{\beta}(x) &=:& r^j \beta(r^j x). \end{cases}$$

Temos pela hipótese e a Observação 6.3.4 que

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{L^\Upsilon_\omega - BMO(\mathrm{B}_1^+)} \leq \mathrm{B}\|f_j\|_{\mathrm{BMO}(\mathrm{B}_1^+)} &= \mathrm{B} \sup_{0<s\leq 1} \fint_{\mathrm{B}_s^+} |f_j(x) - (f_j)_s| \, dx \\ &= \mathrm{B} \sup_{0<s\leq 1} \fint_{\mathrm{B}_{sr}^+} |f(z) - (f)_{sr}|^d \, z \\ &\leq \mathrm{B}\|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}(\mathrm{B}_1^+)} \\ &\leq \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\|f\|_{L^\Upsilon_\omega - BMO(\mathrm{B}_1^+)} \\ &\leq \tau_0. \end{aligned}$$

Ademais, uma vez que, $F^\sharp(M_j, x) = (\tilde{f})_1$, a EDP com condição oblíqua

$$\begin{cases} F_j^\sharp(D^2\mathfrak{h}, x) &=& (\tilde{f})_1 & \text{em} & \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot D\mathfrak{h}(x) + \tilde{\gamma}\mathfrak{h} &=& \tilde{g}(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

cumpre a mesma $C^{2,\tilde{\alpha}}$ estimativas a priori do problema governado por $F^\sharp$ e está nas hipóteses do Corolário 6.3.7. Portanto, existe um polinômio quadrático $\tilde{P}$ com $\|\tilde{P}\|_\infty \leq \mathrm{C}_\sharp$ tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |w_j - \tilde{P}| \leq r^2. \tag{85}$$

Reescalonando (85) obtemos que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{r^{k+1}}} \left| w(x) - \left[P_k(x) + r^{2k}\tilde{P}\left(\frac{x}{r^k}\right)\right]\right| \leq r^{2(k+1)}.$$

Por fim, definindo $P_{j+1}(x) =: P_j(x) + r^{2j}\tilde{P}(r^{-j}x)$ obtemos a $(k+1)$-ésima etapa de indução. Além disso, as condições desejadas sobre os coeficientes são satisfeitas. Isso prova o afirmado Por fim, para qualquer $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, escolhamos m tal que $0 < r^{m+1} < \rho \leq r^m$. Agora temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{\|(D^2w - M_m)\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} &\leq \mathrm{C}\frac{\|(D^2w - M_m)\chi_{\mathrm{B}^+_{r^m}}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_{r^m}}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} \\
&= \mathrm{C}\frac{\|D^2w_m\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{r^m})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_{r^m}}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} \\
&\leq \mathrm{C}\|D^2w_m\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{r^m})} \\
&\leq \mathrm{C}, \qquad (86)
\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos o Lema 2.2.38 e na última desigualdade usamos a Proposição 5.0.4. Portanto, podemos concluir da estimativa (86) o seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{\|(D^2w - (D^2w)_{\mathrm{B}^+_\rho})\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} &\leq \frac{\|(D^2w - M_m)\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} + \\
&+ \frac{\|((D^2w)_{\mathrm{B}^+_\rho} - M_m)\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} \\
&\leq 2\frac{\|(D^2w - M_m)\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} \\
&\leq \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|D^2w\|_{L^\Upsilon_\omega - BMO\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \sup_{0<\rho<\frac{1}{2}} \frac{\|(D^2w - (D^2w)_{\mathrm{B}^+_\rho})\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}}{\|\chi_{\mathrm{B}^+_\rho}\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_{1/2})}} \leq \mathrm{C} < +\infty$$

que finaliza a prova do Teorema. ∎

Observação 6.3.10 *Finalizamos com seguintes duas obervações pontuais:*

(i) O Teorema 6.3.9 junto com a Observação 6.3.4 implicam que $D^2u \in BMO(\mathrm{B}^+_1)$ com estimativa

$$\|D^2u\|_{BMO\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

para a constante C *dependendo apenas da constante do Teorema 6.3.9 e de* $\mathcal{B}$.

(ii) *Via o mergulho do espaço BMO em [3, Lema 1] e o mergulho de Sobolev garantimos do item (i) acima que* $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$, *com a seguinte estimativa para o gradiente de* u,

$$|Du(x) - Du(y)| \leq -\mathrm{C}\mathcal{D}|x-y|\log|x-y|,\ \forall x, y \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}, x \neq y,$$

onde

$$\mathcal{D} = (\|u\|^n_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^\Upsilon_\omega(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

e a constante $\mathrm{C} > 0$ *depende apenas de* n, λ, Λ, p_0, ω, $i(\Phi)$, c^*, μ_0, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$.

(iii) *Fazendo* $\Phi(t) = t^p$ *e* $\omega \equiv 1$ *obtemos do Teorema 6.3.9 estimativas* $p - BMO$ *para a Hessiana.*

6.4 Regularidade de Morrey com expoente variável

Por fim, apresentaremos sob certas condições que as estimativas de Lorentz-Sobolev com peso também são válidas no contexto dos espaços de Morrey com expoente variável. Mais precisamente estudaremos a regularidade do problema

$$\begin{cases} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ \beta(x) \cdot Du(x) &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{87}$$

no contexto dos espaços de Morrey com expoente variável. Nessa parte, precisaremos da seguinte hipótese:

(A2)" O termo fonte f satisfaz $f \in L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ e $\beta \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ par algum $\alpha \in (0,1)$.

Com o intuito de apresentar tal aplicação, precisaremos de uma Lema Técnico sobre pesos.

Lema 6.4.1 (Técnico) *Para todo* $\theta \in (0,1)$ *temos que* $\omega(x) = (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^\theta$, $x \in \mathbb{R}^n$ *é um peso pertencente a classe* $\mathcal{A}_1$ *para todos* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$.

Prova: Inicialmente mostraremos que ω, de fato, é um peso. Com efeito, como a $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})$ é uma função mensurável, dado $\alpha \geq 0$ temos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x) \leq \alpha^{\frac{1}{\theta}}\}$ é mensurável a Lebesgue, mas

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x) \leq \alpha^{\frac{1}{\theta}}\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^\theta \leq \alpha\}$$

e como o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^\theta \leq \alpha\} = \emptyset$ para todo $\alpha < 0$ temos que ω é uma função mensurável. Além disso, verifiquemos que $\omega(x) \in (0, \infty)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, segue pela definição do operador maximal, $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})$ está bem definido pois $\chi_{\mathrm{B}_r(y)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, sendo que, tal operador é finito e positivo q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ (Ver [56, Capítulo 7]). Assim segue o mesmo para ω. Por fim, $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pois, para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\omega(x)\chi_K(x)|dx = \int_K \omega(x)dx \leq \int_K dx = |K| < \infty \Longrightarrow \omega\chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

uma vez que, $\omega(x) \leq 1$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, ω é um peso. Agora verifiquemos que $\omega \in \mathcal{A}_1$. Com efeito, notemos inicialmente que definindo para cada $A \subset \mathbb{R}^n$, $\nu(A) = |A \cap \mathrm{B}_r(y)|$. Notemos que ν é uma medida de Borel finita definida em $\mathbb{R}^n$. A partir de ν, consideremos a função maximal de ν a qual denotaremos por ν^* definida por

$$\nu^*(x) = \sup_{\mathrm{B}} \frac{\nu(B)}{|B|} = \sup_{\mathrm{B}} ⨍_{\mathrm{B}} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(z)dz,$$

onde o supremo acima é tomado sob todas as bolas em $\mathbb{R}^n$ que contém x. Em outros termos, $\nu^*(x)$ é o operador maximal de Hardy-Littlewood não centrado da função $\chi_{\mathrm{B}_r(y)}$ (a saber, $m^*(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})$). Notemos que ν^* é finita em quase todo ponto em $\mathbb{R}^n$ pelo Teorema de Hardy-Littlewood (Ver [53, Teorema 1.1]). Afirmamos que $(\nu^*)^\theta \in \mathcal{A}_1$. Com efeito, analogamente ao que fizemos acima para ω, não é difícil ver que $(\nu^*)^\theta$ é um peso. Doravante, pelo Teorema de Kolmogorov 2.1.17, para toda bola $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathrm{B}$ onde ν^* é finita,

$$\int_{\mathrm{B}} (\nu^*(z))^\theta dz \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta} |\mathrm{B}|^{1-\theta} \left(\int_{\mathrm{B}} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(z)dz \right)^\theta$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \theta)$ é uma constante positiva. A partir dessa estimativa podemos reescrevê-la e obter

$$⨍_{\mathrm{B}} (\nu^*(z))^\theta dz \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta} \left(⨍_{\mathrm{B}} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(z)dz \right)^\theta \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta} (\nu^*(x))^\theta$$

assim podemos concluir que

$$⨍_{\mathrm{B}} (\nu^*(z))^\theta dz \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta} \operatorname*{infess}_B (\nu^*)^\theta.$$

Isso prova a afirmação que $(\nu^*)^\theta \in \mathcal{A}_1$. Com isso podemos mostrar que $\omega \in \mathcal{A}_1$. Realmente, observemos que os operadores de Hardy-Littlewood centrado ($m(f)$) e não centrado (usaremos a notação $m^*(f)$) são equivalentes, mais precisamente para qualquer $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$m(f)(x) \leq m^*(f)(x) \leq 2^n m(f)(x), \; \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{88}$$

A desigualdade $m(f)(x) \leq m^*(f)(x)$ segue pelas definições de $m(f)$ e $m^*(f)$. Por outro lado, dada bola $\mathrm{B} = \mathrm{B}_\rho(z)$ que contém x temos que a bola $\mathrm{B}_{2\rho}(x)$ contém B e assim

$$\begin{aligned} \fint_{\mathrm{B}} |f(w)|dw &\leq \frac{1}{|\mathrm{B}|}\int_{\mathrm{B}_{2\rho}(x)} |f(w)|dw \\ &= 2^n \frac{1}{2^n|\mathrm{B}_\rho(z)|}|f(w)|dw = \fint_{\mathrm{B}_{2\rho}(x)} |f(w)|dw \leq 2^n m(f)(x) \end{aligned}$$

e assim tomando o supremo desses valores sob todas as bolas B que contém x segue que

$$m^*(f)(x) \leq 2^n m(f)(x).$$

E assim segue as duas desigualdades (88). Feito isso, segue naturalmente que $\omega \in \mathcal{A}_1$, uma vez que, para toda bola $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$,

$$\fint_{\mathrm{B}} \omega(x)dx \leq \fint_{\mathrm{B}} (\nu^*(x))^\theta dx \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\theta} \operatorname*{infess}_{\mathrm{B}} (\nu^*)^\theta \leq \frac{2^{n\theta}\mathrm{C}}{1-\theta} \operatorname*{infess}_{\mathrm{B}} \omega.$$

Isso finaliza a prova do Lema. ■

Com esse lema em mãos, apresentaremos a nossa aplicação no contexto dos espaços de Morrey com expoente variável formulada no seguinte teorema:

Teorema 6.4.2 (Estimativas $W^2L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ e assuma as condições estruturais $(A1)$, $(A2)''$, $(A3)$ e $(A4)$ e que u é uma L^{ς_1}-solução de viscosidade para* (87)*, onde a função ς é Log-Hölder contínua. Então, $u \in W^2L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ e vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^2L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)},$$

onde $C = C(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, \mu_0, \varsigma_1, \varsigma_2, \varrho_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \Omega)$.

Demonstração: Inicialmente, por argumento de normalização, podemos supor sem perda de generalidade que $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = 1$. Fixemos arbitrariamente um peso $\omega \in \mathcal{A}_1$ e tomemos $p_0 = \frac{\varsigma_1+n}{2}$ que está no intervalo (n, ς_1) (pela hipótese sobre ς_1) temos que, se $f \in L^{p_0}_\omega(\Omega)$ então estamos nas hipóteses do Teorema 4.0.5 (vale observar que $\omega \in \mathcal{A}_{\frac{\varsigma_1}{n}}$ pois, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_p$ para todo $p \in [1, \infty)$) e assim podemos concluir que $u \in W^2L^{p_0}_\omega(\Omega)$ com estimativa

$$\|u\|_{W^2L^{p_0}_\omega(\Omega)} \leq \mathrm{C}\|f\|_{L^{p_0}_\omega(\Omega)}, \tag{89}$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, \varsigma_1, [\omega]_1, \mu_0, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}})$. Em particular,

$$\int_\Omega |D^2u(x)|^{p_0}\omega(x)dx \leq \mathrm{C}\int_\Omega |f(x)|^{p_0}\omega(x)dx. \tag{90}$$

Caso $f \notin L^{p_0}_\omega(\Omega)$ temos essa última desigualdade, uma vez que, o lado direito dessa última desigualdade é infinito. Assim, pela arbitrariedade do peso $\omega \in \mathcal{A}_1$ segue do Teorema de Extrapolação de expoentes variáveis com peso 2.2.24 que

$$\|D^2u\|_{L^{\varsigma(\cdot)}_{\omega}(\Omega)} \leq \mathrm{C}\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot)}_{\omega}(\Omega)}, \forall\omega \in \mathcal{A}_1 \tag{91}$$

sendo que $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, \varsigma_1, \varsigma_2, , \mathrm{C}'_{\varsigma(\cdot)}, \mu_0, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}, \Omega)$. Agora provemos o Teorema quando $\varrho \neq 0$ e nesse caso $\varrho_0 > 0$. De fato, inicialmente estendamos f como zero fora de Ω e fixemos arbitrariamente $y \in \Omega$ e $r > 0$. Pelo Lema Técnico 6.4.1 para todo $\theta \in (0, 1)$, $\omega(x) = (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^{\theta}$, $x \in \mathbb{R}^n$ é um peso da classe $\mathcal{A}_1$. Agora, para todo $\theta \in \left(\frac{\varrho_0}{n}, 1\right) \subset (0, 1)$ (pois $\varrho_0 > 0$) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(y,r)} |D^2u(x)|^{\varsigma(x)}dx &= \int_{\Omega} |D^2u(x)|^{\varsigma(x)}\chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x)dx \\ &= \int_{\Omega} |D^2u(x)|^{\varsigma(x)}(\chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x))^{\theta}dx,\end{aligned} \tag{92}$$

onde na última igualdade usamos o fato que para qualquer $x \in \Omega$, $\chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x) \in \{0, 1\}$.

Por outro lado, afirmamos que $(\chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x))^{\theta} \leq (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^{\theta}$ q.t.p. $x \in \Omega$. Com efeito, seja $x \in \Omega$ tal que $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x)$ esteja bem definido. Temos três possibilidades para x:

✓ $x = y$.

Nesse caso, temos que

$$m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(y) = \sup_{\rho>0} \fint_{\mathrm{B}_\rho(y)} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(z)dz = \sup_{\rho>0} \frac{|\mathrm{B}_\rho(y) \cap \mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_\rho(y)|},$$

onde claramente podemos concluir que $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(y) \leq 1$. Agora fazendo $\rho = r$ temos, em particular, pelo visto acima que

$$m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(y) \geq \frac{|\mathrm{B}_r(y) \cap \mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_r(y)|} = 1.$$

Logo, $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(y) = 1 = \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(y)$. Elevando ambos os membros dessa igualdade a potência θ segue o afirmado.

✓✓ $x \neq y$ e $x \in \mathrm{B}_r(y)$

Nessa possibilidade, como $x \in \mathrm{B}_r(y)$, segue que existe $\tilde{r} > 0$ tal que $\mathrm{B}_{\tilde{r}}(x) \subset \mathrm{B}_r(y)$. Assim, em particular,

$$1 \geq m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x) = \sup_{\rho>0} \frac{|\mathrm{B}_\rho(x) \cap \mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_\rho(x)|} \overset{\rho=\tilde{r}}{\geq} \frac{|\mathrm{B}_{\tilde{r}}(x) \cap \mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_{\tilde{r}}(x)|} = \frac{|\mathrm{B}_{\tilde{r}}(x)|}{|\mathrm{B}_{\tilde{r}}(x)|} = 1,$$

donde $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x) = 1 = \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x)$ e assim como na primeira possibilidade segue a igualdade afirmada.

✓✓✓ $x \neq y$ e $x \notin \mathrm{B}_r(y)$

Nessa último caso temos que $\chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x) = 0$ e assim por $m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x) \geq 0$ segue o afirmado.

Com essa afirmação e a estimativa (91) para $\omega(x) = (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(x))^{\theta},\ x \in \mathbb{R}^n$ temos, por (92),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(y,r)} |D^2u(x)|^{\varsigma(x)}dx &\leq \int_{\Omega} |D^2u(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx \\ &\leq \mathrm{C}\int_{\Omega} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx \end{aligned} \tag{93}$$

para alguma constante positiva $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \xi, \sigma, \varsigma_1, \varsigma_2, , \mathrm{C}'_{\varsigma(\cdot)}, \mu_0, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}, \|\partial\Omega\|_{C^{2,\alpha}}, \Omega)$.

Agora estudemos a última integral do lado direito em (93). Para isso, recordando que f está definida em todo $\mathbb{R}^n$, sendo $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \equiv 0$ e tendo em vista que podemos decompor $\mathbb{R}^n$ como a seguinte união disjunta

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{B}_{2r}(y) \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup_{k\geq 1}}(\mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y) \setminus \mathrm{B}_{2^k r}(y))\right)$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx &= = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx \\ &= \int_{\mathrm{B}_{2r}(y)\dot{\cup}\left(\dot{\bigcup_{k\geq 1}}(\mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y)\setminus \mathrm{B}_{2^k r}(y))\right)} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx \\ &= \int_{\mathrm{B}_{2r}(y)} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y)\setminus \mathrm{B}_{2^k r}} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx. \end{aligned} \tag{94}$$

Denotemos por

$$A_0 = \int_{\mathrm{B}_{2r}(y)} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx \quad \text{e} \quad A_k = \int_{\mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y)\setminus \mathrm{B}_{2^k r}} |f(x)|^{\varsigma(x)}\omega(x)dx, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Estimemos cada um desses termos acima:

(I) **Estimativa de A_0**

Inicialmente, como vimos acima, temos que $\omega(x) \leq 1$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, pela hipótese imposta sobre a potência ϱ temos que $2^{\varrho(y)} \leq 2^{\varrho_0} < 2^n$. Assim esses fatos garantem que

$$
\begin{aligned}
A_0 &\leq \int_{\mathrm{B}_{2r}(y)} |f(x)|^{\varsigma(x)} dx = 2^n \frac{1}{2^n} \int_{\Omega(y,2r)} |f(x)|^{\varsigma(x)} dx \\
&< 2^n \frac{1}{2^{\varrho(y)}} (2r)^{\varrho(y)} \rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(f) \leq 2^n \frac{1}{2^{\varrho(y)}} (2r)^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \\
&= 2^n r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde usamos acima na penúltima desigualdade a majoração da modular $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ pela norma $\|\cdot\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$ na bola unitária(Lembrando que $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = 1$), visto na Observação 2.2.19.

(II) **Estimativa de A_k para todo $k \in \mathbb{N}$**

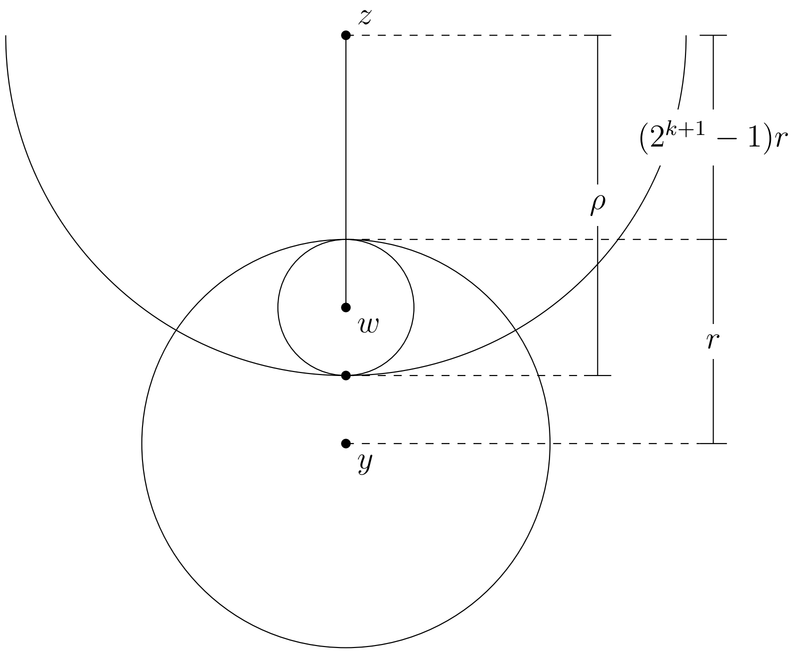
Notemos inicialmente que

$$
⨍_{\mathrm{B}_\rho(z)} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x) dx = \frac{|\mathrm{B}_\rho(z) \cap \mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_\rho(z)|} \leq \frac{|\mathrm{B}_r(y)|}{|\mathrm{B}_\rho(z)|} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \tag{95}
$$

q.t.p. $z \in \Omega$ e $\rho > 0$. Agora tomando $\rho > (2^{k+1} - 1)r$ temos que para todo ponto $z \in \mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y) \setminus \mathrm{B}_{2^k r}(y)$, $|\mathrm{B}_r(y) \cap \mathrm{B}_\rho(z)| > 0$, uma vez que, podemos tomar uma bola aberta $\mathrm{B}_{\tilde{r}}(w) \subset \mathrm{B}_r(y) \cap \mathrm{B}_\rho(z)$ onde $w \in [z, y]$ é tal que $|w - z| = \frac{\rho + (2^{k+1}-1)r}{2}$ e com raio $r_0 = \frac{\rho - (2^{k+1}-1)r}{2} > 0$. Assim,

$$
0 < |\mathrm{B}_{\tilde{r}}(w)| \leq |\mathrm{B}_r(y) \cap \mathrm{B}_\rho(z)|
$$

Figura 5 – Esboço geométrico da ideia da construção da bola $\mathrm{B}_{\tilde{r}}(w)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

donde em (95) temos que

$$0 < \fint_{\mathrm{B}_\rho(z)} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x)dx \leq \frac{r^n}{\rho^n} \overset{\rho>(2^{k+1}-1)r}{\leq} \frac{r^n}{(2^{k+1}-1)^n r^n} \overset{2^{k+1}-1\geq 2^{k-1}}{\leq} \frac{1}{2^{(k-1)n}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, observando também que se $0 < \rho \leq (2^{k+1}-1)r$ então $\mathrm{B}_r(y) \cap \mathrm{B}_\rho(z) = \emptyset$ temos pela estimativa acima da média em $\mathrm{B}_\rho(z)$ de $\chi_{\mathrm{B}_r(y)}$,

$$\omega(z) = (m(\chi_{\mathrm{B}_r(y)})(z))^\theta = \left(\sup_{\rho>0} \fint_{\mathrm{B}_\rho(z)} \chi_{\mathrm{B}_r(y)}(x)dx\right)^\theta \leq \left(\frac{1}{2^{(k-1)n}}\right)^\theta = \frac{1}{2^{\theta n(k-1)}}.$$

Com essa estimativa temos que

$$\begin{aligned}
A_k &\leq \frac{1}{2^{\theta n(k-1)}} \int_{\mathrm{B}_{2^{k+1}r}(y)\setminus \mathrm{B}_{2^k r}} |f(z)|^{\varsigma(z)} dz \leq \frac{1}{2^{(k-1)n\theta}} \int_{\Omega(y,2^{k+1}r)} |f(z)|^{\varsigma(z)} dz \\
&\leq \frac{1}{2^{(k-1)n\theta}} (2^{k+1}r)^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq \frac{1}{2^{(k-1)n\theta}} 2^{(k+1)\varrho(y)} r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \\
&\leq 2^{n\theta+\varrho(y)} 2^{k(\varrho(y)-n\theta)} r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 2^{n+n\theta} 2^{k(\varsigma(y)-n\theta)} r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \\
&\leq 4^n 2^{k(\varrho(y)-n\theta)} r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde usamos diretamente acima a majoração da modular $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}$ pela norma $\|\cdot\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$ na bola unitária vista na Observação 2.2.19.

Por (I) e (II) temos em (94),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^{\varsigma(x)} \omega(x)dx &\leq 4^n r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(\varsigma(y)-n\theta)k}\right) \\
&= 4^n r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\varrho(y)-n\theta)k}
\end{aligned}$$

e como $\varrho(y) \leq \varrho_0$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^{\varsigma(x)} \omega(x)dx &\leq 4^n r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\varrho_0-n\theta)k} \\
&\overset{\theta>\frac{\varrho_0}{n}}{=} 4^n r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n\theta-\varrho_0)k}} \\
&= \mathrm{C}'' r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{C}'' = 4^n \frac{2^{n\theta-\varrho_0}}{2^{n\theta-\varrho_0}-1} > 0$. Portanto, juntando essa estimativa com a estimativa (93) segue que

$$\frac{1}{r^{\varrho(y)}} \int_{\Omega(y,r)} |D^2 u|^{\varsigma(x)} dx \leq \frac{1}{r^{\varrho(y)}} \mathrm{C} r^{\varrho(y)} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = \mathrm{C} \|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$$

Como tomamos arbitrariamente $y \in \Omega$ e $r > 0$, tomando o supremo sob todos esses valores acima obtemos que

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(D^2u) \leq \mathrm{C}\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$$

Donde $D^2u \in L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ e por $\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} = 1$ segue que $\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(D^2u) \leq \mathrm{C}$. Agora notemos que dessa última desigualdade podemos assumir $\mathrm{C} > 1$ e assim

$$\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}\left(\frac{D^2u}{\mathrm{C}}\right) \overset{\mathrm{C}^{-1}<1}{\leq} \frac{1}{\mathrm{C}}\rho_{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(D^2u) \leq 1$$

Daí, pela Propriedade da bola unitária norma-modular 2.2.18 segue que

$$\left\|\frac{D^2u}{\mathrm{C}}\right\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq 1 \Longrightarrow \|D^2u\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq \mathrm{C} = \mathrm{C}\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}.$$

Ademais, pela estimativa (89) repetimos o mesmo processo acima para u e Du mostrando que $u, Du \in L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$, sendo que valem as seguintes estimativas $\|u\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq \mathrm{C}\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$ e $\|Du\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)} \leq \mathrm{C}\|f\|_{L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)}$. Juntando esses fatos chegamos que $u \in W^2L^{\varsigma(\cdot),\varrho(\cdot)}(\Omega)$ com a estimativa desejada.

Para o caso, $\varrho \equiv 0$ usamos a estimativa (89) para $\omega \equiv 1$ e concluímos que pelo Teorema de Extrapolação de expoente variável com peso a estimativa (91) para D^2u, Du e u, donde segue o desejado. Isso encerra a demonstração do Teorema. ■

7 MÓDULO DE CONTINUIDADE UNIVERSAL PARA PARA SOLUÇÕES DE VISCOSIDADE DO PROBLEMA COM CONDIÇÃO OBLÍQUA

Neste capítulo exibiremos o módulo de continuidade universal para C^0-soluções de viscosidade do seguinte problema

$$\begin{cases} F(D^2u,x) = f(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{96}$$

onde $F : \mathrm{Sym}(n) \times \overline{\mathrm{B}_1^+} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador (λ, Λ)- elíptico, β é tal que $\beta \cdot \mathbf{n} \geq \mu_0$ em T_1 para algum $\mu_0 > 0$ e $\gamma \leq 0$. Mais precisamente, estabeleceremos a regularidade ótima do problema (96) em diferentes cenários de integrabilidade do termo fonte f. Por simplicidade, salvo menção contrária, usaremos apenas o termo "solução de viscosidade" em vez de "C^0-solução de viscosidade" ao longo deste capítulo.

Contextualizando tal problema que estudaremos, em 2014, Teixeira no seu célebre trabalho [54] estudou o módulo de continuidade universal para soluções de viscosidade de equações elípticas totalmente não-lineares. Neste trabalho ele trouxe estimativas interiores ótimas para soluções de viscosidade de problemas elípticos totalmente não-lineares da forma

$$F(D^2u,x) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Foram obtidas, de acordo com a integrabilidade do termo fonte f, estimativas interiores ótimas do tipo C^α, $C^{Log-Lip}$, $C^{1,\alpha}$ e $C^{1,Log-Lip}$.

Um pouco mais tarde em [50], Da Silva e Nornberg desenvolveram nessa linha um estudo de regularidade, onde operador elíptico totalmente não-linear admite termos Hamiltonianos gerais da seguinte configuração

$$G(D^2u, Du, x) = F(D^2u,x) + b(x)|Du| + \mu(x)|Du|^m = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $b \in L^\varrho(\Omega)$, $\mu \in L^q(\Omega)$ para $\varrho, q \in (n, \infty]$ e $m \in (0,2]$ com $m \neq 1$. O interessante dessa abordagem é a dependência do operador governante de termo de ordem 1(dependência do termo gradiente Du). Observemos que, além do ganho na generalidade do operador comparando com [54], também foram obtidas estimativas $W^{2,p}$ e $C^{2,\alpha}$ para tais operadores.

Recentemente, Amaral e Dos Prazeres em [2] provaram regularidade ótima para modelos elípticos sob condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= \varphi \qquad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e nesse caso o operador governante também depende do termo de ordem 1. Diferentemente de [50], a oscilação do operador em questão depende do termo de ordem 1 para o operador. Foram também obtidas estimativas do tipo $C^{2,\alpha}$ para tal problema.

Inspirado nesses três trabalhos faremos o estudo do módulo de continuidade universal para o problema (96).

Para o que segue, trabalharemos com a seguinte função que mede a oscilação dos coeficientes do operador F em torno de x_0,

$$\Phi_F(x;x_0) =: \sup_{\mathrm{X}\in \mathrm{Sym}(n)\setminus\{0\}} \frac{|F(\mathrm{X},x)-F(\mathrm{X},x_0)|}{\|\mathrm{X}\|}.$$

Adotando a notação $\Phi_F(x)$ quando $x_0 = 0$.

Feita essa observação e conseguir o desejado, a ideia para obter a regularidade ótima a seguir é baseada no seguinte argumento: se a solução de (96) estiver próxima do problema homogêneo com coeficientes constantes então espera-se que u herde pelo menos a mesma regularidade da solução próxima. Após tal aproximação, fazemos um processo iterativo de sequências que aproximem da solução em uma ordem de decaimento de acordo com a regularidade fornecida pelo termo fonte e os dados de bordo. Depois desse passo, passamos para o processo contínuo onde obtemos o desejado. Tal técnica remonta a análise tangencial. Agora, reproduziremos um lema de aproximação semelhante ao Lema 3.1.5. Apresentaremos sua prova por questões de completude do trabalho, mostrando as alterações de uma versão para a outra.

Lema 7.0.1 (Aproximação) *Seja u solução de viscosidade de* (96) *com $u = \varphi$ em $\partial \mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1$ para $\varphi \in C^0(\partial \mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1)$ tal que $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial \mathrm{B}_1^+\setminus \mathrm{T}_1)} \leq \mathfrak{C}_1$ para alguma constante positiva $\mathfrak{C}_1$ onde $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e tal que $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \mathfrak{C}_2$ sendo $\mathfrak{C}_2 > 0$ constante e $p \in [n-\varepsilon_0, \infty)$ (aqui ε_0 constante de Escauriaza). Dado $\delta > 0$, existe $\eta > 0$ dependendo apenas de n, λ, Λ, p, δ,$\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ tal que se*

$$⨍_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_F(x)|^n dx \leq \eta^n \quad e \quad \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(x)|^p dx \leq \eta^p,$$

então se h é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & em \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta\cdot Dh + \gamma h = g(x) & sobre \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & em \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

então

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u-h| \leq \delta.$$

Demonstração: A demonstração será feita por argumento de redução ao absurdo. Mais precisamente, suponhamos por absurdo que exista um $\delta_0 > 0$ tal que a tese do lema não seja satisfeita. Logo, podemos encontrar sequências de funções $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$

tais que u_k e h_k são soluções de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2u_k, x) = f_k(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du_k + \gamma u_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_k = \varphi_k & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F(D^2h_k, 0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \\ \beta \cdot Dh_k + \gamma h_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h_k = u_k & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

onde $\|\varphi_k\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1^+\setminus\mathrm{T}_1)} \leq \mathfrak{C}_1$, $\|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \mathfrak{C}_2$ e

$$\fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_{F_k}(x)|^n dx \leq \frac{1}{k^n} \quad \text{e} \quad \int_{\mathrm{B}_1^+} |f_k(x)|^p dx \leq \frac{1}{k^p},$$

porém,

$$\sup_{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+} |u_k - v_k| > \delta_0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{97}$$

Agora pela Estimativa ABP (Lema 2.3.13) segue que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} &\leq \|\varphi_k\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1^+\setminus\mathrm{T}_1)} + \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0) \cdot (\|f_k\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}) \\ &\leq \mathfrak{C}_1 + \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0) \cdot (\|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}) \\ &\leq C(n,\varepsilon_0,p,\lambda,\Lambda,\mu_0,\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2), \ \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{98}$$

onde usamos nas últimas duas desigualdades acima as limitações de $\|\varphi_k\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1^+\setminus\mathrm{T}_1)}$, $\|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)}$. Por outro lado, pelo Teorema 2.3.15, existe $\alpha' \in (0,1)$ dependendo apenas de n, λ, Λ e μ_0 tal que $u \in C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)$ e ainda vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)} &\leq \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)})(\|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_k\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}) \\ &\leq \mathrm{C}(\|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}), \end{aligned} \tag{99}$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)})$. Assim, por (98) e (99) segue que

$$\|u_k\|_{C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)} \leq C(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)},\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)$, donde por esta limitação segue que tal sequência é equicontínua e pontualmente limitada. Nessa linha, também temos o mesmo para a sequência $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e por os operadores F_k serem (λ,Λ)-elípticos segue que a sequência $(F_k(\cdot,0))_{\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses de equicontinuidade e limitação pontual em conjuntos compactos de Sym(n). Assim, podemos usar o Teorema de Ascoli-Arzelà e obter subsequências de funções $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e de operadores $(F_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $u_{k_j} \to u_\infty$ em $L^\infty\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}}\right)$, $g_{k_j} \to g_\infty$ em $L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})$ e $F_{k_j}(\cdot,0) \to F_\infty(\cdot,0)$ em conjuntos compactos de Sym(n), onde F_∞ é um operador (λ,Λ)-elíptico. Ademais, para toda $\varphi \in C^2(\mathrm{B}_r(x_0))$ para $\mathrm{B}_r(x_0) \subset \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}$,

$$\begin{aligned}
|F_{k_j}(D^2\varphi(x),x) - f_{k_j}(x) - F_\infty(D^2\varphi(x),0)| &\leq |F_{k_j}(D^2\varphi(x),x) - F_{k_j}(D^2\varphi(x),0)| + \\
&+ |f_{k_j}(x)| + \\
&+ |F_{k_j}(D^2\varphi(x),0) - F_\infty(D^2\varphi(x),0)| \\
&\leq |D^2\varphi(x)||\Phi_{F_{k_j}}(x)| + |f_{k_j}(x)| + \\
&+ |F_{k_j}(D^2\varphi(x),0) - F_\infty(D^2\varphi(x),0)|,
\end{aligned}$$

donde pelas hipóteses acima sobre Φ_{k_j} e f_{k_j} segue que

$$\lim_{j\to\infty} \|F_{k_j}(D^2\varphi(\cdot),\cdot) - f_{k_j}(\cdot) - F_\infty(D^2\varphi(\cdot),0)\|_{L^p(\mathrm{B}_r(x_0))} = 0.$$

Portanto, pelo Lema de Estabilidade 2.3.21 podemos concluir que u_∞ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F_\infty(D^2u_\infty,0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta\cdot Du_\infty + \gamma u_\infty = g_\infty(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}. \end{cases}$$

Por fim, definindo $w_{kj} := u_\infty - h_{k_j}$ obtemos pelo Principio de Comparação Teorema 2.3.18 que

$$\begin{cases} w_{k_j} \in S\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda,0\right) & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta\cdot Dw_{k_j} + \gamma w_{k_j} = g_\infty - g_{k_j} & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ w_{k_j} = u_\infty - u_{k_j} & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

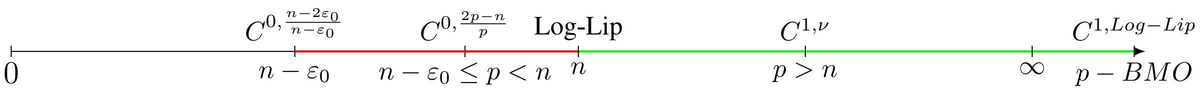
donde novamente pela Estimativa ABP 2.3.13 vemos que

$$\|w_{k_j}\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} \leq \|u_\infty - u_{k_j}\|_{L^\infty\left(\partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\setminus\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g_\infty - g_{k_j}\|_{L^\infty\left(\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)} \to 0,$$

quando $j \to \infty$. Logo, $h_{k_j} \to u_\infty$ em $\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}}$, o que contradiz a condição (97) para j suficientemente grande. ∎

Com essa ferramenta estudaremos a regularidade em vários cenários de acordo com a integrabilidade do termo fonte f, sendo que o os dados de bordo β, γ e g terão grande influência nesse estudo. Abaixo na Figura 6, temos um esquema dos cenários do termo fonte f relacionando com a regularidade da solução que será obtida em cada caso.

Figura 6 – Esquema do módulo de continuidade universal em função da integrabilidade do termo fonte



Fonte: Elaborada pelo autor.

A ideia para obter a regularidade em cada caso analisado abaixo tem como motivação além dos trabalhos citados, o Mergulho de Dini-Campanato 2.2.63. Na seguinte configuração: Seja $\rho \in (0,1)$. Dada uma função contínua u em B_1, assuma que para todo $x \in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}$ exista uma sequência de funções polinomiais $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de grau $\lfloor m \rfloor \leq 2$ (aqui $m \in [0,3)$ e $\lfloor m \rfloor$ é a parte inteira de m) tais que

$$\sup_{\mathrm{B}_{\rho^k(x)}} |u - P_k| \leq \mathrm{C}_0 \rho^{km}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde os coeficientes universalmente limitados no seguinte sentido,

$$\rho^{(k-1)\lfloor m \rfloor}|a_{k-1} - a_k| + \rho^{(k-1)(\lfloor m \rfloor - 1)}|b_{k-1} - b_k| + \|M_{k-1} - M_k\| \leq \mathrm{C}\rho^{(k-1)m},$$

para alguma constante $\mathrm{C} > 0$ e sendo a_k, b_k e M_k os coeficientes do polinômio P_k. Então, pelo Mergulho de Dini-Campanato 2.2.63, $u \in C^{\lfloor m \rfloor, \omega_1}\left(\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}\right)$,e

$$[D^{\lfloor m \rfloor}]_{\omega, \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}} \leq \mathrm{C}_0(n, m, p, \rho)\mathrm{C}.$$

Desta forma, nessa perspectiva a busca da regularidade em cada cenário será pautada via essas aproximações.

7.1 Caso $p \in [n - \varepsilon_0, n)$ - Hölder regularidade ótima

Esta seção é dedicada a provar estimativas de regularidade para soluções de (96) quando $f \in L^p(\mathrm{B}_1^+)$ para $p \in [n - \varepsilon_0, n)$ e sob suposições adequadas sobre os dados de bordo do problema. Para tal, o próximo resultado constitui o primeiro passo em um sofisticado processo de aproximação geométrica, que produzirá a estimativa Hölder desejada.

Lema 7.1.1 *Seja u uma solução de* (96)*, onde β, γ, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Dado $\overline{\alpha} \in (0,1)$, existem $\eta > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dependendo apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\overline{\alpha}$, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tais que, se*

$$⨏_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_F(x)|^n dx \leq \eta^n \quad e \quad \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(x)|^p dx \leq \eta^p,$$

para $p \in [n - \varepsilon_0, n)$, então existe uma constante $\mu \in \mathbb{R}$ universalmente limitada, no seguinte *sentido*

$$|\mu| \leq C(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - \mu| \leq \rho^{\overline{\alpha}}.$$

Demonstração: Para um $\delta > 0$ a ser escolhido a posteriori, apliquemos o Lema 7.0.1 e o Teorema 2.3.20 para podermos considerar h solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \text{em} \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| \leq \delta \tag{100}$$

Pelo Teorema 2.3.16 segue-se que $h \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)$ com estimativa

$$\|h\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \mathrm{C}\left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)}\right),$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de n, λ, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$. Por essa estimativa, u ser normalizada e (100) segue que

$$\|h\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}} = \tilde{\mathrm{C}}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}). \tag{101}$$

Em particular, pela Desigualdade do Valor Médio, para todo $x \in \mathrm{B}_r^+$ para $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $|h(x) - h(0)| \leq \tilde{\mathrm{C}}r$ donde

$$\sup_{x \in \mathrm{B}_r^+} |h(x) - h(0)| \leq \tilde{\mathrm{C}}r. \tag{102}$$

Agora para o $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ dado façamos as escolhas de

$$\rho = \left\{ \left(\frac{1}{2\tilde{\mathrm{C}}}\right)^{\frac{1}{1-\tilde{\alpha}}}, \frac{1}{2} \right\} \;\text{ e }\; \delta =: \frac{1}{2}\rho^{\tilde{\alpha}}.$$

Tal escolha determina a constante η pelo Lema de Aproximação 7.0.1. Por fim, escolhendo $\mu = h(0)$ segue por (101)

$$|\mu| \leq \|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}\right)} \leq \|h\|_{C^{1,\alpha}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}} =: \mathrm{C}.$$

Ademais, por (100) e (102)

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{\mathrm{B}^+_\rho} |u-\mu| & \leq & \sup\limits_{\mathrm{B}^+_\rho} |u-h| + \sup\limits_{\mathrm{B}^+_\rho} |h-\mu| \\ & \overset{\rho<\frac{7}{8}}{\leq} & \sup\limits_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u-h| + \sup\limits_{\mathrm{B}^+_\rho} |h-\mu| \\ & \leq & \delta + C\rho \\ & \leq & \dfrac{1}{2}\rho^{\tilde{\alpha}} + \left(\dfrac{1}{2}\rho^{\tilde{\alpha}-1}\right)\rho \\ & = & \rho^{\tilde{\alpha}}. \end{array}$$

O que finaliza a prova do Lema. ■

Agora estamos aptos para provar neste capítulo o primeiro resultado de regularidade ótima no contexto dos espaços Hölder. Nesse caso, a partir do fato do termo fonte f em (96) estar no espaço L^p para parâmetros de integrabilidade $p \in [n-\varepsilon_0, n)$ e dados de bordo β, γ e g com regularidade Hölder obtemos a regularidade afirmada. Isso é detalhado pelo seguinte teorema:

Teorema 7.1.2 (Regularidade $C^{0,\alpha}$ ótima) *Seja u uma solução de viscosidade de* (96)*, onde $\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ (para algum $\alpha \in (0,1)$) e $f \in L^p(\mathrm{B}^+_1) \cap C^0(\mathrm{B}^+_1)$ para $p \in [n-\varepsilon_0, n)$. Existe constante $v_0 > 0$ que depende apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tal que se,*

$$\fint_{\mathrm{B}^+_r} |\Phi_F(x,y)|^n dx \leq v_0^n, \ \forall y \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}, \forall r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{103}$$

então $u \in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ e vale a seguinte a estimativa

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, p, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ é uma constante positiva e $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{n}{2}\right)$ é a constante de Escauriaza.

Demonstração: Inicialmente podemos supor sem perda de generalidade que $\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} \leq 1$, $\|f\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)} \leq \eta$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq 1$, onde $\eta > 0$ é constante do Lema 7.1.1 quando fazemos

$\tilde{\alpha} = 2 - \frac{n}{p}$. De fato, caso não ocorra tais condições definimos a constante

$$\kappa =: \frac{\eta}{\eta\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \eta\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}}$$

e vemos que $\tilde{u}(x) = \kappa u(x)$ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2\tilde{u}, x) = \tilde{f}(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \tilde{\beta} \cdot D\tilde{u} + \tilde{\gamma}\tilde{u} = \tilde{g} & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{F}(\mathrm{X}, x) & =: & \kappa F\left(\frac{1}{\kappa}\mathrm{X}, x\right) \\ \tilde{f}(x) & =: & \kappa f(x) \\ \tilde{\beta}(x) & =: & \beta(x) \\ \tilde{\gamma}(x) & =: & \gamma(x) \\ \tilde{g}(x) & =: & \kappa g(x), \end{cases}$$

tem-se que $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \leq 1$, $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta$ e $\|\tilde{g}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq 1$ e assim assumindo que o Teorema é válido nessas condições segue que $\tilde{u} \in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ com estimativa

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \leq \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, p, \alpha\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}), \tag{104}$$

donde claramente temos que $u \in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ e reescalonando a estimativa (104) segue a estimativa desejada na tese do teorema. Assim podemos, de fato, fazer a suposição dita acima no inicio da demonstração. Nesse caso, escolhamos $v_0 = \eta$. A fim de provar o desejado, fixado $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ afirmamos que existe sequência de números reais $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{z\in\mathrm{B}_{\rho^k}^+(y)} |u(z) - \mu_k| \leq \rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}, \tag{105}$$

onde $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ é o raio da semi-bola obtida no Lema 7.1.1 e ainda satisfazendo a seguinte estimativa,

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq \mathrm{C}\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}. \tag{106}$$

Vale fazermos uma digressão rápida para observar que pelo fato de $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ segue que $\mathrm{B}_{\rho^k}^+(y) \subset \mathrm{B}_1^+$ e $\mathrm{T}_{\rho^k}(y) \subset \mathrm{T}_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Feita essa observação provemos o afirmado por indução em $k \in \mathbb{N}$. Realmente, quando $k = 1$ temos a existência da constante μ_1 garantida pelo Lema 7.1.1 junto com a estimativa (105). Agora supondo por hipótese de indução que vale a afirmação para $k \in \mathbb{N}$ e definamos a função auxiliar

$$v_k(x) =: \frac{u(y+\rho^k x)-\mu_k}{\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}},\ x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1,$$

vemos que v_k é solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F_k(D^2 v_k, x) = f_k(x) & \text{em} & \mathrm{B}_1^+ \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k = g_k(x) & \text{sobre} & \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_k(\mathrm{X}, x) & =: & \rho^{k\frac{n}{p}} F\left(\frac{1}{\rho^{k\frac{n}{p}}}\mathrm{X}, y+\rho^k x\right) \\ f_k(x) & =: & \rho^{k\frac{n}{p}} f(y+\rho^k x) \\ \beta_k(x) & =: & \beta(y+\rho^k x) \\ \gamma_k(x) & =: & \rho^k \gamma(y+\rho^k x) \\ g_k(x) & =: & \rho^{k\left(-1+\frac{n}{p}\right)}(g(y+\rho^k x) - \mu_k \gamma(y+\rho^k x)). \end{cases}$$

Afirmamos que v_k está nas hipóteses do Lema 7.1.1. De fato, pela hipótese de indução, segue da estimativa (105) para k que $\|v_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \leq 1$. Além disso, pela hipótese de $\beta, \gamma \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ que,

$$\begin{aligned} [\beta_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} & =: \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1} \\ x\neq z}} \frac{|\beta_k(x)-\beta_k(z)|}{|x-z|^\alpha} = \rho^{k\alpha} \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1} \\ x\neq z}} \frac{|\beta(y+\rho^k x)-\beta(y+\rho^k z)|}{|(y+\rho^k x)-(y+\rho^k z)|^\alpha} \\ & = \rho^{k\alpha}[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \\ & \leq \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty, \end{aligned}$$

donde $\beta_k \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e

$$\begin{aligned} [\gamma_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} & =: \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1} \\ x\neq z}} \frac{|\gamma_k(x)-\gamma_k(z)|}{|x-z|^\alpha} = \rho^{k(1+\alpha)} \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1} \\ x\neq z}} \frac{|\gamma(y+\rho^k x)-\gamma(y+\rho^k z)|}{|(y+\rho^k x)-(y+\rho^k z)|^\alpha} \\ & = \rho^{k(1+\alpha)}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \\ & \leq \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty, \end{aligned}$$

garantindo também a α-Hölder regularidade de γ_k em $\overline{\mathrm{T}_1}$. Por outro lado, também vemos que $g_k \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$, uma vez que, procedendo analogamente acima como feito para β_k e γ_k vemos que

$$\begin{aligned} [g_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} & \leq \rho^{k\left(-1+\frac{n}{p}\right)}(\rho^{k\alpha}[g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + |\mu_k|\rho^{k\alpha}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}}) \\ & \leq \rho^{k\alpha}[g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \rho^{k\alpha}|\mu_k|[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} \\ & \leq \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + |\mu_k|\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \end{aligned} \tag{107}$$

onde usamos na segunda desigualdade o fato que $\frac{n}{2} \leq n - \varepsilon_0 \leq p < n$ e assim $0 < \frac{n}{p} - 1 \leq 1$. Agora, analisaremos o comportamento da constante μ_k. Por um lado, u ser normalizada e contínua segue que $\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1)} \leq 1$. Já pela estimativa (105) obtemos por densidade e continuidade que

$$\sup_{\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}} |u - \mu_k| \leq \rho^{k\left(2 - \frac{n}{p}\right)},$$

consequentemente por desigualdade triangular, obtemos que

$$|\mu_k| \leq \|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1)} + \|u - \mu_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)})} \leq 1 + \rho^{k\left(2 - \frac{n}{p}\right)} < \frac{3}{2}.$$

Portanto, pela estimativa (107) segue que $g_k \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Ademais, pela definição de f_k temos que

$$\int_{\mathrm{B}_1^+} |f_k(x)|^p dx = \rho^{kn} \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(y + \rho^k x)|^p dx = \int_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |f(z)|^p dz \leq \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(z)|^p dz \leq \eta^p.$$

E para usarmos enfim o Lema 7.1.1 notemos que pela definição de F_k claramente é um operador (λ, Λ)- elíptico e pela hipótese (103) segue que

$$\fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_{F_k}(x)|^n dx = \fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_F(y + \rho^k x, y)|^n dx = \fint_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |\Phi_F(z, y)|^n dz \leq v_0^n = \eta^n.$$

Assim podemos usar o Lema 7.1.1 para v_k e obter constante real $\tilde{\mu}$ tal que $\tilde{\mu}$ é universalmente limitada por uma constante C e

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |v_k - \tilde{\mu}| \leq \rho^{2 - \frac{n}{p}}. \tag{108}$$

Definamos $\mu_{k+1} = \mu_k + \rho^{k\left(2 - \frac{n}{p}\right)} \tilde{\mu}$ temos da definição de v_k juntamente com (105) e (108) que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^{k+1}}(y)} |u - \mu_{k+1}| \leq \rho^{(k+1)\left(2 - \frac{n}{p}\right)},$$

o que prova o caso $k + 1$. Assim por indução segue a afirmação da existência da sequência $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo (105). Da estimativa (106) podemos concluir que (μ_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e por conseguinte existe o número real $\mu_\infty = \lim_{k \to \infty} \mu_k$. Afirmamos que $\mu_\infty = u(y)$. Com efeito, fixemos $x_0 \in \mathrm{B}_1^+$ e definamos para cada $k \in \mathbb{N}$, $z_k = y + \rho^k x_0$. Vemos claramente que $z_k \in \mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e que $z_k \to y$ quando $k \to \infty$, visto que,

$$|z_k - y| = \rho^k |x_0| < \rho^k \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Assim, a continuidade da função u implica que $u(z_k) \to u(y)$. Usando essas convergências acima, (106) e (108) temos

$$\begin{aligned}
|u(y)-\mu_\infty| &\leq |u(z_k)-u(y)|+|u(z_k)-\mu_k|+|\mu_k-\mu_\infty| \\
&\overset{z_k\in \mathrm{B}^+_{\rho^k(y)}}{\leq} |u(z_k)-u(y)|+\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}|u-\mu_k|+|\mu_k-\mu_\infty| \\
&\leq |u(z_k)-u(y)|+\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}+|\mu_k-\mu_\infty| \to 0, \text{ quando } k\to\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu_\infty = u(y)$. Por outro lado, dados quaisquer $k < m$ naturais temos pela condição (106) que

$$|\mu_k-\mu_m| \leq \sum_{j=k}^{m-1}|\mu_{j+1}-\mu_j| \leq \mathrm{C}\sum_{j=k}^{m-1}\rho^{j\left(2-\frac{n}{p}\right)} = \mathrm{C}\frac{\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}\left(\rho^{(m-k)\left(2-\frac{n}{p}\right)}-1\right)}{\rho^{2-\frac{n}{p}}-1}$$

fixado $k\in\mathbb{N}$ acima e fazendo $m\to\infty$ obtemos pela convergência de $\mu_m\to u(y)$ que

$$|u(y)-\mu_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{2-\frac{n}{p}}}\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)} \tag{109}$$

donde pela arbitrariedade de k segue a estimativa (109) para todo $k\in\mathbb{N}$.

Por fim, fixemos $0<r<\rho$ e escolhemos $k\in\mathbb{N}$ tal que $\rho^{k+1}<r\leq\rho^k$. De (105) e (109) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in \mathrm{B}^+_r(y)}|u(x)-u(y)| &\overset{r\leq\rho^k}{\leq} \sup_{x\in \mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}|u(x)-\mu_k|+|\mu_k-u(y)| \\
&\leq \rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)}+\frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{2-\frac{n}{p}}}\rho^{k\left(2-\frac{n}{p}\right)} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(1+\frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{2-\frac{n}{p}}}\right)\rho^{(k+1)\left(2-\frac{n}{p}\right)} \\
&\overset{\rho^{k+1}<r}{\leq} \mathrm{C}r^{2-\frac{n}{p}}.
\end{aligned} \tag{110}$$

Agora provemos que de fato $u\in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac12}}\right)$. Para isso dados $x\in \mathrm{B}^+_{\frac12}$ e $y\in \mathrm{T}_{\frac12}$, temos dois possíveis casos a considerarmos:

1º Caso: $r=|x-y|\geq\rho$

Nesse caso segue imediatamente que

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{2-\frac{n}{p}}} \leq \frac{\overbrace{2\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac12}}\right)}}^{\leq 2}}{\rho^{2-\frac{n}{p}}} \leq \mathrm{C}.$$

2º Caso: $r = |x-y| < \rho$

Observemos que a estimativa (110) também vale em $\overline{\mathrm{B}_r^+(y)}$ e daí como $x \in \overline{\mathrm{B}_r^+(y)}$ segue de tal estimativa que

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{2-\frac{n}{p}}} \leq \frac{\mathrm{C}r^{2-\frac{n}{p}}}{|x-y|^{2-\frac{n}{p}}} = \mathrm{C}.$$

Desses casos acima e as estimativas interiores Hölder ótimas (cf. [54, Observação 2]) garantimos que $[u]_{0,2-\frac{n}{p},\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}} < \infty$, ou seja, u é $\left(2-\frac{n}{p}\right)$- Hölder contínua em $\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}$ sendo evidente a estimativa

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

o que finaliza a prova do Teorema. ■

Observação 7.1.3 *Podemos ver a otimalidade do expoente acima na demonstração do Teorema 7.1.2 da seguinte maneira: em vez de usarmos $\tilde{\alpha} = 2-\frac{n}{p}$ inicialmente nesse teorema, tomando $\alpha' \in (0,1)$ no passo de indução definindo*

$$v_k(x) =: \frac{u(y+\rho^k x) - \mu_k}{\rho^{k\alpha'}},$$

temos que v_k é solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F_k(D^2 v_k, x) = f_k(x) & \textit{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k = g_k(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_k(\mathrm{X}, x) & =: & \rho^{k(2-\alpha')} F\left(\frac{1}{\rho^{k(2-\alpha')}}\mathrm{X}, y+\rho^k x\right) \\ f_k(x) & =: & \rho^{k(2-\alpha')} f(y+\rho^k x) \\ \beta_k(x) & =: & \beta(y+\rho^k x) \\ \gamma_k(x) & =: & \rho^k \gamma(y+\rho^k x) \\ g_k(x) & =: & \rho^{k(1-\alpha')}(g(y+\rho^k x) - \mu_k \gamma(y+\rho^k x)). \end{cases}$$

Notemos que

$$\int_{\mathrm{B}_1^+} |f_k(x)|^p dx = \rho^{k(2-\alpha')p} \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(y+\rho^k x)|^p dx \leq \rho^{k(2-\alpha')p-kn} \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(z)|^p dz.$$

Assim, a fim de possamos garantir a hipótese de norma L^p pequena de f_k em vista do Lema 7.1.1 e assumindo que $\|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta$ devemos ter $k(2-\alpha') - kn \geq 0$, o que é sempre verdade para todo, $\alpha' \leq 2-\frac{n}{p}$.

Em vista do Teorema 2.3.15, estabeleceremos uma conexão desse resultado com o Teorema 7.1.2. Mais precisamente, estudaremos a regularidade do problema (96), quando o termos que definem o operador $\mathfrak{B}(q,r,x) = \beta(x)\cdot q + \gamma(x)r$ e o termo fonte na fronteira g tem regularidade Lipschitz. Para entender melhor essa conexão, inicialmente temos a seguinte aplicação direta do Teorema 2.3.15:

Corolário 7.1.4 *Consideremos u solução de viscosidade de* (96). *Assuma que os dados de bordo $\beta,\gamma,g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha\in(0,1)$ e $f\in L^p(\mathrm{B}_1^+)\cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ para*

$$p = \max\left\{\frac{n}{2-\alpha}, n-\varepsilon_0\right\}.$$

Então, existe constante $v_0>0$ dependendo apenas de n, p, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tal que se

$$\fint_{\mathrm{B}_r^+} |\Phi_F(x,y)|^n dx \le v_0^n,\ \forall y\in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+, \forall r\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

então $u\in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ com a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \le \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$$

onde $\mathrm{C}=\mathrm{C}(n,p,\lambda,\Lambda,\mu_0,\alpha,\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})},\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ é uma constante positiva e ε_0 é a constante de Escauriaza.

Prova: Realmente, temos por hipótese que o parâmetro integrabilidade do termo fonte f é tal que $p\in[n-\varepsilon_0,n)$. Daí, podemos aplicar o Teorema 7.1.2 para obter $v_0>0$ constante universal desejada no corolário e nessas condições $u\in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ com estimativa,

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \le \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}), \tag{111}$$

onde $\mathrm{C}>0$ é constante universal. Donde segue o desejado. ■

Observação 7.1.5 *Neste último corolário vale a observação que, $p=p(n,\alpha,\varepsilon_0)$ e que se o expoente α da Hölder regularidade dos dados de bordo β, γ e g tende para 1^- segue que*

$$p\to\max\{n,n-\varepsilon_0\}=n$$

e com isso

$$\alpha_p := 2-\frac{n}{p}\to 1 \quad \textit{quando} \quad \alpha\to 1^-.$$

Bem como

$$\alpha_p := 2-\frac{n}{p}\to \frac{n-2\varepsilon_0}{n-\varepsilon_0} \quad \textit{quando} \quad \alpha\to 0^+.$$

Essa observação mostra um limitante inferior dos possíveis expoentes de Hölder regularidade para o problema (96) *sob as condições acima.*

Para finalizar essa seção relacionaremos tais estimativas em um contexto um pouco diferente sob a ótica do termo fonte f em (96) no contexto dos espaços de Morrey. Esse é o conteúdo do seguinte corolário.

Corolário 7.1.6 *Seja u solução de* (56)*, onde $\beta, \gamma, g \in \mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e assuma que o termo fonte $f \in L^{n,n(1-\tilde{\alpha})}(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ para algum $\tilde{\alpha} \in (0,1)$. Então, para qualquer $\alpha \in (0,1)$, existe contante $v_0 > 0$ dependendo apenas de n, $\tilde{\alpha}$, λ, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tal que, se*

$$\fint_{\mathrm{B}_r^+} |\Phi_F(x,y)|^n dx \leq v_0^n, \ \forall y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+, \forall r \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

então $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ com a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{n,n(1-\tilde{\alpha})}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{\mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1})})$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \tilde{\alpha}, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ é uma constante positiva e ε_0 é a constante de Escauriaza.

Prova: Realmente, dado qualquer $\alpha \in (0,1)$, recordemos dos mergulhos clássicos

$$\mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1}) \quad \text{e} \quad L^{n,n(1-\tilde{\alpha})}(\mathrm{B}_1^+) \hookrightarrow L^n(\mathrm{B}_1^+) \hookrightarrow L^p(\mathrm{B}_1^+)$$

para o seguinte parâmetro de integrabilidade

$$p = \max\left\{\frac{n}{2-\alpha}, n - \varepsilon_0\right\} \in [n - \varepsilon_0, n)$$

(Veja Proposição 2.2.42, Observação 2.2.51 e [56, Teorema 8.2]). Assim, lembrando que $\beta, \gamma, g \in \mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1})$, podemos aplicar o Teorema 7.1.2 para obter constante $v_0 > 0$ tal que $u \in C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ satisfazendo a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}), \tag{112}$$

Consequentemente, pelos mergulhos citados acima obtemos da estimativa (112),

$$\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^{n,n(1-\tilde{\alpha})}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{\mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1})}), \tag{113}$$

sendo $\tilde{\mathrm{C}} > 0$ que depene apenas de C e $\tilde{\alpha}$.

Da última estimativa acima temos duas possibilidades para o parâmetro de integrabilidade p. Se $p = \frac{n}{2-\alpha}$ então pela estimativa (113) a regularidade e estimativa desejadas são válidas. Caso contrário, isto é, no caso $p = n - \varepsilon_0$ temos pela definição de máximo entre dois números reais $\frac{n}{2-\alpha} \leq n - \varepsilon_0$ e desta forma $-\frac{2-\alpha}{n} \leq -\frac{1}{n-\varepsilon_0}$. Portanto, concluímos que

$$\alpha = 2 - \frac{n}{\frac{n}{2-\alpha}} \leq 2 - \frac{n}{n-\varepsilon_0} = \frac{n-2\varepsilon_0}{n-\varepsilon_0}.$$

Devido este fato, temos pela Proposição 2.2.44 o seguinte mergulho contínuo

$$C^{0,\frac{n-2\varepsilon_0}{n-\varepsilon_0}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$$

e então, a estimativa (113) juntamente com a estimativa via o mergulho citado por último,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}(n,\alpha,\varepsilon_0)\|u\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)} \leq \mathrm{C}'(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \|f\|_{L^{n,n(1-\tilde{\alpha})}(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{\mathrm{Lip}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

O que finaliza a prova. ■

Observação 7.1.7 *Assumindo que f pertence ao espaço $L^n(\mathrm{B}^+_1)$ e os dados de bordo são Lipschitz então para qualquer α obtemos regularidade $C^{0,\alpha}$ para soluções de* (56)*, contudo, no Corolário 7.1.6 ganhamos uma estimativa mais refinada quando comparamos com o cenário L^n.*

7.2 Caso $p = n$ - Regularidade $Log - Lip$

Nesta segunda parte estudaremos a regularidade ótima de soluções de viscosidade de (96) quando o termo fonte f está em $L^n(\mathrm{B}^+_1)$. Veremos a seguir que nesse caso, $u \in C^{0,\alpha'}_{loc}$ para qualquer $\alpha' \in (0,1)$. Assim, se olharmos para o módulo de continuidade $\omega(t)$ para tais soluções vemos que é da ordem $t^{\alpha'}$ para qualquer $\alpha' \in (0,1)$, porém temos que $\frac{\omega(t)}{t} \nearrow \infty$ quando $t = o(1)$ e assim não obtemos módulo de continuidade Lipschitz para tais soluções (cf.[54]).

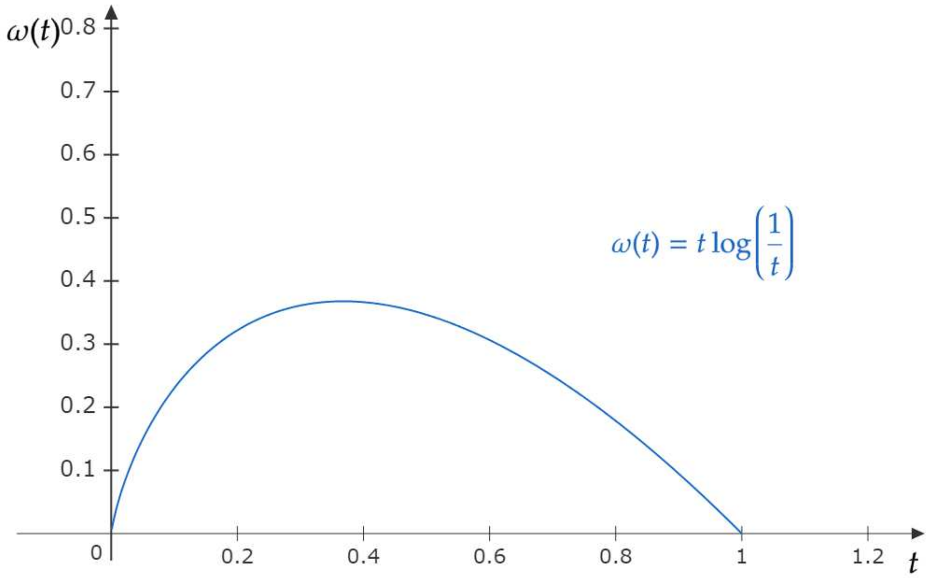
Tal fato ocorre devido os espaços de Lebesgue L^p's com a técnica abordada aqui não "captarem"a regularidade Lipschitz de soluções do nosso problema.

Contudo, veremos que a regularidade ótima para soluções de (96), sob certas condições, nessa parte é a regularidade Log-Lipschitz. Sobre tal conceito temos a seguinte definição

Definição 7.2.1 *Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Log-Lipschitz** ou **ter módulo de continuidade Log-Lipschitz** e usamos a notação $u \in C^{0,Log-Lip}(\Omega)$ se existe uma constante positiva* C *tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{C}|x-y||\log|x-y||, \forall x, y \in \Omega,\ x \neq y.$$

Figura 7 – Gráfico da função $\omega(t) = t\log\frac{1}{t}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 7.2.2 *O termo módulo de continuidade na definição acima vem da seguinte ideia: definindo a função real* $\omega(t) = t|\log t|$ *vemos a condição de* $u \in C^{0,Log-Lip}(\Omega)$ *se existe constante positiva* C *tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{C}\omega(|x-y|), \forall x, y \in \Omega,\ x \neq y.$$

Veja Figura 7.

Observação 7.2.3 *A regularidade Log-Lipschitz é muito interessante devido ao seguinte fato: Se* $u \in C^{0,Log-Lip}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$*, então* $u \in C^{0,\alpha}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ *para todo* $\alpha \in (0,1)$*. Daremos uma prova desse fato por questão de cortesia aos leitores. Com efeito, observemos que dado* $\alpha \in (0,1)$ *temos por* $u \in C^{0,Log-Lip}(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}})$*,*

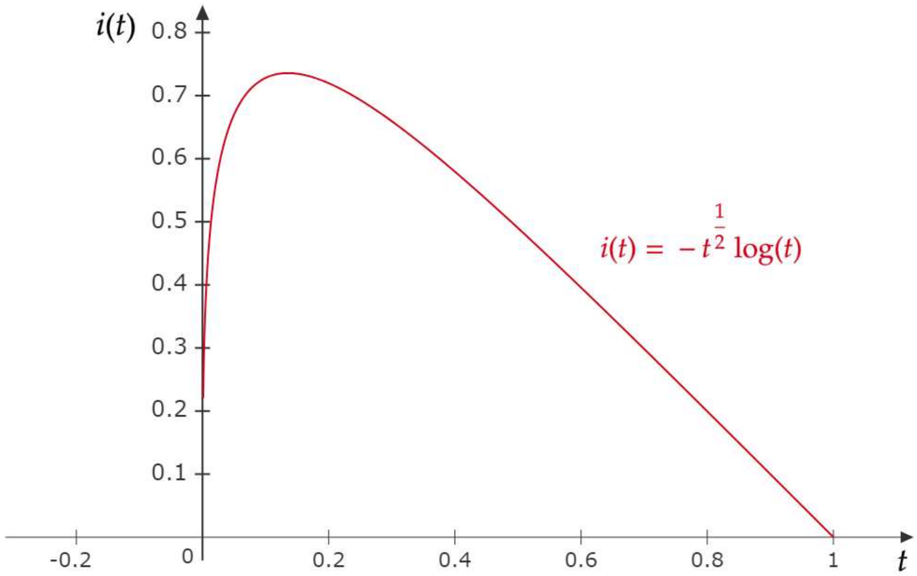
$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq -\mathrm{C}|x-y|\log|x-y| \\ &\leq -\mathrm{C}(|x-y|^{1-\alpha}\log|x-y|)|x-y|^{\alpha},\ \forall x, y \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}},\ x \neq y. \end{aligned} \tag{114}$$

Agora definamos a função $i(t) = -t^{1-\alpha}\log t,\ t \in (0,1)$ *(uma ilustração do gráfico função* $t \longmapsto -t^{1-\alpha}\ln t$ *para* $\alpha = \frac{1}{2}$ *e* $t > 0$ *está no Gráfico 8 abaixo).*

Observemos que $i(t)$ *satisfaz* $\lim_{t\to 0^+} i(t) = 0$*, uma vez que, pela Regra de L'Hopital*

$$\lim_{t\to 0^+} i(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{\log t}{\frac{1}{t^{1-\alpha}}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{\frac{1}{t}}{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = 0$$

Figura 8 – Gráfico da função $i(t) = -t^{\frac{1}{2}} \log t$



Fonte: Elaborada pelo autor.

e isso garante que $i(t)$ é limitada, logo podemos encontrar constante $\mathrm{M}_\alpha > 0$ tal que

$$t^{1-\alpha} \log t \leq M_\alpha, \forall t \in (0,1).$$

Portanto, temos em (114)

$$|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{CM}_\alpha |x-y|^\alpha, \ \forall x, y \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}, \ x \neq y,$$

ou seja, $u \in C^{0,\alpha}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$.

Lema 7.2.4 *Considere u solução de* (96)*, onde β, γ, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Existem $\eta > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ dependendo apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tais que, se*

$$\fint_{\mathrm{B}^+_1} |\Phi_F(x)|^n dx \leq \eta^n \quad e \quad \int_{\mathrm{B}^+_1} |f(x)|^n dx \leq \eta^n,$$

então existe uma função afim $l(x) = a + b \cdot x$ com coeficientes universalmente limitados, no seguinte sentido

$$|a| + |b| \leq C(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - l| \leq \rho.$$

Demonstração: Fixemos $\delta > 0$ que determinaremos a posteriori. Pelo Lema 7.0.1 e o Teorema 2.3.20, podemos considerar h solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \text{em} \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| \leq \delta. \tag{115}$$

Pelo Teorema 2.3.16 segue que $h \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_{\frac{2}{3}}})$ e

$$\|h\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}} = \tilde{\mathrm{C}}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}). \tag{116}$$

Definamos $a = h(0)$ e $b = Dh(0)$. Por (116) temos para todo $x \in \mathrm{B}^+_r$ para $r \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$$|h(x) - l(x)| \leq \tilde{\mathrm{C}} r^{1+\alpha},$$

donde

$$\sup_{\mathrm{B}^+_r} |h - l| \leq \tilde{\mathrm{C}} r^{1+\alpha}, \forall r \in \left(0, \frac{2}{3}\right). \tag{117}$$

Por fim, escolhamos ρ e δ pondo

$$\rho = \min\left\{ \left(\frac{1}{2\tilde{\mathrm{C}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{e} \right\} \text{ e } \delta = \frac{1}{2}\rho.$$

Observemos que essa escolha determina a constante $\eta > 0$ devido ao Lema 7.0.1. A limitação universal das constantes a e b segue diretamente de (116). Para o que falta, de (115) e (117) obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - l| &\leq \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |h - l| \leq \sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |h - l| \leq \delta + \tilde{\mathrm{C}} \rho^{1+\alpha} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho + \left(\frac{1}{2\rho^\alpha}\right)\rho^{1+\alpha} = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho = \rho. \end{aligned}$$

■

Com o Lema (7.1.1) que nos garante uma aproximação em ordem um por funções do tipo afim, podemos garantir regularidade Log-Lip para soluções de (96) no caso limite $p = n$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 7.2.5 (Regularidade Log-Lipschitz) *Seja u uma solução de viscosidade de* (96)*, onde $\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e $f \in L^n(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$. Existe constante $v_0 > 0$ que depende apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tal que se,*

$$\fint_{\mathrm{B}_r^+} |\Phi_F(x,y)|^n dx \leq v_0^n, \ \forall y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+, \forall r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{118}$$

então $u \in C^{0,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ e vale a seguinte a estimativa

$$\sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+} \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y| \ln(|x-y|^{-1})} \leq \mathrm{C}\left(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{L^n(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\right),$$

onde $\mathrm{C} > 0$ depende apenas de n, λ, Λ, μ_0, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$.

Demonstração: Assim como no Teorema 7.1.2 podemos supor sem perda de generalidade que $\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \leq 1$, $\|f\|_{L^n(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq 1$, onde $\eta > 0$ é a constante do Lema 7.2.4. Escolhamos $v_0 = \eta$.

Fixado $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$, afirmamos que existe sequência de funções afins $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ da forma

$$l_k(x) = a_k + b_k \cdot (x-y)$$

satisfazendo

$$\sup_{\mathrm{B}_{\rho^k}^+(y)} |u - l_k| \leq \rho^k, \tag{119}$$

onde ρ é o raio da semi-bola encontrado no Lema 7.2.4. Além disso, tal sequência deverá satisfazer para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \mathrm{C}\rho^k \ \text{ e } \ |b_{k+1} - b_k| \leq \mathrm{C}, \tag{120}$$

onde $\mathrm{C} > 0$ é uma constante universal. Com efeito, provemos tal afirmação por indução em k. Realmente, o caso $k = 1$ é o Lema (7.2.4). Agora supondo que vale para k, definamos a função

$$v_k(x) =: \frac{(u - l_k)(y + \rho^k x)}{\rho^k}, \ x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1,$$

vemos que v_k é solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F_k(D^2 v_k, x) = f_k(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_k(\mathrm{X},x) & =: & \rho^k F\left(\frac{1}{\rho^k}\mathrm{X}, y+\rho^k x\right) \\ f_k(x) & =: & \rho^k f(y+\rho^k x) \\ \beta_k(x) & =: & \beta(y+\rho^k x) \\ \gamma_k(x) & =: & \rho^k\gamma(y+\rho^k x) \\ g_k(x) & =: & g(y+\rho^k x) - \beta(y+\rho^k x)\cdot b_k - \gamma(y+\rho^k x) l_k(y+\rho^k x). \end{cases}$$

Observemos que F_k é um operador (λ,Λ)-elíptico e pela hipótese (118) é possível checar que

$$\fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_{F_k}(x)|^n dx = \fint_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |\Phi_F(x,y)|^n dx \le \eta^n.$$

Além disso, pela suposição sobre a norma L^n do termo fonte f temos,

$$\int_{\mathrm{B}_1^+} |f_k|^n dx = \int_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |f(z)|^n dz \le \|f\|^n_{L^n(\mathrm{B}_1^+)} \le \eta^n.$$

E também vemos que

$$[\beta_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} = \rho^{k\alpha}[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \le \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty,$$

$$[\gamma_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} = \rho^{k(1+\alpha)}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \le \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty$$

e

$$\begin{aligned} [g_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\le \rho^{k\alpha}[g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + \rho^{k\alpha}|b_k|[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + \rho^{k\alpha}\|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + \\ &+ \rho^{k\alpha}\|\gamma\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}[l_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} \\ &\le [g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \rho^{k\alpha}|b_k|[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \\ &+ \text{diam}\left(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}\right)^{1-\alpha}\rho^k|b_k|\|\gamma\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})} \\ &\le \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \rho^{k\alpha}|b_k|\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})}\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \\ &+ 2^{1-\alpha}\rho^k|b_k|\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty \end{aligned}$$

pois, $\beta,\gamma,g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$, $\|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})} \le \frac{3}{2}$ (por (119)) e $|b_k| \le |b_1| + \mathrm{C}(k-1)$ (por (120)) e portanto, $\rho^{k\alpha}|b_k| = \mathrm{o}(k)$ quando $k \to \infty$. Isso conclui que $\beta_k, \gamma_k, g_k \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ Assim, pela hipótese de indução de (105) temos que $\|v_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \le 1$ e daí estamos nas hipóteses do Lema 7.2.4 e aplicando o mesmo podemos encontrar função afim $\tilde{l}(x) = \tilde{a} + \tilde{b}\cdot x$ de tal sorte que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |v_k - \tilde{l}| \le \rho, \tag{121}$$

sendo as constantes $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ universalmente limitadas por uma constante positiva $\mathrm{C} > 0$ universal.

Definindo $a_{k+1} = a_k + \rho^k \tilde{a}$ e $b_{k+1} = b_k + \tilde{b}$ vemos pela limitação universal das constates $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ que

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \mathrm{C}\rho^k \ \text{ e } \ |b_{k+1} - b_k| \leq \mathrm{C}.$$

E pondo $l_{k+1}(x) = a_{k+1} + b_{k+1} \cdot (x - y)$ temos reescalonando a desigualdade (121),

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^{k+1}}(y)} |u - l_{k+1}| \leq \rho^{k+1}.$$

Com isso provamos o afirmado. Agora notemos que a sequencia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e consequentemente existe $a_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Agora provemos que $a_\infty = u(y)$. Com efeito, fixado $k \in \mathbb{N}$ vemos que a condição (119) também é válida para $\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}$ por densidade e assim

$$|u(y) - a_k| = |u(y) - l_k(y)| \overset{y\in\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}}{\leq} \sup_{\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}} |u - l_k| \leq \rho^k \to 0,$$

quando $k \to \infty$ pois, $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Isso prova que $a_k \to u(y)$ e assim pela unicidade do limite segue a igualdade afirmada. Por outro lado, de maneira análoga a prova do Teorema 7.1.2, temos que a estimativa entre termos consecutivos da sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em (120) implica para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|u(y) - a_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^k. \tag{122}$$

Também por (120), pondo $b_0 = 0$ temos para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|b_k| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |b_{j+1} - b_j| \leq \mathrm{C}k. \tag{123}$$

Vale a pena observar que na construção acima não temos garantia sobre a convergência da sequência $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e assim tal sequência pode ser convergente ou não.
Por fim, dado $r \in (0, \rho)$ podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ de tal maneira que $\rho^{k+1} < r \leq \rho^k$. Daí, por (119), (122) e (123),

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathrm{B}^+_r(y)} |u(x) - u(y)| &\leq \sup_{\mathrm{B}^+_r(y)} |u - l_k| + |u(y) - a_k| + |b_k| \sup_{x\in\mathrm{B}^+_r(y)} |x - y| \\
&\leq \sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |u - l_k| + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^k + \mathrm{C}kr \leq \rho^k + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^k + \mathrm{C}k\rho^k \\
&= \left(1 + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\right)\rho^k + \mathrm{C}k\rho^k \leq \mathrm{C}(\rho^k + k\rho^k) = \frac{\mathrm{C}}{\rho}\left(\frac{1}{k} + 1\right)k\rho^k,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sup_{x\in \mathrm{B}_r^+(y)} |u(x)-u(y)| &\overset{r>\rho^{k+1}}{\leq} \mathrm{C}kr \\ &\leq \mathrm{C}r\frac{\log r}{\log \rho} \\ &= \frac{-C}{-\log\rho} r\log r \\ &= -\tilde{\mathrm{C}}r\log r, \end{aligned} \tag{124}$$

onde usamos acima o fato de $r \leq \rho^k$ implicar, devido a função $t \to \log t$ ser crescente, que $\log r \leq \log \rho$, ou seja, $\frac{\log r}{\log \rho} \geq k$(pois $\rho < \frac{1}{2}$ e assim $\log \rho < 0$). Agora provemos de fato que $u \in C^{0,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$. De fato, sejam $x \in \mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}$ com $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$. Temos dois casos a serem estudados:

1º Caso: $e^{-1} \geq r = |x-y| \geq \rho$

Nesse caso, segue que $r\log(r^{-1}) \geq \rho\log(\rho^{-1})$ e assim

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|\log(|x-y|^{-1})} \leq \frac{\overbrace{2\|u\|_{L^\infty\left(\overline{\mathrm{B}^+_{1/2}}\right)}}^{\leq 2}}{\rho\log(\rho^{-1})} \leq \frac{2}{\rho(1-\rho)} = \mathrm{C}',$$

para $\mathrm{C}' = \frac{2}{\rho(1-\rho)}$, sendo que usamos acima a desigualdade clássica do logaritmo

$$\log(\rho^{-1}) \geq 1 - \frac{1}{\rho^{-1}} = 1-\rho.$$

2º Caso: $r = |x-y| < \rho$

Observemos que a estimativa (124) também vale em $\overline{\mathrm{B}_r^+(y)}$ e daí como $x \in \overline{\mathrm{B}_r^+(y)}$ segue de tal estimativa que

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|\log|x-y|^{-1}} \leq \frac{-\tilde{\mathrm{C}}r\log r}{|x-y|\log|x-y|^{-1}} = \tilde{\mathrm{C}}.$$

Portanto, fazendo $\mathrm{C} = \max\{\mathrm{C}', \tilde{\mathrm{C}}\}$, dos casos acima e [54, Teorema 2] concluímos que $u \in C^{0,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ e a estimativa desejada segue. ■

Observação 7.2.6 *A razão ao qual tomamos ρ no Lema 7.2.4 tal que $\rho < 1/e$ é devido no intervalo $(0, 1/e)$ a função $\omega(t) = t\log t$ é crescente.*

Observação 7.2.7 *Uma consequência interessante do Teorema 7.2.5 é que para operadores F com coeficientes constantes, ou seja, da forma $F = F(M)$, obtemos em certo sentido o resultado do Teorema 2.3.15 com o ganho que valer a Hölder regularidade para todo $\alpha \in (0,1)$.*

7.3 Caso $n < p < \infty$ - Regularidade ótima do gradiente

Nesta parte desenvolveremos o estudo da regularidade ótima de soluções para (96) na ótica do termo fonte $f \in L^p(\mathrm{B}_1^+)$ para parâmetros de integrabilidade $n < p < \infty$. A regularidade nessa parte será $C^{1,\nu}_{loc}$, onde $\nu \in (0,1)$ é uma constante ótima dependendo do expoente de regularidade ótimo $C^{1,\alpha}$ do problema homogêneo com coeficientes constantes e condições de bordo oblíquas (ver Teorema 2.3.16 para detalhes), bem como do parâmetro de integrabilidade do termo fonte. Explicitaremos agora mais um pouco sobre a constante ν. Tal constante será

$$\nu =: \min\left\{\alpha^-, 1 - \frac{n}{p}\right\},$$

onde $\alpha \in (0,1)$ é o expoente de Hölder da regularidade do gradiente dos termos β, γ e g e da regularidade $C^{1,\alpha}$ para soluções do problema (96) quando $f \equiv 0$ (isto é, problema homogêneo) e F tem coeficientes constantes como já citado acima. A simbologia acima de ν deve ser compreendida da seguinte forma

$$\begin{cases} \text{Se } 1 - \frac{n}{p} < \alpha \quad \text{então} \quad u \in C^{1,1-\frac{n}{p}}_{loc} \\ \text{S } 1 - \frac{n}{p} \geq \alpha \quad \text{então} \quad u \in C^{1,\theta}_{loc} \text{ para qualquer } 0 < \theta < \alpha. \end{cases}$$

Feita essa observação prosseguiremos de maneira similar as últimas duas seções. Inicialmente temos o seguinte

Lema 7.3.1 *Seja u uma solução de* (96), *onde β, γ, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Dado $\overline{\alpha} \in (0,\alpha)$ existem $\eta > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dependendo apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\overline{\alpha}$, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tais que, se*

$$\fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_F(x)|^n dx \leq \eta^n \quad e \quad \int_{\mathrm{B}_1^+} |f(x)|^p dx \leq \eta^p,$$

para algum $p > n$. Então existe uma função afim $l(x) = a + b \cdot x$ com coeficientes universalmente limitados, no seguinte sentido

$$|a| + |b| \leq C(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - \mu| \leq \rho^{1+\overline{\alpha}}.$$

Demonstração: A demonstração segue de maneira similar a do Lema 7.2.4. Fixemos $\delta > 0$ que determinaremos a posteriori. Pelo Lema 7.0.1 e o Teorema 2.3.20, podemos considerar h

solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \text{em} \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| \leq \delta. \tag{125}$$

Pelo Teorema 2.3.16 segue que $h \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}})$ e

$$\|h\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}). \tag{126}$$

Definamos $a = h(0)$ e $b = Dh(0)$. Por (126) segue que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_r} |h - l| \leq \mathrm{C} r^{1+\alpha}, \forall r \in \left(0, \frac{2}{3}\right). \tag{127}$$

Por fim, escolhamos ρ e δ pondo

$$\rho =: \min\left\{\left(\frac{1}{2\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{\alpha - \overline{\alpha}}}, \frac{1}{2}\right\} \ \text{ e } \ \delta = \frac{1}{2}\rho^{1+\overline{\alpha}}.$$

Observemos que essa escolha determina a constante $\eta > 0$ devido ao Lema 7.0.1. Para a limitação universal das constantes a e b temos diretamente de (126). Para o que falta, de (125) e (127) obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - l| &\leq \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |h - l| \leq \sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |h - l| \leq \delta + \mathrm{C}\rho^{1+\alpha} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho^{1+\overline{\alpha}} + \left(\frac{1}{2\rho^{\alpha - \overline{\alpha}}}\right)\rho^{1+\alpha} = \frac{1}{2}\rho^{1+\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}\rho^{1+\overline{\alpha}} = \rho^{1+\overline{\alpha}}, \end{aligned}$$

O que encerra a prova do Lema. ■

Com esse lema de interação temos todas as ferramentas necessárias para provar o seguinte

Teorema 7.3.2 (Regularidade $C^{1,\alpha}$ ótima) *Seja u solução de viscosidade do problema* (96) *onde $\beta, \gamma, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$, $f \in L^p(\mathrm{B}^+_1) \cap C^0(\mathrm{B}^+_1)$ para $p > n$ e*

$$\nu = \min\left\{\alpha^-, 1 - \frac{n}{p}\right\}$$

Então, existe constante positiva v_0 dependendo apenas de n, λ, Λ, μ_0, p, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$

tal que se

$$\fint_{B_r^+} |\Phi_F(x,y)|^n dx \leq v_0^n,\ \forall y \in B_{\frac{1}{2}}^+,\ \forall r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{128}$$

então $u \in C^{1,\nu}\left(\overline{B_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ *e ainda vale a estimativa*

$$\|u\|_{C^{1,\nu}\left(\overline{B_{\frac{1}{2}}^+}\right)} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{L^p(B_1^+)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{T_1})}),$$

onde $C > 0$ *depende apenas de* n, λ, Λ, μ_0, p, α, $\overline{\alpha}$, $\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{T_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{T_1})}$.

Demonstração: Como nas seções acima podemos assumir sem perda de generalidade que $\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq 1$, $\|f\|_{L^p(B_1^+)} \leq \eta$ e $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{T_1})} \leq 1$, onde η é a constante do Lema 7.3.1 e ponhamos $v_0 = \eta$. Fixado $y \in T_{\frac{1}{2}}$, afirmamos que existe sequência de funções afins $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da forma $l_k(x) = a_k + b_k(x-y)$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\sup_{B_{\rho^k}^+(y)} |u - l_k| \leq \rho^{k(1+\nu)} \tag{129}$$

e

$$|a_{k+1} - a_k| \leq C\rho^{k(1+\nu)} \text{ e } |b_{k+1} - b_k| \leq C\rho^{k\nu}, \tag{130}$$

onde ρ é o raio no Lema 7.3.1 e C é uma constante universal. De fato, provaremos por indução em k. O caso $k = 1$ é simplesmente a aplicação do Lema 7.3.1. Agora supondo que vale para algum $k \in \mathbb{N}$, definamos a seguinte função

$$v_k(x) =: \frac{(u - l_k)(y + \rho^k x)}{\rho^{k(1+\nu)}}, x \in B_1^+ \cup T_1.$$

Pela hipótese de indução vale (129) e daí segue que $\|v_k\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq 1$. Além disso, v_k é solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F_k(D^2 v_k, x) = f_k(x) & \text{em} \quad B_1^+ \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad T_1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_k(X, x) &=: \rho^{k(1-\nu)} F\left(\frac{1}{\rho^{k(1-\nu)}} X, y + \rho^k x\right) \\ f_k(x) &=: \rho^{k(1-\nu)} f(y + \rho^k x) \\ \beta_k(x) &=: \beta(y + \rho^k x) \\ \gamma_k(x) &=: \rho^k \gamma(y + \rho^k x) \\ g_k(x) &=: \rho^{-k\nu}(g(y + \rho^k x) - \beta(y + \rho^k x) \cdot b_k - \gamma(y + \rho^k x) l_k(y + \rho^k x)). \end{cases}$$

Segue da definição de F_k que é um operador (λ,Λ)-elíptico e pela hipótese (128) é possível checar que

$$\fint_{\mathrm{B}_1^+} |\Phi_{F_k}(x)|^n dx = \fint_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |\Phi_F(x,y)|^n dx \leq \eta^n.$$

Além disso, segue também pela definição de f_k que

$$\int_{\mathrm{B}_1^+} |f_k|^p dx = \int_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |f(z)|^p dz \leq \|f\|^p_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta^p.$$

E também vemos

$$[\beta_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} = \rho^{k\alpha}[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \leq \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty,$$

$$[\gamma_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} = \rho^{k(1+\alpha)}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} \leq \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty$$

e para g_k temos que

$$\begin{aligned}
[g_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\leq \rho^{k(\alpha-\nu)}([g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + |b_k|[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}} + \|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}}) + \\
&+ \rho^{k(\alpha-\nu)}[l_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}}\|\gamma\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})} \\
&\leq \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \rho^{k(\alpha-\nu)}|b_k|\|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \\
&+ 2^{1-\alpha}\rho^{k(\alpha-\nu)}|b_k|\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty,
\end{aligned}$$

uma vez que, como na prova do Teorema 7.2.5,

$$\|l_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})} \leq \frac{3}{2} \text{ e } \rho^{k(\alpha-\nu)}|b_k| = \mathrm{o}(k)$$

quando $k \to \infty$, pois $\alpha \geq \nu$. O que garante que $\beta_k, \gamma_k, g_k \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Logo, podemos usar o Lema 7.3.1 para garantir a existência de uma função afim $\tilde{l}(x) = \tilde{a} + \tilde{b}\cdot x$ de tal sorte que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |v_k - \tilde{l}| \leq \rho^{1+\nu}, \tag{131}$$

sendo as constantes $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ universalmente limitadas por uma constante positiva $\mathrm{C} > 0$ universal. Definindo $a_{k+1} = a_k + \rho^{k(1+\nu)}\tilde{a}$ e $b_{k+1} = b_k + \rho^{k\nu}\tilde{b}$ vemos pela limitação universal das constates $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ que

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \mathrm{C}\rho^{k(1+\nu)} \;\text{ e }\; |b_{k+1} - b_k| \leq \mathrm{C}\rho^{k\nu}.$$

E pondo $l_{k+1}(x) = a_{k+1} + b_{k+1}\cdot(x-y)$ temos reescalonando a desigualdade (131),

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^{k+1}}(y)} |u - l_{k+1}| \leq \rho^{(k+1)(1+\nu)}.$$

o que prova que vale a afirmação para $k+1$. Daí, segue por indução a existência da sequência de funções afins $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as condições (129) e (130). Agora por (130) obtemos que as sequências $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Neste caso existem os limites $a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_k$ e $b_\infty = \lim_{k\to\infty} b_k$. Como no Teorema 7.2.5 é possível ver que $a_\infty = u(y)$. Além disso, de maneira similar ao mesmo teorema citado, é possível ver que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale as seguintes ordens de convergências das sequências $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$|u(y) - a_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{1+\nu}}\rho^{k(1+\nu)} \text{ e } |b_\infty - b_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{\nu}}\rho^{k\nu}. \tag{132}$$

Agora dado $r \in (0,\rho)$, escolhamos $k \in \mathbb{N}$ de tal sorte que ocorra $\rho^{k+1} < r \leq \rho^k$. Por (129) e (132) obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in \mathrm{B}_r^+(y)} |u(x) - u(y) - b_\infty(x-y)| &\leq \sup_{x\in \mathrm{B}_r^+(y)} |u(x) - l_k(x)| + |u(y) - a_k| + \\
&+ \sup_{x\in \mathrm{B}_r^+(y)} |(b_k - b_\infty)\cdot(x-y)| \\
&\leq \sup_{\mathrm{B}_{\rho^k}^+(y)} |u - l_k| + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{1+\nu}}\rho^{k(1+\nu)} + |b_k - b_\infty| r \\
&\leq \rho^{k(1+\nu)} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{1+\nu}}\rho^{k(1+\nu)} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{\nu}}\rho^{k\nu}\rho^k,
\end{aligned}$$

onde usamos que $r \leq \rho^k$ daí podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in \mathrm{B}_r^+(y)} |u(x) - u(y) - b_\infty(x-y)| &\leq \left(1 + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{1+\nu}} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^{\nu}}\right)\rho^{k(1+\nu)} \\
&\leq \frac{1}{\rho^{1+\nu}}\left(1 + \frac{2\mathrm{C}}{1-\rho^{\nu}}\right)\rho^{(k+1)(1+\nu)} \\
&\leq \mathrm{C}r^{1+\nu}.
\end{aligned} \tag{133}$$

Como essa estimativa vale para cada $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ e sendo mais preciso, temos que $b_\infty = b_\infty(y)$. De (133) e por estimativas interiores para o gradiente [54, Seção 4] segue que $u \in C^1\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$, onde $b_\infty(y) = Du(y)$. E de maneira similar a prova do Teorema 7.1.2, vê se que, de fato, $u \in C^{1,\nu}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ com a estimativa desejada. ∎

Observação 7.3.3 *Fazendo um ajuste na prova do Teorema* 7.3.2 *prova-se que* $u \in C^{1,\alpha'}_{loc}$. *Nessa linha de raciocínio, tal teorema acrescenta um ganho grande de precisão quando estimamos com a melhor regularidade possível dentro das hipóteses impostas.*

7.4 Caso BMO - Regularidade $Log - Lip$ do gradiente e estimativas de Schauder

Nessa parte, estudaremos o módulo de continuidade de soluções do problema (56) sob o cenário do termo fonte $f \in p - BMO(\mathrm{B}_1^+) \cap L^p(\mathrm{B}_1^+)$ para parâmetros reais $p \geq n - \varepsilon_0$ sendo ε_0 a constante de Escauriaza. Diferentemente das seções anteriores, inicialmente trabalharemos com operadores com coeficientes constantes. Neste caso, teremos que u será C^1_{loc} com o gradiente com módulo de continuidade Log-Lipschitz. Mais precisamente $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ como na definição abaixo.

Definição 7.4.1 *Uma função u pertence ao espaço $C^{k,Log-Lip}(\Omega)$ para $k \in \mathbb{N}$, se $u \in C^k(\Omega)$ e $D^\alpha u \in C^{0,Log-Lip}(\Omega)$ para todo multi-índice α de comprimento k.*

Como dito acima trataremos o problema (96) com coeficientes contantes, mais precisamente, estudaremos o problema

$$\begin{cases} F(D^2u) = f & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_1 \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases} \tag{134}$$

onde assumiremos nessa parte a seguinte hipótese:

(BMO1) Para qualquer matriz $M \in Sym(n)$ tal que $F(M) = 0$ temos que o problema perturbado

$$\begin{cases} F(D^2h + M) = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

admite soluções $h \in C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right) \cap C^0\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \cup \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)$ para algum $\tilde{\alpha} \in (0, \alpha]$, onde $\alpha \in (0,1)$ é tal que $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$, e com estimativa

$$\|h\|_{C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \mathrm{C}^*\left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)}\right)$$

para alguma constante universal $\mathrm{C}^* > 0$.

Observemos que tal hipótese sempre é verdadeira quando supormos que F é convexo pelo Teorema 2.3.17.

Observação 7.4.2 *Observemos que assumindo a hipótese (**BMO1**) temos que a seguinte condição também é satisfeita para qualquer $c \in \mathbb{R}$: Para qualquer matriz $M \in Sym(n)$ tal que $F(M) = c$ então o problema*

$$\begin{cases} F(D^2h + M) = c & \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases} \tag{135}$$

é tal que $h \in C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right) \cap C^0\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \cup \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)$ para algum $\tilde{\alpha}$ e com estimativa

$$\|h\|_{C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}}^*\left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)}\right),$$

onde $\tilde{\mathrm{C}}_*$ depende apenas de C^* e $|c|$. De fato, definindo $\tilde{F}(\mathrm{X}) = F(\mathrm{X}) - c$ temos que $\tilde{F}$ têm *as mesmas propriedades estruturais que F como, por exemplo, elipticidade uniforme como os mesmos coeficientes de elipticidade. Daí se $M \in Sym(n)$ é tal que $F(M) = c$ e h é solução de viscosidade para* (135)*, então h também é solução de viscosidade para*

$$\begin{cases} \tilde{F}(D^2h + M) = 0 & \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

*com $\tilde{F}(M) = 0$. Daí, pela condição (**BMO1**) segue que $h \in C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)$ com estimativa*

$$\|h\|_{C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \tilde{\mathrm{C}}^* \left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)} \right),$$

mas soluções desse problema acima são soluções de (135) *e assim segue o afirmado.*

Precisaremos nessa parte como nas seções anteriores de uma versão de lema de aproximação parecido com o Lema 7.0.1. Porém, nesse caso pelo interesse do termo fonte estar em p-BMO devemos assumir a condição da semi-norma p-BMO ser pequena. Em resumo temos o seguinte

Lema 7.4.3 (Aproximação para operadores de coeficientes constantes) *Seja u solução de viscosidade de* (134) *com $u = \varphi$ em $\partial \mathrm{B}^+_1 \setminus \mathrm{T}_1$ para $\varphi \in C^0(\partial \mathrm{B}^+_1 \setminus \mathrm{T}_1)$ tal que $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial \mathrm{B}^+_1 \setminus \mathrm{T}_1)} \leq \mathfrak{C}_1$ para alguma constante positiva $\mathfrak{C}_1$ onde $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e tal que $\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \mathfrak{C}_2$ sendo $\mathfrak{C}_2 > 0$ constante e $p \in [n - \varepsilon_0, \infty)$ (ε_0 constante de Escauriaza). Dado $\delta > 0$, existe $\eta > 0$ dependendo apenas de n, λ, Λ, p, δ tal que se*

$$\|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)} \leq \eta,$$

então se h é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2h) = (f)_1 & \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \textit{em} \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

então

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| \leq \delta.$$

Prova: A demonstração tem parte os argumentos semelhante ao do Lema 7.0.1, porém apresentaremos devido questões didáticas e na sutileza da mudança de alguns argumentos. Para isso, suponhamos por absurdo que a tese do lema seja falsa. Então existe uma constante positiva δ_0 tal que a tese do lema não seja satisfeita. Assim, existem sequências de funções $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que u_k e h_k satisfazem no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} F(D^2u_k) = f_k(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta\cdot Du_k + \gamma u_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1 \\ u_k = \varphi_k & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_1^+ \setminus \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F(D^2h_k) = (f_k)_1 & \text{em} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \\ \beta\cdot Dh_k + \gamma h_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h_k = u_k & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

onde $\|\varphi_k\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1^+\setminus\mathrm{T}_1)} \le \mathfrak{C}_1$, $\|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \le \mathfrak{C}_2$ e $\|f_k\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} \le \frac{1}{k}$, sendo que

$$\sup_{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+} |u_k - v_k| > \delta_0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{136}$$

Notemos que por termos um controle da semi-norma p-BMO também temos pela Proposição **??** que

$$\|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} \le \mathrm{C}_p\|f_k\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} \le \mathrm{C}_p\frac{1}{k}$$

donde pela Estimativa ABP(Lema 2.3.13) obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} &\le \|\varphi_k\|_{L^\infty(\partial\mathrm{B}_1^+\setminus\mathrm{T}_1)} + \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0)\cdot(\|f_k\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}) \\ &\le \mathfrak{C}_1 + \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0)\cdot(\|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}) \\ &\le C(n,\varepsilon_0,p,\lambda,\Lambda,\mu_0,\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2),\ \forall k\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{137}$$

Daí, usando o Teorema 2.3.15, garantimos que existe $\alpha' \in (0,1)$ com dependência apenas dos parâmetros n,λ, Λ e μ_0 tal que $u \in C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)$ e ainda vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)} &\le \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)})(\|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_k\|_{L^{n-\varepsilon_0}(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}) \\ &\le \mathrm{C}(\|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)}) \\ &\le \mathrm{C}(\|u_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f_k\|_{L^p(\mathrm{B}_1^+)} + \|g_k\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}), \end{aligned} \tag{138}$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)})$. Assim, por (137) e (138) segue que

$$\|u_k\|_{C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+}\right)} \le C(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,p,\varepsilon_0,\|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)},\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2), \forall k\in\mathbb{N}.$$

Nesse caso, obtemos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $C^{0,\alpha'}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}}\right)$, donde por esta limitação segue que tal sequência é equicontínua e pontualmente limitada. Nessa linha, também temos o mesmo para a sequência $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e por os operadores F_k serem (λ,Λ)-elípticos segue que a sequência $(F_k)_{\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses de equicontinuidade e limitação pontual em conjuntos compactos de Sym(n). Assim, podemos usar o Teorema de Ascoli-Arzelà e obter subsequências de funções $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e de operadores $(F_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $u_{k_j}\to u_\infty$ em $L^\infty\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}}\right)$, $g_{k_j}\to g_\infty$ em $L^\infty(\overline{\mathrm{T}_1})$ e $F_{k_j}\to F_\infty$ em conjuntos compactos de Sym(n), onde F_∞ é um operador (λ,Λ)-elíptico. Ademais, como $\|f_{k_j}\|_{L^{\mathrm{B}^+_1}}\le\frac{1}{k_j}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ segue que a sequência (f_{k_j}) é de Cauchy em $L^p(\mathrm{B}^+_1)$ e daí existe $f_\infty\in L^p(\mathrm{B}^+_1)$ tal que $f_{k_j}\to f_\infty$ em $L^p(\mathrm{B}^+_1)$. Daí, para toda $\varphi\in C^2(\mathrm{B}_r(x_0))$ com $\mathrm{B}_r(x_0)\subset\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}$,

$$\begin{aligned}|F_{k_j}(D^2\varphi(x))-f_{k_j}(x)-F_\infty(D^2\varphi(x))-(f_\infty)_1| &\le |F_{k_j}(D^2\varphi(x))-F_\infty(D^2\varphi(x))|+\\ &+ |f_{k_j}(x)-(f_{k_j})_1|+\\ &+ |(f_{k_j})_1-(f_\infty)_1|,\end{aligned}$$

donde pelas hipóteses acima sobre f_{k_j} e a convergência $F_{k_j}\to F_\infty$ em conjuntos compactos de $Sym(n)$ segue que

$$\lim_{j\to\infty}\|F_{k_j}(D^2\varphi(\cdot))-f_{k_j}(\cdot)-F_\infty(D^2\varphi(\cdot))-(f_\infty)_1\|_{L^p(\mathrm{B}_r(x_0))}=0.$$

Portanto, pelo Lema de Estabilidade 2.3.21 podemos concluir que u_∞ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F_\infty(D^2u_\infty)=(f_\infty)_1 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\\ \beta\cdot Du_\infty+\gamma u_\infty=g_\infty(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}.\end{cases}$$

Por fim, definindo $w_{kj}:=u_\infty-h_{k_j}$ obtemos pelo Principio de Comparação Teorema 2.3.18 que

$$\begin{cases} w_{k_j}\in S\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda,(f_\infty)_1-(f_{k_j})_1\right) & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\\ \beta\cdot Dw_{k_j}+\gamma w_{k_j}=g_\infty-g_{k_j} & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1\\ w_{k_j}=u_\infty-u_{k_j} & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\setminus\mathrm{T}_{\frac{7}{8}},\end{cases}$$

donde novamente pela Estimativa ABP 2.3.13 vemos que

$$\begin{aligned}\|w_{k_j}\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} &\le \|u_\infty-u_{k_j}\|_{L^\infty\left(\partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\setminus\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)}+\mathrm{C}\Bigg(\|(f_\infty)_1-(f_{k_j})_1\|_{L^p(\mathrm{B}^+_1)}+\\ &+ \|g_\infty-g_{k_j}\|_{L^\infty\left(\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}\right)}\Bigg)\to 0,\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$. Logo, $h_{k_j} \to u_\infty$ em $\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}}$, o que é um absurdo devido a (97). Isso encerra a prova do lema. ■

Com essa ferramenta de aproximação podemos garantir uma aproximação quadrática para soluções normalizadas com semi-norma p-BMO pequena.

Lema 7.4.4 *Seja u solução normalizada de*

$$\begin{cases} F(D^2u + \tilde{M}) = f & \textit{em} \quad \mathrm{B}^+_1 \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \textit{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

*onde β, γ, $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ para alguma constante $\alpha \in (0,1)$, $\tilde{M} \in Sym(n)$ é tal que $F(\tilde{M}) = 0$ e assuma a condição (**BMO1**). Existem $\eta > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dependendo apenas de n, p, λ, Λ, μ_0, α, C^*, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tais que, se*

$$\|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)} \leq \eta,$$

para algum $p \geq n - \varepsilon$. Então existe um polinômio quadrático $P(x) = a + b \cdot x + \frac{1}{2}x^tMx$ com coeficientes universalmente limitados, no seguinte sentido

$$|a| + |b| + \|M\| \leq C(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_\rho} |u - P| \leq \rho^2.$$

Ademais, ainda temos que $F(M + \tilde{M}) = (f)_1$.

Demonstração: Fixemos $\delta > 0$ que escolheremos adiante. Pelo Lema 7.4.3 e o Teorema 2.3.20, podemos considerar h solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F(D^2h + \tilde{M}) = (f)_1 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \text{em} \quad \partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}} |u - h| \leq \delta. \tag{139}$$

Pela hipótese (**BMO1**) e a Observação 2.3.16 segue que $h \in C^{2,\tilde{\alpha}}(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}})$ e

$$\|h\|_{C^{2,\tilde{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha_0, \|\beta\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}). \tag{140}$$

Definamos $a = h(0)$, $b = Dh(0)$ e $M = D^2h(0)$. Por (140) segue que

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |h - P| \leq \mathrm{C}r^{2+\tilde{\alpha}}, \forall r \in \left(0, \frac{2}{3}\right). \tag{141}$$

Agora façamos as seguintes escolhas das constantes ρ e δ pondo

$$\rho = \min\left\{\left(\frac{1}{2\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}}, \frac{1}{2}\right\} \text{ e } \delta = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Com essa escolha fica determinada a constante $\eta > 0$ devido ao Lema 7.4.3. Sobre limitação universal das constantes a, b e M, temos garantida pela estimativa (140). Por fim, de (139) e (141) obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - P| &\leq \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |h - P| \leq \sup_{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |h - P| \leq \delta + \mathrm{C}\rho^{2+\tilde{\alpha}} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho^2 + \left(\frac{1}{2\rho^{\tilde{\alpha}}}\right)\rho^{2+\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2 = \rho^2, \end{aligned}$$

encerrando a prova do resultado desejado. ∎

Para o principal resultado dessa parte precisaremos das seguintes hipóteses:

(**A**) (**Regularidade do termo fonte**) Assumimos no problema (134) que o termo fonte f pertence a $p - BMO(\mathrm{B}_1^+) \cap L^p(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ para $p \in [n - \varepsilon_0, \infty)$.

(**B**) (**Regularidade dos dados de bordo**) Também assumimos que $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e existem constantes $\alpha_\beta, \alpha_\gamma \in (0, \alpha]$ tais que

$$\sup_{\substack{x,z \in \overline{\mathrm{T}_r(y)} \\ x \neq z}} \frac{|D\beta(x)|}{|x - z|^\alpha} = \mathrm{O}(r^{-\alpha_\beta}) \quad \text{e} \quad \sup_{\substack{x,z \in \overline{\mathrm{T}_r(y)} \\ x \neq z}} \frac{|D\gamma(x)|}{|x - z|^\alpha} = \mathrm{O}(r^{-\alpha_\gamma}), \quad \forall y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}, \tag{142}$$

quando $r \to 0$, onde O é a notação de Landau.

Agora apresentaremos um dos resultados principais desta seção.

Teorema 7.4.5 (Regularidade $C^{1,Log-Lip}$ - coeficientes constantes) *Seja u uma solução de viscosidade para* (134). *Assuma as hipóteses estruturais* (***BMO1***), (A) *e* (B). *Então,* $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ *e a seguinte estimativa ocorre*

$$\sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y) - Du(y) \cdot (x - y)|}{|x - y|^2 \log(|x - y|^{-1})} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* n, λ, Λ, μ_0, α_0, $\mathrm{C}_{\beta\gamma}$, p, C^*, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$.

Demonstração: De forma similar as seções anteriores, podemos supor sem perda de generalidade que $\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} \leq 1$, $\|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta$ e $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq 1$, onde η é a constante do Lema

7.4.4. Fixado $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ afirmamos que existe sequência de polinômios quadráticos $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da forma $P_k(x) = a_k + b_k \cdot (x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^t M_k(x-y)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $F(M_k) = (f)_1$,

(ii) $\sup\limits_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |u - P_k| \leq \rho^{2k}$,

(iii) $|a_{k-1} - a_k| + \rho^{k-1}|b_{k-1} - b_k| + \rho^{2(k-1)}|M_{k-1} - M_k| \leq \mathrm{C}\rho^{2(k-1)}$,

para todo $k \geq 0$, onde $P_{-1} = P_0 = \dfrac{1}{2}(x-y)^t M_0(x-y)$ para $M_0 \in Sym(n)$ é tal que $F(M_0) = (f)_1$ e ρ é o raio da semi-bola do Lema 7.4.4. Com efeito, provaremos o caso por indução em k. O caso $k = 0$ é satisfeito de forma clara. Agora suponhamos que vale o desejado para algum k e definamos a seguinte função auxiliar

$$v_k(x) =: \frac{(u - P_k)(y + \rho^k x)}{\rho^{2k}},\ x \in \mathrm{B}^+_1 \cup \mathrm{T}_1.$$

Notemos que v_k é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2 v_k + M_k) = f_k(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_1 \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde $f_k(x) =: f(y + \rho^k x)$, $\beta_k(x) =: \beta(y + \rho^k x)$, $\gamma_k(x) =: \rho^k \gamma(y + \rho^k x)$ e g_k pondo

$$g_k(x) =: \rho^{-k}(g(y + \rho^k x) - \beta(y + \rho^k x) \cdot DP_k(y + \rho^k x) - \gamma(y + \rho^k x)P_k(y + \rho^k x)).$$

Observemos que pela hipótese de indução segue que de (ii) implica que$\|v_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} \leq 1$, além de que pela definição de f_k,

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)} &= \sup_{x_0 \in \Omega, r>0} \left(\fint_{\mathrm{B}_r(x_0)\cap \mathrm{B}^+_1} |f_k(x) - (f_k)_{x_0,\rho}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x_0 \in \mathrm{B}^+_1, r>0} \left(\fint_{\mathrm{B}_{r\rho^k}(y+\rho^k x_0)\cap\Omega} |f(z) - (f)_{y+\rho^k x_0, r\rho^k}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

donde

$$\|f_k\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)} \leq \|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)} \leq \eta. \tag{143}$$

Observemos também que $\beta_k, \gamma_k \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$, uma vez que, $\beta, \gamma \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ (pela condição $(\mathbf{B})$) e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Com o intuito de garantir as hipóteses do Lema (7.4.4) é suficiente mostra que $g_k \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Para isso, para qualquer índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ vemos pela Regra da Cadeia para derivadas de aplicações compostas que

$$
\begin{aligned}
D_i g_k(x) &= D_i g(y+\rho^k x) - D_i\beta(y+\rho^k x)\cdot DP_k(y+\rho^k x) - \\
&- \beta(y+\rho^k x)\cdot D_i DP_k(y+\rho^k x) \\
&- D_i\gamma(y+\rho^k x)P_k(y+\rho^k x) - \gamma(y+\rho^k x)D_i P_k(y+\rho^k x),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
[D_i g_k]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\leq [D_i g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}}} + [D_i\beta(y+\rho^k\cdot)\cdot DP_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \\
&+ [\beta(y+\rho^k\cdot)\cdot D_i(DP_k(y+\rho^k\cdot))]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + [D_i\gamma(y+\rho^k\cdot)P_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} + \\
&+ [\gamma(y+\rho^k\cdot)D_i P_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}}. \qquad (144)
\end{aligned}
$$

Agora, analisaremos cada uma das parcelas do lado direito de (144). De fato, por $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ segue que $[D_i g]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}}} \leq \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} < \infty$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
[D_i\beta(y+\rho^k\cdot)\cdot DP_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\leq [D_i\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}}}\left(\rho^{k\alpha}\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})}\right) + \\
&+ 2\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})} \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1} \\ x\neq z}} \frac{|D_i\beta(y+\rho^k z)|}{|x-z|^\alpha} \\
&= \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\left(\rho^{k\alpha}\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})}\right) + \\
&+ 2\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})}\rho^{k\alpha} \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}} \\ \overline{x}\neq\overline{z}}} \frac{|D_i\beta(\overline{z})|}{|\overline{x}-\overline{z}|^\alpha} \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

uma vez que, pelo item (iii) da hipótese de indução,

$$
\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})} \leq \frac{1}{1-\rho}\mathrm{C} + \mathrm{Co}(k) \text{ quando } k \to \infty,
$$

devido $|M_k| \leq \mathrm{C}k + |M_0|$, $|b_k| \leq \sum_{j=1}^k |b_j - b_{j-1}| \leq \mathrm{C}\frac{1}{1-\rho}$ e

$$
\sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}} \\ \overline{x}\neq\overline{z}}} \frac{|D_i\beta(\overline{z})|}{|\overline{x}-\overline{z}|^\alpha} \leq \mathrm{C}_\beta\rho^{-k\alpha_\beta} \quad \text{para} \quad k \gg 1
$$

(por (142) na condição $(\mathbf{B})$). E assim,

$$
\|DP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}})}\rho^{k\alpha} \sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_{\rho^k(y)}} \\ \overline{x}\neq\overline{z}}} \frac{|D_i\beta(\overline{z})|}{|\overline{x}-\overline{z}|^\alpha} \leq 2\mathrm{C}_\beta\rho^{k(\alpha-\alpha_\beta)}\left(\frac{1}{1-\rho}\mathrm{C} + \mathrm{Co}(\rho^k k)\right) \to 0, \quad (145)
$$

quando $k \to \infty$, em particular, o lado esquerdo de (145) é limitado para todo $k \in \mathbb{N}$.

Similarmente, temos também que,

$$[\beta(y+\rho^k\cdot)\cdot D_i(DP_k(y+\rho^k\cdot))]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} \leq \rho^{k\alpha}[\beta]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}}|M_k| \leq 2\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\mathrm{o}(k),$$

quando $k\to\infty$, uma vez que, pelo item (iii) segue que $|M_k|\leq \mathrm{C}k+|M_0|$. Para o terceiro termo do lado direito de (144),

$$\begin{aligned}[D_i\gamma(y+\rho^k\cdot)P_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\leq \rho^{k\alpha}[D_i\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}}\|P_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}+\\ &+ 2\|P_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}\sup_{\substack{x,z\in\overline{\mathrm{T}_1}\\ x\neq z}}\frac{|D_i\gamma(y+\rho^k x)|}{|x-z|^\alpha}\\ &\leq \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}+2\mathrm{C}_\gamma\rho^{k(\alpha-\alpha_\gamma)} \quad \text{para} \quad k\gg 1 \quad \text{(por (142))}.\end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}[\gamma(y+\rho^k\cdot)D_iP_k(y+\rho^k\cdot)]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_1}} &\leq \rho^{k\alpha}[\gamma]_{0,\alpha,\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)}}\|D_iP_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{T}_{\rho^k}(y)})}+\\ &+ \rho^{k(1-\alpha)}\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\mathrm{C}(n)|M_k|\\ &\leq 2\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\|DP_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k}(y))}+\\ &+ \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}\mathrm{C}(n)\mathrm{o}(k), \text{ quando } k\to\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $g_k\in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Daí estamos nas hipóteses do Lema 7.4.4 e assim garantimos que existe polinômio quadrático $\tilde{P}$ da forma $\tilde{P}(x)=\tilde{a}+\tilde{b}\cdot x+\frac{1}{2}x^t\tilde{M}x$ com coeficientes universalmente limitados com constante $\mathrm{C}>0$ e tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+}|v_k-\tilde{P}|\leq\rho^2 \tag{146}$$

e daí definindo $a_{k+1}=a_k+\rho^{2k}\tilde{a}$, $b_{k+1}=b_k+\rho^k\tilde{b}$ e $M_{k+1}=M_k+\tilde{M}$ por (146) segue que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^{k+1}}(y)}|u-P_{k+1}|\leq\rho^{2(k+1)},$$

e com isso segue a condição (ii) para $k+1$. Além disso, a condição (i) também é garantida pelo Lema 7.4.4. Por fim,

$$|a_k-a_{k+1}|+\rho^k|b_k-b_{k+1}|+\rho^{2k}|M_k-M_{k+1}|\leq\rho^{2k}|\tilde{a}|+\rho^k\rho^k|\tilde{b}|+\rho^{2k}|\tilde{M}|\leq\mathrm{C}\rho^{2k}$$

garantindo a condição (iii) para $k+1$. Isso prova o afirmado por indução.
Com essa afirmação notemos que a condição (iii) garante que as sequências $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy e além disso, pondo $a_\infty=\lim_{k\to\infty}a_k$ e $b_\infty=\lim_{k\to\infty}b_k$ temos que $a_\infty=u(y)$. Com efeito, fixado $k\in\mathbb{N}$ notemos que a condição (ii) também vale para $\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}$ por densidade.

Portanto, por essa observação segue que

$$|u(y) - a_k| \leq |u(y) - P_k(y)| \overset{y \in \overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}}{\leq} \sup_{\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)}} |u - P_k| \leq \rho^{2k} \to 0 \tag{147}$$

quando $k \to \infty$. Daí, $a_k \to u(y)$ e pela unicidade do limite segue o desejado.
Por outro lado, pela condição (iii) temos as seguintes ordens de convergências das sequências (a_k) e (b_k)

$$|u(y) - a_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^2}\rho^{2k} \ \text{ e } \ |b_\infty - b_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^k \tag{148}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, apesar de não termos garantia de convergência da sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, a condição (iii) garante ainda que

$$|M_k| \leq \mathrm{C}k \tag{149}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, fixado $r \in (0, \rho)$ (e assim $\rho \leq 1/2 < \sqrt{1/e}$) escolhamos $k \in \mathbb{N}$ de tal maneira que $\rho^{k+1} < r \leq \rho^k$. Por (148) e (149) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in \mathrm{B}^+_r(y)} |u(x) - u(y) - b_\infty(x-y)| &\leq \sup_{x\in \mathrm{B}^+_r(y)} |u - P_k| + |u(y) - a_k| + \\
&+ \sup_{x\in \mathrm{B}^+_r(y)} |(b_k - b_\infty)\cdot(x-y)| + \\
&+ \sup_{x\in \mathrm{B}^+_r} |M_k(x-y)\cdot(x-y)| \\
&\leq \sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^k}(y)} |u - P_k| + \frac{C}{1-\rho^2}\rho^{2k} + |b_k - b_\infty| r + |M_k| r^2
\end{aligned}$$

e assim por (ii) e $r < \rho^k$ segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in \mathrm{B}^+_r(y)} |u(x) - u(y) - b_\infty(x-y)| &\leq \rho^{2k} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^2}\rho^{2k} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^k r + \mathrm{C}kr^2 \\
&\leq \rho^{2k} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^2}\rho^{2k} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\rho^{2k} + Ck\rho^{2k} \\
&\leq \left(1 + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho^2} + \frac{\mathrm{C}}{1-\rho}\right)\rho^{2k} + \mathrm{C}k\rho^{2k} \\
&\leq \mathrm{C}(\rho^{2k} + k\rho^{2k}) = \frac{\mathrm{C}}{\rho^2}\left(\frac{1}{k} + 1\right) k\rho^{2(k+1)} \\
&\leq \mathrm{C}k\rho^{2(k+1)} \leq -\mathrm{C}r^2 \log r,
\end{aligned} \tag{150}$$

onde na última passagem procedemos de maneira inteiramente análoga a demonstração do Teorema 7.2.5 na estimativa (124). Daí, segue pela arbitrariedade de $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ que $b_\infty = b_\infty(y)$,

(150) e [54, Teorema 3] que $u \in C^1\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ com $Du(y) = b_\infty(y)$. Ademais, de maneira análoga ao Teorema 7.2.5 segue que $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ com a estimativa da tese desse resultado satisfeita. ∎

Segue imediatamente do Teorema 7.4.5 o seguinte

Corolário 7.4.6 *Sob as hipóteses do Teorema 7.4.5 garantimos que* $u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ *para qualquer* $\alpha \in (0,1)$.

Observação 7.4.7 *A respeito do Teorema temos os seguintes aspectos que vale a pena ser pontuados:*

i. *Sobre o problema* (134) *com respeito ao Teorema 7.4.5. Nesse caso, fazendo paralelo com o artigo [54] Teixeira para a regularidade interior, é necessário de uma versão do Teorema 2.3.17 para operadores com coeficientes variáveis e assim proceder semelhante ao caso de coeficientes constantes do Teorema* (7.4.5)*. Mais adiante mostraremos que dentro de certas condições tal versão é verdadeira.*

ii. *Notemos que a técnica empregada no Teorema* (7.4.5) *com leves ajustes pode ser adaptada para a prova do Teorema* (**??**) *levando em consideração a necessidade de uma Teoria* $W^{2,p}$ *para o problema* (82).

7.4.1 Estimativas BMO em proveito da estratégia do operador recessão

Agora apresentaremos uma versão do Teorema 7.4.5 sob o contexto assintótico, mais precisamente remontando a análise tangencial garantiremos uma versão um pouco melhor de tal teorema. Tais ideias que vão ser apresentadas aqui foram inspiradas no livro de Pimentel [45].

Para o que segue, precisaremos da seguinte hipótese estrutural:

(BMO)$^\sharp$ O operador F do problema (96) é tal que $F^\sharp$ cumpre a condição de **estimativas** $C^{2,\alpha}$ **a priori** se dada $g_0 \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{2}{3}}}\right)$ soluções do problema

$$\begin{cases} F^\sharp(D^2h) &= 0 & \text{em} & \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}, \\ \beta \cdot Dh + \gamma h &= g & \text{sobre} & \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

são de classe $C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)$ com estimativa

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \le \mathcal{C}^\sharp\left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)}\right),$$

para alguma constante universal $\mathcal{C}^\sharp > 0$.

Inicialmente precisaremos do seguinte lema de iteração.

Lema 7.4.8 (Aproximação quadrática) *Seja* u *solução de viscosidade normalizada para*

$$\begin{cases} F_\tau(D^2u) &= f(x) & \textit{em} & \mathrm{B}^+_1, \\ \beta \cdot Du + \gamma u &= g & \textit{sobre} & \mathrm{T}_1. \end{cases}$$

onde $f \in (p - BMO(\mathrm{B}_1^+)) \cap L^p(\mathrm{B}_1^+) \cap C^0(\mathrm{B}_1^+)$ *para* $p \in [n - \varepsilon_0, \infty)$, $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. *Assuma a hipótese* ***(BMO)***$^\sharp$. *Então existem* $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\tau_0 > 0$ *e* $\eta > 0$ *constantes dependendo apenas de* n, p, λ, Λ, μ_0, α, $\mathcal{C}^\sharp$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *tais que, se*

$$\|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} \leq \eta \quad e \quad \tau \leq \tau_0$$

então, existe um polinômio quadrático da forma $P(x) = a + b \cdot x + \frac{1}{2}x^t Mx$ *com coeficientes universalmente limitados, isso é, existe uma constante* $C > 0$ *que depende apenas de* n, λ, Λ, μ_0, α, $\mathcal{C}^\sharp$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$, $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *e* $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ *tais que*

$$|a| + |b| + \|M\| \leq \mathrm{C}.$$

tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - P| \leq \rho^2.$$

Além disso, vale que $F^\sharp(M) = 0$.

Prova: Seja $\delta > 0$ constante a ser escolhida a posteriori. Aplicando o Lema 3.1.5 e o Teorema 2.3.20 temos que existem $\tau_0 \in (0, 1)$, $\eta > 0$ e h solução de viscosidade para

$$\begin{cases} F^\sharp(D^2h) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+, \\ \beta \cdot Dh + \gamma h &= g \quad \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h &= u \quad \text{em} \quad \partial\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+ \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \end{cases}$$

satisfazendo

$$\sup_{\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+} |u - h| \leq \delta. \tag{151}$$

Agora pela hipótese **(BMO)**$^\sharp$ que $h \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{\frac{2}{3}}^+})$ com estimativa

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{2}{3}}^+}\right)} \leq \mathcal{C}^\sharp \left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}}^+\right)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}}\right)} \right).$$

E como no Lema 7.4.4 segue que

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{2}{3}}^+}\right)} \leq \mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha, \mathcal{C}^\sharp, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}). \tag{152}$$

e tomando $a = h(0)$, $b = Dh(0)$ e $M = D^2(0)$ temos para essa constante acima que

$$\sup_{\mathrm{B}_r^+} |h - P| \leq \mathrm{C}r^{2+\alpha}, \ \forall r \in \left(0, \frac{2}{3}\right). \tag{153}$$

Agora escolhendo

$$\rho = \min\left\{ \left(\frac{1}{2\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \sqrt{\frac{1}{e}} \right\} \ \text{e} \ \delta = \frac{1}{2}\rho^2$$

segue que fica bem determinado τ_0 e η. Além disso, por (151), (153) e as escolhas acima segue que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - P| \leq \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |u - h| + \sup_{\mathrm{B}_\rho^+} |h - P| \leq \delta + \mathrm{C}\rho^{2+\alpha} = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2 = \rho^2.$$

Por fim, a limitação universal das contantes de P segue de (152). Isso encerra a prova. ■

Com isso temos todos os ingredientes necessários para enunciar e demonstrar o seguinte

Teorema 7.4.9 (Regularidade $C^{1,Log-Lip}$ - assintótico) *Seja u solução de viscosidade para* (134). *Assumamos as hipóteses estruturais **(BMO)**$^\sharp$, $(\mathbf{A})$ e $(\mathbf{B})$. Então, $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+}\right)$ e ainda vale a seguinte estimativa*

$$\sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y) - Du(y)\cdot(x-y)|}{|x-y|^2 \log(|x-y|^{-1})} \ \leq \ \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$$

com C *constante positiva que depende apenas de n, λ, Λ, α,μ_0, p, $\mathcal{C}^\sharp$, $\mathrm{C}_{\beta\gamma}$, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$.*

Demonstração: De fato, para $\kappa \in (0,1)$ constante a ser determinado posteriormente, definamos a seguinte função auxiliar $w(x) =: \kappa u(x)$ tal que w é uma solução de viscosidade normalizada para

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F_\tau(D^2 w) & = & \tilde{f}(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+, \\ \beta \cdot Dw + \gamma w & = & \tilde{g} & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1. \end{array} \right.$$

onde $\tau =: \kappa$, $\tilde{f}(x) =: \kappa f(x)$ e $\tilde{g}(x) =: \kappa g(x)$. Agora, determinaremos a constante κ. Ela deve ser escolhida de forma que $\max\left\{\tau, \mathrm{C}_p|\mathrm{B}_1^+|\|\tilde{f}\|_{\mathrm{BMO}(\mathrm{B}_1^+)}\right\} \leq \min\{\tau_0, \eta\}$, onde τ_0 e η são as constantes do Lema 7.4.8 e C_p vem da Proposição **??**. Finalmente, estabeleceremos o resultado para w, que será o suficiente para garantir a tese do Teorema. Fixado $y \in \mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$, afirmamos que existe uma sequência de polinômios quadráticos $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da forma $P_k(x) = a_k + b_k\cdot(x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^t M_k(x-y)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $F^\sharp(M_k) = 0$,

(ii) $\sup_{\mathrm{B}_{\rho^k}^+(y)} |u - P_k| \leq \rho^{2k}$,

(iii) $|a_{k-1}-a_k|+\rho^{k-1}|b_{k-1}-b_k|+\rho^{2(k-1)}|M_{k-1}-M_k|\leq \mathrm{C}\rho^{2(k-1)}$,

para todo $k\geq 1$, onde $P_{-1}=0$ e ρ é o raio da semi-bola do Lema 7.4.8. De fato, provemos tal fato por indução em k. O caso $k=1$ segue do Lema 7.4.8. Agora supondo que vale para algum $k\geq 1$, definamos a função auxiliar

$$w_k(x) =: \frac{(w-P_k)(y+\rho^k x)}{\rho^{2k}}$$

Observemos que w_k satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} F_\tau(D^2 w_k + M_k) = \tilde{f}_k(x) & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta_k\cdot Dv_k+\gamma_k v_k = g_k(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde $f_k(x) =: \tilde{f}(y+\rho^k x)$, $\beta_k(x) =: \beta(y+\rho^k x)$, $\gamma_k(x) =: \rho^k\gamma(y+\rho^k x)$ e $\tilde{g}_k$ pondo

$$\tilde{g}_k(x) =: \rho^{-k}(\tilde{g}(y+\rho^k x)-\beta(y+\rho^k x)\cdot DP_k(y+\rho^k x)-\gamma(y+\rho^k x)P_k(y+\rho^k x)).$$

Claramente, $\|w_k\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)}\leq 1$, $\|\tilde{f}_k\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)}\leq\|\tilde{f}\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)}\leq\eta$. Além disso, escrevendo $F_k(M)=F(M+M_k)$ segue que

$$F_k^\sharp(M)=F^\sharp(M+M_k).$$

E assim temos que o problema homogêneo associado a $F_k^\sharp$ tem estimativas $C^{2,\alpha}$ a priori. Analogamente ao Teorema (7.4.5) verifica-se que $\beta_k,\gamma_k,g_k\in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Logo, podemos usar o Lema 7.4.8 e obter polinômio quadrático $\tilde{P}$ da forma $\tilde{P}(x)=\tilde{a}+\tilde{b}\cdot x+\frac{1}{2}x^t\tilde{M}x$ com coeficientes universalmente limitados com constante $\mathrm{C}>0$ e tal que

$$\sup_{\mathrm{B}_\rho^+}|w_k-\tilde{P}|\leq\rho^2 \tag{154}$$

e daí definindo $a_{k+1}=a_k+\rho^{2k}\tilde{a}$, $b_{k+1}=b_k+\rho^k\tilde{b}$ e $M_{k+1}=M_k+\tilde{M}$ por (154) segue que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_{\rho^{k+1}}(y)}|w-P_{k+1}|\leq\rho^{2(k+1)},$$

e com isso segue a condição (ii) para $k+1$. Além disso, a condição (i) segue imediatamente pelo mesmo Lema. Por fim,

$$\begin{aligned} |a_k-a_{k+1}|+\rho^k|b_k-b_{k+1}|+\rho^{2k}|M_k-M_{k+1}| &\leq \rho^{2k}|\tilde{a}|+\rho^k\rho^k|\tilde{b}|+\rho^{2k}|\tilde{M}| \\ &\leq \mathrm{C}\rho^{2k} \end{aligned}$$

garantindo a condição (iii) para $k+1$. Isso prova o afirmado por indução.
Seguindo analogamente ao Teorema 7.4.5 concluímos que $w\in C^{1,Log-Lip}\left(\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}\right)$ com estima-

tiva

$$\sup_{\substack{x,y\in \overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)-Du(y)\cdot(x-y)|}{|x-y|^2\log(|x-y|^{-1})} \quad \leq \quad -\mathrm{C}\mathcal{D}|x-y|^2\log|x-y|,$$

donde obtemos que $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}}\right)$ com a estimativa desejada. Isso encerra a prova do teorema. ■

Observação 7.4.10 *O fato de $\rho \leq 1/2$ acima garante, em particular, $\rho < \sqrt{1/e}$ e assim como nos passos anteriores podemos garantir a regularidade desejada no usando que a função $\omega(t) = t^2\log\left(\frac{1}{2}\right)$ é crescente em $\left(0, \sqrt{1/e}\right)$.*

Agora daremos uma aplicação do Teorema 7.4.9. Mais precisamente, apresentaremos um Teorema de regularidade fraca das funções $C^{1,Log-Lip}$ para o problema (134). Referimos a tal teorema como de regularidade fraca ao Teorema de densidade de soluções mais regulares na classe de soluções de viscosidade. Isso se deve por causa da melhor regularidade do problema (134), sem adicionar hipóteses estruturais como convexidade para F, quando $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ é a regularidade $C^{1,\alpha}$ (Ver Teorema 2.3.16) desde que tenhamos um comportamento do termo fonte f. Feita essa observação temos o seguinte

Teorema 7.4.11 (Densidade fraca) *Seja u uma C^0-solução de viscosidade de* (134). *Assuma que $f \in (p-BMO(\mathrm{B}^+_1)) \cap L^p(\mathrm{B}^+_1) \cap C^0(\mathrm{B}^+_1)$, $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ com $\gamma \leq 0$ e β cumprindo a condição de bordo oblíquo com constante $\mu_0 > 0$. Então para cada $\delta > 0$, existe uma sequência de funções$(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^{1,Log-Lip}_{loc}(\mathrm{B}^+_1) \cap S(\lambda-\delta, \Lambda+\delta, f)$ que converge localmente uniformemente para a função u.*

Demonstração: De maneira análoga a prova do Teorema **??**, basta aplicar o Teorema 7.4.9 em vez do Corolário 3.2.6 com os devidos ajustes. ■

7.4.2 Teoria Schauder para operadores com coeficientes variáveis

Nesta parte, desenvolveremos estimativas Schauder para o problema (96). É importante frisar que na Teoria de regularidade para tal problema é conhecido regularidade $C^{2,\alpha}$ para operadores com coeficientes constantes, Teorema 2.3.17, provada por Li e Zhang em [37] e um caso particular deste para o problema de Neumann no trabalho de Milakis e Silvestre [43]. Motivado pelas estimativas interiores $C^{2,\alpha}$ para operadores elípticos totalmente não-lineares com coeficientes variáveis de Caffarelli em [14] e os trabalhos acima citados apresentaremos a seguir estimativas $C^{2,\alpha}$ para o problema (96).

Para o objetivo traçado acima, precisaremos da seguinte hipótese estrutural

(#) (Estimativas do tipo C^{2,α_0}) Dada $g_0 \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})$, assumiremos que o problema

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & \text{in} \quad \mathrm{B}^+_1 \\ \beta\cdot Dh + \gamma h = g_0(x) & \text{on} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

admite soluções $h \in C^{2,\alpha_0}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)$ com estimativa

$$\|h\|_{C^{2,\alpha_0}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq \mathrm{C}^*\left(\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_1\right)} + \|g_0\|_{C^{1,\alpha_0}\left(\overline{\mathrm{T}_1}\right)}\right)$$

para alguma constante universal $\mathrm{C}^* > 0$

Apresentaremos no que segue uma lema de aproximação tendo como objetivo um processo iterativo para garantir estimativas do tipo Schauder para o problema (96). A prova abaixo é inspirada em [15, Lemma 7.9] e [8, Lemma 3.5].

Lema 7.4.12 (Lema de aproximação) *Sejam $\varepsilon \in (0,1)$ e u uma solução de viscosidade normalizada para o problema* (96)*, onde $\beta, \gamma, g \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})$. Assuma que $\|\psi_F\|_{L^n(\mathrm{B}^+_1)} \leq \varepsilon$ e a hipótese* **(#)** *são satisfeitas. Então, existem funções $h \in C^2\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}}}\right)$ e $\varphi \in C\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}}}\right)$ tais que $\|h\|_{C^2(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}}})} \leq \mathrm{C}$(para $\mathrm{C} > 0$ dependendo apenas de n, λ,Λ, μ_0, α, C^*, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})}$), $u - h \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, \varphi\right)$ e*

$$\|u-h\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}})} + \|\varphi\|_{L^n(\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}})} \leq \mathrm{C}'(\varepsilon^\theta + \|f\|_{L^n(\mathrm{B}^+_1)} + \|g\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)}),$$

onde $\theta \in (0,1)$ depende apenas de n, λ, Λ e μ_0.

Prova: Consideremos h uma solução de viscosidade do seguinte problema

$$\begin{cases} F(D^2h, 0) = 0 & \text{in} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ h = u & \text{on} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dh + \gamma h = 0 & \text{on} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}. \end{cases} \tag{155}$$

Observemos que a existência de h é garantida devido ao Teorema 2.3.20. Agora pela hipótese **(#)** tem-se que h é de classe C^{2,α_0} e para $v \in \left(0, \frac{7}{8}\right)$ e escalonamento próprio

$$\|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-v}\right)} + v\|Dh\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\delta}\right)} + v^2\|D^2h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-v}\right)} \leq \mathrm{C}, \tag{156}$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha_0, \mathrm{C}^*, \|\beta\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ é uma constante positiva.
Doravante, a partir de u e h podemos definir a função auxiliar $w = u - h$ e verificar que tal função satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} w \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, \varphi\right) & \text{in} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ w = 0 & \text{on} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ \beta \cdot Dw + \gamma w = 0 & \text{on} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

onde $\varphi(x) = f(x) - F(D^2h(x), x)$. Notemos que φ é contínua em $\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}$, uma vez que D^2h, f e

F são contínuas. Contudo, podemos obter pela Estimativa ABP (2.3.13) que

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} &\leq \|w\|_{\left(\partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} + \mathrm{C}\left(\|\varphi\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)}\right)\\
&\leq \|w\|_{\left(\partial \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} + \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} + \right.\\
&+ \left.\|F(D^2h(\cdot),\cdot)\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)}\right), \qquad (157)
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0)$ é uma constante positiva.

Observemos também que por h ser solução no sentido da viscosidade de (155) e é de classe C^{2,α_0} em $\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}$ então é uma solução clássica nessa mesma semi-bola. Em particular,

$$F(D^2h(x), 0) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}.$$

Feitas essas observações, estudaremos o segundo membro da estimativa (157). Como h é solução de (155) e pela hipótese sobre a oscilação dos coeficientes obtemos em $\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}$,

$$\begin{aligned}
\|F(D^2h(\cdot),\cdot)\|_{L^n\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} &= \left(\int_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}} |F(D^2h(x), x) - \underbrace{F(D^2h(x), 0)}_{=0}|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\leq \left(\int_{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}} |\psi_F(x)(1 + \|D^2h(x)\|)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\leq \left(1 + \|D^2h(x)\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)}\right)\|\psi_F\|_{L^n\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)}\\
&\leq \left(1 + \|D^2h(x)\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)}\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

donde por (156),

$$\|F(D^2h(\cdot),\cdot)\|_{L^n\left(\mathrm{B}_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} \leq \mathrm{C}\varepsilon(1 + \upsilon^{-2}) \leq \mathrm{C}\varepsilon\upsilon^{-2}, \qquad (158)$$

uma vez que, $0 < \upsilon < 1$ e $0 < \mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \alpha_0, \mathrm{C}^*, \|\beta\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})})$.

Por outro lado, pela Hölder regularidade no Teorema (2.3.15) pode-se inferir que $w \in C^{\alpha'}(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}})$ para algum $\alpha' \in (0, 1)$ dependendo apenas de n, λ, Λ e μ_0. Daí, por $w = 0$ em

$\partial B^+_{\frac{7}{8}} \setminus T_{\frac{7}{8}}$ segue que

$$
\begin{aligned}
\|w\|_{\left(\partial B^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\setminus T_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} &\leq \left([w]_{\alpha',\overline{B^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}}}\right)\upsilon^{\alpha'} \\
&\leq C\upsilon^{\alpha'}(1+\|f\|_{L^n(B^+_1)}+\|g\|_{L^\infty(T_1)}), \qquad (159)
\end{aligned}
$$

onde $0 < C = C(n,\lambda,\Lambda,\mu_0)$ e usamos [15, Proposition 4.14]. Por fim, tomando $\upsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2+\alpha'}}$ e $\theta = \frac{\alpha'}{2+\alpha'}$, usando (157) e (159),

$$
\begin{aligned}
\|w\|_{L^\infty\left(B^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} + \|\varphi\|_{L^n\left(B^+_{\frac{7}{8}-\upsilon}\right)} &\leq C\Big(\|f\|_{L^n(B^+_1)}+\|g\|_{L^\infty(T_1)}+ \\
&+ \upsilon^{-2}\varepsilon + \upsilon^{\alpha'}(1+\|f\|_{L^n(B^+_1)}+\|g\|_{L^\infty(T_1)})\Big) \\
&\leq C'(\varepsilon^\theta+\|f\|_{L^n(B^+_1)}+\|g\|_{L^\infty(T_1)}),
\end{aligned}
$$

onde $C' = C(n,\lambda,\Lambda,\mu_0,\alpha_0,C^*,\|\beta\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{T_1})},\|\gamma\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{T_1})})$ é uma constante positiva e isso encerra a prova. ∎

Para o próximo resultado precisaremos da seguinte hipótese estrutural

(H1) (**Estimativas do tipo C^{2,α_0} para o problema transladado por uma matriz**) Dadas uma função $g_0 \in C^{1,\alpha_0}(\overline{T_1})$ e uma matriz $M \in Sym(n)$ tal que $F(M,0) = 0$, assumiremos que o problema

$$
\begin{cases}
F(D^2h+M,0) = 0 & \text{in} \quad B^+_1 \\
\beta\cdot Dh + \gamma h = g_0(x) & \text{on} \quad T_1,
\end{cases}
$$

admite soluções $h \in C^{2,\alpha_0}\left(\overline{B^+_{\frac{2}{3}}}\right)$ com estimativa

$$
\|h\|_{C^{2,\alpha_0}\left(\overline{B^+_{\frac{2}{3}}}\right)} \leq C^\sharp\left(\|h\|_{L^\infty\left(B^+_1\right)} + \|g_0\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{T_1}\right)}\right)
$$

para alguma constante universal $C^\sharp > 0$.

(H2) (**Regularidade sobre os dados do problema** (96))Assumiremos que o termo fonte f pertence ao espaço $C^{0,\alpha}(B^+_1)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso, também faremos a suposição que $\beta \in C^{1,\alpha_\beta}(\overline{T_1})$, $\gamma \in C^{1,\alpha_\gamma}(\overline{T_1})$ $g \in C^{1,\alpha_g}(\overline{T_1})$ com as seguintes relações dos expoentes e Hölder continuidade $\alpha_\beta > \alpha$, $\alpha_\gamma > \alpha$ e $\alpha_g > \alpha$. Além disso, suponhamos que β e γ são tais que para todo $r \in (0,1)$

$$
\|\beta\|_{L^\infty(T_r)} \leq C_\beta r^{1+\alpha_\beta} \quad \text{e} \quad \|\gamma\|_{L^\infty(T_r)} \leq C_\gamma r^{1+\alpha_\gamma},
$$

onde C_β e C_γ são constantes positivas.

Observação 7.4.13 *Notemos que a condição estrutural (**H1**) é satisfeita quando F é um ope-*

rador côncavo/convexo e $\beta, \gamma \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\mathrm{T}_1})$ devido ao Teorema 2.3.16.

Teorema 7.4.14 *Seja u solução no sentido da viscosidade de*

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &= f \quad \textit{in } \mathrm{B}^+_{r_0} \\ \beta \cdot Du + \gamma\, u &= g(x) \quad \textit{on } \mathrm{T}_{r_0}, \end{cases}$$

onde F é um operador (λ, Λ)- elíptico tal que $F(0,0) = 0$, bem como $f(0) = 0$ e considere uma constante $0 < \alpha < \min\{\alpha_0, \alpha_\beta, \alpha_\gamma, \alpha_g\}$. Assuma as hipóteses estruturais **(H1)-(H2)** *e que existes constantes $\mathrm{C}_0 > 0$ e $\mathrm{C}_1 > 0$ tais que*

$$\left(\fint_{\mathrm{B}^+_r} |\psi_F(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \mathrm{C}_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha} \quad e \quad \left(\fint_{\mathrm{B}^+_r} |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \mathrm{C}_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}, \forall r \in (0, r_0].$$

Então, u é de classe $C^{2,\alpha}$ na origem. Mais precisamente, existe uma função polinomial P de grau 2 tal que :

(i) $\|u - P\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}^+_1} \cap \mathrm{B}_r)} \leq \mathrm{C}'' \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\alpha}$ *para todo $r \in (0, r_1]$.*

(ii) $|DP(0)| + \|D^2P(0)\| \leq \mathrm{C}''$.

(iii) $\mathrm{C}'' \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_1)} + \mathrm{C}_1 + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$,

onde $1 < \mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu_0, \mathrm{C}^\sharp, \alpha, \|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}, \|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})})$ e $r_1 = \check{\mathrm{C}} = \mathrm{C}^{-1} r_0$

Observação 7.4.15 *A hipótese que $F(0,0) = f(0)$ não é restritiva, para mais detalhes confira [15, Chapter 8].*

Demonstração: Como em [37, Lemma 6.3] podemos supor sem perda de generalidade que $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$. Além disso, provaremos que existem constantes $\varepsilon \in (0,1)$ e $\delta > 0$ dependendo apenas de n, λ, Λ, C_γ, C_β, $\mathrm{C}^\sharp$, α, $\|\beta\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ e $\|\gamma\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$ tal que se u é solução de (96) normalizada, $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \varepsilon$ e

$$\left(\fint_{\mathrm{B}^+_r} |\psi_F(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \delta r^\alpha \quad \text{e} \left(\fint_{\mathrm{B}^+_r} |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \delta r^\alpha, \forall r \in (0,1], \tag{160}$$

então existe polinômio quadrático P cumprindo (i) e (ii) com $r_1 = 1$. O resultado segue por escalonamento (cf. [15, Theorem 8.1]).

Afirmamos que existem constantes universais $\rho \in (0,1)$, $\tilde{\mathrm{C}} > 0$ e uma sequência de polinômios quadráticos $(P_k)_{k \geq -1}$ da forma

$$P_k(x) = a_k + b_k \cdot x + \frac{1}{2} x^t \mathrm{M}_k x$$

tal que para todo $k \geq 0$ valem as seguintes três propriedades:

I. $F(\mathrm{M}_k, 0) = 0$.

II. $\|u - P_k\|_{L^\infty(\overline{\mathrm{B}^+_{\rho^k}})} \leq \rho^{k(2+\alpha)}$.

III. $|a_k - a_{k-1}| + \rho^{k-1}|b_k - b_{k-1}| + \rho^{2(k-1)}\|\mathrm{M}_k - \mathrm{M}_{k-1}\| \leq \tilde{\mathrm{C}} \rho^{2(k-1)(2+\alpha)}$,

onde $P_0 \equiv P_{-1} \equiv 0$.

Realmente, escolhamos $\rho \in (0,1)$ tal que

$$\rho^{\alpha} \leq \frac{1}{2},\ \rho \leq \frac{49}{64} \text{ e } 3\mathrm{C}^{\sharp}\rho^{\alpha_0} \leq \rho^{\alpha}.$$

A partir de ρ tomemos $\varepsilon \in (0,1)$ tal que

$$10\mathrm{C}'\varepsilon^{\theta} \leq \rho^{2+\alpha},$$

onde C' e θ são as constantes do Lema 7.4.12. Agora escolhamos $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2^{1-\frac{1}{n}}(1+\tilde{\mathrm{C}})\omega_n^{\frac{1}{n}}},$$

sendo ω_n o volume da bola unitária B_1 em $\mathbb{R}^n$ e a constante $\tilde{\mathrm{C}}$ será tomada de tal forma que

$$20\tilde{\mathrm{C}}\max\{\mathrm{C}_{\beta}, \mathrm{C}_{\gamma}\} \leq \varepsilon.$$

Assim ficam determinadas as constantes e são de caráter universal. A prova da afirmação a respeito da sequência de polinômios será feita por argumento de indução . Para tal fim, notemos que o caso $k=0$ é evidente devido $P_{-1} \equiv P_0 \equiv 0$, $F(0,0) = 0$ e u é normalizada. Agora suponhamos que tenhamos construído $P_0, \cdots, P_k$ satisfazendo I-III. Devemos mostrar que existe P_{k+1} cumprindo essas mesmas condições. Para isso, definamos a função auxiliar

$$v_k(x) = \frac{(u-P_k)(\rho^k x)}{\rho^{k(2+\alpha)}},\ x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1.$$

Notemos que por hipótese de indução, $\|v_k\|_{L^{\infty}(\mathrm{B}_1^+)} \leq 1$. Agora notemos que v_k é solução no sentido da viscosidade de

$$\left\{\begin{array}{rcll} F_k(D^2 v_k, x) &=& f_k(x) & \text{in } \mathrm{B}_1^+ \\ \beta_k \cdot Dv_k + \gamma_k v_k &=& g_k(x) & \text{on } \mathrm{T}_1, \end{array}\right. ,$$

onde

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_k(\mathrm{M},x) &=:& \frac{1}{\rho^{k\alpha}}\left(F\left(\rho^{k\alpha}\mathrm{M} + \mathrm{M}_k, \rho^k x\right) - F(\mathrm{M}_k, \rho^k x)\right), \\ f_k(x) &=:& \frac{1}{\rho^{k\alpha}}\left(f(\rho^{k\alpha}x) - F(\mathrm{M}_k, \rho^k x)\right), \\ \beta_k(x) &=:& \beta(\rho^k x), \\ \gamma_k(x) &=:& \rho^k\gamma(\rho^k x), \\ g_k(x) &=:& \frac{1}{\rho^{k(1+\alpha)}}[g(\rho^k x) - \beta_k(x)\cdot DP_k(\rho^k x) - \gamma(\rho^k(x))P_k(\rho^k x)]. \end{array}\right.$$

Por construção e a hipótese estrutural **(H1)** temos que $F_k(0,x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{B}_1^+ \cup \mathrm{T}_1$ e que o problema associado ao operador F_k também cumpre a condição **(H1)** com a mesma constante $\mathrm{C}^{\sharp}$(em particular, vale a condição **(#)** para F_k com a mesma constante $\mathrm{C}^{\sharp}$). Ademais, temos que

$$
\begin{aligned}
\psi_{F_k}(x) &= \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \frac{|F_k(M,x)-F_k(M,0)|}{1+\|M\|} \\
&\leq \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \left| \frac{F(\rho^{k\alpha}M+M_k,\rho^k x)-F(M_k,\rho^k x)-F(\rho^{k\alpha}M+M_k,0)+F(M_k,0)}{\rho^{k\alpha}(1+\|M\|)} \right| \\
&\leq \rho^{-k\alpha}\psi_F(\rho^k x) \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \left(\frac{1+\|\rho^{k\alpha}M+M_k\|+1+\|M_k\|}{1+\|M\|} \right) \\
&\leq \rho^{-k\alpha}\psi_F(\rho^k x) \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \left(\frac{\rho^{k\alpha}\|M\|}{1+\|M\|} + 2\frac{1+\|M_k\|}{1+\|M\|} \right) \\
&\leq \rho^{-k\alpha}\psi_F(\rho^k x) \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \left(1 + 2\frac{1+\|M_k\|}{1+\|M\|} \right) \\
&\leq 2\rho^{-k\alpha}\psi_F(\rho^k x) \sup_{M\in \text{Sym}(n)} \left(1 + \frac{1+\|M_k\|}{1+\|M\|} \right) \\
&\leq 2\rho^{-k\alpha}\psi_F(\rho^k x)(1+\|\mathrm{M}_k\|)
\end{aligned}
$$

donde pela condição III valer para todo $i \geq k$ segue que

$$
\|\mathrm{M}_k\| \leq \frac{\tilde{\mathrm{C}}}{1-\rho^\alpha} \leq \tilde{\mathrm{C}} \tag{161}
$$

e assim por esses dois últimos fatos,

$$
\|\psi_{F_k}\|_{L^n(\mathrm{B}_1^+)} \leq 2(1+\tilde{\mathrm{C}})\rho^{-k\alpha}\rho^{-k}\|\psi_F\|_{L^n(\mathrm{B}_{\rho^k}^+)} \leq 2^{1-\frac{1}{n}}(1+\tilde{\mathrm{C}})\delta\omega_n^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon, \tag{162}
$$

onde acima usamos a condição (160). Ademais, usando a limitação da norma da oscilação de F, a condição I da hipótese de indução é válida para k e a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
|f_k(x)| &\leq \rho^{-k\alpha}(|f(\rho^k x)|+|F(M_k,\rho^k x)|) \\
&= \rho^{-k\alpha}(|f(\rho^k x)|+|F(M_k,\rho^k x)-\underbrace{F(M_k,0)}_{=0}|) \\
&= \rho^{-k\alpha}(|f(\rho^k x)|+\psi_F(\rho^k x)(1+\|M_k\|))
\end{aligned}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\|f_k\|_{L^n(\mathrm{B}_1^+)} &\leq \rho^{-k(1+\alpha)}(\|f\|_{L^n(\mathrm{B}_{\rho^k}^+)}+(1+\tilde{\mathrm{C}})\|\psi_F\|_{L^n(\mathrm{B}_{\rho^k}^+)}) \\
&\leq 2^{1-\frac{1}{n}}\omega_n^{\frac{1}{n}}\delta(1+\tilde{\mathrm{C}}) \leq \varepsilon,
\end{aligned} \tag{163}
$$

onde usamos na primeira desigualdade a limitação de $\|M_k\|$ obtida em (161).

Por fim, claramente $\beta_k, \gamma_k, g_k \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$ e pelas condição sobre β, γ e g tem-se

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)} &\leq \rho^{-k(1+\alpha)}[\|g\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} + \|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})}\|P_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} + \\ &+ \|\beta\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})}\|DP_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})}]. \end{aligned} \tag{164}$$

Mas pela hipótese sobre g temos para todo $x \in \mathrm{T}_{\rho_k}$, que podemos escrever $x = \rho^k y$ para algum $y \in \mathrm{T}_1$ e assim pela Desigualdade do Valor Médio

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(\rho^k y)| = |g(\rho^k y) - \underbrace{g(0)} = 0| \\ &\leq \sup_{z\in\overline{\mathrm{T}_1}} |Dg(\rho^k z)||\rho^k x - 0| \leq \sup_{z\in\overline{\mathrm{T}_1}} |Dg(\rho^k z)|\rho^k. \end{aligned} \tag{165}$$

Contudo, pela condição de $Dg(0) = 0$ e $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})$,

$$\sup_{z\in\overline{\mathrm{T}_1}} |Dg(\rho^k z)| = \sup_{z\in\overline{\mathrm{T}_1}} |Dg(\rho^k z) - \underbrace{Dg(0)}_{=0}| \leq \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \sup_{z\in\overline{\mathrm{T}_1}} |\rho^k z - 0|^\alpha \leq \rho^{k\alpha}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$$

e assim em (165) obtemos que $|g(x)| \leq \rho^{k(1+\alpha)}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}$. Pela arbitrariedade de $x \in \mathrm{T}_{\rho^k}$,

$$\|g\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} \leq \rho^{k(1+\alpha)}\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}. \tag{166}$$

Também pela hipótese estrutural (**H2**) segue que

$$\|\beta\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} \leq \mathrm{C}_\beta \rho^{k(1+\alpha_\beta)} \quad \text{e} \quad \|\gamma\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} \leq \mathrm{C}_\gamma \rho^{k(1+\alpha_\gamma)}. \tag{167}$$

Assim, por (166) e (167) obtemos em (164)

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)} &\leq \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} + \mathrm{C}_\gamma \rho^{k(\alpha_\gamma-\alpha)}\|P_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} + \\ &+ \mathrm{C}_\beta \rho^{k(\alpha_\beta-\alpha)}\|DP_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})}. \end{aligned} \tag{168}$$

Agora pela hipótese III valer podemos estimar limitar o polinômio P_k bem como a norma do gradiente e obter que

$$\|P_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} \leq \frac{3\tilde{\mathrm{C}}}{1-\rho^{2+\alpha}} \text{ e } \|DP_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_{\rho^k})} \leq \frac{2\tilde{\mathrm{C}}}{1-\rho^{1+\alpha}}$$

donde obtemos em (168), a condição sobre a norma $\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})} \leq \varepsilon$ e a escolha da constante $\tilde{\mathrm{C}}$,

$$\|g_k\|_{L^\infty(\mathrm{T}_1)} \leq \varepsilon + 40\tilde{\mathrm{C}} \max\{\mathrm{C}_\beta, \mathrm{C}_\gamma\} \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \tag{169}$$

Assim estamos nas hipóteses do Lema 7.4.12 e daí garantimos a existência de C' e θ(e com isso as constantes acima ficam bem definidas) bem como de $h \in C^2(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}}})$ tal que

$$\|v_k - h\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_{\frac{3}{4}})} \leq \mathrm{C}'(\varepsilon^\theta + 4\varepsilon) \leq 5\mathrm{C}'\varepsilon^\theta \leq \frac{1}{2}\rho^{2+\alpha}, \tag{170}$$

onde usamos na duas últimas desigualdades (163) e (169) bem como o fato de $\varepsilon, \theta \in (0,1)$ e as escolhas de ε e ρ.

Doravante, recordemos que no Lema 7.4.12, h satisfaz no sentido da viscosidade

$$\begin{cases} F_k(D^2h, 0) = 0 & \text{in} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ h = v_k & \text{on} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \setminus \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ \beta_k \cdot Dh + \gamma_k h = 0 & \text{on} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases} \tag{171}$$

e por valer a condição **(H1)** para F_k segue que

$$\|h\|^*_{C^{2,\alpha_0}\left(\overline{\mathrm{B}^+_{\frac{49}{64}}}\right)} \leq \mathrm{C}^\sharp \|h\|_{L^\infty\left(\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\right)} \leq \mathrm{C}^\sharp.$$

Como por hipótese, $\rho \leq \frac{49}{64}$, fazendo $\overline{a} = h(0)$, $\overline{b} = Dh(0)$ e $\overline{\mathrm{M}} = D^2h(0)$ temos que o polinômio quadrático $\overline{P}(x) = \overline{a} + \overline{b} \cdot x + \frac{1}{2}x^t\overline{\mathrm{M}}x$ satisfaz pela Fórmula do Polinômio de Taylor com resto de Lagrange,

$$\begin{aligned} \|h - \overline{P}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_\rho)} &\leq \frac{1}{2}\rho^2 \sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}^+_\rho} \\ x \neq y}} \frac{\|D^2h(x) - D^2h(x)\|}{|x-y|^{\alpha_0}} \sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}^+_\rho} \\ x \neq y}} |x-y|^{\alpha_0} \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{C}^\sharp \left(\frac{64}{49}\right)^{2+\alpha_0} \rho^{2+\alpha_0} \\ &\leq \frac{3}{2}\mathrm{C}^\sharp \rho^{2+\alpha_0} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

donde pela condição imposta pela constante ρ acima obtemos que

$$\|h - \overline{P}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_\rho)} \leq \frac{1}{2}\rho^{2+\alpha}. \tag{172}$$

Portanto, de (170) e (172) podemos via desigualdade triangular que

$$\|v_k - \overline{P}\|_{L^\infty(\mathrm{B}^+_\rho)} \leq \rho^{2+\alpha}. \tag{173}$$

Agora definamos

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \rho^{k(2+\alpha)}\overline{P}(\rho^{-k}x).$$

Segue por reescalonamento e continuidade de u que de (173) a condição II é cumprida para

P_{k+1} . Ademais, por construção desse mesmo polinômio, seguem imediatamente as condições I (devido h ser solução de (171)) e III para o mesmo.
Isso prova afirmação desejada. Com essa afirmação, analogamente a [15, Theorem 8.1] segue a tese do resultado. ■

Combinando o Teorema 7.4.14 com [15, Theorem 8.1] temos o seguinte resultado.

Teorema 7.4.16 (Schauder) *Seja u uma solução para o problema* (96). *Suponha que exista $\alpha_\psi \in (0,1)$ tal que $K =: \sup\limits_{x \in \mathrm{B}_1^+} \|\psi_F(\cdot, x)\|_{C^{0,\alpha_\psi}(\mathrm{B}_1^+)} < \infty$ e que as hipóteses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H2})$ são satisfeitas. Então, dado $0 < \alpha < \min\{\alpha_0, \alpha_\psi, \alpha_\beta, \alpha_\gamma, \alpha_g\}$ temos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+})$ com a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+})} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{C^\alpha(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}),$$

para uma constante universal $\mathrm{C} > 1$.

Observação 7.4.17 *O Teorema 7.4.16 é o primeiro resultado nessa linha para coeficientes variáveis para essa classe de problemas com condição oblíqua. A dificuldade para obter uma versão desse resultado fica exposta quando foi realizado o processo iteração, onde operador que rege a condição oblíqua $\mathfrak{B}(q, r, x) = \beta(x) \cdot q + \gamma(x) r$ sofre uma alteração significativa nesse processo e por questões de manter as propriedades de β no processo o termo fonte dessa condição g, sofre uma mudança com os termos do polinômio e de seu gradiente que aproximamos, γ e β.*

Com esse resultado podemos provar a versão geral de estimativas $C^{1,Log-Lip}$ para soluções de (96). Pela estruturação obtida acima formulamos o seguinte resultado.

Teorema 7.4.18 (Estimativas $C^{1,Log-Lip}$ - coeficientes variáveis) *Seja u solução de viscosidade de* (96). *Assuma as condições estruturais (**A**), (**B**), (**H1**), (**H2**) (exceto a condição $f \in C^{0,\alpha}(\mathrm{B}_1^+)$) e que*

$$K =: \sup_{x \in \mathrm{B}_1^+} \|\psi_F(\cdot, x)\|_{C^{0,\alpha_\psi}(\mathrm{B}_1^+)} < \infty.$$

Então, existe constante universal $\mathrm{C} > 0$ tal que $u \in C^{1,Log-Lip}\left(\overline{\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}}\right)$ e vale a seguinte estimativa

$$\sup_{\substack{x,y \in \overline{\mathrm{B}_{\frac{1}{2}}^+} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y) - Du(y) \cdot (x - y)|}{|x - y|^2 \log(|x - y|^{-1})} \leq \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\mathrm{B}_1^+)} + \|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}_1^+)} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\mathrm{T}_1})}).$$

Demonstração: Pelas ideais desenvolvidas anteriormente no Teorema 7.4.5, argumentaremos apenas as mudanças para o seguinte resultado. Inicialmente com a hipótese de $K < \infty$ vale também uma versão do Lema 7.4.3 para operadores com coeficientes variáveis se aproximando de soluções do

$$\begin{cases} F(D^2h,x)=(f)_1 & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}} \\ \beta\cdot Dh+\gamma h=g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_{\frac{7}{8}} \\ h=u & \text{em} \quad \partial\mathrm{B}^+_{\frac{7}{8}}\setminus\mathrm{T}_{\frac{7}{8}}, \end{cases}$$

onde a condição $K<\infty$ é importante na prova do Lema 7.4.3 por argumento de compacidade. Assim, com essa versão de lema de aproximação segue a seguinte versão de aproximação quadrática: Seja u solução de

$$\begin{cases} F(D^2u+\tilde{M},x)=f & \text{em} \quad \mathrm{B}^+_1 \\ \beta\cdot Du+\gamma u=g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde f, β, γ e g estão nas condições acima e $K<\infty$, $\tilde{M}\in Sym(n)$ é tal que $F(\tilde{M})=0$ e assuma as hipóteses acima. Dado $x_0\in\mathrm{B}^+_{\frac{1}{2}}$ existem $\eta>0$ e $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ constantes universais que independem de x_0 tais que, se

$$\|f\|_{p-BMO(\mathrm{B}^+_1)}\leq\eta,$$

para algum $p\geq n-\varepsilon$. Então existe um polinômio quadrático

$$P(x)=a+b\cdot(x_0-x)+\frac{1}{2}(x-x_0)^tM(x-x_0)$$

com coeficientes universalmente limitados, no seguinte sentido

$$|a|+|b|+\|M\|\leq C,$$

para $C>0$ constante universal, tal que

$$\sup_{\mathrm{B}^+_\rho}|u-P|\leq\rho^2.$$

Ademais, ainda temos que $F(M+\tilde{M},x_0)=(f)_1$.
A prova do resultado é análoga ao Lema 7.4.4, onde nas hipóteses acima invocamos o Teorema 7.4.16 para garantir estimativas $C^{2,\alpha}$ locais do perfil limite da aproximação e seguir a mesma linha da prova deste lema citado. Com esses dois ingredientes em mãos a prova do desejado segue a mesma linha do Teorema 7.4.5. ∎

Observação 7.4.19 *Vale pontuar que diferente do caso estimativas interiores como em [50] e [46] os dados de bordo tem propriedades mais finas do que apenas o gradiente ter módulo de continuidade Hölder. Isso é perceptível na nossa forma de aproximação quadrática onde esses dados sofrem uma penalização do polinômio quadrático na iteração. Fica como uma questão* *em aberto, enfraquecer as condições sobre os dados de bordo β, γ e g para obter estimativas $C^{1,Log-Lip}$ para soluções de* (96) *bem como estimativas de Schauder para tal problema no cenário em que o termo fonte tem regularidade Hölder.*

8 CONCLUSÃO

O presente trabalho mostra que a gama de tópicos da teoria de regularidade para o problema com condição de bordo oblíquo que podem ser explorados. O árduo trabalho na espécie de problema aqui apresentado fica evidente pela refinação dos argumentos nas provas dos resultados quando comparamos por exemplo com os problemas com a condição de bordo de Dirichlet.

Ainda sobre os resultados vistos neste manuscrito, uma questão interessante é abordar o Teorema 3.0.5 sob outras condições mais fracas dos dados de bordo β, γ e g, por exemplo, com módulo de continuidade Dini no gradiente. Também vale pensar em modificações no termo fonte, como realizado nos capítulo três e quatro em contextos fora dos espaços habituais L^p's.

Vale ressaltar que o Teorema 3.0.5 bem como suas aplicações apresentadas foram são generalizações/inovações dos resultados comentados na introdução. Espera-se que refinamento dos argumentos aqui apresentada sejam de grande aporte para futuros trabalhos e de grande ajuda para a comunidade científica.

Outra questão pertinente, estimativas $C^{2,\alpha}$ para o problema (56). Quais condições o problema necessita para obter tais estimativas? Essa pergunta é bem intrigante, uma vez que, com a dependência de mais termos no operador de segunda ordem F em comparação com o problema (96), a dificuldade nos processos apresentados neste trabalho aumentam consideravelmente tendo plenas condições de necessitar de outras técnicas para abordar tal problema. Nessa linha do problema oblíquo, um ponto a ser explorado é resultados quando temos por exemplo a condição $\beta \cdot \mathbf{n} \leq \mu_0$ para alguma constante $\mu_0 > 0$. Quais impactos com essa mudança?

Nas estimativas de Lorentz com peso bem como nas de Orlicz com peso procedemos com um mergulho desses espaços sobre os espaços de Lebesgue para podermos usar ferramentas válidas na Teoria $W^{2,p}$ desenvolvida no capítulo três e daí adaptá-las ao contexto de tais espaços. Isso fez que tivéssemos que pagar um preço para garantir tais mergulhos. Fica como indagação teoria de regularidade nesses espaços sem ter em condições mais gerais sem ter que perpassar por esses mergulhos e com isso restringir as hipóteses sobre o termo fonte da equação assim como condições sobre os pesos.

Com respeito a técnica apresentada no capítulo seis e inspirado no excelente trabalho de Ricarte em [48], um problema interessante de estudar é a regularidade $C^{1,\alpha}$ ótima do problema degenerado

$$\begin{cases} |Du|^{\theta} F(D^2u) = f & \text{em} \quad \mathrm{B}_1^+ \\ \beta \cdot Du + \gamma u = g(x) & \text{sobre} \quad \mathrm{T}_1, \end{cases}$$

onde θ é uma constante positiva.

Por fim, sobre todas as observações acima uma questão natural e complicada é tentar desenvolver resultados de caráter da teoria de regularidade para problemas parabólicos com condição oblíqua. A geometria dos problemas parabólicos oferecem uma resistência grande em boa partes das técnicas aqui apresentadas bem como na literatura existente no caso elíptico. Dito isso, é um vasto campo a ser explorado em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, David R. **Morrey spaces**. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.

[2] AMARAL, Marcelo; PRAZERES, Disson dos. Optimal boundary regularity for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Journal of Differential Equations**, v. 338, p. 46–75, 2022.

[3] AZZAM, Jonas; BEDROSSIAN, Jacob. Bounded mean oscillation and the uniqueness of active scalar equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, p. 3095–3118, 2015.

[4] BESSA, Junior da S. Weighted Orlicz regularity for fully nonlinear elliptic equations with oblique derivative at the boundary via asymptotic operators. **Journal of Functional Analysis**, v. 286, n. 4, p. 110295, 2024.

[5] BESSA, Junior da S.; RICARTE, Gleydson C. **On Weighted Lorentz-Sobolev estimates of obstacle problems for fully nonlinear elliptic equations under relaxed convexity assumptions with oblique boundary**, 2023. Prepint submetido a arxiv.org em 17 de fevereiro de 2023. `http://arxiv.org/pdf/2302.09177.pdf`.

[6] BESSA, Junior da S.; SILVA, João V. da; FREDERICO, Maria N.B.; RICARTE, Gleydson C. Sharp Hessian estimates for fully nonlinear elliptic equations under relaxed convexity assumptions, oblique boundary conditions and applications. **Journal of Differential Equations**, v. 367, p. 451–493, 2023.

[7] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2010.

[8] BYUN, Sun-Sig.; HAN, Jeongmin. $W^{2,p}$-estimates for fully nonlinear elliptic equations with oblique boundary conditions. **Journal Differential Equations**, v. 268, n. 5, p. 2125–2150, 2020.

[9] BYUN, Sun-Sig.; HAN, Jeongmin. L^p-estimates for the Hessians of solutions to fully nonlinear parabolic equations with oblique boundary conditions. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 505, n. 1, p. 34 p., 2022.

[10] BYUN, Sun-Sig; HAN, Jeongmin; OH, Jehan. On $W^{2,p}$-estimates for solutions of obstacle problems for fully nonlinear elliptic equations with oblique boundary conditions. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 61, n. 162, 2022.

[11] BYUN, Sun-Sig; LEE, Ki-Ahm; HAN, Jeongmin; PARK, Jinwan. Nondivergence elliptic and parabolic problems with irregular obstacles. **Math. Z.**, v. 290, n. 3-4, p. 973–990, 2018.

[12] BYUN, Sun-Sig; LEE, Mikyoung; OK, Jihoon. Weighted regularity estimates in Orlicz spaces for fully nonlinear elliptic equations. **Nonlinear Analysis**, v. 162, p. 178–196, 2017.

[13] BYUN, Sun-Sig; OK, Jihoon; PALAGACHEV, Dian K.; SOFTOVA, Lubomira G. Parabolic systems with measurable coefficients in weighted Orlicz spaces. **Communications in Contemporary Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 1550018, 2016.

[14] CAFFARELLI, Luis A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. **Ann. of Math.**, v. 130, n. 1, p. 189–213, 1989.

[15] CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. **A fully nonlinear elliptic equations**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1995, 105 p.

[16] CAFFARELLI, Luis A.; CRANDALL, Michael G.; KOCAN, Maciej; ŚWIĘCH, Andrzej. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. **Comm, Pure Appl. Math.**, v. 49, n. 4, p. 365–397, 1996.

[17] CASTILLO, Ricardo; PIMENTEL, Edgard A. Interior Sobolev regularity for fully nonlinear parabolic equations. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 56, n. 127, p. 26, 2017.

[18] CAVALCANTI, Marcelo M.; CAVALCANTI, Valéria N. M. **Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev.** Eduem: Maringá, 2009.

[19] CRANDALL, Michael G.; LIONS, Pierre L. Viscosity slolutions of Hamilton-Jacobi equations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 277, n. 1, p. 1–42, 1983.

[20] DIENING, Lars; HARJULEHTO, Petteri; HÄSTÖ, P.; RŮŽIČKA, M. **Lebesgue and Sobolev spaces with variable Exponents.**, v. 2017. Springer-Verlag: Berlin, 2011.

[21] EI, Shin-Ichiro; SATO, Mikio; YANAGIDA, Eiji. Stability of stationary interfaces with contact angle in a generalized mean curvature flow. **Am. J. Math.**, v. 118, n. 3, p. 653–687, 1996.

[22] ESCAURIAZA, Luis. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-Linear equations. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 42, n. 2, p. 413–423, 1993.

[23] EVANS, Lawrence C. A convergence theorem for solutions of nonlinear second-order elliptic equations. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 27, n. 5, p. 875–887, 1978.

[24] EVANS, Lawrence C. On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. **Israel J. Math.**, v. 36, p. 225–247, 1980.

[25] FIOREZA, Alberto; KRBEC, Miroslav. Indices of Orlicz spaces and some applications.

Math. Univ. Carolina, v. 38, n. 3, p. 433–451, 1997.

[26] GIGA, Yoshikazu; SATO, Moto-Hiko. Neumann problem for singular degeneration parabolic equations. **Differential Integral Equations**, v. 6, n. 6, p. 1217–1230, 1993.

[27] GIGA, Yoshikazu; SATO, Moto-Hiko. On semicontinuous solutions for general Hamilton-Jacobi equations. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 26, p. 813–839, 2001.

[28] GIUSTI, Enrico. **Direct methods in the calculus of variations.** Singapore: World Scientific, 2003.

[29] HO, Kwok-Pun. Atomic decomposition of Hardy spaces and characterization of BMO via Banach function spaces. **Anal. Math.**, v. 38, n. 3, p. 173–185, 2012.

[30] KOIKE, Shigeaki; TATEYAMA, Shota. On L^p-viscosity solutions of bilateral obstacle problems with unbounded ingredients. **Mathematische Annalen** , v. 377, p. 883–910, 2019.

[31] KOKILASHVILI, Vakhtang; KRBEC, Miroslav. **Weighted inequalities In Lorentz and Orlicz spaces.** Singapore: World Scientific, 1991.

[32] KOVATS, Jay. Dini-Campanato spaces and applications to nonlinear elliptic equations. **Electron. J. Differential Equations.**, v. 37, p. 20, 1999.

[33] KRYLOV, Nikolai V.; SAFONOV, Mikhail V. An estimate for the probability of a diffusion process hitting a set of positive measure. **Dokl. Akad. Nauk SSSR.**, v. 245, n. 1, p. 18–20, 1979.

[34] KRYLOV, Nikolai V.; SAFONOV, Mikhail V. A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.**, v. 44, n. 1, p. 161–175, 1980.

[35] LEE, Mikyoung. Weighted Orlicz regularity estimates for fully nonlinear elliptic equations with asymptotic convexity. **Communications in Contemporary Mathematics**, v. 21, n. 4, p. 1850024, 2019.

[36] LERNER, Andrei K.; LORIST, Emiel; OMBROSI, Sheldy. BMO with respect to Banach function spaces. **Math. Ann.**, p. 1850024, 2023.

[37] LI, Dongsheng; ZHANG, Kai. Regularity for fully nonlinear elliptic equations with oblique boundary conditions. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 228, n. 3, p. 923–967, 2018.

[38] LIEBERMAN, Gary M. Regularity of solutions of obstacle problems for elliptic equations with oblique boundary conditions. **Pacific J. Math.**, v. 201, n. 2, p. 389–419,

2001.

[39] LIEBERMAN, Gary M. **Oblique derivative problems for elliptic equations.** Singapore: World Scientific, 2013.

[40] LIMA, Elon Lages. **Análise real:** funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

[41] MAUGERI, Antonino; PALAGACHEV, Dian K.; VITANZA, Carmela. A Singular boundary value problem for uniformly elliptic operators. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 263, n. 1, p. 33–48, 2001.

[42] MENGESHA, Tadele; PHUC, Nguyen C. Global estimates for quasilinear elliptic equations on Reifenberg flat domains. **Arch. Ration Mech. Anal.**, v. 203, p. 189–216, 2012.

[43] MILAKIS, Emmanouil; SILVESTRE, Luis E. Regularity for fully nonlinear elliptic equations with Neumann boundary data. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 31, n. 7-9, p. 1227–1252, 2006.

[44] MUCKENHOUPT, Benjamin. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 165, p. 207–226, 1972.

[45] PIMENTEL, Edgard A. **Elliptic regularity theory by approximation methods**. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

[46] PIMENTEL, Edgard. A.; TEIXEIRA, E.V. Sharp Hessian integrability estimates for nonlinear elliptic equations: an asymptotic approach. **J. Math. Pures Appl.**, v. 106, p. 744–767, 2016.

[47] RAO, Malempati M.; REN, Zhu D. **Theory of Orlicz spaces**, v. 146. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1991.

[48] RICARTE, Gleydson C. Optimal $C^{1,\alpha}$ regularity for degenerate fully nonlinear elliptic equations with Neumann boundary condition. **Nonlinear Analysis**, v. 198, p. 111867, 2020.

[49] RODRIGUES, José-Francisco. **Obstacle problems in mathematical physics**, v. 134. North-Holland: Elsevier, 1987.

[50] SILVA, João V. da; NORNBERG, Gabrielle. Regularity estimates for fully nonlinear elliptic PDEs with general Hamiltonian terms and unbounded ingredients. **Calculus of Variations Partial Differential Equations**, v. 60, n. 202, 2021.

[51] SILVA, João V. da; RICARTE, Gleydson C. An asymptotic treatment for non-convex

fully nonlinear elliptic equations: Global Sobolev and BMO type estimates. **Commun. Contemp. Math.**, v. 21, n. 7, p. 28, 2019.

[52] SILVA, João V. da; RICARTE, Gleydson C. **Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2023.

[53] STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. **Real analysis:**measure theory, integration, and hilbert spaces. New Jersey: Princeton University Press, 2009.

[54] TEIXEIRA, Eduardo. V. Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 211, p. 911–927, 2014.

[55] TURESSON, Bengt O. **Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces.** New York: Springer-Verlag, 2000.

[56] WHEENDEN, Antoni, Richard L.; ZYGMUND. **Measure and Integral:** An introduction to Real Analysis. 2. ed.New York: Marcel Dekler, 2015.

[57] WINTER, Niki. $W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations. **Journal for Analysis and its Applications**, v. 28, p. 129–164, 2009.

[58] ZHANG, Junjie; ZHENG, Shenzhou. Lorentz estimates for fully nonlinear parabolic and elliptic equations. **Nonlinear Analysis**, v. 148, p. 106–125, 2017.

[59] ZHANG, Junjie; ZHENG, Shenzhou; ZUO, Chunyan. $W^{2,p}$-regularity for asymptotically regular fully nonlinear elliptic and parabolic equations with oblique boundary values. **Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. S**, v. 14, n. 9, p. 3305–3318, 2021.

[60] ZHANG, Junjie; ZHENG, Shenzou. Weighted Lorentz and Lorentz-Morrey estimates to viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Complex Variables and Elliptic Equations**, v. 63, n. 9, p. 1271–1289, 2018.

[61] ZHANG, Junjie; ZHENG, Shenzou. Weighted Lorentz estimates for fully nonlinear elliptic equations with oblique boundary data. **J. Elliptic and Parabolic Equations**, v. 8, p. 255–281, 2022.