



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

**GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO**

**EQUAÇÕES DE CAMPO EFETIVAS PARA CORDAS BOSÔNICAS COM SIMETRIA**  
**DE WEYL**

**FORTALEZA**

**2023**

GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO

EQUAÇÕES DE CAMPO EFETIVAS PARA CORDAS BOSÔNICAS COM SIMETRIA DE  
WEYL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Coorientador: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

V45e Vasconcelos, Genivaldo.  
Equações de campo efetivas para cordas bosônicas com simetria de Weyl / Genivaldo Vasconcelos. – 2024.  
99 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientação: Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim.

1. teoria de cordas. 2. campos de fundo. 3. invariância de Weyl. I. Título.

CDD 530

---

GENIVALDO VASCONCELOS PINHEIRO FILHO

EQUAÇÕES DE CAMPO EFETIVAS PARA CORDAS BOSÔNICAS COM SIMETRIA DE  
WEYL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física

Aprovada em: 16/02/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar  
Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim (Coorientador)  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

---

Prof. Dr. Dmitry Melnikov  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
(UFRN)

---

Prof. Dr. Thiago Simonetti Fleury  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
(UFRN)

Para Gregor Samsa.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha companheira Sofia Veras pelo apoio em minha trajetória acadêmica e por todo o amor que tem me dado.

Ao meu pai, Genivaldo Vasconcelos, por sempre ter me apoiado em minha educação.

Aos meus amigos Wagner, Willian, JP, Bruno, Thiago, Jackson e Bruna, por terem tornado esses últimos 6 anos numa experiência sem arrependimentos.

Aos meus orientador e coorientador, prof. Geová e prof. Makarius, pelas oportunidades de aprendizado, amizade, e pela liberdade a mim dada, essencial para o bom aproveitamento do meu aprendizado.

De forma geral a todo o departamento de física da UFC por terem mudado minha vida desde 2018, quando fui admitido no curso de bacharelado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"O que é preciso é ser-se natural e calmo  
Na felicidade e na infelicidade,  
Sentir como quem olha,  
Pensar como quem anda,  
E quando se vai morrer, lembrar que o dia morre,  
E que o poente é belo e é bela a noite que fica...  
Assim é e assim seja..."

(Fernando Pessoa, 1931)

## RESUMO

Neste trabalho analisamos a quantização de uma teoria de cordas bosônicas fechadas via integral de caminho de Feynman. Estudamos a dinâmica de uma corda sob ação de três campos distintos: uma métrica lorentziana, uma 2-forma e um campo escalar. A ação da corda possui invariância sob o grupo de Weyl no módulo das métricas da folha-mundo, e a preservação de tal simetria está associada de forma equivalente à nulidade do traço do tensor energia-momento na folha-mundo. Ao quantizarmos a teoria, esse traço, que é proveniente da ação efetiva a nível de 1-loop, não é trivial, tendo dependência das funções beta do grupo de renormalização da teoria. Mostramos que a invariância de Weyl da teoria é preservada caso os campos de fundo satisfaçam um sistema de equações de campo, sendo uma destas uma forma modificada das equações de campo de Einstein.

**Palavras-chave:** teoria de cordas; campos de fundo; invariância de Weyl.

## ABSTRACT

In this work we analyze the quantization of a closed bosonic string theory by means of the Feynman path integral. We study the dynamics of a string under the action of three different fields: a Lorentzian metric, a 2-form and a scalar field. The action of the string has invariance under the Weyl group in the smooth module of world-sheet metrics, and the preservation of such symmetry is equivalently associated to the nullity of the trace of the energy-momentum tensor in the world-sheet. When we quantize the theory, this trace, which comes from the effective action at the 1-loop level, is non-trivial and depends on the beta functions of the theory's renormalization group. We show that the Weyl invariance of the theory is preserved if the background fields satisfy a system of field equations, one of which is a modified form of the Einstein field equations.

**Keywords:** string theory; background fields; Weyl invariance.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Exemplos de trajetórias de cordas fechadas. As seções tracejadas indicam configurações assintóticas. . . . . 39
- Figura 2 – Transformações que modelam as trajetórias de cordas em superfícies esféricas e tóricas. Cada seta indica um mapeamento via homeomorfismo entre as superfícies. . . . . 40

## LISTA DE SÍMBOLOS

$(M, G)$	Espaço ambiente: uma variedade (suave) com ou sem bordo de dimensão real $n$ equipada com uma métrica pseudo-riemanniana $G = G_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ .
$\text{Diff}(M)$	Grupo de difeomorfismos numa variedade suave $M$ .
$\text{Iso}(M)$	Grupo de isometrias numa variedade pseudo-riemanniana $(M, G)$ .
$\text{Conf}(M)$	Grupo conforme sobre uma variedade pseudo-riemanniana $(M, G)$ .
$\Sigma$	Folha-mundo de uma corda.
$X : \Sigma \rightarrow M$	Mergulho suave de $\Sigma$ em um espaço ambiente $M$ .
$\mathbb{M}^D$	Espaço de Minkowski $D$ -dimensional com métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)_{\mu\nu}$ em coordenadas cartesianas.
$B \in \wedge^2(M)$	Forma de Kalb-Ramond.
$H = dB$	Torsão de Kalb-Ramond.
$\{e_a\}$	Base ortonormal de seções suaves locais em $M$ com $a \in \{1, \dots, \dim M\}$ .

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	TEORIA CLÁSSICA DE CORDAS . . . . .	15
2.1	Ação de Nambu-goto . . . . .	15
2.2	Uma ação alternativa à de Nambu-Goto . . . . .	16
2.3	Ação de Polyakov . . . . .	18
2.3.1	<i>Simetria conforme</i> . . . . .	20
2.4	Expansão de soluções clássicas via série de Fourier . . . . .	21
2.4.1	<i>Solução para cordas abertas</i> . . . . .	22
2.4.1.1	<i>Condições de Neumann</i> . . . . .	22
2.4.1.2	<i>Condições de Dirichlet</i> . . . . .	24
2.4.2	<i>Solução para cordas fechadas</i> . . . . .	26
3	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO MODELO . . . . .	29
3.1	Quantização no cone de luz . . . . .	29
3.2	Corda aberta . . . . .	29
4	QUANTIZAÇÃO DE POLYAKOV . . . . .	37
4.0.1	<i>Rotação de Wick</i> . . . . .	37
4.1	Soma sobre folhas-mundo . . . . .	38
4.2	Problema da fixação de calibre . . . . .	41
4.3	A anomalia de Weyl e a dimensão crítica da teoria de cordas bosônica . . . . .	46
5	CORDAS BOSÔNICAS SOB AÇÃO DE CAMPOS DE FUNDO NÃO MASSIVOS . . . . .	49
5.1	Sobre o uso de métricas gerais . . . . .	49
5.2	Campos de fundo gerais . . . . .	49
5.3	Método da expansão covariante . . . . .	50
5.4	A ação efetiva a 1-loop em $\alpha'$ . . . . .	54
5.4.1	<i>Regularização dimensional de acoplamentos e funções beta do grupo de renormalização</i> . . . . .	56
5.5	Coeficientes da anomalia de Weyl . . . . .	59
5.6	Cálculo dos contra-termos . . . . .	62
5.6.1	<i>Contribuição da métrica <math>G</math></i> . . . . .	62

5.6.2	<i>Contribuição de B</i> . . . . .	63
5.6.3	<i>Contribuição de <math>\Phi</math></i> . . . . .	65
5.6.4	<i>Cancelamento da anomalia de Weyl</i> . . . . .	65
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	67
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	68
	<b>APÊNDICE A – CÁLCULOS</b> . . . . .	70
	<b>APÊNDICE B – CONCEITOS BÁSICOS DE CFT APLICADA À TEO- RIA DE CORDAS</b> . . . . .	74

## 1 INTRODUÇÃO

O modelo padrão da física de partículas e a teoria da relatividade geral, embora ambas teorias com considerável verificação experimental, apresentam inconsistências internas quando postas lado a lado. Ao se tentarmos incluir gravitação à teoria quântica de campos usual para partículas pontuais, o cálculo perturbativo de amplitudes de probabilidade apresenta divergências ao lidar com escalas de energia suficientemente altas, as chamadas divergências ultravioletas, bem como ao lidar com interações de partículas que ocorrem em escalas de distância consideravelmente pequenas.

Tais divergências ao tentar incorporar uma quantização via integral de caminho à ação de Einstein-Hilbert, por exemplo, não podem ser removidas por processos de renormalização, indicando que há presença de fenômenos físicos ainda não compreendidos entre gravitação e campos quânticos. Este é um dos problemas para o qual a teoria de cordas se mostra como solução. No modelo, não só a presença de um estado não massivo de spin 2, identificado como o gráviton (Blumenhagen, R. and Lüst, D. and Theisen, S., 2012), surge naturalmente do espectro de estados físicos da teoria, bem como tais divergências provenientes da gravitação são inexistentes.

Em particular, na análise perturbativa do espalhamento de grávitons, as amplitudes definidas pela matriz  $S$  divergem a energias arbitrariamente altas, sendo maior tal divergência tanto quanto maior for o número de grávitons envolvidos no espalhamento, uma vez que no espaço de posições, tais divergências representam o limite em que todos os vértices de grávitons coincidem (Polchinski, J., 2001).

Contudo, a quantização de uma teoria de cordas, cuja ação trata de um modelo sigma não linear, é renormalizável. Além do estado de spin 2, há outros dois estados: um tensorial antissimétrico, e outro escalar. Esses três estados podem ser vistos como excitações do vácuo a partir de operadores específicos, sendo o estado de não massivo de spin 2, por sinal simétrico, associado a uma métrica  $G$ , enquanto os estados antissimétrico e escalar são associados a uma 2-forma  $B$  e um campo escalar  $\Phi$ . Incluir ações envolvendo tais campos não afeta a renormalização da teoria como mostramos neste trabalho, mas tais campos devem ser sujeitos a vínculos importantes. Mostramos no segundo capítulo deste trabalho que uma teoria de cordas apresenta uma invariância sob o grupo de Weyl, que escalona localmente métricas na folha-mundo de uma corda. Tal simetria matematicamente impõe que o traço do tensor-energia momento de nossa ação seja nulo. O problema é que quando efetuamos a quantização por

integral de caminho de Feynman, o tensor energia-momento que obtemos vem diretamente da ação efetiva da teoria (Ketov, S.V., 2013), de modo que seu traço não é trivialmente nulo. Os vínculos importantes que mencionamos são precisamente equações de campo que tornam o traço do tensor energia-momento quântico nulo, garantindo portanto invariância de Weyl da teoria a nível de 1-loop com respeito ao parâmetro de Regge  $\alpha'$  presente na teoria. É importante mencionar que as técnicas aqui aplicadas servem de base para estudar não apenas correções a níveis de loop maiores no parâmetro  $\alpha'$  (Bonezzi, Roberto and Codina, Tomas and Hohm, Olaf, 2022), como também estudar a anomalia de Weyl em modelos de cordas não relativísticas (Gomis, Jaume and Oh, Jihwan and Yan, Ziqi, 2019), bem como em modelos de cordas com  $T$ -dualidade (Berman, David S. and Copland, Neil B. and Thompson, Daniel C., 2008).

Organizamos este trabalho apresentando fundamentos geométricos da teoria de cordas clássica. No capítulo terceiro introduzimos brevemente a quantização canônica da teoria que nos permite obter os estados não massivos de uma teoria de cordas fechadas. Mais adiante, no quarto capítulo, introduzimos a quantização da teoria por integral de caminho de Feynman sob rotação de Wick, no qual mostramos o procedimento de Fadeev-Popov necessário para definir a integral de forma não ambígua, uma vez que se trata também de uma teoria de Gauge do grupo de Weyl. Por fim, resolvemos o problema da invariância de Weyl da teoria, no qual mostramos que o tensor-energia momento pode ser escrito por termos relacionados às funções beta do grupo de renormalização

## 2 TEORIA CLÁSSICA DE CORDAS

Tratamos de cordas como objetos dinâmicos unidimensionais que podem ser classificadas em dois tipos: fechadas, cuja topologia é circular, e abertas, cuja topologia é a de um intervalo fechado em  $\mathbb{R}$ . Assim como analisamos a dinâmica de partículas pontuais pelas suas trajetórias, também o faremos com cordas. Para isso, primeiramente fixamos um espaço-tempo  $(M, G)$ , o qual tomamos como uma variedade lorentziana orientável de dimensão  $D \geq 3$ . Denominamos o espaço de parâmetros utilizado para modelar a trajetória da corda de folha-mundo, o qual definimos como uma variedade suave com ou sem bordo, orientável e de dimensão 2. Definimos a folha-mundo de uma corda fechada é difeomorfa a<sup>1</sup>  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , enquanto que a de uma corda aberta é difeomorfa a  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ .

### 2.1 Ação de Nambu-goto

Os mapas nos quais estamos interessados são mergulhos suaves  $X : \Sigma \rightarrow M$ , que fornecem a visualização física e geometricamente adequada para a subvariedade  $X(\Sigma) \hookrightarrow M$ . Esse requerimento sobre os mapas que utilizaremos majoritariamente garante que os *pullbacks*  $X^*G$  definam métricas, e não apenas campos tensoriais de posto  $(0, 2)$  (que podem ser degenerados). Contudo, essa garantia ocorre apenas com respeito ao interior da folha-mundo, de modo que  $X^*G$  ainda pode ser uma forma degenerada em  $\partial\Sigma$  no caso de cordas abertas. Com tais definições em mãos, podemos definir a ação para nossa teoria clássica de cordas, denominada ação de Nambu-Goto, determinando a área de  $\Sigma$  induzida pelo *pullback*  $X^*G$ :

$$S_{NG}[X] =: -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{X^*G} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\det X^*G|} d^2\sigma, \quad (2.1)$$

onde  $\alpha'$  é uma constante convencionalmente escolhida para tornar  $S_{NG}$  adimensional. A ação (2.1) possui invariância sob o grupo  $\text{Diff}^+(\Sigma)$  de reparametrizações que da folha-mundo que preservam a orientação de  $\Sigma$ . No caso em que  $M = \mathbb{M}^D$ , (2.1) é também invariante sob o grupo de isometrias  $\text{Iso}(\mathbb{M}^D)$ . Determinar as equações de Movimento e condições de contorno, no caso de cordas abertas, envolve escolher uma família de um parâmetro de difeomorfismos  $X_s : \Sigma \rightarrow M$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  tal que  $X_0 := X$  e que  $\frac{dX_s^\mu}{ds} \Big|_{s=0} := \delta X^\mu$ . Desse modo, pelo princípio de

<sup>1</sup> Aqui tomamos  $\mathbb{S}^1$  difeomorfa a  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  e usamos o intervalo  $[0, 2\pi]$  para representar elementos de  $\mathbb{S}^1$

mínima ação, obtemos que

$$0 = \delta S_{NG} := \frac{d}{ds} S_{NG}[X_s] \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \left( P_{\mu}^{\tau} \partial_{\tau} \delta X^{\mu} + P_{\mu}^{\sigma} \partial_{\sigma} \delta X^{\mu} \right) d^2 \sigma, \quad (2.2)$$

onde  $P_{\mu}^a := -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial}{\partial(\partial_a X^{\mu})} \sqrt{\det X^* G}$ . Desenvolvendo,

$$\delta S_{NG} = - \int_{\Sigma} \left( \partial_{\tau} P_{\mu}^{\tau} + \partial_{\sigma} P_{\mu}^{\sigma} \right) \delta X^{\mu} + \int_{\Sigma} \partial_{\tau} (P_{\mu}^{\tau} \delta X^{\mu}) d^2 \sigma + \int_{\Sigma} \partial_{\sigma} (P_{\mu}^{\sigma} \delta X^{\mu}) d^2 \sigma. \quad (2.3)$$

Os dois últimos termos em (2.3) anulam-se para cordas fechadas pois para estas,  $\partial \Sigma = \emptyset$ . Para cordas abertas, no entanto, tais termos são iguais a

$$\int_{[0, \pi]} \left[ P_{\mu}^{\tau} \delta X^{\mu} \right]_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} d^2 \sigma + \int_{\mathbb{R}} \left[ P_{\mu}^{\sigma} \delta X^{\mu} \right]_{\sigma=\pi}^{\sigma=0} d^2 \sigma. \quad (2.4)$$

O primeiro termo acima é nulo ao considerarmos  $\delta X^{\mu}(+\infty, \sigma) = \delta X^{\mu}(-\infty, \sigma) = 0$ . O termo restante pode ser anulado de forma relevante por duas formas distintas: ao considerarmos  $P_{\mu}^{\sigma} = 0$  em  $\sigma = 0, \pi$  ou  $\delta X^{\mu} = 0, \mu \neq 0$  em  $\sigma = 0, \pi$ . A primeira das condições impõe uma restrição sobre os momentos  $P^{\sigma}$ , deixando  $\delta X^{\mu}$  livres, as quais denominamos condições de Neumann. As outras condições impõem a constância dos fatores  $\delta X^{\mu}$  nos extremos  $\sigma = 0, \pi$ , ou seja, fixando a  $\mu$ -ésima posição da corda, as quais denominamos condições de Dirichlet. Condições de Neumann e de Dirichlet podem ser escolhidas coordenada a coordenada, isto é, podem ser misturadas, fornecendo diferentes configurações de cordas abertas.

Ao determinar as condições de contorno desejadas para uma corda aberta, obtemos as equações de movimento para cordas abertas e fechadas:

$$\partial_a P_{\mu}^a(\tau, \sigma) = 0, (\tau, \sigma) \in \text{int}(\Sigma). \quad (2.5)$$

## 2.2 Uma ação alternativa à de Nambu-Goto

A ação de Nambu-Goto possui uma ótima interpretação geométrica, possuindo simetrias de interesse físico. Contudo, seu processo de quantização não é favorável devido à presença de uma raiz quadrada em seu integrando: ao quantizar uma teoria via integral de caminho de Feynmann, o cálculo de amplitudes de espalhamento é geralmente feito utilizando teoria da perturbação e depende do caráter gaussiano da integral. Para isto, é necessário que a ação

clássica possui dependência quadrática nos campos de estudados, ou em suas derivadas. É sabido da geometria diferencial que o funcional de comprimento de uma curva suave  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\ell[\gamma] = \int_{[0,1]} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (2.6)$$

fornece as mesmas equações de movimento que o funcional de energia, ou funcional de Dirichlet:

$$E[\gamma] = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle dt, \quad (2.7)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^n$  e  $\|\cdot\|$  sua norma induzida (embora tais funcionais existam para qualquer variedade pseudo-riemanniana). É de fato possível derivar uma generalização deste caso para variedades bidimensionais. Primeiramente introduzimos uma métrica lorentziana em  $\Sigma$  de modo que, quando finitas, integrais da forma

$$\int_{\Sigma} dv_{\gamma} \quad (2.8)$$

façam sentido. Definimos um vínculo  $\gamma = X^*G$ ,  $X$  mergulho suave. A seguir, tomamos uma seção  $\Lambda: T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma \rightarrow \text{Dens}(\Sigma)$  que atua como um multiplicador de Lagrange ao vínculo proposto. Partimos da ação

$$S[X, \gamma, \Lambda] := -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} (dv_{\gamma} + \Lambda(X^*G - \gamma)), \quad (2.9)$$

Cujas equações de movimento com respeito a uma variação em  $\Lambda$  resultam no vínculo entre  $\gamma$  e  $X^*G$ . Contudo, ao variarmos a ação com respeito a  $\gamma$ , obtemos

$$\Lambda^{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab}, \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9) nos dá uma nova ação:

$$\tilde{S}[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu} dv_{\gamma}. \quad (2.11)$$

A ação (2.11) é mais bem comportada que a ação de Nambu-Goto no âmbito da integral de caminho de Feynmann devido ao seu caráter polinomial.

### 2.3 Ação de Polyakov

Tendo isso em mente, nosso novo ponto de partida consiste em definir teoria de cordas como uma teoria de campos dada pela ação

$$S_P[X, \gamma] := \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_g \gamma^{ab} G(X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu} dv_\gamma, \quad (2.12)$$

onde  $X_*$  é o push-forward associado a  $X$ ,  $(\Sigma, \gamma)$  riemanniana/lorentziana com ou sem fronteira e orientável, enquanto mantemos o caráter lorentziano de  $(M, G)$ . (2.12) é comumente chamada de ação de Polyakov. Essa ação possui duas simetrias: invariância sob  $\text{Diff}^+(\Sigma)$ , bem como invariância sob o grupo  $\text{Weyl}(\Sigma)$ . O grupo de Weyl atua no módulo suave das métricas riemannianas admissíveis em  $\Sigma$ ,  $\text{Met}(\Sigma)$  multiplicando por uma função positiva, isto é, uma transformação de Weyl é um mapa da forma

$$g \mapsto e^{2\omega} g, \quad \omega \in C^\infty(\Sigma). \quad (2.13)$$

É importante notar que a simetria de Weyl está ligada ao fato de que  $\Sigma$  possui dimensão 2. Essa simetria pode ser explicitamente elucidada pelas equações

$$S_P[X, \gamma] = S_P[X \circ h^{-1}, h^* \gamma], \quad \forall h \in \text{Diff}^+(\Sigma), \quad (2.14)$$

$$S_P[X, \gamma] = S_P[X, e^{2\omega} \gamma], \quad \forall \omega \in C^\infty(\Sigma). \quad (2.15)$$

Por ora, fixaremos  $G = \eta$ , assumindo um espaço-tempo ausente de gravidade. Um ponto importante é atestar quais campos  $X$  e  $\gamma$  extremam a ação de Polyakov. Com respeito aos mapas da forma  $X : \Sigma \rightarrow M$ , efetuamos uma variação usual, de modo que

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b \delta X^\nu \eta_{\mu\nu} d^2 \sigma \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[ \int_{\Sigma} \nabla_b (\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \delta X^\nu \eta_{\mu\nu}) d^2 \sigma - \int_{\Sigma} \nabla_b (\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X^\nu \eta_{\mu\nu} d^2 \sigma \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O primeiro termo pode ser anulado via condições de contorno. Além das usuais condições  $\delta X^\mu(\pm\infty, \sigma) = 0$ , temos para cordas abertas condições semelhantes às propostas na ação de Nambu-Goto. São elas

1. Condições de Dirichlet :  $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0, \mu \neq 0,$
2. Condições de Neumann:  $\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \pi) = 0.$

Quanto ao termo remanescente em (2.16), devemos notar que

$$\begin{aligned} \partial_b(\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu) &= \sqrt{\det \gamma} \nabla_b(\gamma^{ab} \partial_a X^\mu) \\ &= \sqrt{\det \gamma} \Delta X^\mu, \end{aligned} \quad (2.17)$$

que é o operador de Laplace-Beltrami em  $(\Sigma, \gamma)$ . Logo,  $\delta S_P = 0$  equivale, para variações arbitrárias em  $X$  sujeitas a condições de contorno equivale a que as componentes de um mapa  $X : \Sigma \rightarrow M$  sejam funções harmônicas em  $X$ :

$$\Delta X^\mu = 0. \quad (2.18)$$

Ao variarmos  $S_P$  com respeito a  $\gamma$ , obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \delta(\sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab}) \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \, d^2\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{\det \gamma} \left[ -\frac{1}{2} h_{cd} \gamma^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \delta h^{cd} + \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \delta \gamma^{ab} \right] d^2\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{\det \gamma} \left[ -\frac{1}{2} \gamma_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu + \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \right] \delta \gamma^{ab} \, d^2\sigma \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde usamos  $\delta \sqrt{\det \gamma} = \frac{\sqrt{\det \gamma}}{2} \gamma^{ab} \delta \gamma_{ab} = -\frac{\sqrt{\det \gamma}}{2} \gamma_{ab} \delta \gamma^{ab}$ . Definindo o tensor de energia-momento em  $(\Sigma, \gamma)$  como o campo tensorial

$$T_{ab} := \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[ -\frac{1}{2} \gamma_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu + \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \right]. \quad (2.20)$$

Concluimos que métricas  $\gamma$  que extremam  $S_P$  devem obedecer às equações  $T_{ab} = 0$ . Mesmo não obedecendo equações de movimento, o tensor de energia-momento satisfaz equações baseadas nas simetrias da ação de Polyakov. A invariância de  $S_P$  sob o grupo  $\text{Diff}(\Sigma)$  implica em  $\nabla^a T_{ab}$ , enquanto que sua invariância sob  $\text{Weyl}(\Sigma)$  implica que  $T^a_a = 0$ . De fato,

$$T^a_a := \gamma^{ab} T_{ab} = \frac{\gamma^{ab}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}}. \quad (2.21)$$

Como  $S_P[X, \gamma] = S_P[X, e^{2\omega}\gamma]$ , temos que

$$\gamma^{ab}T_{ab} = e^{-2\omega}\gamma^{ab}T_{ab} \iff T_a^a = 0. \quad (2.22)$$

A nulidade do traço de  $T_{ab}$  é de importância para este trabalho pois está relacionada às condições de consistência física numa teoria quântica de cordas. Outro comentário importante é o de atestar que a ação de Polyakov fornece a mesma descrição dinâmica que  $S_{NG}$ . Ao considerar que  $\gamma$  satisfaz  $T_{ab} = 0$  e substituir este resultado em  $S_P$ , obtemos

$$\begin{aligned} S_P[X, \gamma] &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{\det \gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu d^2\sigma, \quad \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = (X^*\eta)_{ab} \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} 2\sqrt{\det X^*\eta} d^2\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{X^*\eta} \\ &= S_{NG}[X]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Evidentemente, tal resultado se mantém para uma folha-mundo riemanniana ou lorentziana.

### 2.3.1 Simetria conforme

Fixada uma métrica  $\gamma$ , escrevemos  $S_P[X] \equiv S_P[X, \gamma]$ . Seja então  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  uma transformação conforme, isto é, um difeomorfismo tal que  $f^*\gamma = e^{2\omega}\gamma$  para alguma função  $\omega : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Usando as simetrias de  $S_P$ , temos que

$$S_P[X] = S_P[X, \gamma] = S_P[X \circ f^{-1}, f^*\gamma] = S_P[X \circ f^{-1}, e^{2\omega}\gamma] \stackrel{\text{Weyl}}{=} S_P[X \circ f^{-1}, \gamma] = S_P[X \circ f^{-1}]. \quad (2.24)$$

Ou seja, mesmo escolhendo uma métrica específica, realizar uma transformação conforme em  $\Sigma$  não afeta  $S_P$ . A uma teoria como esta, que possui invariância sob ação do subgrupo próprio  $\text{Conf}(\Sigma) \subset \text{Diff}^+(\Sigma)$ , damos o nome de teoria de campos conforme, ou apenas de CFT (*Conformal Field Theory*). O estudo de CFTs é de bastante interesse em teoria de cordas e em teorias de campos bidimensionais no geral (Polchinski, J., 2001; Blumenhagen, R. and Lüster, D. and Theisen, S., 2012). Um tratamento matematicamente detalhado sobre teorias de campos conforme e do grupo conforme em particular está em (Schottenloher, M., 2008; Francesco, P. and Mathieu, P. and Senechal, D., 2012).

Como comentamos, a invariância conforme da teoria permite escolher uma parametrização sem necessariamente afetar a métrica  $\gamma$ . O caso mais simples envolve  $\gamma = \eta$ . A possibilidade dessa escolha depende tanto da simetria de Weyl quanto do fato de que  $\Sigma$  possui dimensão 2. Como é mostrado no capítulo 1 de (Cecotti, S., 2023), superfícies lorentzianas e riemannianas admitem localmente reparametrizações cujos respectivos pullbacks de suas métricas são conformalmente planos, isto é, são da forma  $e^{2\omega}\eta_{ab}$  ou  $e^{2\omega}\delta_{ab}$ . Assumindo o uso dessa reparametrização, podemos usar a invariância de Weyl da ação de Polyakov para tornar a métrica da folha-mundo plana em ambas as assinaturas.

Desta forma, escolhida uma métrica  $\gamma$  para a folha-mundo, podemos substituí-la por  $\eta$  graças às simetrias de  $S_P$ . A presença da simetria conforme nos permite ainda modificar a parametrização de  $X$  mantendo a escolha  $\gamma = \eta$ , a qual denominamos de calibre conforme ou calibre plano. Ao tomarmos a escolha de calibre plano, tanto as equações de movimento quanto os vínculos associados à métrica  $\gamma = \eta$  são simplificados:

$$\begin{aligned}\Delta X^\mu &= \partial_a \partial^a X^\mu = 0, \\ \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu &= \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \iff \|\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X\|^2 = 0.\end{aligned}\tag{2.25}$$

## 2.4 Expansão de soluções clássicas via série de Fourier

Tomando o calibre conforme, as equações de movimento para as componentes se reduzem à equação de onda

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X_\mu = 0,\tag{2.26}$$

tal que

$$\partial_a \partial^a X_\mu = 0 \implies \eta^{\mu\nu} \partial_a \partial^a X_\nu = \partial_a \partial^a X^\mu = 0.\tag{2.27}$$

Uma famosa solução tentativa dessa equação é conhecida como solução de d'Alambert, dada por

$$X^\mu = \frac{1}{2}(f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-)), \quad \sigma^\pm = \tau \pm \sigma.\tag{2.28}$$

Trataremos as possíveis soluções dessas equações para cordas abertas e fechadas separadamente.

### 2.4.1 Solução para cordas abertas

#### 2.4.1.1 Condições de Neumann

Tomando a solução da equação de onda  $X^\mu = \frac{1}{2}(f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-))$ , temos que

$$\partial_\sigma X^\mu = \frac{1}{2}(f'^\mu(\sigma^+) - g'^\mu(\sigma^-)), \quad (2.29)$$

onde  $f'^\mu$  e  $g'^\mu$  denotam derivadas das funções com respeito a seus respectivos argumentos. Logo,

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)) \quad (2.30)$$

Se a corda está sob condições de contorno de Neumann,  $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = 0$ , de forma que obtemos

$$f'^\mu(\tau) = g'^\mu(\tau). \quad (2.31)$$

Como na igualdade acima as funções  $f'^\mu$  e  $g'^\mu$  possuem o mesmo argumento, a relação é válida para uma variável real qualquer, digamos,  $u$ :

$$f'^\mu(u) = g'^\mu(u), \quad (2.32)$$

ou seja, as funções  $f^\mu$  e  $g^\mu$  diferem por constantes aditivas:

$$f^\mu(u) = g^\mu(u) + b^\mu. \quad (2.33)$$

Podemos referir  $f^\mu$  de modo a absorver tal constante, ou seja,  $f^\mu \rightarrow f^\mu + \frac{b^\mu}{2}$ , de forma que:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (2.34)$$

$$X^\mu(\tau, 0) = f^\mu(\tau). \quad (2.35)$$

Mas ainda temos a segunda condição de Neumann para  $\sigma = \pi$ , ou seja,  $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = 0$ .

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau\pi) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau + \pi) - f'^\mu(\tau - \pi)) = 0 \implies f'^\mu(\tau + \pi) = f'^\mu(\tau - \pi). \quad (2.36)$$

Para uma variável real  $u$ ,

$$f'^\mu(u + \pi) = f'^\mu(u - \pi) \implies f'^\mu(u + 2\pi) = f'^\mu(u). \quad (2.37)$$

Como  $f'^\mu$  é  $2\pi$ -periódica e diferenciável, podemos expressá-la pela sua série de Fourier

$$f'^\mu(u) = a_0^\mu + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{inu} a_n^\mu. \quad (2.38)$$

Uma de suas primitivas é

$$f^\mu(u) = x_0^\mu + a_0^\mu u + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{inu}, \quad (2.39)$$

onde  $x_0^\mu$  são constantes de integração escolhidas convencionalmente.

Substituindo 2.39 em 2.34, obtemos

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{2in} (e^{in(\tau+\sigma)} + e^{in(\tau-\sigma)}) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{in\tau} \cos(n\sigma) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_{-n}^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde utilizamos na segunda igualdade a fórmula de Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , enquanto que na terceira igualdade foi feita a mudança de índice de soma  $n \rightarrow -n$ .

Por fim, por convenção, definimos os coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu &:= \frac{a_{-n}^\mu}{\sqrt{2\alpha'}}, n \in \mathbb{Z}^* \\ a_0^\mu &:= 2\alpha' p^\mu, \end{aligned} \quad (2.41)$$

de forma que a solução de movimento para cordas abertas sob condições de Neumann é

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (2.42)$$

As constantes  $p^\mu$  foram escolhidas para representar o momento total da corda, uma vez que o momento conjugado a  $X^\mu$  é  $P^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu$ , que pode ser interpretado como uma densidade de momento da corda, e isso nos dá

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^\mu = p^\mu. \quad (2.43)$$

As constantes  $x_0^\mu$  foram escolhidas, pois

$$R^\mu(\tau) \equiv \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma X^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau. \quad (2.44)$$

Nos possibilitando interpretar as funções  $R^\mu(\tau)$  como as coordenadas do "centro de massa" da corda, com  $x_0^\mu$  sendo a posição "inicial" ( $x_0^\mu = R^\mu(0)$ ). (Blumenhagen, R. and Lüst, D. and Theisen, S., 2012).

#### 2.4.1.2 Condições de Dirichlet

Nas condições de Dirichlet, temos que  $X^\mu(\tau, 0) = x_0^\mu$  e  $X^\mu(\tau, \pi) = x_1^\mu$  são constantes. Dessa forma, temos que  $\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) = \partial_\tau X^\mu(\tau, \pi) = 0$ . A primeira condição implica em

$$\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau) + g'^\mu(\tau)) = 0 \implies f'^\mu(u) = -g'^\mu(u). \quad (2.45)$$

Entretanto, segunda condição de Dirichlet implica em

$$\partial_\tau X^\mu(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau - \pi) + g'^\mu(\tau - \pi)) = 0 \implies f'^\mu(u + 2\pi) = -g'^\mu(u). \quad (2.46)$$

Unindo os resultados obtidos das duas condições de contorno, obtemo que  $f'^\mu(u + 2\pi) = f'^\mu(u)$ .

Logo, podemos representar  $f'^\mu$  por sua série de Fourier:

$$f'^\mu(u) = a_0^\mu + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{inu} a_n^\mu, \quad (2.47)$$

de forma que

$$f^\mu(u) = b_0^\mu + a_0^\mu u + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{inu}, \quad (2.48)$$

com  $b_n^\mu$  sendo apenas constantes de integração. A partir das condições de Dirichlet acima, é possível concluir que  $f^\mu$  e  $-g^\mu$  diferem por constantes aditivas, de forma que, substituindo 2.48 na solução de d' Alambert, temos que

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + a_0^\mu \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{2in} (e^{in(\tau+\sigma)} - e^{in(\tau-\sigma)}) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_n^\mu}{in} e^{in\tau} i \sin(n\sigma) \\ &= x_0^\mu + a_0^\mu \sigma + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{a_{-n}^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Definindo os coeficientes

$$\alpha_n^\mu := \sqrt{2\alpha'} a_{-n}^\mu, \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad (2.50)$$

$$\alpha_0^\mu := a_0^\mu := \frac{(x_1^\mu - x_0^\mu)}{\pi} \sigma, \quad (2.51)$$

temos a forma final da solução  $X^\mu$  sob condições de Dirichlet:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \frac{(x_1^\mu - x_0^\mu)}{\pi} \sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (2.52)$$

Vale ressaltar que a solução acima só é válida para coordenadas espaciais, de modo que a coordenada  $X^0$ , para cordas abertas, necessita satisfazer as condições de Neumann.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\mu(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma X^\mu \\ &= \frac{x_1^\mu + x_0^\mu}{2} - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau} (\cos(n\pi) - 1) \\ &= \frac{x_1^\mu + x_0^\mu}{2} + \frac{2\sqrt{2\alpha'}}{\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \neq 2m}} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau}, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\mu(\tau) &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^\mu \\
&= -\frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \int_0^\pi d\sigma \sin(n\sigma) \\
&= \frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \neq 2m}} \frac{\alpha_n^\mu}{n^2} e^{-in\tau}, \quad m \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

ou seja, para cordas sob condições de Dirichlet, não há conservação do momento, que pode ser explicado pela ausência da simetria por translações para essas configurações, uma vez que transladar os extremos não é permitido.

#### 2.4.2 Solução para cordas fechadas

As funções  $X^\mu$  para cordas fechadas não possuem condições de contorno, mas condições de periodicidade  $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ , permitindo-nos obter sua forma geral por um caminho mais rápido. Fixando o parâmetro  $\tau$ , podemos escrever  $X^\mu$  como sua série de Fourier tomando  $\sigma$  como variável:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\sigma} f_n^\mu(\tau). \tag{2.55}$$

Como a equação de onda  $(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X^\mu = 0$  é linear, podemos considerar que  $X^\mu$  é expresso como combinação linear de soluções da mesma equação, ou seja, os modos de Fourier  $f_n^\mu$  satisfazem a mesma equação que  $X^\mu$ :

$$\partial_\tau^2 f_n^\mu(\tau) = -n^2 f_n^\mu(\tau), \tag{2.56}$$

cujas soluções gerais são,

$$f_0^\mu = a_0^\mu \tau + b_0^\mu \tag{2.57}$$

$$f_n^\mu = a_n^\mu e^{in\tau} + b_n^\mu e^{-in\tau}, \quad n \neq 0, \tag{2.58}$$

onde os coeficientes constantes das variáveis foram escolhidos por conveniência. Substituindo as soluções acima na série 2.55, temos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = b_0^\mu + a_0^\mu \tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{in\sigma} f_n^\mu(\tau). \quad (2.59)$$

Renomeando os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0^\mu &:= \alpha' p^\mu \\ b_0^\mu &:= x_0^\mu \\ a_n^\mu &:= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \\ b_n^\mu &:= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde o sinal de barra em  $\bar{\alpha}_n^\mu$  não denota complexo conjugado, mas apenas destaca que  $\bar{\alpha}_n^\mu$  são coeficientes distintos de  $\alpha_n^\mu$ . Temos então a forma final da expansão em modos para cordas fechadas:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \left[ \alpha_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \right]. \quad (2.61)$$

Calculando a posição do centro de massa a partir da equação acima, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\mu(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma X^\mu \\ &= x_0^\mu + \alpha' p^\mu \tau, \end{aligned} \quad (2.62)$$

enquanto que o momento total é

$$\mathcal{P}^\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^\mu = p^\mu. \quad (2.63)$$

Apesar de não ser necessária para determinar a forma geral de  $X^\mu$ , é importante entender como a solução de d' Alembert se desenvolve para cordas fechadas. Partindo de

$$X^\mu = \frac{1}{2} (f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-)), \quad (2.64)$$

e da condição de periodicidade de  $X^\mu$ , temos que

$$f^\mu(\sigma^+) + g^\mu(\sigma^-) = f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) + g^\mu(\sigma^-) \quad (2.65)$$

$$\implies f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) - f^\mu(\sigma^+) = g^\mu(\sigma^-) - g^\mu(\sigma^- + 2\pi). \quad (2.66)$$

Como  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  são variáveis independentes entre si, temos que

$$\begin{aligned} f^\mu(\sigma^+ + 2\pi) &= f^\mu(\sigma^+) \\ g^\mu(\sigma^- + 2\pi) &= g^\mu(\sigma^-). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Além disso, temos as condições de contorno que para  $X^\mu$ , que nos levam a

$$(g'^\mu g'_\mu)(\sigma^-) = (f'^\mu f'_\mu)(\sigma^+) = 0. \quad (2.68)$$

Logo, soluções  $X^\mu$  para cordas fechadas podem ser obtidas, a menos de constantes aditivas, se especificadas as derivadas de  $f^\mu$  e  $g^\mu$ .

### 3 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO MODELO

Neste capítulo damos início à primeira quantização da teoria de cordas clássicas, construindo uma hamiltoniana a partir do qual poderemos extrair os estados mais leves de seu espectro de massa. Duas abordagens são tomadas na literatura: quantização covariante, na qual a invariância de Lorentz é explícita na construção de operadores, ao contrário da unitariedade, cujo mantimento exige dimensionalidade do espaço ambiente dada por  $D = 26$ . Outra abordagem é quantização do cone de luz, mediada por uma transformação conforme dentro do calibre plano, preserva a unitariedade da teoria, mas não manifesta sua invariância de Lorentz. A existência de tal invariância necessita analogamente que a dimensão do espaço ambiente seja igual a 26. Neste capítulo, diferente do posterior envolvendo quantização de Polyakov, manteremos a descrição de folhas-mundo lorentzianas.

#### 3.1 Quantização no cone de luz

O processo de quantização do cone de luz consiste na quantização da teoria clássica com o calibre do cone de luz fixado. As coordenadas do cone de luz em  $(\mathbb{R}^D, \eta)$  são definidas tais que

$$\forall p \in \mathbb{R}^D, p = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^{D-2}), x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1). \quad (3.1)$$

Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}^D$

$$\begin{aligned} a^\mu b_\mu &= -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i \\ a_- &= -a^+, \quad a_+ = -a^-, \quad a_i = a^i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O calibre do cone de luz consiste em usar a simetria residual para fixar

$$X^+(\tau, \sigma) = \tau. \quad (3.3)$$

#### 3.2 Corda aberta

Pelos vínculos do calibre conforme,  $X^-$  pode ser determinado sabendo as coordenadas *transversas*  $X^I$ ,  $I = 2, 3, \dots, D-2$ . Para cordas com condições de Neumann, temos que

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^I}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (3.4)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \partial_\tau X^I(\tau, \sigma) &= 2\alpha' p^I + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \cos(n\sigma) \\ \partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) &= -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) i \sin(n\sigma) \end{aligned} \quad (3.5)$$

As relações de comutação impostas sobre tais campos são as relações de comutação usual para campos (Polchinski, J., 2001)

$$\begin{aligned} [x^+, p^-] &= -i \\ [X^I(\tau, \sigma), \partial_\tau X^J(\tau, \sigma')] &= 2\pi\alpha' i \delta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo os demais comutadores envolvendo variáveis acima todos nulos. Se tomarmos a última relação de comutação acima, temos que

$$[\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma), \partial_\tau X^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i \delta^{IJ} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.7)$$

Pela linearidade do comutador, temos que

$$[\partial_\tau X^I(\tau, \sigma) + \partial_\sigma X^I(\tau, \sigma), \partial_\tau X^J(\tau, \sigma') + \partial_\sigma X^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' \delta^{IJ} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.8)$$

No entanto, substituindo a solução em série de  $X^I$ , também obtemos que o comutador acima é igual à expressão (Zwiebach, B., 2009)

$$2\alpha' \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-i(m+n)(\tau+\sigma)} [\alpha_m^I, \alpha_n^J]. \quad (3.9)$$

Logo,

$$\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \delta^{IJ} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.10)$$

Usando uma extensão  $2\pi$ -periódica da série acima, podemos aplicar em ambos os lados da igualdade o operador integral  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{in\sigma}$ ,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{im\sigma'}$ . Para a série, temos a ortogonalidade das exponencias, isto é

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} e^{im'\sigma} e^{in'\sigma'} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = e^{-i(m'+n')\tau} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J], \quad (3.11)$$

ao passo de que do lado direito da equação de interesse,

$$\begin{aligned} in' \delta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im'\sigma} \partial_\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in'\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') &= i \delta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im'\sigma} e^{in'\sigma} \\ &= -n' \delta_{m'+n',0} \delta^{IJ} \\ &= m' \delta_{m'+n',0} \delta^{IJ} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Uma vez que  $m' + n' = 0 \implies e^{i(m'+n')\tau} = 1$ , temos então que

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}. \quad (3.13)$$

Para cada valor de  $m$ , modos de oscilação satisfazem uma álgebra de operadores de criação e destruição do oscilador harmônico quântico (a menos de um fator multiplicativo). Definimos então o estado  $|0; k\rangle$  como o estado fundamental de momento  $k$  que é aniquilado por modos de oscilação de índice positivo, isto é

$$\alpha_m^I |0; k\rangle = 0, \quad m > 0. \quad (3.14)$$

Temos a densidade lagrangiana proveniente da ação de Polyakov com o calibre do cone de luz, a partir da qual temos a densidade lagrangiana associada. Definimos então a hamiltoniana da teoria clássica como

$$H := \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H} = \int_0^\pi d\sigma \left( \pi \alpha' P^{\tau I} P_I^\tau + \frac{1}{4\pi \alpha'} \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X_I \right), \quad (3.15)$$

onde  $P^{\tau I} = \frac{1}{2\pi \alpha'} \partial_\tau X^I$ . Dos produtos, só restarão termos quadráticos em  $\cos(n\sigma)$  e  $\sin(n\sigma)$  devido a integral em  $\sigma$ . Nesses termos a integral atua filtrando os índices das somas, de forma que o que resta da hamiltoniana é dada por

$$H = \alpha' p^I p_I + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^I \alpha_{I,-n} = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n}. \quad (3.16)$$

A ordem dos modos de oscilação acima é puramente arbitrária uma vez que o produto de funções é comutativo. Ao quantizarmos a teoria, no entanto, todos os termos da série anti-comutam. Caso queiramos ordenar a hamiltoniana de forma a manter os operadores de destruição sempre à direita, haverá uma ambiguidade de hamiltonianas: podemos tomar uma hamiltoniana ordenada somada a um número inteiro  $a$ . Podemos eliminar  $a$  comutando  $a$  produtos da série, de forma que a expressão restante é equivalente à hamiltoniana clássica para um  $a \in \mathbb{Z}$  qualquer. Por conta disso, escrevemos a hamiltoniana quântica da teoria na forma

$$H = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + a, \quad (3.17)$$

a fim de buscar determinar  $a$ . Uma maneira heurística de determinar essa constante é por meio da regularização da função zeta de Riemann. Primeiramente tomamos a hamiltoniana quântica não ordenada

$$H = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^I \alpha_{I,-n} \quad (3.18)$$

e, para cada valor de  $I$ , comutamos todos os produtos não ordenados da série, de modo que

$$H = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad (3.19)$$

onde o fator  $D-2$  vem da soma sobre o índice  $I$ . A última soma do lado direito evidentemente diverge, tornando a hamiltoniana escrita na forma acima nada prática de se trabalhar. Uma maneira de atribuir significado físico a esse termo é compará-lo à função zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{Re } s > 1. \quad (3.20)$$

A função zeta possui uma única extensão analítica sobre  $\mathbb{C}$ , isto é, uma função holomorfa definida sobre todo o plano que coincide com  $\zeta(s)$  região  $\text{Re } s > 1$  (Becker, K. and Becker, M. and Schwarz, J.H., 2006) dada por

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (3.21)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama usual. A extensão analítica, que chamamos também de  $\zeta$  propositalmente, é tal que

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (3.22)$$

A interpretação física da série divergente é feita de modo que substituimos à força a série em  $n$  pelo valor de  $\zeta(-1)$ , tal que a hamiltoniana fisicamente correta é dada por

$$H = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + \frac{2-D}{24}. \quad (3.23)$$

Como no caso clássico,  $p^-$  é identificado como a hamiltoniana, impomos tal identificação na teoria quântica também, de forma que o operador de massa é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} m^2 &= p_{\mu} p^{\mu} \\ &= 2p^+ p^- + p^I p_I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + \frac{2-D}{24} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( N + \frac{2-D}{24} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde  $N$  é denominado operador de nível e usamos o fato de  $p^+$  ser o momento conjugado de  $x_-$  da lagrangiana  $L = \int_0^{\pi} \mathcal{L} d\sigma$ , de modo que

$$p^+ = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\tau} x_-)} = \frac{1}{2\alpha'}. \quad (3.25)$$

Dessa forma, podemos analisar o espectro de cordas abertas. O estado fundamental  $|0; k\rangle$  é tal que  $N|0; k\rangle = 0$ , de modo que

$$m^2 |0; k\rangle = \frac{2-D}{24\alpha'} |0; k\rangle. \quad (3.26)$$

o autovalor de massa ao quadrado desse estado é negativo para  $D > 2$ . Podemos analisar estados  $|\psi\rangle$  para os quais  $N|\psi\rangle = |\psi\rangle$ . Ocorre-nos que só existem  $D - 2$  estados que obedecem a essa equação, sendo

$$|\psi\rangle = \alpha_{-1}^I |0; k\rangle. \quad (3.27)$$

Para tais estados,

$$m^2 = \frac{26 - D}{24\alpha'}. \quad (3.28)$$

Classicamente, como  $m^2$  é um escalar,  $D$  deve ter um valor específico. Em  $D$  dimensões, partículas não massivas são determinadas por quadrivetores tipo luz, que são especificados por  $D - 2$  componentes<sup>1</sup>. Precisamente o mesmo número de estados de excitação igual a 1, além disso, vetores associados a partículas massivas podem ser especificadas por vetores de  $D - 1$  componentes (Polchinski, J., 2001). Por esta razão, associamos tais estados com o de uma partícula sem massa, de modo que  $m^2|\psi\rangle = 0 \implies D = 26$ . Dessa forma, a invariância de Lorentz da teoria, necessária para garantir invariância do escalar  $m^2$  implica necessariamente que  $D = 26$ .

Ao irmos para cordas fechadas, o processo de quantização da teoria é perfeitamente análogo. Começamos com a solução harmônica das equações de movimento é da forma

$$X^I = x^i + \frac{p^I}{p^+} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{\alpha_n^I}{n} e^{in(\sigma+\tau)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n} e^{in(\sigma-\tau)} \right). \quad (3.29)$$

As relações de comutação obtidas são as mesmas para o caso de cordas abertas, de modo que

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = [\tilde{\alpha}_m^I, \tilde{\alpha}_n^J] = m \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}, \quad (3.30)$$

onde  $\alpha_n^I$  e  $\tilde{\alpha}_n^J$  comutam para quaisquer  $I, J, n, m$ . A hamiltoniana gora possui dois operadores de nível, e dois fatores relativos às constantes de ordenamento da hamiltoniana, isto é

<sup>1</sup> De forma mais geral, é necessário que o espaço vetorial cujo vetor que descreve a partícula pertença seja associado a alguma representação de um grupo, neste caso o grupo  $SO(D - 2)$  (Polchinski, J., 2001)

$$H = \alpha' p^I p_I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_{I,n} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^I \tilde{\alpha}_{I,n} + \frac{2-D}{24} + \frac{2-D}{24}, \quad (3.31)$$

de modo que

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} \left( N + \tilde{N} + \frac{2-D}{12} \right), \quad p^+ = \frac{1}{\alpha'}. \quad (3.32)$$

Para cordas fechadas, buscamos estados físicos da teoria que independam de translações ao longo de  $\sigma$ , de modo que o gerador de translações ao longo de  $\mathbb{S}^1$  seja nulo (Polchinski, J., 2001), isto é

$$\int_0^{2\pi} \partial_\tau X^I \partial_\sigma X_I d\sigma = 0. \quad (3.33)$$

Entretanto, substituindo a solução das equações de movimento, obtemos que

$$\int_0^{2\pi} \partial_\tau X^I \partial_\sigma X_I d\sigma = \tilde{N} - N, \quad (3.34)$$

de forma que fisicamente devemos ter estados para os quais  $N = \tilde{N}$ . O estado fundamental  $|0; k\rangle$  é tal que

$$m^2 = \frac{2-D}{6\alpha'} < 0, \quad D > 2. \quad (3.35)$$

A título de comparação, ao estudarmos campos escalares  $\phi$  de massa quadrática  $m^2$  associado a um potencial  $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ , temos que  $\phi = 0$  assume o papel de um máximo global, o seja, um ponto de equilíbrio instável. Tal fato faz com que a probabilidade do estado de vácuo evoluir num estado diferente dele mesmo seja não nula, o que em teoria quântica de campos, chamamos de instabilidade do vácuo.

Os estados físicos de excitação igual a um, para  $N$  e  $\tilde{N}$  são

$$\alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J |0; k\rangle \quad (3.36)$$

Tais estados constituem componentes de um tensor de *rank*  $(2, 0)$  de  $\text{SO}(D-2)$  (os índices transversos se referem a subespaços de geometria euclideana). Como a representação em

questão é deste grupo, associamos estes estados a partículas não massivas. De forma mais geral, podemos decompor o tensor em questão em três partes distintas: um tensor simétrico de traço nulo, um tensor antissimétrico, e um escalar

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J |0; k\rangle &= \left( \alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J + \alpha_{-1}^J \tilde{\alpha}_{-1}^I + \frac{2\delta^{IJ} \alpha_{-1}^K \tilde{\alpha}_{K,-1}}{D-2} \right) |0; k\rangle \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J - \alpha_{-1}^J \tilde{\alpha}_{-1}^I) |0; k\rangle + \frac{\delta^{IJ} \alpha_{-1}^K \tilde{\alpha}_{K,-1}}{D-2} |0; k\rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

O tensor simétrico é usualmente associado ao gráviton (Blumenhagen, R. and Lüst, D. and Theisen, S., 2012), enquanto que o tensor antissimétrico e escalar são associados ao campo de Kalb-Ramond e ao dílaton, respectivamente. Os demais estados são massivos e podem ser obtidos excitando o estado fundamental de forma a manter o vínculo físico  $N = \tilde{N}$ . Mais a frente, tais estados serão associados a campos semi-clássicos. Mais precisamente, associaremos o gráviton a uma métrica  $G$ , e os estados antissimétrico e escalar a uma 2-forma e a um campo escalar, respectivamente. Essa associação não é direta. No seção 3.7 de (Polchinski, J., 2001) é dada uma justificativa de que uma ação construída com tais tipos de campos, quando aproximada supondo que tais campos são "fracos", induz uma função de partição que se assemelha a uma construída com o valor médio de operadores correspondentes aos estados aqui obtidos, denominada correspondência estado-operador (Schottenloher, M., 2008).

## 4 QUANTIZAÇÃO DE POLYAKOV

Neste capítulo fazemos referência a algumas informações sobre teoria de campos conforme contidas no apêndice B, em particular à correspondência estado-operador em CFTs.

### 4.0.1 Rotação de Wick

De maneira informal, uma integral de caminho com respeito à uma teoria clássica de campos definida por uma ação  $S$  é esquematicamente escrita na forma

$$\int e^{iS} \mathcal{D}X, \quad (4.1)$$

onde não especificamos a priori a natureza do domínio de integração quanto da suposta "medida"  $\mathcal{D}X$  e realizamos passos algébricos tratando-a como uma integral de Riemann ou Lebesgue usual. Apesar disso, a presença da exponencial complexa torna difícil definir um conceito de convergência para tal integral pelo seu caráter oscilatório. Uma solução comumente tomada em livros como (Ryder, L.H., 1996; Ramond, P., 2020), denominada rotação de Wick, consiste realizar uma "continuação analítica" na variável temporal de um espaço-tempo (geralmente tomado como o espaço de Minkowski  $\mathbb{M}^4$ ), isto é, definindo uma variável  $t := -i\tau$ . Em princípio tal mudança afeta a assinatura do campo tensorial métrico de lorentziano para riemanniano. Contudo, uma mudança na estrutura geométrica de um espaço não pode consistir somente de uma simples mudança de coordenadas.

Até então, o mais próximo que possuímos de uma versão matematicamente rigorosa de uma rotação de Wick é dada pelo teorema da reconstrução de Osterwalder-Schrader (Osterwalder, Konrad and Schrader, Robert, 1973), que estabelece uma relação entre uma teoria quântica de campos axiomática euclideana e sua versão minkowskiana, mais especificamente relacionando funções de  $n$ -pontos de uma teoria relativística, denominadas funções de Wightman, com funções de  $n$ -pontos euclidianas, denominadas funções de Schwinger (Wightman, A S and Garding, L, 1965; Glimm, J. and Jaffe, A., 2012). A principal justificativa para realizar uma rotação de Wick é que as integrais de caminho, mesmo em sua forma esquemática, assumem uma estrutura mais bem comportada:

$$\int e^{-S} \mathcal{D}X, \quad (4.2)$$

de modo que funções de  $n$ -pontos nesse tratamento são melhor definidas. Textos como (Polchinski, J., 2001; Cecotti, S., 2023) realizam essa transição de folhas-mundo minkowskianas para riemannianas nos primeiros capítulos, enquanto que livros como (Erbin, H., 2021) tomam estruturas riemannianas desde o princípio, de modo que a partir de agora pressuporemos tal escolha. De forma clara, tomamos  $(\Sigma, \gamma)$  como uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com ou sem bordo. Em teoria de cordas, essa escolha é particularmente vantajosa pois superfícies orientáveis possuem uma estrutura complexa natural que as torna variedades complexas de dimensão 1, também chamadas de superfícies de Riemann. Além disso, folhas-mundo compactas com puncturas podem ser classificadas segundo sua característica de Euler, algo que explicaremos no próximo capítulo.

#### 4.1 Soma sobre folhas-mundo

Na teoria quântica de campos usual, um processo de espalhamento é descrito por  $n$  partículas, sujeitas cada uma a condições iniciais, cujas informações são dadas a  $n$  estados iniciais num espaço de Hilbert. Tais partículas viajam no espaço ambiente considerado e interagem, por hipótese, em uma região finita do espaço-tempo, cujo resultado são  $m$  partículas que viajam até  $m$  determinadas configurações, analogamente identificadas por  $m$  estados. Amplitudes de espalhamento são as grandezas de interesse ao analisar tais processos em partículas. Uma forma de simplificar o cálculo dessas amplitudes envolve considerar estados incidentes e espalhados como assintóticos, isto é, estados incidentes do infinito, e estados espalhados para o infinito. Isso permite tomá-los como estados livres, pois estão suficientemente "distantes" da região de interação. A visualização de tais interações é dada pictorialmente por diagramas de Feynmann com  $n + m$  pernas externas e vértices que denotam regiões pontuais de interação.

O caso envolvendo cordas é similar: queremos analisar  $n$  cordas, que vêm de uma região suficientemente distante de uma região na qual ocorre uma determinada interação, resultando em  $m$  cordas que se espalham no infinito. Assim como para partículas, determinar tais amplitudes envolve calcular contribuições de todas as possíveis trajetórias entre os estados inicial e final de um sistema, para cordas devemos considerar possíveis junções e separações de cordas. Como mostramos na figura seguir, intuitivamente visualizamos a amplitude de espalhamento de uma corda fechada em outra corda fechada como tendo contribuições de diferentes situações: uma corda que não interage; uma corda que se divide em duas cordas fechadas que depois se unem novamente e assim por diante. Cada separação seguida de uma junção gera um "buraco" na

trajetória de espalhamento.

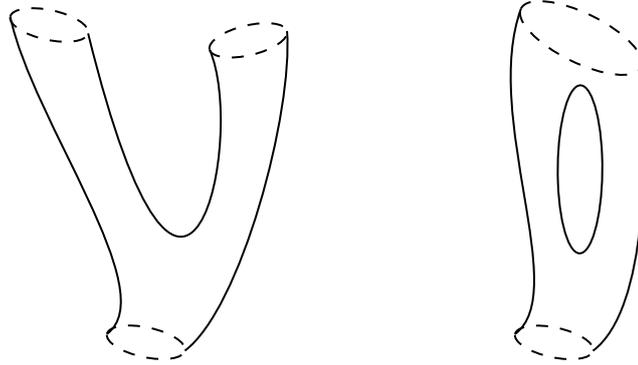


Figura 1 – Exemplos de trajetórias de cordas fechadas. As seções tracejadas indicam configurações assintóticas.

No caso de variedade conexas, que é o caso aqui suposto, tal número  $g \in \mathbb{Z}$  de "buracos" representa um invariante topológico denominado *genus*. Grosso modo, dada uma superfície  $S$  que é dada por uma junção<sup>1</sup> de  $g$  toros  $S^1 \times S^1$ , o número inteiro  $g$  é preservado por homeomorfismos. Uma vez que cada toro, visto geometricamente como uma rosca, apresenta um buraco, atribuímos  $n$  informalmente à contagem de buracos numa superfície. Logo, analisar a amplitude de espalhamento de cordas interagentes se resume a somar sobre possíveis topologias para o problema abordado. Mais especificamente, é necessário calcular uma integral de caminho da forma

$$\sum_{\text{topologias}} \int D\gamma DX e^{-S} \quad (4.3)$$

levando em consideração cada topologia possível em  $\Sigma$ , o que pode interferir também no conjunto  $\text{Met}(\Sigma)$ .

<sup>1</sup> Tal junção trata de uma união conexa (Lee, J., 2010): dadas variedades topológicas conexas  $M_1$  e  $M_2$  e abertos regulares  $B_i \subseteq M_i, i = 1, 2$ , a variedade topológica  $(M_1 \setminus B_1) \cup (M_2 \setminus B_2)$  é denominada união conexa entre  $M_1$  e  $M_2$ .

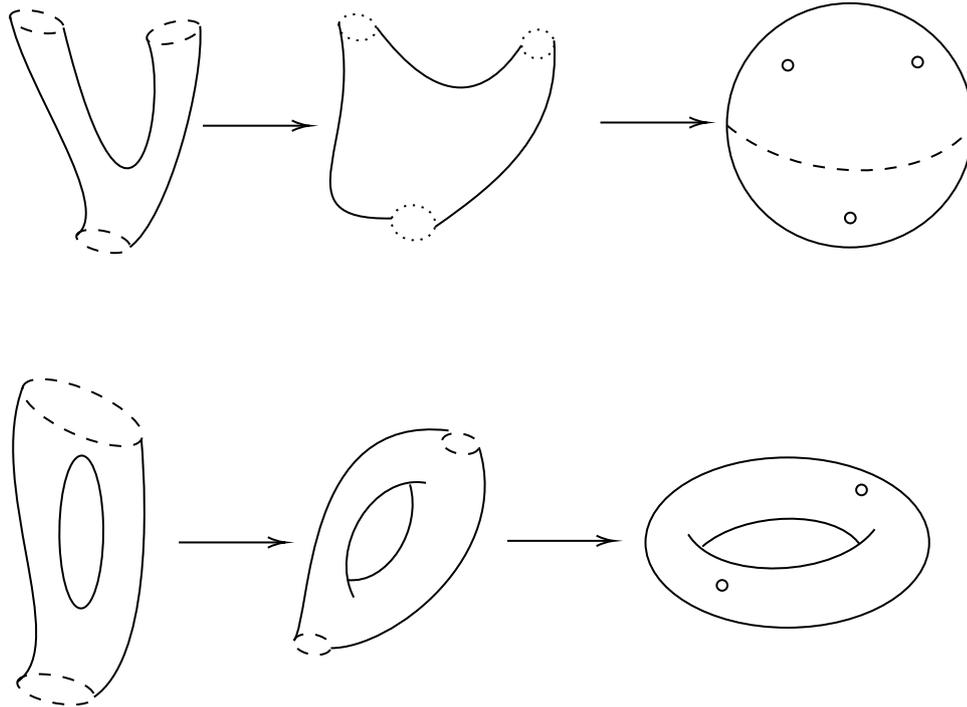


Figura 2 – Transformações que modelam as trajetórias de cordas em superfícies esféricas e tóricas. Cada seta indica um mapeamento via homeomorfismo entre as superfícies.

Considerar problemas de espalhamento com estados inicial e final ambos assintóticos faz com que tais estados assintóticos possam ser mapeados continuamente para punturas. Novamente, cada estado assintótico é representada por um estado no espaço de Fock do modelo, os quais possuem correspondentes biunívocos dados por operadores de vértice. Podemos então, em vez de considerar as punturas propriamente, podemos lidar em seus lugares com operadores de vértices e considerar a trajetória de espalhamento sem quaisquer pontos removidos. A vantagem de tal procedimento é o de que agora tais superfícies são compactas: superfícies compactas, conexas e orientáveis são classificadas do ponto de vista topológico unicamente com base em seus *genus*.

Tal classificação permite tomar uma função de partição esquematicamente da forma

$$\sum_{g=1}^{\infty} \int D\gamma DX e^{-S}. \quad (4.4)$$

Essa representação nos permite interpretar os *genus* das folhas-mundo como um parâmetro perturbativo, em que ordem mais altas representam mais possíveis interações entre cordas. Por esta razão a função de partição calculada apenas para  $g = 0$  (topologia esférica) é denominada nível de árvore (Polchinski, J., 2001), e representa o grau perturbativo com respeito a  $g$  que utilizaremos no restante deste trabalho.

## 4.2 Problema da fixação de calibre

A ação riemanniana clássica da teoria de cordas com simetria de Weyl pode ser escrita de forma mais geral como (Polchinski, J., 2001)

$$S[X, \gamma] = S_X + \lambda \chi, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

$$S_X = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu d^2\sigma \quad (4.6)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{g} R d^2\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} k ds, \quad (4.7)$$

onde  $R$  é a curvatura de Ricci da folha mundo e  $k$  é a curvatura geodésica da fronteira da folha mundo definida por  $k = -\langle \nabla_t t, n \rangle = -t^a n_b \nabla_a t^b$ , onde  $t$  é campo vetorial tangente a  $\partial\Sigma$  unitário, e  $n$  é o campo vetorial normal a  $\partial\Sigma$ , também de norma unitária. Para cordas fechadas,  $\partial\Sigma = \emptyset$  e a integral em  $ds$  se anula. A integral em  $R$  se anula devido as condições de contorno usuais da corda fechada. Para cordas abertas, o termo de  $R$  não se anula, sendo o contrafator de cancelamento a integral da curvatura geodésica. Ambos os termos de  $\chi$  não afetam as equações de movimento da corda, mantendo as soluções  $X^\mu$  como funções harmônicas em  $\Sigma$ .

Tais termos adicionais servem para representar, no caso de folhas-mundo compactas riemannianas, a característica de Euler de  $\Sigma$ , que é precisamente dada por  $\chi$ . Ao fixarmos o calibre conforme  $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$ , tanto a curvatura escalar quanto a geodésica se anulam ( $t$  e  $n$  são ortogonais, logo  $\nabla_t t$  e  $n$  também serão. Caso o calibre  $\gamma_{ab} = e^{2\omega} \delta_{ab}$  seja escolhido, as curvaturas são igualmente anuladas se tomarmos  $\omega$  como solução da equação de Poisson  $\nabla_a \nabla^a \omega = \frac{R}{2}$  (Polchinski, J., 2001). Partindo para a quantização da teoria, lidamos de cara com um problema. Não podemos tomar a integral de caminho como

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g \exp(-S[X, \gamma]),$$

pois, como a integral de caminho soma contribuições de todas as métricas riemannianas e mergulhos possíveis, métricas e mergulhos relacionados por diffeomorfismos e por transformações de Weyl, que correspondem à mesma trajetória clássica, serão somados de forma desnecessária, podendo inclusive levar a integral a ser divergente. É preciso restringir a integral portanto apenas a métricas e mergulhos que não se relacionem por elementos  $\zeta$  do grupo  $\text{Diff} \times \text{Weyl}$ .

A solução adotada por (Polchinski, J., 2001) consiste em assumir que o grupo de produto direto  $\text{Diff} \times \text{Weyl}$  admite uma medida  $\mathcal{D}\zeta$  a partir da qual o volume do grupo é definido:

$$\text{Vol}(\text{Diff} \times \text{Weyl}) = \int \mathcal{D}\zeta. \quad (4.8)$$

Para isso, definimos o fator  $\Delta_{FP}^{-1}(\gamma)$  para cada métrica riemanniana  $g$  da seguinte forma

$$\Delta_{FP}(\gamma) = \int \mathcal{D}\eta \delta(\gamma - g^\zeta), \quad (4.9)$$

onde  $g^\zeta = \zeta(g)$ , sendo  $\zeta$  uma composição de um difeomorfismo com uma transformação de Weyl. Aqui  $g$  é a métrica cujo calibre desejamos fixar. A atuação de  $\zeta$  é dada por

$$g_{ab}^\zeta(\sigma') = e^{2\omega} \partial'_a \sigma^c \partial'_b \sigma^d \gamma_{cd}(\sigma). \quad (4.10)$$

Se tomarmos a integral incorreta, podemos reescrevê-la como

$$\int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}g \mathcal{D}X \exp(-iS[X, \gamma]). \quad (4.11)$$

Como queremos filtrar apenas as métricas que não se relacionam para algum  $\zeta$ , filtramos a integral de caminho nos dando a expressão correta

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}(\text{Diff} \times \text{Weyl})} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}g \mathcal{D}X \exp(-iS[X, \gamma]) \delta(\gamma - g^\zeta) \Delta_{FP}(\gamma), \quad (4.12)$$

onde o fator de volume do grupo de simetria foi introduzido como fator de normalização. Usando a propriedade de filtragem da função delta, integramos em  $\mathcal{D}g$

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}(\text{Diff} \times \text{Weyl})} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X^\zeta \exp(-iS[X^\zeta, g^\zeta]) \Delta_{FP}(g^\zeta), \quad (4.13)$$

onde usamos a notação  $X^\zeta$ , pois  $\zeta$  também afeta a forma funcional dos campos. Primeiramente, sob uma transformação do grupo de simetria, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{FP}}^{-1}(g^\zeta) &= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g^\zeta - g^{\zeta'}) \\
&= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(\gamma - g^{\zeta^{-1} \cdot \zeta'}), \quad (g^\zeta = g^{\zeta'} \iff \gamma = g^{\zeta^{-1} \circ \zeta'}) \\
&= \int \mathcal{D}\zeta'' \delta(\gamma - g^{\zeta''}), \quad (\zeta'' = \zeta^{-1} \circ \zeta') \text{ e invariância da medida } \mathcal{D}\eta \\
&= \Delta_{\text{FP}}^{-1}(\gamma).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Usando a invariância sob o grupo de simetria da medida  $\mathcal{D}X$  e da ação clássica  $S[X, \gamma]$ , escrevemos a integral de caminho como

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}(\text{Diff} \times \text{Weyl})} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \exp(-iS[X, \gamma]) \Delta_{\text{FP}}(\gamma), \tag{4.15}$$

Como nenhum integrando depende de  $\zeta$ , a integral sobre  $\mathcal{D}\zeta$  se cancela o fator de volume, nos dando que

$$Z = \int \mathcal{D}X \exp(-iS[X, \gamma]) \Delta_{\text{FP}}(\gamma). \tag{4.16}$$

para determinar propriamente  $\Delta_{\text{FP}}(\gamma)$ , trabalhamos com transformações  $\eta$  próximas da identidade, isto é,  $z\eta$  cujas variações provocadas nas componentes de  $g$  são da forma

$$\delta\gamma_{ab} = 2\delta\omega\gamma_{ab} - \nabla_a\delta\sigma^b - \nabla_b\delta\sigma^a. \tag{4.17}$$

A partir disso introduzimos o mapeamento  $P_1$  que leva campos vetoriais da folha mundo em tensores simétricos de ordem  $(0, 2)$ :

$$(P_1\delta\sigma)_{ab} = \frac{1}{2}(\nabla_a\delta\sigma_b + \nabla_b\delta\sigma_a + \gamma_{ab}\nabla_c\delta\sigma^c) = (P_1\delta\sigma)_{ba}.$$

Dessa forma,  $\delta\gamma_{ab}$  pode ser escrito da forma

$$\delta\gamma_{ab} = (2\delta\omega - \nabla_c\delta\sigma^c)\gamma_{ab} - 2(P_1\delta\sigma)_{ab} \tag{4.18}$$

Para transformações próximas da identidade, e denominando  $\mathcal{D}\zeta = \mathcal{D}\delta\omega\mathcal{D}\delta\sigma$ , temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{FP}^{-1}(\gamma) &= \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - g^\zeta) \\
&= \int \mathcal{D}\delta\omega \mathcal{D}\delta\sigma \delta(-\delta\gamma_{ab}) \\
&= \int \mathcal{D}\delta\omega \mathcal{D}\delta\sigma \delta(-(2\delta\omega - \nabla_c \delta\sigma^c) \gamma_{ab} - 2(P_1 \delta\sigma)_{ab})
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Introduzindo a identidade da função delta

$$\begin{aligned}
&\delta(-(2\delta\omega - \nabla_c \delta\sigma^c) g + 2(P_1 \delta\sigma)) = \\
&= \int \mathcal{D}\beta \exp\left(2\pi i \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \beta^{ab} (-(2\delta\omega - \nabla_c \delta\sigma^c) \gamma_{ab} + 2(P_1 \delta\sigma)_{ab})\right).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Só há um fator que depende de  $\delta\omega$  na integral, sendo ele

$$\int \mathcal{D}\delta\omega \exp\left(2\pi i \int_\Sigma d^2\sigma 2\delta\omega \beta^{ab} \gamma_{ab}\right) = \delta\left(2\delta\omega \beta^{ab} \gamma_{ab}\right), \tag{4.21}$$

onde usamos a identidade da função delta novamente. Essa função delta realiza filtragem sobre a integral sobre  $\mathcal{D}\beta$  forçando os campos tensoriais simétricos a serem de traço nulo. Se denotarmos tais campos agora por  $\beta'$ , temos que

$$\Delta_{FP}^{-1}(\gamma) = \int \mathcal{D}\beta' \mathcal{D}\delta\sigma \exp\left(2\pi i \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \beta'^{ab} (2(P_1 \delta\sigma)_{ab})\right), \tag{4.22}$$

onde o outro termo envolvendo  $\gamma_{ab}$  foi anulado pelo processo de filtragem.

Pela relação (A.2.28) de (Polchinski, J., 2001), o fator pode ser invertido por meio da troca dos campos tensorial e vetorial por campos de Grassman, que são os campos fantasma da teoria bosônica:

$$\Delta_{FP}^{-1}(\gamma) = \left[ \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} b_{ab} \nabla^a c^b\right) \right]^{-1} \tag{4.23}$$

onde  $b_{ab}$   $c^a$  são os campos fantasma associados a  $\beta'^{ab}$  e  $\delta\sigma^a$ , respectivamente. Substituindo a expressão de  $\Delta_{FP}^{-1}(\gamma)$  na integral de caminho da teoria, temos que localmente a integral de caminho da teoria toma a forma

$$\int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-S[X, \gamma] - S_f), \tag{4.24}$$

onde  $S_f$  é a ação dos campos fantasma

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} b_{ab} \nabla^a c^b \quad (4.25)$$

Fixemos agora uma métrica de folha mundo conformalmente plana, isto é  $\gamma_{ab} = e^{2\omega} \delta_{ab}$ . Em coordenadas complexas a ação toma a forma

$$\frac{1}{2\pi} d^2z \sqrt{g} (b_{zz} \nabla^z c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla^{\bar{z}} c^{\bar{z}}), \quad (4.26)$$

que é resultante do fato de que as componentes diagonais da métrica em coordenadas complexas são nulas e que  $b_{ab} \nabla^a c^b = g^{am} g^{bn} b_{ab} \nabla_m c_n$ . Desenvolvendo a derivada covariante dos campos  $c$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla^z c^z &= g^{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} c^z \\ &= g^{z\bar{z}} (\partial_{\bar{z}} c^z - \Gamma_{\bar{z}z}^z c^z + \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} c^{\bar{z}}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^z &= \frac{1}{2} g^{za} (\partial_z \gamma_{\bar{z}a} + \partial_{\bar{z}} \gamma_{za} - \partial_a \gamma_{z\bar{z}}) = 0 \\ \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} &= \frac{1}{2} g^{\bar{z}a} (\partial_{\bar{z}} \gamma_{za} + \partial_z \gamma_{\bar{z}a} - \partial_a \gamma_{\bar{z}\bar{z}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

de forma que o processo para  $\nabla^{\bar{z}} c^{\bar{z}}$  é precisamente análogo. Logo,  $\nabla^z c^z = g^{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} c^z = 2e^{-2\omega} \partial_{\bar{z}} c^z$ . Como  $\sqrt{g} = \frac{e^{2\omega}}{2}$ , a ação fantasma é escrita como

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2z (b_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}z} \partial_z c^{\bar{z}}) \quad (4.29)$$

Sob transformações conformais, as componentes da ação constituem de duas teorias  $bc$  e  $\tilde{b}\tilde{c}$ . A primeira com fantasmas  $b = b_{z\bar{z}}$  e  $c = c^z$ , de pesos conformes  $\lambda = 2$  e  $1 - \lambda = -1$ , respectivamente, devido ao caráter tensorial e vetorial das funções. A segunda teoria  $\tilde{b}\tilde{c}$  é tal que  $\tilde{b} = b_{\bar{z}z}$  e  $\tilde{c} = c^{\bar{z}}$ , de pesos respectivos também 2 e  $-1$ . No apêndice sobre teoria de campos conforme neste trabalho, mostramos que que uma teoria  $\tilde{b}\tilde{c}$  tem carga central  $\tilde{c}_f$ , zero para qualquer  $\lambda$ . Para o caso da teoria  $bc$  em questão,  $\lambda = 2$ , a carga central  $c_f$  da teoria é

$$c_f = -3(2\lambda - 1)^2 + 1 = -26. \quad (4.30)$$

Como a carga central da teoria clássica é igual a  $D$ , a carga central da teoria quântica é

$$c = c_X + c_f = D - 26. \quad (4.31)$$

### 4.3 A anomalia de Weyl e a dimensão crítica da teoria de cordas bosônica

Tendo em mãos a integral de caminho da teoria, valores médios podem passar a ser calculados por esta. Entretanto, há um fato a ser considerado: a invariância clássica de Weyl da ação de Polyakov não reflete a invariância de Weyl da teoria quântica. Tomemos o valor médio de uma inserção  $\phi$  qualquer. Se variarmos a métrica por alguma transformação, a variação do valor médio obedecerá

$$\begin{aligned} \delta \langle 1 \rangle &= \delta \int \mathcal{D}X \exp(-S), \quad S = S[X, \gamma] + S_f \\ &= \int \mathcal{D}X \exp(-S) \left( -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} \delta\gamma_{ab} T^{ab} \right), \quad T^{ab} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left\langle \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} \delta\gamma_{ab} T^{ab} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} \delta\gamma_{ab} \langle T^{ab} \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para uma transformação de Weyl,  $\delta\gamma_{ab} = 2\delta\omega\gamma_{ab}$ , de forma que

$$\delta_W \langle 1 \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} \delta\omega \langle T^a_a \rangle. \quad (4.33)$$

Como queremos garantir manter a invariância de Weyl da teoria para valores médios de quaisquer operadores, devemos ter necessariamente que  $T^a_a = 0$ . Dito isso, a função escalar deve ter mesma dimensão que o traço do tensor de energia-momento. A função deve ser invariante sob  $\text{Diff}(\Sigma)$  e  $\text{Iso}(\mathbb{R}^D, \eta)$ , pois por hipótese tais simetrias não foram fixadas. Por último, no caso de uma folha mundo plana o traço do tensor energia-momento deve ser identicamente nulo. Tais condições implicam que, de forma geral,

$$T^a_a = aR, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Para manter a invariância de Weyl em qualquer métrica física da folha mundo, devemos ter que  $a = 0$ . Em particular, caso tomemos uma métrica conformalmente plana, teremos que

$$T_{z\bar{z}} = \frac{a\gamma_{z\bar{z}}R}{2}, \quad (4.35)$$

logo,

$$\begin{aligned} \nabla^{\bar{z}}T_{z\bar{z}} &= \frac{a}{2}\nabla^{\bar{z}}(\gamma_{z\bar{z}}R) \\ &= \frac{a}{2}\partial_z R, \quad (\Gamma_{z\bar{z}}^{\bar{z}} = \Gamma_{\bar{z}z}^z = 0). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como  $\nabla^a T_{ab} = 0$ ,

$$\nabla^z T_{zz} = -\frac{a}{2}\partial_z R. \quad (4.37)$$

Podemos agora ver como ambos os lados da equação acima se alteram mediante uma transformação de Weyl infinitesimal. Ao lado direito, como  $\sqrt{g'}R' = \sqrt{g}(R - 2\nabla^a\nabla_a\omega)$ , para  $\exp^{2\delta\omega} \approx 1 + 2\delta\omega$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta_W R &= R' - R \\ &= e^{-2\omega}(R - 2\Delta\delta\omega) - R \\ &= -2\delta\omega R - 2\Delta\delta\omega. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Fazendo uma expansão em torno de uma folha mundo plana, teremos  $\delta\omega R \approx 0$  e  $\nabla^a\nabla_a\delta\omega \approx 2g^{z\bar{z}}\partial_z\partial_{\bar{z}}\delta\omega = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}\delta\omega$ . Logo,

$$\delta_W \left( -\frac{a\partial_z R}{2} \right) = 4a\partial_z^2\partial_{\bar{z}}\delta\omega. \quad (4.39)$$

A transformação de Weyl de  $T_{zz}$  é da forma (Polchinski, J., 2001)

$$\delta_W T_{zz} = -\frac{c}{6}\partial_z^2\delta\omega. \quad (4.40)$$

Como  $\nabla^z = \partial^z = 2\partial_z$ , concluímos que

$$\delta_W (\nabla^z T_{zz}) = -\frac{c}{3} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \delta \omega. \quad (4.41)$$

Como as variações de Weyl devem ser iguais, temos necessariamente que  $a = -\frac{c}{12}$ . Logo, para garantir a invariância de Weyl da teoria quântica,  $T_a^a = aR = 0 \implies a = 0 \implies c = 0$ . A carga central da teoria, como mostramos anteriormente é dada por  $c = D - 26$ . Logo, a única maneira consistente de garantir a invariância de Weyl na teoria quântica é para  $D = 26$ .

## 5 CORDAS BOSÔNICAS SOB AÇÃO DE CAMPOS DE FUNDO NÃO MASSIVOS

### 5.1 Sobre o uso de métricas gerais

A ideia de considerar espaços curvos na análise de cordas consiste na troca da métrica de Minkowski por uma métrica lorentziana qualquer  $G$ , de modo que a ação do modelo torna-se

$$S_\sigma[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (5.1)$$

Para defender que a ação acima é de fato um caminho correto, no sentido de interpretar uma métrica curva como uma consequência de um quanta de gravidade, dada pelo estado do gráviton, tomamos a exponencial da ação, que está presente na integral de caminho da teoria e toma a aproximação de campo fraco  $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu}(X)$  na exponencial de  $S_\sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \exp -S_\sigma &= \exp -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} (\eta_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \\ &= \exp -S_P \exp -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \chi_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \\ &= \exp -S_P \left( 1 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \chi_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nos baseando na explicação sobre operadores de vértice fornecida em (Polchinski, J., 2001), a grandeza entre parênteses coincide com o operador de vértice do gráviton

$$V_1 = \frac{g_c}{\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} s_{\mu\nu} e^{ik \cdot X} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (5.3)$$

o que nos motiva a interpretar uma métrica curva  $G$  como uma superposição de estados de gráviton. Logo, analisar uma teoria de cordas com uma métrica curva, neste raciocínio, indica estudar a dinâmica de uma corda sob influência dos próprios estados de uma teoria de cordas.

### 5.2 Campos de fundo gerais

Analisaremos a quantização via integral de caminho de uma teoria de cordas sob ação de três campos distintos: uma métrica lorentziana  $G_a$  associada a um espaço ambiente, uma 2-forma  $B$ , denominada forma de Kalb-Ramond, e num campo escalar denominado dílaton. A ação toma a forma

$$S[X, \gamma] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_g \gamma^{ab} G(X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) + i \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} X^* B + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} R^{(\Sigma)} \Phi. \quad (5.4)$$

O termo do dÍlaton é escrito como tal para analisar o caso particular  $\Phi = \text{const.}$ , no qual sua integral torna-se proporcional à característica de Euler da folha-mundo, neste caso uma superfície de Riemann compacta. A integral do pullback da forma  $B$  é, por definição,

$$i \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} X^* B := i \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} X^* B(\partial_{\tau}, \partial_{\sigma}) \sqrt{|\gamma|} d\tau \wedge d\sigma = i \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \varepsilon^{ab} B(X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) dv_{\gamma}, \quad (5.5)$$

onde  $\varepsilon^{ab}$  é um campo tensorial totalmente antissimétrico tal que  $\varepsilon^{12} = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$ . É importante dizer que o fator  $i$  presente na ação do campo  $B$  está presente para garantir que após uma rotação de Wick para retornar a uma assinatura lorentziana, tal ação seja real.

### 5.3 Método da expansão covariante

A fim de analisar perturbativamente a integral de caminho de uma teoria de cordas fechadas sob ação dos campos  $G, B$  e  $\Phi$ , podemos expressar os campos integrados em termos de um extremo clássico  $X : \Sigma \rightarrow M$  pré-fixado, interpretando todos os demais mapas como perturbações quânticas deste. A expansão de campos de fundo nos permite interpretar os campos  $G, B, \Phi$  como "constantes" de acoplamento de uma teoria de campos na folha-mundo. A expansão perturbativa que faremos permitirá definirmos funções beta, associadas à dependência de tais campos com respeito a uma escala de energia  $\mu$  utilizada durante o processo de renormalização. Dado  $\sigma \in \Sigma$ , para um difeomorfismo  $f : \Sigma \rightarrow f(\Sigma) \subset M$  qualquer, escrevemos sua lagrangiana associada como

$$L(f(\sigma)) = \left[ \gamma^{ab}(\sigma) G + i \varepsilon^{ab}(\sigma) B \right] (X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) |_{f(\sigma)} + \alpha' R^{(\Sigma)}(\sigma) \Phi(f(\sigma)) \quad (5.6)$$

onde  $R^{(\Sigma)}$  é a curvatura escalar em  $\Sigma$ . Realizar diretamente uma expansão polinomial de  $G, B$  e  $\phi$  na lagrangiana acima aplicada a um campo  $X' : \Sigma \rightarrow M$  em torno do campo pré-fixado  $X$  resulta numa expressão não explicitamente covariante. Tal expansão portanto não garante que seus termos de ordem  $n$  sejam universais, isto é, dados dois sistemas de coordenadas  $x$  e  $y$  quaisquer, um termo de ordem  $n$  em  $x$  não possui necessariamente o mesmo "peso" que o termo de ordem  $n$  em  $y$ . Apresentaremos a solução formal para tal problema a seguir.

Seja  $X : \Sigma \rightarrow M$  um extremo da ação da teoria clássica, ou seja, um mergulho suave que satisfaz as equações de movimento associadas à lagrangiana (5.6). Dada uma seção suave  $\xi \in \Gamma(TM, \Sigma)$ , definimos um mapa suave  $X' : \Sigma \rightarrow M$  de acordo com (Howe, Paul S. and Papadopoulos, G. and Stelle, K. S., 1988)

$$X'(\sigma) := \exp_{X(\sigma)}(\xi(\sigma)), \quad (5.7)$$

o qual denominamos perturbação quântica de  $X$  sob  $\xi$ . Desse modo, para todo  $\sigma \in \Sigma$ , existe uma única geodésica radial que conecta  $X(\sigma)$  a  $X'(\sigma)$  e que tem velocidade inicial dada por  $\xi(\sigma) \in T_{X(\sigma)}M$ . Agrupando essa informação para todo  $\sigma \in \Sigma$ , definimos o mapa de fluxo

$$\phi : [0, 1] \times \Sigma \rightarrow M, \quad (5.8)$$

tal que para todo  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\phi(\cdot, \sigma) : [0, 1] \rightarrow M$  satisfaz

$$\phi(0, \sigma) = X(\sigma), \quad \phi(1, \sigma) = X'(\sigma), \quad \dot{\phi}(0, \sigma) = \xi(\sigma), \quad D_t \dot{\phi}(t, \sigma) = 0, \quad (5.9)$$

onde  $\dot{\phi}^\mu(t, \sigma) := \partial_t \phi^\mu(t, \sigma)$ ,  $D_t := \nabla_{\dot{\phi}_\sigma(t)}$  e  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita em  $M$ . Para todo  $\sigma \in \Sigma$ , a diferencial  $d\phi_\sigma$  satisfaz em  $\phi(t, \sigma) \in M$

Disso, ao definirmos  $\mathcal{L}(t) := L(\phi(t, \sigma))$ , temos que

$$\begin{aligned} L(X'(\sigma)) &= \mathcal{L}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{L}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (D_t)^n \mathcal{L}(t) \Big|_{t=0} \\ &= L(X(\sigma)) + \nabla_\xi L(X(\sigma)) + \frac{1}{2} \nabla_\xi (\nabla_\xi L(X(\sigma))) + O(3), \end{aligned} \quad (5.10)$$

estando explícita a covariância da expansão<sup>1</sup>. Desse modo a ação em aproximação polinomial é

$$S[X', \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \left\{ L(X(\sigma)) + \nabla_\xi L(X(\sigma)) + \frac{1}{2} \nabla_\xi \nabla_\xi L(X(\sigma)) \right\} d^2\sigma + O(3). \quad (5.11)$$

O termo de ordem 0 na expansão acima é apenas  $S[X, \gamma]$ . O termo de primeira ordem é

<sup>1</sup> Deixemos claro que neste ponto do trabalho, toda letra grega que não  $\xi$ , que denota aqui uma seção suave, vale que  $\nabla_\mu := \nabla_{\partial_\mu}$ , sendo  $\partial_\mu$  um elemento da base coordenada local de  $TM$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \nabla_{\xi} L(X(\sigma)) d^2\sigma &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \left\{ \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) (\nabla_{\xi} X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) \right. \\
&\quad + \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) (X_*(\partial_a), \nabla_{\xi} X_*(\partial_b)) \\
&\quad \left. + \varepsilon^{ab} (\nabla_{\xi} B) (X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) + \alpha' R^{(\Sigma)} \nabla_{\xi} \Phi \right\} d^2\sigma \quad (5.12) \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \left\{ 2 \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) (\nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, X_*(\partial_b)) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{ab} (\nabla_{\xi} B) (X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) + \alpha' R^{(\Sigma)} \nabla_{\xi} \Phi \right\} d^2\sigma.
\end{aligned}$$

Podemos reduzir (5.12) a um termo de fronteira, que pode ser devidamente anulado, e a um termo que corresponde à variação funcional de  $S[X, \gamma]$  com respeito a  $X$ , que é nulo pois este é extremo clássico da teoria.

Explicitando também o termo de segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{1}{2} \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} L(X(\sigma)) &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \left\{ \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) (\nabla_{\xi} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, X_*(\partial_b)) \right. \\
&\quad + \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) (\nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi) \\
&\quad + 2\varepsilon^{ab} (\nabla_{\xi} B) (\nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, X_*(\partial_b)) \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^{ab}}{2} (\nabla_{\xi} \nabla_{\xi} B) (X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) + \frac{\alpha'}{2} R^{(\Sigma)} \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} \Phi \right\} d^2\sigma \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Sabendo que o tensor de Riemann  $Rie : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  é definido por

$$Rie(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y]Z + \nabla_{[X, Y]}Z, \quad dx^{\mu} (Rie(\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}, \partial_{\nu})) := R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}, \quad (5.14)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\xi} \nabla_{\partial_a X} \xi &= Ric(\xi, \partial_a X, \xi) + \nabla_{\partial_a X} \nabla_{\xi} \xi - \nabla_{[\xi, \partial_a X]} \xi \\
&= Ric(\xi, \partial_a X, \xi) \\
&= R^{\mu}_{\alpha\beta\nu}(X) \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \partial_a X^{\nu} \partial_{\mu},
\end{aligned} \quad (5.15)$$

onde usamos o fato de que  $\xi(\sigma)$  é tangente a uma geodésica e que para toda  $f \in C^{\infty}(M)$  no ponto  $X(\sigma)$ ,

$$\begin{aligned}
[\xi, \partial_a X]f &= \xi^\mu \partial_\mu (\partial_a X^\nu \partial_\nu f) - \partial_a X^\nu \partial_\nu (\xi^\mu \partial_\mu f) \\
&= \xi^\mu \partial_\mu \partial_a X^\nu \partial_\nu f + \xi^\mu \partial_a X^\nu \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_a X^\nu \partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu f - \partial_a X^\nu \xi^\mu \partial_\nu \partial_\mu f \\
&= \xi^\mu \partial_\mu \partial_a X^\nu \partial_\nu f - \partial_a X^\mu \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu f \\
&= (\partial_t \partial_a X^\nu - \partial_a \xi^\nu) \partial_\nu f \\
&= (\partial_t \partial_a \phi^\nu(0, \sigma) - \partial_a \partial_t \phi^\nu(0, \sigma)) \partial_\nu f \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Substituindo tais resultados em (5.13), achamos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \frac{1}{2} \nabla_\xi \nabla_\xi L(X(\sigma)) &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \left\{ (\gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B) (Rie(\xi, \partial_a X, \xi), X_*(\partial_b)) \right. \\
&\quad + (\gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B) (\nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi) \\
&\quad + 2\varepsilon^{ab} (\nabla_\xi B) (\nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, X_*(\partial_b)) \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^{ab}}{2} (\nabla_\xi \nabla_\xi B) (X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) + \frac{\alpha'}{2} R^{(\Sigma)} \nabla_\xi \nabla_\xi \Phi \right\} d^2\sigma.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Para simplificar nossa análise, separaremos o termo de segunda ordem (5.13) em funcionais contendo os campos  $G, B$  e  $\Phi$  separadamente:

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \frac{1}{2} \nabla_\xi \nabla_\xi L(X(\sigma)) = S_G^{(2)}[X, \gamma] + S_B^{(2)}[X, \gamma] + S_\Phi^{(2)}[X, \gamma], \tag{5.18}$$

onde

$$S_G^{(2)}[x, \gamma] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \left\{ G_{\mu\nu}(X) \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^\mu \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi^\nu + R_{\mu\alpha\beta\nu}(X) \partial_a X^\nu \partial_b X^\mu \xi^\alpha \xi^\beta \right\}, \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
S_B^{(2)}[X, \gamma] &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ B_{\mu\nu}(X) \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^\mu \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi^\nu + 2\nabla_\alpha B_{\mu\nu} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^\mu \partial_b X^\nu \right. \\
&\quad \left. + \left[ B_{\rho\nu}(X) R^\rho_{\alpha\beta\mu} \partial_b X^\nu \partial_a X^\mu \xi^\alpha \xi^\beta + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta B_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$S_\Phi^{(2)}[X, \gamma] = \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma \sqrt{|\gamma|} R^{(\Sigma)} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi(X) \xi^\alpha \xi^\beta. \tag{5.21}$$

É importante notarmos que a ação (5.20) é invariante sob transformações de calibre  $B \rightarrow B + d\alpha$ ,  $\alpha \in \wedge^1(M)$ . Se tomarmos a 3-forma  $H := dB$ , temos que  $H$  por si só é invariante sob tal transformação. Em coordenadas locais vale

$$H_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \partial_{\mu_1}B_{\mu_2\mu_3} + \partial_{\mu_2}B_{\mu_3\mu_1} + \partial_{\mu_3}B_{\mu_1\mu_2}, \quad (5.22)$$

mas como estamos usando a conexão de Levi-Civita, a equação (5.22) equivale a

$$H_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \nabla_{\mu_1}B_{\mu_2\mu_3} + \nabla_{\mu_2}B_{\mu_3\mu_1} + \nabla_{\mu_3}B_{\mu_1\mu_2}. \quad (5.23)$$

Isso indica que a dinâmica associada ao campo  $B$  deve depender apenas de  $H$  e de suas derivadas, pelo menos até certa ordem. Fato é que podemos reescrever (5.20) como

$$S_B^{(2)}[X, \gamma] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ H_{\alpha\mu\nu} \partial_a X^\alpha \nabla_{X^*(\partial_b)} \xi^\mu \xi^\nu + \frac{1}{2} \nabla_\alpha H_{\beta\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \xi^\beta \right\}, \quad (5.24)$$

cuja obtenção explicitamos em A.

#### 5.4 A ação efetiva a 1-loop em $\alpha'$

Para fazer a teoria da perturbação com relação à ação geral  $S_\sigma$  expandida em termos de  $\xi$ , devemos definir um propagador dos campos  $\xi^\mu$ . Porém, devido à dependência de fundo da métrica  $G$ , essa não é uma tarefa óbvia. Portanto, devemos escolher um quadro local ortonormal em  $TM$  que, por suposição, incorpore inteiramente o world-sheet incorporado  $X(\Sigma)$ . A estrutura  $\{e_I\}$ ,  $I = 0, 1, \dots, D-1$  é definida de modo que

$$G_{\mu\nu} e^\mu_I e^\nu_J = \eta_{IJ}, \quad (5.25)$$

onde  $e_I = e^\mu_I \partial_\mu$ . Essa estrutura define um referencial ortonormal  $e^I$  que satisfaz relações semelhantes no fibrado cotangente  $T^*M$ . Isso nos permite expressar as derivadas covariantes de  $\xi$  usando a conexão de spin  $\omega_\mu$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_{X^*(\partial_a)} \xi)^I &= \partial_a \xi^I + \omega_\mu^I{}_J \partial_a X^\mu \xi^J \\ \partial_a \xi^I + A_a^I{}_J \xi^J, A_a^I{}_J &:= \omega_\mu^I{}_J \partial_a X^\mu, \omega_\mu^I{}_J = -\omega_\mu^J{}_I, \end{aligned} \quad (5.26)$$

Portanto, devemos expressar os termos perturbativos usando essa base de estrutura. A próxima etapa é definir parte de nossos cálculos em uma métrica de folha de mundo localmente plana  $g_{ab} = \delta_{ab}$ .

A integral de caminho padrão usando a expansão do campo de fundo é dada por

$$e^{-\Gamma[X]} = \frac{1}{Z} \int D\xi e^{-S_\sigma[\text{exp}_X(\xi)] - \langle \frac{\delta \Gamma}{\delta X}, \xi \rangle}, Z = \langle 1 \rangle_\sigma \quad (5.27)$$

podemos dividir o termo cinético em  $S_G^{(2)}$  em três partes, uma delas fornecendo um termo cinético livre

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_\gamma \delta^{ab} \partial_a \xi^I \partial_b X^J \eta_{IJ}. \quad (5.28)$$

Uma suposição padrão na renormalização é que podemos expressar a ação efetiva  $\Gamma[X]$  em uma série perturbativa em potências de  $\hbar$ . Aqui, no entanto, consideramos essa expansão como sendo em termos do comprimento da corda quadrada  $l^2 = \alpha'$ :

$$\Gamma[X] = S[X] + \alpha' \Gamma_{1\ell}[X] + \dots, \quad (5.29)$$

onde  $\Gamma_{1\ell}[X]$  denota a ação efetiva do loop de  $\ell = 1$ , que é obtida pelos termos que são quadráticos em  $\xi$  na expansão de fundo, ou seja

$$e^{-\Gamma[X]} = \frac{1}{Z} \int D\xi e^{-S^{(2)}\sigma}. \quad (5.30)$$

Ao chamar

$$S_{\text{free}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_\gamma \delta^{ab} \partial_a \xi^I \partial_b X^J \eta_{IJ} \quad (5.31)$$

e definindo

$$S_\sigma^{(2)} - S_{\text{free}} := S_{\text{int}}, \quad (5.32)$$

concluimos que a ação efetiva do loop de 1 é dada por

$$\begin{aligned}
e^{-\Gamma[X]} &= \frac{1}{Z} \int D\xi e^{-S^{(2)}\sigma} \\
&= \frac{1}{Z} \int D\xi e^{-S_{\text{free}}} \left( e^{-S_{\text{int}}} \right) \\
&= \left\langle e^{-S_{\text{int}}} \right\rangle_{\text{free}} \\
&= \langle 1 \rangle_{\text{free}} - \langle S_{\text{int}} \rangle_{\text{free}} + \frac{1}{2} \langle (S_{\text{int}})^2 \rangle_{\text{free}} + \dots
\end{aligned} \tag{5.33}$$

A ação efetiva geral  $\Gamma[X]$  deve ter a forma

$$\Gamma[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \left\{ M_{\mu\nu} \delta^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} + iN_{\mu\nu} \epsilon^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} + (\dots) \right\}, \tag{5.34}$$

onde os termos restantes denotados por  $(\dots)$  envolvem mais de dois fatores de  $\partial_a X^{\mu}$ .

Observe que, como o world-sheet é plano, não incluímos um fator da forma

$$\alpha' R^{\Sigma} F(X) \tag{5.35}$$

dentro dos colchetes. No entanto, ao trabalhar com uma pequena flutuação da métrica  $g_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}$ , esse termo deve aparecer.

Os tensores do espaço-tempo  $M$  e  $N$  que aparecem em (5.34) são tensores que codificam não apenas os acoplamentos  $G, B, \Phi$ , mas também as divergências associadas a eles que dão origem às funções beta do grupo de renormalização. Como estamos interessados nas próprias funções beta, nosso foco é analisar apenas esses termos em (5.34). Agora, realizaremos a renormalização da teoria encontrando contra-termos por meio da regularização dimensional.

#### 5.4.1 Regularização dimensional de acoplamentos e funções beta do grupo de renormalização

O procedimento padrão de regularização dimensional é considerar uma ação como  $S_{\sigma}$  escrita não em 2, mas em  $2 + \varepsilon$  dimensões. O cálculo de propagadores em  $2 + \varepsilon$ , se forem bem definidos, geralmente nos dá expressões que dependem de  $\varepsilon$  por meio de funções analíticas em algumas regiões do plano complexo, como a função gamma de Euler  $\Gamma(z)$ . Isso nos permite tratar heurísticamente  $\varepsilon$  como um número complexo e realizar séries de Laurent dos resultados e analisar seus polos, ou seja, os coeficientes de  $\varepsilon$  como um número complexo. Ou seja, os

coeficientes de  $\frac{1}{\varepsilon}$  na expansão. Fazemos uma distinção entre os chamados acoplamentos simples, que contêm divergências da teoria, e os acoplamentos renormalizados pelas fórmulas

$$G_{\mu\nu}^{(B)} = \mu^\varepsilon \left[ G_{\mu\nu}(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, \mathcal{T}, B, \Phi) \right]. \quad (5.36)$$

Na expressão acima,  $\mu$  é um número real positivo arbitrário e  $\ell$  é o parâmetro de contagem de loop, de modo que  $G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}$  representa os contra-termos na  $n$ -ésima ordem em  $\varepsilon$  e  $\ell$ -ésima ordem de loop. Em (5.36), a equação é definida de forma que  $G^B$  satisfaça  $\frac{d}{dt} G_{\mu\nu}^B, t = \ln \mu$ , o que significa que a dependência de  $\mu$  de  $G_{\mu\nu}$  deve respeitar essa restrição. Também assumimos que a dependência dos contra-termos  $G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}$  em  $\mu$  é totalmente dada por sua dependência funcional dos acoplamentos renormalizados. As expressões para acoplamentos nus e renormalizados  $B, \Phi$  são análogas a (5.36):

$$B_{\mu\nu}^{(B)} = \mu^\varepsilon \left[ B_{\mu\nu}(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} B_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, \mathcal{T}, B, \Phi) \right] \quad (5.37)$$

$$\Phi^{(B)} = \mu^\varepsilon \left[ \Phi(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi^{(n,\ell)}(G, \mathcal{T}, B, \Phi) \right]. \quad (5.38)$$

Ao diferenciar os dois lados de (5.36), obtemos a equação

$$\frac{d}{dt} G_{\mu\nu} = -\varepsilon G_{\mu\nu} - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n} - \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n}, t = \ln \mu, \quad (5.39)$$

e de forma semelhante para os outros acoplamentos,

$$\frac{d}{dt} B_{\mu\nu} = -\varepsilon B_{\mu\nu} - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{B_{\mu\nu}^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n} - \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{B_{\mu\nu}^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n} \quad (5.40)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi = -\varepsilon \Phi - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{\Phi^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n} - \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{\Phi^{(n,\ell)}}{\varepsilon^n}. \quad (5.41)$$

Desenvolvendo (5.39),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_{\mu\nu} = & -\varepsilon G_{\mu\nu} - \sum_{\ell=1}^{\infty} G_{\mu\nu}^{(1,\ell)} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{G_{\mu\nu}^{(n+1,\ell)}}{\varepsilon^n} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \frac{dG_{\alpha\beta}}{dt} \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}} + \frac{dB_{\alpha\beta}}{dt} \frac{\delta}{\delta B_{\alpha\beta}} + \frac{d\Phi}{dt} \frac{\delta}{\delta \Phi} \right) G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Agora, se usarmos recursivamente as equações (5.39) até (5.41) dentro dos parênteses de (5.42), obteremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G_{\mu\nu} &= -\varepsilon G_{\mu\nu} - \sum_{\ell=1}^{\infty} G_{\mu\nu}^{(1,\ell)} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\left( G_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}} + B_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta B_{\alpha\beta}} + \Phi \frac{\delta}{\delta \Phi} \right)}_{:=\delta} G_{\mu\nu}^{(1,\ell)} \\ &= -\varepsilon G_{\mu\nu} - \sum_{\ell=1}^{\infty} (1 - \delta) G_{\mu\nu}^{(1,\ell)}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Como estamos tratando os campos de fundo  $G, B, \mathcal{T}, \Phi$  como um conjunto de acoplamentos, devemos observar que, se redimensionarmos todos esses campos por

$$(G, B, \Phi) \mapsto (\Lambda^{-1}G, \Lambda^{-1}B, \Lambda^{-1}\Phi), \quad \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (5.44)$$

Os propagadores do loop de  $\ell$ , de onde vêm os contra-termos do loop de  $\ell$ , são alterados por um fator  $\Lambda^{\ell-1}$ . Em outras palavras, os contra-termos obedecem à relação

$$G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(\Lambda^{-1}G, \Lambda^{-1}B, \Lambda^{-1}\Phi) = \Lambda^{\ell-1} G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, B, \Phi). \quad (5.45)$$

A partir disso, obtemos que

$$\begin{aligned} &\left[ \Lambda \frac{d}{d\Lambda} G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(\Lambda^{-1}G, \Lambda^{-1}B, \Lambda^{-1}\mathcal{T}, \Lambda^{-1}\Phi) \right]_{\Lambda=1} \\ &= \left[ -\Lambda^2 \Lambda^{-2} \left( G_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}} + \dots + \Phi \frac{\delta}{\delta \Phi} \right) G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, B, \mathcal{T}, \Phi) \right]_{\Lambda=1} \\ &= -\delta G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, B, \mathcal{T}, \Phi) \\ &= (\ell - 1) G_{\mu\nu}^{(n,\ell)}(G, B, \mathcal{T}, \Phi), \text{ por causa de (5.45)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Substituindo (5.46), obtemos a relação útil

$$\beta_{\mu\nu}^G \frac{d}{dt}G_{\mu\nu} = -\varepsilon G_{\mu\nu} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell G_{\mu\nu}^{n,\ell}(G, B, \Phi), \quad (5.47)$$

e uma expressão semelhante para os outros campos. Portanto, as informações necessárias para calcular as funções beta do grupo de renormalização associada aos acoplamentos de campo de fundo estão contidas inteiramente nos contra-termos do loop de  $\ell$  associados a polos simples em  $\varepsilon = 0$ .

## 5.5 Coeficientes da anomalia de Weyl

Agora vamos analisar como essas funções beta beta estão relacionadas ao traço do tensor de energia-momento na folha-mundo, embora sejam insuficientes para determinar as equações corretas para os campos renormalizados de fundo. A ação bare, ou seja, a ação com relação aos parâmetros bare, é

$$S^B[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^d\sigma \sqrt{g} \left\{ g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu} + i\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + \alpha' R^\Sigma \Phi \right\}. \quad (5.48)$$

A função de partição da teoria é definida como

$$Z = e^{-W[X]} = \int DX e^{-S^B[X]}, \langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \int DX (\dots) e^{-S^B[X]} \quad (5.49)$$

Dado um acoplamento simples dessa teoria, definimos sua densidade simples associada como a derivada funcional da ação simples com relação ao acoplamento escolhido:

$$\begin{aligned} A_{G0}^{\mu\nu} &:= \frac{\delta S_0}{\delta G_{\mu\nu}^B} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \\ A_{B0}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{g} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \\ A_{\Phi 0} &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} R^\Sigma. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Como se espera que a derivada funcional de  $W$  com relação aos acoplamentos renormalizados seja finita, definimos a ordenação normal das densidades (5.50) como

$$A_G^{\mu\nu} = \frac{\delta S_0}{\delta G_{\mu\nu}} \quad (5.51)$$

para  $G$  e de forma análoga para outros acoplamentos. A partir dessa definição, concluímos que

$$A_G^{\mu\nu} = \frac{\delta G_{\alpha\beta}^B}{\delta G_{\mu\nu}} \frac{\delta S_0}{\delta G_{\alpha\beta}^B} + \frac{\delta B_{\alpha\beta}^B}{\delta G_{\mu\nu}} \frac{\delta S_0}{\delta B_{\alpha\beta}^B} + \dots, \quad (5.52)$$

e

$$A_B^{\mu\nu} = \frac{\delta G_{\alpha\beta}^B}{\delta B_{\mu\nu}} \frac{\delta S_0}{\delta G_{\alpha\beta}^B} + \frac{\delta B_{\alpha\beta}^B}{\delta B_{\mu\nu}} \frac{\delta S_0}{\delta B_{\alpha\beta}^B} + \dots, \quad (5.53)$$

e assim por diante. Avaliando explicitamente as derivadas funcionais das quantidades nuas em termos das renormalizadas, obtemos

$$A_G^{\mu\nu} = \mu^\varepsilon \left( \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\delta G_{\alpha\beta}^{(n,\ell)}}{\delta G_{\mu\nu}} \right) A_{G0}^{\mu\nu} + \mu^\varepsilon \quad (5.54)$$

A próxima etapa é definir o tensor de energia-momento no world-sheet como

$$T_{ab} := \frac{-1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_0}{\delta g^{ab}} \implies T_a^a = \frac{-g^{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_0}{\delta g^{ab}}, \quad (5.55)$$

de modo que

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{-g^{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \quad (5.56)$$

é uma quantidade finita e, conseqüentemente, não deve ter polos em  $\varepsilon = 0$  à medida que fazemos a regularização dimensional. Ao realizar uma variação de Weyl de primeira ordem  $e^{2\omega} = 1 + 2\omega + O(\omega^2)$ , a ação nua muda de acordo com

$$\begin{aligned} \delta_W S_0 &= \frac{\varepsilon}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \sigma \omega \left\{ G_{\mu\nu}^B g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + i B_{\mu\nu} \varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R^\Sigma \Phi \right\} \\ &\quad - \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \Phi \Delta^\Sigma \omega \\ &= \varepsilon S_0 - \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \Phi \Delta^\Sigma \omega, \end{aligned} \quad (5.57)$$

com  $\Delta^\Sigma = \nabla^a \nabla_a$  sendo o laplaciano na folha mundo. Concentrando-nos no último termo e observando que  $\Phi = \Phi(X(\sigma))$ , obtemos

$$\int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \Phi(X) \Delta^\Sigma \omega = \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \omega \Delta^\Sigma \Phi(X). \quad (5.58)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \Delta^\Sigma \Phi(X) &= D^a (\nabla_\mu \partial_a X^\mu) \\ &= \partial^a (\nabla_\mu \Phi) \partial_a X^\mu + \nabla_\mu \Phi \Delta^\Sigma X^\mu \\ &= \partial_\nu (\nabla_\mu \Phi) \partial^a X^\mu \partial_b X^\nu + \nabla_\mu \Phi \Delta^\Sigma X^\mu. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Agora, se  $X$  for uma solução clássica, as equações de movimento são,

$$\Delta^\Sigma X^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta + \frac{\varepsilon^{ab}}{2} H^\mu_{\alpha\beta} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta + \frac{\alpha'}{2} R^\Sigma \nabla^\mu \Phi, \quad (5.60)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \omega \Delta^\Sigma \Phi(X) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \omega \left[ \partial_\nu (\nabla_\mu \Phi) \partial^a X^\mu \partial_b X^\nu + \nabla_\mu \Phi \left( -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta + \frac{\varepsilon^{ab}}{2} H^\mu_{\alpha\beta} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta - \alpha' R^\Sigma \nabla^\mu \Phi \right) \right. \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^{2+\varepsilon} \sqrt{g} \omega \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \varepsilon^{ab} \frac{1}{2} \nabla_\alpha \Phi H^\alpha_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\beta + \frac{\alpha'}{2} R^\Sigma \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Se voltarmos a (5.57), a parte proporcional a  $\varepsilon$  é equivalente a  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} S_0$

Mas como  $S_0$  é explicitamente dependente dos acoplamentos simples, temos que

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} S_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} S_0 + \beta_{\mu\nu}^G \frac{\delta S_0}{\delta G_{\mu\nu}} + \beta_{\mu\nu}^B \frac{\delta S_0}{\delta B_{\mu\nu}} + \beta^\Phi \frac{\delta S_0}{\delta \Phi}. \quad (5.62)$$

Se substituirmos isso, teremos que

$$\sqrt{g} T_a^a = -\beta_{\mu\nu}^G \frac{\delta S_0}{\delta G_{\mu\nu}} - \beta_{\mu\nu}^B \frac{\delta S_0}{\delta B_{\mu\nu}} - \beta^\Phi \frac{\delta S_0}{\delta \Phi} - \frac{\partial S_0}{\partial \omega}, \quad (5.63)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0}{\partial \omega} &\equiv \sqrt{g} \frac{1}{4\pi\alpha'} \left( 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi^B g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' \varepsilon^{ab} \nabla_\alpha \Phi^B (H^B)^\alpha_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\beta \right) \\ &+ \frac{\alpha'}{2} R^\Sigma \nabla_\alpha \Phi^B \nabla^\alpha \Phi^B \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ao expandir os parâmetros nus em torno dos renormalizados e tomar a parte não-singular, seguimos (de Alwis, S. P., 1986) e absorvemos os fatores dentro das funções beta: podemos considerar tais fatores como variações infinitesimais, geradas por algum difeomorfismo, aos campos  $G, B, \Phi$ . Assim, pela invariância sob difeomorfismos da integral de caminho tais termos são absorvidos nas definições dos campos, restando computar funções beta associadas aos campos sem as absorções, isto é, sem os termos extra provenientes da variação do dÍlaton. Como resultado, temos que

$$\sqrt{g} T_a^a = -\hat{\beta}_{\mu\nu}^G \frac{\delta S_0}{\delta G_{\mu\nu}} - \hat{\beta}_{\mu\nu}^B \frac{\delta S_0}{\delta B_{\mu\nu}} - \hat{\beta}^\Phi \frac{\delta S_0}{\delta \Phi}, \quad (5.65)$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\mu\nu}^G &= \beta_{\mu\nu}^G + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi \\
\hat{\beta}_{\mu\nu}^B &= \beta_{\mu\nu}^B + \alpha' \nabla_\alpha \Phi H^\alpha_{\mu\nu} \\
\hat{\beta}^\Phi &= \beta^\Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi
\end{aligned} \tag{5.66}$$

É evidente agora que uma condição suficiente para a desaparecimento do traço de  $T_{ab}$  é o conjunto de equações  $0 = \hat{\beta}_{\mu\nu}^G = \hat{\beta}_{\mu\nu}^B = \hat{\beta}^\Phi$ .

## 5.6 Cálculo dos contra-termos

### 5.6.1 Contribuição da métrica $G$

Ao calcular a renormalização da ação efetiva, estamos preocupados apenas com os termos que, em uma folha de mundo localmente plana, têm duas derivadas em  $X$ . Os termos relevantes que vêm da ação associada a  $G$  são tais que

$$\begin{aligned}
\Gamma[X]_{1\ell} &= + \left\langle \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_g \delta^{ab} R_{\mu I J \nu}(X) \partial_a X^\nu \partial_b X^\mu \xi^I \xi^J \right\rangle \\
&+ \left\langle \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_g \delta^{ab} A_a^I A_b^J \xi^M \xi^N \eta_{IJ} \right\rangle \\
&- \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{(4\pi\alpha')^2} \int_\Sigma dv_\gamma \int_\Sigma dv'_g \delta^{ab} \delta^{cd} A_a^I A_c^J \right\rangle (\sigma) A_c^J (\sigma') (\partial_b \xi^I \xi^M)(\sigma) (\partial_d \xi^J \xi^M)(\sigma')
\end{aligned} \tag{5.67}$$

De fato, é possível mostrar que a parte divergente da última integral cancela a parte divergente do termo do meio. Assim, a contribuição restante vem de

$$\begin{aligned}
&+ \left\langle \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_g \delta^{ab} R_{\mu I J \nu}(X) \partial_a X^\nu \partial_b X^\mu \xi^I \xi^J \right\rangle \\
&= + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dv_g \delta^{ab} R_{\mu I J \nu}(X) \partial_a X^\nu \partial_b X^\mu \langle \xi^I \xi^J \rangle.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Ao definir

$$\langle \xi^I(\sigma) \xi^J(\sigma') \rangle := \frac{(2\pi\alpha')}{(4\pi)^2} \mu^{-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2+\varepsilon}} d^{2+\varepsilon} p \frac{e^{i(p, \sigma - \sigma')}}{p^2 + m^2}, \tag{5.69}$$

onde  $\mu$  é a mesma escala de massa que usamos para relacionar os acoplamentos nus e renormalizados, e  $m$  é o regulador de massa IR que surge ao adicionarmos o termo à ação livre (após a renormalização, podemos considerar o limite  $m \rightarrow 0^+$ , se ele existir)

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_g m^2 \eta_{IJ} \xi^I \xi^J. \quad (5.70)$$

O propagador em (5.68) é

$$\begin{aligned} \langle \xi^I(\sigma) \xi^J(\sigma') \rangle &:= \frac{(2\pi\alpha')}{(2\pi)^2} \mu^{-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2+\varepsilon}} d^{2+\varepsilon} p \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{2\pi\alpha'}{4\pi} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\varepsilon} \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{2\pi\alpha'}{4\pi} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)\right) \\ &= -\alpha' \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{\gamma_E}{2} + O(\varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Substituindo isso em (5.68), obtemos o contra-termo correto que devemos adicionar à ação efetiva para cancelar essa divergência:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} R_{\mu\nu} \delta^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \alpha' R_{\mu\nu}\right) \delta^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu}. \quad (5.72)$$

O polo do termo entre parênteses é menos a contribuição da métrica  $G$  para a função beta associada a  $\frac{1}{4\pi\alpha'} \delta^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu}$ . Desconsideramos os demais termos associados à  $G$  pois como é mostrado em (Braaten, Eric and Curtright, Thomas L. and Zachos, Cosmas K., 1985), as divergências provenientes de tais termos se anulam, restando apenas a contribuição aqui calculada. O cálculo em si envolve realizar uma expansão polinomial em uma das variáveis de integração na folha-mundo, como necessitamos fazer no cálculo das contribuições de  $B$  a seguir.

### 5.6.2 Contribuição de $B$

A partir da ação  $S_B^{(2)}$  escrita em termos de  $H$ , há dois fatores que contribuem

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\ell}^B[X] &= \left\langle \frac{1}{2(4\pi\alpha')^2} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \int_{\Sigma} dv'_g \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} (H_{\alpha IJ} \partial_a X^{\alpha})(\sigma) (H_{\omega KL} \partial_a X^{\omega})(\sigma') \partial_b \xi^I \xi^J(\sigma) \partial_d \xi^K \xi^L(\sigma') \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_g i \varepsilon^{ab} \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} H_{\beta\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Os propagadores que envolvem derivadas são obtidos a partir do teorema de Wick. Desenvolvendo o primeiro termo acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(4\pi\alpha')^2} \int_{\Sigma} dv'_g \int_{\Sigma} dv'_g \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} (H_{\alpha IJ} \partial_a X^\alpha)(\sigma) (H_{\omega KL} \partial_a X^\omega)(\sigma') \langle \partial_b \xi^I \xi^J(\sigma) \partial_d \xi^K \xi^L(\sigma') \rangle \\
&= \frac{\mu^{4-2d}}{8(2\pi)^{2d}} \int_{\Sigma} d^2 \sigma \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} (H_{\alpha IJ} \partial_a X^\alpha)(\sigma) \left[ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d^d p d^d k \frac{e^{i(p+k, \sigma - \sigma')}}{(p^2 + m^2)(k^2 + m^2)} \right. \\
&\quad \left. \int_{\Sigma} d^2 x e^{i(p+k, x)} (H_{\omega}{}^{IJ} \partial_a X^\omega)(\sigma - x) \right] \\
&= \frac{\mu^{4-2d}}{8(2\pi)^{2d}} \int_{\Sigma} d^2 \sigma \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} (H_{\alpha IJ} \partial_a X^\alpha)(\sigma) \left[ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d^d p d^d k \frac{p_b(p_d - k_d)}{(p^2 + m^2)(k^2 + m^2)} \right. \\
&\quad \left. \int_{\Sigma} d^2 x e^{i(p+k, x)} \left( (H_{\omega}{}^{IJ} \partial_a X^\omega)(\sigma) + x^\mu \partial_\mu (H_{\omega}{}^{IJ} \partial_a X^\omega)(\sigma) + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu (H_{\omega}{}^{IJ} \partial_a X^\omega)(\sigma) + \dots \right) \right] + \dots, \tag{5.74}
\end{aligned}$$

onde, na segunda linha, reorganizamos a expressão e colocamos a integral na variável  $\sigma'$  à direita. Depois de fazer uma mudança de variáveis  $x = \sigma - \sigma'$ , realizamos uma expansão de Taylor em torno de  $\sigma$ . O termo de ordem zero dessa expansão nos dá uma função delta  $\delta(p+k)$  que usamos para integrar o momento  $k$  e acabar nos dando uma integral logaritmicamente divergente no momento  $p$ . Não consideramos os termos de ordem superior nessa expansão porque eles envolvem derivadas de  $\delta(p+k)$ , o que faz com que todas as integrais de ordem  $n \geq 1$  tenham grau de divergência negativo. Portanto, a contribuição de que precisamos está inteiramente na última linha. Prosseguimos usando as identidades no espaço euclidiano, a saber

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x^2) x_a x_b d^d x &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x^2) \frac{1}{2} x^2 \delta_{ab} d^d x \\
\int_{\mathbb{R}^d} f(x^2) \delta_{bd} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} d^d x &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x^2) \delta^{ac} d^d x. \tag{5.75}
\end{aligned}$$

Isso nos dá a expressão

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^{4-2d}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d p \frac{p^2}{(p^2 + m^2)^2} &= \frac{\mu^{2-d}}{(4\pi)} \left( \frac{m}{\mu} \right)^{d-2} \left( \frac{d}{2} \right) \Gamma \left( \frac{2-d}{2} \right) \\
&= \frac{\mu^{2-d}}{(4\pi)} \left( 1 + (d-2) \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) + O(2) \right) \left( 1 + \frac{d-2}{2} \right) \left( \frac{2}{2-d} + O(0) \right) \\
&= \frac{\mu^{2-d}}{(4\pi)} \left( \frac{2}{2-d} - 2 \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) + O(1) \right) \\
&= \frac{-2\mu^{2-d}}{(4\pi)} \left( \frac{1}{d-2} + \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) + O(1) \right) \\
&= \frac{-2}{(4\pi)} \left( \frac{1}{d-2} + 2 \ln \left( \frac{m^{1/2}}{\mu} \right) + O(1) \right) \tag{5.76}
\end{aligned}$$

cuja parte divergente em  $\varepsilon = d - 2$  nos leva ao contra-termo correto:

$$\frac{1}{16\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \left( \frac{\alpha'}{4\epsilon} H_{\mu\alpha\beta} H_{\nu}{}^{\alpha\beta} \right) \delta^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu}. \quad (5.77)$$

Resta avaliar a contribuição devida a  $S_{\nabla H}$ , que é simples:

$$\begin{aligned} \langle S_{\nabla H} \rangle &= \frac{i}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \epsilon^{ab} \frac{1}{2} \nabla_I H^I{}_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \langle \xi^I \xi^J \rangle \\ &= \frac{i}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \epsilon^{ab} \frac{1}{2} \nabla_I H^I{}_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \left( \frac{(2\pi\alpha') \eta^{IJ}}{(2\pi)^d} \mu^{2-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i(p, \sigma_1 - \sigma_2)}}{p^2 + m^2} d^d p \right) \\ &= \frac{i}{4} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \epsilon^{ab} \nabla_I H^I{}_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \left( \frac{q}{(4\pi)^{d/2}} \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) \Gamma \left( \frac{2-d}{2} \right) \right) \\ &= + \frac{i}{4} \frac{-2}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \epsilon^{ab} \nabla_{\omega} H^{\omega}{}_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) + O(1) \right), \end{aligned} \quad (5.78)$$

cujo contra-termo associado é

$$+ \frac{i}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} \left( \frac{\alpha'}{2\epsilon} \nabla_{\omega} H^{\omega}{}_{\mu\nu} \right) \epsilon^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu}. \quad (5.79)$$

### 5.6.3 Contribuição de $\Phi$

O termo de segunda ordem proveniente da ação do dÍlaton é tratado de forma simples:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\ell}^{\Phi} &= \left\langle \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\gamma} R^{(\Sigma)} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Phi(X) \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right\rangle \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^2 \xi \sqrt{\gamma^{(2)}} R \nabla_I \nabla_J \Phi(X_0) \left\{ -\frac{\eta^{IJ}(X)}{2\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) - \frac{\gamma}{2} + O(\epsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

O termo remanescente que contribui à função beta do dÍlaton envolve realizar uma expansão de campo fraco na métrica da folha-mundo  $\gamma = \eta + h$  e calcular a contribuição de segunda ordem do termo cinético da forma  $h^{ab} \partial_a X^I \partial_b X^J$ . O contra-termo resultante é obtido em (Bonezzi, Roberto and Codina, Tomas and Hohm, Olaf, 2021) e é dado por

$$\frac{D}{24\pi} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Sigma} dv_{\gamma} R^{(\Sigma)}. \quad (5.81)$$

### 5.6.4 Cancelamento da anomalia de Weyl

Com base nas subseções anteriores, concluímos que uma condição suficiente para o cancelamento da anomalia de Weyl da teoria consiste na nulidade simultânea das funções beta, finalmente dadas explicitamente por

$$\beta_{\mu\nu}^G = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\alpha\beta} H_\nu^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.82)$$

$$\beta_{\mu\nu}^B = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\omega H_{\omega\mu\nu} + \alpha' \nabla_\alpha \Phi H^{\alpha}_{\mu\nu} = 0 \quad (5.83)$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \frac{\alpha'}{2} \Delta^M \Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi = 0, \quad (5.84)$$

onde incluímos o fator  $-\frac{26}{6}$  já considerando o procedimento de Fadeev-Popov e a carga central proveniente da teoria  $bc$ . Como dito, as equações acima representam um sistema de vínculos que devem ser satisfeitos pelos campos  $G, B, \Phi$  a fim de que a teoria de cordas fechadas a nível de árvore (com respeito a  $g$ ) possua invariância conforme a nível de 1-loop.

A primeira equação pode ser manipulada tomando seu traço em ambos os lados e multiplicando-a por  $G_{\mu\nu}$ , de modo que o tensor de Einstein da teoria é dado por

$$-2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + G_{\mu\nu} \Delta^M \Phi + \frac{1}{4} H_{\mu\alpha\beta} H_\nu^{\alpha\beta} + \frac{1}{8} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma}, \quad (5.85)$$

de modo que os campos  $B$  e  $\Phi$  atuam como aparentes fontes de matéria se considerarmos as equações de Einstein. No caso de um dÍlaton constante, a terceira equação reduz-se ao resultado do capítulo anterior. Incluindo o caso em que  $H = 0$ , temos que uma teoria de cordas fechadas só é invariante de Weyl em espaços ditos *Ricci flat* em 26 dimensões. Por fim, devemos mencionar o fato de que as equações das funções beta podem ser vistas como soluções de uma ação efetiva no espaço-tempo  $(M, G)$ , dada por (Polchinski, J., 2001)

$$S = \lambda \int_M dv_G e^{-2\Phi} \left[ -\frac{2(D-26)}{3\alpha'} + R^\mu_\mu - \frac{1}{12} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} + 4\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi \right]. \quad (5.86)$$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho introduzimos as ideias básicas de teoria de cordas, partindo de sua construção clássica e geométrica, mostrando principais elementos como simetrias da ação de Polyakov, soluções de equações de movimento via série de Fourier. Desenvolvemos superficialmente a quantização canônica da teoria a fim de elucidar o espectro não massivo da teoria para cordas fechadas livres. A quantização por integral de caminho, contudo, foi a ferramenta principal para analisar um importante aspecto da teoria, tratando-se de sua invariância conforme. Por meio da rotação de Wick, feita para trocar o caráter de assinatura métrica da folha-mundo mostrou-se útil pois nos permitiu simplificar a forma da integral de caminho com respeito a possíveis topologias de folhas mundo, que determinam possíveis interações em problemas de espalhamento entre cordas via a usual matriz  $S$  em teoria quântica de campos.

Por fim, construímos uma forma de avaliar não só a renormalização da teoria quântica de uma corda fechada livre, mas também de obter condições para que a invariância de Weyl, e conseqüentemente a invariância conforme da teoria, fosse preservada. Tais condições estão relacionadas essencialmente com divergências que surgem ao calcularmos a ação efetiva da teoria quântica, que são devidamente cancelados via soma de contra-termos. Mais especificamente, os objetos que obtivemos foram as funções beta do grupo de renormalização, somadas a contribuições provenientes do termo do dilaton, que quebra a invariância de Weyl explicitamente. Como resultado, obtivemos equações de campo para tais funções beta relacionando a curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , a forma  $H = dB$  e derivadas de  $\Phi$ . Os campos  $H$  e  $\Phi$  mostraram associação com uma possível fonte de matéria seguindo a lógica das equações de Einstein.

Temos como perspectivas futuras dois pontos: o de aprender supersimetria a fim de avaliar seu impacto na quantização de uma teoria de cordas, além de realizar um procedimento análogo ao feito neste trabalho para o caso de cordas não relativísticas, que se usam da geometria de Newton-Cartan como modelagem matemática.

## REFERÊNCIAS

- Bahns, Dorothea and Rejzner, Katarzyna and Zahn, Jochen. The Effective Theory of Strings. **Commun. Math. Phys.**, v. 327, p. 779–814, 2014.
- Becker, K. and Becker, M. and Schwarz, J.H. **String Theory and M-Theory: a modern introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=WgUkSTJWQacC>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9781139460484.
- Berman, David S. and Copland, Neil B. and Thompson, Daniel C. Background Field Equations for the Duality Symmetric String. **Nucl. Phys. B**, v. 791, p. 175–191, 2008.
- Blumenhagen, R. and Lüst, D. and Theisen, S. **Basic Concepts of String Theory**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Theoretical and Mathematical Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-3PNFQn6AzcC>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783642294969.
- Blumenhagen, R. and Plauschinn, E. **Introduction to Conformal Field Theory: with applications to string theory**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. (Lecture Notes in Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oB9qCQAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783642004506.
- Bonezzi, Roberto and Codina, Tomas and Hohm, Olaf. Beta functions for the duality-invariant sigma model. **JHEP**, v. 10, p. 192, 2021.
- Bonezzi, Roberto and Codina, Tomas and Hohm, Olaf. Duality invariant string beta functions at two loops. **JHEP**, v. 02, p. 109, 2022.
- Braaten, Eric and Curtright, Thomas L. and Zachos, Cosmas K. Torsion and Geometrostasis in Nonlinear Sigma Models. **Nucl. Phys. B**, v. 260, p. 630, 1985. [Erratum: Nucl.Phys.B 266, 748–748 (1986)].
- Cecotti, S. **Introduction to String Theory**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2023. (Theoretical and Mathematical Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=hsDbEAAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783031365300.
- de Alwis, S. P. Strings in background fields:  $\beta$  functions and vertex operators. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 34, p. 3760–3768, Dec 1986. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.3760>. Acesso em: 26 jan. 2024.
- Erbin, H. **String Field Theory: a modern introduction**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2021. (Lecture Notes in Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=4AkmEAAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783030653217.
- Francesco, P. and Mathieu, P. and Senechal, D. **Conformal Field Theory**. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Contemporary Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5u7jBwAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9781461222569.

Glimm, J. and Jaffe, A. **Quantum Physics: a functional integral point of view.** [S.l.]: Springer New York, 2012. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VSjjBwAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9781461247289.

Gomis, Jaume and Oh, Jihwan and Yan, Ziqi. Nonrelativistic String Theory in Background Fields. **JHEP**, v. 10, p. 101, 2019.

Howe, Paul S. and Papadopoulos, G. and Stelle, K. S. The Background Field Method and the Nonlinear  $\sigma$  Model. **Nucl. Phys. B**, v. 296, p. 26–48, 1988.

Igor Khavkine . **Obtain Lorentzian manifolds from Riemannian ones by Wick rotation.** 2014. MathOverflow. Disponível em: <https://mathoverflow.net/q/165317>. Acesso em: 26 jan. 2024.

Ketov, S.V. **Quantum Non-linear Sigma-Models: from quantum field theory to supersymmetry, conformal field theory, black holes and strings.** [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Theoretical and Mathematical Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=9LHxCAAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783662041925.

Lee, J. **Introduction to Topological Manifolds.** [S.l.]: Springer New York, 2010. (Graduate Texts in Mathematics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZQVGAAAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9781441979407.

Osterwalder, Konrad and Schrader, Robert. Axioms for euclidean Green functions. **Commun. Math. Phys.**, v. 31, p. 83–112, 1973.

Polchinski, J. **String Theory.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. (String Theory 2 Volume Hardback Set). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=54DGYyNAjacC>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9780521633031.

Ramond, P. **Field Theory: a modern primer.** [S.l.]: Taylor & Francis, 2020. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=aXr-DwAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9780429689017.

Ryder, L.H. **Quantum Field Theory.** Cambridge University Press, 1996. (Quantum Field Theory). ISBN 9780521478144. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=nnuW\\_kVJ500C](https://books.google.com.br/books?id=nnuW_kVJ500C)>.

Schottenloher, M. **A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory.** [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Lecture Notes in Physics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=PKEqFYpQNggC>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9783540686255.

Wightman, A S and Garding, L. Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. **Arkiv Fys.**, Vol. 28, 1 1965. <https://www.osti.gov/biblio/4606723>. Acesso em: 26 jan. 2024.

Zwiebach, B. **A First Course in String Theory.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=WpchAwAAQBAJ>. Acesso em: 26 jan. 2024. ISBN 9781139643917.

## APÊNDICE A – CÁLCULOS

**Anulação do termo de primeira ordem em (5.11)**

$$\int_{\Sigma} \left\{ 2 \left( \gamma^{ab} G + \varepsilon^{ab} B \right) \left( \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi, X_*(\partial_b) \right) + \varepsilon^{ab} \left( \nabla_{\xi} B \right) \left( X_*(\partial_a), X_*(\partial_b) \right) + \alpha' R^{(\Sigma)} \nabla_{\xi} \Phi \right\} d^2 \sigma \quad (\text{A.1})$$

Trabalhando separadamente com cada um dos campos externos, temos

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} G_{\mu\nu} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} d^2 \sigma \\ &= 2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \left\{ \partial_a \left[ G_{\mu\nu}(X) \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} \right] - G_{\mu\nu} \xi^{\mu} \nabla_{X_*(\partial_a)} \partial_b X^{\nu} \right\} d^2 \sigma \\ &= 2 \int_{\Sigma} \partial_a \left( \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} \right) d^2 \sigma - 2 \int_{\Sigma} \partial_a \left( \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \right) G_{\mu\nu}(X) \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} d^2 \sigma \\ &\quad - 2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} G_{\mu\nu} \xi^{\mu} \left( \partial_a \partial_b X^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \partial_a X^{\alpha} \partial_b X^{\beta} \right) d^2 \sigma \quad (\text{A.2}) \\ &= \underbrace{2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \tilde{\nabla}_a \left( \gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} \right) d^2 \sigma}_{=0, \text{ se } \partial\Sigma=\emptyset, \text{ ou para } (\partial\Sigma \neq \emptyset + \text{condições de contorno})} - 2 \int_{\Sigma} \partial_a \left( \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \right) G_{\mu\nu}(X) \xi^{\mu} \partial_b X^{\nu} d^2 \sigma \\ &\quad - 2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} G_{\mu\nu} \xi^{\mu} \left( \partial_a \partial_b X^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \partial_a X^{\alpha} \partial_b X^{\beta} \right) d^2 \sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \partial_a \left( \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \right) &= \sqrt{|\gamma|} \left[ \frac{1}{2} \gamma^{mn} \partial_a (\gamma_{mn}) \gamma^{ab} + \partial_a \gamma^{ab} \right] \\ &= \sqrt{|\gamma|} \left[ \Gamma^a_{ac} \gamma^{cb} - \Gamma^a_{ac} \gamma^{cb} - \Gamma^b_{ac} \gamma^{ac} \right] \quad (\text{A.3}) \\ &= -\sqrt{|\gamma|} \Gamma^b_{ac} \gamma^{ac}, \end{aligned}$$

a integral anterior resulta em

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \left\{ G_{\mu\nu} \left( \gamma^{ab} \partial_a \partial_b X^{\nu} - \gamma^{ab} \Gamma^c_{ab} \partial_c X^{\nu} \right) + G_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \partial_a X^{\alpha} \partial_b X^{\beta} \right\} \xi^{\mu} \\ &= -2 \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \left\{ G_{\mu\nu} \gamma^{ab} \tilde{\nabla}_a \partial_b X^{\nu} + G_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \partial_a X^{\alpha} \partial_b X^{\beta} \right\} \xi^{\mu}, \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

onde denotamos por  $\tilde{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita na folha-mundo  $(\Sigma, \gamma)$ .

O passo par integral em  $B$  é essencialmente análogo, de modo que no lugar de um termo de conexão de Christoffel  $\Gamma$ , há a derivada exterior de  $B$ ,  $H = dB$ .

Reformulação de (5.20) em termos de  $H = dB$ .

*Termo referente a H*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \nabla_{X^*(\partial_b)} \xi^\nu + 2 \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \right\} d^2 \sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ \partial_b [B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \xi^\nu] - \nabla_{X^*(\partial_b)} B_{\mu\nu} \xi^\nu \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu - B_{\mu\nu} (\nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu) \xi^\nu \right. \\
&\quad + \xi^\alpha \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \partial_b X^\nu + \partial_a [\nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\alpha \partial_b X^\nu] - \nabla_{X^*(\partial_a)} (\xi^\alpha \nabla_\alpha B_{\mu\nu}) \xi^\mu \partial_b X^\nu \\
&\quad \left. - \xi^\alpha \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\mu \nabla_{X^*(\partial_a)} \partial_b X^\nu \right\} d^2 \sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ \partial_b [B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \xi^\nu] + \nabla_{X^*(\partial_b)} B_{\mu\nu} \xi^\mu \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\nu - B_{\mu\nu} (\nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu) \xi^\nu \right. \\
&\quad + \xi^\alpha \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \partial_b X^\nu + \partial_a [\nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\alpha \partial_b X^\nu] + (\nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\alpha) \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\nu \partial_b X^\mu \\
&\quad \left. - \xi^\alpha \partial_a X^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\mu \partial_b X^\nu \right\} d^2 \sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \partial_b [B_{\mu\nu} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu \xi^\nu] d^2 \sigma + \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \partial_a [\nabla_\alpha B_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\alpha \partial_b X^\nu] d^2 \sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \{ \nabla_\alpha B_{\mu\nu} + \nabla_\mu B_{\nu\alpha} + \nabla_\nu B_{\alpha\mu} \} \partial_b X^\alpha \xi^\mu \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\nu d^2 \sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \{ \nabla_\mu \nabla_\alpha B_{\beta\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \xi^\beta + B_{\mu\nu} (\nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu) \xi^\nu \} d^2 \sigma
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Na última igualdade, a integral contendo  $\partial_b[\dots]$  se anula: ao integrarmos por partes, um dos termos envolve  $\partial_b[\sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab}](\dots) = 0$ , enquanto o restante envolve uma integral da forma  $\int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \tilde{\nabla}_b v^b$ . Ao usarmos o teorema da divergência, esse se anula tanto para  $\partial\Sigma = \emptyset$ , quanto para o caso  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  com determinadas condições de contorno. Tal procedimento é análogo para a integral envolvendo  $\partial_a[\dots]$ , de modo que o restante é

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ [\nabla_\alpha B_{\mu\nu} + \nabla_\mu B_{\nu\alpha} + \nabla_\nu B_{\alpha\mu}] \partial_b X^\alpha \xi^\mu \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\nu - \nabla_\mu \nabla_\alpha B_{\beta\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \xi^\beta \right. \\
&\quad \left. - B_{\mu\nu} (\nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu) \xi^\nu \right\} d^2 \sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ H_{\alpha\mu\nu} \partial_a X^\alpha \xi^\nu \nabla_{X^*(\partial_b)} \xi^\mu - \nabla_\mu \nabla_\alpha B_{\beta\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\alpha \xi^\beta - B_{\mu\nu} (\nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^\mu) \xi^\nu \right\} d^2 \sigma.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

**Termo referente a  $\nabla H$**

Tomando os termos que ainda não utilizamos de (5.20) junto à integral

$$- \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma$$

de (A.6), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ B_{\rho\nu} R^{\rho}_{\alpha\beta\mu} \partial_b X^{\nu} \partial_a X^{\mu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right. \\ & \quad \left. - \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right\} d^2 \sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ B_{\rho\nu} R^{\rho}_{\alpha\beta\mu} + B_{\mu\rho} R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Levando em conta que

$$-\nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} = -\nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} B_{\beta\nu} - B_{\rho\nu} R^{\rho}_{\beta\alpha\mu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu}, \quad (\text{A.8})$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ +B_{\mu\rho} R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} B_{\nu\beta} - \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\nu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ +B_{\mu\rho} R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} B_{\nu\beta} + \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} B_{\beta\mu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ +B_{\mu\rho} R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} B_{\nu\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} B_{\beta\mu} \right. \\ & \quad \left. + B_{\rho\mu} R^{\rho}_{\beta\alpha\nu} + B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\mu\alpha\nu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ -B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\mu\nu\alpha} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} B_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} B_{\nu\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} B_{\beta\mu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma \\ &= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ -B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\nu\alpha\mu} - B_{\beta\rho} R^{\rho}_{\mu\nu\alpha} + \nabla_{\alpha} H_{\beta\mu\nu} \right\} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} d^2 \sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Se pegarmos a porção da equação anterior contendo o tensor de Riemann e adicionar à integral remanescente

$$- \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} B_{\mu\nu} \xi^{\nu} \nabla_{X^*(\partial_b)} \nabla_{X^*(\partial_a)} \xi^{\mu}$$

em (A.6), encontramos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ - (B_{\beta\rho} R^{\rho}{}_{\nu\alpha\mu} + B_{\beta\rho} R^{\rho}{}_{\mu\nu\alpha}) \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} - 2B_{\rho\beta} \xi^{\beta} \nabla_{X_*(\partial_b)} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^{\rho} \right\} d^2\sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ B_{\beta\rho} \xi^{\beta} R^{\rho}{}_{\alpha\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} + 2B_{\beta\rho} \xi^{\beta} \nabla_{X_*(\partial_b)} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^{\rho} \right\} d^2\sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ B_{\beta\rho} \xi^{\beta} [\nabla_{X_*(\partial_a)}, \nabla_{X_*(\partial_b)}] \xi^{\rho} + 2B_{\beta\rho} \xi^{\beta} \nabla_{X_*(\partial_b)} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^{\rho} \right\} d^2\sigma \\
&= \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \frac{\varepsilon^{ab}}{2} \left\{ B_{\beta\rho} \xi^{\beta} (\nabla_{X_*(\partial_a)}, \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi^{\rho} + \nabla_{X_*(\partial_b)} \nabla_{X_*(\partial_a)} \xi^{\rho}) \right\} d^2\sigma \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

onde usamos o fato de que

$$Rie(X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)) \xi = [\nabla_{X_*(\partial_a)}, \nabla_{X_*(\partial_b)}] \xi - \nabla_{[X_*(\partial_a), X_*(\partial_b)]} \xi = [\nabla_{X_*(\partial_a)}, \nabla_{X_*(\partial_b)}] \xi.$$

Desse modo, concluímos que o termo (5.20) é igual a

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon^{ab} \left\{ H_{\alpha\mu\nu} \partial_a X^{\alpha} \nabla_{X_*(\partial_b)} \xi^{\mu} \xi^{\nu} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} H_{\beta\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right\}. \tag{A.11}$$

## APÊNDICE B – CONCEITOS BÁSICOS DE CFT APLICADA À TEORIA DE CORDAS

Neste apêndice resumimos informações básicas da teoria de campos conforme aplicada à teoria de campos conforme baseadas no segundo capítulo de (Polchinski, J., 2001).

Ao fixarmos as simetrias da ação de Polyakov, como vimos, há uma simetria residual que torna a ação invariante sobre transformações conformes em  $(\Sigma, \gamma)$ . Ao fixarmos o calibre conforme  $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$  em  $S_P$ , podemos fazer uma identificação com uma métrica euclideana, isto é, por meio da bijeção  $(\tau, \sigma) \mapsto (i\tau, \sigma)$ , a folha mundo adquire uma geometria euclideana e complexa,  $\gamma_{ab} \rightarrow \delta_{ab}$ . Podemos usar essa identificação única para obter propriedades da teoria de cordas usando a linguagem de variáveis complexas.

### Tratamento complexo da ação de Polyakov

Tomemos a ação de Polyakov com  $\gamma = \eta$ .

$$S_P[X] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu.$$

Sob a transformação  $\tau \mapsto i\tau$ , introduzimos coordenadas complexas

$$z := \sigma + i\tau \equiv \sigma^1 + i\sigma^2, \quad \bar{z} := \sigma - i\tau \equiv \sigma^1 - i\sigma^2. \quad (\text{B.1})$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \quad (\text{B.2})$$

Embora  $z$  determine unicamente  $\bar{z}$ , trataremos neste trabalho ambas como variáveis independentes no sentido específico de que

$$\partial_z \bar{z} = \partial_{\bar{z}} z = 0. \quad (\text{B.3})$$

O elemento de linha se altera como

$$ds^2 = (d\sigma^1)^2 - (d\sigma^2)^2 = \left(\frac{dz}{2} + \frac{d\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{2i} - \frac{d\bar{z}}{2i}\right)^2 = dzd\bar{z}. \quad (\text{B.4})$$

Logo,

$$g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad (\text{B.5})$$

enquanto as componentes diagonais são nulas. Também é definido que  $d^2\sigma = \frac{d^2z}{2}$ , bem como  $\delta(\sigma^1)\delta(\sigma^2) = 2\delta^2(z)$ , mesma convenção de (Polchinski, J., 2001). Dessa forma, a ação de Polyakov se escreve como

$$S[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (\text{B.6})$$

A variação funcional em  $X^V(z', \bar{z}')$  nos dá que

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \frac{\delta}{\delta X^V(z', \bar{z}')} (\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\partial_{\bar{z}} X^\mu \partial_z \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}') + \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}')) \\ &= \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^V(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Notacionalmente, uma vez que  $z$  e  $\bar{z}$  são independentes, temos que  $\partial_z \partial_{\bar{z}} X^V(z, \bar{z})$  é equivalente a  $\partial_{\bar{z}}(\partial X^V(z))$  e  $\partial_z(\partial_{\bar{z}} X^V(\bar{z}))$ .

Valores médios de funcionais de  $X$  com respeito ao estado de vácuo  $|\Omega\rangle$  são definidos a partir da integral de caminho de Feynman

$$\langle F[X] \rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} F[X]. \quad (\text{B.8})$$

Tomando  $\langle 1 \rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S[X]}$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_X \langle 1 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} e^{-S[X]} \\ &= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \frac{\delta S[X]}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \\ &= \left\langle \frac{\delta S[X]}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \right\rangle \\ &\implies \langle \partial \bar{\partial} X^\mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

É interessante olhar o que acontece para operadores locais em  $z$  adicionados à ação, tomemos por exemplo o valor médio

$$\langle X^V \rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} X^V(z', \bar{z}'). \quad (\text{B.10})$$

Variando com respeito a  $X^\mu$  novamente,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \left( e^{-S[X]} X^V(z', \bar{z}') \right) \\ &= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left( \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') + \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z') \right) \\ &= \left\langle \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') + \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z') \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Pela linearidade do valor médio, isso é equivalente a

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') = -\pi\alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z'). \quad (\text{B.12})$$

Em outras palavras, o produto  $X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}')$  é uma função de Green em duas dimensões. Uma maneira de tratar esse operador para remover a singularidade em  $z = z'$  é por meio da solução fundamental da equação de Laplace em duas dimensões, que é logarítmica em  $z$ . De fato, temos que

$$\partial \bar{\partial} \left( \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2 \right) = \pi\alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z'). \quad (\text{B.13})$$

Desse modo, motiva-se a definição da operação linear de ordenamento normal  $::$ . Para um e dois campos, é definida de forma a eliminar as singularidades dos operadores, resultando em funções harmônicas

$$: X^\mu(z, \bar{z}) := X^\mu(z, \bar{z}) \quad (\text{B.14})$$

$$: X^{\mu_1}(z_1, \bar{z}_1) X^{\mu_2}(z_2, \bar{z}_2) := X^{\mu_1}(z_1, \bar{z}_1) X^{\mu_2}(z_2, \bar{z}_2) + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z_{12}|^2, \quad (\text{B.15})$$

onde  $z_{12} = z_1 - z_2$ . Para operadores aplicados no mesmo ponto, o ordenamento normal é definido como o limite

$$: X^{\mu_1} X^{\mu_2} : (z, \bar{z}) = \lim_{z' \rightarrow z} \left( X^{\mu_1}(z, \bar{z}) X^{\mu_2}(z', \bar{z}') + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z - z'|^2 \right). \quad (\text{B.16})$$

O mapeamento de ordenamento normal é construído de forma a ser linear e contínuo.

### Expansão de produto de operadores

A motivação desta seção está em estudar o produto de operadores locais aplicados em pontos suficientemente próximos na folha de mundo, cujo uso será feito no estudo de teoria eprturbativa nas integrais de caminho (valores médios de operadores). (Polchinski, J., 2001) afirma que para dois operadores locais  $\mathcal{A}_i$  e  $\mathcal{A}_j$  aplicados em pontos  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, suficientemente próximos, então pode-se tomar uma vizinhança de  $z_2$  na qual o produto dos operadores pode ser expresso por uma soma de outros operadores locais em  $z_2$ .

$$\mathcal{A}_i(z_1) \mathcal{A}_j(z_2) = \sum_k c^k_{ijz_{12}} \mathcal{A}_k(z_2). \quad (\text{B.17})$$

Um simples exemplo é o produto de um operador holomorfo em  $z_2$  (se houver singularidade em  $z_2$ , é necessariamente removível), no qual usamos a sua série de Taylor

$$O(z_1) I(z_2) = O(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_{12}^k}{k!} \partial^k O(z_2). \quad (\text{B.18})$$

De forma precisa, a expansão do produto de operadores é utilizada em valores médios, isto é, a definição geral significa que

$$\langle \mathcal{A}_i(z_1) \mathcal{A}_j(z_2) \rangle = \sum_k c^k_{ijz_{12}} \langle \mathcal{A}_k(z_2) \rangle. \quad (\text{B.19})$$

Dentro dos valores médios também podem ser incluídas inserções de operadores locais em pontos  $z \neq z_2$  sem alterar a forma da expressão.

Para o caso da teoria de escalares livres, temos que os campos  $X^\mu(z_1, \bar{z}_1)$  são harmônicos e em particular, são holomorfos. Desse modo, tomamos suas séries de Taylor em torno de um ponto  $z_2$

$$\begin{aligned}
X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) &= -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2 + :X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2): \\
&= -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2 + : \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_{12})^k (\bar{z}_{12})^j}{k!j!} : \left( \partial^k \bar{\partial}^j X^\mu(z_2) \right) X^\nu(z_2) :
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Como  $X^\mu$  é harmônico, os únicos termos da série não identicamente nulos são aqueles para os quais,  $k = j = 0$ ,  $k = 0, j = 1, \dots$  e  $j = 0, k = 1, \dots$ . Logo

$$\begin{aligned}
X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) &= -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z_{12}|^2 + :X^\mu X^\nu(z_2, \bar{z}_2): \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( z_{12}^k : \partial^k X^\mu(z_2) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : + \bar{z}_{12}^k : \bar{\partial}^k X^\mu(\bar{z}_2) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : \right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

O uso de OPEs é feito ao se estudar comportamento de campos em pontos suficientemente próximos, de forma que nesse limite, termos de potências negativas em  $z$  dominam o valor das somas quanto menor for a separação entre os pontos de interesse. Desse modo, é comum que escrevamos uma OPE utilizando o sinal  $\sim$ , que neste caso significa *igualdade a menos de termos não singulares*.

Um ponto importante é o de que o ordenamento normal foi construído exatamente para remover singularidades de operadores, de modo que sempre temos

$$: \mathcal{F}[X] : \sim 0. \tag{B.22}$$

O ordenamento normal do produto de dois campos  $X$  foi construído a partir de uma integral de caminho. De forma análoga, tomemos o produto de 4 campos aplicados em pontos distintos

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X_{\mu_1}(z_1)} \left[ e^{-S[X]} X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) \right] \\
&= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_1 \bar{\partial}_1 X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + \\
&+ e^{-S[X]} \left[ \delta^2(z_{12}) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + (z_2 \longleftrightarrow z_3) + (z_3 \longleftrightarrow z_4) \right],
\end{aligned} \tag{B.23}$$

onde  $(z_i \longleftrightarrow z_j)$  significa escrever a expressão imediatamente anterior trocando os termos  $z_i$  por  $z_j$  e vice-versa.

Desse modo, a equação de operadores resultante é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_1 \bar{\partial}_1 X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) &= -\delta^2(z_{12}) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + \\ &- (z_2 \longleftrightarrow z_3) - (z_3 \longleftrightarrow z_4). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

A mesma equação acima é obtida ao variar qualquer produto de 3 dos 4 campos e variar com respeito ao remanescente. Ou seja, o produto dos 4 campos é uma função de Green em qualquer uma das variáveis  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Logo, a fim de que o ordenamento normal desse produto seja harmônico nas quatro variáveis, devemos ter termos  $\dots$  tais que

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{\partial}_i : X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) &:= \partial_i \bar{\partial}_i X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + \dots \\ &= 0 \text{ (sem soma indicial)}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

No caso, em que  $i = 1$ , poderíamos adicionar três termos  $\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z_{12}|^2 X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + (z_2 \longleftrightarrow z_3) + (z_3 \longleftrightarrow z_4)$ , no entanto, isso faria do ordenamento harmônico apenas com respeito a essa variável. A maneira correta de garantir a harmonicidade para as quatro variáveis complexas é adicionando além desses três termos, os outros possíveis termos envolvendo  $C_{ij} X X$  outros três termos correspondentes a pares de logaritmos. Por brevidade, chamemos  $\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_i \mu_j} \ln |z_{ij}|^2 \equiv C_{ij}$ . Dessa forma, os seis termos a serem adicionados são

$$\begin{aligned} &C_{12} X^{\mu_3}(z_3) X^{\mu_4}(z_4) + C_{13} X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_4}(z_4) + C_{14} X^{\mu_2}(z_2) X^{\mu_3}(z_3) \\ &+ C_{23} X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_4}(z_4) + C_{24} X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_3}(z_3) + C_{34} X^{\mu_1}(z_1) X^{\mu_2}(z_2) + \\ &+ C_{12} C_{34} + C_{13} C_{24} + C_{14} C_{23}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Esse processo pode ser aplicado de forma recursiva pra qualquer número de campos  $X$  num produto ordenado. é importante notar que os termos que resultam do ordenamento normal sempre surgem reduzindo o número de campos aos pares, isto é, neste exemplo, os termos adicionais eliminam um e dois pares de campos. Tanto por construção, para o caso de produtos do campo  $X$  quanto para qualquer funcional  $\mathcal{F}[X]$ , definimos então o ordenamento normal por

$$: \mathcal{F}[X] := \exp \left[ + \frac{\alpha'}{4} \int_{\mathbb{C}^2} d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_2)} \right] \mathcal{F}[X]. \quad (\text{B.27})$$

Um ponto importante a se notar é que uma vez que as derivadas funcionais comutam entre sí para operadores suaves e podem ser passadas para dentro do sinal de integração, elas por sua vez também podem ser postas sob o ordenamento normal. Isto é

$$\frac{\delta}{\delta X^\mu(z)} : \mathcal{F}[X] : = : \frac{\delta}{\delta X^\mu(z)} \mathcal{F}[X] : . \quad (\text{B.28})$$

O ordenamento é tal  $(::)^2 = ::$ , pois os ordenamentos por definição já não possuem singularidades restantes. A operação é invertível:

$$\mathcal{F}[X] = \exp \left[ -\frac{\alpha'}{4} \int_{\mathbb{C}^2} d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_2)} \right] : \mathcal{F}[X] : . \quad (\text{B.29})$$

Também baseado em operações envolvendo produtos de campos  $X$ , pode-se chegar na relação de produto de ordenamentos normais de operadores  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ :

$$: \mathcal{F}[X] :: \mathcal{G}[X] := \exp \left[ -\frac{\alpha'}{2} \int_{\mathbb{C}^2} d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X_\mu^{\mathcal{F}}(z_1)} \frac{\delta}{\delta X_\mu^{\mathcal{G}}(z_2)} \right] : \mathcal{F}[X] \mathcal{G}[X] : . \quad (\text{B.30})$$

Um caso importante é o produto de contração de derivadas  $: \mathcal{F}[X] :: \mathcal{G}[X] := : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) :: \partial X^\nu(z') \partial X_\nu(z') : .$  Uma vez que cada operador envolve somas de pares de derivadas e cada integração remove dois campos, só necessitamos de obter até o termo de segunda ordem do operador exponencial

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta X_\alpha^{\mathcal{F}}(z_1)} \frac{\delta}{\delta X_{\alpha\mathcal{G}}(z_2)} \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) \partial X^\nu(z') \partial X_\nu(z') : \\ &= \frac{\delta}{\delta X_\mu^{\mathcal{F}}(z_1)} [2\delta'(z_2 - z') : \partial X_\mu(z) \partial X^\mu(z) \partial X^\alpha(z') :] \\ &= 4\delta'(z_2 - z') \delta'(z_1 - z) : \partial X_\mu(z) \partial X^\mu(z') : \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Aplicando o resultado no restante da integral, obtemos o termo

$$\begin{aligned} -2\alpha' \frac{1}{(z-z')^2} : \partial X_\mu(z) \partial X^\mu(z') : &= -2\alpha' \frac{1}{(z-z')^2} \sum_{k=0} \frac{(z-z')^k}{k!} : \partial^{k+1} X_\mu(z') \partial X^\mu(z') : \\ &\sim -2\alpha' \left( \frac{\partial X_\mu(z') \partial X^\mu(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial^2 X_\mu(z') \partial X^\mu(z')}{(z-z')} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Aplicando o operador de integração e dividindo por  $2!$  obtemos de forma análoga o termo de segunda ordem, dado por

$$\frac{\alpha'^2}{2} \eta^\mu{}_\mu \frac{1}{(z-z')^4} = \frac{D\alpha'^2}{2(z-z')^4}. \quad (\text{B.33})$$

Logo,

$$\begin{aligned} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) :: \partial X^\nu(z') \partial X_\nu(z') : &\sim \frac{D\alpha'^2}{2(z-z')^4} + \\ &- 2\alpha' \left( \frac{: \partial X_\mu(z') \partial X^\mu(z') :}{(z-z')^2} + \frac{: \partial^2 X_\mu(z') \partial X^\mu(z') :}{(z-z')} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Outro exemplo é o de  $\mathcal{F} = e^{ik_1 \cdot X(z)}$  e  $\mathcal{G} = e^{ik_2 \cdot X(0)}$ , onde  $k_1, k_2 \in \mathbb{M}^D$ . Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta X_F^\mu(z_1)} e^{ik_1 \cdot X(z)} &= ik_{1\mu} \delta(z-z_1) e^{ik_1 \cdot X(z)} \\ \frac{\delta}{\delta X_{\mu_G}(z_2)} e^{ik_2 \cdot X(0)} &= ik_2^\mu \delta(z_2) e^{ik_2 \cdot X(0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Pela linearidade da integração, os fatores  $ik^\mu$  saem da integral de modo que

$$\begin{aligned} &\exp -\frac{\alpha'}{2} \int_{\mathbb{C}^2} d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X_\mu^{\mathcal{F}}(z_1)} \frac{\delta}{\delta X_{\mu_G}(z_2)} : e^{ik_1 \cdot X(z)} e^{ik_2 \cdot X(0)} : \\ &= \exp +\frac{\alpha'}{2} k_1 \cdot k_2 \ln |z|^2 : e^{ik_1 \cdot X(z)} e^{ik_2 \cdot X(0)} : \\ &= |z|^{\alpha' k_1 \cdot k_2} : e^{ik_1 \cdot X(z)} e^{ik_2 \cdot X(0)} : \\ &= |z|^{\alpha' k_1 \cdot k_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^m \bar{z}^n}{m! n!} : \partial^m \bar{\partial}^n (e^{ik_1 \cdot X(z)}) e^{ik_2 \cdot X(0)} : . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

### Identidades de Ward e o teorema de Noether

Tomemos a integral de caminho caracterizada por uma medida  $\mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$  em termos de campos  $\phi_i$ . Tomemos uma transformação infinitesimal local nos campos tal que

$$\phi'_i(\sigma) = \phi_i(\sigma) + \rho(\sigma) \delta \phi_i(\sigma), \quad (\text{B.37})$$

onde  $\text{supp } \rho = R$  é um conjunto aberto. Suponhamos também que  $\rho = \text{const.}$  caracteriza uma simetria do sistema, ou seja, uma variação dos campos por um fator proporcional a  $\delta \phi_i(\sigma)$  não modifica a ação. Para o caso em que  $\rho$  varia ao longo de  $R$ , é razoável supor que o termo de alteração da ação deva ser proporcional ao gradiente de  $\rho$ , ou seja, tomamos

$$\mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']} - \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left( \frac{i\varepsilon}{2\pi} \int d^d g^{1/2} \sigma j^a(\sigma) \partial_a \rho(\sigma) + O(\varepsilon^2) \right). \quad (\text{B.38})$$

Podemos ainda acrescentar termos na ação: tomemos um operador local  $\mathcal{A}(\sigma_0)$ ,  $\sigma_0 \in R$  e um produto de outros operadores locais, denotado por  $(\dots)$  aplicados em pontos fora de  $R$ . Desse modo, o operador  $\mathcal{A}(\sigma_0)$  pode ser modificado por  $\mathcal{A}'(\sigma_0) = \mathcal{A}(\sigma_0) + \delta\mathcal{A}(\sigma_0)$ , enquanto que as inserções  $(\dots)$  permanecem inalteradas, desse modo, se tomarmos a integral

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{A}(\sigma_0)(\dots) \quad (\text{B.39})$$

Se transforma sob a referida mudança de coordenadas por

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']} \mathcal{A}'(\sigma_0)(\dots) - \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{A}(\sigma_0)(\dots) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left( \delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{i\varepsilon}{2\pi} \int_R d^d\sigma g^{1/2} j^a(\sigma) \partial_a \rho(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) \right) (\dots) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left( \delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{i\varepsilon}{2\pi} \int_R d^d\sigma [\partial_a(\rho(\sigma) g^{1/2} j^a(\sigma)) - \rho(\sigma) \partial_a(g^{1/2} j^a(\sigma))] \mathcal{A}(\sigma_0) \right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left( \delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_R d^d\sigma \rho(\sigma) \nabla_a j^a(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Tomando a invariância da integral de caminho sob difeomorfismos, temos que

$$\left\langle \left[ \delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_R d^d\sigma \rho(\sigma) \nabla_a j^a(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) \right] (\dots) \right\rangle = 0, \quad (\text{B.41})$$

ou se as inserções forem quaisquer,

$$\left\langle \delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_R d^d\sigma \rho(\sigma) \nabla_a j^a(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) \right\rangle = 0 \quad (\text{B.42})$$

o que em termos de operadores no espaço de Hilbert da teoria é dado por

$$\delta\mathcal{A}(\sigma_0) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_R d^d\sigma \rho(\sigma) \nabla_a j^a(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) = 0. \quad (\text{B.43})$$

Para tornar tal transformação numa simetria, fazemos  $\rho|_R \equiv 1$ , tal que

$$\int_R d^d\sigma \nabla_a j^a(\sigma) \mathcal{A}(\sigma_0) = \frac{2\pi}{i\varepsilon} \delta\mathcal{A}(\sigma_0) \quad (\text{B.44})$$

No caso em coordenadas cartesianas bidimensionais num espaço plano, a conexão  $\nabla$  se reduz à derivação parcial:

$$\int_R d^2\sigma (\partial_1 j^1 + \partial_2 j^2) \mathcal{A}(\sigma_0) = \frac{2\pi}{i\varepsilon} \delta \mathcal{A}(\sigma_0). \quad (\text{B.45})$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \partial + \bar{\partial} \\ \partial_2 &= i(\partial - \bar{\partial}) \\ j^1 &= j + \tilde{j} \\ j^2 &= \frac{1}{i}(\tilde{j} - j), \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

onde  $j = j_z$ ,  $\tilde{j} = j_{\bar{z}}$ , a equação referida torna-se

$$\int_R d^2z (\partial \tilde{j} + \bar{\partial} j) \mathcal{A}(\sigma_0) = \frac{2\pi}{i\varepsilon} \delta \mathcal{A}(z_0). \quad (\text{B.47})$$

Usando o teorema da divergência, a equação se torna

$$\int_{\partial R} (j dz - \tilde{j} d\bar{z}) \mathcal{A}(z_0) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \delta \mathcal{A}(z_0). \quad (\text{B.48})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\varepsilon} \delta \mathcal{A}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} j \mathcal{A}(z_0) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \tilde{j} \mathcal{A}(z_0) d\bar{z} \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow z_0} \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

### Invariância conforme

Tomando o tensor de momento energia

$$T_{ab} = -\frac{1}{\alpha'} : \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \delta_{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu : .$$

Em duas dimensões, temos  $T = 0$ , de modo que ao mudar para coordenadas complexas, temos que

$$\begin{aligned} &= g_{zz} T_{zz} + 2g_{z\bar{z}} T_{z\bar{z}} + g_{\bar{z}\bar{z}} T_{\bar{z}\bar{z}} \\ &= T_{z\bar{z}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

## CFTs livres

### CFT do dÍlaton linear

Esta CFT é similar á CFT livre, exceto pela adição de termos de modo que o tensor de energia-momento torna-se

$$\begin{aligned} T_{zz}(z) \equiv T(z) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X_\mu \partial X^\mu(z) : + V_\mu : \partial^2 X^\mu(z) : \\ T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \equiv \tilde{T}(\bar{z}) &= -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X_\mu \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) : + V_\mu : \bar{\partial}^2 X^\mu(\bar{z}) :, \quad V \in \mathbb{M}^D. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Desenvolvendo a OPE  $T(z)T(w)$ , temos

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X_\mu \partial X^\mu(z_1) :: \partial X_\nu \partial X^\nu(z_2) : - \frac{V_\mu}{\alpha'} : \partial X_\nu \partial X^\nu(z_1) :: \partial^2 X^\mu(z_2) : \\ &\quad - \frac{V_\mu}{\alpha'} \partial X_\nu \partial X^\nu(z_2) :: \partial^2 X^\mu(z_1) : + V_\mu V_\nu : \partial^2 X^\mu(z_1) :: \partial^2 X^\nu(z_2) : . \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

O primeiro dos quatro termos já foi determinado na seção 2.2. No caso dos demais, temos que

$$: \partial X_\nu \partial X^\nu(z_1) :: \partial^2 X^\mu(z_2) : \sim \frac{2\partial X^\mu(z_2)}{(z_{12})^3} + \frac{2\partial^2 X^\mu(w)}{(z_{12})^2} + \frac{\partial^3 X^\mu(z_2)}{z_{12}}, \quad (\text{B.53})$$

bem como

$$: \partial^2 X^\mu(z_1) :: \partial^2 X^\nu(z_2) : \sim \frac{\eta^{\mu\nu} 6\alpha'}{2(z_{12})^4} \quad (\text{B.54})$$

Comparando a expressão completa com a equação da forma (2.4.25)

$$T(z_1)T(z_2) \sim \frac{c}{2z_{12}^4} + \frac{2T(z_2)}{z_{12}^2} + \frac{\partial T(z_2)}{z_{12}}, \quad (\text{B.55})$$

a carga central dessa teoria é dada por  $D + V_\mu V_\nu \eta^{\mu\nu} 6\alpha' = D + 6\alpha' V^2$ . O procedimento análogo é feito para  $\tilde{T}(\bar{z})$ , de modo que a carga central  $\tilde{c}$  também é dada por  $D + 6\alpha' V^2$ . Agora, analisamos a transformação conformal dos campos  $X^\mu$  por meio da OPE  $TX$

$$\begin{aligned} T(z_1)X^\mu(z_2) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X_\nu \partial X^\nu(z_1) :: X^\mu(z_2) : + V_\nu : \partial^2 X^\nu(z_1) :: X^\mu(z_2) : \\ &\sim \frac{\partial X^\mu(z_2)}{z_{12}} - \frac{V_\nu \alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_1 \partial_2 \ln |z_{12}|^2 \\ &\sim \frac{V^\mu \alpha'}{2z_{12}^2} + \frac{\partial X^\mu(z_2)}{z_{12}}. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Uma vez que as correntes conservadas sob transformações conformais  $z'(z) = z + \varepsilon v(z)$  são  $j(z) = iv(z)T(z)$  e  $\tilde{j}(\bar{z}) = i(v(z))^* \tilde{T}(\bar{z})$ , temos

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu(z, \bar{z}) &= i\varepsilon \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_0} j(z') X^\mu(z, \bar{z}) + i\varepsilon \left( \operatorname{Res}_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} \tilde{j}(\bar{z}') X^\mu(z, \bar{z}) \right)^* \\
&= -\frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C dz' v(z') T(z') X^\mu(z, \bar{z}) - \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C d\bar{z}' v^*(z') \tilde{T}(\bar{z}') X^\mu(z, \bar{z}) \\
&= -\frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C dz' v(z') \left( \frac{V^\mu \alpha'}{z-z'} + \frac{\partial X^\mu(z)}{z-z'} \right) - \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C d\bar{z}' v^*(z') \left( \frac{V^\mu \alpha'}{\bar{z}-\bar{z}'} + \frac{\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})}{\bar{z}-\bar{z}'} \right) \\
&= -\varepsilon \left[ v(z) \partial X^\mu(z) + v^*(\bar{z}) \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) + \frac{V^\mu \alpha'}{2} (\partial v(z) + \bar{\partial} v^*(\bar{z})) \right]
\end{aligned} \tag{B.57}$$

## Expansões em modos

### Escalares livres

Na teoria escalar livre de cordas fechadas, temos que  $\partial X$  e  $\bar{\partial} X$  representam funções holomorfas e anti-holomorfas, respectivamente. Podemos então expressá-los por suas séries de Lauren em torno de  $z = \bar{z} = 0$ :

$$\partial X^\mu(z) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha^\mu_m}{z^{m+1}}; \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{\alpha}^\mu_m}{\bar{z}^{m+1}}, \tag{B.58}$$

onde

$$\alpha^\mu_m = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_C dz \frac{z^m}{2\pi} \partial X^\mu(z); \quad \tilde{\alpha}^\mu_m = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_C d\bar{z} \frac{\bar{z}^m}{2\pi} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}), \tag{B.59}$$

$C$  sendo uma curva de Jordan que contém a origem percorrida em sentido anti-horário. Em particular, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha^\mu_m - \tilde{\alpha}^\mu_m &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_C dz \frac{1}{2\pi} \partial X^\mu(z) + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_C d\bar{z} \frac{1}{2\pi} \bar{\partial} X^\mu \\
&= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_C d\bar{z} \frac{1}{2\pi} (\partial X^\mu + \bar{\partial} X^\mu) \\
&= \frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int_R d^2 z (\partial \bar{\partial} X^\mu - \bar{\partial} \partial X^\mu) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.60}$$

onde  $R$  é região tal que  $\partial R = C$ .

Sob transformações de translações, as correntes conservadas são  $j_a^\mu(\sigma^1, \sigma^2) = \frac{i}{\alpha'} \partial_a X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$ . As cargas conservadas são obtidas ao se integrar cada componente  $j_2^\mu$  ao longo de qualquer curva  $\sigma^2 = \text{const.}$ , ou seja, integrando em  $\sigma^1 \in [0, 2\pi]$ . Ao passar de coordenadas  $(\sigma^1, \sigma^2)$  para  $z = \exp(-i\sigma^1 + \sigma^2)$ , tais curvas são mapeadas para circunferências de raio  $r = \exp(\sigma^2)$ . Além disso, temos que  $j_2^\mu = i(j(z) - \tilde{j}(\bar{z}))$ , de forma que

$$\int_0^{2\pi} d\sigma^1 j_2^\mu = \oint_C dz j^\mu(z) - d\bar{z} \tilde{j}(\bar{z}).$$

Definindo  $p^\mu$  como  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz j^\mu(z) - d\bar{z} \tilde{j}(\bar{z})$ , temos que

$$\begin{aligned} p^\mu &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz j^\mu(z) - d\bar{z} \tilde{j}(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi \alpha'} \oint_C dz \partial X^\mu(z) - d\bar{z} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (\alpha^\mu_0 + \tilde{\alpha}^\mu_0) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha^\mu_0 = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}^\mu_0 \end{aligned}$$

Para obter  $X^\mu$ , partimos de suas derivadas. Decompondo  $\partial X^\mu$  de forma conveniente, temos

$$\partial X^\mu(z) = -i \frac{\alpha'}{2} \frac{p^\mu}{z} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha^\mu_m}{z^{m+1}} \quad (\text{B.61})$$

Cuja primitiva com respeito a  $z$  é

$$X^\mu(z, \bar{z}) = -i \frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln z + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha^\mu_m}{m z^m} + f^\mu(\bar{z}). \quad (\text{B.62})$$

Realizando o procedimento análogo para  $\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$ , obtemos também que

$$X^\mu(z, \bar{z}) = -i \frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln \bar{z} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\tilde{\alpha}^\mu_m}{m \bar{z}^m} + g^\mu(z). \quad (\text{B.63})$$

Fixamos então que

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i \frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln |z|^2 + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{m} \left( \frac{\alpha^\mu_m}{z^m} + \frac{\tilde{\alpha}^\mu_m}{\bar{z}^m} \right) \quad (\text{B.64})$$

Dessa equação, é possível extrair relações de comutação (ainda por fazer)

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = [\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}; \quad (\text{B.65})$$

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{B.66})$$

Para obter os geradores de Virasoro  $L_m$ , tomamos

$$L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} T(z) = -\frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z^m} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) : \quad (\text{B.67})$$

usando o sinal  $\sim$  para denotar igualdade a menos dos termos característicos do ordenamento normal, temos que

$$\begin{aligned} L_m &\sim \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} \left( -\frac{1}{\alpha'} \right) \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) \\ &\sim \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_{\mu k}}{z^{k+1}} \\ &\sim \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu \alpha_{\mu k}}{z^{k+n+2}} \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \alpha_n^\mu \alpha_{\mu k} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m-k-n-1} \right] \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu k} \delta_{m, k+n} \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-k}^\mu \alpha_{\mu k}. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Para  $m \neq 0$ , os modos de oscilação comutam entre si, de modo que seu ordenamento não é importante. Entretanto, para  $m = 0$  temos que

$$\begin{aligned} L_0 &\sim \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} \\ &\sim \frac{\alpha'}{4} p^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu, -n} \\ &\sim \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \eta^\mu_\mu n \end{aligned}$$

Considerando os termos remanescentes do ordenamento normal, o último termo da última linha acima, temos que

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + a^X, \quad a^X = \text{const.} \quad (\text{B.69})$$

Da álgebra de Virasoro, temos que  $2L_0 = [L_1, L_{-1}]$ . Atuando  $L_0$  no estado fundamental  $|0;0\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} L_0|0;0\rangle &= \left( \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} + a^X \right) |0;0\rangle \\ &= a^X |0;0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

bem como

$$L_1|0;0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{1-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} |0;0\rangle = 0. \quad (\text{B.71})$$

A atuação de  $L_{-1}$  sobre  $|0;0\rangle$  é igualmente nula, de modo que obtemos

$$2L_0|0;0\rangle = 2a^X|0;0\rangle = (L_1L_{-1} - L_{-1}L_1)|0;0\rangle = 0 \implies a^X = 0. \quad (\text{B.72})$$

Introduzimos agora o ordenamento de aniquilação-destruição, que consiste essencialmente de por operadores de aniquilação à direita dos de criação em produtos de tais operadores. Por definição,  $x^{\mu}$  é considerado um operador de criação, enquanto que  $p^{\mu}$  é tomado como um operador de destruição. O produto é

$$\circ \alpha_m^{\mu} \alpha_n^{\nu} \circ = \begin{cases} \alpha_m^{\mu} \alpha_n^{\nu}, & n \geq 0 \\ \alpha_n^{\mu} \alpha_m^{\nu}, & n < 0. \end{cases}$$

Em  $L_m$ , como os osciladores comutam para  $m \neq 0$ , bem como  $a^X = 0$  para  $m = 0$ , temos que

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_{\nu n} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \circ \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_{\nu n} \circ.$$

Podemos comparar o ordenamento normal :: com o ordenamento recém definido. Tomemos campos  $X^{\mu}$  e  $X^{\nu}$  aplicados em pontos  $z$  e  $z'$ ,  $|z| > |z'|$ .

$$\begin{aligned} X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') &= \left[ x^{\mu} - i \frac{\alpha'}{2} p^{\mu} \ln |z|^2 + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} \left( \frac{\alpha_n^{\mu}}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^{\mu}}{\bar{z}^n} \right) \right] \\ &\times \left[ x^{\nu} - i \frac{\alpha'}{2} p^{\nu} \ln |z'|^2 + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{m} \left( \frac{\alpha_m^{\nu}}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^{\nu}}{\bar{z}'^m} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Utilizando da distributividade, temos que o produto  $x^\mu X^V(z', \bar{z}')$  já está ordenado, pois  $x^\mu$  foi definido como operador de criação  $\implies x^\mu X^V(z', \bar{z}') = \circ x^\mu X^V(z', \bar{z}') \circ$ .  $p^\mu$  comuta tanto com  $p^V$  quanto com os osciladores  $\alpha_m^V$  e  $\tilde{\alpha}_m^V$ , comutando-o com  $x^V$ , temos que  $p^\mu X^V(z', \bar{z}') = \circ p^\mu X^V(z', \bar{z}') \circ - \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu V} \ln |z|^2$ . Temos ainda que os osciladores comutam com  $x^V$  e  $p^V$ . Resta analisar os produtos entre osciladores restantes. Os osciladores  $\alpha_n^\mu$  e  $\alpha_m^V$  só não comutarão se  $n = -m$ ,  $m \neq 0$ . Dessa forma, resta analisarmos a parte do somatório com  $n > 0$  atuando sobre a parte do somatório com  $m < 0$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{n \cdot m} \frac{\alpha_n^\mu}{z^n} \left( \frac{\alpha_m^V}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^V}{\bar{z}'^m} \right) + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \left( \frac{\alpha_m^V}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^V}{\bar{z}'^m} \right) \\
& = -\frac{\alpha'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{n \cdot m} \left( \frac{\alpha_m^V}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^V}{\bar{z}'^m} \right) \frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{n \eta^{\mu V} \delta_{n, -m}}{z^n z'^m} \\
& + \left( \frac{\alpha_m^V}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^V}{\bar{z}'^m} \right) \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} + \frac{n \eta^{\mu V} \delta_{n, -m}}{\bar{z}^n \bar{z}'^m} \tag{B.74} \\
& = \circ -\frac{\alpha'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{n \cdot m} \left( \frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right) \left( \frac{\alpha_m^V}{z'^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^V}{\bar{z}'^m} \right) \circ \\
& + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu V} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{z'^n}{z^n} + \frac{\bar{z}'^n}{\bar{z}^n} \right).
\end{aligned}$$

Reagrupando todos os termos, concluímos que

$$\begin{aligned}
X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') & = \circ X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') \circ + \\
& \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu V} \left[ -\ln |z|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{z'^m}{z^m} + \frac{\bar{z}'^m}{\bar{z}^m} \right) \right] \tag{B.75}
\end{aligned}$$

Sabendo que  $\ln |z|^2 = \ln z + \ln \bar{z}$  e que  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{z'^m}{z^m} = -\ln \left( 1 - \frac{z'}{z} \right)$ , temos por fim que

$$X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') = \circ X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') \circ - \frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2. \tag{B.76}$$

Logo,

$$: X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') : = \circ X^\mu(z, \bar{z}) X^V(z', \bar{z}') \circ, \quad |z| > |z'|. \tag{B.77}$$

Essa equivalência entre os ordenamentos vêm da convenção que tomamos quanto ao caráter destruidor e criador de  $p$  e  $x$  e depende do fato de que utilizamos coordenadas  $z = \exp -i\sigma^1 + \sigma^2$  em vez de  $w = \sigma^1 + i\sigma^2$ . Um ponto importante é notar que

$$\begin{aligned}
\circ\partial X^\mu(z)\partial X_\mu(z')\circ &= \frac{\alpha'}{2} \circ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu \alpha_{\mu m}}{z^{n+1} z'^{m+1}} \circ \\
&= \frac{\alpha'}{2} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu \alpha_{\mu m}}{z^{n+1} z'^{m+1}} + \frac{\alpha'}{2} \eta_\mu^\mu \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{n \delta_{n,-m}}{z^{n+1} z'^{m+1}} \\
&= \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z') + \frac{\alpha'}{2} \eta_\mu^\mu \frac{1}{(z-z')^2} \\
&=: \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z') : .
\end{aligned}$$

Pela unicidade da série de Taylor, temos a igualdade dos coeficientes de ordem zero:

$$: \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) : = \circ \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) \circ \quad (\text{B.78})$$

Podemos usar a igualdade (B.76) para demonstrar que  $a^X$  é nulo. De fato, temos que

$$-\frac{1}{\alpha'} \circ \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z') \circ = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) : = T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}. \quad (\text{B.79})$$

Logo,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{L_k}{z^{k+2}} = \frac{1}{2} \circ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu \alpha_{\mu m}}{z^{n+m+2}} \circ \stackrel{k=n+m}{=} \frac{1}{2} \circ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_{k-m}^\mu \alpha_{\mu m}}{z^{k+2}} \circ,$$

ou seja,

$$L_k = \frac{1}{2} \circ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-m}^\mu \alpha_{\mu m} \circ, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.80})$$

provando que  $a^X = 0$ .

Se tomarmos a CFT do dÍlaton linear, na qual  $T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu \partial X_\mu(z) : + V_\mu \partial^2 X^\mu(z)$ .

Ao calcular os geradores de Virasoro, obtemos a partir do primeiro termo a mesma expressão da teoria livre. Quanto ao segundo termo, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{V_\mu}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} \partial^2 X^\mu &= -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{V_\mu}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} \partial \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} \right) \\
&= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{V_\mu}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n+1) \alpha_n^\mu \oint_C dz z^{m-n-1} \\
&= i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} V_\mu (m+1) \alpha_m^\mu,
\end{aligned} \tag{B.81}$$

de forma que

$$L_m = \frac{1}{2} \circ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-k}^\mu \alpha_{\mu k} \circ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} V_\mu (m+1) \alpha_m^\mu. \tag{B.82}$$

### ***CFT dos campos bc***

Para  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , expressamos  $b(z)$  e  $c(z)$  da seguinte forma em séries de Laurent.

$$b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{b_n}{z^{m+\lambda}}, \quad c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{z^{n+1-\lambda}}, \tag{B.83}$$

onde

$$b_n = \oint_C dz z^{n+\lambda-1} b(z), \quad c_n = \oint_C dz z^{n-\lambda} c(z). \tag{B.84}$$

Para determinar as relações de anticomutação dos coeficientes, usamos o argumento de contorno fornecido na eq.(2.6.14) de (Polchinski, J., 2001) , na qual estabelece que para um ponto  $z'$  definido sobre o contorno usado para calcular  $c_n$ , é válida a relação

$$\begin{aligned}
\{b_m, c_n\} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \operatorname{Res}_{z \rightarrow z'} \left( z^{m+\lambda-1} z'^{n-\lambda} b(z) c(z') \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' z'^{m-\lambda} \operatorname{Res}_{z \rightarrow z'} \left( z^{m+\lambda-1} \frac{1}{z-z'} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' z'^{m-\lambda} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{z^{m+\lambda-1}}{z-z'} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' z'^{m+n-1} \\
&= \delta_{m,-n}.
\end{aligned} \tag{B.85}$$

Devido ao fato de os produtos  $bb$  e  $cc$  serem não singulares, os termos de resíduo que resultam das anticomutações de seus operadores  $b_n$  e  $c_n$  são nulos, logo

$$\{b_m, c_n\} = \{c_m, c_n\} = 0. \quad (\text{B.86})$$

Das relações de anticomutação, temos

$$\{b_0, c_0\} = 1. \quad (\text{B.87})$$

Pela equação (29), um estado fundamental  $|0\rangle$  só pode ser aniquilado por apenas um dentre  $b_0$  e  $c_0$ . Dito isso, podemos definir um estado que é aniquilado por  $b_0$  e um que é aniquilado por  $c_0$ . Chamemos  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  os estados que satisfazem

$$b_0 |\downarrow\rangle = b_n |\downarrow\rangle = 0 \quad (\text{B.88})$$

$$c_0 |\uparrow\rangle = c_n |\uparrow\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (\text{B.89})$$

Também temos que

$$\{b_0, c_0\} |\uparrow\rangle = c_0 b_0 |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad (\text{B.90})$$

$$\{b_0, c_0\} |\downarrow\rangle = b_0 c_0 |\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle. \quad (\text{B.91})$$

Além disso,  $\{b_0, c_0\} |\uparrow\rangle = c_0 b_0 |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ , assim como  $b_0 c_0 |\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$ . Isso sugere que  $c_0 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ . De fato, assumindo isso, temos que  $b_0 |\uparrow\rangle = 0$  e analogamente podemos tomar o caso contrário, de forma que

$$b_0 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \iff c_0 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle. \quad (\text{B.92})$$

Como consequência disso, temos que

$$\forall n > 0, \{b_0, c_n\} |\uparrow\rangle = c_n b_0 |\uparrow\rangle = c_n |\downarrow\rangle = 0, \quad (\text{B.93})$$

e que

$$\forall n > 0, \{c_0, b_n\} |\downarrow\rangle = b_n c_0 |\downarrow\rangle = b_n |\uparrow\rangle = 0. \quad (\text{B.94})$$

Sumarizando, temos as relações

$$b_0 |\downarrow\rangle = 0, b_0 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad (\text{B.95})$$

$$c_0 |\uparrow\rangle = 0, c_0 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad (\text{B.96})$$

$$c_n |\uparrow\rangle = c_n |\downarrow\rangle = b_n |\downarrow\rangle = b_n |\uparrow\rangle = 0. \quad (\text{B.97})$$

A partir disso, podemos gerar estados operando sobre  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$  operadores  $b_n, c_n$  com  $n < 0$ , desde que cada operador seja aplicado apenas uma vez, pois operadores de mesmo índice anticomutam. A partir do tensor de moment-energia da teoria  $T(z) =: (\partial b(z))c(z) : -\lambda \partial : b(z)c(z) :$ , podemos achar os geradores de Virasoro, desconsiderando os termos do ordenamento normal.

$$\begin{aligned} L_k &= \oint_C \frac{1}{2\pi i} dz z^{k+1} T(z) \\ &\sim \oint_C \frac{1}{2\pi i} dz z^{k+1} [(1-\lambda)\partial b(z)c(z) - \lambda b(z)\partial c(z)] \\ &\sim \oint_C \frac{1}{2\pi i} dz z^{k+1} \left[ (\lambda-1) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (n+\lambda) \frac{b_n c_m}{z^{n+m+2}} + \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (m+1-\lambda) \frac{b_n c_m}{z^{n+m+2}} \right] \\ &\sim \oint_C \frac{1}{2\pi i} dz z^{k+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} [\lambda(n+m) - n] \frac{b_n c_m}{z^{n+m+2}} \\ &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_n c_m [\lambda(n+m) - n] \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{k-n-m-1} \\ &\sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_n c_{k-n} [\lambda k - n]. \end{aligned}$$

Tomamos o ordenamento e criação-destruição para os operadores  $b_m, c_{k-m}$  como

$$\circ b_m c_{k-m} \circ = \begin{cases} b_m c_{k-m}, & m < 0, \\ -c_{k-m} b_m, & m \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.98})$$

É importante notar que dessa definição temos para  $k \neq 0$  que  $\circ b_m c_{k-m} \circ = b_m c_{k-m}$ , enquanto que para  $k = 0$  e  $m \geq 0$ ,  $\circ b_m c_{k-m} \circ = -c_{-m} b_m = b_m c_{-m} - 1$ . Com base nisso, tomemos primeiro o caso  $k \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
L_k &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\lambda k - m) b_m c_{k-m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda k - m) b_m c_{k-m} + \sum_{m=-\infty}^{-1} (\lambda k - m) b_m c_{k-m} + \lambda k b_0 c_k \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\lambda k - m) \circ b_m c_{k-m} \circ.
\end{aligned}$$

No entanto, para  $k = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) b_m c_{-m} \\
&= \left( \sum_{m=1}^{\infty} (-m) b_m c_{-m} + \sum_{m=-\infty}^{-1} (-m) b_m c_{-m} \right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) \circ b_m c_{-m} \circ - \sum_{m=1}^{\infty} m.
\end{aligned}$$

Podemos então denotar

$$L_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\lambda k - m) \circ b_m c_{k-m} \circ + \delta_{k,0} a^g. \quad (\text{B.99})$$

Para determinar a atuação de  $a^g$ , novamente usamos a relação da álgebra de Virasoro  $2L_0 = [L_1, L_{-1}]$ . Temos que para o estado fundamental  $|\downarrow\rangle$

$$L_0 |\downarrow\rangle = a^g |\downarrow\rangle. \quad (\text{B.100})$$

$$\begin{aligned}
L_1 |\downarrow\rangle &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\lambda - m) \circ b_m c_{1-m} \circ \\
&= \left( - \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - m) c_{1-m} b_m + \sum_{m=-\infty}^{-1} (\lambda - m) b_m c_{1-m} + \lambda b_0 c_1 \right) |\downarrow\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Enquanto que

$$\begin{aligned}
L_{-1} |\downarrow\rangle &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-\lambda - m) \circ b_m c_{-1-m} \circ |\downarrow\rangle \\
&= \left( - \sum_{m=1}^{\infty} (-\lambda - m) c_{-1-m} b_m + \sum_{m=-\infty}^{-2} (-\lambda - m) b_m c_{-1-m} + (-\lambda + 1) b_{-1} c_0 + \lambda c_{-1} b_0 \right) |\downarrow\rangle \\
&= (1 - \lambda) b_{-1} |\uparrow\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando ainda  $L_1 L_{-1}$ , temos

$$\begin{aligned}
L_1 L_{-1} |\downarrow\rangle &= (1 - \lambda) \left( - \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - m) c_{1-m} b_m + \sum_{m=-\infty}^{-1} (\lambda - m) b_m c_{1-m} + \lambda b_0 c_1 \right) b_{-1} |\uparrow\rangle \\
&= (1 - \lambda) \lambda b_0 c_1 b_{-1} |\uparrow\rangle \\
&= \lambda (1 - \lambda) b_0 (-b_{-1} c_1 + 1) |\uparrow\rangle \\
&= \lambda (1 - \lambda) b_0 |\uparrow\rangle \\
&= \lambda (1 - \lambda) |\downarrow\rangle.
\end{aligned} \tag{B.101}$$

Logo,

$$2L_0 |\downarrow\rangle = [L_1, L_{-1}] |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle = L_1 L_{-1} |\uparrow\rangle = \lambda (1 - \lambda) |\downarrow\rangle = 2a^g |\downarrow\rangle. \tag{B.102}$$

$$L_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\lambda k - m) \circ b_m c_{k-m} \circ + \delta_{k,0} \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}. \tag{B.103}$$

Analisamos agora a carga  $N^g$  associada à corrente  $j_z(z) = - : b(z)c(z) :$ . Em coordenadas  $w$ ,

$$N^g = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dw j_w(w). \tag{B.104}$$

Pela relação entre correntes de sistemas de coordenadas distintos,

$$(\partial_w z) j_z(z) = j_w(w) + \frac{2\lambda - 1}{2} \frac{\partial_w^2 z}{\partial_w z}. \tag{B.105}$$

Sabendo que no nosso caso,  $z = \exp -iw$ , podemos obter que  $\partial_w z = -iz$  e que  $\partial_w^2 z = -z$ , ou seja

$$j_w(w) = -iz j_z(z) + \frac{i(2\lambda - 1)}{2}. \tag{B.106}$$

Ao mudar de variáveis, a integral sobre  $[0, 2\pi]$  torna-se uma integral sobre a circunferência unitária.

$$\begin{aligned}
N^g &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dw j_w(w) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \left( -j_z(z) + \frac{(2\lambda - 1)}{2z} \right)
\end{aligned} \tag{B.107}$$

Utilizando o resultado do problema 2.13 (ainda por ser demonstrado):

$$:b(z)c(z') := \circ :b(z)c(z') \circ + \frac{\left(\frac{z}{z'}\right)^{1-\lambda} - 1}{z - z'}.$$
 \tag{B.108}

No limite em que  $z \rightarrow z'$ , podemos extrair a igualdade

$$:b(z')c(z') := \circ :b(z')c(z') \circ + \frac{1-\lambda}{z'}.$$
 \tag{B.109}

Substituindo-a na equação de  $N^g$ , obtemos

$$\begin{aligned}
N^g &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \left( \circ b(z)c(z) \circ + \frac{1-\lambda}{z} + \frac{(2\lambda - 1)}{2z} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \left( \circ b(z)c(z) \circ + \frac{1}{2z} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz (\circ b(z)c(z) \circ) - \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{B.110}$$

Tratando especificamente do último termo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \circ b(z)c(z) \circ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\circ b_m c_n \circ}{z^{m+n+1}} \\
&= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} \circ b_m c_{-m} \circ \\
&= +\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} b_m - \sum_{m=-\infty}^{-1} b_m c_{-m} + c_0 b_0 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (c_{-m} b_m - b_{-m} c_m) + c_0 b_0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$N^g = \sum_{m=1}^{\infty} (c_{-m} b_m - b_{-m} c_m) + c_0 b_0 - \frac{1}{2}.$$
 \tag{B.111}

## Operadores de vértice

A CFT a ser considerada é desenvolvida no círculo unitário, em coordenadas  $z$ . Primeiramente, tomemos  $w = \sigma^1 + i\sigma^2$ , onde  $\sigma^1 \in S^1$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Dessa forma, ao mudar para coordenadas  $z = \exp -w = \exp -i\sigma^1 + \sigma^2$ , curvas  $\sigma^2 = \text{const.}$  significam, em coordenadas  $z$ , circunferências de raio  $\exp \sigma^2$  centradas em  $z = 0$ . Para  $\sigma^2 = 0$ , temos a circunferência unitária, e para  $\sigma^2 \rightarrow -\infty$ , temos  $z \rightarrow 0$ .

No cilindro  $(\sigma^1, \sigma^2)$ , um estado especificado na região  $\sigma^2 \rightarrow -\infty$ , pode ser visualizado como a atuação de um operador local  $\mathcal{A}(\sigma^1, \sigma^2)$  no estado de vácuo a medida que  $\sigma^2 \rightarrow -\infty$ .

$$|\mathcal{A}\rangle = \lim_{\sigma^2 \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\sigma^1, \sigma^2) |0;0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{A}(z, \bar{z}) |0;0\rangle. \quad (\text{B.112})$$

É possível, em teorias livres, utilizar o argumento de contorno da seção 2.6 de (Polchinski, J., 2001) para determinar a relação entre estados e operadores locais que se traduz numa bijeção, denominada correspondência estado-operador. Tomando uma carga conservada  $Q$  e um contorno  $C$ . Uma vez que na teoria livre, as derivadas de  $X^\mu$  são harmônicas, seriam então (anti-)holomorfas dentro do contorno em questão. Logo, a série de Laurent das derivadas seria equivalente às suas séries de Taylor. Em outras palavras, teríamos para  $m \geq 0$ ,  $\alpha_m^\mu = 0$ . O isomorfismo em questão é tomado com o operador identidade  $\mathbf{1}$ , cujo único estado associado denotamos por  $|1\rangle$ , tal que

$$\alpha_m^\mu |1\rangle \cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^m \partial X^\mu(z) \mathbf{1} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^m \partial X^\mu(z), \quad m \geq 0 = 0. \quad (\text{B.113})$$

Dessa forma, identificamos  $|1\rangle$  com o estado de vácuo  $|0;0\rangle$ .

Para cada  $m \geq 1$ , os estados de criação são tais que

$$\begin{aligned} \alpha_{-m}^\mu |1\rangle &\cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} \partial X^\mu(z) \\ &\cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} \left( \dots + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) + \dots \right) \\ &\cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz \left( \dots + \frac{z^{-1}}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) + \dots \right) \\ &\cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0). \end{aligned} \quad (\text{B.114})$$

Para  $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$ , é análogo.

Se os operadores de criação atuarem em um estado genérico  $|\mathcal{A}\rangle$  cujo operador local associado é  $:\mathcal{A}(0,0):$  (funcional de  $X(0,0)$ ), teremos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{-m}^\mu : \mathcal{A}(0,0) &:= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} \partial X^\mu(z) : \mathcal{A}(0,0) : \\
&= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} : \partial X^\mu(z) : : \mathcal{A}(0,0) : \\
&= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} (: \partial X^\mu(z) \mathcal{A}(0,0) : + \text{contrações cruzadas}) \\
&=: \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz z^{-m} \partial X^\mu(z) \mathcal{A}(0,0) : + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz \text{contrações cruzadas} \\
&=: \alpha_{-m}^\mu \mathcal{A}(0,0) : + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{2\pi} \oint_C dz \text{contrações cruzadas}.
\end{aligned} \tag{B.115}$$

Uma vez que  $\mathcal{A}(0,0)$  é funcional de  $X(0,0)$ , tomamos  $k \geq 0$  para o qual há dependência de  $\partial^k X^\mu(0,0)$ . Introduzimos um operador  $\mathcal{A}'(0,0)$  tal que  $\mathcal{A}(0,0) = \partial^k X^\nu(0,0) \mathcal{A}'(0,0)$ . No produto ordenado, a contração de  $\partial X^\mu(z)$  com termos do tipo  $\partial^k X^\nu(0,0)$  serão da forma

$$-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^{k+1} \ln|z|^2 = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}} : \mathcal{A}'(0,0) : . \tag{B.116}$$

Logo, as integrais da contrações cruzadas serão proporcionais a

$$\oint_C dz z^{-m-k-1} : \mathcal{A}'(0,0) : . \tag{B.117}$$

Uma vez que  $: \mathcal{A}'(0,0) :$  não depende de  $z$  e  $m \geq 1, k \geq 0$ , a integral acima é indenticamente nula. Logo,

$$\alpha_{-m}^\mu : \mathcal{A}(0,0) :=: \alpha_{-m}^\mu \mathcal{A}(0,0) : . \tag{B.118}$$

Dessa forma, por um procedimento similar ao feito anteriormente,

$$\begin{aligned}
\alpha_{-m}^\mu |\mathcal{A}\rangle &\cong \alpha_{-m}^\mu : \mathcal{A}(0,0) : \\
&\cong \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) : \mathcal{A}(0,0) : , m \geq 1.
\end{aligned} \tag{B.119}$$

Para  $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$ , é análogo.

Para o caso da teoria  $bc$ , especificamos  $\lambda = 2$ , de modo que

$$b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{b_n}{z^{m+2}}, \quad c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{z^{n-1}}, \quad (\text{B.120})$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n+1} b(z), \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n-2} c(z). \quad (\text{B.121})$$

Tomemos novamente  $|1\rangle$  como o estado associado ao operador identidade. Dessa forma,

$$b_m |1\rangle \cong \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m+1} b(z), \quad c_m |1\rangle \cong \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{m-2} c(z). \quad (\text{B.122})$$

Uma vez que o único operador atuando na origem é a identidade, analogamente ao caso de  $X$ ,  $b$  e  $c$  são holomorfas em torno da origem, de modo que

$$b_m |1\rangle = 0, \quad m \geq -1, \quad c_m |1\rangle = 0, \quad m \geq 2. \quad (\text{B.123})$$

Uma vez que  $b_{-1}$ , o estado  $|1\rangle$  não pode ser o estado fundamental  $|\downarrow\rangle$ . De fato, o estado referente às equações acima deve ser aniquilado por  $b_{-1}$  também, de modo que

$$|1\rangle = b_{-1} |\downarrow\rangle. \quad (\text{B.124})$$

Pelas relações de anticomutação, o estado logo acima é aniquilado por operadores das equações (B.123). Para os demais operadores  $b_{-m}$ ,  $m \geq 2$  e  $c_{-m}$ ,  $m \geq -1$ , usamos os processos de expansão em série de Taylor análogos ao caso do  $X$ , isto é,

$$b_{-m} |1\rangle \cong \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0), \quad m \geq 2, \quad (\text{B.125})$$

$$c_{-m} |1\rangle \cong \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0), \quad m \geq -1. \quad (\text{B.126})$$