



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ECONOMIA**

**DIEGO DA COSTA OLIVEIRA**

**HETEROGENEIDADE DE TAXAS DE DESCONTO E RIQUEZA NO BRASIL:  
AVALIAÇÃO QUANTITATIVA ATRAVÉS DO MODELO DE AIYAGARI**

**FORTALEZA**

**2023**

DIEGO DA COSTA OLIVEIRA

HETEROGENEIDADE DE TAXAS DE DESCONTO E RIQUEZA NO BRASIL:  
AVALIAÇÃO QUANTITATIVA ATRAVÉS DO MODELO DE AIYAGARI

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia do Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Economia. Área de Concentração: Macroeconomia.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Veras Corrêa.

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Aarestrup Arbex.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

O46h Oliveira, Diego da Costa.  
Heterogeneidade de Taxas de Desconto e Riqueza no Brasil : Avaliação Quantitativa através do Modelo de Aiyagari / Diego da Costa Oliveira. – 2023.  
73 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Programa de Pós-Graduação em Economia, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Márcio Veras Corrêa.  
Coorientação: Prof. Dr. Marcelo Aarestrup Arbex.

1. Taxa de Desconto Heterogênea. 2. Desigualdade de Riqueza. 3. Modelo de Aiyagari. I. Título.  
CDD 330

---

DIEGO DA COSTA OLIVEIRA

HETEROGENEIDADE DE TAXAS DE DESCONTO E RIQUEZA NO BRASIL:  
AVALIAÇÃO QUANTITATIVA ATRAVÉS DO MODELO DE AIYAGARI

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia do Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Economia. Área de Concentração: Macroeconomia.

Aprovada em: xx/xx/xxxx.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Márcio Veras Corrêa (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcelo Aarestrup Arbex (Coorientador)  
University of Windsor

---

Dr. Gérson Guilherme Lima Linhares

## **AGRADECIMENTOS**

À minha mãe, Eva Izabel, de onde sempre obtive apoio para chegar onde estou, e a minha companheira Brenda Vasconcelos, cuja presença e apoio foram essenciais durante os meses intensos e desafiantes em que me dediquei a este trabalho. Sua força, paciência e amor foram pilares fundamentais que me sustentaram nesta jornada. Por tudo isso, minha profunda gratidão.

Aos Profs. Drs. Márcio Veras Correa e Marcelo Aarestrup Arbex, pela excelente orientação e dedicação ao longo da elaboração deste trabalho.

Ao participante da banca examinadora Dr. Gérson Guilherme Lima Linhares pelo seu tempo, e pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado e aos demais colegas do CAEN, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fooled."  
(Richard Feynman, Físico)

## RESUMO

Esta tese investiga o papel da heterogeneidade da taxa de desconto na desigualdade de riqueza, com um foco especial nos dados empíricos brasileiros. Utilizando uma extensão do modelo de Aiyagari (1994), incorporamos heterogeneidade nos fatores de desconto dos agentes, tanto na forma de taxas fixas mas heterogêneas, quanto por meio de um processo estocástico de Markov. Essa abordagem permite a representação de agentes econômicos com comportamentos de consumo e poupança mais alinhados aos observados na realidade brasileira. Demonstramos que a heterogeneidade de preferências é um fator crucial para entender a dinâmica da desigualdade patrimonial, fornecendo insights valiosos para o desenvolvimento de políticas econômicas eficazes. O modelo proposto, calibrado com parâmetros conservadores, mostrou-se efetivo em melhor replicar a desigualdade de riqueza observada no Brasil. Concluimos que a introdução de heterogeneidade nos fatores de desconto é fundamental para capturar a complexidade das dinâmicas econômicas e a distribuição de riqueza.

**Palavras-chave:** Taxa de Desconto Heterogênea; Desigualdade de Riqueza; Modelo de Aiyagari.

## **ABSTRACT**

This thesis investigates the role of discount rate heterogeneity in wealth inequality, with a specific focus on Brazilian empirical data. Employing an extension of the Aiyagari (1994) model, we incorporate heterogeneity in agents' discount factors, both in the form of fixed yet heterogeneous rates and through a Markov stochastic process. This approach allows for the representation of economic agents with consumption and saving behaviors more aligned with those observed in Brazilian reality. We demonstrate that preference heterogeneity is a crucial factor in understanding the dynamics of wealth inequality, providing valuable insights for the development of effective economic policies. The proposed model, calibrated with conservative parameters, proved effective in replicating the observed wealth inequality in Brazil. We conclude that the introduction of heterogeneity in discount factors is essential to capture the complexity of economic dynamics and wealth distribution.

**Keywords:** Heterogeneous Discount Rate; Wealth Inequality; Aiyagari Model.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curva de Lorenz Patrimonial - Brasil . . . . .	36
Figura 2 – Distribuição de Ativos - Modelo de Referência . . . . .	42
Figura 3 – Curva de Lorenz - Modelo de Referência . . . . .	43
Figura 4 – Distribuição de Ativos - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa - $\Delta = 0,005$	44
Figura 5 – Propensão Marginal ao Consumo - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa - $\Delta = 0,005$ . . . . .	46
Figura 6 – Função de Propensão Marginal ao Consumo - Comparação entre modelo de Referência e Heterogeneidade Exclusivamente Fixa . . . . .	48
Figura 7 – Comparação de Histogramas - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa e Ex- clusivamente Estocástica . . . . .	49
Figura 8 – Função de Propensão Marginal ao Consumo Média - Comparação entre modelos Heterogeneidade Exclusivamente Fixa e Exclusivamente Estocástica	51
Figura 9 – Função de Propensão Marginal ao Consumo - Modelo Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica . . . . .	52
Figura 10 – Histograma de Ativos - Modelo Completo . . . . .	56
Figura 11 – Curva de Lorenz - Comparação entre Modelo de Referência e Modelo Completo	57
Figura 12 – Curva de Lorenz - Comparação entre Modelo de Referência e Modelo Com- pleto - Parametrização Alternativa . . . . .	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição de Patrimônio - <i>World Inequality Report 2022</i> . . . . .	33
Tabela 2 – Distribuição de Patrimônio - <i>Global Wealth Report 2023</i> . . . . .	34
Tabela 3 – Distribuição Consolidada de Riqueza por População - Pares de Coordenadas	34
Tabela 4 – Parâmetros de Calibração do Modelo de Referência . . . . .	40
Tabela 5 – Parâmetros de Calibração do Processo de Evolução do Fator de Desconto . .	48
Tabela 6 – Parâmetros de Calibração do Processo de Evolução do Fator de Desconto - Parametrização Alternativa . . . . .	56
Tabela 7 – Resultados e Estatísticas . . . . .	60
Tabela 8 – Variações dos Modelos em Relação aos Dados . . . . .	61

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	14
2.1	Discussão da Literatura . . . . .	14
2.1.1	<i>Desigualdade Patrimonial</i> . . . . .	14
2.1.2	<i>Modelos com Utilidade Descontada</i> . . . . .	15
2.1.3	<i>Heterogeneidade nos Fatores de Desconto</i> . . . . .	17
2.1.4	<i>Outros Mecanismos Para a Desigualdade Patrimonial</i> . . . . .	19
2.2	Trabalhos Quantitativos . . . . .	21
3	MODELO TEÓRICO . . . . .	24
3.1	Preferências . . . . .	24
3.2	Tecnologia de Produção . . . . .	24
3.3	Choques Idiossincráticos de Eficiência do Trabalho . . . . .	24
3.4	Heterogeneidade nos Fatores de Desconto . . . . .	25
3.5	Estruturas de Mercado . . . . .	27
3.5.1	<i>Equilíbrio do Modelo</i> . . . . .	27
3.6	Formas Funcionais . . . . .	29
3.7	Casos Limites . . . . .	30
3.7.1	<i>Aiyagari (1994) com Adição de Trabalho Endogenamente Determinado</i> . . . . .	30
3.7.2	<i>Heterogeneidade Exclusivamente Fixa</i> . . . . .	31
3.7.3	<i>Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica</i> . . . . .	32
4	ANÁLISE QUANTITATIVA . . . . .	33
4.1	Fontes de Dados . . . . .	33
4.1.1	<i>Parâmetros de Desigualdade Patrimonial</i> . . . . .	33
4.1.1.1	<i>Curva de Lorenz</i> . . . . .	33
4.2	Calibração . . . . .	35
4.2.1	<i>Calibração Base</i> . . . . .	37
4.3	Solução Numérica e Análise . . . . .	40
4.3.1	<i>Modelo de Referência</i> . . . . .	41
4.3.2	<i>Modelo com Heterogeneidade Exclusivamente Fixa nos Fatores de Desconto</i> . . . . .	43

4.3.3	<i>Modelo com Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica nos Fatores de Desconto</i> . . . . .	47
4.3.4	<i>Modelo Completo</i> . . . . .	52
4.4	<b>Sumário</b> . . . . .	60
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	62
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	65
	<b>APÊNDICE A –MÉTODO NUMÉRICO</b> . . . . .	70
A.1	<b>Introdução</b> . . . . .	70
A.2	<b>Equilíbrio Estacionário</b> . . . . .	70
A.2.1	<i>Função política de consumo</i> . . . . .	71
A.2.2	<i>Função política de oferta de trabalho</i> . . . . .	72
A.2.3	<i>Cálculo Usando o Método de Envelope Endógeno (EGM)</i> . . . . .	73
A.3	<b>Função de excesso de demanda <math>\Phi(r)</math></b> . . . . .	74

## 1 INTRODUÇÃO

Uma extensa literatura aborda a desigualdade patrimonial dentro de modelos quantitativos com agentes heterogêneos. Estes estudos ressaltam a importância de fatores tais como choques de renda, produtividade, heranças e empreendedorismo. No entanto, uma vertente mais recente sugere que a heterogeneidade de preferências pode ser uma fonte crucial da desigualdade de riqueza. Esse ponto de vista se apoia na observação de que famílias com características semelhantes possuem níveis patrimoniais muito diferentes.

Em termos empíricos, a desigualdade patrimonial tem emergido como um dos desafios socioeconômicos mais prementes no Brasil, expondo uma divisão acentuada na capacidade de acumulação e preservação de riquezas entre os estratos da população. Enquanto as análises tradicionais tendem a focar nas diferenças de renda, é a disparidade na distribuição do patrimônio que muitas vezes capta mais acuradamente as desigualdades inerentes que se perpetuam através de gerações.

Este estudo busca examinar a desigualdade patrimonial brasileira através do prisma das decisões de poupança e investimento, mensurando a importância da inclusão de fatores de descontos heterogêneos para fins da modelagem da desigualdade observada, utilizando um modelo macroeconômico que combina tratabilidade numérica e analítica.

Para tanto, foi escolhido como ponto de partida o modelo de Aiyagari (1994), que oferece um arcabouço simplificado, porém robusto, para investigar como os agentes econômicos com dotações e oportunidades heterogêneas interagem e acumulam riqueza ao longo do tempo. Neste modelo, os agentes enfrentam incerteza de renda e buscam suavizar o consumo ao longo da vida, poupando e desinvestindo em um mercado de capitais incompleto. O modelo de Aiyagari consiste em um ambiente de equilíbrio geral dinâmico em que os agentes são sujeitos a choques idiossincráticos de renda e têm acesso limitado aos mercados financeiros. A singularidade deste modelo reside na forma como ele incorpora incertezas de renda e restrições de liquidez para ilustrar a acumulação de capital e a distribuição de riqueza em uma economia. Cada agente no modelo faz escolhas de poupança e consumo buscando maximizar a utilidade ao longo da vida, enfrentando um processo estocástico que modela a variação na renda de trabalho. As decisões de poupança são, assim, inerentemente ligadas à preferência temporal dos agentes, ou seja, ao fator de desconto intertemporal.

No entanto, assumir que este fator de desconto é constante para todos os agentes ignora a diversidade de comportamentos e preferências observadas na realidade. Reconhecendo

essa limitação, propomos uma extensão ao modelo de Aiyagari que abrange duas formas de heterogeneidade nos fatores de desconto: sua especificação como fixos mas heterogêneos, representando diferentes classes de agentes com variados graus de paciência (tais como agentes com diferentes níveis educacionais); e através de sua variação ao longo do tempo por meio de choques idiossincráticos ao valor das taxas de desconto, refletindo mudanças nas preferências temporais dos agentes em resposta a choques econômicos e incertezas.

A heterogeneidade dos fatores de desconto entre agentes é um elemento central neste estudo, refletindo as diversas preferências temporais que influenciam a acumulação e distribuição de riqueza. Diferenças nos fatores de desconto, impulsionadas por variáveis como níveis de educação e influências culturais, moldam a forma como indivíduos avaliam o presente em relação ao futuro. A incorporação desta heterogeneidade de preferências no modelo de Aiyagari permite uma captura mais precisa das nuances da realidade socioeconômica brasileira. Os resultados indicam que a compreensão e modelagem dessas variações nos fatores de desconto são cruciais para uma representação mais autêntica da desigualdade patrimonial, fornecendo percepções valiosas para o desenvolvimento de políticas mais eficazes e direcionadas.

O modelo proposto mostrou-se mais eficaz em replicar os parâmetros de desigualdade observados na realidade brasileira, mesmo com sua calibração para valores arbitrários e conservadores, sugerindo que a heterogeneidade intrínseca e a volatilidade nas preferências temporais dos agentes são mecanismos fundamentais para entender a desigualdade de riqueza.

É importante reiterar que os valores para os parâmetros da heterogeneidade nos fatores de desconto utilizados na simulação do modelo não foram ajustados para se adequarem especificamente aos dados empíricos, o que reforça a robustez do modelo. A habilidade de capturar aspectos-chave da distribuição de riqueza sem a necessidade de calibragem fina sugere que a introdução de heterogeneidade nos fatores de desconto é uma representação genuína das dinâmicas econômicas subjacentes, e não meramente um artefato de ajuste de parâmetros.

Além do presente capítulo introdutório, o restante do trabalho é estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2, denominado 'Referencial Teórico', alicerça o estudo com um exame detalhado da literatura existente, apresentando as vertentes de pesquisa sobre a desigualdade patrimonial no Brasil, a heterogeneidade nos fatores de desconto e outros mecanismos relevantes para a compreensão da desigualdade patrimonial dentro da classe de modelos abordada, além das fontes de dados utilizadas. O Capítulo 3, intitulado 'Modelo Teórico', é dedicado a delinear a estrutura do modelo proposto, desde a referente à economia de referência com mercados

incompletos, além do estudo de dois casos limites do modelo. Prosseguindo, o Capítulo 4, 'Análise Quantitativa', abrange os métodos de consolidação dos dados sobre desigualdade patrimonial, incluindo a estimação da Curva de Lorenz, e detalha a calibração do modelo de referência e a solução e análise numéricas tanto para este quanto para os demais modelos representativos de casos limites, culminando com a solução e análise do modelo completo. o Capítulo 5 conclui o presente trabalho.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Discussão da Literatura

#### 2.1.1 *Desigualdade Patrimonial*

A desigualdade, em suas múltiplas facetas, tem sido um tema central nos debates acadêmicos e políticos do Brasil nas últimas décadas. Tradicionalmente, as análises focavam na desigualdade de renda, um indicador imediato das diferenças socioeconômicas entre a população. No entanto, uma compreensão mais aprofundada da desigualdade requer que se vá além das métricas de renda e se adentre no âmbito do patrimônio e dos ativos, uma dimensão muitas vezes negligenciada nos estudos brasileiros.

A desigualdade de riqueza refere-se à distribuição desigual de ativos econômicos entre os indivíduos ou famílias. Ao contrário da renda, que representa um fluxo de recursos, a riqueza é um estoque acumulado ao longo do tempo, composto por bens, propriedades e ativos financeiros. Esta dimensão da desigualdade é fundamental pois oferece uma perspectiva mais duradoura das disparidades econômicas, refletindo diferenças históricas e estruturais na acumulação de ativos.

No contexto brasileiro, a falta de dados abrangentes e confiáveis sobre a desigualdade de patrimônio tem sido um obstáculo significativo para uma compreensão integral do tema. Enquanto a desigualdade de renda tem sido extensivamente documentada e debatida<sup>1</sup>, pouco se sabe sobre a distribuição de riqueza no país. Esta lacuna no conhecimento não é apenas uma questão acadêmica, mas tem implicações políticas e econômicas reais, dado que políticas públicas eficazes dependem de um entendimento robusto de todas as dimensões da desigualdade.

No estudo das disparidades econômicas, independentemente da complexidade do método utilizado, as pesquisas domiciliares que se apoiam em informações auto-relatadas sobre condições socioeconômicas são recorrentes, focalizando principalmente em renda e despesa. Estes levantamentos geralmente captam fluxos monetários, mas raramente abordam o acúmulo de riqueza ou ativos.

No Brasil, onde a renda é distribuída de maneira extremamente desigual, a parcela da população mais abastada tende a ser sub-representada em tais amostras. As fontes de renda das camadas mais ricas são tipicamente variadas e vão além do salário, abrangendo juros, aluguéis e

---

<sup>1</sup> Vide (CASTRO, 2014; MEDEIROS *et al.*, 2015; SOUZA, 2016; SOUZA, 2018; MEDEIROS; CASTRO, 2018; HECKSCHER; NERI, 2019).



outros. Isso dificulta ainda mais a precisão na avaliação dos rendimentos mais altos. O desafio imposto pela falta de dados sobre patrimônio e ativos impede uma análise detalhada das nuances da desigualdade no Brasil e em outras economias capitalistas.

Uma compreensão aprofundada da desigualdade de riqueza poderia desvendar alternativas para financiamento de políticas públicas com objetivos redistributivos. Por exemplo, no contexto brasileiro, a tributação sobre heranças e propriedades é notavelmente subaproveitada, em parte devido à escassez de dados acessíveis ao público<sup>2</sup>. A desigualdade, sendo um fenômeno multidimensional, é frequentemente analisada apenas sob a ótica de rendimentos, deixando uma lacuna no que se refere à desigualdade de riqueza acumulada.

Um questionamento pertinente, que permaneceu sem resposta durante a fase de declínio na desigualdade de renda na última década, é o que ocorreu com a distribuição de patrimônio no mesmo intervalo. Os dados disponíveis ao público são insuficientes para elucidar essa questão.

Apesar desses obstáculos, os esforços para entender melhor a desigualdade de riqueza no Brasil continuam a ser feitos. Uma pesquisa publicada pela Fundação Getúlio Vargas em 2023, intitulada 'Mapa da Riqueza', (NERI, 2022), representa um passo significativo nessa direção. Ao combinar dados do Imposto de Renda da Pessoa Física (IRPF) com aqueles da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD), a FGV buscou traçar um perfil mais preciso dos mais afortunados no país e examinar as alterações na distribuição de riqueza no contexto pós-pandemia. O relatório resultante não apenas confirmou o alto nível de desigualdade de recursos entre os brasileiros, mas também revelou disparidades maiores do que as previamente estimadas, ressaltando a importância de uma análise patrimonial para uma avaliação completa da estrutura socioeconômica do Brasil. Estes achados reforçam a necessidade de uma coleta de dados mais sistemática e abrangente sobre riqueza, a fim de fundamentar políticas públicas eficazes e promover uma sociedade mais equitativa.

### ***2.1.2 Modelos com Utilidade Descontada***

A suposição central dos modelos com utilidade descontada (Modelos "DU") é a condensação de diversos motivos subjacentes à escolha intertemporal - tais como a percepção de risco, a incerteza sobre o futuro, e as preferências individuais por gratificação imediata versus recompensas futuras - em um único parâmetro, a taxa de desconto. Este aspecto unificador

---

<sup>2</sup> Como tratado por (CALIXTRE, 2018)

permite uma abordagem simplificada, embora, como as pesquisas mais recentes indicam, possa não capturar completamente a complexidade das preferências temporais reais dos indivíduos<sup>3</sup>. Esses modelos emergiram como uma tentativa de quantificar a preferência pelo presente em detrimento do futuro, uma noção que permeia as decisões econômicas desde os primeiros estudos sobre capital e investimento.

A formulação moderna dos modelos DU deve muito a Paul Samuelson, que em 1937, com sua publicação “A Note on Measurement of Utility”<sup>4</sup>, propôs um modelo generalizado de escolha intertemporal aplicável a múltiplos períodos. Samuelson simplificou as variadas motivações psicológicas de escolha intertemporal em um único parâmetro: a taxa de desconto. Este modelo ganhou aceitação principalmente por sua simplicidade e similaridade com a fórmula de juros compostos, apesar de Samuelson não endossar o modelo DU como descritivo ou normativo para escolhas intertemporais.

Os modelos DU foram e são praticamente uma norma no estudo de escolhas intertemporais na macroeconomia, devido à sua capacidade de simplificar a análise de decisões ao longo do tempo. Contudo, o modelo com taxa de desconto fixa e homogênea enfrentou críticas significativas quanto à sua aplicabilidade prática. Pesquisas empíricas revelaram limitações nos pressupostos destes modelos, como a constância das taxas de desconto. Foi observado que as taxas de desconto variam não apenas temporalmente (como no desconto hiperbólico), mas também exibem heterogeneidade em função do tipo e tamanho dos ganhos e perdas, assim como na estrutura das sequências de resultados<sup>5</sup>.

Como exemplo de expansão dos modelos DU, temos o trabalho “On The Endogenous Determination of Time Preference”, (BECKER; MULLIGAN, 1997), onde os autores modelam os esforços de um consumidor para superar esse viés inerente contra o futuro, explorando como fatores como riqueza, mortalidade, vícios e incerteza influenciam a preferência temporal dos indivíduos entre si e também ao longo do tempo. Através de evidências microeconômicas para os Estados Unidos, demonstram que o crescimento do consumo de uma família está positivamente relacionado à sua própria renda e ainda mais à renda dos pais do chefe da família, apresentando mecanismos para a evolução e até transferência intergeracional para os fatores de desconto dos agentes, com um dos principais resultados do modelo sendo a correlação de duplo sentido na qual agentes mais pacientes tendem a tornar-se mais ricos, e agentes mais ricos por sua vez

---

<sup>3</sup> (LOEWENSTEIN; PRELEC, 1992).

<sup>4</sup> (SAMUELSON, 1937).

<sup>5</sup> Como amplamente abordado em (FREDERICK *et al.*, 2002).

tornam-se mais pacientes.

Do mesmo modo e conforme explorado adiante, modelos DU com fatores de desconto fixos e homogêneos entre os agentes mostram-se em geral incapazes de gerar a desigualdade patrimonial observada empiricamente.

### **2.1.3 Heterogeneidade nos Fatores de Desconto**

A noção de agentes heterogêneos, que diferem em sua avaliação do futuro e em sua taxa de desconto, tem motivado uma vasta literatura focada nas características do equilíbrio intertemporal associado.

O potencial impacto da heterogeneidade de preferências na desigualdade de riqueza é destacado por (KRUSELL *et al.*, 1998). Em seu modelo, uma pequena quantidade de heterogeneidade na taxa de desconto leva a grandes aumentos na desigualdade de riqueza (o coeficiente Gini no modelo em análise aumenta em 0,57 com esta modificação). Por sua vez, (SAMWICK, 1997) modela heterogeneidade na taxa de desconto para melhor justificar a desigualdade de riqueza em um modelo de ciclo de vida. O diferencial do referido trabalho está em estimar a distribuição dos parâmetros de preferência com base no perfil observado de desigualdade de riqueza ao longo das idades. Dados de pesquisa domiciliar reforçam a ideia de heterogeneidade de preferências. Estimativas empíricas das equações Euler de consumo indicam heterogeneidade nas preferências temporais (LAWRANCE, 1991) e na aversão ao risco ou elasticidades de substituição intertemporal (VISSING-JORGENSEN, 2002; ATTANASIO; BROWNING, 1993).

Por sua vez, (BECKER; MULLIGAN, 1997) analisa como níveis de riqueza, taxa de mortalidade, vícios, incertezas, e outras variáveis determinam a taxa de desconto dos agentes na economia, sendo o primeiro a reconsiderar a Conjectura de Ramsey - a qual propõe que apenas os agentes mais pacientes acabariam exibindo níveis positivos de consumo a longo prazo, enquanto todos os outros agentes seriam associados a níveis de consumo nulos - sob a premissa de mercados financeiros imperfeitos, impondo uma restrição de não negatividade no capital das famílias, obtendo o resultado que, neste cenário, o equilíbrio a longo prazo está associado a duas classes de agentes: o agente capitalista mais paciente, que possui todo o estoque de capital da economia, e os outros agentes, trabalhadores mais impacientes, que consomem seus salários atuais. Mais recentemente, (DRUGEON; WIGNIOLLE, 2018) analisaram a conjectura de Ramsey's em uma economia populada por agentes com preferências quasi-hiperbólicas e heterogêneas em seus fatores de desconto, além de um modelo com utilidades apresentando

elasticidades de substituição constantes e tecnologias de produção lineares, estabelecendo em ambos os casos a existência e unicidade de equilíbrio para estas categorias de modelos.

Uma vertente mais recente dessa literatura reitera que a heterogeneidade de preferências pode ser uma fonte significativa de desigualdade de riqueza. Esse argumento é fundamentado pela constatação de que famílias observacionalmente similares detêm quantidades muito diferentes de riqueza. Por exemplo, (VENTI; WISE, 2001) estudaram a desigualdade de riqueza no início da aposentadoria entre famílias com ganhos ao longo da vida semelhantes e concluíram que a maior parte da dispersão deve ser atribuída às diferenças na quantidade que as famílias escolhem poupar. Uma heterogeneidade substancial também é encontrada em dados de pesquisa projetados para revelar os parâmetros de preferência das famílias (BARSKY *et al.*, 1995; CHARLES; HURST, 2002). (CAGETTI, 2003) investiga a poupança precaucional em um modelo no qual os parâmetros de preferência (taxas de desconto e o coeficiente de aversão ao risco) variam entre os grupos educacionais. Ele estima os parâmetros de preferência ao ajustar o perfil mediano de riqueza por idade para cada grupo.

Investigando a heterogeneidade de fatores de desconto com base em dados da economia dos Estados Unidos, (HENDRICKS, 2007) utilizou um modelo quantitativo do ciclo de vida baseado em (HUGGETT, 1996), com sua análise concluindo que a heterogeneidade na taxa de desconto eleva o coeficiente de Gini da riqueza e a riqueza detida pelo 1% mais rico da população para valores mais próximos aos dados comparados a um modelo sem heterogeneidade. Em abordagem similar, (CARROLL *et al.*, 2014) apresentam um modelo macroeconômico calibrado para alinhar-se tanto às evidências microeconômicas quanto macroeconômicas sobre a dinâmica da renda doméstica com base em dados dos Estados Unidos, concluindo que modelos com heterogeneidade nos fatores de desconto mais fielmente replicam a desigualdade de riqueza observada nos dados.

No mesmo sentido, (KAPLAN; VIOLANTE, 2022) estudam quais características e estratégias de calibração em modelos com agentes heterogêneos resultam em uma alta propensão marginal média ao consumo (MPC), analisando modelos com diferentes preferências, heterogeneidade fixa, processos de renda e estrutura de ativos, chegando a resultados similares na eficácia de modelos com heterogeneidade em fatores de desconto em mais fielmente replicar a desigualdade de riqueza observada nos dados.

Em análise sobre os efeitos do fator de desconto sobre a escolha dos agentes de aprimorar sua educação financeira, (MEIER; SPRENGER, 2008), através de um estudo de

campo, descobriram que indivíduos com menor desconto do futuro têm maior probabilidade de participar de um programa de educação financeira gratuito. Este achado é significativo mesmo controlando-se por investimento prévio em capital humano, tanto geral quanto específico para conhecimentos financeiros. A pesquisa responde parcialmente à questão de por que muitos indivíduos permanecem financeiramente iletrados, sugerindo que as preferências temporais pode explicar quem opta ou não por se tornar financeiramente letrado. Este resultado tem implicações importantes para a avaliação de programas de educação financeira e programas educacionais voluntários em geral. Por fim, os autores argumentam que os esforços para melhorar as decisões financeiras por meio de programas educacionais podem não ser eficazes, dado que os indivíduos que mais descontam o futuro tendem a optar por não participar, mesmo quando os custos de participação são mínimos, preferindo não investir em educação financeira. Este implica que depender de programas educacionais voluntários não afetará significativamente a alfabetização financeira, não atingindo satisfatoriamente a população-alvo de financeiramente iletrados.

#### ***2.1.4 Outros Mecanismos Para a Desigualdade Patrimonial***

Além de mecanismos de heterogeneidade de preferências, tais como variação das taxas de desconto e coeficientes de aversão ao risco<sup>6</sup>, diversos autores discutem outros mecanismos para a geração de modelos com distribuições de ativos que se aproximam dos dados empíricos.

No âmbito de modelos Bewley-Hugget-Aiyagari tais como o usado no presente trabalho, podemos citar (BACH *et al.*, 2015), o qual explora a heterogeneidade de portfólios no âmbito da economia da Suécia, identificando uma correlação positiva entre a taxa de retorno médio de ativos e o nível global de riqueza de uma família, bem como uma componente de retorno idiossincrático, que se manifesta devido às diferentes composições de ativos mantidos por diferentes famílias, cuja variação também aumenta com a riqueza. A descoberta primordial ressalta que, ao incorporar a heterogeneidade de portfólio no modelo, é possível replicar a desigualdade de riqueza observada nos dados. Esta incorporação contrasta com o modelo utilizado no presente trabalho pois, para corresponder à aglomeração de riqueza no estrato superior da distribuição, não se faz necessário considerar a heterogeneidade do fator de desconto, ou outros mecanismos que impulsionem a poupança dos indivíduos mais ricos.

No mesmo sentido e expandindo sobre o trabalho supramencionado, temos (HUB-

<sup>6</sup> Tal como no trabalho de (CAGETTI, 2003).

MER *et al.*, 2020), cujo objetivo é analisar fontes de desigualdade na economia dos Estados Unidos. Os autores também examinam diversos fatores potenciais que poderiam estar impulsionando a desigualdade de riqueza. Um desses fatores são as taxas de impostos: a partir de cerca de 1980, as taxas de impostos para os rendimentos mais altos diminuíram significativamente, resultando em uma queda substancial na progressividade tributária. Assim, retornos mais altos para a poupança nas faixas superiores desde então podem potencialmente explicar o aumento da distância entre a riqueza de ricos e pobres.

Outra explicação potencial para o aumento da desigualdade de riqueza é o aumento na desigualdade de salários/rendimentos observado desde meados da década de 1970. Estudos (em sua maioria focados na economia dos Estados Unidos, nação a qual tem diversos parâmetros de desigualdade similares aos observados na economia brasileira) documentam que o prêmio de habilidades educacionais tem aumentado desde este período<sup>7</sup>.

Além disso, numerosos estudos<sup>8</sup> documentaram que os prêmios associados a outras medidas de habilidade também aumentaram, bem como as medidas de dispersão salarial residual ou friccional. Em termos das famílias com os rendimentos mais altos, Piketty e Saez<sup>9</sup> documentam movimentos significativos em direção a caudas mais espessas nas partes superiores da distribuição. Portanto, na medida em que essa maior desigualdade de renda se traduziu em desigualdade de poupança e riqueza. Estudos recentes<sup>10</sup> sobre a economia brasileira também apontam que a desigualdade de renda ou aumentou, ou manteve-se estável nos níveis já altos observados nas décadas anteriores.

Na linha de expansão do modelo padrão tal como adotada no presente trabalho, Ghiglino, Christian and Venditti<sup>11</sup>, estudam analiticamente a distribuição de riqueza no contexto das economias de Bewley ampliadas para permitir o risco de renda de capital idiossincrático, o qual é interpretado como risco de empreender. Para tanto, estendem o modelo padrão para que a renda do capital seja sujeita a choques idiossincráticos da mesma forma que a renda do trabalho. Concluem que, assim como no modelo de Aiyagari, a restrição de endividamento juntamente com rendimentos estocásticos do capital e trabalho garantem um limite inferior para a riqueza, com seu modelo demonstrando que os ricos podem enriquecer através da poupança, enquanto os pobres podem não poupar o suficiente para escapar de uma armadilha de pobreza.

<sup>7</sup> Como trabalho seminal, temos (KATZ; MURPHY, 1992)

<sup>8</sup> Tais como (ACEMOGLU, 2002; HORNSTEIN *et al.*, 2005; ATKINSON; BOURGUIGNON, 2014).

<sup>9</sup> (PIKETTY; SAEZ, 2003).

<sup>10</sup> (SOUZA, 2016; MEDEIROS; CASTRO, 2018; BREVIGLIERI; CORREA, 2023).

<sup>11</sup> (GHIGLINO; VENDITTI, 2007).

Para justificar o nível de poupança da camada mais rica da população (e conseqüente concentração de ativos no topo da distribuição), (CARROLL, 2000) simula um modelo no qual os agentes derivam utilidade diretamente de seu nível de ativos, com as funções de utilidade de consumo e de riqueza tendo diferentes curvaturas.

Por fim, Karabarbounis e Neiman<sup>12</sup> concluem que a parcela da renda total destinada ao capital aumentou recentemente, contribuindo potencialmente para o aumento da desigualdade de riqueza na medida em que as famílias detentoras de capital passaram a deter uma maior fatia da renda, por sua vez acumulando capital à uma taxa crescente.

## 2.2 Trabalhos Quantitativos

A escolha de dados para os parâmetros de calibração do modelo foi baseada onde possível em trabalhos quantitativos consolidados e reconhecidos na área, preferencialmente com dados mais recentes. Foi seguida - onde possível - a calibração do modelo SAMBA (*Stochastic Analytical Model with Bayesian Approach*, que é um dos modelos utilizados pelo Banco Central do Brasil (BACEN) para análises e tomada de decisão de política monetária), desenvolvido por (CASTRO *et al.*, 2011), além de outras fontes nacionais em linha com este modelo.

Em outro trabalho publicado pelo BACEN, temos o artigo de (LINARDI, 2016), no qual os autores estimam um modelo de Equilíbrio Geral Dinâmico Estocástico (DSGE) utilizando dados da economia brasileira desde 1999. O principal objetivo é avaliar, dentro de um arcabouço Bayesiano, o ajuste empírico de diferentes especificações do modelo de pequena economia aberta.

Dentre as fontes nacionais adicionais, utilizamos o trabalho de (FILHO, 2018), o qual faz exame dos ciclos de negócios da economia brasileira no pós-Real, com enfoque na análise de choques de oferta e de demanda, utilizando para a simulação de seus modelos formas funcionais similares às aqui adotadas, além de ter fontes comuns aos do presente trabalho (tal como a utilização do modelo SAMBA) e em linha com a literatura macroeconômica nacional.

Quanto à estimação dos parâmetros referentes ao processo de renda, temos que no Brasil, devido à falta de um levantamento de dados de painel doméstico mais completo, como o *Panel Study of Income Dynamics* nos EUA, não podemos estimar adequadamente o parâmetro de persistência dos choques idiossincráticos. Face aos objetivos do presente trabalho, optamos por utilizar dados da economia dos EUA (a qual apresenta índice de Gini - 0,83 - próximo

<sup>12</sup> (KARABARBOUNIS; NEIMAN, 2014).

à da economia brasileira) para a estimativa deste parâmetro. Uma vasta literatura estimou processos para choques salariais idiossincráticos usando dados anuais, tipicamente para homens, e, embora haja alguma variação entre os estudos, o consenso é que esses choques são grandes e persistentes<sup>13</sup>.

Para suprir esta deficiência, nos baseamos nos trabalhos para a economia dos EUA de (HEATHCOTE *et al.*, 2010), (FLODEN; LINDÉ, 2001), e (MITMAN *et al.*, 2016), os quais - em linha com o presente trabalho - abordam desigualdade patrimonial dentro de modelos com poupança precaucional.

Ainda quanto ao processo de renda, para um resultado mais fidedigno, optamos por estimar a variância do componente estocástico processo de renda utilizando dados nacionais, seguindo o trabalho de (REIS; ZILBERMAN, 2013), cujo foco é a simulação de um modelo padrão de mercados incompletos com divisão de empregos em públicos e privados, tratando o emprego público como uma fonte de seguro contra o risco de renda, com o objetivo de explorar os ganhos ou perdas de bem-estar devido a um governo maior.

Para a estimação dos parâmetros de heterogeneidade nos fatores de desconto, em especial a definição do intervalo de valores destes parâmetros, utilizamos parâmetros extraídos dos trabalhos citados na Seção 2.1.3, além de outros trabalhos neste sentido, em especial as estimativas para heterogeneidade na economia norte americana tais como calculada por (LAWRANCE, 1991), e para a economia mexicana, conforme (CARVALHO, 2010).

Para a definição dos parâmetros quanto à concentração de riqueza no Brasil, especialmente face às limitações apontadas na Seção 2.1.1, consolidamos dados de fontes distintas para estimação dos parâmetros de desigualdade de riqueza.

Como fonte de dados principais utilizamos dados do *World Inequality Report 2022*, (CHANCELL *et al.*, 2022), o qual é um relatório anual baseado em um extenso banco de dados sobre a distribuição de renda e riqueza, tanto entre países quanto internamente. É principalmente mantido pelo World Inequality Lab (WIL), localizado na Paris School of Economics (PSE), sendo fundamentalmente o resultado de um esforço coordenado e colaborativo que envolveu centenas de pesquisadores em todo o mundo ao longo dos últimos vinte anos. Referido trabalho desenvolve uma metodologia baseada na noção de Contas Nacionais Distributivas (DINA, na sigla em inglês). O objetivo central é descrever a evolução da distribuição da renda e riqueza nacional, ou seja, como os diferentes percentis da distribuição - do menor ao maior - evoluem ao longo

---

<sup>13</sup> (GUVENEN, 2007) faz um amplo estudo empírico sobre os processos de renda laboral nos EUA.



do tempo e entre países, usando conceitos de renda e riqueza que são social e economicamente significativos e comparáveis entre países. Para estimação da riqueza é utilizado o método *Mixed Income Capitalization-Survey*, (MICS), que combina dados de imposto de renda com pesquisas domiciliares e contas nacionais, tal como especificado no *Distributional National Accounts Guidelines* (ALVAREDO *et al.*, 2020).

Em adição e na mesma linha do estudo citado acima, temos o *Global Wealth Report 2023*, elaborado pelo *Credit Suisse / UBS Group AG*, (SUISSE; UBS, 2023), o qual explora uma ampla gama de temas macro e microeconômicos relacionados à evolução e distribuição da riqueza global. O seu propósito é fornecer uma análise abrangente e atualizada da riqueza das famílias, cobrindo cerca de 5,4 bilhões de pessoas ao redor do mundo. O relatório é descrito como um recurso multifacetado que oferece uma visão profunda sobre a riqueza global, apresentando dados e análises sobre tendências de riqueza global e comparações regionais de riqueza ao redor do mundo.

Os dados acima são compatíveis com fontes nacionais (limitadas) recentes, em especial com dados sobre estoque patrimonial publicadas pela Receita Federal no Imposto de Renda de Pessoa Física e da PNAD Contínua, especificamente os resultados obtidos por (NERI, 2022) em seu *Mapa da Riqueza do Brasil*, os quais tem ênfase no topo da distribuição de renda e patrimônio da população brasileira, e que seguem a linha de estudo conduzido por (CALIXTRE, 2018), o qual tem por objeto a análise das declarações patrimoniais de todos os mais de 490 mil candidatos de todos os municípios brasileiros das Eleições de 2016.

### 3 MODELO TEÓRICO

O modelo utilizado é uma extensão do proposto em (AIYAGARI, 1994), com a adição de escolha endógena de trabalho/lazer pelas famílias, e - como modificação principal deste trabalho - a inclusão de heterogeneidade nos fatores de desconto entre os agentes. As economias analisadas são economias de crescimento com produção, povoadas por uma massa unitária de famílias que vivem para sempre, e especificadas em tempo discreto  $\tau = 0, 1, \dots$ . Não há incerteza agregada na economia. A taxa de juros, os salários, a oferta agregada de mão de obra e o estoque de capital serão, portanto, constantes.

O modelo é estruturado de forma a ter o modelo de Aiyagari (1994) como caso limite, sendo este modelo tratado como referência para mensurar a performance do modelo completo.

#### 3.1 Preferências

As famílias derivam utilidade do consumo e desutilidade do trabalho. O consumo atual é denotado por  $c$  e o trabalho ofertado por  $h$ . Cada agente também é dotado de uma unidade de tempo, que é dividida entre trabalho,  $h$  e lazer  $(1 - h)$ . As utilidades futuras são descontadas à taxa  $\beta \in (0, 1)$ , a qual pode ser fixa ou estocástica, seguindo um processo Markoviano detalhado adiante. Denotamos a utilidade por período como  $u(c, h)$  e a utilidade total esperada no tempo  $\tau$  como  $E_\tau \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{t-\tau} u(c_t, h_t)$ .

#### 3.2 Tecnologia de Produção

A produção agregada  $Y$  é realizada de acordo com uma função de produção neoclássica agregada  $F(K, L)$  que tem como insumos o capital  $K$  e as unidades eficientes de trabalho  $L$ . A produção pode ser utilizada para consumo ou investimento em capital, e o capital se deprecia a taxa  $\delta$  a cada período .

#### 3.3 Choques Idiossincráticos de Eficiência do Trabalho

A cada período, as famílias recebem um choque em suas unidades de eficiência de trabalho  $\varepsilon \in \Upsilon \equiv \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_\varepsilon}\}$ . Esse choque é Markoviano, com matriz de transição  $\Gamma$ , onde  $\Gamma_{\varepsilon\varepsilon'}$  indica  $\Pr(\varepsilon_{t+1} = \varepsilon' \mid \varepsilon_t = \varepsilon)$ . A evolução estocástica dos choques é descrita pela mesma função de distribuição de probabilidade de transição para todos os indivíduos, mas as realizações são

*i.i.d.* entre os indivíduos.

### 3.4 Heterogeneidade nos Fatores de Desconto

Com o objetivo de criar um modelo macroeconômico mais aderente à realidade da desigualdade de riqueza, que muitas vezes supera a desigualdade de renda, é crucial introduzir uma fonte adicional de heterogeneidade. Nossa abordagem foca na heterogeneidade na impaciência dos agentes, um aspecto frequentemente subestimado em modelos anteriores. Agora, cada família é dotada de um fator de preferência temporal idiossincrático, o qual pode ser fixo no tempo ou estocástico. Essa suposição não apenas captura a variação real nas taxas puras de preferência temporal entre indivíduos, mas também incorpora outras discrepâncias, como expectativas de crescimento de renda, limitações temporárias sobre o consumo não associadas à renda, oportunidades de investimento, aversão ao risco, estruturas tributárias e outras variáveis relevantes que não são consideradas em um modelo dotado de somente um único fator de desconto.

A principal modificação ao modelo base de Aiyagari (1994) se dá através da inclusão de um processo de Markov para o fator de desconto  $\beta$ , de forma a modelar heterogeneidade entre os agentes da economia simultaneamente na forma de heterogeneidade fixa e choques idiossincráticos aos fatores de desconto, de forma a abranger ambas as formas de heterogeneidade tratadas pela literatura. É considerada apenas uma massa unitária de famílias, as quais são divididas entre certos grupos com fatores de desconto fixos ao longo do tempo, mas heterogêneos entre si, e um grupo formado por agentes que possuem o fatores de desconto estocásticos.

A economia passa a ser modelada como sendo dotada de dois grandes grupos de agentes: aqueles com um fator de desconto fixo durante toda a duração do modelo, mas divididos entre classes dotadas de diferentes fatores de desconto; e um grupo formado por agentes que possuem o mesmo fator de desconto médio, mas que à cada período são sujeitos à choques idiossincráticos, Markovianos, os quais seguem matriz de transição  $\Pi$ . A cada período, as famílias deste grupo podem se mover de um estado  $\beta$  para outro estado  $\beta'$  com probabilidade  $\Pi_{\beta\beta'}$ , seguindo a mesma dinâmica aplicável às unidades de eficiência de trabalho  $\varepsilon$ , com tais choques sendo independentes entre si.

Face ao acima, a função de valor não apenas depende das escolhas de consumo, lazer, ativos, e do choque de eficiência de trabalho, mas também do estado atual do fator de desconto  $\beta$  e das probabilidades de transição dadas pela matriz  $\Pi_{\beta\beta'}$ , a qual é assim estruturada:

$$\Pi_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} \pi_{\beta_{\text{fixo}}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\beta_{\text{m\u00e9dio}}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\beta_{\text{estoc\u00e1stico}}} \end{pmatrix}$$

Onde:

$\pi_{\beta_{\text{fixo}}}$ : \u00e9 a matriz que governa a distribui\u00e7\u00e3o dos agentes que possuem fatores de desconto heterog\u00eaneos mas fixos ao longo do tempo, sem incluir o fator de desconto m\u00e9dio. Deste modo, \u00e9 uma matriz degenerada na qual os agentes n\u00e3o s\u00e3o sujeitos \u00e0 transi\u00e7\u00f5es entre os estados, portanto sempre mantendo o mesmo estado estacion\u00e1rio e sem apresentar incerteza seja agregada ou idiossincr\u00e1tica. A forma adotada por esta configura\u00e7\u00e3o \u00e9 a de uma matriz identidade  $I_{n \times n}$ , com  $n$  sendo o n\u00famero de estados associados.

$\pi_{\beta_{\text{m\u00e9dio}}}$ : refere-se \u00e0 a matriz que governa o fator de desconto m\u00e9dio dos agentes que possuem fatores de desconto heterog\u00eaneos mas fixos ao longo do tempo. Portanto, \u00e9 uma matriz unit\u00e1ria, com seu \u00fanico elemento sendo 1, representando a probabilidade unit\u00e1ria do fator de desconto  $\beta_{\text{m\u00e9dio}}$ . A estrutura\u00e7\u00e3o desta forma permite que o modelo facilmente represente o caso limite de Aiyagari (1994), com fator de desconto fixo e \u00fanico para todos os agentes.

$\pi_{\beta_{\text{estoc\u00e1stico}}}$ : refere-se \u00e0 a matriz que governa os agentes sujeitos ao mesmo fator de desconto m\u00e9dio, mas sujeitos \u00e0 choques idiossincr\u00e1ticos per\u00edodo \u00e0 per\u00edodo, modelas atrav\u00e9s de um processo Markoviano. Deste modo, os agentes com a din\u00e2mica governada por esta matriz est\u00e3o sujeitos \u00e0 incerteza em seus fatores de desconto individuais per\u00edodo \u00e0 per\u00edodo. Conseq\u00fcentemente, \u00e9 uma matriz estoc\u00e1stica de tamanho  $n \times n$ , com  $n$  sendo o n\u00famero de estados associados ao processo de Markov, com cada fileira de  $\pi_{\beta_{\text{estoc\u00e1stico}}}$  somando 1 e com todos os elementos sendo n\u00e3o-negativos (adotando a forma de uma “matriz estoc\u00e1stica direita”), estrutura an\u00e1loga \u00e0 adotada para a matriz de transi\u00e7\u00e3o  $\Gamma$ , a qual governa os choques de efici\u00eancia do trabalho.

Com o uso da matriz  $\Pi_{\beta\beta'}$  podemos parametrizar o modelo com um n\u00famero arbitr\u00e1rio de agentes mediante a expans\u00e3o das matrizes  $\pi_{\beta_{\text{fixo}}}$  e  $\pi_{\beta_{\text{estoc\u00e1stico}}}$ , incluindo a simula\u00e7\u00e3o de economias com m\u00faltiplos agentes com fator de desconto fixo, m\u00faltiplos agentes com fator de desconto estoc\u00e1stico - com diferentes par\u00e2metros tais como seu valor m\u00e9dio e processo de transi\u00e7\u00e3o - e combina\u00e7\u00f5es destas estruturas.

Alternativamente, podemos realizar a calibração da Curva de Lorenz do modelo à Curva de Lorenz da economia mediante a escolha dos parâmetros (estados e probabilidades de transição) da matriz  $\Pi_{\beta\beta'}$ , neste caso a qual pode ser interpretada como um mecanismo de “decomposição” do fator de desconto da economia em diversas categorias.

### 3.5 Estruturas de Mercado

Temos uma economia com mercados incompletos. Por mercados incompletos, indicamos que não existem mercados de contingência de estados para o choque laboral específico das famílias  $\varepsilon$  ou choques em seus fatores de desconto  $\beta$ . Especificamente, consideramos que as famílias possuem ativos  $a \in [\underline{a}, \infty)$  que rendem juros à taxa  $r$ . Suponho que as famílias estejam restritas por um limite inferior exógeno em suas posses de ativos  $\underline{a}$ , entendida como uma restrição ao seu endividamento<sup>1</sup>.

Em cada período  $t$ , existe um mercado para unidades de serviços laborais, com preço  $w_t$ , e um mercado de aluguel para serviços de capital, com preço  $r_t + \delta$ , de modo que  $r_t$  é a taxa de retorno ao capital. Quando um trabalhador de produtividade  $\varepsilon_{it}$  dedica  $h_{it}$  unidades de tempo ao trabalho, os ganhos laborais resultantes são  $w_t \varepsilon_{it} g^h(\varepsilon_{it}, a_{it})$ . A equação orçamentária do período para uma determinada família é:

$$c_{it} + a_{it+1} = w_t \varepsilon_{it} g^h(\varepsilon_{it}, a_{it}) + (1 + r_t) a_{it}$$

Para simplificar a notação e sem prejuízo à interpretação, suprimiremos os índices  $i$  e  $t$  ao longo do texto, exceto onde puderem ser fonte de ambiguidade ou confusão.

#### 3.5.1 Equilíbrio do Modelo

As variáveis de estado individuais são a realização do choque  $\varepsilon$ , a realização do valor de  $\beta$ , e o estoque de ativos  $a$ .<sup>2</sup> O problema que a família resolve é:

<sup>1</sup> Esse limite inferior pode surgir endogenamente como a quantidade que garante que a família seja capaz de pagar sua dívida em todos os estados do modelo, ou podemos defini-lo exogenamente como uma restrição de endividamento.

<sup>2</sup> Como não há incerteza agregada e estamos olhando apenas para estados estacionários, não há variáveis de estado agregadas.

$$v(\varepsilon, a, \beta) = \max_{c, l, a'} \left\{ u(c, h) + \sum_{\varepsilon'} \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'} \sum_{\beta'} \Pi_{\beta\beta'} v(\varepsilon', a', \beta') \right\}$$

$$\text{sujeito a: } c + a' = wh\varepsilon + (1 + r)a,$$

$$c \geq 0, \quad 1 \geq h \geq 0 \quad \text{e} \quad a' \geq \underline{a}.$$

Nessa equação,  $\Gamma_{\varepsilon\varepsilon'}$  representa a probabilidade de transição entre diferentes choques de produtividade do trabalho,  $\beta$  representa o estado atual do fator de desconto associado ao período atual,  $\beta'$  representa o estado do fator de desconto associado ao período futuro, de acordo com a matriz de transição  $\Pi_{\beta\beta'}$ , a qual representa a probabilidade de transição entre os estados  $\beta$  e  $\beta'$ ,  $r$  e  $w$  são o retorno dos ativos e a taxa de salário por unidade eficiente de trabalho.

Sob certas condições, problemas desse tipo têm uma solução que denotamos  $a' = g^a(\varepsilon, \beta, a)$ ,  $c = g^c(\varepsilon, \beta, a)$  e  $h = g^h(\varepsilon, \beta, a)$  com um limite superior nas posses de ativos,  $\bar{a}$ , tal que  $\bar{a} \geq g^a(\varepsilon, \beta, a) \geq \underline{a}$  para todo  $\varepsilon \in \Upsilon$ , todo  $\beta \in B$  todo  $a \in A \equiv [\underline{a}, \bar{a}]$ .<sup>3</sup> Doravante, também usaremos a notação mais compacta  $s \equiv \{\varepsilon, \beta, a\}$  e  $S \equiv \Upsilon \times B \times A$ .

É possível construir um processo de Markov para as variáveis de estado individuais, a partir do processo de Markov nos choques e das regras de decisão dos agentes. Seja  $\mathcal{J}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada em  $S$  por, digamos, seus intervalos abertos. Uma medida de probabilidade  $\mu$  sobre  $\mathcal{J}$  descreve exhaustivamente a economia, indicando quantas famílias são de cada tipo. Seja  $Q(s, J)$  a probabilidade de um tipo  $s = \{\varepsilon, \beta, a\}$  se tornar de um tipo em  $J \subset \mathcal{J}$ . Dados os objetos definidos até agora, podemos expressar  $Q$  como:

$$Q(s, J) = \sum_{\substack{\varepsilon' \in J_\varepsilon \\ \beta' \in J_\beta}} \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'} \Pi_{\beta\beta'} \mathbf{I}_{g(\varepsilon, \beta, a) \in J_a},$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma função indicadora que assume o valor 1 se seu argumento for verdadeiro e 0 caso contrário,  $J_\varepsilon$  é a projeção de  $J$  em  $\Upsilon$ ,  $J_\beta$  é a projeção de  $J$  em  $B$  e  $J_a$  é a projeção de  $J$  em  $A$ . A função de transição  $Q$  descreve a evolução da economia, gerando uma medida de probabilidade para o próximo período  $\mu'$  dado uma medida de probabilidade  $\mu$  hoje. A maneira exata como isso ocorre é

$$\mu'(J) = \int_S Q(s, J) d\mu.$$

<sup>3</sup> Conforme (HUGGETT, 1993).

Definição 1. Um equilíbrio de estado estacionário para a economia de mercados incompletos é um conjunto de funções  $\{v, g^a, g^c, g^h\}$ , uma medida de famílias  $\mu$ , e um par de preços  $\{w, r\}$ , tal que:

- (1) dado um par de preços  $\{w, r\}$ , as funções  $\{v, g^a, g^c, g^h\}$  resolvem o problema de decisão das famílias;
- (2) os preços são dados pelas produtividades marginais,  $r = F_K(K/L) - \delta$  e  $w = F_L(K/L)$ ;
- (3) os insumos de fatores são obtidos por agregação das famílias,  $L = \int \varepsilon g^h d\mu$  e  $K = \int g^a d\mu$ ;
- (4) a medida de famílias é estacionária,  $\mu J = \int_S Q(s, J) d\mu$ ; e
- (5) em virtude da lei de Walras, a restrição de recursos agregada da economia é automaticamente satisfeita,  $C + K' = F(K, L) + (1 - \delta)K$ .

### 3.6 Formas Funcionais

A função de produção escolhida é a padrão Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}.$$

Já a função de utilidade escolhida é:

$$u(c, h) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \lambda \frac{h^{1+\nu}}{1+\nu}.$$

É utilizada uma função de utilidade separável entre consumo e oferta de trabalho. Essa função de utilidade é selecionada por oferecer parâmetros que capturam aspectos importantes do comportamento dos agentes e por sua simplicidade analítica. O parâmetro  $\sigma$  determina quão sensível os agentes são às mudanças no consumo ao longo do tempo (com a elasticidade intertemporal de substituição do consumo dada por  $1/\sigma$ ), enquanto o parâmetro  $\nu$  controla a sensibilidade à variação na oferta de trabalho (com a elasticidade intertemporal de substituição do trabalho dada por  $1/\nu$ ). O termo  $\lambda$  permite ajustar a importância relativa entre consumo e oferta de trabalho na escolha dos agentes.

A função de utilidade escolhida consiste em uma combinação de duas partes, cada uma com seu conjunto próprio de parâmetros. A primeira parte,  $\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ , representa a utilidade do consumo ( $c$ ) e é conhecida como a função de utilidade de Risco Relativo Constante (CRRA). A segunda parte,  $\lambda \frac{h^{1+\nu}}{1+\nu}$ , incorpora a desutilidade do trabalho ( $h$ ) e adiciona uma dimensão adicional de flexibilidade ao modelo.

A função de utilidade CRRA é uma forma funcional comumente usada na economia para representar aversão ao risco. Sua característica chave é que o coeficiente de aversão relativa ao risco ( $\sigma$ ) permanece constante em diferentes níveis de riqueza ou consumo. Valores mais altos de  $\sigma$  indicam níveis maiores de aversão ao risco, o que significa que os indivíduos são mais avessos a flutuações no consumo.

A segunda parte da função de utilidade introduz uma dimensão adicional ao considerar a desutilidade do trabalho ( $h$ ). O parâmetro  $\nu$  controla a curvatura da função de utilidade do trabalho. Valores maiores de  $\nu$  indicam que os indivíduos têm uma maior sensibilidade às mudanças na oferta de trabalho, o que também afeta suas escolhas de consumo por meio da variação em seu salário final.

Essas escolhas de formas funcionais têm sido comuns na literatura por uma razão. A função de produção Cobb-Douglas simplifica como capital e trabalho se combinam na produção, enquanto a função de utilidade selecionada permite modelar detalhadamente as preferências dos agentes e suas decisões intertemporais. Essas formas funcionais são eficazes em capturar aspectos fundamentais do comportamento econômico e, ao calibrar seus parâmetros, podemos relacionar as previsões do modelo com as observações.

### 3.7 Casos Limites

O modelo deste trabalho preserva os mesmos aspectos daqueles presentes em Aiyagari (1994). Para certas escolhas de parâmetros quanto à matriz de transição  $\Pi$  os modelos são idênticos. Discorremos abaixo sobre este caso limite e outras possibilidades:

#### 3.7.1 *Aiyagari (1994) com Adição de Trabalho Endogenamente Determinado*

Escolhemos o modelo de Aiyagari (1994) como referência à performance do modelo ora desenvolvido em representar a desigualdade patrimonial observada empiricamente. Tal escolha é natural, face ao modelo ser uma extensão direta daquele, com a adição de decisão de trabalho endógena (para fins de melhor calibração aos dados da economia brasileira), e com a adição de heterogeneidade nos fatores de desconto, objeto de estudo do presente trabalho.

No modelo de Aiyagari os agentes resolvem os seguinte problema de otimização:



$$v(\varepsilon, a) = \max_{c, h, a'} \left\{ u(c, h) + \beta \sum_{\varepsilon'} \Gamma_{\varepsilon \varepsilon'} v(\varepsilon', a') \right\}$$

sujeito a:  $c + a' = wh\varepsilon + (1+r)a,$

$$c \geq 0, \quad 1 \geq h \geq 0 \quad \text{e} \quad a' \geq \underline{a},$$

O que é exatamente equivalente ao modelo parametrizado com a seguinte matriz de transição  $\Pi_{\beta\beta'}$ , pois passamos a ter um único fator de desconto, com probabilidade 1 (ou seja, de valor único e fixo temporalmente):

$$\Pi_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\beta_{\text{médio}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.7.2 Heterogeneidade Exclusivamente Fixa

Podemos considerar o caso no qual os agentes estão agrupados exclusivamente em classes distintas, cada qual dotada de um fator de desconto único e fixo temporalmente. Como exemplo, considere uma distribuição discretizada para o fator de desconto em 5 pontos igualmente espaçados entre  $[\beta_{\text{médio}} - 2\Delta, \beta_{\text{médio}} + 2\Delta]$ , de forma que a economia deste modelo passa a ser composta por 5 classes de famílias, cada uma correspondendo à  $\frac{1}{5}$  (um quinto) da massa total de agentes. Neste caso, temos:

$$\Pi_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} \pi_{\beta_{\text{fixo}}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\beta_{\text{médio}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com  $\pi_{\beta_{\text{fixo}}}$  adotando, neste exemplo, a seguinte estrutura, juntamente aos estados associados (adotando a notação compacta  $\beta = \beta_{\text{médio}}$ ):

$$\pi_{\beta_{\text{fixo}}} = \left( \begin{array}{c|cccc} & \beta - 2\Delta & \beta - \Delta & \beta + \Delta & \beta + 2\Delta \\ \hline \beta - 2\Delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta - \Delta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta + \Delta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta + 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

### 3.7.3 Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica

Por fim, podemos modelar o caso extremo na qual todos os agentes possuam o mesmo fator de desconto médio, contudo sujeitos à choques idiossincráticos à cada período. Como exemplo, considere o caso no qual os fatores de desconto dos agentes seguem um processo AR(1), o qual é discretizado em 5 estados através do método de Rowenhorst. Para este caso,  $P_{i\beta\beta'}$  assume a seguinte estrutura:

$$\Pi_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\beta_{\text{estocástico}}} \end{pmatrix}$$

No qual  $\pi_{\beta_{\text{estocástico}}}$  assume dimensão  $5 \times 5$ , com valores dos estados e das entradas desta matriz de transição dependentes dos parâmetros e da forma assumida pelo processo AR(1) subjacente.

## 4 ANÁLISE QUANTITATIVA

### 4.1 Fontes de Dados

Na calibração do modelo de agentes heterogêneos, aderimos às diretrizes e padrões estabelecidos pela literatura macroeconômica existente, de forma a garantir a validade, confiabilidade e comparabilidade deste modelo em relação a estudos anteriores e contemporâneos no campo. Todas as fontes e literaturas que informaram nossas decisões de calibração são citadas e discutidas na Seção 2.2.

Quanto às medidas de desigualdade, especificamente para a elaboração dos parâmetros distributivos da riqueza na economia brasileira e geração da curva de Lorenz, faz-se imperativo a discussão detalhada da metodologia, conforme adiante.

#### 4.1.1 Parâmetros de Desigualdade Patrimonial

A base principal para a definição dos parâmetros de desigualdade são os indicadores brasileiros de desigualdade de riqueza patrimonial, com a finalidade de gerarmos a curva de Lorenz representativa da distribuição de ativos na economia brasileira, cuja elaboração demanda a utilização de fontes diversas face à inexistência de uma fonte definitiva na literatura, conforme melhor abordado na Seção 2.1.1.

##### 4.1.1.1 Curva de Lorenz

Iniciamos com a exposição dos dados utilizados. A Tabela 1 contém dados extraídos do *World Inequality Report 2022*, contendo dados até 2021.

Tabela 1 – Distribuição de Patrimônio - *World Inequality Report 2022*

População	Renda Anual		Patrimônio	
	Média (R\$)	Percentual	Média (R\$)	Percentual
Total	43,400	100%	113,770	100%
50% Inferior	8,680	10.1%	-930	-0.4%
40% Médio	34,100	31.4%	58,280	20.6%
10% Topo	253,890	58.6%	907,370	79.8%
1% Topo	1,153,200	26.6%	5,561,090	48.9%

Fonte: Elaborada pelo autor. Dados obtidos do *World Inequality Report 2022*, (CHANCEL *et al.*, 2022).

Nota: Os valores e porcentagens representam a distribuição estimada de riqueza entre adultos no Brasil no ano de 2021.

Nota: Conversão realizada com base na taxa de 3.1 EUR/BRL.

A Tabela 2 contém dados do *Global Wealth Report 2023*, atualizada até 2022.

Tabela 2 – Distribuição de Patrimônio - *Global Wealth Report 2023*

Riqueza Média por adulto (R\$)	Riqueza Mediana por adulto (R\$)
R\$ 152,154.88	R\$ 29,442.88
Distribuição de adultos (%) por faixa de riqueza (R\$)	
Riqueza < R\$ 51,640	66.0%
R\$ 51,640 < Riqueza < R\$ 516,400	29.6%
R\$ 516,400 < Riqueza < R\$ 5,164,000	4.1%
Riqueza > R\$ 5,164,000	0.1%
Total	100%
Índice de Gini	0.884

Fonte: Elaborada pelo autor. Dados obtidos do *Global Wealth Report 2023*, (SUISSE; UBS, 2023).

Nota: Os valores e porcentagens representam a distribuição estimada de riqueza entre adultos no Brasil no ano de 2022.

Nota: Conversão realizada com base na taxa de 5.164 USD/BRL.

Uma vez obtidos as coordenadas acima, descartamos a parcela referente ao 1% no topo da população. A razão para tal exclusão reside na desproporcional concentração de riqueza observada neste estrato, que pode distorcer a análise - em especial considerando que modelos simples de poupança precaucional como o ora objeto deste não são adequados para explicar o topo da distribuição de riqueza<sup>1</sup> e levar a uma representação imprecisa das condições econômicas predominantes no restante da população. A extraordinária desigualdade de riqueza dentro deste 1% pode obscurecer as tendências e os padrões substanciais presentes nos 99% restantes, o que, por sua vez, pode resultar em um ajuste inadequado do modelo aos dados, comprometendo a validade e a interpretabilidade dos resultados obtidos.

Uma vez renormalizados os valores, temos os dados consolidados em coordenadas população/riqueza conforme Tabela 3, e estimamos a curva de Lorenz com um método próprio, baseado na forma funcional presente em (SITTHIYOT; HOLASUT, 2021).

Tabela 3 – Distribuição Consolidada de Riqueza por População - Pares de Coordenadas

Fonte	População Acumulada	Riqueza Acumulada
World Inequality Report 2022	[0.0, 0.5, 0.9, 0.99, 1.0]	[0.0, 0.0, 0.206, 0.914, 1.0]
Global Wealth Report 2023	[0.0, 0.66, 0.956, 0.997, 1.0]	[0.0, 0.224, 0.564, 0.949, 1.0]
Consolidado (Parte 1)	[0.0, 0.50, 0.91]	[0.0, 0.0, 0.225]
Consolidado (Parte 2)	[0.965, 1.0]	[0.617, 1.0]

Fonte: Elaborada pelo autor. Dados consolidados das fontes *World Inequality Report 2022* e *Global Wealth Report 2023*.

Nota: Os valores representam a distribuição estimada de riqueza entre diferentes segmentos da população, considerando ambas as fontes.

<sup>1</sup> Vide (NARDI; FELLA, 2017; BENHABIB; BISIN, 2018).

Seja  $x$  a representação do *rank* acumulado normalizado de renda,  $y$  a representação da renda acumulada normalizada,  $k$  e  $P$  sendo parâmetros. Há uma vasta família de formas funcionais já conhecidas para a curva de Lorenz que poderiam ser usadas em combinação, atribuindo um peso entre 0 e 1 para cada forma funcional de maneira que todos os pesos somem 1 a forma funcional especificada como adequada para desenvolver o método simples é baseada na média ponderada de duas formas funcionais bem conhecidas, que são a função exponencial ( $y(x) = x^P$ ) e a forma funcional implicada pela distribuição de Pareto ( $y(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{P}}$ ). Note que, se integrarmos separadamente a função exponencial e a forma funcional implicada pela distribuição de Pareto de 0 a 1, pode-se observar que ambas as formas funcionais têm a mesma área sob a curva de Lorenz, que é igual a  $\frac{1}{P+1}$ . Ao atribuir o peso  $(1 - k)$  à função exponencial e o peso  $k$  à forma funcional implicada pela distribuição de Pareto, a forma funcional especificada baseada na média ponderada dessas duas formas funcionais bem conhecidas é a seguinte:

$$y(x) = (1 - k) \cdot x^P + k \cdot \left(1 - (1 - x)^{\frac{1}{P}}\right)$$

$$0 \leq k \leq 1$$

$$1 \leq P$$

Com base nos dados consolidados, estimamos os parâmetros através do método dos mínimos quadrados e chegamos aos valores  $k = 0$  e  $P = 14.79$ , resultando na curva de Lorenz basicamente exponencial da Figura 1.

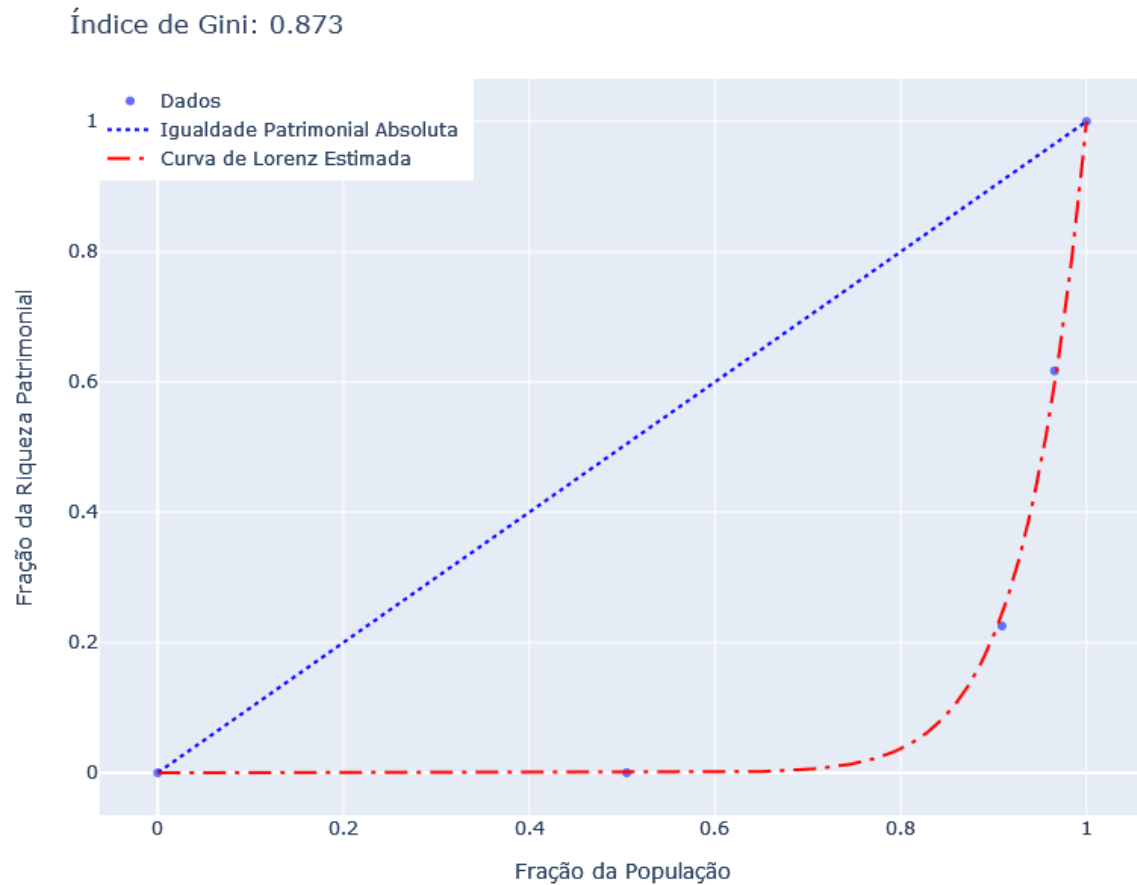
O índice de Gini obtido (0.873) fica próximo daquele calculado pelo *Global Wealth Report 2023* (0.884), superando o Gini interno (0,788) calculado por (CALIXTRE, 2018).

## 4.2 Calibração

A calibração de modelos é uma fase crucial no desenvolvimento de qualquer simulação ou análise. No contexto dos modelos macroeconômicos, como os Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmico Estocástico (DSGE), essa calibração assume uma significância especial, uma vez que a qualidade das previsões e das análises depende amplamente da precisão com que esses modelos são sintonizados.

O objetivo principal da calibração do modelo é escolher parâmetros que permitam que o modelo reproduza características específicas observadas nos dados reais. No caso de modelos DSGE com agentes representativos, que são um pilar na análise macroeconômica, houve uma predominância recente na estimação de parâmetros usando métodos bayesianos. Esta

Figura 1 – Curva de Lorenz Patrimonial - Brasil



Fonte: elaborada pelo autor. Dados consolidados das fontes *World Inequality Report 2022* e *Global Wealth Report 2023*.

abordagem proporciona uma forma rigorosa e sistemática de incorporar informações prévias e atualizar essas crenças com novos dados.

Por outro lado, quando nos deparamos com modelos que incorporam agentes heterogêneos, há uma ênfase em tentar calibrar o modelo de modo que ele reflita características observadas na economia real. No caso específico deste trabalho, o foco está em ajustar o modelo de forma que ele possa espelhar o comportamento da economia brasileira e, no que possível, seguindo parâmetros obtidos da literatura relevante. Como salientado, os modelos DSGE são especialmente sensíveis à escolha de parâmetros. Isso significa que uma escolha inadequada pode resultar em um modelo que não atinge um estado estacionário ou que gera previsões imprecisas.

Tendo em vista o objetivo deste trabalho e sua ênfase no cômputo de índices de desigualdade, o alvo principal da calibração será a consistência do modelo com dados de riqueza agregada, sua distribuição entre os agentes conforme a curva de Lorenz elaborada pelo autor, e a proporção Capital-Renda na economia Brasileira. Como é padrão na literatura de ciclos

econômicos, definimos um período de tempo igual a um trimestre.

#### 4.2.1 Calibração Base

A calibração base leva em conta a especificação do modelo de referência de nossa Seção 3.7.1. Este modelo é governado por nove parâmetros: os parâmetros de preferência dos agentes  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ , os parâmetros tecnológicos  $\alpha$  e  $\delta$ , a restrição de endividamento dos agentes,  $\underline{a}$ , além dos parâmetros do processo de renda individual,  $\rho$  e  $\sigma_{\varepsilon}^2$ . Esta seção detalha as considerações e escolhas para os parâmetros do modelo. Os parâmetros aqui obtidos - à exceção do fator de desconto  $\beta$  - são utilizados na simulação dos demais Casos Limites e do modelo completo.

Inicialmente, quanto aos parâmetros de preferência dos agentes, tecnológicos, e à restrição de endividamento dos agentes, temos:

- $\beta$ : Representa o fator de desconto temporal atribuído ao estado  $\pi_{\beta_{\text{médio}}}$ , sendo central para determinar o quanto os agentes valorizam o consumo presente em relação ao futuro. Dado que o horizonte de decisão dos agentes é intertemporal, esta escolha afeta diretamente o perfil de consumo e poupança ao longo do tempo. Calibramos este valor tendo como alvo a razão entre ativos no estado estacionário e renda ( $K/L$ ) anual de 2,62, conforme extraído de dados do *World Inequality Report 2022*, (CHANCELL *et al.*, 2022), obtendo  $\beta = 0,965$ .
- $\alpha$ : Refere-se à participação do capital na função de produção. Em muitos modelos macroeconômicos calibrados para economias desenvolvidas, esse coeficiente reflete a proporção do rendimento que é atribuído ao capital. Utilizamos o valor de 0,448, conforme (FILHO, 2018), valor este comum à literatura macroeconômica em geral.
- $\delta$ : Representa a taxa de depreciação do capital. Esse parâmetro indica a fração do estoque de capital que se torna obsoleto ou se desgasta a cada período. Novamente tendo como base (CASTRO *et al.*, 2011), definimos o valor de 0,015, correspondente ao valor de 6% ao ano, valor este que similar ao encontrado por (FILHO, 2018), de 6,1% anuais.
- $\sigma$ : Descreve a aversão ao risco dos agentes. Esse coeficiente captura a sensibilidade da utilidade marginal do consumo às variações no consumo total. Valores frequentemente

encontrados na literatura variam entre 1 (utilidade logarítmica, indicando aversão neutra ao risco) e 5. No presente trabalho optamos por utilizar o valor de 1,41, tal como calculado por (LINARDI, 2016).

$\lambda$  e  $\nu$ : Estes parâmetros governam a desutilidade do trabalho.  $\lambda$  age como um multiplicador, ajustando o nível geral da desutilidade associada ao trabalho, enquanto  $\nu$  Representa a elasticidade Frisch inversa da oferta de trabalho na função de desutilidade do trabalho. Este parâmetro determina o grau de responsividade (curvatura) da oferta de trabalho a mudanças na taxa salarial, mantendo a utilidade marginal do lazer constante. Um valor mais alto para  $\nu$  sugere que a oferta de trabalho é menos responsiva a mudanças no salário. A elasticidade Frisch inversa  $\nu$  é determinada como 1,86 com base na estimativa de (LINARDI, 2016), e o parâmetro de desutilidade  $\lambda$  resulta em 0,90, sendo determinado considerando que os agentes desejam alocar 1/3 de seu tempo disponível (8 horas diárias) ao trabalho.

$a$ : Representa o limite de ativos negativos dos agentes (seu endividamento). Tendo em vista que, de acordo com o *World Inequality Report 2022*, (CHANCEL *et al.*, 2022), 50% do estrato populacional detém aproximadamente  $-0,4\%$  da riqueza, optamos por utilizar  $a = -0,25$ , valor este que gera endividamento na mesma ordem de magnitude.

Quanto ao processo de renda individual, o modelo é estruturado de forma que não existe heterogeneidade fixa de renda, com a massa de agentes sujeita às transições entre todos os estados de renda através do respectivo processo de Markov. Nesse contexto, todos os agentes, em algum momento, estarão no topo ou na base da distribuição salarial. Se mapeássemos a distribuição real de salários no modelo, estaríamos impondo, por exemplo, que um engenheiro de computação poderia acabar sendo tão produtivo quanto um trabalhador de linha de montagem (e vice-versa). A grande variação nos salários observados nos dados não parece refletir a verdadeira incerteza enfrentada pelas pessoas. Assim, em vez de calibrar o processo de produtividade do modelo com a dispersão geral da distribuição salarial observada - a qual é também devida à heterogeneidade fixa deste fator (por exemplo, a diferença de renda permanente devido à diferentes níveis de educação entre os agentes) - nesta categoria de modelos é tomada como referência a distribuição salarial líquida desta heterogeneidade fixa. Deste modo, a única fonte



de diferenças de renda no modelo provém das transições estocásticas entre estados de renda descritas pela cadeia de Markov.

Existem vários artigos estimando processos para salários. Denominemos  $\omega_{i,t}$  o logaritmo do salário real por hora em  $t$  recebido pelo indivíduo  $i$ . Uma configuração típica é a seguinte:

$$\omega_{i,t} = \gamma x_{i,t} + \alpha_i + \varepsilon_{i,t} + v_{i,t} \quad \text{com} \quad v_{i,t} \sim N(0, \sigma_v^2)$$

onde  $x_{i,t}$  é um vetor de características observáveis,  $\alpha_i$  reflete um componente fixo não observado do indivíduo  $i$ ,  $v_{i,t}$  pode refletir um erro de medição e  $\varepsilon_{i,t}$  é um componente específico de mudança temporal estocástico que evolui da seguinte forma:

$$\varepsilon_{i,t} = \rho z_{i,t-1} + \eta_{i,t} \quad \text{com} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_\eta^2).$$

Seguindo a linha acima, a evolução da renda ao longo do tempo é modelada através de um processo AR(1) no logaritmo da renda. A representação deste processo é dada por:

$$\ln(y_t) = \rho \ln(y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Onde:

- $\rho$ : Captura a persistência do processo de renda. Um valor próximo de 1 sugere que os choques de renda são altamente persistentes ao longo do tempo.
- $\varepsilon_t$ : Choque aleatório com distribuição normal padrão:  $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

No Brasil, devido à falta de um levantamento de dados de painel doméstico mais completo, como o *Panel Study of Income Dynamics* nos EUA, não podemos estimar adequadamente  $\rho$ . Face aos objetivos do presente trabalho optamos por utilizar dados da economia dos EUA (a qual apresenta índice de Gini - 0,83 - próximo à da economia brasileira) para a estimativa deste parâmetro. Uma vasta literatura estimou processos para choques salariais idiossincráticos usando dados anuais, tipicamente para homens, e, embora haja alguma variação entre os estudos, o consenso é que esses choques são grandes e persistentes.

Com base nos trabalhos para a economia dos EUA de (HEATHCOTE *et al.*, 2010), (FLODEN; LINDÉ, 2001), e (MITMAN *et al.*, 2016), optamos por estabelecer  $\rho = 0,97$ .

A variância do componente estocástico processo de renda é definida através da distribuição de salários residuais no setor privado brasileiro com dados da PNAD seguindo (REIS; ZILBERMAN, 2013), os quais estimam  $\sigma = 0,17$ .

Para discretizar esse processo contínuo, utilizamos o método de Rowenhorst com 7 sete estados, que é amplamente adotado devido à sua precisão em aproximar processos AR(1) contínuos por cadeias finitas de Markov<sup>2</sup>.

A tabela 4 resume todos os parâmetros calibrados para o modelo de referência.

Tabela 4 – Parâmetros de Calibração do Modelo de Referência

Parâmetro	Descrição	Valor	Fonte ou Alvo de Calibração
$\beta$	Fator de desconto temporal	0,966	Alvo de calibração: $K/L$ anual = 2,62
$\alpha$	Participação do capital na função de produção	0,448	(FILHO, 2018)
$\delta$	Taxa de depreciação do capital	0,015	(CASTRO <i>et al.</i> , 2011; FILHO, 2018)
$\sigma$	Elasticidade de substituição do consumo	1,41	(LINARDI, 2016)
$\lambda$	Fator de desutilidade do trabalho	0,9	Alvo de calibração: $L = 0,33$
$\nu$	Elasticidade Frisch inversa da oferta de trabalho	1,86	(LINARDI, 2016)
$\underline{a}$	Limite de ativos negativos dos agentes	-0,25	Alvo de calibração: ativos negativos -0,4% de K
$\rho$	Persistência do processo de renda	0,97	(HEATHCOTE <i>et al.</i> , 2010), (FLODEN; LINDÉ, 2001), (MITMAN <i>et al.</i> , 2016)*
$\sigma_\epsilon$	Desvio padrão do componente estocástico da renda	0,17	(REIS; ZILBERMAN, 2013)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: \*Valor com base em estimativas para a Economia dos EUA.

### 4.3 Solução Numérica e Análise

Decidimos por iniciar a Solução Numérica e Análise pelo modelo de referência, qual seja o modelo seguindo Aiyagari (1994), na forma especificada na Seção 3.7.1 haja vista este ser o parâmetro no qual basearemos a performance do modelo completo. Ato contínuo, analisaremos os demais casos limites, conforme Seções 3.7.2 e 3.7.3, tendo em vista que o modelo completo pode ser considerado como a interação e agregação destes dois casos, com sua análise individual indo no sentido de entendermos melhor a dinâmica do modelo completo.

<sup>2</sup> Conforme (KOPECKY; SUEN, 2010).

### 4.3.1 Modelo de Referência

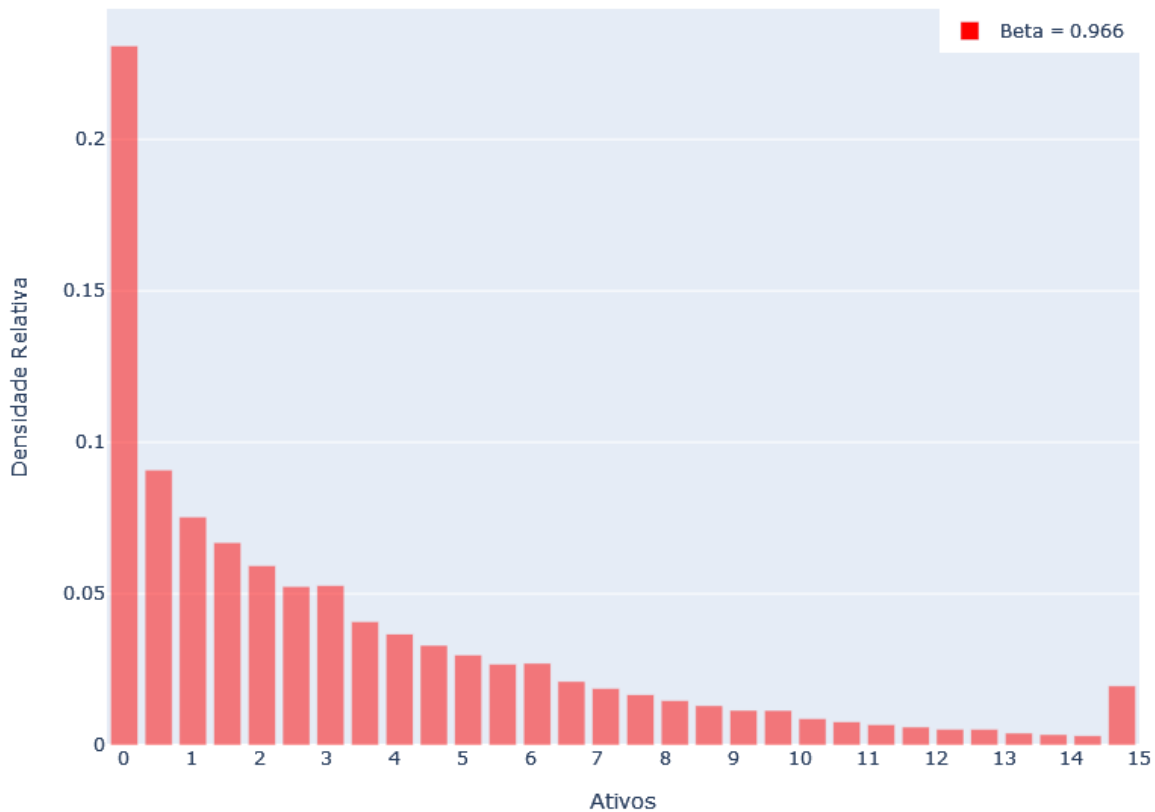
Uma vez definida a parametrização do modelo de referência o solucionamos numericamente através do método *Endogenous Grid Method* baseado no algoritmo presente na seção 4.1. de (MALIAR; MALIAR, 2013), e estendido para possibilitar a heterogeneidade nos fatores de desconto, conforme melhor detalhado no Capítulo 3 e em no Apêndice A. Para manter o ônus computacional gerenciável, usamos 500 pontos de grade no espaço de ativos, sendo o menor valor a restrição de endividamento  $\underline{a}$ , e o maior um valor  $\bar{a}$  de forma a abranger a quantidade de ativos do topo da economia - o qual representa em média  $a = 14,4$  para os 10% mais ricos - além de permitir que as funções de regra de decisão tenham pontos suficientes para captar sua curvatura próximo ao limite inferior - onde a mesma é mais pronunciada, e não trunquem a distribuição de ativos em seu limite superior. Para este fim, escolhemos  $\bar{a} = 100$  como limite de ativos.

Inicialmente, apresentamos o histograma de ativos do modelo de referência em nossa Figura 2.

A distribuição do modelo de referência resulta na curva de Lorenz apresentada em nossa Figura 3, a qual apresenta um Índice de Gini substancialmente menor do que o verificado em nossas estimativas para a economia brasileira, em especial falhando em reproduzir a camada intermediária da distribuição de riqueza.

Os resultados do modelo de referência não são surpreendentes. É amplamente reconhecido na literatura de macroeconomia quantitativa que os modelos canônicos de Bewley–Huggett–Aiyagari enfrentam dificuldades em explicar a distribuição conjunta de renda e riqueza. Por exemplo, (AIYAGARI, 1994) documenta que o coeficiente Gini da riqueza é 0,32 no modelo, enquanto é 0,80 nos dados. (HUGGETT, 1996) observa que a participação da riqueza dos 1% mais ricos, conforme implicado pelo modelo, é metade daquela nos dados. (MITMAN *et al.*, 2016) argumentam que o risco de desemprego idiossincrático e mercados financeiros incompletos, por si só, não conseguem gerar uma distribuição de riqueza suficientemente dispersa, mesmo que tal dispersão seja crucial para o estudo das flutuações agregadas. Mais especificamente, (BENHABIB; BISIN, 2018) demonstra que, em um cenário onde a renda tem uma cauda de Pareto e os agentes utilizam uma regra de consumo linear, o expoente Pareto da riqueza é ou inteiramente determinado pela distribuição dos retornos sobre a riqueza, ou igual ao expoente Pareto da renda. Eles argumentam que resultados similares devem ser obtidos com agentes racionais com preferências de aversão ao risco relativo constante (CRRA) porque, em

Figura 2 – Distribuição de Ativos - Modelo de Referência



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: Valores acima de 15 agrupados.

tais cenários, as regras de política são assintoticamente lineares.

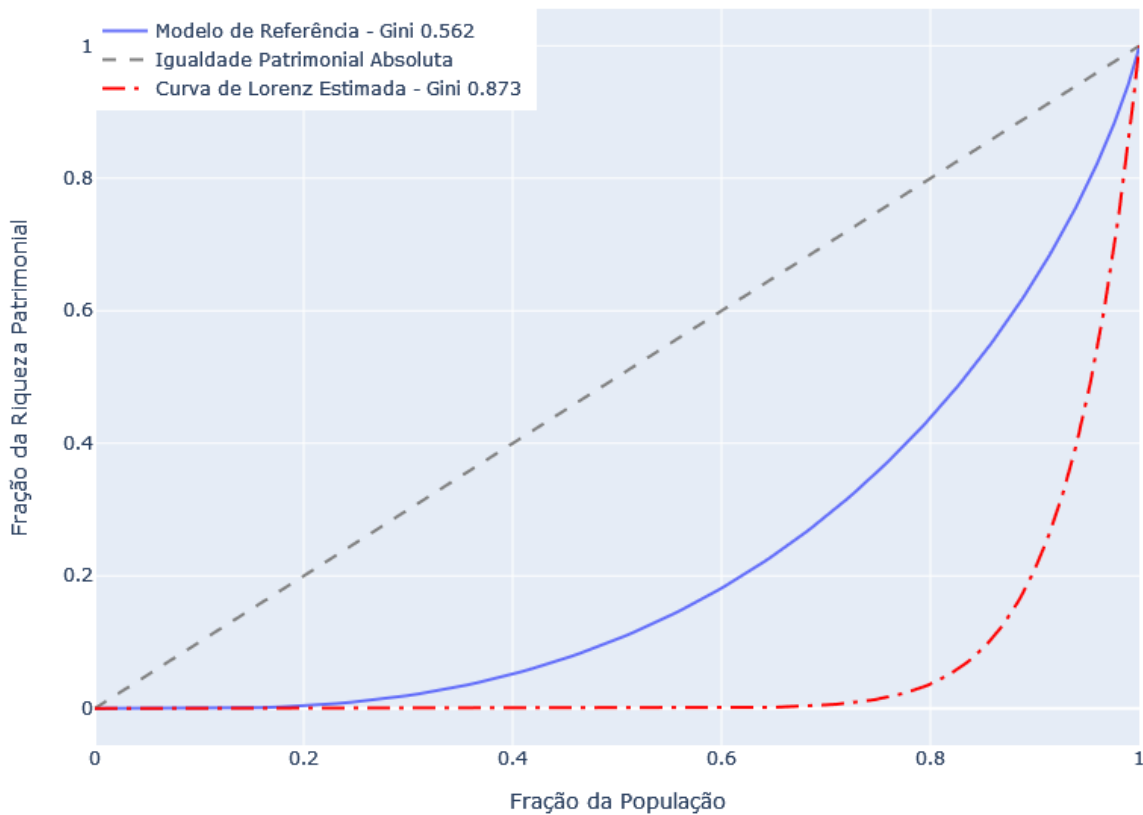
De forma mais categórica, (STACHURSKI; TODA, 2019) confirmam e estendem o conjecturado acima, demonstrando que, para modelos canônicos de Bewley–Huggett–Aiyagari (por “canônicos” entendendo-se aqueles modelos nos quais (i) agentes vivem infinitamente, (ii) poupança é livre de risco, e (iii) agentes tem fatores de descontos constantes e homogêneos) qualquer tentativa de explicar o formato da curva de distribuição de patrimônio está fadada ao fracasso<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> As descobertas dos referidos autores podem ser compreendidas através da seguinte intuição: em modelos de equilíbrio geral dinâmico com horizonte infinito, o fator de desconto  $\beta > 0$  e a taxa bruta livre de risco  $R > 0$  devem satisfazer a condição de “impaciência”  $\beta R < 1$ , caso contrário o consumo individual diverge para o infinito de acordo com os resultados em Chamberlain e Wilson (2000), o que viola a condição de equilíbrio de mercado. Contudo, sob esta condição de impaciência, demonstram que os agentes racionais consomem mais do que é implicado pela hipótese de renda permanente  $c(a) = (1 - 1/R)a$ , mais do que a renda de juros, e a equação de acumulação para a riqueza  $a_t$  torna-se uma “contração” no sentido de que

$$a_{t+1} \leq \rho a_t + y_{t+1}$$

para  $a_t$  suficientemente grande, onde  $y_{t+1}$  é a renda e  $\rho$  é alguma constante positiva estritamente menor que 1. Essa desigualdade implica que os choques de renda se dissipam a longo prazo, e assim a distribuição de riqueza

Figura 3 – Curva de Lorenz - Modelo de Referência



Fonte: elaborada pelo autor.

#### 4.3.2 Modelo com Heterogeneidade Exclusivamente Fixa nos Fatores de Desconto

Nesta Seção tratamos o caso limite no qual os agentes possuem heterogeneidade exclusivamente fixa em seus fatores de desconto, conforme especificado na Seção 3.7.2, sendo este caso limite o formato mais adotado pela literatura que aborda fatores de desconto heterogêneos devido à sua simplicidade de computação numérica, existência de microdados, e fácil interpretação<sup>4</sup>. Não obstante tal pressuposto - que a totalidade dos agentes da economia adotem comportamentos únicos e inflexíveis, mesmo que heterogêneos - não apresente total verossimilhança ao observado empiricamente<sup>5</sup>.

Consideramos uma distribuição discretizada para o fator de desconto em 5 pontos igualmente espaçados entre  $[\beta - 2\Delta, \beta + 2\Delta]$ , de forma que a economia deste modelo passa a ser

herda o comportamento da cauda dos choques de renda (as quais são insuficientes para replicar a desigualdade observada nos dados).

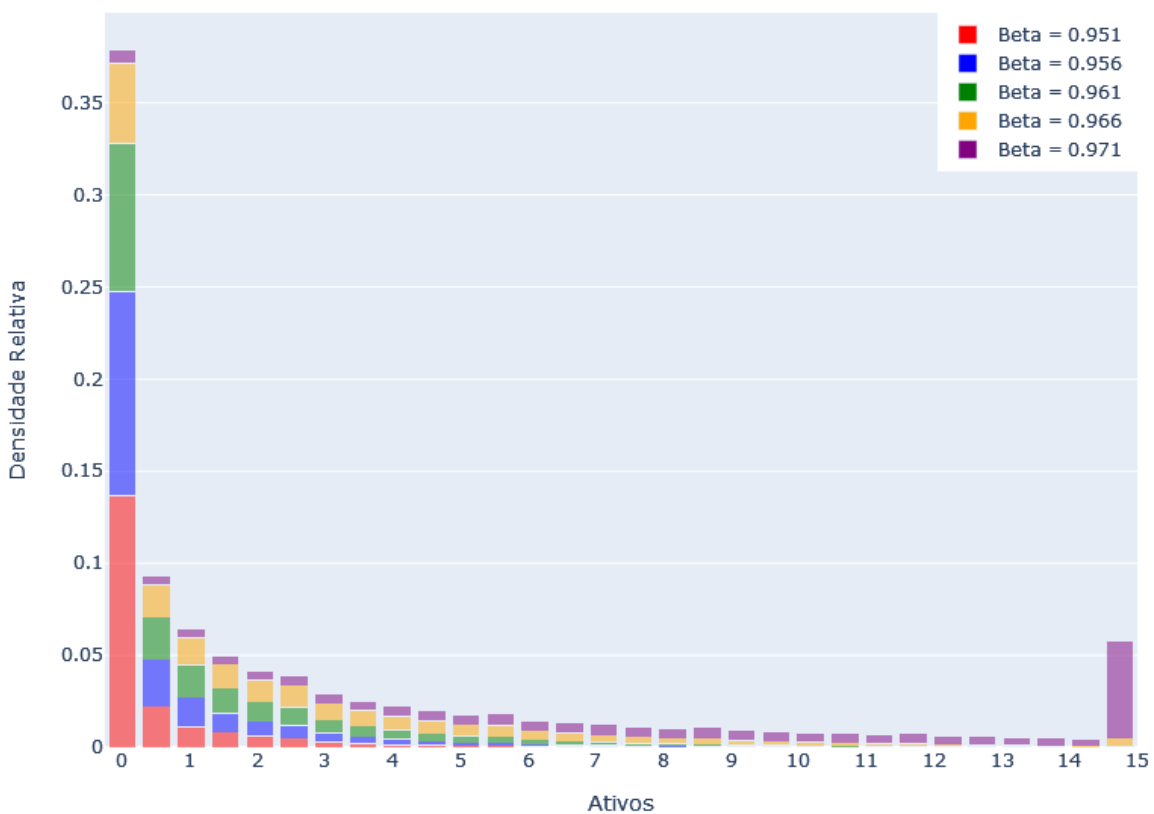
<sup>4</sup> Tais como os modelos de (KRUSELL *et al.*, 1998; SAMWICK, 1997; CAGETTI, 2003).

<sup>5</sup> Como exemplo maior, referimos ao estudo das “anomalias” aos modelos com fatores de desconto fixos e às estimativas destes fatores de desconto presentes na Tabela I de (FREDERICK *et al.*, 2002).

composta por 5 classes de famílias, cada uma correspondendo à  $\frac{1}{5}$  (um quinto) da massa total de agentes, cada qual com valores distintos para seus fatores de desconto. O ponto médio  $\beta$  é definido com intuito de obter a mesma razão capital/renda ( $K/L$ ) de calibração do modelo de referência.

Utilizaremos  $\Delta = 0,005$ , com o ponto médio da distribuição calibrado para  $\beta = 0,961$ . A Figura 4 mostra a distribuição de ativos entre os agentes sob esta nova especificação.

Figura 4 – Distribuição de Ativos - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa -  $\Delta = 0,005$



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: valores de  $a > 15$  agrupados.

É facilmente verificável visualmente que as famílias mais pacientes (aquelas com  $\beta = 0,971$ ) acumulam a maior parcela do capital da economia. De fato, 59,53% do capital passa a ser detida por elas, com 10,50% detido por aquelas com o fator de desconto médio, e somente 3,38% pelas famílias mais impacientes. Esta distribuição acaba por gerar um índice de Gini de 0,693, superior ao do modelo de referência - o qual tinha o valor de 0,562 - e portanto mais próximo do Gini estimado para a economia brasileira, de 0,873.

Via de regra, e em conformidade com o previsto na literatura<sup>6</sup>, os agentes mais pacientes tendem a deter o estoque de capital, enquanto os menos pacientes tendem a adotar políticas de consumo nas quais toda a renda é consumida e, conseqüentemente, nenhuma acumulação de capital é efetuada. O único mecanismo que impede tal de ocorrer (e a desigualdade patrimonial não ser absoluta) é o comportamento dos agentes em relação à constituição de poupança precaucional face às incertezas em sua renda, derivadas dos choques estocásticos à produtividade laboral deste modelo.

O mecanismo gerador da desigualdade ora observada pode ser entendido como originado da “violação” à condição “(iii)” dos modelos canônicos de Bewley–Huggett–Aiyagari agentes abordados em (STACHURSKI; TODA, 2019), especificamente a condição de fatores de descontos constantes e homogêneos. No novo modelo, passamos a ter classes de agentes cujo fator de desconto juntamente à taxa bruta de juros livre de risco não satisfazem a condição de “impaciência”  $\beta R < 1$ , todavia ainda assim obtemos um equilíbrio pois as demais classes de agentes interagem de forma a trazer a taxa de juros a um patamar no qual o consumo individual de todos os agentes é restrito e não diverge para o infinito conforme o esperado com um único fator de desconto. Não obstante, a violação da condição de “impaciência” atrelada à incerteza na renda laboral leva os agentes a dispersarem-se em seus níveis de ativos de maneira muito mais extrema do que a esperada pelo simples comportamento da cauda dos choques de renda.

A inclusão de heterogeneidade fixa nos fatores de desconto demonstra-se mais capaz de aproximar a distribuição de riqueza observada nos dados comparado ao modelo de referência. A razão é que, nesta especificação, passamos a ter um subconjunto de famílias extremamente pacientes que possuem um forte motivo de poupança intertemporal, e são essas famílias que detêm a maior parte dos ativos da economia. Devido à dispersão entre os fatores de desconto, é possível obter um equilíbrio no qual temos uma grande fração dos agentes com um nível de riqueza correspondente ao observado nos dados (especialmente quanto às famílias mais pobres), e ainda assim manter a razão capital - renda ( $K/L$ ) da calibragem do modelo de referência e, portanto, que siga os dados da economia.

Pode ser atribuído como razão para sua melhor acomodação aos dados o fato do modelo com heterogeneidade fixa nos fatores de desconto gerar - face ao modelo de referência - uma maior propensão marginal (MPC) ao consumo ao longo de todo o intervalo de ativos, além de gerar uma maior concentração de agentes com renda próxima ao limite inferior de ativos, os

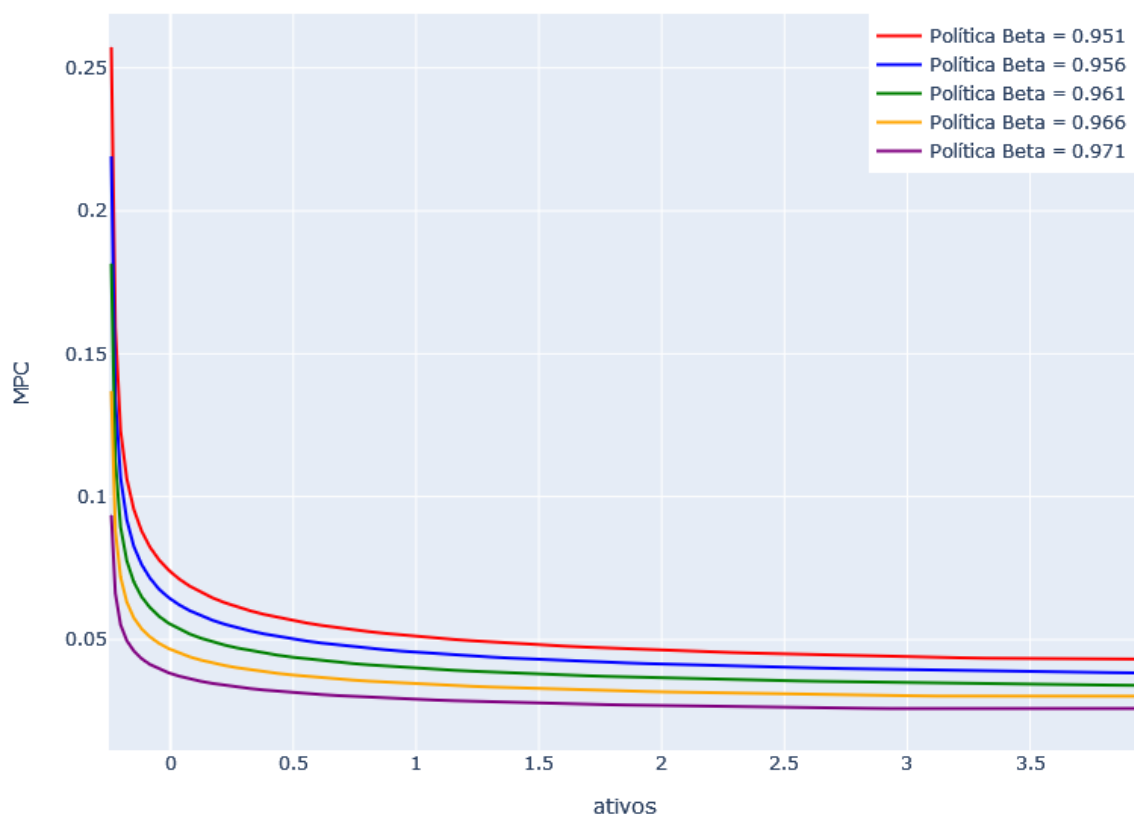
<sup>6</sup> Vide (BECKER; MULLIGAN, 1997; CARROLL, 1997).

quais amplificam o MPC médio do modelo.

A Propensão Marginal ao Consumo representa a característica mais significativa do comportamento de despesa das famílias para a macroeconomia<sup>7</sup>, desempenhando um papel crucial ao determinar os efeitos das alterações na demanda, no nível de poupança precaucional, e em modelos com escopo mais amplo que o ora desenvolvido também determinando a potência do multiplicador fiscal, o mecanismo de transmissão da política monetária e a parcela do portfólio de riqueza mantida em ativos arriscados.

Ainda, devido às diferentes políticas de consumo e poupança de cada classe de agente, temos uma grande variação em suas funções de propensões marginais ao consumo<sup>8</sup>, em especial nos níveis de ativos próximos ao limite inferior de ativos  $\underline{a}$ , conforme Figura 5.

Figura 5 – Propensão Marginal ao Consumo - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa -  $\Delta = 0,005$



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: dados restritos até  $a = 4$ , dado que as funções são assintoticamente lineares e paralelas entre si.

<sup>7</sup> Como abordado extensivamente em (MIAN *et al.*, 2020; CARROLL *et al.*, 2014; KAPLAN; VIOLANTE, 2022).

<sup>8</sup> Por “funções de propensão marginal ao consumo”, temos o valor da propensão marginal ao consumo de um agente que se encontra em um determinado nível de riqueza.



Por exemplo, nesta especificação temos que a propensão marginal ao consumo média de um agente próximo ao limite inferior de ativos,  $a = -0,25$ , é de cerca de 25,7% para as famílias mais impacientes ( $\beta = 0,951$ ), e de tão somente 9,26% para o maior nível de paciência ( $\beta = 0,971$ ), com esta diferença sendo menor quanto maior o nível de ativos, contudo não desprezível. Entretanto, ao gerar valores mais altos de MPC para todos os níveis de ativos, o modelo acaba amplificar a diferença entre os valores esperados no topo da distribuição (os quais empiricamente convergem a zero<sup>9</sup>) e os valores ora gerados.

A Figura 6 apresenta as funções de propensão marginal de consumo (tomadas em sua média ponderada entre os agentes da economia) para o modelo tratado nesta Seção e o modelo de referência. É notável como há uma diferença significativa entre o comportamento dos agentes, em especial na faixa de renda mais baixa, onde há a maior agregação de agentes em todas as especificações do modelo.

### 4.3.3 Modelo com Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica nos Fatores de Desconto

Novamente com o intuito de melhor explorar os mecanismos por trás do modelo completo, simulamos neste seção o modelo com somente uma classe de agentes, com o mesmo fator de desconto médio, e com sua heterogeneidade sendo exclusivamente derivada do processo estocástico ao fator de desconto, o qual por sua vez é modelado forma de um processo AR(1) discretizado em 5 estados através do método de Rowenhorst, nos mesmos moldes adotados para a simulação do processo de renda.

A cada período, o fator de desconto enfrentado pelas famílias muda de acordo com o processo de Markov subjacente, qual seja a matriz de transição  $\pi_{\beta_{\text{estocástico}}}$ . O processo AR(1) tem a forma:

$$\ln(\beta_t) = \rho_{\beta} \ln(\beta_{t-1}) + \varepsilon_{\beta_t}$$

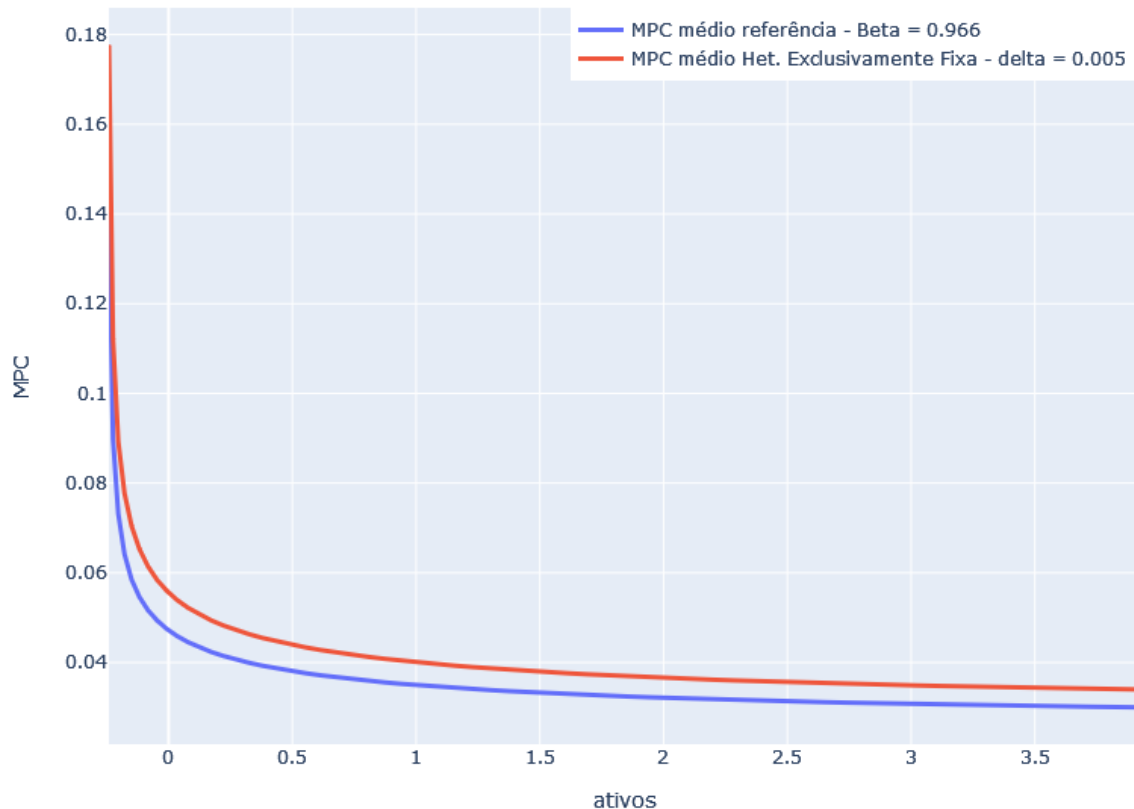
Onde:

$\rho_{\beta}$ : Captura a persistência do processo de evolução do fator de desconto.

$\varepsilon_{\beta_t}$ : Choque aleatório com distribuição normal padrão:  $\varepsilon_{\beta_t} \sim N(0, \sigma_{\beta}^2)$

<sup>9</sup> Conforme exposto em (MA; TODA, 2021).

Figura 6 – Função de Propensão Marginal ao Consumo - Comparação entre modelo de Referência e Heterogeneidade Exclusivamente Fixa



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: dados restritos até  $a = 4$  - as funções são assintoticamente lineares e paralelas entre si até o limite de ativos.

Devido à ausência de dados sobre este processo hipotético para a economia brasileira, e face à ampla gama de valores utilizados em trabalhos referentes à outras economias<sup>10</sup>, utilizamos os definidos na Tabela 5, mantendo a dispersão dos fatores de desconto - quando considerados em sua distribuição estacionária - mais restritos quando comparadas ao intervalo de valores para o caso limite abordado anteriormente.

Tabela 5 – Parâmetros de Calibração do Processo de Evolução do Fator de Desconto

Parâmetro	Valor	Descrição
$\rho_\beta$	0,90	Persistência de evolução do fator de desconto
$\sigma_\beta$	0,004	Desvio padrão do componente estocástico do Fator de Desconto

A utilização de tais parâmetros resulta numa distribuição de fatores de desconto entre 0,947 e 0,982, com média em 0,964. A matriz de transição deste processo possui as

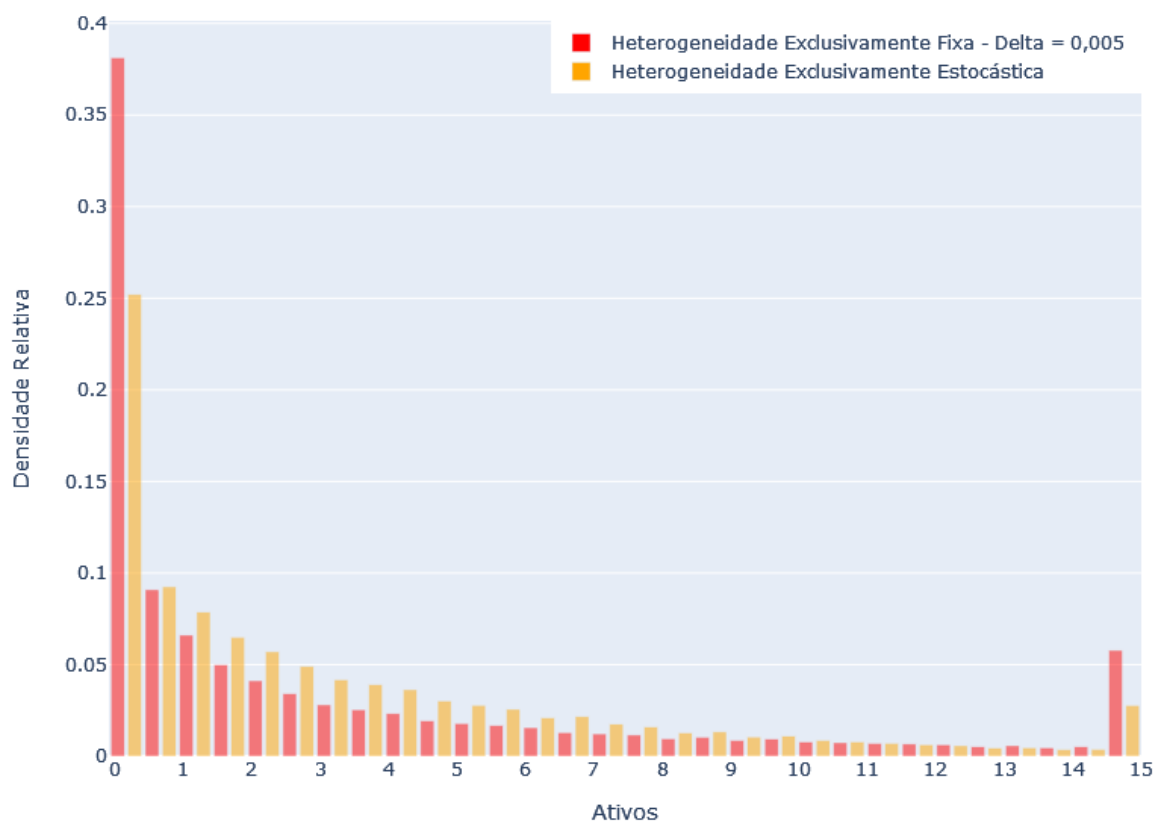
<sup>10</sup> Vide (VASILEV, 2020; BRAVE *et al.*, 2012; ARAÚJO; ISSLER, 2011).

probabilidades associadas ao estado estacionário de  $(0,0625; 0,25; 0,375; 0,25; 0,0625)$ , ou seja, concentrando a distribuição ao seu centro, com os valores efetivos de  $\beta$  estando entre os valores de 0,96 e 0,97 em aproximadamente 87,5% do tempo.

Desta forma, nesta especificação do modelo os choques que seguem um processo AR(1) geram um espectro de fatores de desconto ligeiramente mais amplo quanto no caso do modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa, contudo com o fator de desconto efetivo - enquanto considerado em seu conjunto ergódico - estando significativamente mais próximo ao centro da distribuição, 0,964, com valores extremos sendo raras ocorrências, enquanto no modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa os fatores de desconto estavam dispersos equitativamente nos 5 pontos do *grid*.

Apresentamos na Figura 7 a distribuição agregada de ativos do modelo sob a especificação ora em análise comparada ao modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa.

Figura 7 – Comparação de Histogramas - Heterogeneidade Exclusivamente Fixa e Exclusivamente Estocástica



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: valores de  $a > 15$  agrupados.

A nova especificação acaba por gerar uma distribuição apresentando uma concentração na faixa intermediária de ativos maiores do que aqueles gerados no modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa, e com conseqüente diminuição da concentração em seus extremos. Não obstante, devido à maior distribuição de ativos entre as camadas mais ricas, o modelo com heterogeneidade exclusivamente estocástica gera um Gini de 0,592, um aumento de 0,03 face ao modelo de referência e inferior ao Gini do caso limite abordado anteriormente, contudo cabe destacar que tal resultado foi obtido utilizando uma matriz de transição arbitrariamente restrita, com menor dispersão de valores efetivos de  $\beta$ .

Apresentamos na Figura 8 as funções de propensão marginal de consumo (tomadas em sua média ponderada entre os agentes da economia) entre referidos modelos. É visível como o MPC médio do modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa é superior ao do modelo desta Seção, em toda a faixa de ativos analisada (e tal de fato ocorre para todos os valores de  $a$ ).

Todavia, temos um diferencial importante entre ambos os modelos: enquanto no modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa um agente com determinado fator de desconto o tem ao longo da sua vida, portanto seguindo uma regra política única (além, é claro, das regras devido aos choques idiossincráticos na produtividade do trabalho), no modelo exclusivamente estocástico um agente está sempre sujeito à possibilidade (ou melhor falando, ao risco, já que a transição é atribuída ao agente) de transicionar entre os estados de  $\beta$ , portanto adotando comportamentos de consumo e poupança distintos mesmo quando comparado à outro agente com mesmo nível de ativos e com mesma realização de produtividade do trabalho.

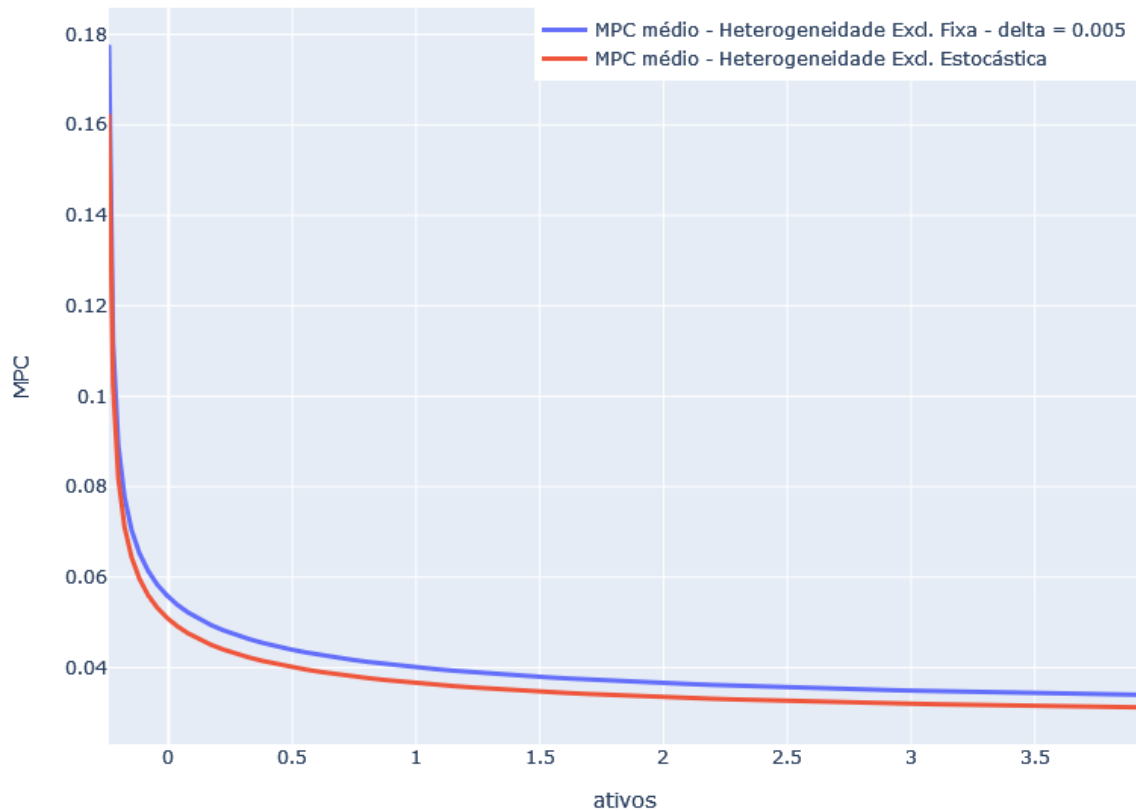
Um dos fatores, se não o principal fator, é que nesta especificação do modelo a natureza estocástica do fator de desconto introduz uma fonte adicional de incerteza (além daquela causada pela componente estocástico da renda), o que pode levar certos agentes a um comportamento mais agressivo em relação à constituição de poupança precaucional, como garantia face a possibilidades futuras de  $\beta$  que aumentem sua impaciência.

Temos na Figura 9 as diferentes funções de propensão marginal ao consumo para os diferentes fatores de desconto, ao longo de todo o intervalo de ativos do modelo. Verifica-se que as funções MPC (assim como a dos demais modelos simulados no presente trabalho) são assintoticamente lineares em razão da forma adotada para a função utilidade<sup>11</sup>. Inobstante esta característica - notadamente contrária às observações empíricas<sup>12</sup> - seja comum dentre todas

<sup>11</sup> Como demonstrado em (MA; TODA, 2021).

<sup>12</sup> (QUADRINI, 1999) documenta que os empreendedores (que tendem a ser ricos) possuem altas taxas de poupança.

Figura 8 – Função de Propensão Marginal ao Consumo Média - Comparação entre modelos Heterogeneidade Exclusivamente Fixa e Exclusivamente Estocástica



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: dados restritos até  $a = 4$  - as funções são assintoticamente lineares e paralelas entre si até o limite de ativos.

as especificações do modelo, no modelo com heterogeneidade exclusivamente estocástica um agente que está no topo da distribuição de ativos pode transicionar para um nível<sup>13</sup> de maior de paciência que efetivamente reduza sua propensão marginal ao consumo para níveis próximos aos observados empiricamente, com os agentes mais ricos sendo aqueles que possuem uma curva em sua função MPC “efetiva” decrescente em todo o seu domínio, escapando da rigidez assintótica das curvas individuais.

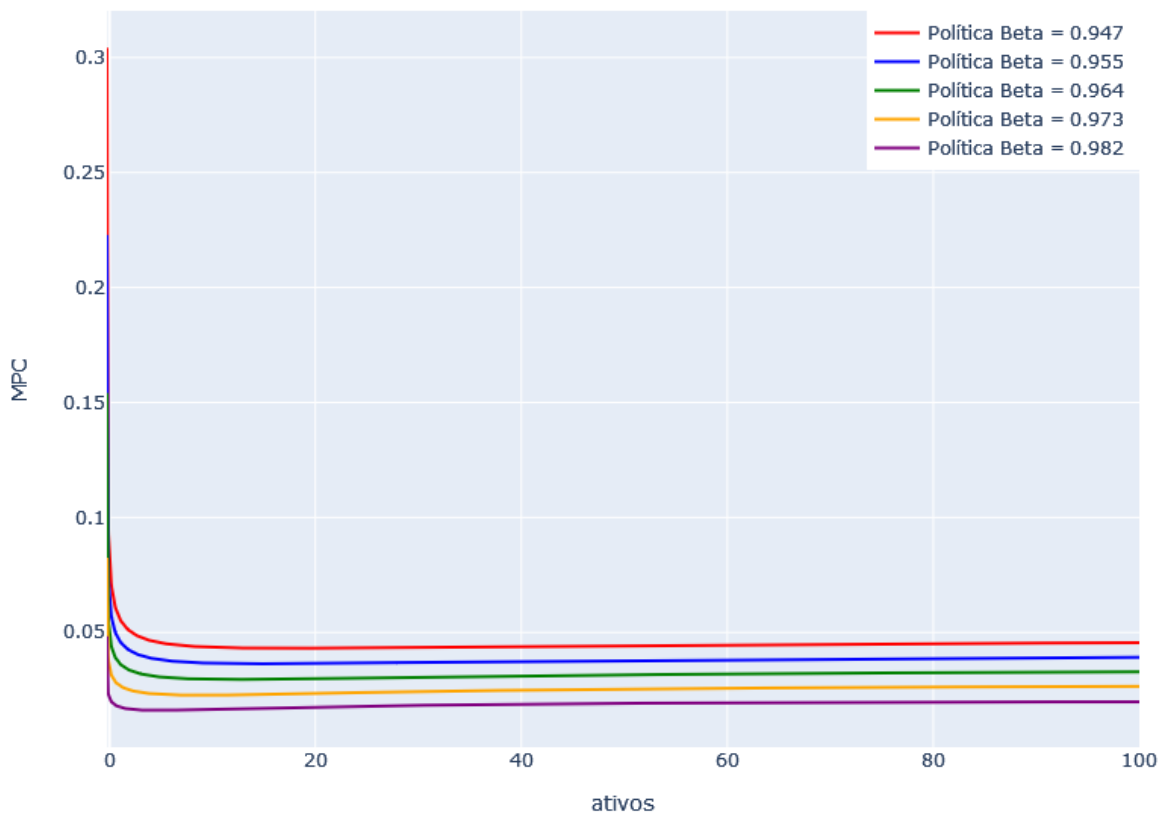
Do mesmo modo, um agente em nível baixo de ativos pode ser afetado por uma mudança abrupta de seu fator de desconto, passando a dar maior preferência à poupança ao invés do consumo. Tal mecanismo pode explicar a razão desta especificação do modelo de gerar maior

(DYNAN *et al.*, 2004) documentam que há uma associação positiva entre as taxas de poupança e a renda ao longo da vida. Mais recentemente, utilizando dados noruegueses, (FAGERENG *et al.*, 2019) demonstram que, entre as famílias com patrimônio líquido positivo, as taxas de poupança aumentam com a riqueza.

<sup>13</sup> Aqui cabe mencionar que o MPC no nível máximo de ativos é de apenas 2,5% para a regra política de consumo na maior realização de  $\beta$ , e de mais de 5% em sua menor realização.

nível de agentes com ativos intermediários face ao modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa. Conforme abordado na Seção 4.3.2, o modelo com heterogeneidade exclusivamente fixa tem como principal mecanismo amplificador de diferenças distributivas o fato que a classe de agentes mais pacientes passam a acumular a maior parte do capital, resultando na separação das diferentes classes de famílias em conjuntos isolados, com nível de ativos aproximadamente proporcional ao seu nível de paciência e - na hipótese de “anularmos” os efeitos dos choques laborais - estacionário durante sua (infinita) vida.

Figura 9 – Função de Propensão Marginal ao Consumo - Modelo Heterogeneidade Exclusivamente Estocástica



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: escala representativa de todos os níveis de ativos simulada no modelo.

#### 4.3.4 Modelo Completo

Uma vez analisados os casos limites, passamos à solução e análise do modelo completo. Neste modelo combinamos a forma de heterogeneidade nas preferências intertemporais usualmente utilizada pela literatura, juntamente a um mecanismo que possibilita a modelagem

de variações temporais (na forma de choques) aos fatores de desconto dos agentes, atuando de forma idiossincrática.

Conforme especificações anteriores, os parâmetros de calibração serão os mesmos do modelo de referência, conforme Tabela 4, à exceção da parametrização de  $\Pi_{\beta\beta'}$ , a qual passará a incluir agentes com heterogeneidade fixa em seus fatores de desconto (agentes com diferentes fatores de desconto, constantes no tempo), e uma massa de agentes que possuem o mesmo fator de desconto médio, mas sujeito à choques estocásticos idiossincráticos.

Utilizaremos a especificação completa da matriz  $\Pi_{\beta\beta'}$ :

$$\Pi_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} \pi_{\beta_{\text{fixo}}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{\beta_{\text{médio}}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{\beta_{\text{estocástico}}} \end{pmatrix}$$

Novamente, em virtude da ausência de microdados para a economia brasileira, utilizaremos parâmetros arbitrários para a calibração das submatrizes de transição do fator de desconto  $\Pi_{\beta\beta'}$ . Cabe destacar que essa abordagem, embora não ancorada em dados empíricos específicos, é instrumental para testar a robustez e a flexibilidade do modelo completo face ao modelo original de Aiyagari (1994). Ao optar por uma especificação conservadora, procuramos evitar o *overfitting*, que poderia resultar de uma calibração excessivamente ajustada a dados ou momentos econômicos específicos (incluindo os parâmetros de desigualdade patrimonial).

Assim, o foco recai sobre a demonstração da capacidade do modelo em capturar uma gama diversa de dinâmicas econômicas sob diferentes configurações de heterogeneidade. Esta estratégia nos permite explorar o potencial do modelo para simular contextos variados, sem comprometer a generalidade e a aplicabilidade dos resultados obtidos. Ademais, estabelecemos uma base sólida para futuras investigações que possam incorporar dados empíricos detalhados, contribuindo assim para um entendimento mais aprofundado das implicações macroeconômicas da heterogeneidade no fator de desconto.

Tendo em mente a abordagem adotada para a calibração das submatrizes de transição do fator de desconto, voltamos agora nossa atenção para a especificação detalhada dessas matrizes, que são fundamentais para governar a dinâmica dos fatores de desconto no modelo. Adotamos a seguinte estrutura: metade das famílias são dotadas de fatores de desconto fixos ao longo do tempo, mas distintos entre si, seguindo amplamente a metodologia literatura apresentada em nossa Seção 2.1.3, com  $\pi_{\beta_{\text{fixo}}}$  adotando a mesma configuração do caso limite exposto na

Seção 3.7.2, referente à heterogeneidade exclusivamente fixa, qual seja a forma:

$$\pi_{\beta_{\text{fixo}}} = \left( \begin{array}{c|cccc} & \beta - 2\Delta & \beta - \Delta & \beta + \Delta & \beta + 2\Delta \\ \hline \beta - 2\Delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta - \Delta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta + \Delta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta + 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Definimos  $\pi_{\beta_{\text{médio}}}$  como 0,958 e  $\Delta$  no valor de 0,0075, resultando na distribuição de  $\frac{1}{5}$  da massa total de agentes da economia para cada um destes 5 fatores de desconto distintos.

Com esta escolha, simulamos agentes que mantêm suas preferências temporais ao longo do tempo, refletindo uma visão de comportamento econômico que enfatiza a consistência e previsibilidade nas decisões individuais. Esta abordagem pode ser justificada pela observação de que, em muitos contextos econômicos, certos agentes exibem uma estabilidade notável em suas taxas de preferências temporais, possivelmente devido a fatores como nível educacional, influências culturais, ou ainda características psicológicas intrínsecas<sup>14</sup>.

Expandindo as configurações usualmente adotadas na literatura, temos que a outra metade da massa unitária de agentes que compõe a economia passa a ter um fator de desconto médio  $\beta = 0,964$ , o qual é sujeito à choques estocásticos idiossincráticos que seguem um processo AR(1), discretizado em 5 estados através do método de Rowenhorst, na mesma forma e utilizando os mesmos parâmetros adotados para a análise do caso limite da Seção 4.3.3, especificamente os definidos na Tabela 5.

Portanto, temos que  $\pi_{\beta_{\text{estocástico}}}$  tem a seguinte parametrização:

$$\pi_{\beta_{\text{estocástico}}} = \begin{bmatrix} 0.81451 & 0.17148 & 0.01354 & 0.00048 & 0.00001 \\ 0.04287 & 0.82128 & 0.12896 & 0.00678 & 0.00012 \\ 0.00226 & 0.08598 & 0.82354 & 0.08598 & 0.00226 \\ 0.00012 & 0.00678 & 0.12896 & 0.82128 & 0.04287 \\ 0.00001 & 0.00048 & 0.01354 & 0.17148 & 0.81451 \end{bmatrix}$$

Com os estados discretos associados sendo  $\beta_j = [0,947, 0,955, 0,964, 0,973, 0,982]$ .

Importante indicar que o processo da matriz especificada acima resulta nos agentes permane-

<sup>14</sup> Como meta-análise de trabalhos neste sentido, podemos citar (LOEWENSTEIN; PRELEC, 1992; SEAMAN *et al.*, 2022).



cendo - quando considerado o estado ergódico - 37,5% do tempo com um fator de desconto efetivo  $\beta = 0,964$  (o fator médio), e somente cerca de 6,25% do tempo nos valores extremos, quais sejam  $\beta = 0,947$  e  $0,982$ .

Para esta parcela de agentes a modelagem reflete uma realidade econômica na qual suas preferências temporais podem ser influenciadas por fatores externos e imprevisíveis. Esta abordagem captura a dinâmica de como eventos idiossincráticos, como mudanças no ambiente econômico ou pessoal, podem alterar as decisões de consumo e poupança de maneira heterogênea<sup>15</sup>. Além de adicionar uma camada de realismo ao modelo, esta estrutura permite simular como indivíduos com características médias padronizadas podem ainda exibir uma gama diversificada de comportamentos em resposta a choques externos. Esta inclusão é crucial para entender o impacto de políticas econômicas e choques macroeconômicos em uma população que, embora compartilhe certos parâmetros comuns, reage de forma distintamente variada a diferentes cenários.

Destaca-se que a escolha dos parâmetros acima, embora arbitrária devido à ausência de microdados que as justifiquem, é conservadora face à literatura relevante<sup>16</sup>, apresentando-se em intervalos de valores restritos face às estimativas para economias com níveis similares de desigualdade patrimonial, tais como as dos Estados Unidos e México<sup>17</sup>.

Apresentamos na Figura 10 a distribuição de ativos derivada da simulação deste modelo.

Esta distribuição acaba por gerar a Curva de Lorenz apresentada na Figura 11.

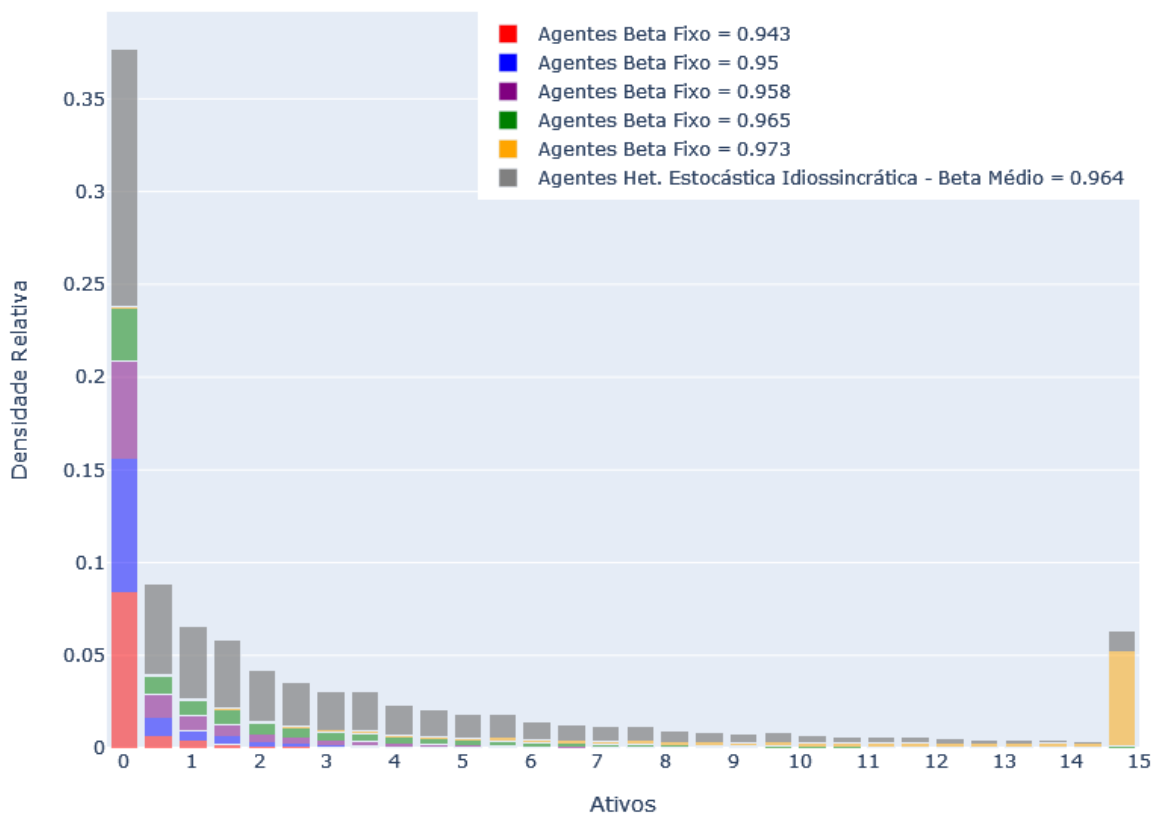
Temos que o modelo completo - mesmo com uma escolha conservadora de intervalo de fatores de desconto, e determinados arbitrariamente sem o propósito de ajustar-se à distribuição estimada para a economia brasileira - demonstra maior performance em replicar os dados empíricos que o modelo padrão, apresentando um aumento do índice de Gini de 0,14. Embora quando considerado o parâmetro Gini o modelo seja superado pelos casos limites de heterogeneidade exclusivamente fixa e exclusivamente estocástica, há que se destacar que ambos estes modelos não podem simplesmente serem considerados como superiores, haja vista a implausibilidade de uma configuração econômica real na qual tenhamos somente agentes com uma ou outra forma de heterogeneidade nos fatores de desconto, como abordado pela literatura pertinente.

<sup>15</sup> Referimos novamente ao trabalho de (??).

<sup>16</sup> Conforme trabalhos expostos no Capítulo 2.

<sup>17</sup> Aqui citamos (LAWRANCE, 1991) e (CARVALHO, 2010), os quais estimam intervalos efetivos para  $\beta$  entre 2 a 4 vezes maiores do que as adotadas na especificação do modelo completo

Figura 10 – Histograma de Ativos - Modelo Completo



Fonte: elaborada pelo autor.

Nota: valores de  $a > 15$  agrupados.

Em complemento à abordagem conservadora acima, e no intuito de proporcionar a análise de sensibilidade dos parâmetros, passamos a estimar o processo estocástico com parâmetros que criam uma dispersão mais próxima daquelas das economias de referências (México e Estados Unidos), adotando os valores constantes da Tabela 6.

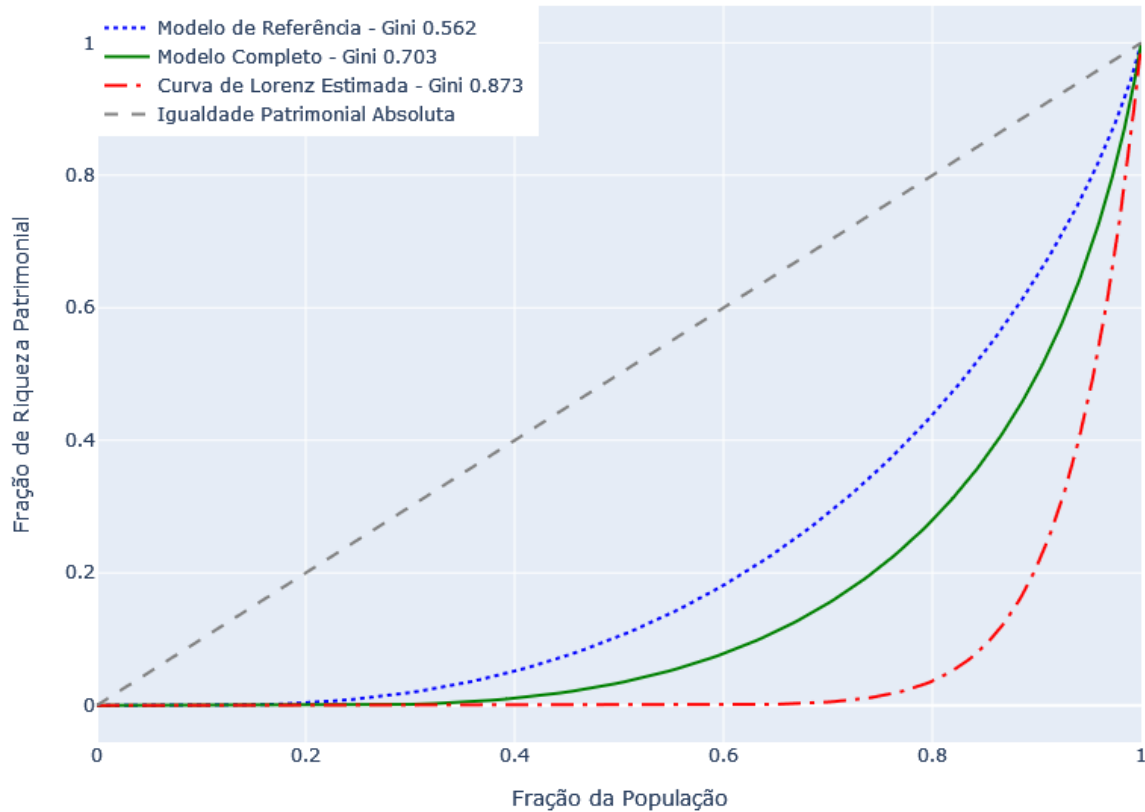
Tabela 6 – Parâmetros de Calibração do Processo de Evolução do Fator de Desconto - Parametrização Alternativa

Parâmetro	Valor	Descrição
$\rho_\beta$	0,950	Persistência de evolução do fator de desconto
$\sigma_\beta$	0,006	Desvio padrão do componente estocástico do Fator de Desconto

Com esta especificação, passamos a ter a Curva de Lorenz tal como exibida na Figura 12.

Com o uso dos parâmetros alternativos passamos a ter um índice de Gini de 0,806, muito mais próximo do valor estimado para economia brasileira. Podemos arguir que os

Figura 11 – Curva de Lorenz - Comparação entre Modelo de Referência e Modelo Completo



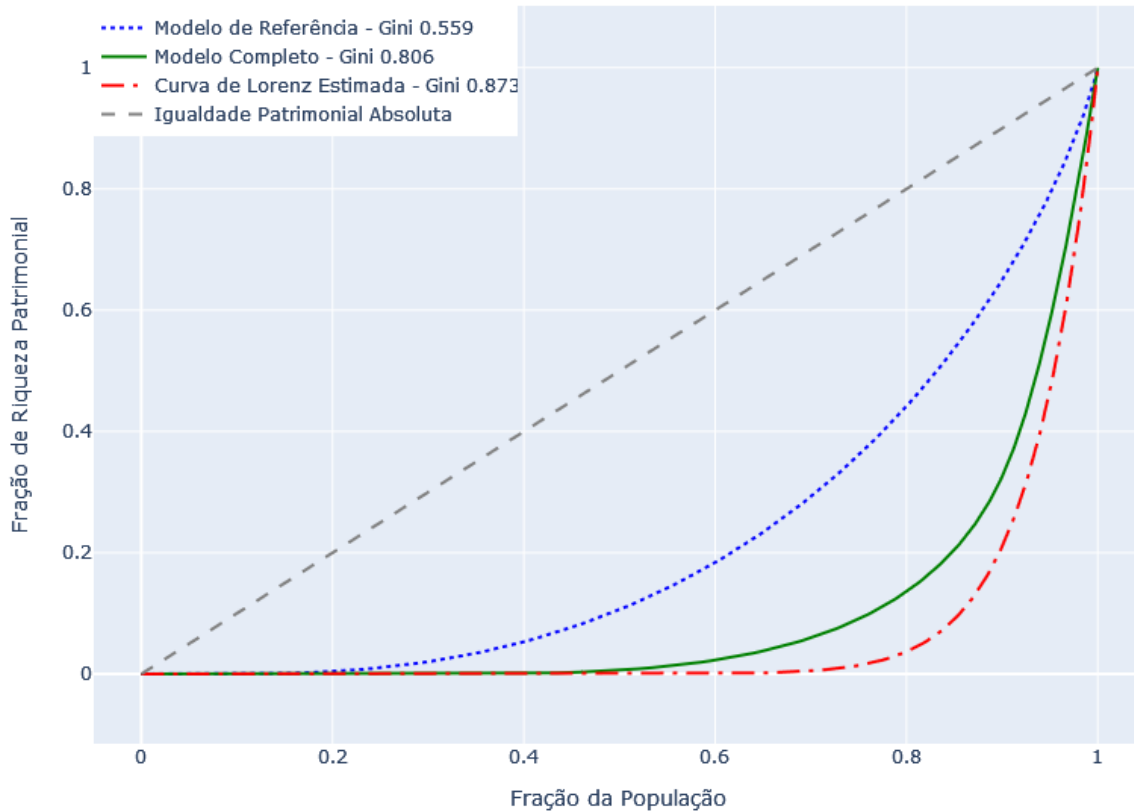
Fonte: elaborada pelo autor.

valores utilizados se encontram mais em linha com a realidade brasileira - seja por estarem mais próximos aos das economias de referências, ou pelo fato de resultarem numa Curva de Lorenz mais próxima à curva estimada. Em especial, caso tratemos a presente análise como uma decomposição dos fatores de desconto presentes na economia, podemos defender que esta parametrização se aproxima mais fidedignamente da distribuição “real” subjacente.

No modelo completo, distinguimos claramente o comportamento de duas classes de agentes na economia. A primeira classe é composta por agentes com fatores de desconto fixos, porém heterogêneos entre si. A segunda classe é formada por agentes com o mesmo fator de desconto médio, mas sujeitos a choques idiossincráticos em seus fatores de desconto. Exploramos a seguir a intuição da dinâmica e o impacto desses dois tipos de agentes na distribuição de riqueza no modelo completo.

O mecanismo subjacente à acumulação de riqueza neste modelo integrado reflete tanto a consistência nos comportamentos de poupança de certos agentes, como amplamente

Figura 12 – Curva de Lorenz - Comparação entre Modelo de Referência e Modelo Completo - Parametrização Alternativa



Fonte: elaborada pelo autor.

abordado na literatura<sup>18</sup>, quanto a variabilidade idiossincrática nas preferências e circunstâncias. A distribuição de riqueza é moldada pela persistência em comportamentos de poupança e pela influência dos choques estocásticos na produtividade laboral e nos fatores de desconto.

Quanto aos agentes presentes no modelo completo, além das considerações específicas à cada classe de agentes realizada nas Seções 4.3.2 e 4.3.3, podemos intuir os seguintes mecanismos para a distribuição de ativos observada:

### ***Agentes com Heterogeneidade Estocástica nos Fatores de Desconto***

A inclusão de heterogeneidade estocástica nos fatores de desconto gera variação e mobilidade na distribuição de riqueza. Os choques idiossincráticos permitem que alguns agentes, mesmo inicialmente menos propensos à poupança, possam acumular riqueza considerável, refletindo mudanças nas preferências e circunstâncias ao longo do tempo através do histórico

<sup>18</sup> Indicamos as fontes do Cap. 2, em especial (FAGERENG *et al.*, 2019; MA; TODA, 2021; SAMWICK, 1997).

de realização dos choques aos quais estão sujeitos. Em especial, conforme demonstrado por Carroll<sup>19</sup>, o comportamento da poupança dos agentes difere significativamente para os agentes “impacientes”  $\beta \mathcal{R} < 1$ <sup>20</sup>, e os “pacientes”  $\beta \mathcal{R} > 1$  os agentes impacientes desejam apenas formar poupança precaucional como garantia contra os choques laborais enfrentados (“buffer-stock savers”), mantendo-se próximos ao limite de endividamento, enquanto os pacientes passam a ter o objetivo de acumular o máximo de ativos possível.

No modelo completo, um agente cujo produto do fator de desconto subjetivo  $\beta$  pelo retorno do capital  $\mathcal{R}$  é marginalmente menor (indicando uma ligeira impaciência) ou maior (indicando uma ligeira paciência) que 1, pode experimentar um choque que altere seu fator de desconto, deslocando-o para a categoria de agentes pacientes ou impacientes, respectivamente. As realizações idiossincráticas observadas revelam que um subconjunto de agentes mantém consistentemente um comportamento de paciência, aspirando a acumular todo o capital disponível. Em contrapartida, outros agentes enfrentam choques que os levam a se comportar como “buffer-stock savers”, acumulando poupança somente como uma proteção contra incertezas futuras.

Para a maior parte dos agentes (na especificação dos choques do modelo), temos que eles adotam comportamentos que variam entre intervalos de tempo entre o desejo ao acúmulo ilimitado de ativos, e a política dos “buffer-stock savers”, o que acaba por produzir a distribuição no intervalo “médio” de ativos. Ainda, todos estes agentes são sujeitos à incerteza idiossincrática quanto à realização de sua produtividade do trabalho, de forma que até os agentes que hipoteticamente tenham somente realizações “altas” de seus fatores de desconto utilizam seus ativos (“despouam”) para suavizar impactos em seu nível de consumo.

Paralelamente, a incerteza quanto à realização futura de  $\beta$  faz com que estes agentes tenham um nível de poupança superior àqueles com valores definidos e imutáveis para seus fatores de desconto, dado que a mera suavização de seu consumo passa a ser insuficiente para garantir a suavização do nível de utilidade deste mesmo consumo.

### ***Agentes com Heterogeneidade Fixa nos Fatores de Desconto***

Estes agentes representam a parcela da população que segue um comportamento de poupança e consumo consistente ao longo do tempo. Os mais pacientes dentre eles tendem a

<sup>19</sup> (CARROLL, 1997).

<sup>20</sup> Onde  $\mathcal{R}$  é a taxa de juros bruta.

acumular quantidades significativas de riqueza, contrastando com os menos pacientes, que permanecem próximos ao limite de empréstimo, agindo como poupadores por motivos precaucionais (“buffer-stock savers”). Os únicos fatores impeditivos destes agentes acumularem toda a riqueza da economia são: (i) a presença de choques estocásticos à produtividade laboral, seguindo o mesmo mecanismo descrito acima para os agentes com heterogeneidade estocástica nos fatores de desconto; (ii) a presença destes últimos agentes na economia, os quais - além de se sujeitarem ao mesmo mecanismo exposto no item anterior - são sujeitos à um nível superior de incerteza quanto ao seu consumo futuro e às combinações de realizações favoráveis/desfavoráveis dos choques laborais e aos fatores de desconto, levando-os a se “dispersarem” ao longo dos níveis de ativos da economia, competindo com os agentes “pacientes” com heterogeneidade fixa nos fatores de desconto em sua busca por acumulação de ativos.

#### 4.4 Sumário

Na Tabela 7 temos a comparação de estatísticas entre os modelos simulados neste trabalho, com o Modelo Completo tendo sua parametrização alternativa, haja vista sua melhor eficiência em replicar a distribuição patrimonial observada nos dados.

Tabela 7 – Resultados e Estatísticas

Modelo		Referência	Het. Excl. Fixa	Het. Excl. Estocástica	Completo
Heterogeneidade em $\beta$		nenhuma	Fixa	Estocástica	Fixa e Estocástica
Ponto médio de $\beta$		0,965	0,961	0,964*	0,954*
Intervalo de $\beta$		-	0,951 - 0,971	0,947 - 0,982	0,914 - 0,987**
Estatísticas	Dados	Referência	Het. Excl. Fixa	Het. Excl. Estocástica	Completo
Riqueza média ( $a$ )	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62
Riqueza mediana ( $a$ )	0,51	2,2	1,12	2,03	0,33
Pop. 50% Inferior	-0,4%	10,1%	2,8%	8,68%	-0,11%
40% Médio	20,6%	54,4%	49,5%	53,46%	32,14%
10% Topo	79,8%	35,4%	47,7%	37,86%	67,97%
Gini	0,873	0,562	0,693	0,592	0,8063

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: \* Valor efetivo considera a distribuição de agentes e estado estacionário da matriz  $\Pi_{\beta\beta}$  para cada especificação do modelo.

Nota: \*\* Valores efetivos não uniformes em virtude da dispersão de estados dos agentes com heterogeneidade estocástica em  $\beta$ , tal como governado pela submatriz  $\pi_{\beta_{\text{estocástico}}}$ .

Nota:  $a = R\$ 43.300,00$ .

Nota: Gini correspondente à coluna “Dados” refere-se ao valor obtido da curva de Lorenz estimada.

A performance de cada especificação do modelo pode ser melhor aferida através da mensuração do desvio das estatísticas apresentadas face aos dados da economia brasileira, como

exibidos na Tabela 8.

Tabela 8 – Variações dos Modelos em Relação aos Dados

Estatísticas Distributivas	Referência	Het. Excl. Fixa	Het. Excl. Estocástica	Completo
Variação Riqueza média ( <i>a</i> )	0	0	0	0
Variação Riqueza mediana ( <i>a</i> )	1,69	0,61	0,52	-0,18
Variação Pop. 50% Inferior	10,5%	3,2%	9,08%	0,29%
Variação 40% Médio	33,8%	28,9%	32,86%	11,54%
Variação 10% Topo	-44,4%	-32,1%	-41,94%	-11,83%
Variação Gini	-0,311	-0,18	-0,281	-0,067

Fonte: Elaborada pelo autor com base nas variações brutas.

Nota: A variação é calculada como (*Valores do Modelo – Valores dos Dados*).

## 5 CONCLUSÃO

Estudamos neste trabalho o papel da heterogeneidade da taxa de desconto para a compreensão da desigualdade de riqueza, com foco nos dados empíricos brasileiros. Foi construído um modelo computacional com agentes heterogêneos baseados no modelo de Aiyagari (1994), aumentado com mecanismos geradores de heterogeneidade de fatores de desconto - tanto na forma de diferentes classes de agentes com fatores de descontos fixos mas heterogêneos, quanto na forma de um processo estocástico de Markov para o fator de desconto dos agentes - tendo o próprio modelo de Aiyagari (1994) como caso limite deste novo modelo.

O experimento computacional demonstra que a implementação de fatores de desconto heterogêneos na forma deste trabalho traz uma série de benefícios analíticos e computacionais. Dentre eles, ressaltamos a habilidade de simular com maior precisão o comportamento de consumo e poupança dos agentes econômicos, gerando desigualdade de riqueza com maior verossimilhança aos observados nos dados da economia brasileira - com a discrepância do índice de Gini ao valor estimado em cerca de 0,07, quando comparado ao modelo de Aiyagari (1994) calibrado para a mesma economia - resultado promissor, haja vista que o presente experimento utilizou parâmetros que podem ser tratados como conservadores para esta heterogeneidade.

A hipótese de desconto estocástico traz consigo uma justificativa microeconômica, pois pode ser analiticamente justificada como representativa do comportamento dos agentes em cenários de incerteza e volatilidade, como durante crises financeiras, nas quais é possível que eles revejam suas expectativas quanto ao futuro e alterem sua propensão ao risco e paciência intertemporal. Um agente pode se tornar mais avesso ao risco e preferir consumir imediatamente em face de incertezas econômicas ou, alternativamente, pode decidir poupar mais antecipando tempos difíceis. A possibilidade do modelo abranger agentes com fatores de desconto fixos, mas heterogêneos, vai de encontro com a literatura atual sobre o tema, e permite simular grupos de agentes consistentemente mais pacientes ou impacientes, também em linha com observações de trabalhos semelhantes.

Nesse sentido, a vantagem do modelo ora desenvolvido sobre os modelos com heterogeneidade fixa é a possibilidade de incorporar a transição dos fatores de desconto entre diferentes estados, refletindo uma gama mais ampla de respostas individuais a choques econômicos. Assim, a riqueza distributiva emergente desses modelos tende a apresentar uma maior fidelidade aos padrões observados em dados empíricos, onde os agentes ajustam suas estratégias de acordo com as condições econômicas vigentes e suas percepções de risco e incerteza se ajustam di-



namicamente ao longo do tempo. Em contraste, modelos com classes fixas de agentes, cada uma associada a um fator de desconto constante, carecem da flexibilidade para capturar essas variações comportamentais, suportando-se em um pressuposto excessivamente simplista, qual seja a imutabilidade dos fatores de desconto entre dados grupos de agentes.

Outra vantagem é a possibilidade de abordar o modelo desenvolvido como uma análise de decomposição dos fatores de desconto presentes na economia, através de, por exemplo, tratar a Curva de Lorenz como um alvo de calibração em si, pela escolha de pontos arbitrários e utilizando uma métrica conveniente para mensurar a proximidade da calibração escolhida e os dados da economia.

Com a evolução contínua e melhoria dos estudos empíricos utilizando dados em painel sobre as famílias brasileiras, os quais vêm avançando significativamente em termos de qualidade e precisão, imaginamos possível fornecer uma justificação mais robusta para a heterogeneidade dos fatores de desconto proposta no modelo e sua correta especificação e calibração. Tais avanços prometem fundamentar ainda mais as simulações realizadas e permitirão um alinhamento mais preciso das previsões do modelo com a realidade observada.

Ademais, por razões computacionais e pela ausência de microdados, uma configuração promissora do modelo não foi analisada: uma abordagem híbrida, na qual as diferentes classes de agentes, categorizadas por uma propensão inerente a maior ou menor fator de desconto médio, seriam simultaneamente sujeitas a choques estocásticos idiossincráticos nesses fatores dentro de suas respectivas classes. Esse modelo combinado pode proporcionar uma capacidade ainda maior de representação das complexas dinâmicas comportamentais dos agentes econômicos, possibilitando assim uma análise mais refinada das estratégias financeiras das famílias brasileiras em relação às decisões intertemporais, conforme evidenciadas em dados empíricos. Neste mesmo sentido, vislumbra-se a possibilidade de extensão do modelo para modelar o acesso dos agentes à diferentes classes de ativos, ou ainda a inserção de correlações entre os choques sobre as preferências e sobre a produtividade do trabalho.

Uma extensão natural ao modelo seria a inclusão de impostos - seja sobre a renda, capital, ou ambos - e a adição de transferências governamentais, melhor representando a realidade econômica brasileira.

Em síntese, a inclusão de heterogeneidade nos fatores de desconto no modelo de Aiyagari pode ser vista como uma abordagem promissora para enriquecer a compreensão das decisões econômicas individuais e da dinâmica de distribuição de riqueza. A incorporação de

dados empíricos de alta resolução e a exploração de modelos híbridos representam caminhos potenciais para investigações futuras, com o potencial de oferecer análises mais precisas e um entendimento mais completo das complexidades da economia brasileira.

## REFERÊNCIAS

- ACEMOGLU, D. Technical change, inequality, and the labor market. **Journal of economic literature**, American Economic Association, v. 40, n. 1, p. 7–72, 2002.
- AIYAGARI, S. Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 109, n. 3, p. 659–684, 1994. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oup:qjecon:v:109:y:1994:i:3:p:659-684>.
- ALVAREDO, F.; CHANCEL, L.; PIKETTY, T.; SAEZ, E.; ZUCMAN, G. **Distributional National Accounts Guidelines: Methods and Concepts Used in the World Inequality Database**. [S. l.], 2020. Available at World Inequality Database (WID.world). Disponível em: <https://wid.world/document/distributional-national-accounts-guidelines-2020-concepts-and-methods-used-in-the-world-inequality-datab>
- ARAÚJO, F.; ISSLER, J. V. **A stochastic discount factor approach to asset pricing using panel data asymptotics**. [S. l.], 2011. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/fgv/epgewp/717.html>.
- ATKINSON, A. B.; BOURGUIGNON, F. **Handbook of income distribution**. [S. l.]: Elsevier, 2014.
- ATTANASIO, O.; BROWNING, M. **Consumption over the Life Cycle and over the Business Cycle**. [S. l.], 1993. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberwo:4453>.
- BACH, L.; CALVET, L. E.; SODINI, P. **Rich Pickings? Risk, Return, and Skill in the Portfolios of the Wealthy**. [S. l.], 2015. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/hal/wpaper/hal-02002692.html>.
- BARSKY, R. B.; KIMBALL, M. S.; JUSTER, F. T.; SHAPIRO, M. D. **Preference Parameters and Behavioral Heterogeneity: An Experimental Approach in the Health and Retirement Survey**. [S. l.], 1995. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/5213.html>.
- BECKER, G.; MULLIGAN, C. The endogenous determination of time preference. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 112, n. 3, p. 729–758, 1997. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oup:qjecon:v:112:y:1997:i:3:p:729-758>.
- BENHABIB, J.; BISIN, A. Skewed wealth distributions: Theory and empirics. **Journal of Economic Literature**, v. 56, n. 4, p. 1261–91, December 2018. Disponível em: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.20161390>.
- BRAVE, S.; CAMPBELL, J. R.; FISHER, J. D. M.; JUSTINIANO, A. **The Chicago Fed DSGE model**. [S. l.], 2012. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/fip/fedhwp/wp-2012-02.html>.
- BREVIGLIERI, T. F.; CORREA, A. L. A concentração da renda entre os ricos no brasil, 2012-2019. **Nova Economia**, Nova Economia, v. 33, n. 2, p. 449–474, Apr 2023. ISSN 0103-6351. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/0103-6351/7595>.
- CAGETTI, M. Wealth accumulation over the life cycle and precautionary savings. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 21, n. 3, p. 339–53, 2003. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bes:jnlbes:v:21:y:2003:i:3:p:339-53>.

CALIXTRE, A. A desconhecida desigualdade patrimonial e a urgência da regulamentação do imposto sobre grandes fortunas. In: FAGNANI, E. (Ed.). **A reforma tributária necessária: diagnóstico e premissas**. Brasília, São Paulo: ANFIP FENAFISCO, Plataforma Política Social, 2018. Acessado em: 03 de out. 2023. Disponível em: <http://plataformapoliticasocial.com.br/wp-content/uploads/2018/05/REFORMA-TRIBUTARIA-SOLIDARIA.pdf>.

CARROLL, C. D. Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford University Press, v. 112, n. 1, p. 1–55, 1997. ISSN 00335533, 15314650. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2951275>.

CARROLL, C. D. Why do the rich save so much? In: SLEMROD, J. B. (Ed.). **Does Atlas Shrug? The Economic Consequences of Taxing the Rich**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2000. cap. 14, p. 465–484.

CARROLL, C. D.; SLACALEK, J.; TOKUOKA, K. **The distribution of wealth and the marginal propensity to consume**. [S. l.], 2014. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/ecb/ecbwps/20141655.html>.

CARVALHO, L. **Poverty and Time Preference**. [S. l.], 2010. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/ran/wpaper/wr-759.html>.

CASTRO, F. **Imposto de renda da pessoa física: comparações internacionais, medidas de progressividade e redistribuição**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, 2014.

CASTRO, M. R. de; GOUVEA, S. N.; MINELLA, A.; SANTOS, R. C. dos; SOUZA-SOBRINHO, N. F. **SAMBA: Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach**. [S. l.], 2011. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/bcb/wpaper/239.html>.

CHANCEL, L.; PIKETTY, T.; SAEZ, E.; ZUCMAN, G. (Ed.). **World Inequality Report 2022**. [S. l.]: Harvard University Press, 2022. Available at: <https://wir2022.wid.world/>.

CHARLES, K. K.; HURST, E. **The Correlation of Wealth Across Generations**. [S. l.], 2002. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/9314.html>.

DRUGEON, J.-P.; WIGNIOLLE, B. **On a Simple Equilibrium with Heterogeneous Quasi-Hyperbolic Discounting Agents**. [S. l.], 2018. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/hal/psewpa/halshs-01962004.html>.

DYNAN, K. E.; SKINNER, J.; ZELDES, S. P. Do the rich save more? **Journal of Political Economy**, v. 112, n. 2, p. 397–444, apr 2004.

FAGERENG, A.; HOLM, M. B.; MOLL, B.; NATVIK, G. **Saving Behavior Across the Wealth Distribution: The Importance of Capital Gains**. [S. l.], 2019. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/26588.html>.

FILHO, R. B. Dinâmica econômica e ciclos de negócios na economia brasileira: Evidências para o período pós-real. **Revista de Economia Contemporânea**, v. 21, n. 1, 2018. ISSN 1980-5527. Disponível em: <https://revistas.ufrj.br/index.php/rec/article/view/22073>.

FLODEN, M.; LINDÉ, J. Idiosyncratic risk in the united states and sweden: Is there a role for government insurance? **Review of Economic Dynamics**, v. 4, n. 2, p. 406–437, July 2001. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/red/issued/v4y2001i2p406-437.html>.

FREDERICK, S.; LOEWENSTEIN, G.; O'DONOGHUE, T. Time discounting and time preference: A critical review. **Journal of Economic Literature**, v. 40, n. 2, p. 351–401, June 2002. Disponível em: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/002205102320161311>.

GHIGLINO, C.; VENDITTI, A. Wealth inequality, preference heterogeneity and macroeconomic volatility in two-sector economies. **Journal of Economic Theory**, v. 135, n. 1, p. 414–441, July 2007. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/jetheo/v135y2007i1p414-441.html>.

GUVENEN, F. **An Empirical Investigation of Labor Income Processes**. [S. l.], 2007. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/13394.html>.

HEATHCOTE, J.; STORESLETTEN, K.; VIOLANTE, G. L. The Macroeconomic Implications of Rising Wage Inequality in the United States. **Journal of Political Economy**, v. 118, n. 4, p. 681–722, August 2010. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v118y2010i4p681-722.html>.

HECKSCHER, M.; NERI, M. Afinal, o que aconteceu com a desigualdade no imposto de renda? In: ANPEC. **Encontro Brasileiro de Economia**. [S. l.], 2019.

HENDRICKS, L. How important is discount rate heterogeneity for wealth inequality? **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 31, n. 9, p. 3042–3068, September 2007. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/dyncon/v31y2007i9p3042-3068.html>.

HORNSTEIN, A.; KRUSELL, P.; VIOLANTE, G. L. The effects of technical change on labor market inequalities. In: **Handbook of economic growth**. [S. l.]: Elsevier, 2005. v. 1, p. 1275–1370.

HUBMER, J.; KRUSELL, P.; JR., A. A. S. Sources of US Wealth Inequality: Past, Present, and Future. In: **NBER Macroeconomics Annual 2020, volume 35**. National Bureau of Economic Research, Inc, 2020, (NBER Chapters). p. 391–455. Disponível em: <https://ideas.repec.org/h/nbr/nberch/14486.html>.

HUGGETT, M. The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 17, n. 5-6, p. 953–969, 1993. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/dyncon/v17y1993i5-6p953-969.html>.

HUGGETT, M. Wealth distribution in life-cycle economies. **Journal of Monetary Economics**, v. 38, n. 3, p. 469–494, December 1996. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v38y1996i3p469-494.html>.

KAPLAN, G.; VIOLANTE, G. L. **The Marginal Propensity to Consume in Heterogeneous Agent Models**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/30013.html>.

KARABARBOUNIS, L.; NEIMAN, B. The global decline of the labor share. **The Quarterly journal of economics**, Oxford University Press, v. 129, n. 1, p. 61–103, 2014.

KATZ, L. F.; MURPHY, K. M. Changes in relative wages, 1963–1987: supply and demand factors. **The quarterly journal of economics**, MIT Press, v. 107, n. 1, p. 35–78, 1992.

KOPECKY, K.; SUEN, R. Finite State Markov-chain Approximations to Highly Persistent Processes. **Review of Economic Dynamics**, v. 13, n. 3, p. 701–714, July 2010. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/red/issued/09-115.html>.

- KRUSELL, P.; SMITH, A. A.; JR. Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy. **Journal of Political Economy**, v. 106, n. 5, p. 867–896, October 1998. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v106y1998i5p867-896.html>.
- LAWRANCE, E. C. Poverty and the rate of time preference: Evidence from panel data. **Journal of Political Economy**, v. 99, n. 1, p. 54–77, 1991. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp/jpolec:v:99:y:1991:i:1:p:54-77>.
- LINARDI, F. de M. **Assessing the Fit of a Small Open-Economy DSGE Model for the Brazilian Economy**. [S. l.], 2016. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/bcb/wpaper/424.html>.
- LOEWENSTEIN, G.; PRELEC, D. Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation. **Quarterly Journal of Economics**, v. 107, n. 2, p. 573–97, 1992.
- MA, Q.; TODA, A. A. A theory of the saving rate of the rich. **Journal of Economic Theory**, v. 192, n. C, 2021. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/jetheo/v192y2021ics0022053121000107.html>.
- MALIAR, L.; MALIAR, S. Envelope condition method versus endogenous grid method for solving dynamic programming problems. **Economics Letters**, v. 120, n. 2, p. 262–266, 2013. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:ecolet:v:120:y:2013:i:2:p:262-266>.
- MEDEIROS, M.; CASTRO, F. A composição da renda no topo da distribuição: evolução no brasil entre 2006 e 2012, a partir de informações do imposto de renda. **Economia e Sociedade**, Campinas, v. 27, n. 2 (63), p. 577–605, may-aug 2018.
- MEDEIROS, M.; SOUZA, P. H. G. F.; CASTRO, F. A estabilidade da desigualdade de renda no brasil, 2006 a 2012: estimativa com dados do imposto de renda e pesquisas domiciliares. **Ciência Saúde Coletiva**, v. 20, n. 4, p. 971–986, 2015.
- MEIER, S.; SPRENGER, C. **Discounting Financial Literacy: Time Preferences and Participation in Financial Education Programs**. [S. l.], 2008. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/iza/izadps/dp3507.html>.
- MIAN, A. R.; STRAUB, L.; SUFI, A. **Indebted Demand**. [S. l.], 2020. (Working Paper Series, 26940). Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w26940>.
- MITMAN, K.; KRUEGER, D.; PERRI, F. **Macroeconomics and Household Heterogeneity**. [S. l.], 2016. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:cpr:ceprdp:11308>.
- NARDI, M. D.; FELLA, G. Saving and Wealth Inequality. **Review of Economic Dynamics**, v. 26, p. 280–300, October 2017. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/red/issued/16-340.html>.
- NERI, M. **Mapa da Riqueza no Brasil**. 2022. Acessado em: 03 de Outubro de 2023. Disponível em: [https://www.cps.fgv.br/cps/bd/docs/MapadaRiqueza\\_Marcelo-Neri\\_FGV-Social.pdf](https://www.cps.fgv.br/cps/bd/docs/MapadaRiqueza_Marcelo-Neri_FGV-Social.pdf).
- PIKETTY, T.; SAEZ, E. Income inequality in the united states, 1913–1998. **The Quarterly journal of economics**, MIT Press, v. 118, n. 1, p. 1–41, 2003.
- QUADRINI, V. The importance of entrepreneurship for wealth concentration and mobility. **Review of Income and Wealth**, v. 45, n. 1, p. 1–19, mar 1999.
- REIS, A. C. S. dos; ZILBERMAN, E. **On the Optimal Size of Public Employment**. [S. l.], 2013. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/rio/texdis/612.html>.

SAMUELSON, P. A. A Note on Measurement of Utility. **The Review of Economic Studies**, v. 4, n. 2, p. 155–161, 02 1937. ISSN 0034-6527. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2967612>.

SAMWICK, A. A. **Discount Rate Heterogeneity and Social Security Reform**. [S. l.], 1997. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/6219.html>.

SEAMAN, K. L. *et al.* Temporal discounting across adulthood: a systematic review and meta-analysis. **Psychology and Aging**, v. 37, p. 111, 2022.

SITTHIYOT, T.; HOLASUT, K. A simple method for estimating the Lorenz curve. **Palgrave Communications**, v. 8, n. 1, p. 1–9, December 2021. Disponível em: [https://ideas.repec.org/a/pal/palcom/v8y2021i1d10.1057\\_s41599-021-00948-x.html](https://ideas.repec.org/a/pal/palcom/v8y2021i1d10.1057_s41599-021-00948-x.html).

SOUZA, P. H. G. F. **A desigualdade vista do topo: a concentração de renda entre os ricos no Brasil, 1926-2013**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

SOUZA, P. H. G. F. d. Os ricos no brasil: o que sabemos, o que não sabemos e o que deveríamos saber. **BIB - Revista Brasileira de Informação Bibliográfica em Ciências Sociais**, n. 85, p. 5–26, fev. 2018. Disponível em: <https://bibanpocs.emnuvens.com.br/revista/article/view/442>.

STACHURSKI, J.; TODA, A. A. An impossibility theorem for wealth in heterogeneous-agent models with limited heterogeneity. **Journal of Economic Theory**, v. 182, p. 1–24, 2019. ISSN 0022-0531. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053119300353>.

SUISSE, C.; UBS. **Global Wealth Report 2023**. 2023. Acessado em: 03 de out. 2023. Disponível em: <https://www.credit-suisse.com/about-us/en/reports-research/global-wealth-report.html>.

VASILEV, A. Can shocks to the discount factor explain business cycle fluctuations in Bulgaria (1999-2018)? **EconStor Open Access Articles and Book Chapters**, 2020. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/zbw/espost/223032.html>.

VENTI, S. F.; WISE, D. A. Choice, Chance, and Wealth Dispersion at Retirement. In: **Aging Issues in the United States and Japan**. National Bureau of Economic Research, Inc, 2001, (NBER Chapters). p. 25–64. Disponível em: <https://ideas.repec.org/h/nbr/nberch/10284.html>.

VISSING-JORGENSEN, A. Limited asset market participation and the elasticity of intertemporal substitution. **Journal of Political Economy**, v. 110, n. 4, p. 825–853, 2002. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jpolec:v:110:y:2002:i:4:p:825-853>.

## APÊNDICE A – MÉTODO NUMÉRICO

### A.1 Introdução

Esta nota explica como obter a solução de estado estacionário de nosso modelo baseado em Aiyagari (1994), e estendido com decisão de trabalho endógena e heterogeneidade entre fatores de desconto. Iniciaremos delineando o modelo de referência de Aiyagari (1994), com breves considerações sobre o “Método de Envelope Endógeno” (EGM), utilizado para aceleração computacional, e por último abordamos o modelo com heterogeneidade entre fatores de desconto.

### A.2 Equilíbrio Estacionário

As variáveis de estado individuais do modelo são a realização do choque  $\varepsilon$ , a realização do valor de  $\beta$ , e o estoque de ativos  $a$ . O problema que a família resolve é:

$$v(\varepsilon, a, \beta) = \max_{c, l, a'} \left\{ u(c, h) + \sum_{\varepsilon'} \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'} \sum_{\beta'} \Pi_{\beta\beta'} v(\varepsilon', a', \beta') \right\}$$

sujeito a:  $c + a' = wh\varepsilon + (1 + r)a$ ,

$$c \geq 0, \quad 1 \geq h \geq 0 \quad \text{e} \quad a' \geq \underline{a}.$$

Nessa equação,  $\Gamma_{\varepsilon\varepsilon'}$  representa a probabilidade de transição entre diferentes choques de produtividade do trabalho,  $\beta$  representa o estado atual do fator de desconto associado ao período atual,  $\beta'$  representa o estado do fator de desconto associado ao período futuro, de acordo com a matriz de transição  $\Pi_{\beta\beta'}$ , a qual representa a probabilidade de transição entre os estados  $\beta$  e  $\beta'$ ,  $r$  e  $w$  são o retorno dos ativos e a taxa de salário por unidade eficiente de trabalho.

Sob certas condições, problemas desse tipo têm uma solução que denotamos  $a' = g^a(\varepsilon, \beta, a)$ ,  $c = g^c(\varepsilon, \beta, a)$  e  $h = g^h(\varepsilon, \beta, a)$  com um limite superior nas posses de ativos,  $\bar{a}$ , tal que  $\bar{a} \geq g^a(\varepsilon, \beta, a) \geq \underline{a}$  para todo  $\varepsilon \in \Upsilon$ , todo  $\beta \in B$  todo  $a \in A \equiv [\underline{a}, \bar{a}]$ .<sup>1</sup> Doravante, também usaremos a notação mais compacta  $s \equiv \{\varepsilon, \beta, a\}$  e  $S \equiv \Upsilon \times B \times A$ .

É possível construir um processo de Markov para as variáveis de estado individuais, a partir do processo de Markov nos choques e das regras de decisão dos agentes. Seja  $\mathcal{J}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada em  $S$  por, digamos, seus intervalos abertos. Uma medida de probabilidade

<sup>1</sup> Conforme (HUGGETT, 1993).



$\mu$  sobre  $\mathcal{J}$  descreve exaustivamente a economia, indicando quantas famílias são de cada tipo. Seja  $Q(s, J)$  a probabilidade de um tipo  $s = \{\varepsilon, \beta, a\}$  se tornar de um tipo em  $J \subset \mathcal{J}$ . Dados os objetos definidos até agora, podemos expressar  $Q$  como:

$$Q(s, J) = \sum_{\substack{\varepsilon' \in J_\varepsilon \\ \beta' \in J_\beta}} \Gamma_{\varepsilon\varepsilon'} \Pi_{\beta\beta'} \mathbf{I}_{g(\varepsilon, \beta, a) \in J_a},$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma função indicadora que assume o valor 1 se seu argumento for verdadeiro e 0 caso contrário,  $J_\varepsilon$  é a projeção de  $J$  em  $\Upsilon$ ,  $J_\beta$  é a projeção de  $J$  em  $B$  e  $J_a$  é a projeção de  $J$  em  $A$ . A função de transição  $Q$  descreve a evolução da economia, gerando uma medida de probabilidade para o próximo período  $\mu'$  dado uma medida de probabilidade  $\mu$  hoje. A maneira exata como isso ocorre é

$$\mu'(J) = \int_S Q(s, J) d\mu.$$

Definição 1. Um equilíbrio de estado estacionário para a economia de mercados incompletos é um conjunto de funções  $\{v, g^a, g^c, g^h\}$ , uma medida de famílias  $\mu$ , e um par de preços  $\{w, r\}$ , tal que:

- (1) dado um par de preços  $\{w, r\}$ , as funções  $\{v, g^a, g^c, g^h\}$  resolvem o problema de decisão das famílias;
- (2) os preços são dados pelas produtividades marginais,  $r = F_K(K/L) - \delta$  e  $w = F_L(K/L)$ ;
- (3) os insumos de fatores são obtidos por agregação das famílias,  $L = \int \varepsilon g^h d\mu$  e  $K = \int g^a d\mu$ ;
- (4) a medida de famílias é estacionária,  $\mu J = \int_S Q(s, J) d\mu$ ; e
- (5) em virtude da lei de Walras, a restrição de recursos agregada da economia é automaticamente satisfeita,  $C + K' = F(K, L) + (1 - \delta)K$ .

### A.2.1 Função política de consumo

Para a solução referente ao consumo, temos:

1. Defina um limite superior arbitrário para o espaço de capital  $\bar{a}$  para tornar o domínio da função valor compacto.

2. Escolha um método para aproximar a regra de decisão ótima. Candidatos são (i) métodos de elementos finitos, (ii) métodos de resíduos ponderados. Não podemos usar discretização porque limitar a escolha a um conjunto finito de pontos de grade significa que não podemos encontrar uma raiz da Equação de Euler quase certamente. Utilizamos interpolação linear por partes com  $m$  nós. A função de decisão ótima para o capital futuro pode ser armazenada como uma matriz  $n$  por  $m$  por  $p$ ,  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$ .
3. Defina o parâmetro de tolerância  $\varepsilon$ .
4. Defina um palpite inicial para  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$ . Denomine-o  $g_0^a(s, \beta, a)$ . No caso de aproximação linear por partes, o que é realmente adivinhado é uma matriz  $g_0^a(\varepsilon_i, \beta, a_j)$ .
5. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $p = 1, 2, \dots, p$ , encontre o estoque de capital  $a'$  que resolve a Equação de Euler combinada com  $g_0^a(s, \beta, a)$  para a decisão de poupança para o próximo período.  $a'$  é o valor atualizado para a poupança ótima  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$ . Em particular, esta etapa contém os seguintes subpassos:

- 5.1 Para cada combinação de  $\varepsilon_i$ ,  $a_j$ , e  $\beta_p$ , resolvemos a Equação de Euler para encontrar  $a'$  que maximiza a utilidade esperada. Isso envolve calcular a função  $\zeta(a')$  como:

$$\zeta(a') = u'(c(\varepsilon_i, a_j, \beta_p, a')) - \sum_{\varepsilon'} \sum_{\beta'} \Gamma_{\varepsilon_i \varepsilon'} \Pi_{\beta \beta'} u'(c(\varepsilon', a', g^a(\varepsilon', \beta', a'))) (1 + r),$$

onde  $c(\varepsilon, a, \beta_p, a')$  é o consumo dado pelo estado atual  $(\varepsilon, \beta, a)$  e a política de ativos proposta  $a'$ .

- 5.2 Utilizamos métodos numéricos, como bissecção, para encontrar a raiz de  $\zeta(a') = 0$ , determinando assim a política ótima de ativos  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$  para cada estado.
  - 5.3 Repetimos o processo até que a política de ativos convirja, garantindo que a solução seja consistente com a condição de otimização de primeira ordem e a restrição orçamentária.
6. A função consumo  $g^c(\varepsilon, \beta, a)$  é encontrada como residual.

Este procedimento é iterativo e se baseia na resolução da Equação de Euler para garantir que as decisões de poupança sejam ótimas em cada estado dado.

### A.2.2 Função política de oferta de trabalho

Quanto à oferta de trabalho, em geral, é possível utilizar usar um dos dois métodos:

1. Iteração da função valor com otimização de 2 variáveis. Podemos procurar o ótimo usando

uma das rotinas de otimização multidimensional ou aninhar uma rotina de otimização unidimensional na outra.

2. Equações de Euler, combinadas com a busca da raiz de um sistema de duas equações não lineares. Primeiro obtemos duas condições de primeira ordem associadas às duas variáveis de escolha, e ou usamos uma rotina de busca de raiz multidimensional e aninhamos uma rotina de busca de raiz unidimensional na outra.

No entanto, graças à natureza de uma das decisões (ressaltando que a escolha entre trabalho e lazer é uma decisão instantânea e não afeta o valor futuro diretamente), a oferta de trabalho ótima realmente assume uma fórmula simples. Com a condição de primeira ordem com relação a  $h$  obtemos:

$$c^{-\sigma} = \lambda h^v$$

Esta equação é derivada da função utilidade específica que adotamos. De qualquer forma, a equação acima, junto com a restrição orçamentária, define implicitamente o  $h$  ótimo como uma função dos estados  $(\varepsilon, \beta, a)$  e  $a'$ . Note que há uma restrição de não negatividade para  $h$ . Se a equação implicar um  $h$  negativo, deve ser interpretada como  $h = 0$ . No final, podemos construir uma função para encontrar o  $h$  ótimo dadas as condições do estado e consumo:

$$h = \left( \frac{c^{-\sigma}}{\lambda} \right)^{\frac{1}{v}}$$

Se inserirmos essa função de volta no problema de otimização original, basicamente temos um problema muito semelhante de escolher apenas o  $a'$  ótimo. Portanto, podemos encontrar o  $a'$  ótimo da mesma maneira que no modelo básico e obter a regra de decisão ótima para consumo  $g^c(\varepsilon, a)$  como o residual.

### ***A.2.3 Cálculo Usando o Método de Envelope Endógeno (EGM)***

O Método de Envelope Endógeno (EGM) é utilizado para calcular a oferta de trabalho ótima e a política de decisão de consumo em nosso modelo. O EGM é um método avançado para resolver problemas de programação dinâmica em modelos econômicos com escolha intertemporal. Ele é eficiente e preciso, especialmente útil em modelos onde métodos tradicionais, como a iteração da função valor, podem ser computacionalmente exigentes.

O EGM opera construindo uma grade de decisão endógena, em contraste com uma grade exógena fixa. Isso é alcançado ao utilizar a condição de otimização de primeira ordem, em combinação com a restrição orçamentária, para mapear os valores de consumo e trabalho para os ativos correspondentes no período seguinte. Este método diminui a necessidade de interpolação complexa, melhorando a precisão da solução e permitindo um cálculo mais eficiente e robusto das políticas ótimas.

O algoritmo do EGM pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Comece com uma suposição inicial para a função política de consumo e/ou trabalho.
2. Utilize a condição de otimização de primeira ordem para determinar os valores ótimos de consumo e trabalho, dada a suposição inicial para os ativos no próximo período.
3. Mapeie esses valores ótimos de volta para os níveis de ativos atuais, usando a restrição orçamentária. Isso cria a 'grade endógena'.
4. Atualize a função política de consumo e/ou trabalho com base nos novos valores ótimos.
5. Repita os passos 2 a 4 até que a função política convirja para uma solução estável.

Esta abordagem permite uma maior precisão nas previsões de políticas ótimas, especialmente quando as decisões de consumo e trabalho estão intimamente ligadas à dinâmica dos ativos ao longo do tempo.

### A.3 Função de excesso de demanda $\Phi(r)$

Uma vez as funções políticas sejam obtidas, podemos proceder à função de excesso de demanda  $\Phi(r)$ :

1. Dado  $r$ , a função realiza o seguinte.
2. Calcula a relação capital-trabalho  $k$ , que satisfaz o seguinte:

$$r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$$

3. Calcula  $w$  que é consistente com a relação capital-trabalho  $k$  obtida como segue:

$$w = (1 - \alpha)k^\alpha$$

4. Dado  $r$  e  $w$ , resolve o problema de otimização dos consumidores. Denota as regras de decisão ótimas como  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$ ,  $g^c(\varepsilon, \beta, a)$ , e  $g^h(\varepsilon, \beta, a)$ .

5. Usando a regra de decisão ótima obtida  $g^a(\varepsilon, \beta, a)$  e a lei de movimento exógena para o choque idiossincrático  $\varepsilon$ , encontra a distribuição estacionária<sup>2</sup>. Suponha que a distribuição estacionária seja caracterizada por uma função de densidade cumulativa  $\mu(\varepsilon, a)$ .
6. Calcula a oferta agregada de capital  $K$  e a oferta de trabalho agregada  $L$  como segue:

$$K = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \int_A a d\mu(\varepsilon_i, a)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \int_A g^h(\varepsilon_i, a) \varepsilon_i d\mu(\varepsilon_i, a)$$

7. O excesso de demanda pode ser definido como

$$\Phi(r) = k - \frac{K}{L}$$

Encontrar uma raiz da função  $\Phi(r)$  é equivalente a encontrar um ponto fixo da relação capital-trabalho  $\frac{K}{L}$ .

---

<sup>2</sup> Utilizando o Método de Young para cálculo do kernel da matriz de transição, e o método do histograma com o kernel obtido.