



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

KAREN SABRINA GOMES VIANA

RESULTADO DE INJETIVIDADE PARA APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS
SEMIALGÉBRICAS NO \mathbb{R}^2

FORTALEZA

2023

KAREN SABRINA GOMES VIANA

RESULTADO DE INJETIVIDADE PARA APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS
SEMIALGÉBRICAS NO \mathbb{R}^2

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Teoria das Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

Coorientador: Prof. Dr. Filipe Balduino Pires Fernandes.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V667r Viana, Karen Sabrina Gomes.
Resultado de injetividade para aplicações diferenciáveis semialgébricas no \mathbb{R}^2 / Karen Sabrina Gomes
Viana. – 2023.
60 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

Coorientação: Prof. Dr. Filipe Balduino Pires Fernandes.

1. Injetividade. 2. Meia componente de Reeb. 3. Folheações (Matemática). 4. Conjuntos semialgébricos. I. Título.

CDD 510

KAREN SABRINA GOMES VIANA

RESULTADO DE INJETIVIDADE PARA APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS
SEMIALGÉBRICAS NO \mathbb{R}^2

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Teoria das Singularidades.

Aprovada em: 03/08/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Filipe Balduino Pires Fernandes (Coorientador)
Universidade do Distrito Federal Professor Jorge Amaury
Maia Nunes (UnDF)

Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Ceará (IFCE)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que possibilitou que eu chegasse até aqui e todos os dias esteve presente me assegurando de que não estou sozinha.

Ao Prof. Dr. Alexandre Fernandes, pela excelente orientação e acompanhamento durante a graduação e o mestrado, e ao Prof. Dr. Filipe Fernandes, pelas sugestões e pelo conhecimento compartilhado.

Ao Prof. Dr. Euripedes Carvalho, participante da banca examinadora, pelo tempo doado e pelas valiosas colaborações.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC por todo conhecimento partilhado.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas, em especial à Jaciane e Vinícius, pelos cafés da tarde, que serviam para descansar a mente e conversar sobre as coisas da vida.

Ao Gabriel Taleires, meu namorado, por todo apoio e companheirismo durante os anos de mestrado e acalento nos momentos bons e ruins.

À Ireuda Gomes, ao Elvis Coelho e ao Pedro Coelho que estiveram sempre me apoiando e pelos almoços de domingo em família que recarregavam as forças para a semana de estudo.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que mais uma etapa fosse concluída e estiveram de alguma forma presente durante esses anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino” (Freire, 1996, p.14)

RESUMO

A conjectura de Chamberland mostrada no artigo “A Mountain Pass to the Jacobian Conjecture”, em 1998, afirma que se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 , tal que para algum $\varepsilon > 0$, o conjunto dos autovalores complexos de sua derivada não intersecta com o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$, então F é injetiva. Neste trabalho, abordamos o artigo “Global Asymptotic Stability for Differentiable Vector Fields of \mathbb{R}^2 ”, dos autores Alexandre Fernandes, Carlos Gutierrez e Roland Rabanal em 2004, que demonstra a Conjectura de Chamberland para aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^2 . Mais especificamente, fazemos uma releitura da demonstração do Resultado de Injetividade apresentada neste artigo, que afirma que, dado uma aplicação diferenciável F em \mathbb{R}^2 e um $\varepsilon > 0$, se o conjunto dos autovalores complexos de sua derivada não intersecta com o intervalo $[0, \varepsilon)$ então conclui-se que F é injetiva; adicionando a ela a hipótese de que a aplicação seja semialgébrica, o que nos permitiu obter implicações significativas a partir da exposição original, utilizando alguns artifícios que os conjuntos e as funções semialgébricas nos permitem utilizar.

Palavras-chave: injetividade; meia componente de Reeb; folheações (matemática); conjuntos semialgébricos.

ABSTRACT

The Chamberland conjecture, presented in the article “A Mountain Pass to the Jacobian Conjecture” in 1998, states that if $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a C^1 mapping such that for some $\varepsilon > 0$, the set of complex eigenvalues of its derivative does not intersect with the set $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$, then F is injective. In this work, we address the article “Global Asymptotic Stability for Differentiable Vector Fields of \mathbb{R}^2 ”, by authors Alexandre Fernandes, Carlos Gutierrez, and Roland Rabanal in 2004, which proves the Chamberland conjecture for differentiable mappings in \mathbb{R}^2 . More specifically, we provide a reinterpretation of the proof of the Injectivity Result presented in this article, which states that given a differentiable mapping F in \mathbb{R}^2 and $\varepsilon > 0$, if the set of complex eigenvalues of its derivative does not intersect with the interval $[0, \varepsilon)$, then it follows that F is injective. Additionally, we introduce the hypothesis that the mapping is semialgebraic, which allows us to derive significant implications from the original exposition, utilizing certain techniques made possible by semialgebraic sets and functions.

Keywords: injectivity; half-Reeb component; foliations (mathematics); semialgebraic sets.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Folheação	24
Figura 2 – Placa e folha em uma folheação.	25
Figura 3 – Forma local das submersões.	26
Figura 4 – Gráfico de α	27
Figura 5 – Folheação de Reeb	27
Figura 6 – Folheação de Reeb do Cilindro	28
Figura 7 – Lema da Trivialização Global	29
Figura 8 – Ponto de: 1-Tangência, 2-Tangência genérica, 3-Transversalidade	31
Figura 9 – Tangência entre curvas $f = 1$ e $g = 1$	32
Figura 10 – Folhas tangentes e transversais	32
Figura 11 – Ponto de tangência	33
Figura 12 – Meia componente de Reeb	34
Figura 13 – Teorema de Cernavskii	35
Figura 14 – f e g restritas à L	36
Figura 15 – Folhas distintas	37
Figura 16 – Tangência finita entre Γ e $\mathcal{F}(f)$	39
Figura 17 – Γ transversal a α_1 em mais de um ponto	39
Figura 18 – Vizinhança tubular longa de α	40
Figura 19 – α' com menor tangência que γ_1	41
Figura 20 – Vizinhança tubular longa da curva α que tangência Γ no ponto r	41
Figura 21 – α' com menor número de tangência que α	42
Figura 22 – Arcos $[x, T(x)]_f$ ligando x a $T(x)$	43
Figura 23 – Homeomorfismo entre \mathcal{A} e \mathcal{B}	44
Figura 24 – Meia componente de Reeb composta por α_1 , α_3 e Γ	45
Figura 25 – $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$	45
Figura 26 – Arco ligando p e $T(p)$ com tangência em $T(p)$	46
Figura 27 – Vizinhança tubular longa entre p_1 e p_2	47
Figura 28 – Curva ligando p' e q'	47
Figura 29 – Γ' com menos tangência que Γ	48
Figura 30 – McR formada por $\Gamma_{[p, T(p)]_f}$ e componentes conexas de $f = c$ que tocam p e $T(p)$	48

Figura 31 – Função φ	51
Figura 32 – Relação de ordem entre as imagens de f	51
Figura 33 – Rotação de \mathcal{A}	52
Figura 34 – Relação de ordem entre as imagens de f_θ	52
Figura 35 – Meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ dentro de $R_\theta(\mathcal{A})$	53
Figura 36 – Caso exista um arco $T _{f_\theta(-\delta)}$	54
Figura 37 – Meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ contendo $R_\theta(\mathcal{A})$	54
Figura 38 – Meia componente de Reeb \mathcal{A} de $\mathcal{F}(f)$	55
Figura 39 – Gradiente horizontal	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	Conjuntos semialgébricos	13
2.2	Definições e teoremas clássicos de análise no \mathbb{R}^n	19
2.3	Variedades diferenciáveis	20
2.4	Folheações	23
3	RESULTADO PARCIAL DE INJETIVIDADE	30
3.1	Meia componente de Reeb	30
3.2	Teorema de Cernavskii	34
3.3	Existência e rotação da meia componente de Reeb	37
3.4	Resultado parcial de injetividade	55
4	RESULTADO DE INJETIVIDADE GLOBAL	59
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

A Conjectura Jacobiana é uma hipótese matemática formulada por Ott-Heinrich Keller (1939). Ela afirma que se uma aplicação polinomial sob um corpo de característica zero possui o determinante da matriz jacobiana constante não nulo, então essa aplicação é invertível e sua inversa é polinomial. A Conjectura Jacobiana é de grande importância na teoria dos polinômios e sistemas dinâmicos, estando relacionada a problemas fundamentais na teoria dos números, geometria algébrica e álgebra comutativa. Apesar de sua importância, a Conjectura Jacobiana permanece não resolvida, sendo considerada um dos problemas abertos mais desafiadores na matemática contemporânea e está presente na lista dos dezoito problemas de Smale. No entanto, ao longo dos anos, diversos matemáticos têm feito contribuições significativas para o entendimento e estudo dessa conjectura, resultando em avanços parciais e resultados relacionados, sendo o teorema abordado nessa dissertação um deles.

Outra consequência da conjectura acima, é a Conjectura de Chamberland (1994), Fessler (1995) que afirma que se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 , tal que para algum $\varepsilon > 0$, o conjunto dos autovalores complexos de sua derivada não intersecta com o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}$, então F é injetiva. No artigo de Fernandes, Gutierrez e Rabanal (2004) é provada a Conjectura de Chamberland no plano, porém ainda mais forte, por ser necessário apenas que a aplicação F seja diferenciável e que dado $\varepsilon > 0$ o conjunto dos autovalores complexos de sua derivada, denotada por $Spec(F)$, não intersecte com o intervalo $[0, \varepsilon)$ para que F seja injetiva. Esse teorema implica no resultado de injetividade de Cobo, Gutierrez e Llibre (2002) que requer que F seja de classe \mathcal{C}^1 e que a existência de $\varepsilon > 0$ tal que $Spec(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, mas não implica na Conjectura Jacobiana de Keller real bidimensional, pois dada a aplicação $F(x, y) = (-y, x + y^n)$, para n natural ímpar, a derivada da matriz Jacobiana de F é igual a 1 e seu espectro é igual a $\mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Outra curiosidade sobre esse teorema é que se fosse considerado apenas que $0 \notin Spec(F)$, não valeria a afirmação, mesmo que fosse para polinômios, como se pode observar no contraexemplo dado por Pinchuck (1994).

O objetivo central dessa dissertação é demonstrar o resultado de injetividade apresentado no artigo Fernandes, Gutierrez e Rabanal (2004) adicionando a hipótese de que a aplicação seja semialgébrica. Mesmo sabendo que o resultado para aplicações diferenciáveis é mais forte e mais geral, o resultado para aplicações semialgébricas continua sendo muito importante e apresenta a possibilidade de tornar a demonstração de melhor entendimento, tendo em vista que as funções semialgébricas nos trazem propriedades que facilitam grande parte das demonstrações

do teorema em questão.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro capítulo deste trabalho destinamos para alguns conceitos importantes para a compreensão da demonstração do teorema em questão, sendo dividido da seguinte forma: na primeira seção apresentamos alguns conceitos introdutórios sobre conjuntos semialgêbricos, que podem ser definidos como união de raízes de igualdade e desigualdade de polinômios; e funções semialgêbricas, as quais são funções cujos gráficos são conjuntos semialgêbricos. Na segunda seção apresentamos definições e teoremas importantes de análise, como o Teorema da Aplicação Inversa e a Forma Local das Submersões. Na terceira seção, trazemos algumas definições para apresentar o conceito de variedades diferenciáveis e de Folheações, sendo, este último, tema da última seção deste capítulo.

O segundo capítulo apresenta quatro seções, sendo a primeira dedicada a trazer conceitos de tangência entre curvas e apresentar a definição de meia componente de Reeb. A segunda sessão é de suma importância para o nosso trabalho, uma vez que nela apresentamos o Teorema de Cernaviskii com seus corolários que serão bastante utilizados na seção seguinte, onde são demonstradas duas proposições que serão os pilares para a demonstração do teorema principal. A primeira nos diz que dada uma aplicação diferenciável e semialgêbrica $F = (f, g)$ no \mathbb{R}^2 tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$, se F não é injetiva, então as folheações definidas pelas curvas de nível de f e g possuem meias componentes de Reeb. A segunda, nas mesmas condições da hipótese da primeira, prova que se uma meia componente de Reeb de uma das folheações tiver a projeção na primeira coordenada limitada, podemos rotacionar essa meia componente de Reeb e obter uma meia componente da aplicação F rotacionada, cuja projeção é ilimitada. A última seção deste capítulo é destinada para a demonstração de um resultado parcial de injetividade que diz que dada uma aplicação diferenciável e semialgêbrica $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para um $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, então F é injetiva.

Por fim, no último capítulo, apresentamos o teorema principal, que diferencia do anterior no fato de que só é necessário que o conjunto dos autovalores complexos da derivada de F não esteja no intervalo $[0, \varepsilon)$ para que F seja injetiva.

2 PRELIMINARES

2.1 Conjuntos semialgébricos

Nessa seção serão apresentados alguns conceitos importantes acerca de conjuntos semialgébricos, que se apresentam como subconjuntos do \mathbb{R}^n que satisfazem uma condição booleana de equações e inequações de polinômios com coeficientes reais. Como também acerca de funções cujos gráficos são conjuntos semialgébricos, conhecidas como funções semialgébricas. As notas dessa seção têm como referência os livros de Coste (2000), Benedetti e Risler (1990).

Definição 2.1.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito semialgébrico se existem polinômios $P_{i,j} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tais que:*

$$X = \bigcup_{i=1}^r \bigcap_{j=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n; P_{i,j} s_{i,j} 0\}, s_{i,j} \in \{<, =, >\} \quad (*)$$

Observe que todo conjunto semialgébrico do \mathbb{R}^n pode ser escrito como uma união finita de conjuntos semialgébricos da forma:

$$\{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = \dots = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_l(x) > 0\},$$

onde $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l$ são elementos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

De fato, se X é um conjunto semialgébrico, então pela definição segue que existem polinômios $P_{i,j}$ em $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tais que vale (*). Nos casos de $s_{i,j} \in \{<\}$, ou seja $P_{i,j} < 0$, pode-se tomar um polinômio $Q_{i,j} = -P_{i,j}$ e nos casos de $s_{i,j} \in \{>\}$, ou seja $P_{i,j} > 0$, pode-se tomar um polinômio $Q_{i,j} = P_{i,j}$. Portanto, a menos de uma reordenação de índices e renomeação de polinômios, temos que $X = \bigcup_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = \dots = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_l(x) > 0\}$.

Exemplos:

1. (Conjuntos algébricos) Um subconjunto de \mathbb{R}^n é dito algébrico quando ele é o conjunto dos zeros de um conjunto finito de polinômios em \mathbb{R} . Portanto, os conjuntos algébricos são semialgébricos.
2. Conjuntos semialgébricos em \mathbb{R} são uniões finitas de pontos ou intervalos.

De fato, observe que os pontos são conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}; x - a = 0\}$ e os intervalos da forma $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x - a > 0\}$ ou $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x - a < 0\}$ ou $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; x - a > 0, x - b < 0\}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ cuja união é um conjunto semialgébrico. Por outro lado, se $X \subset \mathbb{R}$ é semialgébrico, X é a união finita de soluções de igualdades e

desigualdades polinomiais. As soluções de igualdades nos reais constituem um conjunto finito de pontos e as desigualdades um conjunto finito de intervalos abertos.

Proposição 2.1.1. *A coleção de conjuntos semialgébricos é a menor coleção de conjuntos que contém $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ sendo fechada por uniões finitas, interseções finitas e complementares.*

Demonstração. Temos que a coleção S dos conjuntos semialgébricos do \mathbb{R}^n contém $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ pela definição. Ela é fechada para união e interseção finita: de fato, sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos quaisquer, logo podem ser representados pela união finita de conjuntos da seguinte forma: $\{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = \dots = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_l(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n; R_1(x) = \dots = R_m(x) = 0, S_1(x) > 0, \dots, S_t(x) > 0\}$, respectivamente, onde $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l$ são elementos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e $R_1, \dots, R_m, S_1, \dots, S_t$ são elementos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

No caso da união, a justificativa é simples, pois como cada um dos conjuntos semialgébricos X e Y é composto pela união finita (de cardinalidade a e b , respectivamente) de conjuntos escritos por igualdades e desigualdades de polinômios, temos que unindo X e Y teremos uma união finita (de cardinalidade $a + b$) de conjuntos escritos por igualdades e desigualdades de polinômios. Agora, no caso da interseção, temos que $X \cap Y$ é a união finita de conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = \dots = P_{k+l}(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_{m+t}(x) > 0\}$, $P_1, \dots, P_{k+l}, Q_1, \dots, Q_{m+t}$ são elementos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ é um conjunto semialgébrico e, portanto, pertence à coleção S .

Provamos para a união e interseção de dois conjuntos, mas o caso para n é análogo.

No caso do complementar, se $X = \bigcup_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = \dots = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_l(x) > 0\}$, o seu complementar é dado por $\mathbb{R}^n \setminus X = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) \neq 0, \dots, P_k(x) \neq 0, Q_1(x) \leq 0, \dots, Q_l(x) \leq 0\}$, observe que $\{x \in \mathbb{R}^n; P_i(x) \neq 0\}$ é equivalente a $\{x \in \mathbb{R}^n; P_i(x) > 0\}$ ou $\{x \in \mathbb{R}^n; P_i(x) < 0\}$, se $P_i(x) < 0$ pode-se substituir pelo polinômio $R_i = -P_i$, no caso positivo $R_i = P_i$, pode-se fazer o mesmo para Q_i . Assim, temos que o complementar é a interseção finita de conjuntos semialgébricos e como a coleção S é fechada pela interseção, o complementar está em S .

Agora nos falta provar que S é a menor família com essas propriedades. Seja \mathcal{F} uma família qualquer de subconjuntos do \mathbb{R}^n que contém todos os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ sendo fechados por uniões e interseções finitas e por complementares. Provaremos que a coleção de conjuntos semialgébricos S está contido em \mathcal{F} , logo se intersectarmos todas essas famílias \mathcal{F} teremos que S está na interseção. Portanto, S será a menor tal que valem as propriedades acima. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ um elemento de \mathcal{F} então $\mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq 0\}$ tam-

bém pertence à mesma família, por ela ser fechada em relação ao complementar. Tome agora $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ como sendo $g = -f$, o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) > 0\}$ é um elemento de \mathcal{F} e assim $\mathbb{R}^n \setminus B = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) = -f(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq 0\}$ é um elemento da família em questão. Como \mathcal{F} é fechada por interseções finitas, segue que o conjunto $C = (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$ é elemento dessa família e, portanto, temos que \mathcal{F} contém todos os conjuntos das formas $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$, $\forall f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, logo, S está contido em \mathcal{F} qualquer e, portanto, está contido na interseção. Como queríamos demonstrar. \square

Proposição 2.1.2. *Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são semialgêbricos, então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é semialgêbrico*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}(x)$ a combinação booleana de igualdades e desigualdades polinomiais em $x \in X$, portanto, sendo X e Y conjuntos semialgêbricos podemos escrevê-los da seguinte forma: $X = \{x \in \mathbb{R}^m; \mathcal{B}(x)\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{R}^n; \mathcal{B}(y)\}$. Se considerarmos os polinômios como elementos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$, teremos que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}; \mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{B}(y)\}$ é um conjunto semialgêbrico. \square

Definição 2.1.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgêbrico. Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada de semialgêbrica se seu gráfico $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; x \in X \wedge y = f(x)\}$ é semialgêbrico.*

Definição 2.1.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é compatível com X se $S \cap X = \emptyset$ ou $S \subset X$.*

Teorema 2.1.1 (Teorema da Decomposição Cilíndrica). *Seja $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com coordenadas (x, t) tal que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um subconjunto semialgêbrico. Então,*

- a) *X possui um número finito de componentes conexas e cada componente é semialgêbrica;*
- b) *Existe uma partição finita \mathcal{P} de \mathbb{R}^n em subconjuntos semialgêbricos conexas tal que para cada $A \in \mathcal{P}$, tem-se que $A \times \mathbb{R} \subset X$ ou existem funções semialgêbricas e contínuas*

$$\xi_1^A < \dots < \xi_{m(A)}^A : A \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que, todos os conjuntos das formas:

– *Faixas associadas ao A :*

$$(\xi_i^A, \xi_{i+1}^A) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \xi_i^A(x) < t < \xi_{i+1}^A(x)\}; i = 1, \dots, m(A)$$

com $\xi_0 = -\infty$ e $\xi_{m(A)+1} = \infty$,

– Gráficos associados ao A :

$$\Gamma(\xi_i^A) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; t = \xi_i^A(x)\}; i = 1, \dots, m(A)$$

definem uma partição de \mathbb{R}^{n+1} em subconjuntos semialgêbricos compatíveis com X .

A prova do Teorema da Decomposição Cilíndrica pode ser encontrada no livro de Benedetti e Risler (1990).

Corolário 2.1.1. *Todo conjunto semialgêbrico é localmente conexo.*

Demonstração. Seja X um subconjunto semialgêbrico do \mathbb{R}^n e $x_0 \in X$. Como $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$ com $r > 0$ é semialgêbrico então $X_r = B(x_0, r) \cap X$ é semialgêbrico e pelo Teorema da Decomposição Cilíndrica X_r tem um número finito de componentes conexas e cada uma dessas componentes são abertas em X e contém x_0 . \square

Teorema 2.1.2. *Seja $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção natural. Se $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é semialgêbrico, então $\Pi(V)$ semialgêbrico.*

Demonstração. Provaremos por indução em m .

Para $m = 1$, temos $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e pelo teorema da decomposição cilíndrica \mathcal{P} é uma partição finita de \mathbb{R}^n em componentes conexas que são semialgêbricas e V tem um número finito de componentes conexas, sabendo que função contínua leva conjunto conexo em conjunto conexo, $\Pi(V)$ é a união de algumas das componentes conexas de \mathbb{R}^n , portanto $\Pi(V)$ é semialgêbrico.

Agora, admitindo que o teorema vale para m , provaremos que vale para $m + 1$.

De fato, $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode escrita como $\Pi = \Pi_2 \circ \Pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $\Pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pelo caso base, $\Pi_1(V)$ é semialgêbrico e pela hipótese de indução $\Pi_2 \circ \Pi_1(V)$ é semialgêbrico. \square

Teorema 2.1.3. *(Tarski-Seidenberg) Sejam X e Y conjuntos semialgêbricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função semialgêbrica. Então $f(X)$ é um conjunto semialgêbrico.*

Demonstração. Como f é uma aplicação semialgêbrica o seu gráfico Γ_f é um conjunto semialgêbrico. Agora, considere $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que $f(X) = \Pi((X \times Y) \cap \Gamma_f)$ é a projeção natural de um conjunto semialgêbrico e, portanto, é semialgêbrico, pelo teorema anterior. \square

Proposição 2.1.3. *Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ são conjuntos semialgêbricos e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções semialgêbricas. Então:*

- i) A composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ é semialgébrica;
- ii) A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é semialgébrica se, e somente se, cada coordenada f_i de f também o é;
- iii) $h : X \rightarrow Y$ é semialgébrico $\iff g \circ h \in S(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é semialgébrica}\}, \forall g \in S(Y)$;

Demonstração. i) Pelo teorema de Tarski-Seidenberg, temos que $f(X)$ é semialgébrico e assim $g(f(X))$ é semialgébrico;

- ii) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação semialgébrica, então seu gráfico $\Gamma_f = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in X \times Y; y_i = f_i(X)\}$ é um conjunto semialgébrico. Cada coordenada de f pode ser escrita como $f_i(X) = \Pi_i(\Gamma_f)$, onde Π_i é a projeção na $(n - i)$ — ésima última coordenada de Γ_f , logo pelo Teorema de Tarski- Seidenberg $f_i(X)$ é semialgébrico; No caso das funções coordenadas serem semialgébricas, temos que $\Gamma_{f_i} = \{(x, y_i) \in X \times \mathbb{R}; y_i = f_i(x)\}$ é semialgébrico. Logo, utilizando que cartesiano de conjuntos semialgébrico é semialgébrico e o teorema de Tarski-Seidenberg, $\Gamma_f = X \times \Pi_2(\Gamma_{f_1}) \times \Pi_2(\Gamma_{f_2}) \times \dots \times \Pi_2(\Gamma_{f_n})$ é um conjunto semialgébrico, e, portanto f é semialgébrica;
- iii) \implies Se h é semialgébrica, então $g \circ h$ é semialgébrica, para todo $g \in S(Y)$.
 \iff Se $g \circ h \in S(X), \forall g \in S(Y)$ então $h_i = \Pi_i \circ h$, é composição de semialgébricas e, portanto, é semialgébrica, logo h é semialgébrica.

□

Fórmula de Primeira Ordem

As fórmulas de primeira ordem são definidas pelas seguintes regras:

1. Se $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, então $P = 0$ e $P > 0$ são fórmulas de primeira ordem;
2. Se ϕ e ψ são fórmulas de primeira ordem, então $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ e $\neg\phi$ são fórmulas de primeira ordem;
3. Se ϕ é uma fórmula de primeira ordem e X é uma variável real, então $\exists X\phi$ e $\forall X\phi$ são fórmulas de primeira ordem.

As fórmulas obtidas usando apenas 1 e 2 são chamadas de **Fórmulas livres de quantificadores**.

Na verdade, pode-se observar que conjuntos semialgébricos são subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe uma fórmula livres de quantificadores ϕ tal que

$$(x_1, \dots, x_n) \in S \iff \phi(x_1, \dots, x_n).$$

Teorema 2.1.4 (Teorema de Tarski-Seidenberg — Segunda Versão). *Se $\phi(X_1, \dots, X_n)$ é uma fórmula de primeira ordem, então o subconjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \phi(x_1, \dots, x_n)\}$ é semialgébrico.*

Demonstração. Como as fórmulas livres de quantificadores definem conjuntos semialgébricos, só é preciso provar que:

Afirmção: Se a fórmula ϕ define um conjunto semialgébrico então $\exists X \phi$ e $\forall X \phi$ também definem conjuntos semialgébricos.

De fato, observe que

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \exists x_{n+1} \phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\}$$

é imagem de um conjunto semialgébrico

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\}$$

pela projeção linear $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$, portanto, pela primeira versão de Tarski-Seidenberg, temos que $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \exists x_{n+1} \phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\}$ é semialgébrico. Como $\forall X \phi$ é equivalente a $\neg \exists X \neg \phi$ temos que ele também é um conjunto semialgébrico. \square

Proposição 2.1.4. 1. *Se $f, g \in S(x) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é semialgébrica}\}$, então $\min(f, g)$ e $\max(f, g)$ são semialgébricas. Em particular, $\|f(x)\|^2$ é semialgébrica;*
2. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ semialgébrica, com U aberto semialgébrico. Se existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ então ela é semialgébrica.*

Demonstração. 1. O gráfico do mínimo pode ser escrito da seguinte maneira: $\Gamma_{\min} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y - h(x) = 0 \wedge ((h(x) - f(x) = 0 \wedge (g(x) - f(x) > 0 \vee g(x) - f(x) = 0)) \vee (h(x) - g(x) = 0 \wedge (f(x) - g(x) > 0 \vee f(x) - g(x) = 0)))\}$ e é claramente um conjunto semialgébrico. No caso do máximo temos que a justificativa é análoga.

A aplicação $\|f(x)\|^2$ é semialgébrica, pois $\|f(x)\| = \max\{f(x), -f(x)\}$ que já sabemos que é semialgébrico.

2. O gráfico de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{ (x, y) \in U \times \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in (0, \delta), \left\| y - \frac{f(p - te_i) - f(p)}{t} \right\|^2 < \varepsilon \right\}.$$

Pela segunda versão do Teorema de Tarski-Seidenberg, esse conjunto é semialgébrico. \square

2.2 Definições e teoremas clássicos de análise no \mathbb{R}^n

- Definição 2.2.1.** 1. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, chama-se uma **submersão** quando, para todo $x \in U$, sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva.
2. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ chama-se **imersão** quando para cada $x \in U$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é uma transformação linear injetiva.
3. Seja U um aberto de \mathbb{R}^n . Uma imersão, de classe C^k , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se um **mergulho** C^k de U em \mathbb{R}^n , quando φ é um homeomorfismo de U sobre $\varphi(U)$. Dizemos também que φ é uma parametrização C^k e dimensão m do conjunto $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$.
4. Uma **superfície** de dimensão m do \mathbb{R}^n (C^k) é um subconjunto não vazio $M = M^m \subset \mathbb{R}^n$ no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta U dotada de uma parametrização C^k e dimensão m .
5. Sejam U, V abertos do espaço euclidiano. Uma bijeção $f : U \rightarrow V$ chama-se um **difeomorfismo** de U sobre V quando é diferenciável e sua inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também o é.

Teorema 2.2.1 (Forma Local das submersões). Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ uma aplicação de classe C^k , ($k \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ em \mathbb{R}^n . Se, em um ponto $p = (a, b) \in U$, a matriz $[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p)]$ ($i, j = 1, \dots, n$) é invertível, então existem abertos $Z \ni p$ em \mathbb{R}^{m+n} , $V \ni a$ em \mathbb{R}^m , $W \ni c = f(p)$ em \mathbb{R}^n e um difeomorfismo vertical (a primeira coordenada se mantém fixa) $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe C^k , tal que $f(h(x, w)) = w$ para todo $x \in V$ e todo $w \in W$.

No teorema anterior, a restrição de f ao aberto Z é uma submersão.

Teorema 2.2.2. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, (onde $1 \leq k \leq \infty$). Se para um ponto $a \in U$, $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então existe uma vizinhança W de a tal que $f|_W$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

As provas dos teoremas e algumas outras noções de análise podem ser encontradas no livro do Lima (2012).

2.3 Variedades diferenciáveis

Essa seção é dedicada à apresentação de definições acerca de Variedades Diferenciáveis para podermos entender melhor o conceito de Folheações que será apresentado mais a frente. Essa seção teve como referência o livro de Variedades Diferenciáveis de Lima (2018).

Definição 2.3.1. *Seja M um espaço topológico, dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. M é um espaço de Hausdorff.
2. Existe uma base enumerável para a topologia de M .
3. M é localmente Euclidiano de dimensão n .

Observação:

- M ser Hausdorff significa que quaisquer dois pontos de M possuem vizinhanças disjuntas.
- Dizemos que M possui base enumerável para sua topologia se M pode ser coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos abertos de M .
- M é localmente Euclidiano de dimensão n se dado $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$.

Definição 2.3.2. *Seja M uma variedade topológica. Um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a dimensão de x , com $x(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p))$ para cada $p \in U$ e as $x_i(p)$ são chamadas de coordenadas de p no sistema x .*

Um atlas de dimensão m sobre uma variedade topológica M é uma coleção \mathcal{U} de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathcal{U}$ são chamados as vizinhanças coordenadas de \mathcal{U} .

Exemplo 2.3.1. *Seja $\phi : U_0 \rightarrow U$ uma parametrização do subconjunto aberto U , contido na superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$. O homeomorfismo inverso $x = \phi^{-1} : U \rightarrow U_0$ é um sistema de coordenadas locais em M . Esses sistemas de coordenadas formam um atlas de dimensão m sobre M .*

Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ em uma variedade topológica M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x_i(p)$ e $y_i(p)$ em x e y , respectivamente.

A correspondência

$$(x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p)) \implies (y_1(p), y_2(p), \dots, y_m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ chamado de *mudança de coordenadas*.

Um atlas \mathcal{U} sobre uma variedade topológica M diz-se *diferenciável* de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) se todas as mudanças de coordenadas ϕ_{xy} , $x, y \in \mathcal{U}$ são aplicações de classe \mathcal{C}^k .

Seja \mathcal{U} um atlas de dimensão m e classe \mathcal{C}^k em uma variedade topológica M . Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M diz-se *admissível* relativamente ao atlas \mathcal{U} se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathcal{U} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas ϕ_{xz} e ϕ_{zx} são de classe \mathcal{C}^k . Ou seja, se $\mathcal{U} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe \mathcal{C}^k em M .

Um atlas \mathcal{U} de dimensão m e classe \mathcal{C}^k , sobre M , diz-se *maximal* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais admissíveis em relação a \mathcal{U} .

Observação: (Critério de compatibilidade)

Duas cartas (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) são ditas \mathcal{C}^k *compatíveis* se $U_i \cap U_j = \emptyset$ (trivialmente compatíveis) ou, no caso $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se:

- $\phi_i(U_i \cap U_j)$ e $\phi_j(U_i \cap U_j)$ são abertos em \mathbb{R}^m ;
- as mudanças de coordenadas ϕ_{ij} e ϕ_{ji} são de classe \mathcal{C}^k .

Uma *Estrutura Diferenciável* é um atlas maximal baseado neste critério de compatibilidade.

Uma *Variedade Diferenciável*, de dimensão m e classe \mathcal{C}^k é um par ordenado (M, \mathcal{U}) , onde M é uma variedade diferenciável e \mathcal{U} é um atlas máximo de dimensão m e classe \mathcal{C}^k sobre M .

Exemplo 2.3.2. Toda superfície de dimensão m e classe \mathcal{C}^k , $M^m \subset \mathbb{R}^m$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe \mathcal{C}^k , com o atlas \mathcal{U} máximo formado pelos sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$, de classe \mathcal{C}^k .

De fato, observe que toda superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica de dimensão m .

De fato, \mathbb{R}^n é um espaço métrico e todo subconjunto de um espaço métrico é métrico, logo

$M^m \subset \mathbb{R}^m$ é métrico, e como todo espaço métrico é espaço de Hausdorff e possui base enumerável, temos que M^m é um espaço de Hausdorff e tem base enumerável.

Como vimos acima, os sistemas de coordenadas que são os inversos das parametrizações em uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ formam um atlas de dimensão m sobre M . Logo, sejam $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ sistemas de coordenadas de \mathcal{U} e $\phi_{xy} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ sua mudança de coordenadas com x e y inversos, respectivamente, das parametrizações $\phi : U_0 \rightarrow V_0$ e $\psi : V_0 \rightarrow V$ de classe \mathcal{C}^k . Como $\psi : V_0 \rightarrow V$ é uma imersão de classe \mathcal{C}^k , como consequência da forma local das imersões, para cada $p \in V$ existe um aberto Z em \mathbb{R}^m que o contém e uma aplicação \mathcal{C}^k , $g : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|(V \cap Z) = \psi^{-1}$. Seja p um ponto arbitrário de $\phi(U_0) \subset V$, então $\psi^{-1} \circ \phi = g \circ \phi : \phi^{-1}((U_0) \cap Z) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Resulta então que $\psi^{-1} \circ \phi$ é de classe \mathcal{C}^k , pois $g \circ \phi$ são de classe \mathcal{C}^k . Portanto, o atlas \mathcal{U} é de classe \mathcal{C}^k pois suas mudanças de coordenadas são de classe \mathcal{C}^k .

Agora, para provar a maximalidade de \mathcal{U} , seja $z : W \rightarrow z(W) \subset \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas admissível em relação a \mathcal{U} . Então $\psi = z^{-1} : z(W) \rightarrow W$ é um homeomorfismo. Para cada $p \in W$ existe uma parametrização $\phi : U_0 \rightarrow U$, $p \in U \subset M$, de classe \mathcal{C}^k . Como z é admissível, $\phi^{-1} \circ \psi : z(U \cap W) \rightarrow \phi^{-1}(U \cap W)$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k . Portanto, $\phi \circ (\phi^{-1} \circ \psi) : z(U \cap W) \rightarrow U \cap W$ é uma parametrização de classe \mathcal{C}^k de uma vizinhança de p . Como $p \in W$ é arbitrário, segue-se que $\psi = z^{-1}$ é uma parametrização de classe \mathcal{C}^k , isto é, $z \in \mathcal{U}$. Então \mathcal{U} é máximo.

Exemplo 2.3.3. O conjunto $M = \mathbb{R}^n$ com topologia usual transforma-se em variedade diferenciável quando é munido de um atlas maximal de classe \mathcal{C}^∞ gerado pela carta $(U = \mathbb{R}^n, \phi = id)$, onde id denota a aplicação identidade, que no presente caso é representada por

$$id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto x$$

As coordenadas dos elementos do conjunto $M = \mathbb{R}^n$ nesta carta são denominadas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.3.4. Um subconjunto aberto $M \subset \mathbb{R}^n$ e com estrutura gerada por $(U = M, \phi = id)$ é, também, um exemplo de variedade diferenciável n -dimensional, assim como, no caso de uma variedade diferenciável M^n qualquer, o domínio $U \subset M$ de qualquer carta admissível $\phi : U \rightarrow V$ com a estrutura gerada por esta é uma variedade diferenciável.

2.4 Folheações

Definiremos formalmente mais abaixo, mas intuitivamente falando, uma folheação é uma decomposição de uma variedade em uma união de subvariedades disjuntas e conexas, onde todas as subvariedades possuem mesma dimensão, sendo denominadas folhas da folheação.

O conceito de folheação apareceu pela primeira vez de forma explícita no trabalho de Ehresmann e Reeb (1962), motivado pela questão de existência de campos de vetores completamente integráveis em variedades de três dimensões e hoje é uma área bem desenvolvida da Geometria e ocorre naturalmente em vários contextos, como na Geometria Simplética, nas soluções de Equações Diferenciais e nos Sistemas Integráveis.

Para essa seção utilizamos essencialmente o livro Introdução à teoria das folheações de Camacho e Neto (1977).

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^∞ .

Definição 2.4.1. Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r está definida por uma coleção de cartas locais

$$\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

tal que:

1. $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de M ;
2. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ têm a forma $\phi_{ij}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ e são de classe C^r .

Definição 2.4.2. As componentes conexas de $\phi_i^{-1}(x, y_0)$, para $(x, y_0) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ e y_0 constante são chamadas de placas de U_i . Elas são subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão p .

Para $r \geq 1$ pode-se tomar a seguinte definição equivalente à anterior:

Definição 2.4.3. Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r é dada por:

1. Uma cobertura aberta $\mathbf{U} = \{U_i\}$ de M ;
2. Para cada U_i , tem-se uma submersão $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^p$;
3. Para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tem-se, também, uma função de transição $\phi_{ij} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$, satisfazendo $\phi_j = \phi_{ij} \circ \phi_i$.

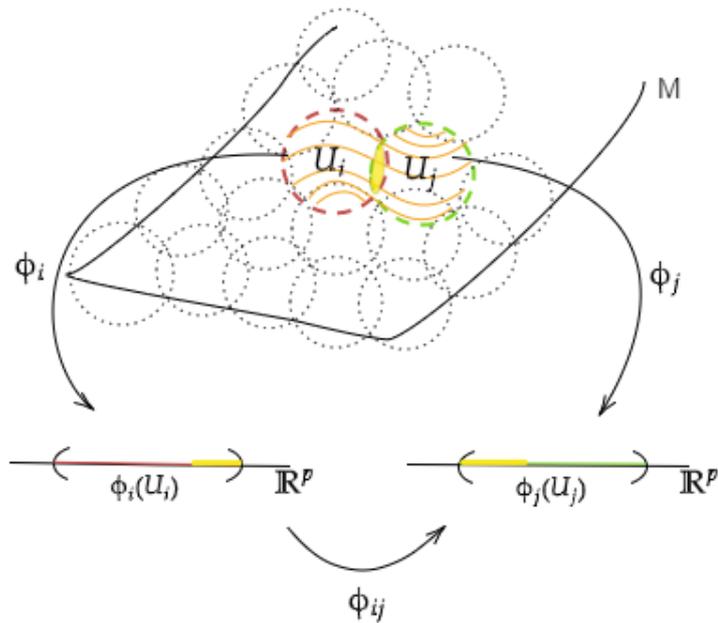
A demonstração da equivalência pode ser encontrada no livro de Camacho e Neto (1977).

Observação: As funções ϕ_{ij} , também chamadas de funções de passagem, são homeomorfismos.

Para $r \geq 1$, elas são, na verdade, difeomorfismos de classe \mathcal{C}^r .

Note que no caso de ϕ_i submersão, temos que $\phi_i^{-1}(x)$ é uma placa, tal que $x \in \mathbb{R}^p$.

Figura 1 – Folheação

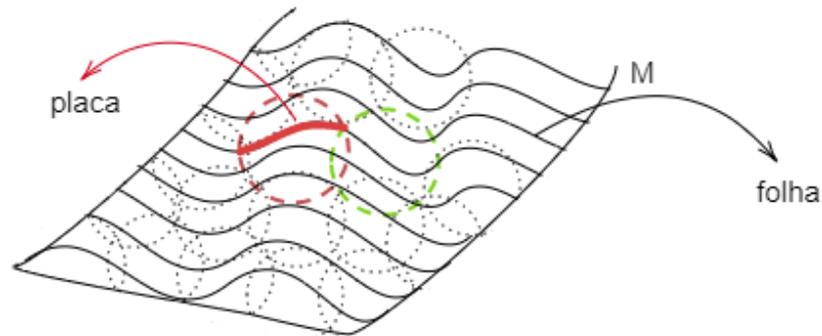


Fonte: elaborada pela autora.

Definição 2.4.4. Uma folha L é um subconjunto conexo dado pela união maximal de placas de \mathcal{F} . Isto é, se L é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap L \neq \emptyset$ então $\alpha \subseteq L$. Logo, toda folha é uma subvariedade de codimensão p e M é a união disjunta dessas folhas de \mathcal{F} .

Observe a seguinte imagem.

Figura 2 – Placa e folha em uma folheação.

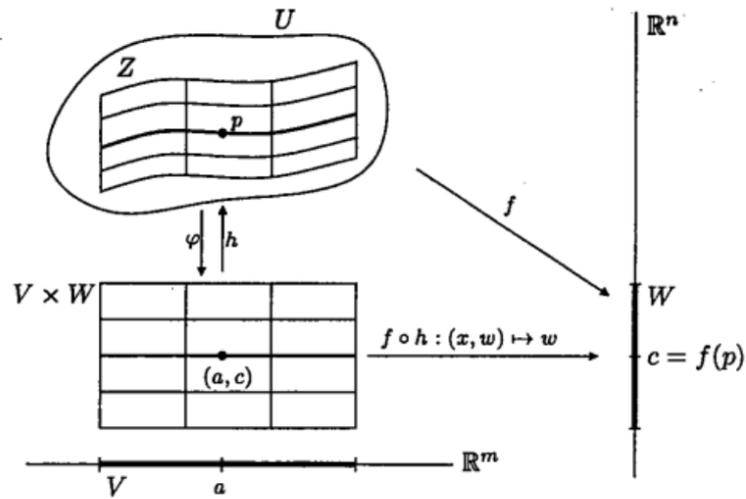


Fonte: elaborada pela autora.

Portanto, de grosso modo, uma folheação é uma divisão de uma variedade M em subvariedades imersas, de codimensão p . A condição de compatibilidade entre ϕ_i e ϕ_j garante que os níveis dessas funções coincidam na interseção e, portanto, temos uma decomposição (não só de U_i , como de $U_i \cup U_j$ e, de modo geral, de M) em subvariedades imersas de codimensão p .

Exemplo 2.4.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $f : M \rightarrow N$ uma submersão qualquer. Pelo teorema da forma local das submersões, as componentes conexas das subvariedades $f^{-1}(c)$, ou seja, das fibras de f definem uma folheação de codimensão n e classe C^r . As folheações associadas a submersões são chamadas de folheações simples e quando as folhas dessas folheações são conexas, elas são chamadas de estritamente simples.*

Figura 3 – Forma local das submersões.

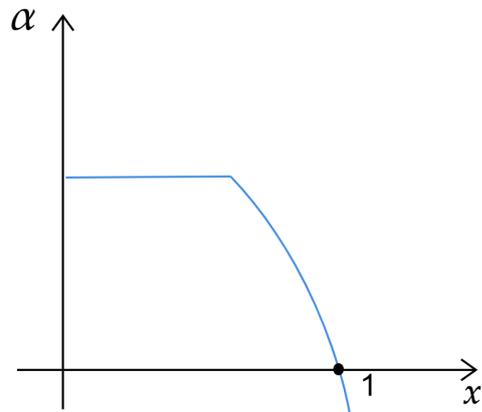


Fonte: Lima (2012).

O exemplo seguinte foi extremamente relevante para o desenvolvimento da teoria das folheações e deu origem ao conceito de Meia Componente de Reeb, conjunto que definiremos mais adiante e que foi fundamental na demonstração do Resultado de Injetividade, tema dessa dissertação.

Exemplo 2.4.2. (Folheação de Reeb) Sejam $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação e $\varepsilon > 0$ tais que

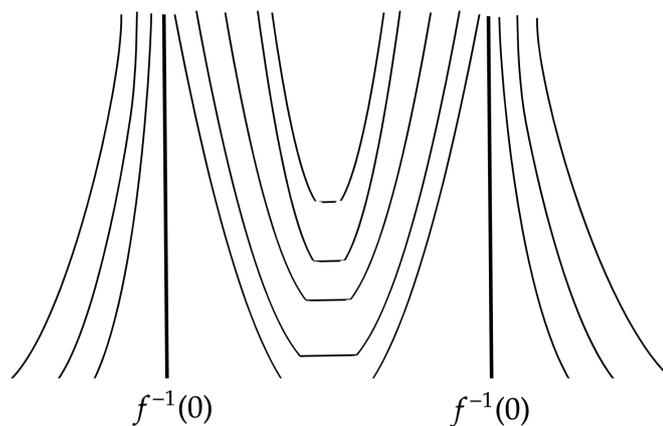
$$\begin{cases} \alpha(x) = 0, & \text{se } x = 1 \\ \alpha(x) = 1, & \text{se } x \in [0, \varepsilon] \\ \alpha'(t) < 0, & \text{se } x > \varepsilon \end{cases}$$

Figura 4 – Gráfico de α 

Fonte: elaborada pela autora.

Considere agora uma submersão $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = \alpha(x^2)e^y$. As curvas de nível de f formam uma folheação de classe C^∞ do \mathbb{R}^2 . Observe que as folhas contidas em $(-1, 1) \times \mathbb{R}$ podem ser parametrizadas por $\phi(x) = (x, \ln \frac{c}{\alpha(x^2)})$, com $x \in (-1, 1)$, $c > 0$ e $f^{-1}(c)$ uma folha. Além disso, $\{-1\} \times \mathbb{R}$ e $\{1\} \times \mathbb{R}$ são duas componentes conexas de $f^{-1}(0)$.

Figura 5 – Folheação de Reeb

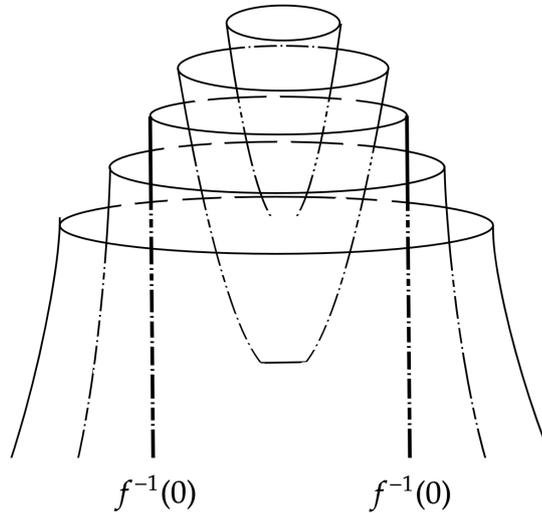


Fonte: elaborada pela autora.

Girando a faixa $|x| \leq 1$ em volta do eixo y e obtemos uma folheação de um cilindro sólido invariante por translação ao longo do eixo y , para obter uma Folheação de Reeb para o

cilindro sólido basta considerar (como aplicação direta no exemplo anterior) $M = \mathbb{R}^3$, $N = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z$, onde $r^2 = x^2 + y^2$.

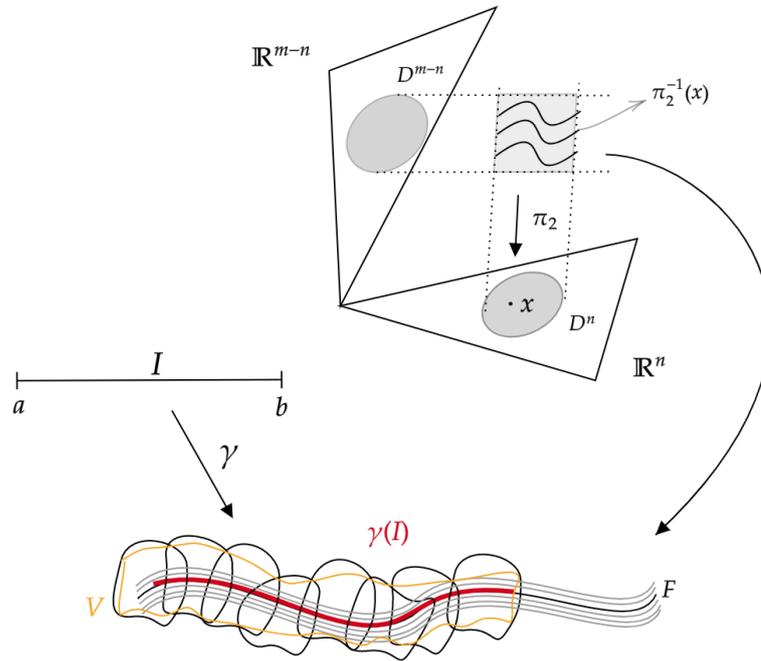
Figura 6 – Folheação de Reeb do Cilindro



Fonte: elaborada pela autora.

Lema 2.4.1. (Lema da Trivialização global) Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^r , com $r \geq 1$ e codimensão n de uma variedade M de dimensão m e D^n o disco unitário em \mathbb{R}^n . Seja $\lambda : I \rightarrow M$, onde $I = [a, b]$, um caminho contínuo e injetivo cuja imagem está contida numa folha F de \mathcal{F} . Então, existe uma vizinhança V contendo $\lambda(I)$ e um difeomorfismo de classe C^r , $h : D^{m-n} \times D^n \rightarrow V$, que leva as folhas de $D^{m-n} \times D^n$ induzidas pela projeção na segunda coordenada $\pi_2 : D^{m-n} \times D^n \rightarrow D^n$ nas folhas de F restritas à V .

Figura 7 – Lema da Trivialização Global



Fonte: elaborada pela autora.

O Lema da Trivialização Global é demonstrado no livro de Camacho e Neto (1977).

Note que, pelo lema anterior, dado um caminho contínuo $\lambda : I \rightarrow M$ cuja imagem está contida numa folha da folheação, pode-se construir uma vizinhança V de $\lambda(I)$ constituída por folhas de \mathcal{F} restritas à V . Observe que há certa semelhança com a definição de vizinhança tubular, portanto, chamamos V de *Vizinhança Tubular Longa* de $\lambda(I)$.

3 RESULTADO PARCIAL DE INJETIVIDADE

Nesse capítulo provaremos a versão parcial do Resultado de Injetividade, mas antes disso, teremos algumas seções introdutórias, para serem apresentadas algumas definições e proposições importantes para a demonstração do teorema.

3.1 Meia componente de Reeb

Definição 3.1.1. *Sejam $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas injetivas de classe \mathcal{C}^0 , tais que $\sigma(0) = \gamma(0) = (0, 0)$. Diz-se que γ é transversal à σ em $\sigma(0) = \gamma(0)$ se existem $\varepsilon > 0$, vizinhanças V e U de $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo $H : V \rightarrow U$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$, tem-se*

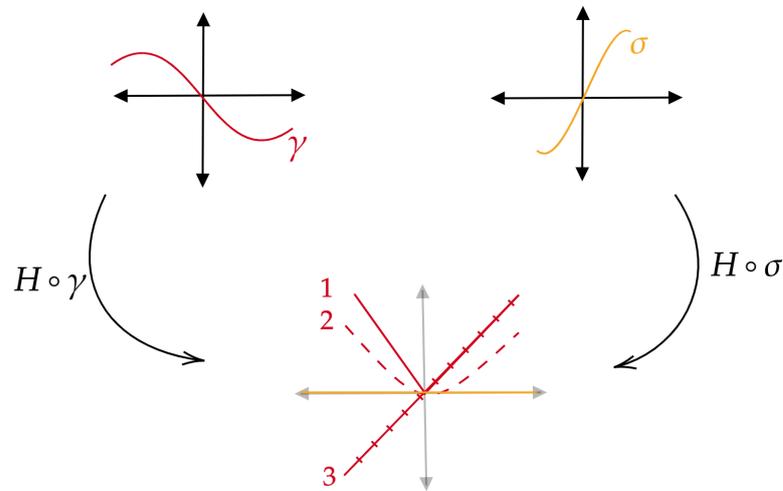
$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \text{ e } H \circ \gamma(t) = (t, t).$$

Definição 3.1.2. *Sejam $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas injetivas de classe \mathcal{C}^0 , tais que $\sigma(0) = \gamma(0) = (0, 0)$. Diz-se que γ é tangente à σ em $\sigma(0) = \gamma(0)$ se existem $\varepsilon > 0$, vizinhanças V e U de $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo $H : V \rightarrow U$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$, tem-se*

$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \text{ e } H \circ \gamma(t) = (t, (\psi(t))),$$

onde $\psi(t) \geq 0$ e $\psi(0) = 0$. Além disso, se for possível tomar $\psi(t) = |t|$, diz-se que a tangência é genérica.

Figura 8 – Ponto de: 1-Tangência, 2-Tangência genérica, 3-Transversalidade



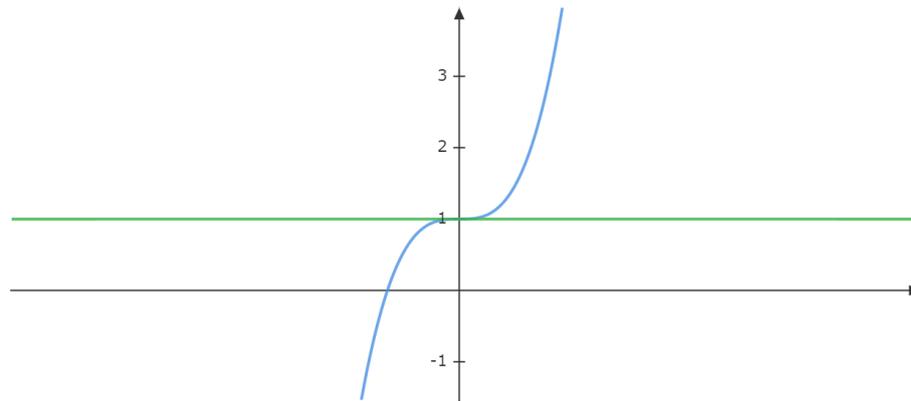
Fonte: elaborada pela autora.

A tangência acima é chamada de *tangência topológica* e refere-se à relação de proximidade entre duas curvas ou objetos geométricos em termos de sua configuração espacial. Mas em termos de derivadas, duas curvas são *tangentes* em dado ponto, se a derivada de suas parametrizações coincidem nesse ponto, ou seja, as curvas estão se movendo na mesma direção e com a mesma taxa de variação em um ponto específico.

Logo, se considerarmos curvas de níveis $f = c$ e $g = d$, com parametrizações α e β , respectivamente, então temos que $\nabla f(\beta(t)) \cdot \beta(t)' = f(\alpha(t)) \cdot \alpha(t)' = 0$ se e somente se $\alpha(t) = \beta(t)$ for um ponto de tangência entre as curvas de nível.

Exemplo 3.1.1. Considere $f = y$ e $g = y - x^3$. Nesse caso não há tangência topológica entre as curvas de nível, mas há tangências em termos de derivadas.

Figura 9 – Tangência entre curvas $f = 1$ e $g = 1$.



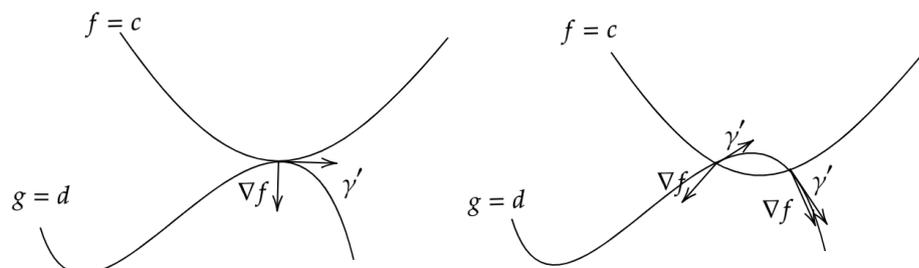
Fonte: elaborada pela autora.

Nesse mesmo contexto, duas curvas são consideradas *transversais* quando elas se intersectam de forma não tangente, ou seja, quando, em cada ponto de interseção, suas derivadas são linearmente independentes.

Definição 3.1.3 (Seção transversal para folheações). *Seja Σ uma subvariedade de M . Dizemos que Σ é transversal à \mathcal{F} quando Σ é transversal a todas as folhas que ela toca. Quando $\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$, dizemos que Σ é uma seção transversal à \mathcal{F} .*

No caso de folheações, como cada folha é uma subvariedade, quando falar que as folheações são transversais, significa dizer que cada folha de uma folheação é transversal a cada folha de outra folheação, nos pontos onde se tocam, logo não há pontos de tangência.

Figura 10 – Folhas tangentes e transversais

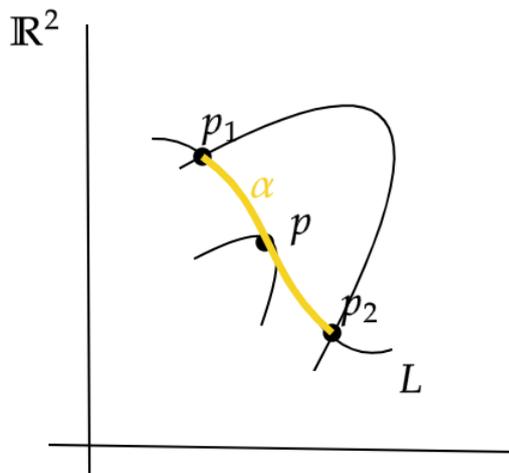


Fonte: elaborada pela autora.

Lema 3.1.1. *Se um caminho α intersecta uma mesma curva de nível de g em pontos distintos $p_1 = \alpha(t_1)$ e $p_2 = \alpha(t_2)$ então existe $t \in (t_1, t_2)$ tal que $\alpha(t) = q$ é um ponto de tangência entre α e $\mathcal{F}(g)$.*

Demonstração. De fato, se $g(p_1) = g(p_2)$, logo possui um ponto t de máximo ou mínimo no intervalo (t_1, t_2) . Ou seja, existe $t \in (t_1, t_2)$ tal que $f \circ \alpha(t)' = 0$, ou seja $\nabla g(\alpha(t)) \cdot (\alpha(t))' = 0$. Portanto, α tangencia $\mathcal{F}(g)$ em $q = \alpha(t)$. \square

Figura 11 – Ponto de tangência



Fonte: elaborada pela autora.

Portanto, se α está contida numa folha de uma folheação $\mathcal{F}(f)$ e intersecta uma mesma curva de nível de g em pontos distintos, logo existe um ponto de tangência e consequentemente as folheações não serão transversais.

Para o que segue, definiremos o Espectro de uma aplicação.

Definição 3.1.4. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. O Espectro de uma aplicação é o conjunto dos autovalores de sua derivada, ou seja,*

$$\text{Spec}(F) = \{x \in \mathbb{C}; x \text{ é autovalor de } DF_p, p \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemplo 3.1.2. *Seja $F = (x^2 + y^2, 2xy)$ para calcular seu espectro precisamos resolver a*

equação característica: $\text{Det}|DF(x,y) - \lambda I| = 0$

$$DF(x,y) - \lambda I = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - \lambda & 2y \\ 2y & 2x - \lambda \end{vmatrix}.$$

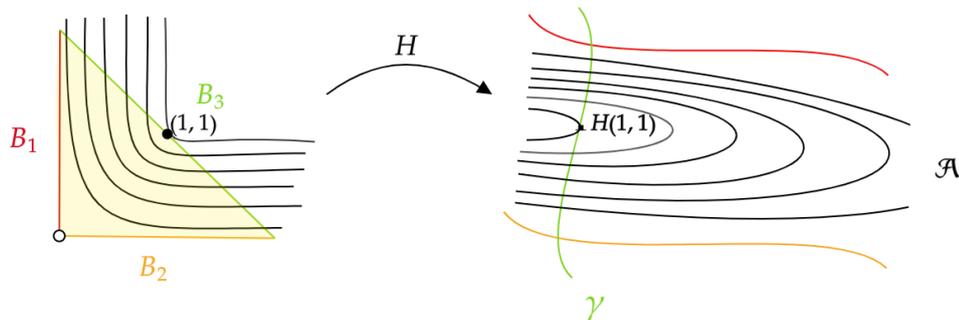
Logo, temos que $\lambda_1 = 2x - 2y$ e $\lambda_2 = 2x + 2y$ são autovalores da Derivada para $p = (x,y)$, ou seja, $\text{Spec}(F) = \{2x - 2y, 2x + 2y; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Definição 3.1.5. Considere a aplicação $h_0: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h_0(x,y) = xy$ e o conjunto $B = \{(x,y) \in [0,2] \times [0,2]; 0 < x+y \leq 2\}$.

Seja $F = (f,g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Dado $h \in \{f,g\}$, diz-se que $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma Meia Componente de Reeb (mcR) de $\mathcal{F}(h)$ se existe um homeomorfismo $H: B \rightarrow \mathcal{A}$ entre $\mathcal{F}(h_0)|_B$ e $\mathcal{F}(h)|_{\mathcal{A}}$ tal que: (Observe a imagem)

- i) O segmento $B_3 = \{(x,y) \in B; x+y = 2\}$ é levado por H em uma seção transversal à folheação $\mathcal{F}(h)$ no complemento de $H(1,1)$. Tal seção é chamada de face compacta de \mathcal{A} .
- ii) Os segmentos $B_1 = \{(x,y) \in B; x=0\}$ e $B_2 = \{(x,y) \in B; y=0\}$ são levados em meias trajetórias de $\mathcal{F}(h)$, chamadas faces não compactas.

Figura 12 – Meia componente de Reeb



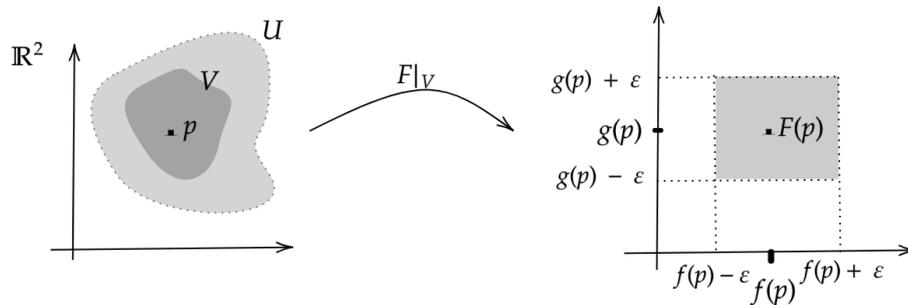
Fonte: elaborada pela autora.

3.2 Teorema de Cernavskii

Para provar que dada uma aplicação $F = (f,g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável, tal que para todo $p \in \mathbb{R}^2$, a derivada $DF(p)$ é não singular, as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$, induzidas pelas componentes de F serão transversais, apresentaremos o Teorema de Cernavskii, que é, de certa forma, uma versão do Teorema da Função Inversa para aplicações diferenciáveis, não necessariamente de classe \mathcal{C}^1 .

Teorema 3.2.1 (Cernavskii). *Seja U um aberto de \mathbb{R}^2 e $F = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável, tal que $\forall p \in U$, $DF(p)$ é não singular. Então, $\forall p \in U$, existe uma vizinhança $V = V(p)$ e $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ tais que $F|_V : V \rightarrow (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon)$ é um homeomorfismo.*

Figura 13 – Teorema de Cernavskii



Fonte: elaborada pela autora.

O Teorema de Cernavskii pode ser encontrado em Cernavskii (1964), Cernavskii (1965).

Observação:

- i. Para o que se segue, ao se referir a uma folheação sem singularidades, significa que ela divide a variedade toda, sem furos, ou seja, sem singularidades.
- ii. A restrição $g|_L$ ser estritamente monótona, significa que g é injetiva ao longo da folha.
- iii. Lembre-se que folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais se, e somente se, os gradientes ∇f e ∇g não são paralelos em nenhum ponto do domínio.

Corolário 3.2.1. *Seja $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que para todo $p \in U$, DF_p é não singular. Então as curvas de nível de f , $f^{-1}(\text{constante})$, constituem uma folheação \mathcal{C}^0 , sem singularidades, $\mathcal{F}(f)$ sobre U , tal que se L é uma folha de $\mathcal{F}(f)$, então $g|_L$ é estritamente monótona. Em particular, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais entre si.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, para cada ponto p do domínio de F existem vizinhanças U_p de p e $V_{X(p)}$ de $F(p)$, tais que $F|_{U_p} : U_p \rightarrow V_{F(p)}$ é um homeomorfismo, formando assim, um sistema de coordenadas $(U_p, F|_{U_p})$. Como a união dos abertos U_p cobre U , o conjunto $\{(U_p, F|_{U_p})\}$ é um atlas de U . Observe que para $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ para $p \neq q \in U$ tem-se que a mudança de coordenada $F|_{U_p} \circ F^{-1}|_{V_{F(q)}}(x, y) = (x, y)$, $\forall (x, y) \in V_{F(p)} \cap V_{F(q)}$ é a identidade,

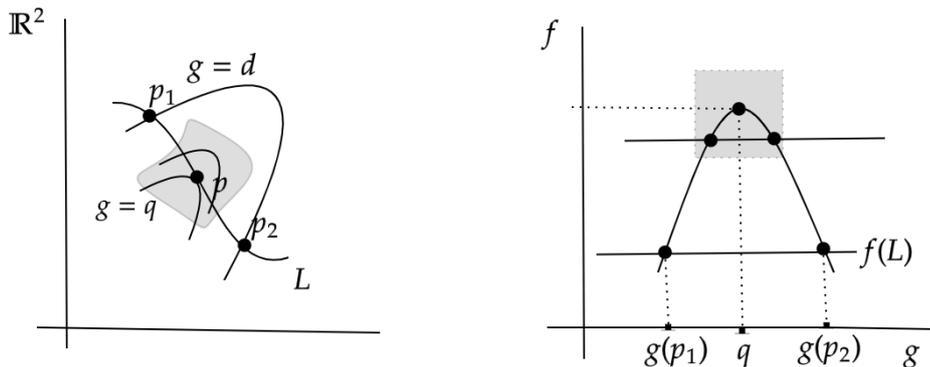
portanto, é um difeomorfismo da forma $(h_1(x,y), h_2(y)) = (x,y)$, onde $h_1(x,y)$ e $h_2(y)$ são difeomorfismos.

Como $F_{qp}(x,y) = F|_{U_p} \circ F^{-1}|_{V_{F(q)}}(x,y)$ preserva os níveis de f e g temos que eles compõem as folhas das folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ do \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Como podemos fazer isso para todo ponto $p \in U$, as folheações não possuem singularidade.

Devemos mostrar agora que $g|_L$, com L uma folha de $\mathcal{F}(f)$, é estritamente monótona. Para isso, suponha que não seja, portanto que existam $p_1, p_2 \in L$ com $g(p_1) = g(p_2) = q$, logo $g|_{[p_1, p_2]}$ possui um valor de máximo ou mínimo em um ponto p em $(p_1, p_2) \subset L$, suponha que $g(p) = q$ seja máximo. Contudo, pelo teorema anterior, dado um ponto p em \mathbb{R}^2 , existe uma vizinhança U_p e $\varepsilon < 0$ tal que $F|_{U_p} : U_p \rightarrow (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon)$ é um homeomorfismo, contudo, a restrição não seria injetiva tendo em vista que $f|_L$ é constante e para qualquer ε existiriam dois pontos que teriam o mesmo valor em f .

Figura 14 – f e g restritas à L



Fonte: elaborada pela autora.

Para provar que as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais, suponha que em um dado ponto $p \in U$ existam folhas L_f de $\mathcal{F}(f)$ e L_g de $\mathcal{F}(g)$ que se tangenciam no ponto p . Como f e g são diferenciáveis e L_f está contida em um nível de f e L_g está contida em um nível de g , conclui-se que seus vetores gradientes ∇f e ∇g são paralelos no ponto p . Então o

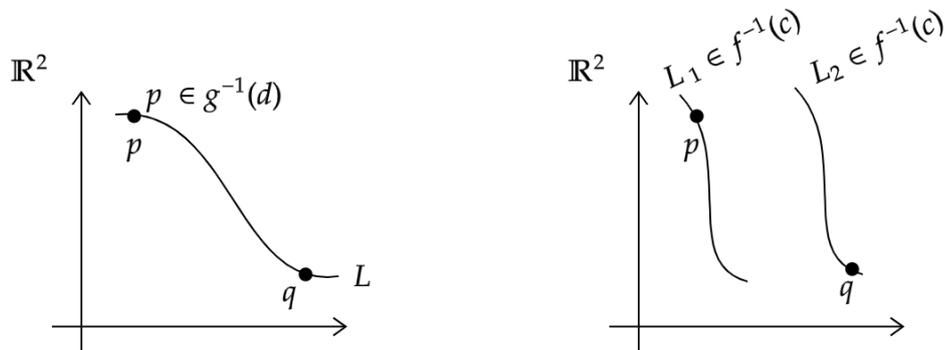
$$\det(DF(p)) = \det \begin{pmatrix} \nabla f(p) \\ \nabla g(p) \end{pmatrix} = 0$$

O que é um absurdo, logo as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais. \square

Corolário 3.2.2. *Seja $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que para todo $p \in U$, DF_p é não singular. Se F não for injetiva, ou seja, se existirem dois pontos p e q tais que $F(p) = F(q) = (c, d)$, teremos que p e q pertencem à diferentes componentes conexas de ambas $f^{-1}(c)$ e $g^{-1}(d)$.*

Demonstração. De fato, se p e q pertencem à mesma componente conexa L de $f^{-1}(c)$ (para $g^{-1}(d)$ é análogo). Então, pelo Corolário 3.2.1 a componente conexa $g|_L$ é estritamente monótona, ou seja, injetiva quando restrita à folha, portanto não poderíamos ter $g(p) = g(q) = d$. □

Figura 15 – Folhas distintas



Fonte: elaborada pela autora.

Corolário 3.2.3. *Seja $F = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável definida em um conjunto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\forall p \in U$, $DF(p)$ é não singular. Se os inversos de f ou de g são conexos, então F é um homeomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema de Cernavskii, F é um homeomorfismo local, para que ele seja um homeomorfismo global, bastando provar a injetividade de F , a qual é consequência direta do Corolário 3.2.2. □

3.3 Existência e rotação da meia componente de Reeb

Proposição 3.3.1. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável e semialgébrica tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Se F não é injetiva, então tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem meias componentes de Reeb.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{F}(f)$ não tenha meia componente de Reeb.

Como F não é injetiva, sem perda de generalidade, suponha que existem pontos distintos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $F(p_1) = F(p_2) = (c, d)$. Seja α_i , para $i \in \{1, 2\}$, a folha de $\mathcal{F}(f)$ passando por p_i . Pelo Corolário 3.2.2, α_1 e α_2 são folhas distintas de um mesmo nível.

Seja $\Omega(p_1, p_2)$ o conjunto dos arcos compactos de \mathbb{R}^2 cujos pontos extremos são p_1 e p_2 e que sejam transversais a $\mathcal{F}(f)$ em $\{p_1, p_2\}$. Seja $\Gamma \in \Omega(p_1, p_2)$ um elemento que minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$.

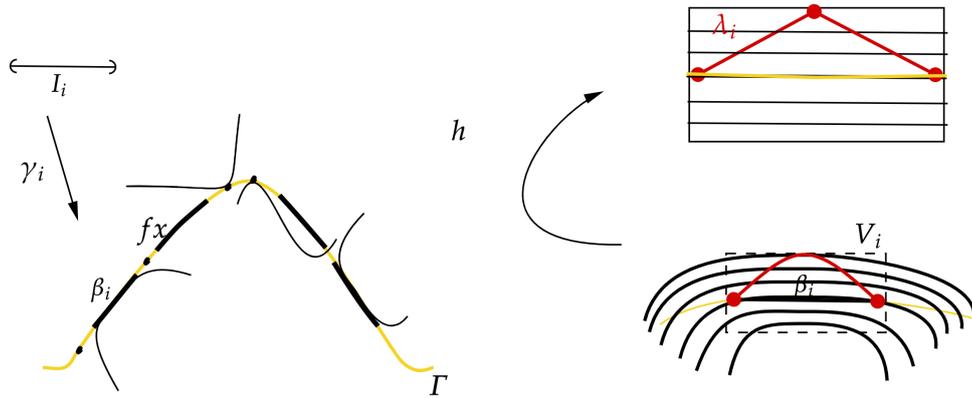
Observe que:

- i) Sempre há pelo menos um ponto de tangência q entre Γ e $\mathcal{F}(f)$.
- ii) O conjunto das tangências entre Γ e $\mathcal{F}(f)$ é finito. Portanto, todas as tangências são genéricas.

De fato, se parametrizarmos esse trecho de Γ entre p_1 e p_2 por uma curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ suave tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$, pelo Lema 3.1.1, teremos um ponto de tangência entre γ e $\mathcal{F}(f)$.

No caso de ii), considere agora γ uma curva semialgébrica, observe que o conjunto A das tangências de Γ com as curvas de nível de f , $A = \{t \in (0, 1); \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0\}$, é semialgébrico, portanto, sendo um subconjunto dos reais temos que A é a união finita de pontos e intervalos. Agora, em cada um desses intervalos β_i de A , temos que β_i é imagem de um caminho $\gamma_i: I_i \rightarrow \gamma$, como β_i está contido numa folha de $\mathcal{F}(f)$, pelo Lema da Trivialização Global, existe uma vizinhança V_i de $\beta_i = \gamma_i(I_i)$ e um homeomorfismo h entre o cartesiano de intervalos $I \times I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e V_i . Portanto, agora olhando para a placa longa $I \times I$, podemos substituir a curva $h(\gamma_i(I_i))$ por uma λ_i que é transversal às folhas a menos de uma quantidade finita de tangências, tomando a inversa de h temos $h^{-1}(\lambda_i)$ uma curva com uma quantidade finita de pontos de tangência (mais especificamente 3) com as curvas de nível de f . Se fazemos isso para todos os intervalos de tangência, teremos, ao total, uma quantidade finita de pontos de Γ que tangenciam as curvas de nível de f .

Figura 16 – Tangência finita entre Γ e $\mathcal{F}(f)$



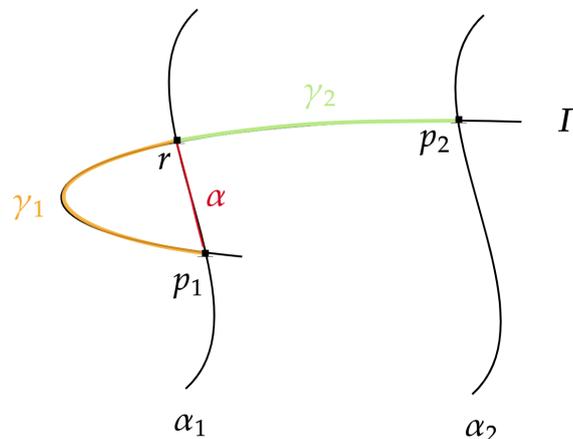
Fonte: elaborada pela autora.

Afirmção 1: $\alpha_i \cap \Gamma = \{p_i\}$ com $i \in \{1, 2\}$.

Suponha, por contradição, é possível encontrar um $r \in \Gamma \setminus \{p_1, p_2\}$ e um subintervalo fechado α de α_1 , com extremos p_1 e r , tal que $\alpha \cap \Gamma = \{p_1, r\}$.

Considere, primeiro, o caso de Γ ser transversal a α_1 em r . Sejam γ_1 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{r\}$ que contém p_1 e γ_2 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{r\}$ que contém p_2 . Assim $\alpha \cup \gamma_2$ é um arco conectando p_1 e p_2 , e γ_1 tem ponto de tangência com $\mathcal{F}(f)$. Basta observar que como γ_1 é transversal a α_1 em $\{p_1\}$, existe pelo menos algum ponto r_0 de γ_1 onde $f(r_0)$ difere de $f(p_1) = f(r)$, pelo lema anterior neste ponto, γ_1 seria tangente à $\mathcal{F}(f)$.

Figura 17 – Γ transversal a α_1 em mais de um ponto

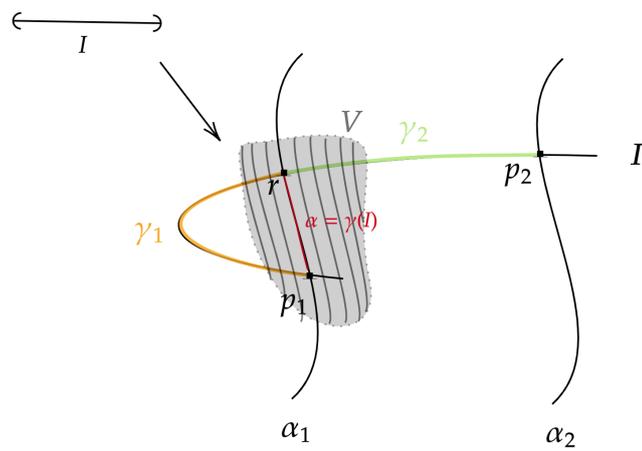


Fonte: elaborada pela autora.

Veremos agora que é possível obter de $\alpha \cup \gamma_2$ um novo arco pertencente ao $\Omega(p_1, p_2)$, de forma que esse arco possua menos tangência com $\mathcal{F}(f)$ do que Γ .

Dado um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja imagem está contida numa folha da folheação $\mathcal{F}(f)$, mais especificamente, um caminho cuja imagem seja α , pelo Lema da Trivialização Global, é possível construir uma vizinhança V de $\gamma(I)$ constituída de folhas de $\mathcal{F}(f)$ restrita à V .

Figura 18 – Vizinhança tubular longa de α

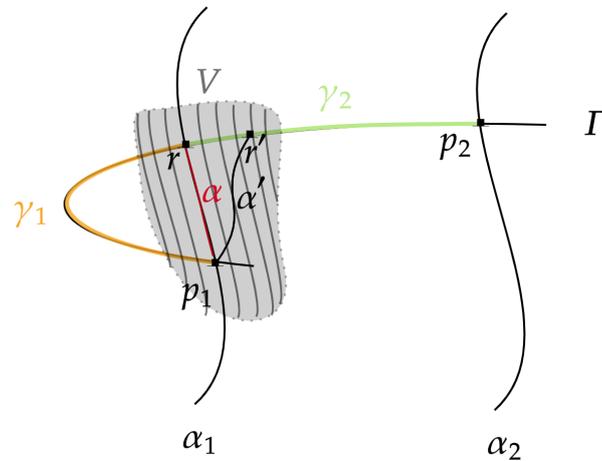


Fonte: elaborada pela autora.

Agora, tome a vizinhança V de $\gamma(I)$ e note que dado um ponto $r' \in \gamma_2 \cap V$, é possível tomar um caminho α' , ligando p a r' , transversal à $\mathcal{F}(f)$. Assim, a curva composta por α' unida com a porção $[r', p_2]$ de γ_2 , consiste em um novo arco, obtido de $\alpha' \cup \gamma_2$, que possui menos tangência com $\mathcal{F}(f)$ do que Γ .

Logo o fato de Γ ser transversal a outro ponto r além de p_i em alguma α_i contradiz a maximalidade de Γ .

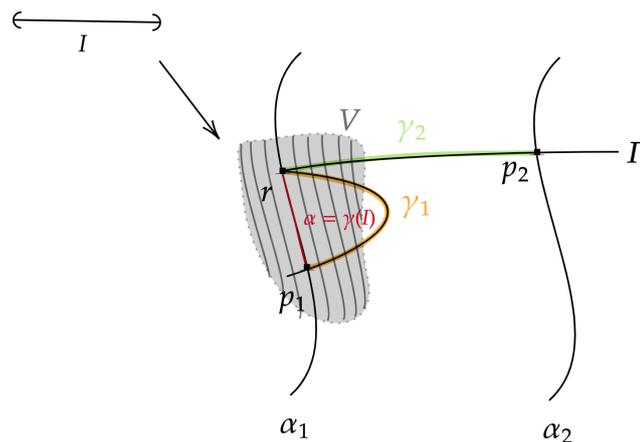
Figura 19 – α' com menor tangência que γ_1



Fonte: elaborada pela autora.

No caso de Γ ser tangente a α_1 em r , a demonstração é bem parecida com a anterior. Como só há tangência genérica, temos que podemos dividir $\Gamma|_{[p_1, p_2]}$ em duas componentes conexas γ_1 e γ_2 . Assim como nos argumentos do caso anterior, γ_1 possui ponto de tangência com $F(f)$.

Figura 20 – Vizinhança tubular longa da curva α que tangência Γ no ponto r

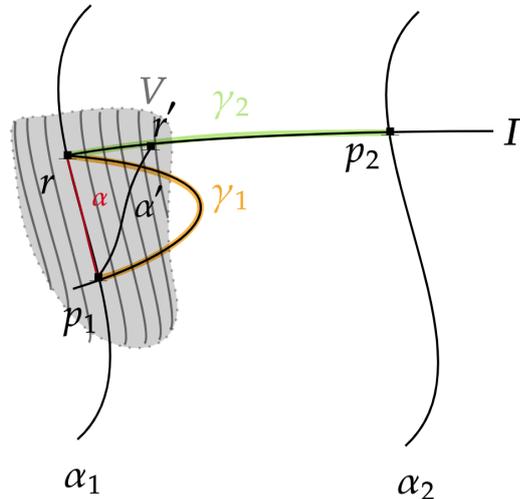


Fonte: elaborada pela autora.

Utilizando o Lema da Trivialização Global, podemos encontrar um arco α' numa vizinhança V de α que não tangencia as folhas de $\mathcal{F}(f)$ em V e que liga p_1 a um ponto r' de $\gamma_2 \cap V$. Logo, encontramos um arco $\Gamma' = \Gamma \setminus [p_1, p_2] \cup \alpha' \cup [r', p_2]$ com menos tangência com a

folheação que Γ , o que é um absurdo, provando assim a Afirmação 1.

Figura 21 – α' com menor número de tangência que α

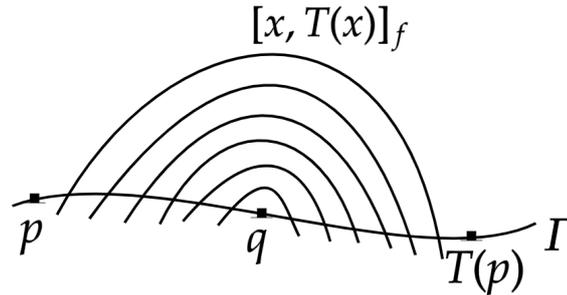


Fonte: elaborada pela autora.

Analisando, agora, as trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ em torno de q . Pelo Lema da Trivialização Global aplicada na folha de $\mathcal{F}(f)$ que tangencia Γ é possível ver que existem subintervalos fechados $[p, q], [q, t(p)]$ de Γ , com $[p, q] \cap [q, t(p)] = q$ e um homeomorfismo $T : [p, q] \rightarrow [q, t(p)]$ tal que:

- i) $T(q) = q$ e $\forall x \in (p, q)$, existem arcos de trajetórias $[x, T(x)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ começando em x , terminando em $T(x)$ e intersectando transversalmente Γ exatamente em $\{x, T(x)\}$.
- ii) A família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q)\}$ depende continuamente de x e tende a $\{q\}$ quando x converge para q .

Figura 22 – Arcos $[x, T(x)]_f$ ligando x a $T(x)$

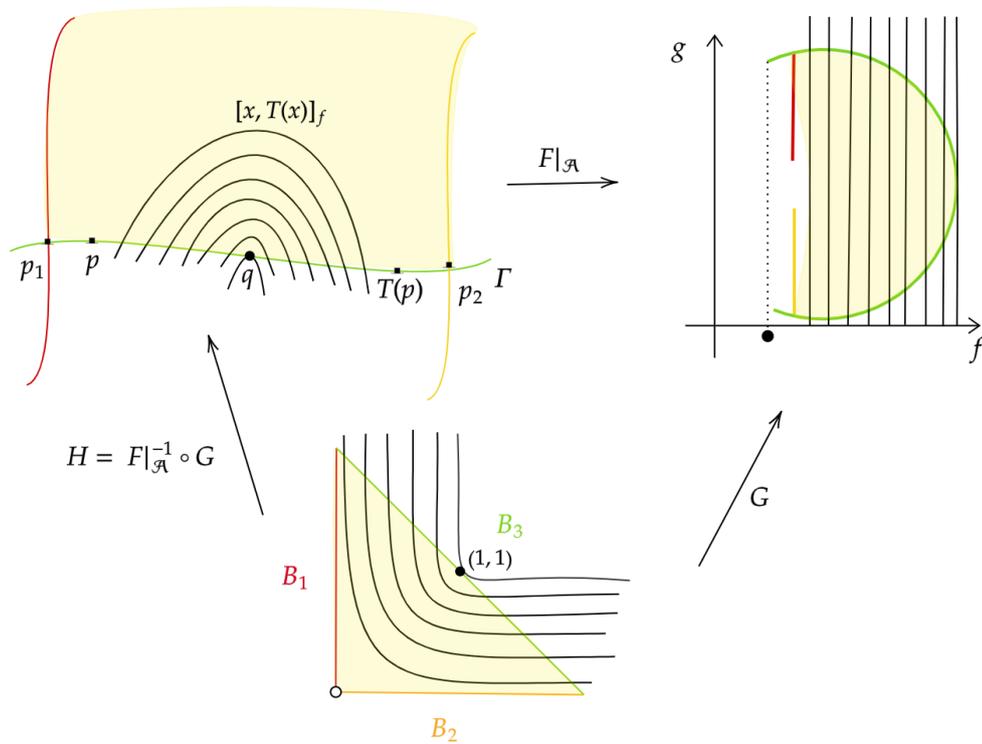


Fonte: elaborada pela autora.

De agora em diante, suponha que $[p, q]$ seja maximal com respeito a i) e ii). Ou seja, que $[p, q]$ é o maior intervalo tal que nele valem as propriedades i) e ii).

Afirmção 2: $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$

É fácil ver que não se pode ter $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p, T(p)\}$, pois se houvesse essa igualdade α_1 e α_2 seriam as faces não compactas de uma meia componente de Reeb \mathcal{A} , da qual Γ restrito à $[p_1, p_2]$ seria a face compacta. Logo, chegamos no absurdo de que $\mathcal{F}(f)$ teria uma mcR \mathcal{A} , pois pelo Corolário 3.2.3 temos que $F|_{\mathcal{A}}$ é um homeomorfismo para o subconjunto $F(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^2$ que é homeomorfo ao conjunto B , como pode ser visto na imagem abaixo.

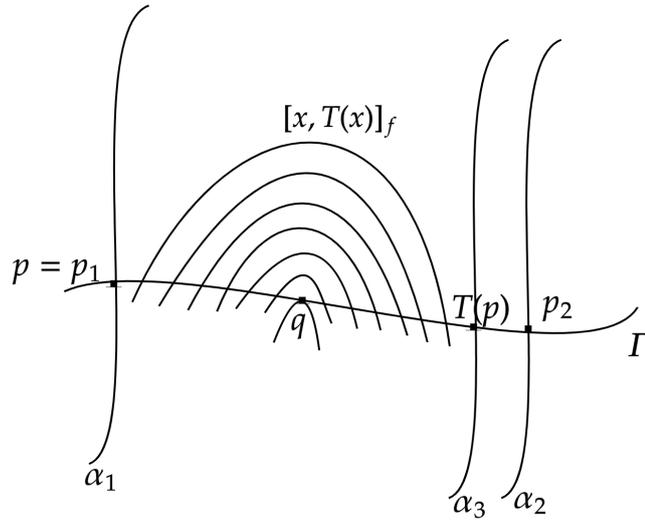
Figura 23 – Homeomorfismo entre \mathcal{A} e B 

Fonte: elaborada pela autora.

Agora, basta mostrar que não se pode ter $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p\}$, ou ainda, sem perda de generalidade, que não se pode ter $p = p_1$.

Novamente por absurdo, suponha que $p = p_1$. Considere a folha α_3 de $\mathcal{F}(f)$ uma das componentes conexas de $f = c$ que contém o ponto $T(p)$, logo $\alpha_1 \cap \alpha_3 = \emptyset$. Pela mesma justificativa da Afirmação 1, $\Gamma \cap \alpha_3 = \{T(p)\}$.

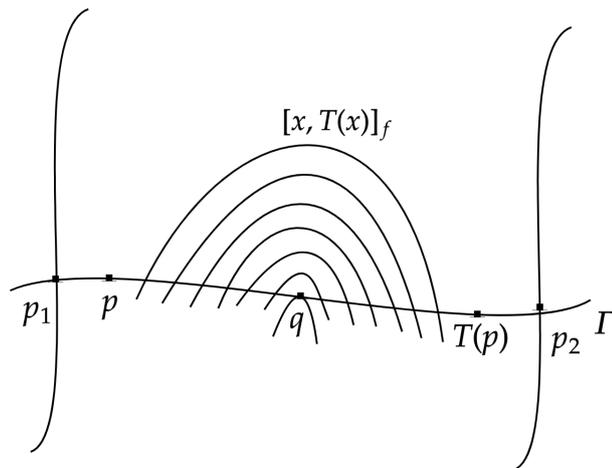
Figura 24 – Meia componente de Reeb composta por α_1 , α_3 e Γ



Fonte: elaborada pela autora.

Logo, da mesma forma que acima, tem-se que α_3 e α_2 são faces não compactas de uma meia componente de Reeb, cuja face compacta é a porção da curva Γ compreendida entre as mesmas. Absurdo!

Figura 25 – $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$



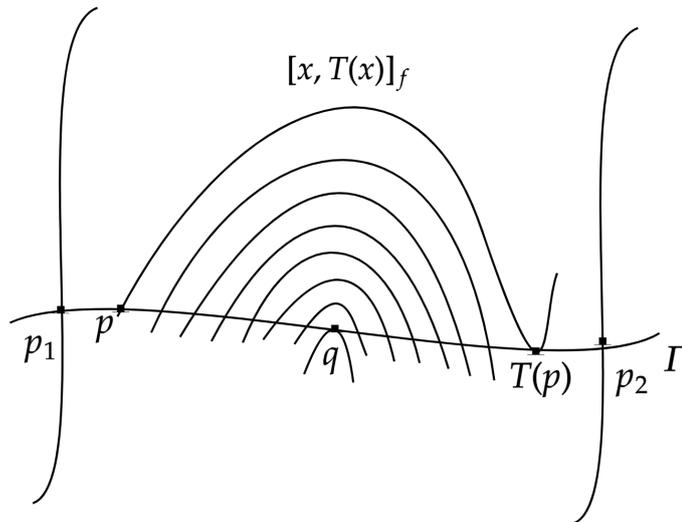
Fonte: elaborada pela autora.

Afirmção 3: Não existe arco de trajetória $[(p, T(p))]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando p e T(p)

tal que a família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q)\}$ se aproxima continuamente de $[p, T(p)]_f$ quando $x \rightarrow p$.

Suponha que exista. Então, usando a maximalidade de $[p, q]$, conclui-se que $[p, T(p)]_f$ é tangente a Γ em pelo menos p ou $T(p)$. Pois, caso o arco fosse transversal a Γ nos dois extremos existiriam vizinhanças destes pontos tais que o domínio e o contradomínio de T pudessem ser estendidos, violando assim a maximalidade do intervalo $[p, q]$.

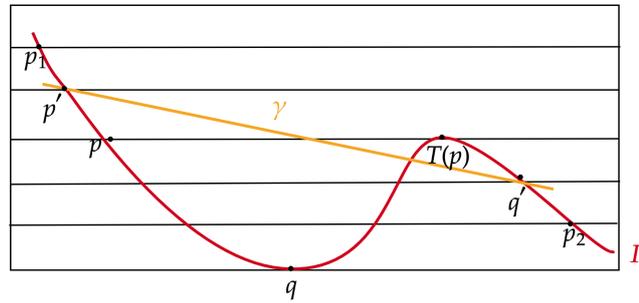
Figura 26 – Arco ligando p e $T(p)$ com tangência em $T(p)$



Fonte: elaborada pela autora.

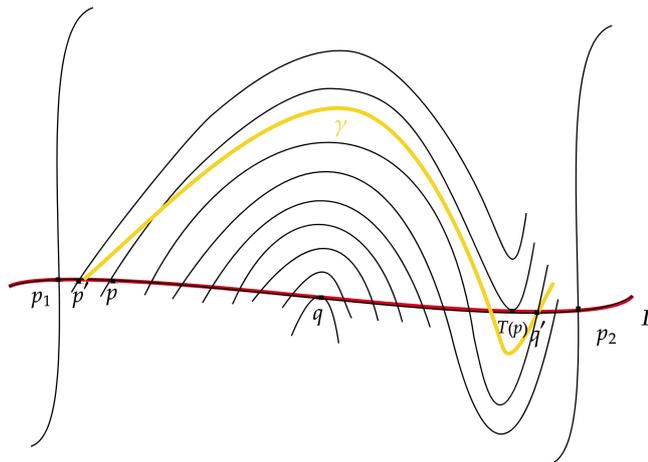
Nessas circunstâncias, supondo que existe tangência em $T(p)$, utilizando a vizinhança longa do Lema da trivialização global, pode-se encontrar uma curva γ que conecta um ponto $p' \in [p_1, p] \subset \Gamma$ em um ponto $q' \in [T(p), p_2] \subset \Gamma$ que é transversal à Γ em p' , q' e em outro ponto entre q e $T(p)$ e transversal às folhas de $\mathcal{F}(f)$. Agora, unindo $\Gamma \setminus [p', q']$ com $\gamma|_{[p', q']}$ obtemos uma curva Γ' , como pode-se observar na imagem a seguir.

Figura 27 – Vizinhança tubular longa entre p_1 e p_2



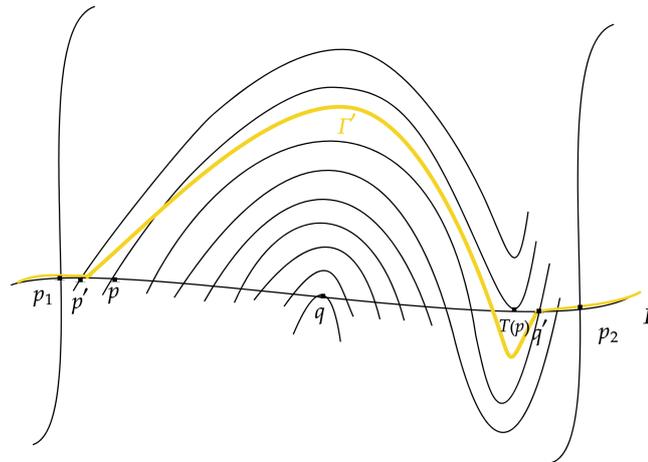
Fonte: elaborada pela autora.

Figura 28 – Curva ligando p' e q'



Fonte: elaborada pela autora.

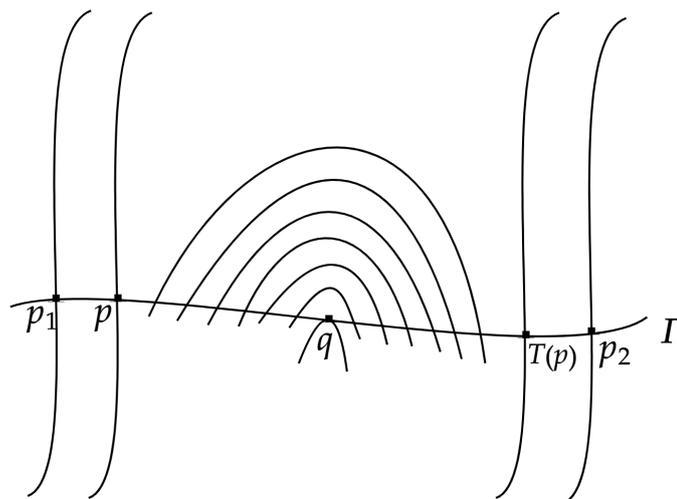
Portanto, existe outra curva $\Gamma' \in \Omega(p_1, p_2)$ com menos tangência com a $\mathcal{F}(f)$ que Γ , o que contradiz a minimalidade de Γ e assim chegamos numa contradição. Portanto, conclui-se que não existe um arco da folheação ligando p e $T(p)$.

Figura 29 – Γ' com menos tangência que Γ 

Fonte: elaborada pela autora.

Logo, com a prova da última afirmação, temos que o subintervalo $[p, q] \cup [q, T(p)]$ é a face compacta de uma meia componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$ constituída dessa face, de duas trajetórias da folheação, α_p e $\alpha_{T(p)}$ começando em p e $T(p)$, respectivamente, as quais são as faces não compactas, juntamente dos arcos $[x, T(x)]$ com $x \in (p, q]$.

Este absurdo completa a demonstração da proposição.

Figura 30 – McR formada por $\Gamma_{[p, T(p)]_f}$ e componentes conexas de $f = c$ que tocam p e $T(p)$.

Fonte: elaborada pela autora.

Para o caso da folheação $\mathcal{F}(g)$, a demonstração é análoga.

□

Exemplo 3.3.1. A existência de meia componente de Reeb não implica na não injetividade. De fato, veja que $F(f, g) = (a(y)(x^2 - 1), a(y)(x^2 + x - 1))$, para $a(y) > 0$ e com $a'(y) > 0$ uma função semialgébrica. A aplicação F é injetiva e tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem meia componentes de Reeb, basta pegar os níveis para $F(x, y) = (0, 0)$.

Para a proposição a seguir, considere $F_\theta = (f_\theta, g_\theta) = R_\theta \circ (f, g) \circ R_{-\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, com R_θ a rotação linear

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Observe que ao rotacionar F , no domínio e na imagem, o Espectro é mantido, ou seja, $\text{Spec}(F) = \text{Spec}(F_\theta)$.

Lema 3.3.1. Seja K um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|\theta\| < \delta$, $\|f(x) - f_\theta(R_\theta(x))\| < \varepsilon$.

Demonstração. Como $(f_\theta, g_\theta) = R_\theta \circ (f, g) \circ R_{-\theta}$, logo $f_\theta = (\cos \theta f - \text{sen } \theta g) \circ R_{-\theta}$ e assim,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} f_\theta(R_\theta(x)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} ((\cos \theta f - \text{sen } \theta g) \circ R_{-\theta} \circ R_\theta(x)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} (\cos \theta f - \text{sen } \theta g)(x) = f(x)$$

Como queríamos demonstrar. □

Proposição 3.3.2. Sejam $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável, não injetiva tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$ e \mathcal{A} uma meia componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$. Se a projeção na primeira coordenada de \mathcal{A} , $\Pi_1(\mathcal{A})$, é limitada, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, a folheação $\mathcal{F}(f_\theta)$ tem uma meia componente de Reeb, denotada por \mathcal{A}_θ , tal que $\Pi_1(\mathcal{A}_\theta)$ é um intervalo de comprimento infinito.

Demonstração. Para iniciar a demonstração provaremos, primeiramente, a seguinte afirmação.

Afirmação 1: Dado $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \neq \frac{m\pi}{2}, \forall m \in \mathbb{Z}$. A folheação $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal à $R_\theta(\mathcal{F}(f))$.

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva injetiva contida numa folha de $\mathcal{F}(f)$.

Observe que $(f_\theta, g_\theta) = R_\theta \circ (f, g) \circ R_{-\theta}$, pode ser escrito como

$$(f_\theta, g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Assim, $(f_\theta, g_\theta)(R_\theta \circ \alpha(t)) = R_\theta \circ (f, g) \circ R_{-\theta} \circ R_\theta \circ \alpha(t) = R_\theta \circ (f, g) \circ \alpha(t)$ é dado por

$$(f_\theta, g_\theta)(R_\theta \circ \alpha(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\alpha(t)) \\ g(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

Portanto, $f_\theta(R_\theta \circ \alpha(t)) = \cos \theta f(\alpha(t)) - \operatorname{sen} \theta g(\alpha(t))$ e $g_\theta(R_\theta \circ \alpha(t)) = \operatorname{sen} \theta f(\alpha(t)) + \cos \theta g(\alpha(t))$.

Logo, como $f(\alpha(t))$ é constante e, pelo Corolário 3.2.2, $g(\alpha(t))$ é estritamente monótona, teremos que $f_\theta(R_\theta \circ \alpha(t))$ é estritamente monótona. Portanto, $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal à $R_\theta(\mathcal{F}(f))$.

Do mesmo modo, pode-se demonstrar que $\mathcal{F}(g_\theta)$ é transversal à $R_\theta(\mathcal{F}(f))$.

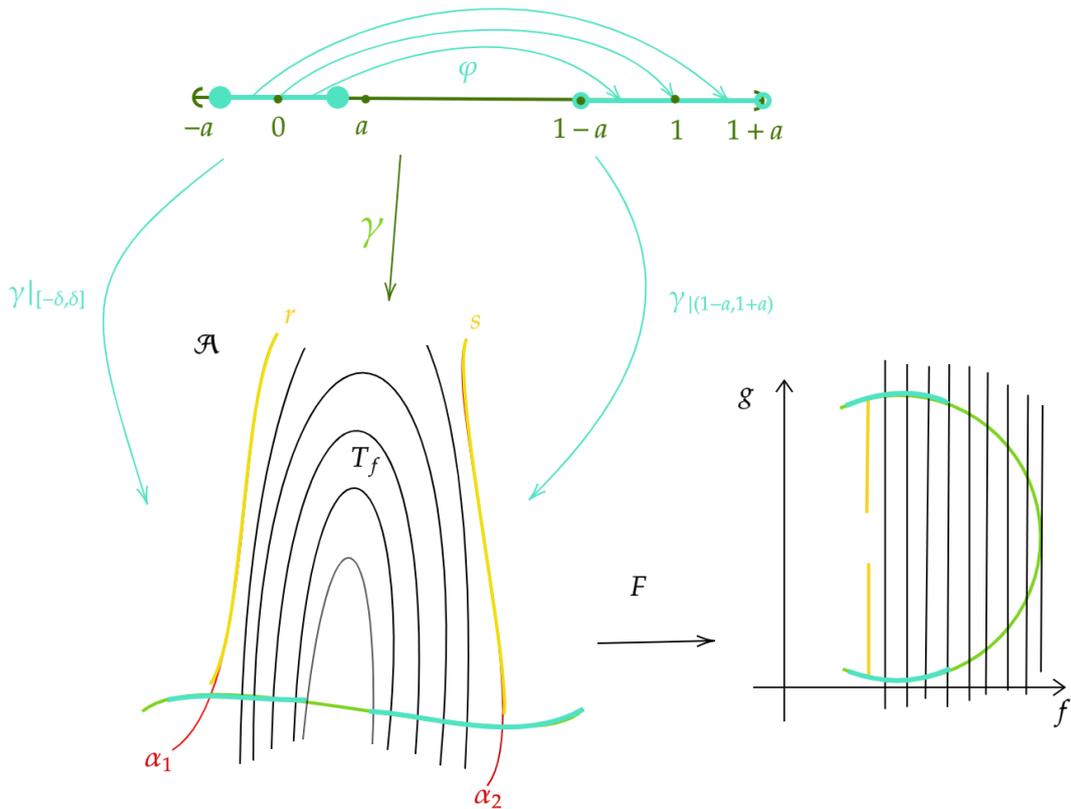
Sejam r e s as faces não compactas de \mathcal{A} tal que $r \subset \alpha_1$ e $s \subset \alpha_2$ são componentes conexas de uma curva de nível de $\mathcal{F}(f)$. Seja $\gamma: (-a, 1+a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $0 < a < 1$ uma curva contínua injetiva tal que $\gamma|_{[0,1]}$ é a face compacta de \mathcal{A} . Agora considere, as funções contínuas $h_1 = f \circ \gamma|_{(-a,a)}$ e $h_2 = f \circ \gamma|_{(1-a,1+a)}$, como $h_1(0) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = h_2(1)$, existe um $0 < \delta < a$ suficiente pequeno tal que a função

$$\begin{aligned} \varphi: [-\delta, \delta] &\rightarrow (1-a, 1+a) \\ s &\mapsto h_2^{-1} \circ h_1(s) \end{aligned}$$

esteja bem definida. A função φ é contínua, injetiva e inverte orientações e satisfaz:

- $a_1)$ $\varphi(0) = 1$;
- $a_2)$ $f(\gamma(s)) = f(\gamma(\varphi(s)))$ para $s \in [-\delta, \delta]$;
- $a_3)$ Para $s \in (0, \delta]$ existe um arco de trajetória $T|_f(s) \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)$ tal $T|_f(s) = T[\gamma(s), \gamma(\varphi(s))]_f$ conecta $\gamma(s)$ e $\gamma(\varphi(s))$.

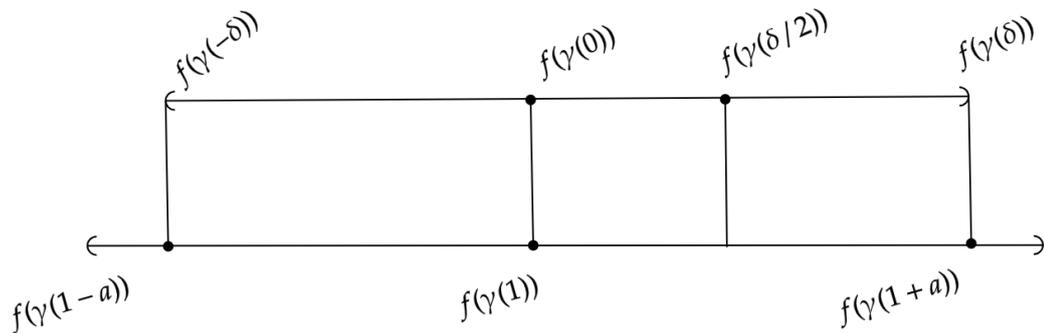
Figura 31 – Função φ .



Fonte: elaborada pela autora.

Logo tem-se uma relação de ordem entre as imagens de f , como pode-se ver abaixo.

Figura 32 – Relação de ordem entre as imagens de f .

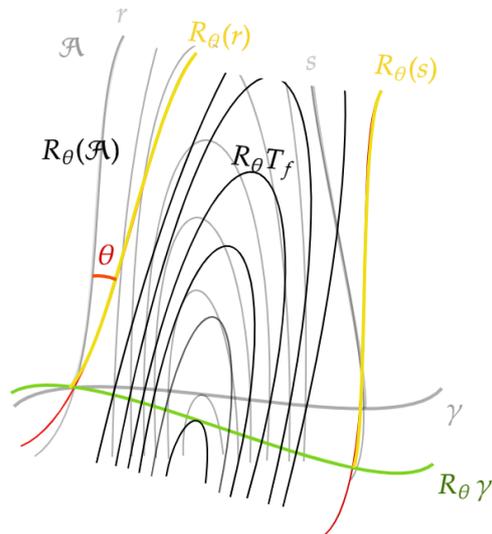


Fonte: elaborada pela autora.

Para que a projeção $\Pi_1(R_\theta(\mathcal{A}))$ seja ilimitada, pode-se utilizar um $\theta > 0$ bem pequeno, portanto tomando um valor conveniente para θ tal que $\Pi_1(R_\theta(s))$ e $\Pi_1(R_\theta(r))$ contenham

um intervalo de comprimento infinito.

Figura 33 – Rotação de \mathcal{A} .

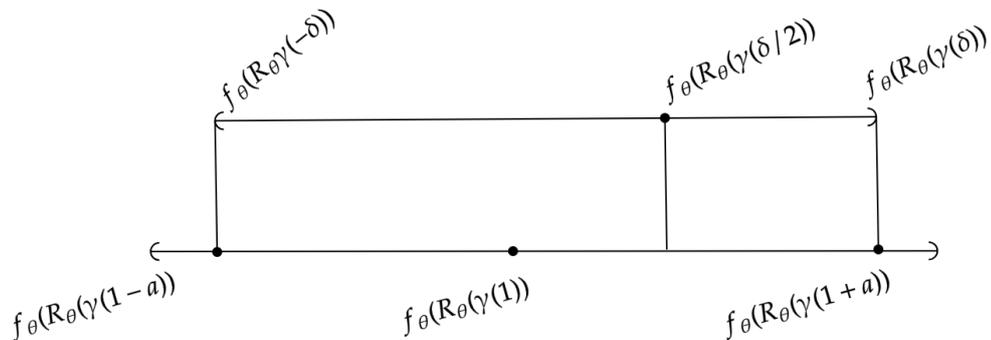


Fonte: elaborada pela autora.

Pela transversalidade de $\mathcal{F}(f_\theta)$ e $R_\theta(\mathcal{F}(f))$ e pelo Lema 3.3.1, para θ pequeno o suficiente, pode-se conseguir de maneira análoga à feita acima, uma função $\varphi_\theta: [-\delta, \delta] \rightarrow (1-a, 1+a)$ contínua que inverte orientações tal que $f_\theta(R_\theta(\gamma(s))) = f_\theta(R_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s))))$ para $s \in [-\delta, \delta]$.

Portanto, tem-se a seguinte relação de ordem entre as imagens de f_θ .

Figura 34 – Relação de ordem entre as imagens de f_θ .



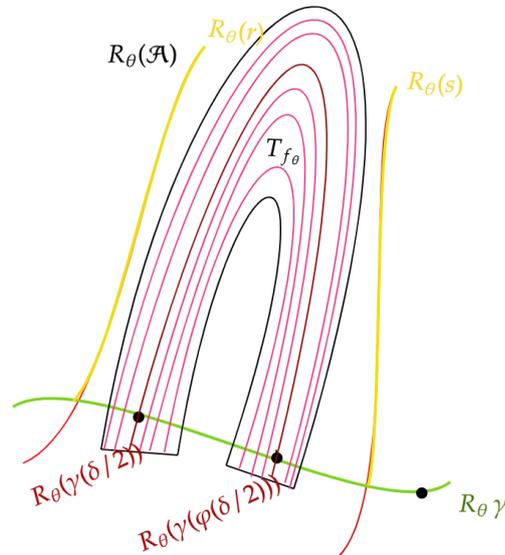
Fonte: elaborada pela autora.

Como $\gamma([- \delta, \delta])$ e $\gamma([\phi(-\delta), \phi(\delta)])$ são compactos, pelo Lema 3.2.2, temos que para θ próximo a zero, a imagem de $f_\theta(x)$ se aproxima à de $f(x)$, para $x \in \gamma([- \delta, \delta]) \cup \gamma([\phi(-\delta), \phi(\delta)])$. Portanto, segue que:

- $b_1)$ $R_\theta(\gamma(\varphi(\frac{\delta}{2}))) \in R_\theta(\gamma(1-a, 1))$;
- $b_2)$ $\varphi_\theta(-\delta) > 1$.

Suponha que $R_\theta(\gamma(\frac{\delta}{2}))$ e $R_\theta(\gamma(\varphi(\frac{\delta}{2})))$ pertençam a folhas distintas de $\mathcal{F}(f_\theta)$. Nesse caso, basta utilizar uma demonstração análoga à realizada na Proposição 3.3.1 e encontraremos uma meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ dentro de $R_\theta(\mathcal{A})$, sabendo que $\Pi_1(R_\theta(\mathcal{A}))$ é um intervalo de comprimento ilimitado, então $\Pi_1(\mathcal{A}_\theta)$ também será ilimitado.

Figura 35 – Meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ dentro de $R_\theta(\mathcal{A})$



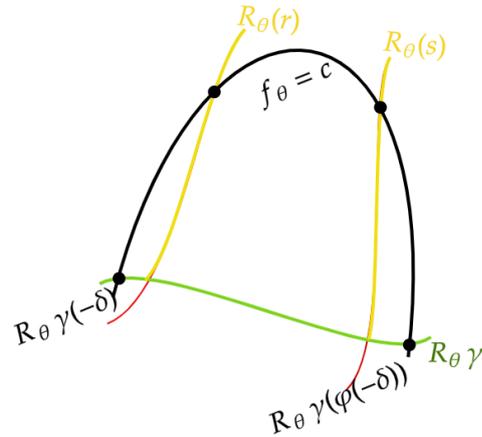
Fonte: elaborada pela autora.

Agora, se $R_\theta(\gamma(\frac{\delta}{2}))$ e $R_\theta(\gamma(\varphi(\frac{\delta}{2})))$ pertencem a uma mesma folha de $\mathcal{F}(f_\theta)$, pelo Lema da Trivialização Global, conseguimos uma vizinhança tubular longa de folhas de $\mathcal{F}(f_\theta)$ transversais à γ . Ou seja, existe $\sigma_\theta \in (-\delta, \frac{\delta}{2}]$ tal que:

- $c_1)$ para todo $s \in [\sigma_\theta, \frac{\delta}{2}]$, existe um arco de trajetória $T|_{f_\theta}(s)$ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ ligando $R_\theta(\Gamma(s))$ e $R_\theta(\Gamma(\varphi_\theta(s)))$.

Observe que $\sigma_\theta > -\delta$, pois se existisse um arco $T|_{f_\theta}(-\delta)$, teríamos uma folha $f_\theta = c$ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ que intersecta uma mesma folha de $R_\theta(F(f))$ duas vezes e, portanto, iria de encontro à transversalidade provada na Afirmação 1.

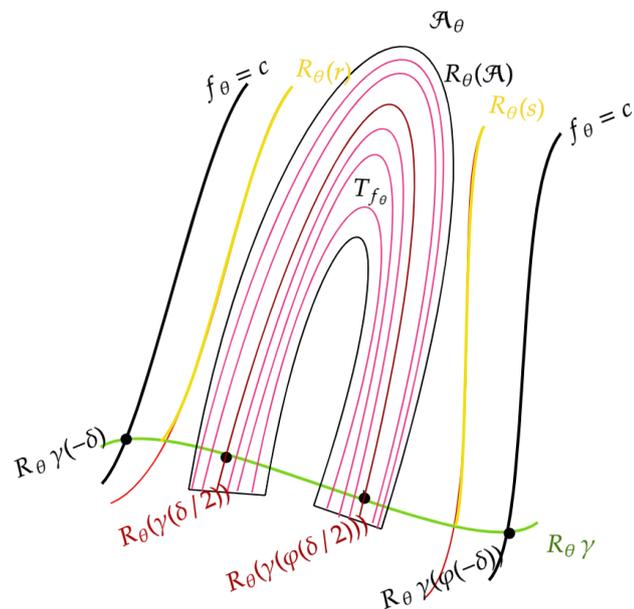
Figura 36 – Caso exista um arco $T|_{f_\theta}(-\delta)$.



Fonte: elaborada pela autora.

Logo, as folhas de $\mathcal{F}(F_\theta)$ em $R_\theta(\gamma(-\delta))$ e $R_\theta(\gamma(\varphi_\theta(-\delta)))$ são disjuntas e, portanto, assim como provado na Afirmação 2 da Proposição 3.3.1, temos uma meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ contendo $R_\theta(\mathcal{A})$. Portanto, $\Pi_1(R_\theta(\mathcal{A})) \subset \Pi_1(\mathcal{A}_\theta)$ é ilimitada. \square

Figura 37 – Meia componente de Reeb \mathcal{A}_θ contendo $R_\theta(\mathcal{A})$



Fonte: elaborada pela autora.

Observação: Veja que para essa proposição valer é necessário que a rotação seja bem pequena, pois um exemplo de que se você fizer uma rotação muito grande você pode perder

a meia componente de Reeb é o seguinte:

Exemplo 3.3.2. *Considere a mesma aplicação apresentada no Exemplo 3.3.1, $F = (f, g) = (a(y)(x^2 - 1), a(y)(x^2 + x - 1))$. Tanto as curvas de nível de f quanto de g possuem meia componentes de Reeb, contudo ao rotacionar F compondo com $G = (\frac{y-x}{2}, \frac{y+x}{2})$ temos que a folheação a primeira coordenada fica igual a $a(y)x$ cujas curvas de níveis são gráficos de funções e, portanto, são conexas.*

3.4 Resultado parcial de injetividade

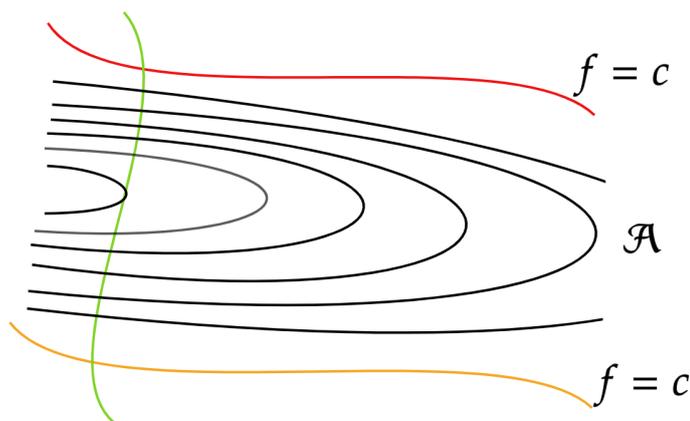
Teorema 3.4.1. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável e semialgébrica. Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ então F é injetiva.*

Demonstração. Suponha que F não seja injetiva. Logo existirá um ponto (c, d) da imagem tal que pelo menos dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do domínio serão levados por F em (c, d) .

Observe que, pelo Corolário 3.2.1, as curvas de nível de f e g formam folheações de classe \mathcal{C}^0 e se L for uma folha de $\mathcal{F}(f)$, $g|_L$ será estritamente monótona. Como consequência desse corolário temos que o nível $f = c$ será desconexo, pelo Corolário 3.2.2.

Pela Proposição 3.3.1, como F não é injetiva e $0 \notin \text{Spec}(F)$ então $\mathcal{F}(f)$ possui uma meia componente de Reeb \mathcal{A} .

Figura 38 – Meia componente de Reeb \mathcal{A} de $\mathcal{F}(f)$



Fonte: elaborada pela autora.

Agora seja $\Pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma projeção ortogonal na primeira coordenada.

Compondo com a rotação, se necessário, podemos assumir que $\Pi_1(\mathcal{A})$ é um intervalo ilimitado. Para simplificar vamos supor $[c, \infty) \subset \Pi_1(\mathcal{A})$.

Para o que se segue utilizaremos o seguinte teorema de Geometria Semialgébrica, cuja demonstração pode ser encontrada no livro de Coste (2002).

Teorema da Monotonicidade: Seja $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ semialgébrica. Então existe uma partição finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) ϕ é contínua e, além disso, é constante ou estritamente monótona.

O Teorema da Monotonicidade afirma que se temos uma função ϕ definida em um intervalo aberto, então existe apenas uma quantidade finita de pontos onde ϕ não é contínua. Observe que se pode estender o domínio de ϕ para $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$.

Então para $a > c$ grande suficiente:

Seja $\varphi(x) : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(x) = \text{Max} \left\{ y; (x, y) \in \mathcal{A} \wedge \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\} = 0 \right\}.$$

Como f e φ são aplicações semialgébricas, temos que $\phi(x) = f(x, \varphi(x))$ é semialgébrica e, pelo Teorema da Monotonicidade, é estritamente monótona e contínua.

Provando a próxima afirmação, teremos que ϕ é diferenciável a menos de uma quantidade finita de pontos. Para prová-la utilizaremos o Teorema de Bezout que será enunciado a seguir e cuja demonstração pode ser encontrada no livro de Hassett (2007).

Teorema de Bezout Se F e G são polinômios, em duas variáveis reais, sem divisor comum de grau positivo, então o número de pontos onde os zeros dos polinômios se tocam, contando com as multiplicidades, é finito.

Afirmação: Seja $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica. Então existe uma partição finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) a aplicação ϕ é diferenciável.

Demonstração. Como ϕ é semialgébrico então seu gráfico $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)); x \in (a, b)\}$ é definido por união de igualdades e desigualdades de polinômios ($P_i = 0$ e $Q_j > 0$), mas como está no \mathbb{R}^2 teremos um polinômio P tal que $P(x, \phi(x)) = 0$. De fato, sabe-se que o Gráfico de uma função não possui pontos interiores, pois se tivesse um ponto (x, y) interior com $f(x) = y$

teríamos uma bola centrada nele e poderíamos encontrar outro ponto (x, y_1) tal que $y \neq y_1 = f(x)$ assim ϕ não seria função. Sabendo disso, se Γ_ϕ fosse união apenas de raízes de desigualdade de polinômios, teríamos que o gráfico seria um conjunto aberto, por ser interseção finita de abertos,

$$\Gamma_\phi = \bigcap P_i^{-1}((0, \infty)),$$

mas seria um absurdo, já que o gráfico de uma função não possui pontos interiores.

Agora, considere os pontos $t \in (a, b)$ tais que $P(t, \phi(t)) = 0$, nos quais não se aplica o Teorema da Aplicação Implícita, ou seja, que $\frac{\partial P}{\partial y}(t, \phi(t)) = 0$.

Podemos decompor P em polinômios irredutíveis $P_1 \cdots P_q = 0$, logo, para cada (x, y) , existe $1 \leq i \leq q$ tal que $P_i(x, y) = 0$, então pelo Teorema de Bezout, existe uma quantidade finita de pontos (x, y) tal que

$$\begin{cases} P_i(x, y) = 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

De fato, como P_i é irredutível, só tem 1 e ele mesmo por divisor. Quando derivamos, o polinômio e sua derivada se tornam primos entre si.

Logo, existe uma quantidade finita de pontos onde $\phi(x)$ não é derivável. De fato, como nas partições limitadas por esses pontos $P|_{((a_i, a_{i+1}), \phi(a_i, a_{i+1}))}$ é C^∞ e $U_0 = ((a_i, a_{i+1}), \phi(a_i, a_{i+1})) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, sejam $(x_0, \phi(x_0)) \in U_0$ tal que $P(x_0, \phi(x_0)) = 0$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, \phi(x_0)) \neq 0$. Então, pelo Teorema da aplicação implícita, existe um intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $J = (\phi(x_0) - \varepsilon, \phi(x_0) + \varepsilon)$ tal que $\forall x \in I \exists ! y = \xi(x) \in J$ tal que $P(x, y) = P(x, \xi(x)) = P(x, \phi(x)) = 0$. Logo, $\xi(x) = \phi(x)$ e $\phi(x)$ é C^∞ .

Portanto, ϕ é derivável em cada partição, ou seja, derivável a menos de uma quantidade finita de pontos. \square

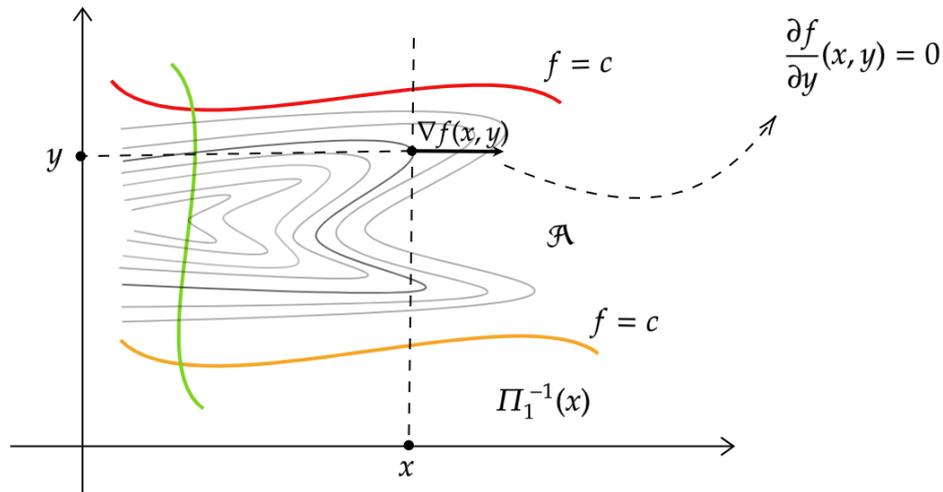
Afirmção: $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) \geq \varepsilon$.

Provada a diferenciabilidade de $\phi(t)$, temos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

Veja que $(t, \phi(t))$ são alguns dos pontos onde $\Pi_1^{-1}(x)$ tangencia uma curva de nível de f , logo, nesses pontos, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) = 0$, pois é o gradiente é horizontal. Portanto, $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t))$.

Figura 39 – Gradiente horizontal



Fonte: elaborada pela autora.

Observe que

Fonte: elaborada pela autora. $DF(t, \varphi(t)) = \begin{pmatrix} \phi'(t) & 0 \\ g_x(t, \varphi(t)) & g_y(t, \varphi(t)) \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular, logo os elementos da diagonal principal são autovalores de $DF(t, \varphi(t))$, isto é, $\phi'(t)$ é autovalor da derivada e como $\text{Spec}(F) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ e ϕ é estritamente crescente teremos $\phi'(x) \geq \varepsilon$.

Agora, seja I a parte da seção transversal restrita às curvas de nível $f = c$, I é compacto e assim $f(I)$ é limitado.

Observe que $f(\mathcal{A}) \subset f(I)$, pois, para todo ponto x de \mathcal{A} , existe um $y \in I$ tal que $f(x) = f(y)$. Logo, $f(\mathcal{A}) \subset f(I)$ é limitado e portando ϕ será limitado. Logo existe $k > 0$ constante tal que $\forall x > a$,

$$0 \leq \phi(x) - \phi(a) < k.$$

Tome $d > a$ grande o suficiente tal que $\varepsilon > k/(d - a)$. Então teremos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que :

$$k > \phi(d) - \phi(a) \geq \int_a^d \phi'(x) dx \geq \int_a^d \varepsilon dx = (d - a)\varepsilon > k$$

Essa contradição prova o teorema. □

4 RESULTADO DE INJETIVIDADE GLOBAL

Para provar o teorema principal precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.0.1. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $\det(F'(x)) \neq 0$ para todo x em \mathbb{R}^2 . Dado $t \in \mathbb{R}$, seja $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela aplicação $F_t(x) = F(x) - tx$. Se existe uma sequência $\{t_m\}$ de números reais convergindo para 0 tal que $F_{t_m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva, então F é injetiva.*

Demonstração. Tome $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_1) = y = F(x_2)$. Suponha que $x_1 \neq x_2$, então pelo Teorema da Aplicação Inversa de Cernavskii, podemos encontrar vizinhanças U_1, U_2, V de x_1, x_2, y respectivamente, tal que para $i = 1, 2$, $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ é um homeomorfismo e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Se m é grande o suficiente, então $F_{t_m}(U_1) \cap F_{t_m}(U_2)$ contém uma vizinhança W de y . Dessa forma, para todo $w \in W$, $\#(F_{t_m}^{-1}(w)) \geq 2$, devido à disjunção de U_1 e U_2 . Logo F_{t_m} não seria injetiva, o que é um absurdo. Portanto $x_1 = x_2$, ou seja, F é injetiva. \square

Teorema 4.0.1. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável e semialgébrica. Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, então F é injetiva.*

Demonstração. Para cada $0 < t < \varepsilon$, a aplicação $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F_t(x) = F(x) - tx$ é injetiva. De fato, como $D(F_t)(x) = DF(x) - tI$, onde I é a aplicação identidade, nós obtemos que se $0 < a < \min\{t, \varepsilon - t\}$ então $\text{Spec}(F_t) \cap (-a, a) = \emptyset$, pois se γ_t é autovalor de $D(F_t)(x)$ então $\gamma = \gamma_t - t$ é autovalor de $DF(x)$. Logo se, os autovalores de $DF(x)$ não estão no intervalo $[0, \varepsilon)$ então os autovalores de $DF_t(x)$ não estão em $[-t, \varepsilon - t)$, tomando $a > 0$ o mínimo de $\{t, \varepsilon - t\}$, obtemos que $(-a, a) \subset [-t, \varepsilon - t)$. Portanto, a interseção é vazia.

Logo pelo resultado parcial F_t é injetiva. Utilizando o lema anterior, temos que F é injetiva, como desejávamos demonstrar. \square

REFERÊNCIAS

- BENEDETTI, R.; RISLER, J.-J. *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Paris: Hermann, Éditeurs Sciences Des Arts, 1990.
- CAMACHO, C.; NETO, A. L. *Introdução à teoria das folheações*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- CERNAVSKII, A. V. Finite-to-one open mappings of manifolds. *Matematicheskii Sbornik*, v. 65, p. 357–369, 1964.
- CERNAVSKII, A. V. Addendum to the paper finite-to-one open mappings of manifolds. *Matematicheskii Sbornik*, v. 66, p. 471–472, 1965.
- CHAMBERLAND, M. A mountain pass to the jacobian conjecture. *Journal of Algebra*, v. 166, n. 1, p. 212–225, 1994.
- COBO, M.; GUTIERREZ, C.; LLIBRE, J. On the injectivity of c_1 maps of the real plane. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 54, n. 6, p. 1187–1201, 2002.
- COSTE, M. *An introduction to semialgebraic geometry*. Pisa: Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000. Originalmente tese de doutorado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Pisa.
- COSTE, M. *An introduction to o-minimal geometry*. Pisa: Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2002.
- EHRESMANN, P.; REEB, G. Sur les transformations des espaces fibrés. *Mathematische Zeitschrift*, v. 85, n. 1, p. 74–96, 1962.
- FERNANDES, A.; GUTIERREZ, C.; RABANAL, R. Global asymptotic stability for differentiable vector fields of \mathbb{R}^2 . *Journal of Differential Equations*, v. 206, n. 2, p. 470–482, 2004.
- FESSLER, R. A proof of the two-dimensional markus-yamabe stability conjecture and a generalization. *Ann. Polon. Math.*, n.62, p. 45–74, 1995.
- HASSETT, B. *Introduction to algebraic geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- KELLER, O.-H. Ganze cremona-transformationen. v. 47, n. 1, p. 299–306, 1939. Items 6 and 7 in the table on page 301.
- LIMA, E. L. *Um curso de análise*. V. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- PINCHUCK, S. A counterexample to the strong jacobian conjecture. *Mathematische Zeitschrift*, v. 217, p. 1–4, 1994.