



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ANTONIO DE PÁDUA DO NASCIMENTO SANTOS**

**SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL, GPS: UMA ALTERNATIVA PARA O  
ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**

**FORTALEZA**

**2023**

ANTONIO DE PÁDUA DO NASCIMENTO SANTOS

SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL, GPS: UMA ALTERNATIVA PARA O  
ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S233s Santos, Antonio de Pádua do Nascimento.  
Sistema de Posicionamento Global, GPS : uma alternativa para o ensino de geometria analítica no ensino médio / Antonio de Pádua do Nascimento Santos. – 2023.  
61 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.
1. Geometria analítica - Estudo e ensino. 2. Sistema de Posicionamento Global. 3. Relatividade geral (Física). 4. Relatividade restrita (Física). 5. Tecnologia educacional. I. Título.

CDD 510

---

ANTONIO DE PÁDUA DO NASCIMENTO SANTOS

SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL, GPS: UMA ALTERNATIVA PARA O  
ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 17/11/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus pelo dom da vida e saúde. Aos meus pais por me ensinarem o caminho do bem e do valor do esforço. A minha esposa e filha por serem grandes incentivadoras e motivações para a minha dedicação.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar pelo dom da vida. Pela saúde e disposição que me permitiu essa importante conquista que é o Mestrado. Aos meus pais que foram meus primeiros mentores, por me ensinarem o caminho do bem e por terem sido uma coluna ao longo da minha carreira estudantil. A minha esposa Thamires e a minha filha Eloah por estarem sempre ao meu lado me apoiando a continuar sempre buscando o crescimento em todas as áreas da minha vida. E também por sempre compreenderem todo o tempo que tive que sacrificar para me dedicar aos estudos.

Ao professor Dr Jorge Herbert Soares de Lira, diretor coordenador da formação continuada que posteriormente veio se chamar curso de especialização qualificação do ensino de matemática no estado do Ceará, que em parceria com a SEDUC, UFC e FUNCAP oportunizaram em parceria com o PROFMAT a realização desse mestrado.

Ao professor Dr Jonatan Floriano da Silva, coordenador do PROFMAT no campus da UFC, pelo apoio e prontidão em sempre atender as demandas da turma e por ter apresentado brilhantemente uma disciplina do curso. Aos professores Dr. (s) José Alberto Duarte Maia, José Othon Dantas Lopes, Marcelo Ferreira Melo e Marcos Ferreira Melo que também brilhantemente nos lecionaram ao longo do curso e tornaram possível a nossa formação. Um adendo especial ao professor Dr Marcelo Ferreira Melo por ter me orientado nessa dissertação.

Aos colegas de curso, um agradecimento especial, pois tornaram a caminhada mais leve, acrescentando momentos ímpares de amizade e compartilhamento de conhecimento. Uma dívida de gratidão incomensurável que durará uma vida inteira. Sucesso multiplicado a todos.

“Se você quer saber como um homem é, preste atenção em como ele trata quem é inferior a ele, não seus iguais” (Rowling, 2000, p. 291).

## RESUMO

O presente trabalho é uma tentativa de apresentar uma nova metodologia de ensino, mostrando como apresentar parte do conteúdo de Geometria Analítica para as turmas de 3º ano do Ensino Médio. E isto usando uma ferramenta tecnológica mundialmente conhecida que é um dos sistemas de navegação posicional por satélite, o sistema GPS. De início explicamos a motivação para a escolha desse assunto e tratamos de dar a sua definição, história e funcionamento. Em seguida falamos dos métodos tradicionais de exposição do conteúdo de Geometria Analítica e, por fim, falamos sobre a metodologia que é produto dessa dissertação. O trabalho de pesquisa foi árduo, principalmente no momento de expor a parte que trata de como a relatividade de Einstein se torna parte indispensável ao funcionamento da ferramenta GPS. Como o assunto aborda a compreensão de assuntos que estão além do escopo de entendimento de uma turma do ensino médio, optou-se por simplificar o conteúdo e não entrar em partes complexas da matéria.

**Palavras-chave:** geometria analítica – estudo e ensino; Sistema de Posicionamento Global; relatividade geral (Física); relatividade restrita (Física); tecnologia educacional.



## ABSTRACT

The present work is an attempt to present a new teaching methodology, showing how to present part of the content of Analytical Geometry for the 3rd year classes of High School. And this using a world-renowned technological tool which is one of the satellite positional navigation systems, the GPS system. At first, we explain the motivation for choosing this subject and try to give its definition, history and functioning. Then we talk about the traditional methods of exposing the content of Analytical Geometry and finally we talk about the methodology that is the product of this dissertation. The research work was hard, especially when it came to exposing the part that deals with how Einstein's relativity becomes an indispensable part of the functioning of the GPS tool. As the subject addresses the understanding of subjects that are beyond the scope of understanding of a high school class, it was decided to simplify the content and not go into complex parts of the subject.

**Keywords:** analytic geometry – study and teaching; Global Positioning System; general relativity (Physics); special relativity (Physics); educational technology.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Os 3 segmentos do sistema GPS.....	16
Figura 2 - 1 satélite numa abordagem bidimensional.....	17
Figura 3 - 2 satélites numa abordagem bidimensional .....	17
Figura 4 - 3 satélites numa abordagem bidimensional .....	18
Figura 5 - 2 satélites numa abordagem tridimensional.....	18
Figura 6 - 3 satélites numa abordagem tridimensional.....	19
Figura 7 - O código que vem do satélite é comparado ao do receptor .....	21
Figura 8 - Entendendo a dilatação do tempo .....	23
Figura 9 - Figura formada pelas trajetórias do feixe de luz para os observadores .....	23
Figura 10 - Plano Cartesiano .....	30
Figura 11 - Distância entre pontos.....	30
Figura 12 - Fórmula da distância entre dois pontos .....	31
Figura 13 - Fórmula do cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento.....	31
Figura 14 - Fórmula do cálculo das coordenadas do baricentro.....	32
Figura 15 - Fórmula do cálculo da área de um triângulo .....	33
Figura 16 - Fórmula para encontrar a equação geral da reta .....	33
Figura 17 - Fórmula do cálculo da distância de um ponto a uma reta.....	34
Figura 18 - Circunferência de centro C (a, b).....	34
Figura 19 - Divisão da Terra em meridianos .....	37
Figura 20 - Divisão dos fusos horários.....	38
Figura 21 - Os paralelos .....	39
Figura 22 - O sistema cartesiano que envolve a Terra .....	39
Figura 23 - Coordenadas da longitude $\lambda$ para a localização de um ponto na superfície	41
Figura 24 - Distância entre Fortaleza e Natal.....	42
Figura 25 - Localização do Estádio Presidente Vargas .....	43
Figura 26 - Circunferência que ilustra o exemplo 4.1 .....	44
Figura 27 - Circunferência com o passo 1 .....	45
Figura 28 - Circunferência após o passo 2 .....	45
Figura 29 - Circunferência após o passo 3 .....	46
Figura 30 - Mapa da região em que Rui estava perdido .....	47
Figura 31 - Circunferência com centro na EEMTI CAIC .....	47
Figura 32 - Circunferência com centro na EEMTI Poeta Patativa .....	48

Figura 33 - Circunferência com centro no Estádio do Bom Jardim ..... 48

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EUA	Estados Unidos da América
OMS	Organização Mundial da Saúde
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>GLOBAL POSITIONING SYSTEM (GPS) .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>História do GPS .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Definição .....</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Forma como a distância é medida.....</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>FORMA COMO O ASSUNTO É LECIONADO HOJE .....</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>FORMA COMO TRATAR DO ASSUNTO DE ACORDO COM A PROPOSTA... </b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>51</b>
	<b>ANEXO A – DEMONSTRAÇÕES.....</b>	<b>52</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ambiente pré – pandemia já colocava diante do professor da educação básica uma tarefa árdua. Motivar adolescentes e despertar neles o interesse pelos estudos. Quando falamos então do estudo de Matemática na escola, esse desafio se acentua ainda mais. Isto porque foi criado um cenário, pelo estigma que foi construído em algum momento, que se perdeu na história, de que a disciplina é difícil e que somente poucas almas elevadíssimas podem chegar ao conhecimento da mesma. Sendo assim, boa parte dos estudantes tem sido desde cedo desestimulados a estudar matemática. Simplesmente desistem, face a sua dificuldade. Abdicando até mesmo dos conteúdos mais simples, sem nem sequer tentar, porque já criaram o tabu de que não adianta tentar, já que não vão aprender.

Não bastasse esse desafio, que por si só já traz muita dificuldade ao trabalho do professor. A descoberta dessa nova doença respiratória em dezembro de 2019, na cidade de Wuhan na China, cujo primeiro caso foi noticiado em território brasileiro em 25 de fevereiro de 2020, potencializou a dificuldade do trabalho na escola. Diante do cenário causado pelo Coronavírus, a escola teve que se adaptar. Foi preciso se adequar a uma nova realidade, e a saída encontrada foi o ensino remoto. Haja visto a orientação da Organização Mundial de Saúde (OMS) de que o isolamento social era a forma de diminuir a propagação do vírus e salvar vidas. As escolas tiveram então que fechar as portas e a sala de aula passou a ser a casa do aluno. Independente desta estar ou não apta a isto.

Foi uma crise mundial que afetou diversos setores desde a política, a economia, a indústria, entre outros setores importantes e passou também pela educação. Como remédio a essa crise surge o ensino remoto. Uma educação adaptada a necessidade criada pela circunstância. Já existia na modalidade EAD, mas agora se tornou universal. Assim os alunos passaram a ter aulas on-line. A sala de aula agora passou a ser a casa do aluno ou qualquer espaço com sinal de Internet de onde o aluno poderia ter acesso ao material da aula. No início quando todos ainda estavam se adaptando, a saída era se comunicar com os alunos via PDF passados via WhatsApp ou pela plataforma educacional do google, o Google Classroom. Era a parte assíncrona do fazer pedagógico. Aos poucos novas ferramentas tecnológicas foram se popularizando, como o Google Meet, possibilitando a parte síncrona do trabalho junto as turmas. Assim como surgiram outras tecnologias para viabilizar o trabalho da escola. Ainda assim, isso causou impacto na produtividade dos alunos, na vida social e no aprendizado. Mas era a única opção de ter como dar continuidade às aulas. A produtividade foi afetada, porque agora o aluno era ainda mais protagonista de seu aprendizado. Sem a presença física do

professor, fosse tirando dúvidas diretamente, fosse cobrando mais empenho por parte do aluno. Isso fez com que os alunos, a quem falta na grande maioria, a maturidade muito em razão de nessa idade ser natural o desejo maior por menos compromisso. Com isso eles foram se tornando mais descuidados com os estudos e isso pesou na qualidade do aprendizado.

Na vida social, parte importante da vida estudantil, o aluno perdeu o contato físico com os colegas em sala de aula. Um fator que também é motivador do aluno comparecer à maioria das aulas. E a presença dele interfere também na qualidade do seu aprendizado, haja visto ele estando em sala vai ter contato com o conteúdo e terá chance maior de aprender. Longe do ambiente de sala e enfrentando recluso em casa toda a crise ocorrida na pandemia, o aluno acabou por ficar mais desestimulado a estudar, além de uma forte carga emocional negativa que o impediu de se dedicar como deveria.

Todo este tempo, ao todo quase dois anos, de afrouxamento nos estudos trouxe um enorme prejuízo ao corpo discente e conseqüentemente trouxe mais carga de trabalho ao corpo docente. Não há ainda como dizer de quanto foi o prejuízo do aprendizado. Nem quanto tempo será necessário para recuperar todo o prejuízo que veio como resultado dessa situação. É certo que isso demandará muito trabalho e trabalho muito bem orientado para que o resultado não demore tanto tempo para acontecer. No que diz respeito a disciplina de Matemática, porque não pensar numa forma contextualizada de apresentar o conteúdo e sua aplicação no cotidiano. Pensando nessa ideia, a dissertação apresenta uma forma de trabalhar uma parte do conteúdo de Geometria Analítica, a qual é relevante, mostrando sua aplicabilidade no cotidiano.

No enfrentamento a esta realidade se faz necessário pensar alternativas ao ensino tradicional, no intuito de motivar novamente os alunos a despertarem para os estudos. Como a modernidade tem por meio dos seus avanços trago mais conforto e possibilidades para o ser humano, porque não se pensar em fazer uso de ferramentas tecnológicas para o trabalho do professor em sala de aula.

Nesse pensamento nasce essa dissertação. Como uma proposta de estudo sobre qual seria o impacto no ambiente de sala de aula de uma turma da educação básica, ao estudar Geometria Analítica, contextualizando parte de seu bojo, utilizando a ferramenta tão atual e presente no cotidiano: o GPS, sigla em inglês para Global Positioning System. Realidade presente no cotidiano de quase todas as pessoas. Seja ela do motorista de aplicativo ou alguém que precisa encontrar o caminho para um lugar ao qual nunca foi, seja em sua própria cidade, seja em uma cidade ao qual esteja visitando. Ambos fazem uso dessa ferramenta para chegar ao seu destino.

Cria-se assim a chance de trabalhar um conteúdo que faz parte da grade escolar, mostrando sua utilidade no cotidiano. A proposta foi trabalhada por meio de 4 capítulos: Além da introdução, que apresenta a problemática retirada do atual contexto da sala de aula. No segundo capítulo pensou-se em apresentar a história do GPS e explicar o seu funcionamento de maneira resumida. Em ato contínuo, a ideia é apresentar a parte do conteúdo que é projeto do estudo e a forma como a mesma é normalmente tratada no dia a dia da escola. No quarto capítulo a ideia é formular como o mesmo conteúdo pode ser tratado em sala, mas agora fazendo a sua contextualização com o GPS, parte principal dessa peça.

Assim, trago como objetivos específicos dessa dissertação:

- Trazer uma nova abordagem para o Ensino de Geometria Analítica no ambiente da sala de aula
- Trabalhar com as novas tecnologias como ferramentas que enriquecem o trabalho do professor em sala
- Despertar nos alunos o interesse pela Ciência, mostrando pra eles a aplicação do conteúdo estudado
- Contextualizar o conteúdo visto em sala de aula com a realidade

Assim também aquilo que justifica a escolha desse tema é o momento pelo qual a educação em todo o planeta passa após a pandemia é o momento ideal pra repensar as práticas educacionais. É fato que na grande maioria das escolas o método de ensino é o mesmo praticado a décadas. Um viajante do tempo ao entrar em duas salas de aula, uma dos dias atuais e outra de 3 ou 4 décadas atrás só veria diferenças no vestuário e penteado dos alunos. A forma como se leciona ainda é muito similar. Não que hoje essa didática não sirva mais, mas a escola como todos os ambientes deve se modernizar. E este trabalho pensa numa forma nova de apresentar o conteúdo contextualizando-o numa tentativa de torná-lo mais atraente. Também uma tentativa de aproximar o estudo da Matemática da realidade.

Também surge como justificativa desse trabalho buscar contemplar habilidades requeridas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (BRASIL, 2018). Esta, que vem pra atender o que estabelece o art. 210 da nossa Constituição Federal. “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.” BRASIL. [Constituição (1988)]

Como o tempo não nos permite, essa dissertação visa tão somente apresentar a proposta como sugestão para um trabalho prático em sala. Que esse estudante que a escreve implementará em sala e trará os resultados num trabalho científico posterior a este.



## 2 GLOBAL POSITIONING SYSTEM (GPS)

### 2.1 História do GPS

Desde cedo o ser humano teve necessidade de compreender o espaço que habitava e como poderia se localizar dentro desse espaço. Primeiro, teve que entender a região onde morava e sua oferta de alimento e abrigo. Só então vai ampliando a sua curiosidade pra lugares mais distantes, em virtude do seu espaço conhecido ter oferta menor que a necessidade. Se fez necessário então criar maneiras de entender que se tinha como ir, deveria saber como voltar de um local ou outro. Foi preciso então determinar posições geográficas. Para isto foi muito útil usar o sol, os planetas e as estrelas como fontes de orientação. Assim, os astros foram os primeiros meios que o ser humano utilizou para se orientar. E mesmo hoje ainda servem de valioso auxílio a tarefa de orientação. Basta citar por exemplo o local onde o sol nasce, que já garante onde o leste se localiza, além dos demais pontos cardeais, colaterais e subcolaterais.

Com o tempo a humanidade foi criando ferramentas que o ajudaram a entender sua posição no espaço. Se hoje é tarefa simples encontrar um objeto dadas as suas coordenadas. Isso é uma dívida nossa, graças a todo o desenvolvimento que surgiu a partir do trabalho que nasceu da necessidade citada no início. Com a necessidade de fazer negócios surge o comércio e logo após as navegações. De início o homem aprendeu a se orientar baseando-se no Sol e nas estrelas e planetas. Mas isso tinha utilidade limitada, pois eles eram reféns das condições climáticas. Nesse momento surge na China um utensílio que foi utilíssimo a esse propósito, a bússola. Veja o que diz Almir Aczel no seu livro: “a Terra nunca mais poderia ser vista da mesma maneira. A bússola foi a mais importante invenção tecnológica desde a roda”.

O homem já não via limites geográficos que o impedissem de descobrir novos espaços e explorar aquilo que ele poderia aproveitar. Outros instrumentos foram sendo criados para melhorar as viagens e facilitar a localização: o astrolábio, o sextante, o quadrante de Davis, a bússola, etc. Mas mesmo esses instrumentos com exceção da bússola, eram reféns das condições climáticas. Em dias que o clima não ajudasse, se tornava muito difícil se movimentar com precisão quanto a orientação.

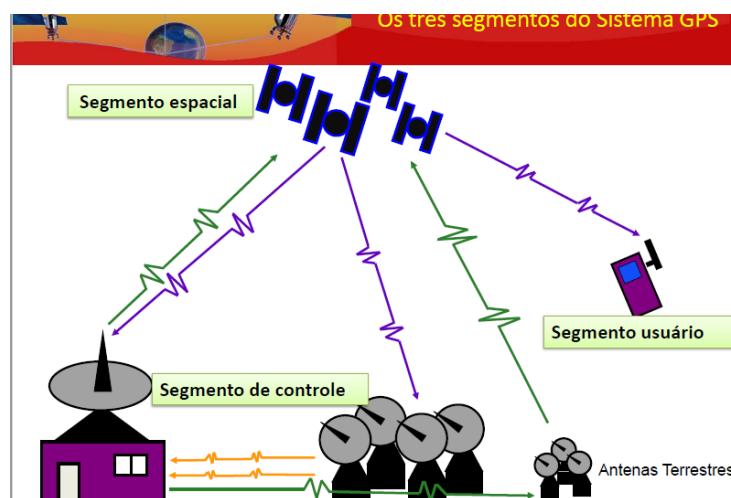
O GPS, como o conhecemos hoje nasce no campo militar. O departamento de defesa estadunidense dá os primeiros passos lá ainda na década de 60. No início chamavam-no NAVSTAR (Navigation System with Timing and Ranging). A ideia era localizar submarinos e dar uma garantia maior a entrega de armas, propiciando assim mais segurança a este serviço. Também monitorava explosões nucleares e orientava mísseis de última geração. Gerou um custo elevado aos EUA de mais de 10 bilhões de dólares.

## 2.2 Definição

Chamado Global Positioning System, traduzido como Sistema de posicionamento global, ou simplesmente GPS. É um sistema de rádio navegação que foi criado nos EUA com objetivos bélicos. De início ele se chamava NAVSTAR e o primeiro satélite foi lançado em 1978. Mas só veio se tornar funcional para uso civil em 1996. Ele funciona com um sistema de 32 satélites em órbita, dos quais 24 estão operando, por isso são chamados centrais. Os outros 8 ficam à disposição, preparados para assumir a posição de um dos 24, em caso de falha. Estes últimos são os satélites de substituições de emergência. Eles orbitam a uma altura de 20 000 km acima de nós e viajam a uma velocidade de 14 000 km/h, perfazendo assim um ciclo de duas voltas por dia aproximadamente. Eles são assistidos por bases fixas com as quais se comunicam, comunicando-se também entre si sempre no intuito de verificar sua posição e trajetória com a maior precisão possível e corrigindo eventuais ajustes quando necessários. O sistema necessita utilizar 4 desses satélites para conseguir localizar um objeto. Eles dispõem de um relógio atômico.

O sistema GPS dispõe de três segmentos. O primeiro segmento é o segmento espacial que é composto pelos satélites que navegam sob órbita pré – determinada e enviam sinais/ códigos, ou seja, eles geram e transmitem o sinal GPS. O segundo segmento é o segmento de controle, que é composto por estações terrestres que são responsáveis pela manutenção e controle. Eles monitoram o tempo e a órbita dos satélites. São 5 estações, ao todo, de monitoramento. O terceiro segmento são os receptores de GPS que captam o sinal de 4 ou mais satélites.

Figura 1 - Os 3 segmentos do sistema GPS



Fonte: Tagliani (2021, Repositório Digital da furg)

Ele usa a trilateração para encontrar o objeto. A trilateração é um processo que envolve o cálculo de distâncias, o que não deve ser confundido com triangulação, que é usada para calcular ângulos. Vamos entender primeiro isso de forma bidimensional, tomando 3 satélites. Primeiro usando técnicas de matemática, calcula-se a distância entre cada satélite e o objeto que se quer encontrar. O primeiro satélite sabe que o objeto está a uma distância  $R_1$ , ou seja, ele está em algum lugar da circunferência que tem o satélite como centro.

Figura 2 - 1 satélite numa abordagem bidimensional



Fonte: Cursos.geosemfronteiras.org, 2023

Tomando agora o segundo satélite, o objeto está a uma distância  $R_2$  deste. Isto indica que sua posição deve satisfazer ambos os raios. Em resumo, o objeto deve estar em um dos pontos de interseção das duas circunferências, que se intersectam em dois pontos. Temos assim duas possíveis posições para sua localização.

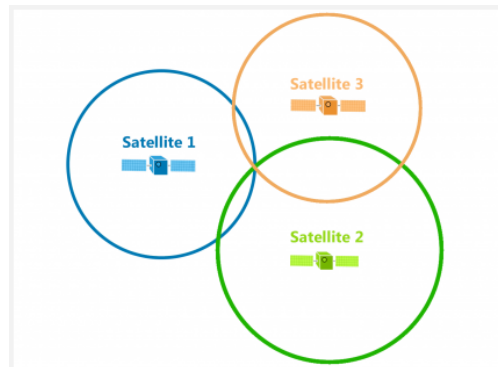
Figura 3 - 2 satélites numa abordagem bidimensional



Fonte: Cursos.geosemfronteiras.org, 2023

Usando agora o terceiro satélite, temos uma terceira circunferência. Esta fornece ao sistema condições para que o mesmo consiga definir qual dos pontos indica a localização do objeto. Pois o objeto está na intersecção das três circunferências.

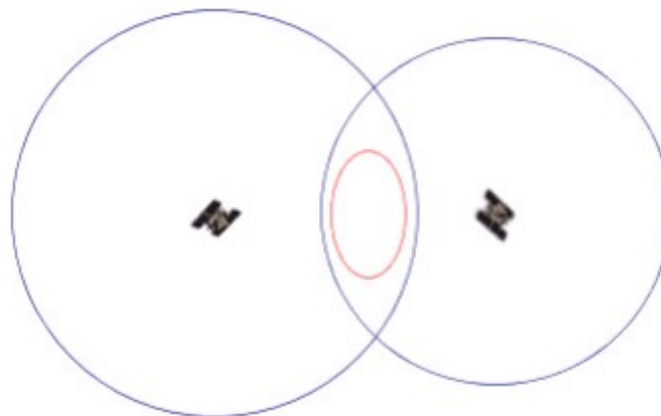
Figura 4 - 3 satélites numa abordagem bidimensional



Fonte: Cursos.geosemfronteiras.org, 2023

No mundo real, que é tridimensional, usamos a mesma abordagem, mas com algumas ampliações. Usaremos agora 4 satélites para realizar a mesma tarefa. Vamos tomar um satélite como referência e medindo a distância dele até o objeto na Terra. Tomando esse satélite como centro de uma esfera de raio igual a distância do objeto ao satélite. Essa ação reduzirá a posição do objeto a superfície da esfera gerada aqui. O objeto procurado estará a uma distância  $R_1$  do centro dessa esfera. Tomamos então um segundo satélite e o objeto estará a uma distância  $R_2$  do centro desta nova esfera. Estará na superfície da esfera formada tomando como centro esse segundo satélite. A intersecção dessas duas esferas é uma circunferência. Isto reduz a possibilidade de posições do objeto ao comprimento dessa circunferência. A figura a seguir mostra ajuda a enxergar melhor isso.

Figura 5 - 2 satélites numa abordagem tridimensional

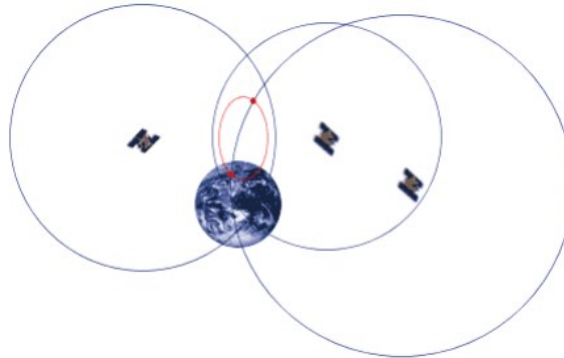


Fonte Marino (2010)

Com a ajuda de um terceiro satélite é possível reduzir as duas posições à localização do objeto. Pois a intersecção dessa terceira esfera com a circunferência gerada pela intersecção

das esferas geradas pelos primeiros satélites mostra duas possibilidades de posição para o objeto.

Figura 6 - 3 satélites numa abordagem tridimensional



Fonte: Marino (2010)

Como no caso bidimensional citado anteriormente, usamos um quarto satélite e obtemos uma quarta esfera, então essa nos dará a posição correta do objeto. Podemos também tomar a Terra como a quarta esfera e esta nos dará a posição certa do objeto.

### 2.3 Forma como a distância é medida

Vejamos agora como o satélite calcula a sua distância até o receptor. Cada satélite é equipado com um relógio atômico de altíssima precisão. Então cada um deles envia um sinal de rádio intermitente a Terra. Esse sinal vai conter a hora exata em que foi enviado e a posição do satélite, que será captada por um receptor na Terra. Como o sinal enviado viaja na velocidade da luz, o receptor recebe o sinal após certo período de tempo. Chamemos  $t_1$  ao horário em que o sinal foi enviado e  $t_2$  o horário em que o sinal chega ao receptor. Ao calcularmos a diferença entre os tempos  $t_1$  e  $t_2$  e multiplicando – o pela velocidade da luz ( $c = 299\,792\,458\text{ m/s} \approx 3 \times 10^8$ ) é possível descobrirmos a distância do receptor até o satélite.

$$\text{Distância} = (t_2 - t_1) \cdot c \quad (1)$$

Onde

$t_1$  = horário de saída do sinal enviado pelo satélite ao receptor

$t_2$  = horário de chegada do sinal enviado pelo satélite no receptor

Mas precisamos observar com atenção que a medição do tempo deve acontecer de forma muito precisa, pois um erro de microssegundos resultará num erro na faixa dos quilômetros, já que estamos falando da velocidade da luz. Algo que seria problema é que os receptores dos sinais enviados pelos satélites não possuem relógios altamente precisos como os dos satélites, que já dissemos, são relógios atômicos. Assim a medição do tempo gasto pelos sinais não é sincronizado em ambos, satélites e receptores. Os celulares, notebooks, e demais receptores de GPS aqui na Terra, por exemplo, utilizam relógios de cristais que não são tão precisos quando comparados com os relógios atômicos dos satélites. Um relógio atômico no celular seria algo impraticável, visto que um relógio atômico custa entre U\$ 50 000 a U\$ 100 000. Nasce assim uma diferença entre o tempo em que o sinal de rádio gasta. O satélite terá um valor de tempo diferente do que o relógio dos receptores verificam. Essa diferença de tempo é chamada como deslocamento de tempo. Que causaria um enorme erro nos cálculos.

Além disso, para realizarem seu trabalho e descobrir onde um objeto está, os satélites têm um desafio: lidar com a relatividade; restrita e geral. Por estarem fora do campo gravitacional da Terra os satélites medem o tempo de uma forma diferente. O satélite se move a uma velocidade de 14 000 km/h e assim o tempo passa mais devagar para ele, conforme Einstein explicou na Teoria da Relatividade Restrita. Ele concluiu que relógios em movimento (num referencial inercial) atrasam-se em relação a relógios parados.

Mais tarde, Einstein também percebeu que o ritmo de um relógio não depende só da velocidade, mas também da gravidade. Relógios em lugares mais altos de um campo gravitacional são mais rápidos que relógios em pontos mais baixos, Devido sua órbita, a gravidade que age sobre os satélites é menor do que na atmosfera, e isso faz com que o tempo passe mais rápido em órbita. O que é resultado da Teoria da Relatividade Geral. Veja o que observa Faggian na sua dissertação de Mestrado:

Deve-se levar em conta que os satélites estão em uma órbita de  $\approx 20\,200$  km da superfície e a uma velocidade de  $\approx 14\,000$  km/h e, segundo Einstein, o espaço e a gravidade distorcem o tempo, ou seja, o tempo passa mais rápido em órbita do que na superfície, por isso é imprescindível que os relógios sejam sincronizados constantemente, uma vez que, como o sinal é extremamente rápido, um erro de microssegundo ( $10^{-6}$  s) acarreta uma perda de precisão de  $c \times 10^{-6} = 300$  m, um erro grande demais que deixaria o sistema sem serventia (Faggian, 2019, p 17)

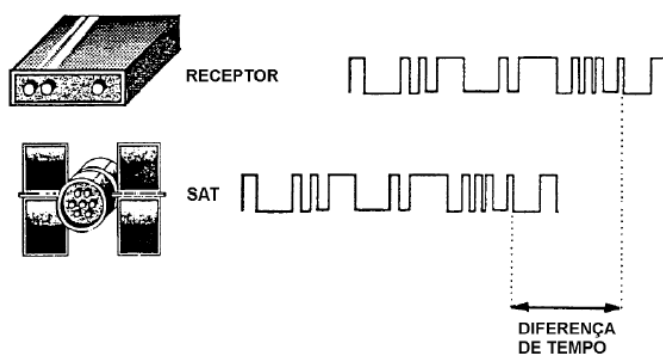
Por conta disso, os relógios atômicos dos satélites estão 38 microssegundos mais velozes que os relógios na Terra todos os dias. Sem nenhuma correção, as localizações de GPS estariam 9,65 km a mais de distância a cada dia.

Entrando em detalhes, vejamos como o sistema GPS lida e resolve essas duas situações. Primeiro vejamos como lidar com a diferença nos relógios. Para realizar a medição do tempo de viagem do sinal, o satélite e o receptor emitem sinais de rádio codificados. Eles fazem isso ao mesmo tempo. Cada satélite emite um sinal com modulação específica chamado “Pseudo-Random Code” (código pseudo-aleatório). Ele faz isso em duas frequências, que são L1 e L2. Esses sinais permitem identificar o satélite. O sinal L1 é articulado por códigos C/A e P, ao passo que o sinal L2 somente no código P.

- Código C/A: (Course/acquisition code) fornece informações de aquisição e navegação
- Código P: (Precision code) trabalha com medições de precisão, restritas ao uso militar.

Programa-se então o satélite e o receptor para emitir o mesmo código no mesmo instante. O receptor examina o código que chega do satélite e verifica a quanto tempo ele gerou o mesmo código. Em sua Dissertação, Davi Dantas Lima explica que o sinal chega com defasagem ao receptor que calcula o lapso de tempo pela diferença entre os instantes em que recebeu e em que gerou o mesmo código. (LIMA, 2013) ver figura 7

Figura 7 - O código que vem do satélite é comparado ao do receptor



Fonte: Lima (2013)

Multiplica-se então esse lapso de tempo pela velocidade da luz, conforme a equação (1) e encontramos o valor para a distância. Conhecidos a localização dos satélites e as distâncias a no mínimo 4 satélites, temos então as equações de 4 superfícies esféricas que tem como interseção o ponto procurado em coordenadas cartesianas.

Agora vejamos, como o sistema lida com respeito ao problema dos satélites estarem numa órbita que sofre influência com respeito a gravidade. Aqui colocamos o pé na

Relatividade. De início vamos falar da Relatividade Restrita, teoria formulada por Albert Einstein em 1905, quando o mesmo possuía apenas 26 anos de idade. Foi publicada o artigo “A Eletrodinâmica dos corpos em movimento”. Ela tem como base 2 postulados:

- As leis da Física são as mesmas para todos os observadores em todos os referenciais inerciais.
- A velocidade de propagação da luz no vácuo é a mesma em todos os sistemas de referenciais inerciais.

Ela traz vários resultados como consequência. Só pra citar alguns, podemos falar que ela definiu a velocidade da luz no vácuo como a velocidade limite para as velocidades. Além disso, nada no Universo pode se mover com velocidade igual e menos ainda, superior a velocidade da luz. Isso está exposto no famoso princípio da equivalência. A mais famosa fórmula de Einstein:

$$E = m \cdot c^2 \quad (2)$$

Onde:

E = energia

m = massa

c = velocidade da luz no vácuo

Esse se tornou o resultado mais importante da Teoria da Relatividade Restrita. Como Einstein na teoria da relatividade restrita conseguiu entender, a velocidade da luz é constante e invariável. Logo pela fórmula, em um sistema físico, o aumento da massa implica no aumento da energia e vice-versa. Isso ajuda a entender o porquê de a velocidade da luz ser o limite de velocidade no universo. Pois se supormos um objeto de massa qualquer acelerando até atingir a velocidade da luz. Esse objeto ganharia massa ao ser empurrado enquanto adquire grandes velocidades. A medida que a velocidade aumenta, vai ficando cada vez mais difícil para a força “empurrar” o objeto à medida que sua massa aumenta dificultando o movimento. Seria necessário uma força infinita para empurrar um objeto cada vez mais pesado. Concluimos, quanto mais rápido um objeto viaja, maior se torna sua massa, pois ele precisa de mais energia para aplicar força para acelerar.

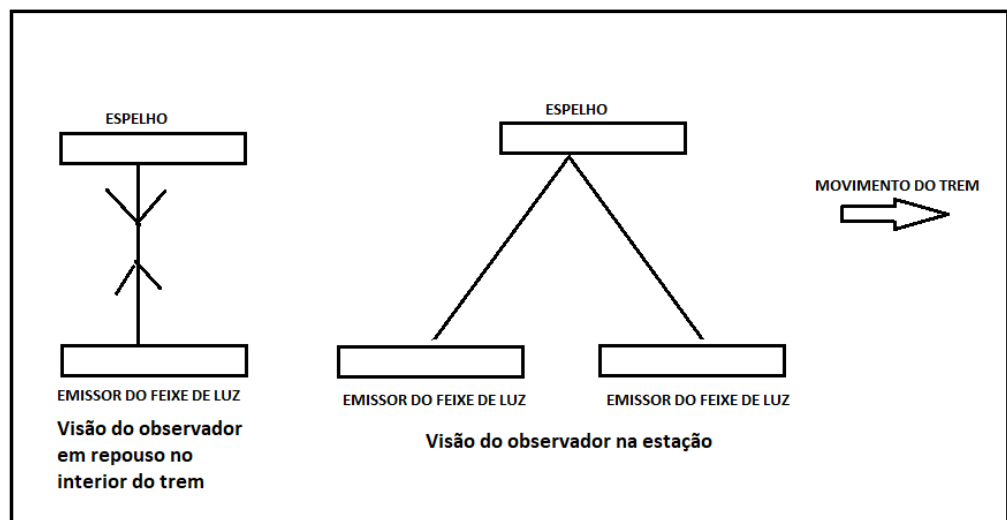
Ela também possibilitou o entendimento de que o tempo e o espaço não são absolutos. O mesmo evento visto por observadores que estão em estados diferentes (repouso e movimento), terá divergências em relação a estas variáveis. São as ideias de dilatação do tempo



e contração do espaço. Ambas são consequência da invariância da velocidade da luz. Aqui comentaremos apenas da dilatação do tempo.

Vamos analisar cada uma pra entendermos melhor. Uma pessoa está no interior de um vagão de trem e outra está na estação pela qual o trem está passando. Tomando um emissor de laser colocado no piso do trem no interior de um vagão, emite um feixe de luz que incide em um espelho colocado no teto e retorna ao emissor. Para a pessoa que estão no interior do trem, olhando de frente essa situação ela irá observar a luz realizar a trajetória de uma linha reta vertical. Enquanto a pessoa que observa o mesmo evento da estação pela qual passa o trem, ela verá o feixe de luz realizar uma trajetória na diagonal. O desenho a seguir ilustra essa situação.

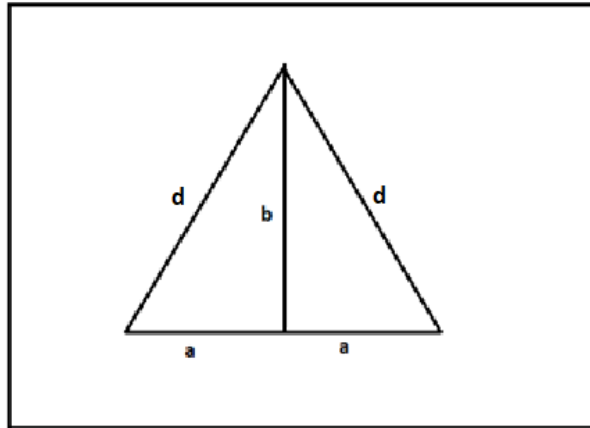
Figura 8 - Entendendo a dilatação do tempo



Fonte: elaborada pelo autor

Na parte a esquerda do desenho está representada a trajetória que o feixe de luz faz como sendo uma linha vertical perpendicular ao movimento do trem, que mostra o feixe de luz saindo do emissor em direção ao espelho e retornando na vertical ao mesmo ponto. Já na parte à direita está apresentada a visão do observador na estação que vê o trem passar. Ele enxerga o movimento do feixe de luz acontecendo na diagonal. Vamos unir a forma como cada observador enxerga num só desenho.

Figura 9 - Figura formada pelas trajetórias do feixe de luz para os observadores



Fonte: elaborada pelo autor

Para ambos a velocidade da luz deve ser a mesma. Vamos chamar  $t_1$  o tempo que a luz leva para percorrer metade do seu caminho ao longo da linha  $d$ . Vamos usar o mesmo intervalo de tempo pra medir o tempo gasto pro trem percorrer a distância  $a$ . Vamos usar  $t_2$  para o intervalo de tempo gasto pela luz para percorrer a distância  $b$ . Assim, a distância  $a$  percorrida pelo trem, é dado por:

$$a = v \cdot t_1 \quad (3)$$

Para o observador dentro do trem, a distância  $b$  é dada por:

$$b = c \cdot t_2 \quad (4)$$

E para o observador na estação, a distância  $d$  é dada por:

$$d = c \cdot t_1 \quad (5)$$

Onde:

$v$  é a velocidade do trem

$c$  é a velocidade da luz

Usando Pitágoras temos:

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad (6)$$

Substituindo (2), (3) e (4) em (5), temos:

$$v^2 \cdot t_1^2 + c^2 \cdot t_2^2 = c^2 \cdot t_1^2$$

$$c^2 \cdot t_2^2 = c^2 \cdot t_1^2 - v^2 \cdot t_1^2$$

Dividindo ambos os termos por  $c^2$ , ficamos com

$$t_2^2 = t_1^2 - \frac{v^2}{c^2} t_1^2$$

Colocando  $t_1$  em evidência e extraindo a raiz quadrada em ambos os termos, ficamos com:

$$t_2 = t_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

Donde podemos entender que o tempo para o passageiro dentro do trem é menor. O tempo para ele passou mais devagar. Assim compreendemos que para o observador em repouso é superior aquele marcado pelo observador em movimento, ou seja, o tempo sofreu uma dilatação. É o que pontua Helerbrock em seu artigo para o site da Brasil Escola:

Na prática, a dilatação temporal faz com que os ponteiros do relógio “girem mais lentamente”, como se a duração convencional do segundo e do minuto, por exemplo, sofresse um pequeno acréscimo. (Helerbrock., 2023, Brasilescola)

Além disso, ele pontua também que a dilatação do tempo aparece em duas situações. Primeiro, quando um dos referenciais move-se com velocidade próxima a velocidade da luz. Ou quando um dos referenciais está em uma região de potencial gravitacional diferente do outro referencial. Este último é o caso do satélite que devido a sua órbita, está sob potencial gravitacional diferente do receptor na Terra. Podemos mexer nessa equação (6) e encontramos assim a equação da dilatação temporal:

$$t_0 = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Onde:

$t_0$  = intervalo de tempo marcado pelo observador em repouso

$t$  = intervalo de tempo marcado pelo observador em movimento

$v$  = velocidade do corpo em movimento

$c$  = velocidade da luz (300 000 000 m/s)

Uma forma simplificada de entendermos isto foi explicado no paradoxo dos gêmeos, que diz que se um homem fizer uma viagem numa espaçonave viajando na velocidade da luz ou próxima a ela, quando ele voltar à Terra depois de um tempo, ele estará mais jovem que seu irmão que ficou na Terra. Por exemplo, tomemos que Alisson foi colocado numa nave espacial que viajou a uma velocidade que correspondia a 80% da velocidade da luz. Essa viagem durou 4 anos para ele. Quanto tempo durou essa viagem para seu irmão gêmeo Bruno, que ficou na Terra?

$$t_0 = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9)$$

$t_0$  = tempo da duração da viagem para Bruno (gêmeo que ficou na Terra)

$t = 4$  anos (tempo da duração da viagem para Alisson)

$v = 0,8c$

$c$  = velocidade da luz no vácuo

Resolução

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} \Rightarrow t_0 = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{0,64c^2}{c^2}}} \Rightarrow t_0 = \frac{4}{\sqrt{1 - 0,64}} \Rightarrow t_0 = \frac{4}{\sqrt{0,36}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_0 = \frac{4}{0,6} \Rightarrow t_0 = 6,7 \text{ anos} \end{aligned}$$

Fica exposto que o tempo de duração da viagem para Bruno, o gêmeo que ficou na Terra, foi de 6,7 anos. O gêmeo que ficou na Terra estava 2,7 anos mais velho. O tempo sempre é maior para o referencial que permaneceu em repouso.

Agora retornando aos nossos satélites gps, que são nosso tema de estudo. Vamos ver o que acontece com o satélite por conta da relatividade restrita. Vejamos o que mostra a Nagwa, uma startup de tecnologia em educação que trabalha com o intuito de ajudar alunos e professores. Ela explica em seu site o que acontece no satélite devido sua alta velocidade em órbita ao redor da Terra. De início vamos necessitar da equação de dilatação do tempo para calcular o tempo segundo o prisma do relógio do satélite.

Seja  $t_0$  é o tempo, em segundos, para um observador na Terra, e seja  $t$  o tempo marcado no relógio atômico do satélite. Vamos usar  $v$  para a velocidade do satélite, em metros por segundo e  $c$  como a velocidade da luz, que é de 300 000 000 m/s.

Primeiro vamos determinar a velocidade do satélite. Sua órbita é a 20 000 km acima da superfície (20 000 000 m). Tomando o raio da Terra que é de 6 371 km (6 371 000 m). Tomando o centro da Terra como sendo o centro da circunferência, temos que o comprimento da circunferência da órbita, supondo que seja uma circunferência. O comprimento dessa circunferência é de  $2 \cdot \pi \cdot (20\,000\,000 + 6\,371\,000) = 165\,693\,879,7$  m. Como o satélite demora 11hs e 58 min (43 080 seg) para dar uma volta na Terra. Com essas informações podemos calcular a velocidade do satélite:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (10)$$

Onde:

$$\Delta s = 165\,693\,879,7 \text{ m}$$

$$\Delta t = 43\,080 \text{ seg}$$

$$v_m = \frac{165\,693\,879,7}{43\,080} \Rightarrow v_m = 3\,846 \text{ m/s}$$

Isso representa uma velocidade de 13 845 km/h.

De posse desse valor podemos retornar a equação da dilatação do tempo e substituir os valores que temos.

$$t_0 = \frac{86\,400}{\sqrt{1 - \frac{3\,846^2}{300\,000\,000^2}}} = 86\,400,00000711020\dots$$

Temos assim que o tempo para o satélite é de 1 dia e mais 7 microssegundos. O que concorda com o que diz a relatividade restrita, o tempo passa mais devagar para quem viaja a altas velocidades.

Agora precisamos falar também da relatividade geral. Que foi apresentada 10 anos depois da Relatividade Restrita na Academia Prussiana de Ciências pelo mesmo Einstein e publicada meses depois. Entre outras coisas, nela Einstein definiu que grandes massas têm a capacidade de distorcer o espaço, assim por consequência, o tempo. Veja o que observa Rafael Helerbrock em seu artigo para o site da Brasil Escola

... quando a luz se propaga em regiões do espaço altamente distorcidas por grandes massas, seu caminho é curvado. Dessa forma, é possível que as imagens de algumas estrelas apareçam repetidas ou ainda borradas nas imagens feitas por telescópios e radiotelescópios. (Helerbrock, 2023, Brasilescola)

Assim, quando a luz se propaga pelo espaço, sendo ele curvo na proximidade de grandes massas, ela demora tempos diferentes para observadores que se encontrem em regiões gravitacionais distintas.

Vejamos o caso dos satélites que estão a uma altura de 20 000 km acima da superfície, e assim, sofrem uma ação diferente do campo gravitacional da Terra. Os satélites experimentam  $\frac{1}{4}$  da gravidade na Terra. Como consequência disso, o tempo medido pelos relógios passa um pouco mais rápido. Nesse caso, cerca de 45 microssegundos por dia.

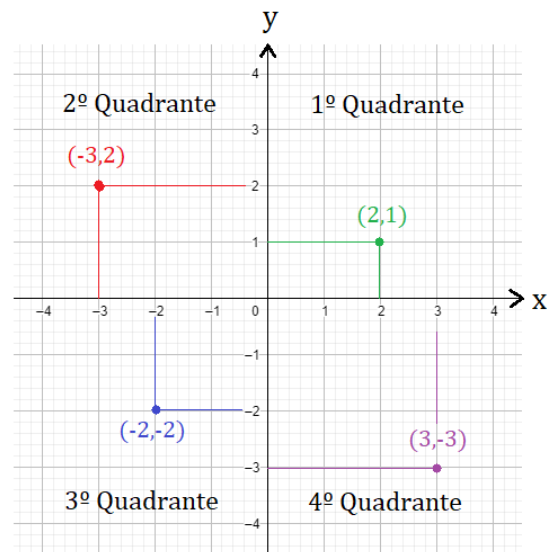
Logo, tomando os 7 microssegundos mais lentos em razão da alta velocidade e 45 microssegundos mais rápidos por conta da gravidade. Isso cria uma diferença de 38 microssegundos por dia. Para compensar essa diferença uma equação é integrada ao satélite para fazer essa correção. Sem essa correção, o sistema seria inutilizável.

### 3 FORMA COMO O ASSUNTO É LECIONADO HOJE

O conteúdo de Geometria Analítica normalmente é visto na 3ª série do Ensino Médio. Apesar de ele ter tido o primeiro contato com o plano cartesiano já no 9º ano do ensino fundamental, esse contato se restringe a localização de pontos no plano e construção de gráficos de equações do tipo afins e quadráticas. Já no ensino médio desde o primeiro ano ele passa a estudar o plano cartesiano novamente e aprende a construir o gráfico no plano de outros tipos de equações, no caso funções modulares, exponenciais e logarítmicas. A partir do 3º ano que ele vai aprofundar e entender melhor a Geometria Analítica como um casamento entre a Geometria e a Álgebra. Vai passar a entender que as figuras e entes geométricos podem ser representados por meio de equações.

De início ele é rerepresentado ao Plano Cartesiano e torna a ver como os pontos se localizam no plano. Nesse ponto, o professor aborda a parte histórica do conteúdo falando que o nome “cartesiano” é uma homenagem ao filósofo, físico e matemático francês René Descartes, que foi o grande expoente que deu ponto de partida no estudo do plano com coordenadas, tal qual conhecemos na Geometria Analítica. Aqui se fala que o plano é formado por 2 eixos, um horizontal conhecido como o eixo das abscissas e outro vertical, conhecido como eixo das ordenadas. Passa-se então a falar da localização dos pontos no plano a partir de suas coordenadas, ou seja, que dado 2 coordenadas  $(x, y)$  quaisquer é possível localizá-las no plano cartesiano e assim encontrar o ponto que elas representam. Assim como, dado o ponto no plano, é possível traçar linhas paralelas aos eixos coordenados e suas intersecções com os eixos nos dirão quais são as suas coordenadas. Também é falado da divisão do plano em quatro regiões, as quais chamamos de quadrantes. Que possuem as seguintes propriedades: o primeiro quadrante é a região do plano que possuem ambas as coordenadas positivas, isto é, tanto a abscissa quanto a ordenada são positivas. Já o segundo quadrante possui os pontos de abscissa negativa e ordenada positiva. O terceiro quadrante tem ambas as coordenadas negativas e o quarto quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa.

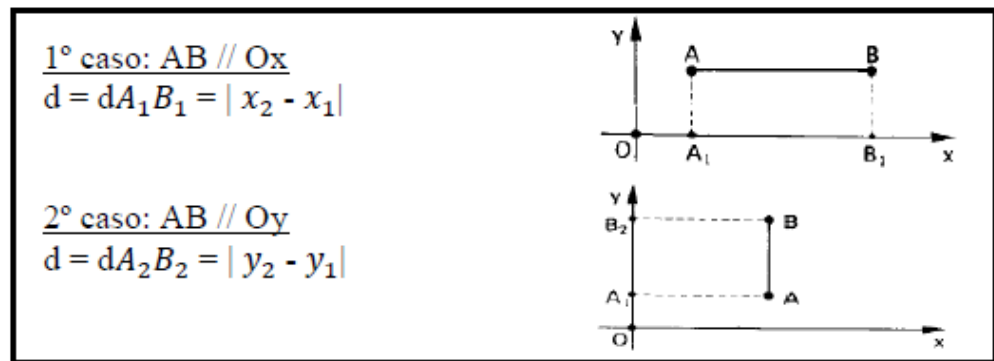
Figura 10 - Plano Cartesiano



Fonte: Infoescola (2023)

Então fala-se da distância entre dois pontos. Primeiro tomando pontos que quando unidos por um segmento de reta, estes são paralelos aos eixos ordenados e a distância entre esses pontos é dada pelo módulo da diferença entre as suas coordenadas.

Figura 11 - Distância entre pontos



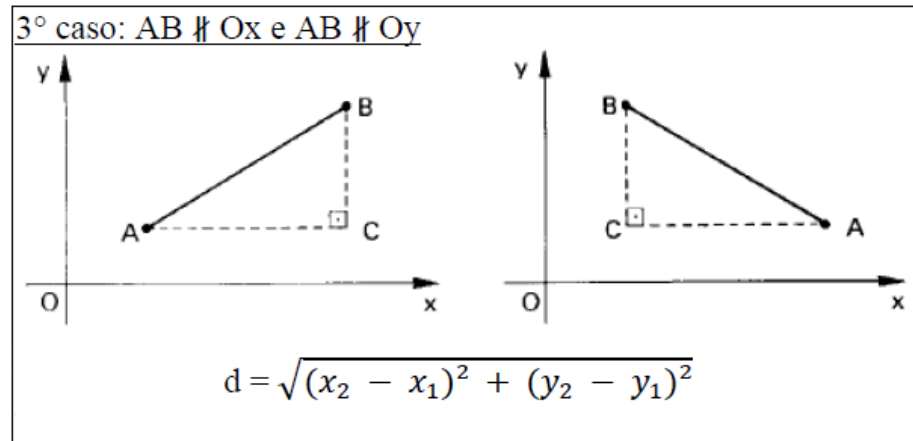
Fonte: elaborada pelo autor

Em seguida usa-se Pitágoras para demonstrar como é construída a fórmula para calcular a distância entre pontos, cujo segmentos que os unem não são paralelos aos eixos ordenados. Essa se trata de uma construção bem enriquecedora, pois através dessa demonstração o aluno tem condições de assimilar melhor a fórmula de tal maneira, que fica bem mais fácil de lembrá-la. Inclusive no caso de esquecer basta lembrar como ela é construída, que assim é possível chegar a ela. Visando manter a linha de raciocínio, as demonstrações para



esta e as próximas fórmulas de Geometria Analítica irão aparecer ao final da dissertação, na forma de Apêndice.

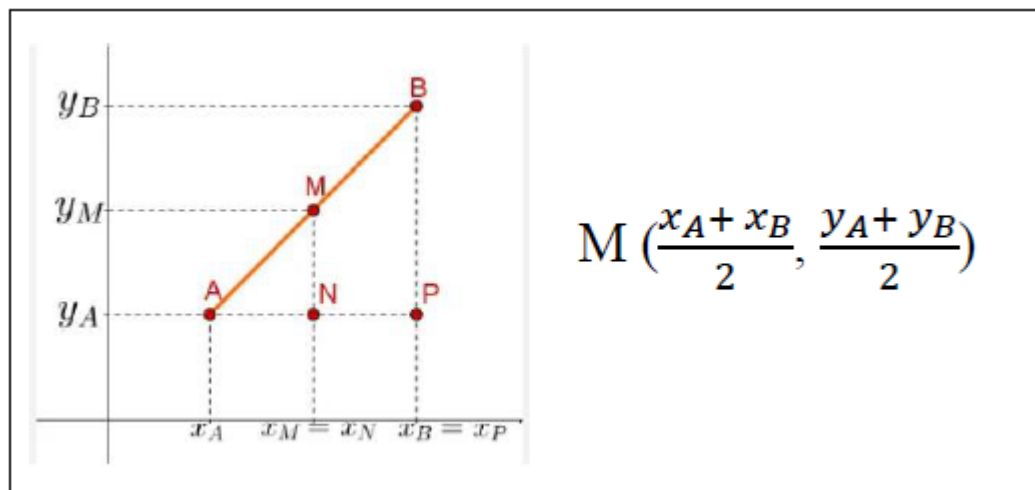
Figura 12 - Fórmula da distância entre dois pontos



Fonte: elaborada pelo autor

Em seguida o professor fala sobre como calcular o ponto médio de um segmento dadas as coordenadas de seus pontos extremos. Se trata do ponto que divide o segmento em duas partes iguais. A dedução dessa fórmula é feita utilizando o conceito de semelhança de triângulos.

Figura 13 - Fórmula do cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento

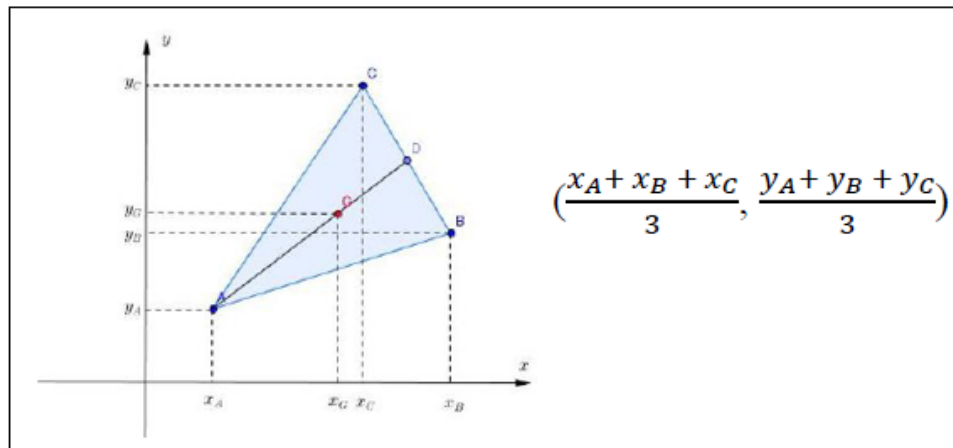


Fonte: O Baricentro da Mente (2023)

Surge então ocasião para falar também sobre a mediana. Uma ceviana que une o vértice do triângulo ao ponto médio de seu lado oposto. Agora o aluno já tem elementos pra

encontrar os pontos extremos da mediana, sendo conhecidos os pontos que são vértices do triângulo. Visto que ele pode usar o cálculo do ponto médio para calcular aquele citado. Como também pode calcular o tamanho das medianas, usando a fórmula do cálculo da distância entre dois pontos. Usando a fórmula para calcular o ponto médio, consegue também deduzir a fórmula para calcular o baricentro do triângulo. Ele chega a conclusão que as coordenadas do baricentro são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices do triângulo.

Figura 14 - Fórmula do cálculo das coordenadas do baricentro



Fonte: elaborada pelo autor

Após isto, o professor se dedica a falar sobre como verificar se 3 pontos estão ou não alinhados. Para isso, ele relembra a turma o conceito de cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, que já foi estudado no 2º ano do Ensino Médio. A matriz é construída com as coordenadas da primeira e da segunda coluna sendo as coordenadas x e y de cada um dos pontos. A última coluna tem todos os termos iguais a 1. Os pontos estarão alinhados se o determinante dessa matriz for igual a 0. Caso o resultado seja diferente de 0, os pontos não estão alinhados. Alguns professores optam nessa parte do assunto pra falar do cálculo da área do triângulo. Haja vista a fórmula desta ser uma leve ampliação da outra. Outros preferem tratar desse tema posteriormente. Essa última é a forma de pensar desse professor.

Figura 15 – Fórmula do cálculo da área de um triângulo

Considere três pontos quaisquer  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$

A área desse triângulo será dada por:  $A = \frac{|D|}{2}$

Onde  $D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$

Fonte: elaborada pelo autor

Passa-se então ao estudo da reta. Sua equação geral e demais formas. Para encontrar a equação geral o professor volta a usar a ideia de determinante. Lembrando que para que três pontos estejam alinhados é necessário que o determinante desses três pontos seja igual a zero. Bastaria tomar um ponto genérico qualquer  $(x, y)$  e outros dois  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$  e verificar:

Figura 16 - Fórmula para encontrar a equação geral da reta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fonte: elaborada pelo autor

Ao resolver esse determinante é possível encontrar a equação geral da reta que é o do tipo  $ax + by + c = 0$ . Um ponto  $(x, y)$  qualquer, pertencerá a essa reta quando  $x$  e  $y$  verificarem a equação como verdadeira.

Logo após, fala-se da inclinação da reta e a tangente desse valor é o seu coeficiente angular, que vai caracterizar a declividade da reta em relação ao eixo das abcissas (Ox). Este assunto depois vai ser útil para a construção da equação fundamental da reta. Passa-se então pro cálculo da distância entre ponto e reta. Essa distância é calculada unindo esse ponto à reta através de um segmento, que deve ser perpendicular à reta. Essa seria a menor distância entre o ponto e a reta. Por isso opta-se por ela.

Figura 17 - Fórmula do cálculo da distância de um ponto a uma reta

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

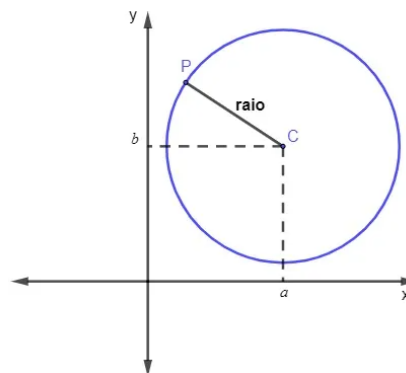
Fonte: elaborada pelo autor

Então chega-se ao estudo da circunferência, que é o conjunto dos pontos que estão a uma mesma distância do seu centro. O estudo se inicia falando da equação reduzida da circunferência. Pra isto, basta que se conheça seu raio e as coordenadas do centro da circunferência. Uma circunferência de centro  $C = (a, b)$  e raio  $r$  possui como equação reduzida:

$$\text{Equação reduzida da circunferência} = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (11)$$

Esta pode ser representada no plano cartesiano como se segue na figura:

Figura 18 - Circunferência de centro  $C (a, b)$



Fonte: Mundoeducação (2023)

De posse desse conhecimento o aluno sabe dizer as coordenadas do centro e a medida do raio, como também é capaz de dadas as coordenadas do centro e o raio da circunferência, agora ele tem condições de construir a equação. Após isto, fala-se equação geral da circunferência. Que é construída quando desenvolvemos os quadrados das diferenças que aparecem na equação reduzida. Surge assim uma equação do tipo:

$$\begin{aligned} \text{Equação geral da circunferência} &= x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^1 + b^2 \\ &- r^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Relaciona-se então o estudo da posição relativa entre ponto e circunferência. O ponto quanto à circunferência pode assumir 3 posições: ser externo a ela, interno ou simplesmente pertencer à circunferência. Para sabermos a posição do ponto relativo à circunferência calculamos a distância do mesmo ao centro da circunferência. Quando essa distância é maior que o raio da circunferência, sabemos que o ponto está fora da circunferência. Assim ele é externo a ela, quando a distância do ponto ao centro é menor do que o raio, o ponto está no interior da circunferência. Ele é interno a ela. Mas se for o caso da distância do ponto ao centro da circunferência for igual ao raio, então o ponto está sobre a circunferência.

O próximo conteúdo a ser visto é a posição relativa entre reta e circunferência. Aqui verificamos quantos pontos em comum elas podem ter. Se elas tiverem 2 pontos em comum, a reta é secante à circunferência. Se só houver 1 ponto em comum, a reta é tangente. Se não houver ponto em comum, a reta será externa à circunferência. O cálculo para isto passa por isolarmos a variável  $y$  na equação da reta e em seguida substituímos o valor para  $y$  na equação da circunferência. Após o desenvolvimento dessa nova equação chegamos a uma equação quadrática e a depender da quantidade de raízes reais dessa, teremos 2, 1 ou nenhum ponto de intersecção entre reta e circunferência.

O assunto sobre circunferência encerra-se abordando a posição relativa entre duas circunferências. Esse estudo será pautado na distância entre os centros das circunferências. Assim, as circunferências serão tangentes externas quando a distância entre seus centros for igual ao valor da soma de seus raios. Serão tangentes internas quando a distância entre os centros for igual à diferença entre o raio maior e o raio menor. Serão externas quando a distância entre seus centros for maior que a soma de seus raios. Serão secantes quando a distância entre os centros for menor que a soma de seus raios. Serão internas quando a distância entre os centros for menor que a diferença entre o raio maior e o raio menor. E por fim serão concêntricas quando a distância entre seus raios for igual a zero.

O conteúdo é então encerrado falando-se das cônicas. A elipse, a hipérbole e a parábola. No contexto da atual educação, propriamente falando da realidade experimentada em sala. Poucos professores chegam a essa parte do conteúdo, em razão não só do pouco tempo, que é bem escasso e se tornará mais disputado ainda em razão do Novo Ensino Médio. Que é uma proposta pra reformular a educação, e que de início já chegou enxugando bastante o

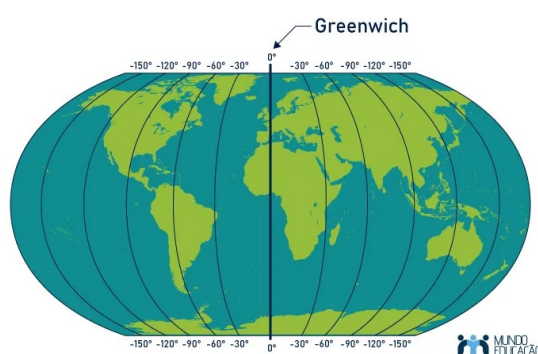
currículo de matemática visto em nossas escolas. Mas também em razão do que a turma consegue acompanhar. Já tive experiências em turmas que não conseguiram finalizar o assunto de circunferência em face da dificuldade de entender essa parte do conteúdo. Razão que acaba enriquecendo aqueles que defendem um debate a reformulação do currículo de matemática visto em nossas escolas. Já há um forte coro para suprimir essa parte final do currículo do Ensino Médio.

#### 4 FORMA COMO TRATAR DO ASSUNTO DE ACORDO COM A PROPOSTA

Agora passamos a tratar a forma como abordar o conteúdo levando em conta a proposta que é apresentá-lo de uma nova forma, enriquecendo a prática. O pontapé inicial pode ser falando de maneira rápida da história da Geometria Analítica e de sua importância. Como René Descartes e Pierre de Fermat deram as primeiras pinceladas sobre o assunto ainda no século XVII.

Como introdução ao assunto podemos falar do fato de nosso planeta ser dividido geograficamente em paralelos e meridianos, assemelhando-se ao plano cartesiano. Aquelas são linhas imaginárias que dividem cartograficamente o planeta. Assim ao localizarmos um ponto no planeta, podemos lhe atribuir coordenadas. Podemos relacionar o eixo x como sendo a linha do Equador e esta é dividida verticalmente pelos meridianos que dão as longitudes. Eles formam semicírculos sobre o globo e todos possuem o mesmo tamanho. Não há portanto diferenças ou distinções entre eles. O meridiano de Greenwich seria a origem, correspondendo a longitude  $0^\circ$ . As longitudes variam de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ . O meridiano de Greenwich sendo a origem, ele divide o planeta em duas regiões. A leste ou oriente temos as longitudes positivas e a oeste ou ocidente temos as longitudes negativas. Esse meridiano “corta” a cidade de Londres ao meio, o que retrata a ideia válida na época de seu estabelecimento. A Europa é o centro do mundo. Oposto ao meridiano de Greenwich está a Linha Internacional da data que delimita o fim de um dia e o início de outro dia.

Figura 19 - Divisão da Terra em meridianos

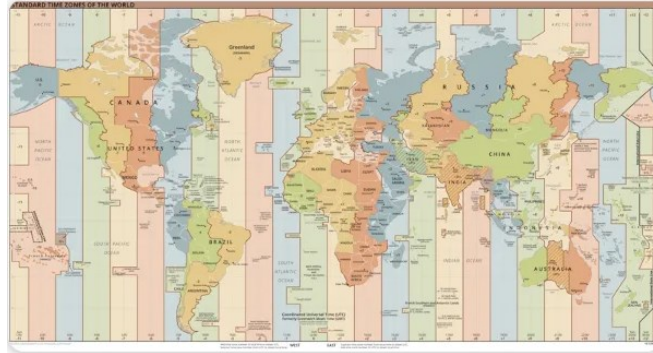


Fonte: Mundo Educação (2023)

Acrescenta-se as longitudes também os fusos horários, igualmente contados a partir de Greenwich. São 24 fusos, sendo 12 a leste e 12 a oeste. Eles foram dispostos de tal maneira que temos 24 zonas de  $15^\circ$  cada. Assim o horário se altera 1 hora a cada zona. Os horários são

somados quando o deslocamento ocorre para o leste e diminuídos quando o deslocamento é para o oeste.

Figura 20 - Divisão dos fusos horários

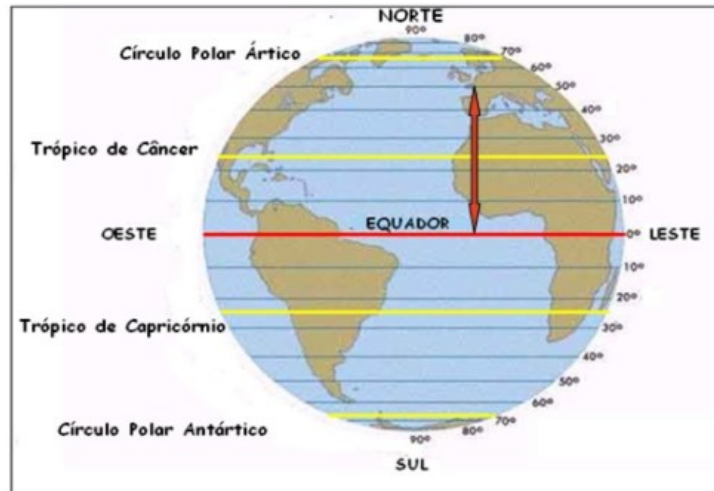


Fonte: Brasil Escola (2023)

Analogamente ao que fizemos com a linha do Equador, tomando o meridiano de Greenwich. São traçadas linhas horizontais que o cortam, são os paralelos. O maior e mais importante desses é a Linha do Equador, que divide o planeta em dois hemisférios. Acima da linha do Equador temos o hemisfério norte (Boreal ou Setentrional) e abaixo dela temos o hemisfério sul (Austral ou Meridional). Tomando o Equador como uma origem, os paralelos variam de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Outros paralelos importantes são o Trópico de Câncer, que fica acima da linha do Equador e indica o limite máximo em que os raios do sol incidem verticalmente sobre a Terra durante os solstícios. E também o Trópico de Capricórnio, ao sul, que possui a mesma função do trópico citado anteriormente. Mas esse em relação ao hemisfério sul. Além destes, também convém citar o círculo polar ártico, ao norte, que assinala o limite da zona de iluminação dos raios do sol sobre as regiões polares nos solstícios. E por fim o círculo polar antártico, com a mesma característica, ao sul.



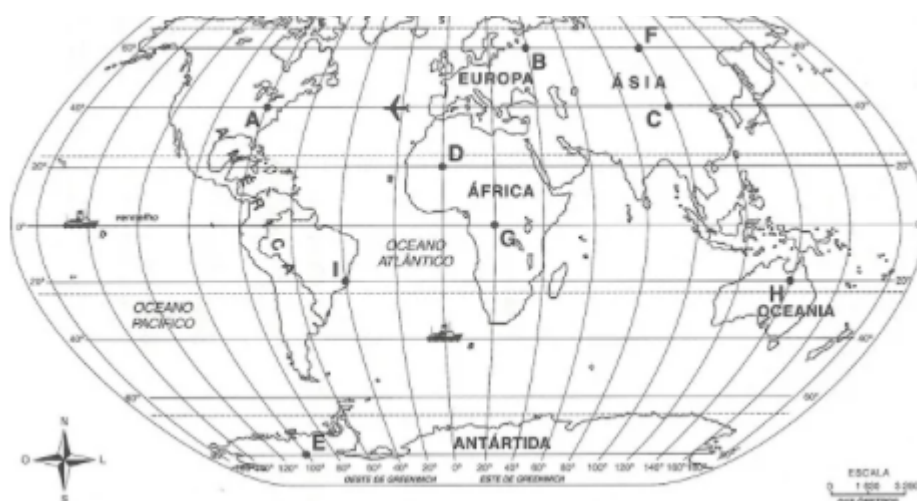
Figura 21 - Os paralelos



Fonte: Blog do Enem (2023)

Associando os 2 sistemas citados temos um sistema de coordenadas cartesianas que nos permite localizar qualquer objeto no planeta por meio de duas coordenadas. Em Geografia essas coordenadas são conhecidas como latitude e longitude. A latitude é a distância em graus do objeto em relação a linha do Equador. Já a longitude se trata da distância do objeto em graus em relação ao meridiano de Greenwich. Fazendo a comparação com matemática, as longitudes seriam as abscissas e as latitudes, as ordenadas.

Figura 22 - O sistema cartesiano que envolve a Terra



Fonte: Blog do Enem (2023)

Dando sequência ao estudo, vamos fazer a correlação apresentando esse sistema e introduzindo o conceito de plano cartesiano. A intersecção da linha do Equador com o meridiano de Greenwich seria a origem do plano. Também seria possível apresentar a noção de quadrantes e localização de um ponto no plano. Também é possível fazer a interdisciplinaridade com Geografia para falar do clima e dos biomas em cada região. Fator este que é definido a partir da localização no sistema.

Convém também falar do cálculo da distância entre dois pontos. Fazendo uso desse sistema podemos calcular a distância entre as cidades de Quito ( $- 78^\circ, 0^\circ$ ), no Equador e Macapá ( $- 51^\circ, 0^\circ$ ), no Brasil. Ambas são cortadas pela Linha do Equador. Assim calculamos a distância entre elas como sendo o módulo da diferença entre as suas longitudes.

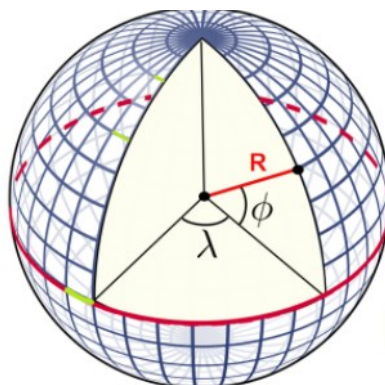
$$\text{Distância} = | - 78 - (- 51)| \rightarrow \text{Distância} = 27^\circ \quad (13)$$

De acordo com o professor Fernando Lang da Silveira, que é professor titular do instituto de física da UFRGS

Uma diferença de um grau em longitude somente no Equador da Terra corresponde a uma distância de 60 milhas náuticas ou 111,1 quilômetros. Conforme a latitude se afaste do zero (latitude zero corresponde a um ponto no Equador da Terra) ... corresponde a uma distância menor. Essa distância é 111,1 km multiplicados pelo cosseno da latitude. (Lang, 2021, Cref..if.ufrgs)

Essa diferença em grau na linha do Equador segue o que explica o professor Lang na citação anterior. Mas é importante dizer que ele detalha melhor por meio de uma figura, que mostra que a mesma diferença de longitude associa-se a um arco menor conforme a latitude cresce em valor absoluto já que os paralelos diminuem os raios de curvatura conforme a distância entre eles e os polos vai diminuindo.

Figura 23 - Coordenadas da longitude  $\lambda$  adequadas para localizar um ponto na superfície



Fonte: Cref.if.ufrgs (2023)

Logo quanto maior for a latitude, a diferença de um grau de longitude corresponde a uma distância menor do que 111,1 km, haja visto o arco que as contém tem raio menor do que o Equador. Isso se dá pela curvatura da Terra, criando assim a necessidade de fazermos uma correção no nosso cálculo.

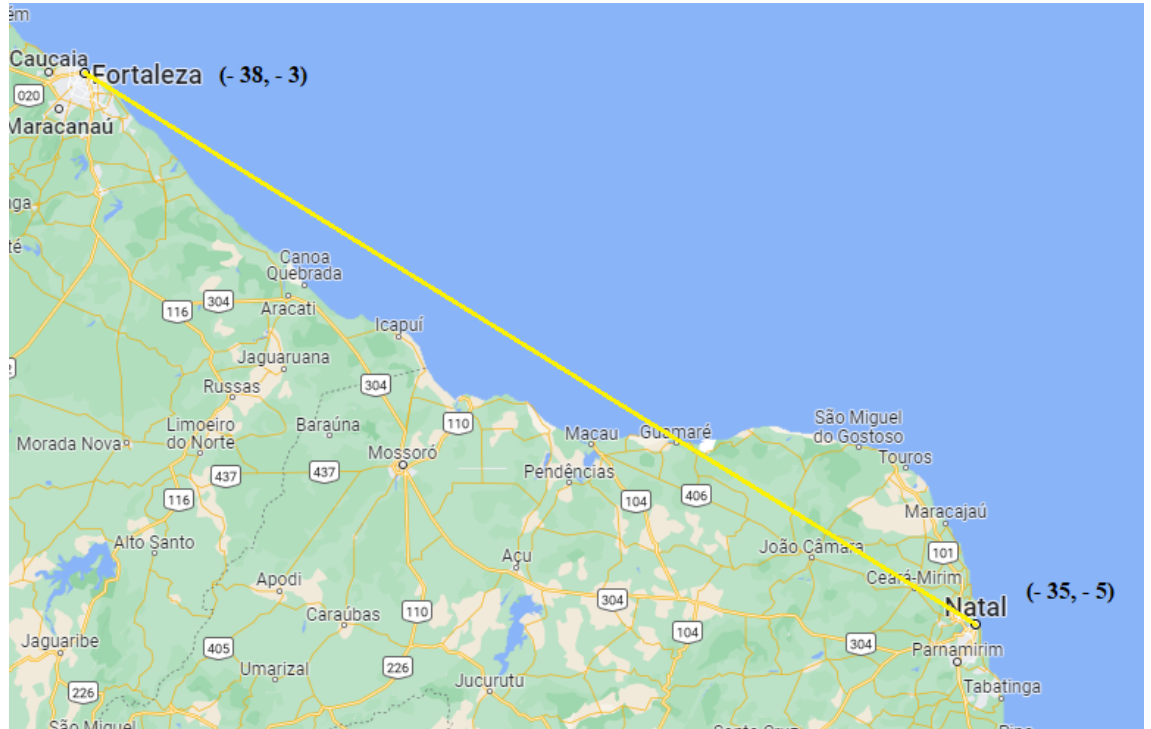
No caso da distância calculada entre as cidades de Quito e Macapá, seria então  $27^\circ \cdot 111,1 = 2\,999,7$  km. Como a nossa proposta é enfatizar os conceitos de Geometria Analítica como o plano cartesiano e suas características, não achamos interessante trazer essa abordagem para a ministração do conteúdo. Claro que se deve citar e explicar essa parte de que trata da curvatura da Terra, optamos por falar da planificação do globo e tratar os conceitos como um plano de fato. Óbvio que isto nada tem de tratar da Terra plana. Esse conceito não faz parte das crenças do autor dessa dissertação.

Para facilitar a compreensão dos alunos o ideal seria falar apenas da distância entre pontos levando em conta os graus. Apenas a parte inteira, sem levar em conta a parte decimal das coordenadas. Isto é, sem falar dos minutos e segundos das mesmas. Pois estes conceitos acabariam por dificultar o entendimento do conteúdo por parte de grande maioria dos alunos. Como alternativa a essa lacuna poderia dar-se a parte exemplo e tarefas contendo a parte decimal aqueles alunos da turma que demonstrem aptidão pra explorar uma parte mais complexa do conteúdo estudado.

Por exemplo vamos calcular a distância em graus da cidade de Fortaleza à cidade de Natal. Nesse momento da aula seria enriquecedor mostrar via slides ou entregar impressos aos alunos essa parte do mapa que aparece na figura 19 e pedir a eles que construam o triângulo retângulo que é usado no cálculo da distância. Aí então mostrar ou falar pra eles que Fortaleza tem coordenadas de longitude e latitude (- 38, - 3) e Natal tem como coordenadas (- 35, - 5).

Observamos na figura a seguir que a distância entre as duas cidades é a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Figura 24 - Distância entre Fortaleza e Natal



Fonte: elaborada pelo autor

Assim, usaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo acima para calcular a distância entre as duas cidades.

$$(\text{Distância Fortaleza – Natal})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 \quad (14)$$

$$(\text{Distância Fortaleza – Natal})^2 = (-38^\circ - (-35^\circ))^2 + (-3^\circ - (-5^\circ))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Distância Fortaleza – Natal})^2 = (3^\circ)^2 + (2^\circ)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Distância Fortaleza – Natal})^2 = (333,3)^2 + (222,2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Distância Fortaleza – Natal})^2 = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Distância Fortaleza – Natal}) = 400,47 \text{ km}$$

Logo a distância entre Fortaleza e Natal é de aproximadamente 400,47 km em linha reta.

Os demais temas como as coordenadas do ponto médio e o estudo da reta podem ser trabalhados da maneira convencional. Que assim podem ser exauridos de forma mais efetiva. Vale lembrar que essa proposta é mais uma ideia motivacional que apareceria na introdução de parte do conteúdo. E assim aumentar o leque de possibilidades para apresentação do conteúdo.

Chegamos agora a parte que é ponto importante dessa tarefa. Falar das circunferências e sua aplicabilidade no uso da ferramenta GPS. Como introdução ao assunto, podemos trazer o que foi apresentado no capítulo 2 desse texto, a história do GPS e como o sistema age pra descobrir a localização de um receptor. Cabe aqui falar da trilateração tanto em 2 dimensões como em 3 dimensões. Como nosso propósito é tratar do assunto com uma turma do 3º ano do ensino médio, vamos nos aprofundar no estudo da trilateração para 2 dimensões.

#### Exemplo 4.1

Max está no Estádio Presidente Vargas junto com seu irmão Billy assistindo a uma partida de futebol. No momento do intervalo, Billy quis ir ao banheiro e por uma infelicidade pisou em falso e acabou torcendo o pé. Eles decidem ir à procura de atendimento de emergência e pesquisam por um hospital que se localize à distância de 1,5 km de sua localização atual.

Figura 25 - Localização do Estádio Presidente Vargas



Fonte: Google Maps (2023)

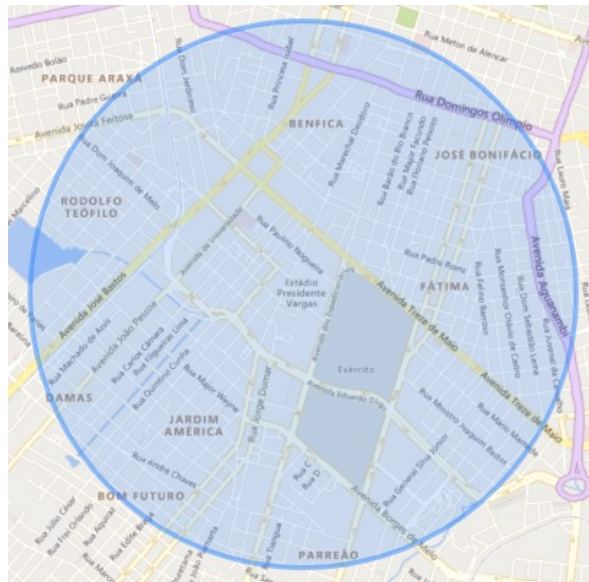
A situação acima ilustra uma circunferência de centro nas coordenadas geográficas do Estádio Presidente Vargas (- 3, - 38) e raio igual a 1,5 km. Dado que a fórmula para a equação reduzida da circunferência é:

$$\text{Equação reduzida da circunferência} = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (15)$$

Onde a e b são as coordenadas do centro e r é o raio da circunferência, temos como equação para o problema que nossos protagonistas enfrentam:

$$(x + 3)^2 + (y + 38)^2 = 2,25$$

Figura 26 - Circunferência que ilustra o exemplo 4.1



Fonte: Calc Maps (2023)

Vamos então dar continuidade ao assunto tratando de um exemplo prático de trilateração para 2 dimensões.

### Exemplo 4.2

Imaginemos que um pai resolveu presentear o filho com um carro novo para celebrar a aprovação do filho no ENEM. Ele escondeu a chave num lugar do campo da Arena Castelão. Para que o filho pudesse encontrar a chave do carro, o pai lhe deu algumas instruções, organizada em 3 passos.

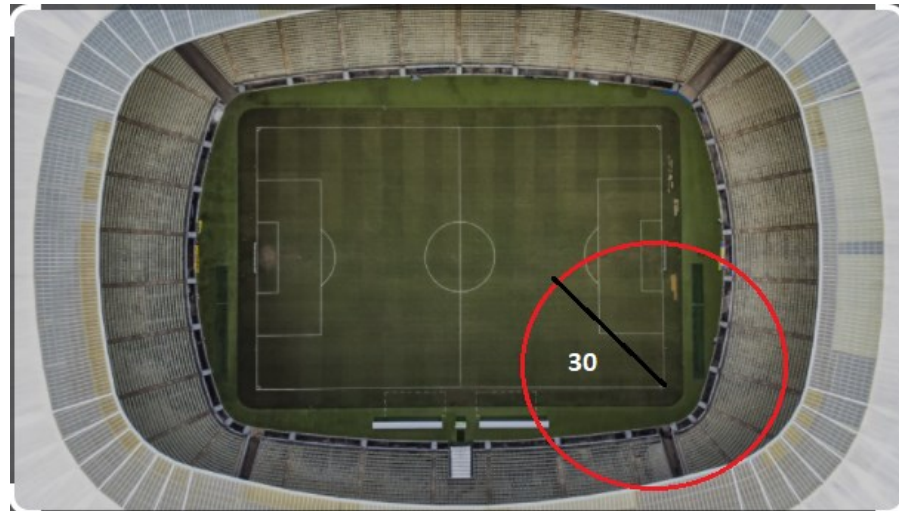
- Passo 1: A chave está a 30 m da bandeira de escanteio sudoeste
- Passo 2: Está a 40 m da bandeira de escanteio sudeste



- Passo 3: Está a 90 m da bandeira de escanteio nordeste.

Podemos então começar a construir a solução para este problema. De início, fazemos uso das pistas na ordem em que apareceram.

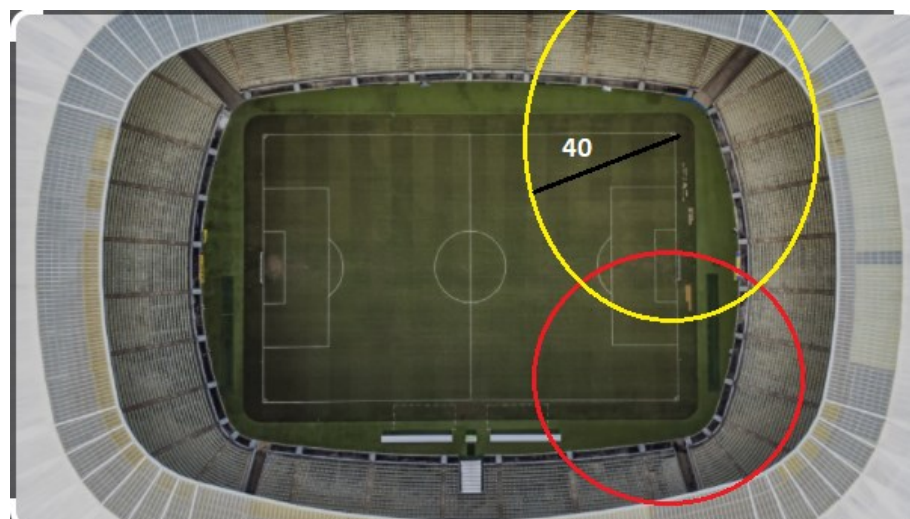
Figura 27 - Circunferência com o passo 1



Fonte: elaborada pelo autor

Seguido o passo 1, sabemos que a chave está localizada numa circunferência de raio 30 m. Precisamos agora seguir o passo 2.

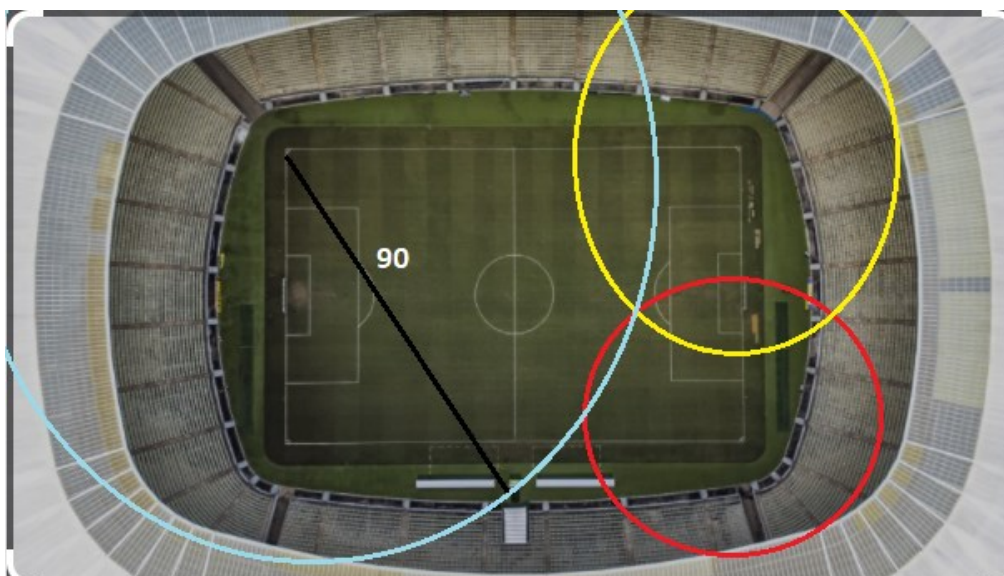
Figura 28 - Circunferência após o passo 2



Fonte: elaborada pelo autor

Sabemos agora que a chave está numa circunferência de raio 40 m. Temos que a chave está na interseção destas 2 circunferências, que corresponde a 2 pontos.

Figura 29 - Circunferência após o passo 3



Fonte: elaborada pelo autor

Temos com o passo 3, que a chave está numa circunferência de raio 90 m. Com esta terceira circunferência conseguimos distinguir qual dos 2 pontos anteriores é o ponto correto. O ponto de comum as 3 circunferências é o ponto onde está localizada a chave.

Com esse exemplo concluímos a proposta a ser tratadas nessa dissertação. Apresentar parte do conteúdo de Geometria Analítica, sob uma abordagem com alguns acréscimos.

### Exemplo 4.3

Rui combinou de encontrar Bob na casa de Bob, para juntos resolverem a lista de Geometria analítica. Mas no caminho para casa de Bob, Rui acabou se perdendo. Como Rui só tinha crédito para mandar SMS, ele resolveu usar o que ele e Bob haviam aprendido na aula sobre trilateração. Ele então passou para Bob as seguintes coordenadas que ele conseguiu com moradores da região em que ele estava via SMS para que Bob pudesse achá-lo.

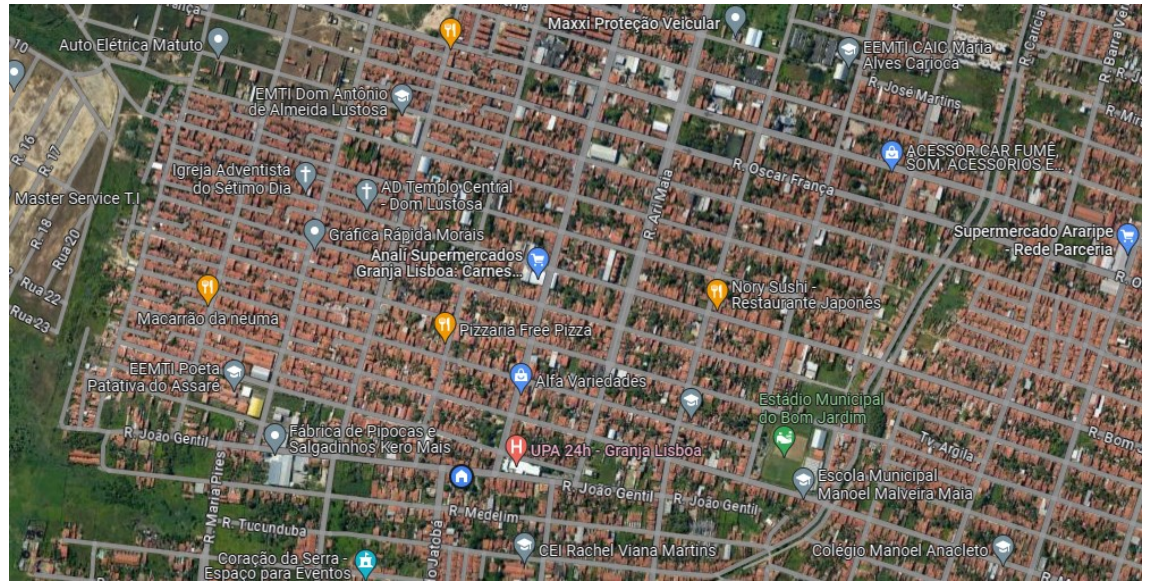
- Estou em um supermercado que fica:
  - a) A 688 m da EEMTI Poeta Patativa do Assaré
  - b) A 778 m da EEMTI CAIC Maria Alves Carioca
  - c) A 556 m do Estádio do Bom Jardim



Solução

Bob gostou da tarefa. Ele entrou na ferramenta Google calcs, que permite criar círculos a partir de um ponto no mapa.

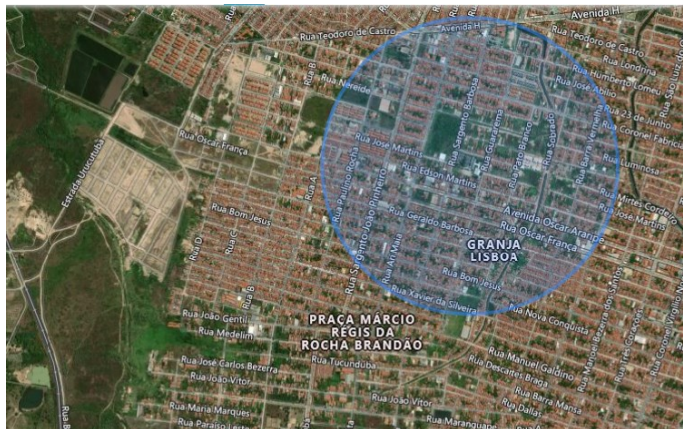
Figura 30 - Mapa da região em que Rui estava perdido



Fonte: elaborada pelo autor

Ele então construiu uma circunferência com centro na EEMTI CAIC Maria Alves Carioca. De acordo com o que ele aprendeu na aula, seu amigo poderia estar em qualquer lugar sobre a circunferência.

Figura 31 - Circunferência com centro na EEMTI CAIC

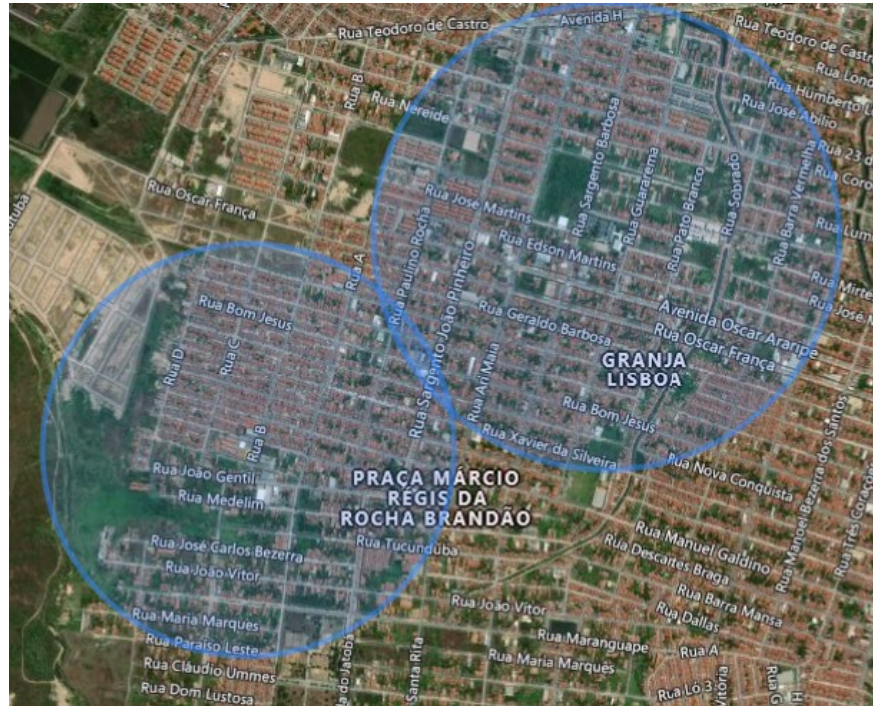


Fonte: elaborada pelo autor



Ele então fez uma nova circunferência, dessa vez com centro na EEMTI Poeta Patativa do Assaré e raio 688 m. Ele reduziu assim para 2 os possíveis lugares para a localização de seu amigo. Os 2 pontos de intersecção das duas circunferências.

Figura 32- Circunferência com centro na EEMTI Poeta Patativa



Fonte: elaborada pelo autor

Ele então construiu uma terceira circunferência, desta vez, com centro no Estádio do Bom Jardim e raio 556 m.

Figura 33- Circunferência com centro no Estádio do Bom Jardim



Fonte: elaborada pelo autor

Levando em conta as imprecisões que podem surgir na hora de marcar o centro da circunferência no mapa, ele pode localizar os locais próximos a posição de seu amigo e assim descobrir em que supermercado ele estava. Essa imprecisão acontece inclusive no sistema GPS também, mas o sistema possui ferramentas que permitem corrigir esses possíveis erros.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi visto no trabalho apresentado, é possível enriquecer a prática em sala de aula de parte do conteúdo de Geometria Analítica, trabalhados no Ensino Médio. Embora dê um certo trabalho a construção dessa nova metodologia, essa dissertação mostrou que é um caminho possível. Mesmo que não se possa explorar por completo o assunto, em razão da complexidade de algumas partes. Também é muito positivo e enriquecedor, embora não trabalhado aqui, fazer uso das tecnologias como aparato pra ajudar na prática na sala de aula.

Foi muito desafiador tratar desse tema em razão da complexidade e falta de fontes mais robustas para explicar o sistema GPS. Foi necessário fazer uma busca grande de informações e vídeos para tentar entender o seu histórico e funcionamento. Percebeu-se que mesmo sendo um tema tão relevante a atual, faltam ainda mais textos para tratar de seu funcionamento e da matemática por trás para que se possa explorar mais a ideia. Toda a construção do trabalho pôde mostrar um espaço a ser estudado e desenvolvido novos trabalhos sobre o assunto e sua abordagem em sala de aula.

Há de se salientar que esta abordagem que é produto dessa dissertação, trata de uma parte do conteúdo estudado no 3º ano do Ensino Médio. Nada impede que a parte do conteúdo que aqui não foi tratado continue sendo apresentada da forma tradicional. Assim o aluno continuaria vendo todo o conteúdo. Com o diferencial que agora há uma contribuição para enriquecer a prática.

Nessa apresentação de acordo com o introduzido aqui, seria mensurável sua contribuição na motivação dos alunos e em que partes esse trabalho pode ser melhorado. Seria também muito bom poder enxergar como os alunos lidariam com as teorias de Einstein, que tem parte importantíssima no GPS.

## REFERÊNCIAS

- ACZEL, Amir D. **Bússola: a invenção que mudou o mundo**. Tradução de Maria Luiza X. de A Borges. Rio de Janeiro; Zahar, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.
- BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF. Senado Federal, 2020. 496 p. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/constituicao/constituicao.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm). Acesso em: 05 jan. 2023
- FAGGIAN, Hugo C. **Geometria e GPS**. 2019. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.
- Lang, Fernando, **Pergunte ao CREF**. [S. l.]: CREFI.IF.UFRGS, 2021. Disponível em: <https://crefi.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=calculo-aproximado-de-distancias-com-base-em-coordenadas-de-latitude-e-longitude>. Acesso em: 21 fev. 2023
- LIMA, Davi Dantas. **Desvendando a Matemática do GPS**. 2013. 49 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2013.
- EISBERG, Robert RESNIK, Robert. **Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas**. Tradução de Paulo Costa Ribeiro, Ênio Costa da Silveira e Marta Feijó Barroso. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
- KITOR, Glauber Luciano. **Dilatação do Tempo**. [S. l.]: Infoescola, 2023. Disponível em: <https://www.infoescola.com/fisica/dilatacao-do-tempo/> Acesso em: 06 jul. 2023
- HELERBROCK, Rafael. **Dilatação do Tempo**. [S. l.]: Brasil Escola, 2023. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/dilatacao-tempo.htm> Acesso em: 06 jul. 2023
- HELERBROCK, Rafael. **Teoria da Relatividade Geral**. [S. l.]: Brasil Escola, 2023. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/teoria-relatividade-geral.htm> Acesso em: 26 jul. 2023
- TAGLIANI, Carlos Roney Armani. **Sistema de Posicionamento Global – GPS [Parte 1]**. Ensino Virtual de Uso de Geotecnologias para Cursos de Graduação. Rio Grande: SEaD/FURG, 2012 48 slides, color.
- GISGeography, **How GPS receivers work – trilateration vs triangulation** [S. l.]: 2022. Disponível em: <https://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps> Acesso em: 16 dez 2023
- MARINO, Thiago. **Como funciona o GPS?** [S. l.]: 2010. Disponível em: <https://tiagomarino.com/classes/EXTRAS/material/3%20-%20Como%20Funciona%20o%20GPS.pdf> Acesso em: 18 dez 2023

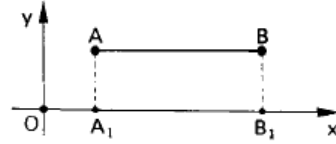
## ANEXO A – DEMONSTRAÇÕES

### 1. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dados dois pontos A  $(x_1, y_1)$  e B  $(x_2, y_2)$ , a distância entre eles é dada por:

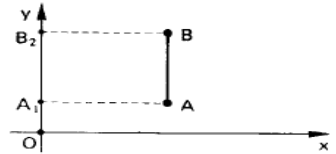
1º caso:  $AB \parallel Ox$

$$d = d_{A_1B_1} = |x_2 - x_1|$$

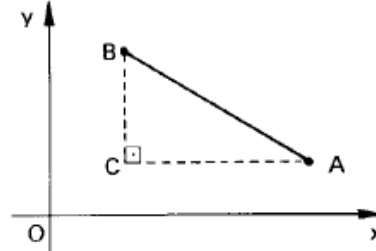
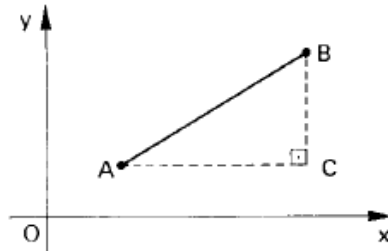


2º caso:  $AB \parallel Oy$

$$d = d_{A_2B_2} = |y_2 - y_1|$$



3º caso:  $AB \not\parallel Ox$  e  $AB \not\parallel Oy$



De início, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel Ox \Rightarrow y_C = y_1 \\ BC \parallel Oy \Rightarrow x_C = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow C(x_2, y_1)$$

Usando os casos iniciais, temos:

$$d_{AC} = |x_C - x_A| = |x_2 - x_1|$$

$$d_{BC} = |y_B - y_C| = |y_2 - y_1|$$

Nesse momento, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, e temos:

$$d^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Então:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \blacksquare$$

### 2. COORDENADAS DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Seja M o ponto médio do segmento com extremidades A  $(x_a, y_a)$  e B  $(x_b, y_b)$ . Notemos na figura a seguir, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes. Assim:

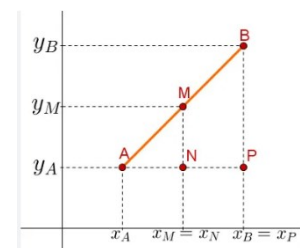
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Como  $AB = 2 \cdot AM$ , já que M é o ponto médio de AB.

$$\text{Logo, } \frac{AM}{2AM} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow AP = 2 \cdot AN.$$

Assim, temos:

$$|x_P - x_A| = 2 \cdot |x_N - x_A|$$



Como  $x_P > x_A$  e  $x_N > x_A$ , podemos escrever:

$$(x_P - x_A) = 2 \cdot (x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2 \cdot (x_N - x_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = 2x_N - 2x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

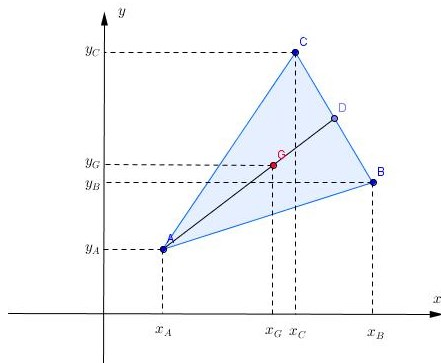
Procedendo de forma análoga, prova-se que:  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento AB, temos

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \blacksquare$$

### 3. COORDENADAS DO BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

**As coordenadas do baricentro de um triângulo são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices do triângulo.**



**DEMONSTRAÇÃO:**

Tomando o triângulo de vértices A  $(x_A, y_A)$ , B  $(x_B, y_B)$  e C  $(x_C, y_C)$ , com D sendo o ponto médio do lado BC.

Assim, as coordenadas de D são:

$$D \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \quad (i)$$

O baricentro G é definido pela interseção das medianas do triângulo, e possui como característica dividir cada uma das medianas na razão 2:1. Com

isso, temos

$$\frac{AG}{GD} = 2 \Rightarrow \frac{x_G - x_A}{x_D - x_G} = 2 \Rightarrow x_G - x_A = 2(x_D - x_G) \Rightarrow x_G - x_A = 2x_D - 2x_G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_G = 2x_D + x_A \Rightarrow 3x_G = 2 \left( \frac{x_B + x_C}{2} \right) + x_A \Rightarrow 3x_G = x_B + x_C + x_A \Rightarrow$$

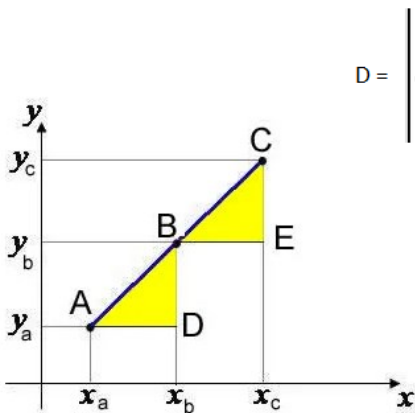
$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Procedendo de forma análoga, é possível provar o mesmo com respeito à ordenada.

Portanto, as coordenadas do baricentro dão G  $\left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) \blacksquare$

## 4. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Se três pontos distintos  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$  são colineares então:



$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO:

Os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes, pelo caso AAA.

Daí, segue que  $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$ , que pode ser reescrita da forma:

$$\frac{x_C - x_B}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{y_B - y_A}$$

Desenvolvendo essa expressão, obtemos:

$$(x_C - x_B)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_B) = 0$$

Que ao ser desenvolvida, fica

$$x_C y_B - x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_B y_B + x_A y_C - x_A y_B = 0$$

Cancelando os simétricos e organizando:

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$$

Essa última expressão pode ser escrita na forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação:

Caso os pontos A, B e C pertencessem a uma reta paralela a um dos eixos (x por exemplo), o determinante também se anularia. ( $y_1 = y_2 = y_3$ )

Concluimos então, que:

Se três pontos distintos  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$  são colineares, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos agora verificar que a recíproca dessa propriedade também é verdadeira, isto é, se  $D = 0$ , os pontos estão alinhados.

Se  $D = 0$ , como foi visto, então podemos escrever:

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) = (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

Daí então, surgem as possibilidades:

1. Se  $x_C = x_B$ , isto é,  $x_C - x_B = 0$ , podemos ter:

$x_B - x_A = 0 \Rightarrow x_A = x_B = x_C$ , e, portanto, A, B e C seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo y.

Ou

$y_C - y_B = 0 \Rightarrow y_C = y_B$  e, daí,  $B = C$ , o que é um absurdo, já que estamos admitindo que os três pontos são distintos.

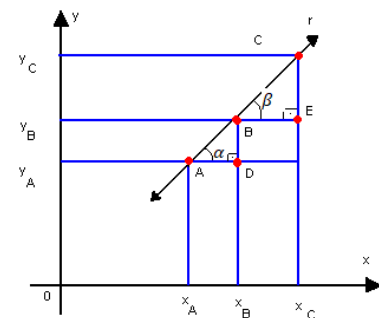


2. Se  $y_A = y_B$ , isto é,  $y_B - y_A = 0$ , podemos ter:  
 $x_B - x_A = 0 \Rightarrow x_B = x_A$  e, daí,  $A = B$ ; o que é um absurdo, já que estamos admitindo que os três pontos são distintos.  
 Ou  
 $y_C - y_B = 0 \Rightarrow y_C = y_B = y_A$ , e, portanto, A, B e C seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo x.
3. Se  $x_C - x_B \neq 0$  e  $y_B - y_A \neq 0$ , teríamos

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) = (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A) \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

Daí, os triângulos ABD e BCE seriam retângulos, com lados proporcionais, isto é, seriam triângulos retângulos semelhantes.

Consequentemente teríamos  $\alpha = \beta$ , e os pontos A, B e C seriam colineares. ■



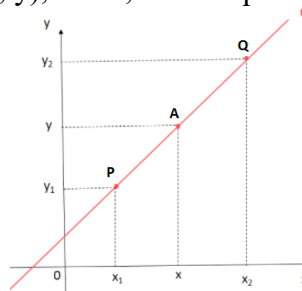
## 5. EQUAÇÃO GERAL DA RETA

**A toda reta  $r$  do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, com  $a$  e  $b$  não nulos simultaneamente, e  $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto  $P(x, y)$  genérico de  $r$ .**

### DEMONSTRAÇÃO

Sejam  $P(x_1, y_1)$  e  $Q(x_2, y_2)$  dois pontos distintos do plano cartesiano, e  $r = PQ$  é a reta determinada por  $P$  e  $Q$ .

Um ponto genérico de  $r$  é  $A(x, y)$ , isto é,  $A$  é um ponto que “percorre”  $r$ .



Como  $P$ ,  $Q$  e  $A$  estão alinhados, devemos ter  $D = 0$ , ou seja:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0 \quad (1)$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

Como  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  são números reais conhecidos, podemos fazer:  $y_1 - y_2 = a$ ,  $x_2 - x_1 = b$  e  $x_1y_2 - x_2y_1 = c$ , e obtemos em (1):  $ax + by + c = 0$ , que é a equação geral da reta.

■

Observação:

Vamos ver agora porque a e b não podem ser simultaneamente nulos.

$$a = 0, y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$b = 0, x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$$

Assim,  $P = Q$ , o que é um absurdo, pois admitimos que P e Q são pontos distintos.

A recíproca da propriedade diz:

**A toda equação da forma  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , está associada uma única reta r do plano cartesiano, cujos pontos possuem coordenadas  $(x, y)$  que satisfazem essa equação.**

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam M  $(x_M, y_M)$ , N  $(x_N, y_N)$  e P  $(x_P, y_P)$  três pontos distintos cujas coordenadas satisfazem a equação  $ax + by + c = 0$ . Vamos verificar que M, N e P estão sobre a reta (admitimos  $a \neq 0$ ).

Temos:

$$ax_M + by_M + c = 0 \Rightarrow x_M = \frac{-by_M - c}{a}$$

$$ax_N + by_N + c = 0 \Rightarrow x_N = \frac{-by_N - c}{a}$$

$$ax_P + by_P + c = 0 \Rightarrow x_P = \frac{-by_P - c}{a}$$

O determinante fica:

$$\begin{vmatrix} \frac{-by_M - c}{a} & y_M & 1 \\ \frac{-by_N - c}{a} & y_N & 1 \\ \frac{-by_P - c}{a} & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

Usando a Regra de Sarrus, chegamos à conclusão de que o determinante é nulo. Isso implica, pelo que foi visto, M, N e P são colineares. ■

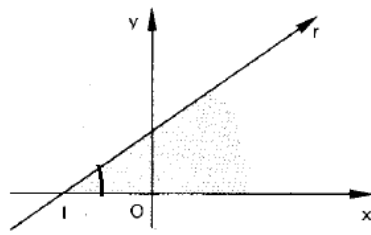
## 6. COEFICIENTE ANGULAR

Tomamos uma reta r de inclinação  $\alpha$  em relação ao eixo x.

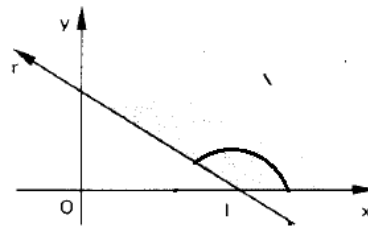
O coeficiente angular ou declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação  $\alpha$ .

$$m = \tan \alpha$$

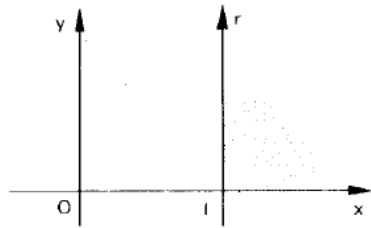
Considerando os vários casos de  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

 $\alpha$  agudo

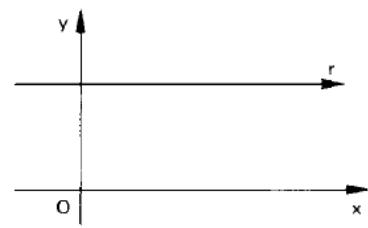
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

 $\alpha$  obtuso

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

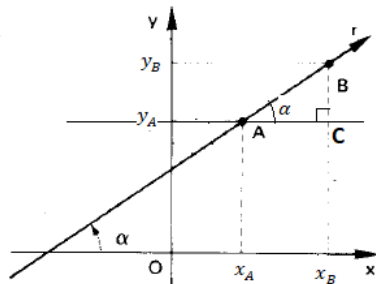
 $\alpha$  reto

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

 $\alpha$  nulo

$$\alpha = 0$$

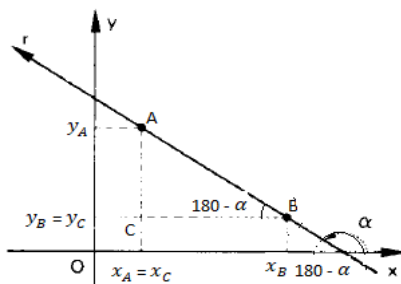
Como para  $\alpha = 0^\circ$  (reta horizontal) a declividade é 0 e para  $\alpha = 90^\circ$  (reta vertical) não há declividade, vejamos os casos  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  e  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

No triângulo ACB, retângulo em C, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

No triângulo ACB, retângulo em C, temos:

$$\operatorname{tg} (180 - \alpha) = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \operatorname{tg} (180 - \alpha) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Da trigonometria sabemos que:

$$\operatorname{tg} (180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$-\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Em qualquer um dos casos, podemos calcular o coeficiente angular da reta que passa por A  $(x_A, y_A)$  e B  $(x_B, y_B)$  por meio da relação:

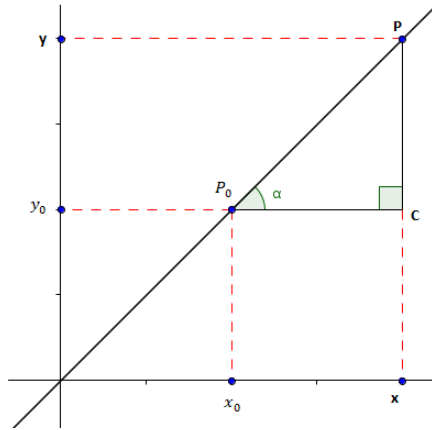
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Podemos, simplesmente escrever:

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

## 7. EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  e a declividade  $m$  determinam uma reta  $r$ . Considerando  $P(x, y)$  um ponto genérico dessa reta, é possível construir uma equação de incógnitas  $x$  e  $y$  dos números  $x_0$  e  $y_0$  e  $m$ . A qual será chamada equação fundamental da reta.



Considerando um ponto  $P(x, y)$  qualquer sobre a reta e  $\tan \alpha = m$ , temos:

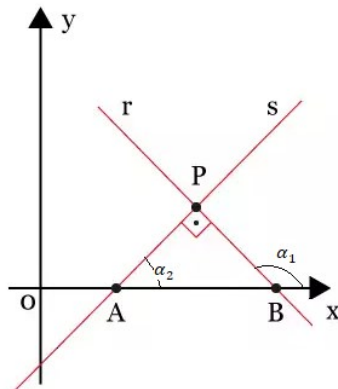
$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{d(C,P)}{d(P_0,C)} \Rightarrow m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \end{aligned}$$

Observação:

- A equação independe de  $m$  ser positivo ou negativo e da localização do ponto  $P_0$ .
- Se a reta é paralela ao eixo  $x$ , temos  $m = 0$  e a equação da reta será dada por  $y = y_0$ .
- Se a reta é paralela ao eixo  $y$ , todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por  $x = x_0$ .

## 8. DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Antes de demonstrar a fórmula da distância entre ponto e reta, precisamos falar do perpendicularismo entre duas retas.



Temos na figura a reta  $r$  de inclinação  $\alpha_1$ , e a reta  $s$ , de inclinação  $\alpha_2$ , tal que  $r$  e  $s$  são perpendiculares.

Usando Geometria Plana, temos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 + 90^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\text{sen}(\alpha_2 + 90^\circ)}{\cos(\alpha_2 + 90^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\text{sen}\alpha_2 \cdot \cos 90^\circ + \text{sen} 90^\circ \cdot \text{cos}\alpha_2}{\text{cos}\alpha_2 \cdot \cos 90^\circ - \text{sen}\alpha_2 \cdot \text{sen} 90^\circ}$$

Como  $\text{sen } 90^\circ = 1$  e  $\cos 90^\circ = 0$ , temos:

$$\tan \alpha_1 = \frac{0 + \text{cos}\alpha_2}{0 - \text{sen}\alpha_2} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\text{cos}\alpha_2}{-\text{sen}\alpha_2} \Rightarrow \tan \alpha_1 = -\cot \alpha_2 \Rightarrow \tan \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_2}$$

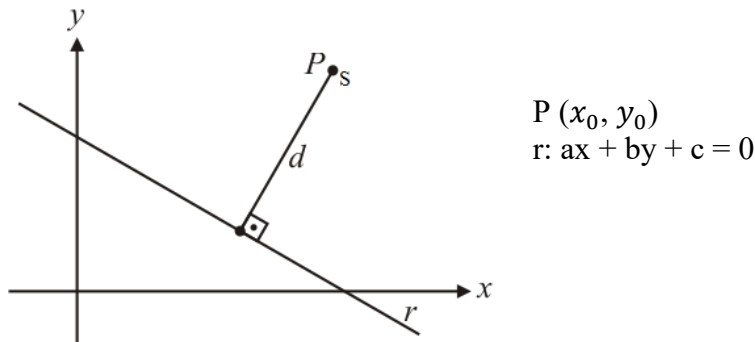
Sabendo que  $\tan \alpha_1 = m_r$  e  $\tan \alpha_2 = m_s$ , temos:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}, \text{ com } m_r, m_s \neq 0.$$

Então, se uma reta  $r$  tem coeficiente angular  $m_r$ , é perpendicular a uma reta  $s$ , com coeficiente angular  $m_s$ , temos:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}, \text{ com } m_r, m_s \neq 0.$$

Agora de posse dessa propriedade, podemos dar início a demonstração da equação de distância do ponto a reta.



### 1. Vamos determinar a equação da reta perpendicular a $r$ passando por $P$ .

- Como  $s \perp r$ ,  $m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} \Rightarrow m_s = \frac{b}{a}$

Observação:

O coeficiente angular de  $r$  foi obtido, operando na equação geral de  $r$ :

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Essa equação obtida ao final é a chamada equação reduzida da reta, da forma  $y = mx + n$

Em que  $m$  é o coeficiente angular e  $n$  é o coeficiente linear.

- $s$  passa por  $P(x_0, y_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow s: bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

### 2. Determinamos as coordenadas de $P'$ , projeção ortogonal de $P$ sobre $r$ . Devemos resolver o sistema, nas incógnitas $x$ e $y$ , formado pelas equações de $r$ e $s$ .

$$ax + by + c = 0$$

$$bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$$

Somando a primeira equação multiplicada por  $b$  com a segunda equação multiplicada por  $-a$ , obtemos:

$$y = \frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtemos o valor de  $x$ :

$$x = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$$

### 3. Calculamos a distância entre $P$ e $P'$ :

A distância de  $P$  a  $r$  é a distância de  $P(x_0, y_0)$  e  $P'$   $(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2})$ :

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}$$

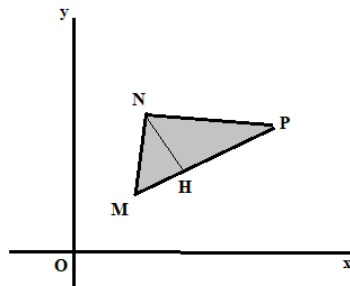
$$\Rightarrow d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{b \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2}$$

Lembrando que  $\forall t \in \mathbb{R}, (-t)^2 = t^2$ , e colocando  $ax_0 + by_0 + c$  em evidência, vem

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## 9. ÁREA DO TRIÂNGULO



Com base na Geometria Plana, sabemos que a área da superfície limitada por um triângulo pode ser calculada pela expressão:

$$\frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2}$$

Tomando o lado MP como base, sua medida é a distância entre os pontos M e P, a saber:

$$d_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} \quad (1)$$

A medida da altura NH é a distância entre o ponto N e a reta suporte do lado MP. Para calcular essa distância, vamos inicialmente obter a equação de MP:

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

x e y são as coordenadas de um ponto genérico de MP.

$$x_M y_P + x y_M + y x_P - x y_P - y x_M - x_P y_M = 0$$

$$x (y_M - y_P) + y (x_P - x_M) + (x_M y_P - x_P y_M) = 0 \quad (2)$$

Usando a expressão da distância entre ponto e reta para calcular a distância entre N e a reta suporte de MP.

$$N(x_N, y_N)$$

$$\text{MP: } x (y_M - y_P) + y (x_P - x_M) + (x_M y_P - x_P y_M) = 0$$

$$d_{N, MP} = \frac{|x_N (y_M - y_P) + y_N (x_P - x_M) + (x_M y_P - x_P y_M)|}{\sqrt{(y_M - y_P)^2 + (x_P - x_M)^2}} \quad (3)$$

Por fim, a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} d_{MP} \cdot d_{N, MP}$$

Usando (1) e (3), vem:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} \cdot \frac{|x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_M y_P - x_P y_M)|}{\sqrt{(y_M - y_P)^2 + (x_P - x_M)^2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_M y_P - x_P y_M)|$$

Observe que a expressão obtida coincide com (2) quando  $x$  e  $y$  são substituídos, respectivamente, por  $x_N$  e  $y_N$ .

Logo, podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$