



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS
MESTRADO ACADÊMICO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS

GENILSON GOMES DA SILVA

**DISTÂNCIA GEOMÉTRICA ENTRE MATRIZES SIMÉTRICAS DEFINIDAS
POSITIVAS DE DIMENSÕES DIFERENTES: UM ESTUDO DE CASO EM SELEÇÃO
DE PORTFÓLIOS FINANCEIROS**

FORTALEZA

2023

GENILSON GOMES DA SILVA

DISTÂNCIA GEOMÉTRICA ENTRE MATRIZES SIMÉTRICAS DEFINIDAS POSITIVAS
DE DIMENSÕES DIFERENTES: UM ESTUDO DE CASO EM SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS
FINANCEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Análise Quantitativa.

Orientador: Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58d Silva, Genilson Gomes da.
Distância geométrica entre matrizes simétricas definidas positivas de dimensões diferentes: um estudo de caso em seleção de portfólios financeiros / Genilson Gomes da Silva. – 2023.
100 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante.
1. Distância entre matrizes. 2. Matriz definida positiva. 3. Matriz de covariância. 4. Investimentos - Análise. I. Título.

CDD 510

GENILSON GOMES DA SILVA

DISTÂNCIA GEOMÉTRICA ENTRE MATRIZES SIMÉTRICAS DEFINIDAS POSITIVAS
DE DIMENSÕES DIFERENTES: UM ESTUDO DE CASO EM SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS
FINANCEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Análise Quantitativa.

Aprovada em: 14/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dra. Luiza Helena Felix de Andrade
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

À minha filha Sofia e à minha esposa Erlânia.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela saúde e pela força para enfrentar todos os contratempos.

À minha mãe Francinete e ao meu pai Genival, por todo amor. Vocês não apenas me deram o presente da educação, mas também me ensinaram lições valiosas sobre determinação, ética e perseverança. Sei que cada conquista que alcancei até agora é, em grande parte, devido aos valores e princípios que vocês me transmitiram.

À minha esposa Erlânia, por ter estado sempre ao meu lado, oferecendo amor, apoio emocional, encorajamento e inspiração. Sempre me incentivou a perseguir meus sonhos, acreditar em mim mesmo e nunca desistir, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Quero expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante, por sua orientação experiente, paciência, dedicação e apoio, sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Aos professores da Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos por todos os ensinamentos ao longo desta minha jornada acadêmica.

À Universidade Federal do Ceará, por fornecer os recursos e o ambiente propício para a pesquisa acadêmica. Estou grato pelo acesso às bibliotecas, laboratórios e oportunidades de aprendizado que esta instituição ofereceu.

Ao amigo Eurípedes pela amizade sincera de longa data. Suas discussões e incentivos foram de grande valor.

Aos amigos, Diego Perdigão, Lucas Damasceno, Rafael Bluhm, Rafael Eufrasio e Vinícius Osterne. Além do aspecto acadêmico, a amizade e o apoio que encontrei em cada um de vocês foram verdadeiramente inspiradores.

Obrigado a todos por fazerem parte desta jornada acadêmica comigo.

RESUMO

As matrizes definidas positivas desempenham um papel muito importante em diversas áreas da matemática aplicada e da engenharia, na Estatística por exemplo, elas estão presentes como matrizes de covariância. Nos últimos anos diversos estudos dedicaram-se ao cone das matrizes simétricas definidas positivas, em que pode-se destacar o cálculo de distância entre objetos deste conjunto, o que mais recentemente mostrou-se que essa distância poderia ser naturalmente estendida para dar origem a distância geométrica entre matrizes simétricas definidas positivas de dimensões diferentes. Nesta trabalho, exploramos esse cálculo de distância na seleção de portfólios financeiros. Utilizando um estudo de caso, aplicamos essa distância às matrizes de covariância de diversos subportfólios extraídos de um portfólio dado, com o objetivo de verificar se a ordenação dos retornos e riscos desses subportfólios se estabelecia de forma bem definida à medida que suas matrizes de covariância se distanciavam da matriz do portfólio original. Além disso, investigamos se os subportfólios com matrizes de covariância mais próximas à matriz de covariância do portfólio original apresentavam retornos e riscos mais semelhantes ao deste portfólio. Com essa abordagem, buscamos aprimorar a compreensão da relação entre a estrutura das matrizes de covariância e a dinâmica dos portfólios, visando a identificação de estratégias de alocação de ativos mais eficientes e consistentes no contexto desafiador dos mercados financeiros.

Palavras-chave: distância entre matrizes; matriz definida positiva; matriz de covariância; investimentos - análise.

ABSTRACT

Positive definite matrices play a very important role in several areas of applied mathematics and engineering, in Statistics for example, they are present as covariance matrices. In recent years, several studies have been dedicated to the cone of positive definite symmetric matrices, in which the calculation of distance between objects in this set can be highlighted, which more recently showed that this distance could be naturally extended to give rise to the distance geometric between positive definite symmetric matrices of different dimensions. In this work, we explore this distance calculation in the selection of financial portfolios. Using a case study, we applied this distance to the covariance matrices of several subportfolios extracted from a given portfolio, with the aim of verifying whether the ordering of the returns and risks of these subportfolios was established in a well-defined way according to their matrices. covariance distanced themselves from the original portfolio matrix. Furthermore, we investigated whether subportfolios with covariance matrices closer to the covariance matrix of the original portfolio presented returns and risks more similar to this portfolio. With this approach, we seek to improve understanding of the relationship between the structure of covariance matrices and portfolio dynamics, aiming to identify more efficient and consistent asset allocation strategies in the challenging context of financial markets.

Keywords: distance between matrices; positive definite matrix; covariance matrix; investment analysis.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Interpretação geométrica da análise de componentes principais de duas variáveis 60
- Figura 2 – Volatilidade dos portfólios financeiros em cada período considerado 72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Retornos médios (μ_j) de cada um dos 40 ativos tomados da base S&P 500 considerados no período de maio de 2021 à março de 2023	69
Tabela 2 – Pesos (w_j) de cada um dos 40 ativos tomados da base S&P 500	69
Tabela 3 – Retornos e riscos de 10 portfólios de ações escolhidos de forma aleatória, cada um composto de 9 ações numeradas conforme Tabela 4 no Apêndice A extraídas das 40 ações dadas, bem como as distâncias que as matrizes de covariância destes portfólios estão da matriz de covariância do portfólio composto por todas as 40 ações	73
Tabela 4 – Lista dos 40 ativos escolhidos aleatoriamente pertencentes ao índice S&P500	79
Tabela 5 – Preço de cada um dos 40 ativos tomados da base S&P 500 em 1º de abril de 2021	82
Tabela 6 – Resultados do PCA aplicado a matriz de correlação do portfólio composto pelas 40 ações	92
Tabela 7 – Lista das 9 ações retidas pela aplicação do método de seleção de ativos . . .	93

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{A}^*	Transposto conjugado da matriz A
$\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$	Elipsoides centrados na origem definidos pela matriz simétrica (ou hermitiana) definida positiva A
\mathbb{F}	Corpo do número reais \mathbb{R} ou dos números complexos \mathbb{C}
\mathbb{F}^n	Espaço vetorial dos vetores n -dimensional sobre o corpo \mathbb{F}
$\mathbb{F}^{m \times n}$	Espaço vetorial da matriz $m \times n$ sobre o corpo \mathbb{F}
$GL(n, \mathbb{F})$	Grupo linear geral, ou seja, o conjunto de matrizes não singulares $n \times n$ sobre um corpo \mathbb{F}
\mathbf{I}_n	Matriz identidade $n \times n$
\log	Logaritmo natural
\mathbb{S}^n	Espaço vetorial das matrizes hermitianas (simétricas, para o caso real) $n \times n$
\mathbb{S}_+^n	Cone fechado das matrizes hermitianas (simétricas, para o caso real) $n \times n$ Semidefinidas positivas
\mathbb{S}_{++}^n	Cone aberto das matrizes hermitianas (simétricas, para o caso real) $n \times n$ definidas positivas
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Traço de uma matriz \mathbf{A}
$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	Distância entre duas matrizes simétricas (ou hermitianas) definidas positivas \mathbf{A} e \mathbf{B} de mesma dimensão
$\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	Distância entre duas matrizes simétricas (ou hermitianas) definidas positivas \mathbf{A} e \mathbf{B} de dimensões diferentes
$\lambda_j(\mathbf{A})$	j -ésimo autovalor da matriz \mathbf{A}

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISANDO ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA RIEMANNIANA ...	16
2.1	Produto interno e norma	16
2.2	Matrizes	19
2.3	Conceitos introdutórios de geometria riemanniana	31
2.4	Exponencial e logaritmo de matrizes	32
3	DISTÂNCIA GEOMÉTRICAS ENTRE MATRIZES DEFINIDAS POSITIVAS	36
3.1	Matrizes definidas positivas	36
3.1.1	<i>Caracterização e propriedades</i>	36
3.1.2	<i>Inclusão de elipsoides de dimensões diferentes</i>	41
3.2	Distância geométrica entre matrizes hermitianas definidas positivas de dimensões iguais	43
3.2.1	<i>Propriedades de invariância de δ_2</i>	49
3.3	Distância geométrica entre matrizes hermitianas definidas positivas de dimensões diferentes	50
4	ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS: UMA BREVE REVISÃO	58
5	SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS	66
5.1	Elementos da teoria moderna de portfólio	66
5.2	Fonte de dados	68
5.3	Obtenção da matriz de covariância do portfólio	71
5.4	Resultados	73
6	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – LISTA DE ATIVOS DO S&P 500	79
	APÊNDICE B – BASE DE DADOS COM 40 ATIVOS DO S&P 500	80
	APÊNDICE C – RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SELEÇÃO DE ATIVOS	92

**APÊNDICE D – MATRIZES DE COVARIÂNCIA DOS 10
SUBPORTFÓLIOS EXTRAÍDOS DE UM PORTFÓLIO DE ATIVOS
FINANCEIROS COMPOSTOS DE 40 AÇÕES ÚNICAS DO ÍNDICE
S&P 500**

1 INTRODUÇÃO

Em muitas áreas da matemática aplicada e da engenharia, as matrizes definidas positivas desempenham um papel fundamental. Elas estão presentes na Estatística como matrizes de covariância; em Programação Convexa e Semidefinida como elementos do espaço de busca; em Aprendizado de Máquinas como núcleo; em Imagens Médicas como tensores de difusão; em Elasticidade como tensores de elasticidade, dentre outras. Além disso, o cálculo com matrizes definidas positivas envolve aproximações, interpolação e filtragem, levando a um reino de algoritmos baseados em métricas. Nos últimos anos, tem sido cada vez mais reconhecido que a distância euclidiana não se adapta bem ao conjunto de matrizes definidas positivas, seja pela natureza especial destas matrizes e ou mesmo por limitações que a distância euclidiana possui, como por exemplo, o fato de ela não ser invariante a transformações lineares, e que, trabalhar com uma geometria adequada e que respeite melhor as propriedades das matrizes definidas positivas é importante em problemas computacionais (Bonnabel; Sepulchre, 2010).

(Bhatia, 2009) mostrou que o cone das matrizes $n \times n$ simétricas ou Hermitianas definidas positivas \mathbb{S}_{++}^n possui *tensor métrico Riemanniano* natural, e que o comprimento mínimo da geodésica unindo dois pontos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ dá a *distância geodésica* $\delta_2 : \mathbb{S}_{++}^n \times \mathbb{S}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left[\sum_{j=1}^n \log^2(\lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})) \right]^{1/2}$$

em que $\lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ corresponde ao j -ésimo autovalor da matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Como afirma (Bonnabel; Sepulchre, 2010), δ_2 é a distância geodésica mais natural e importante no cone \mathbb{S}_{++}^n . Possui uma propriedade bastante desejável, que é ser invariante sob congruência, além de ser invariante sob inversão e sob semelhança.

Do ponto de vista prático, δ_2 é a base de inúmeras aplicações em diversas áreas, como em visão computacional (Pennec *et al.*, 2006), imagens médicas (Fletcher; Joshi, 2007), (Moakher; Zéraï, 2011), processamento de sinais de radar (Barbaresco, 2008), inferência estatística (Pennec, 2006), entre outras áreas. Em inferência δ_2 foi mostrado (Smith, 2005) como sendo equivalente à métrica de informação de Fisher para problemas de estimação da matriz de covariância de uma distribuição gaussiana. Na otimização, foi mostrado (Nesterov *et al.*, 2002) como sendo equivalente à métrica definida pela barreira natural auto-concordante logaritmicamente homogênea $(-\log \det \mathbf{A})$ no cone simétrico (que é um conjunto convexo). Na álgebra linear numérica, δ_2 dá origem à média geométrica da matriz (Lawson; Lim, 2001).

A restrição que a distância δ_2 possui em relação a matrizes equidimensionais pode limitar a sua aplicação nas diversas áreas mencionadas acima. Assim, para o caso em que se tem duas matrizes simétricas definidas positivas \mathbf{A} e \mathbf{B} de dimensões diferentes, isto é, $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ com $m \neq n$ essa distância não se aplica.

Para resolver o problema da limitação de δ_2 às matrizes de dimensões diferentes, (Lim *et al.*, 2019) mostraram em seu trabalho, como essa distância usual entre matrizes simétricas (ou Hermitianas, para o caso complexo) definidas positivas equidimensionais poderia ser estendida para matrizes com dimensões diferentes. Isso deu origem a distância que denotaram por δ_2^+ . Para obtenção dessa distância os autores exploraram a correspondência biunívoca que as matrizes simétricas (ou Hermitianas) definidas positivas possuem com outros objetos matemáticos, como por exemplo, elipsoides centrados na origem em \mathbb{R}^n , produto interno em \mathbb{R}^n , covariância de variáveis aleatórias não degeneradas, tensores de difusão, etc. No caso em que as matrizes forem Hermitianas pode-se substituir nestas correspondências \mathbb{R} por \mathbb{C} . De modo similar a distância δ_2 , neste caso, para $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ com $m < n$, (Lim *et al.*, 2019) obtiveram uma fórmula prática para o cálculo de δ_2^+ conhecendo apenas os autovalores da matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}$ em que \mathbf{B}_{11} denota a submatriz principal superior esquerda de \mathbf{B} com a mesma dimensão da matriz \mathbf{A} .

Na área de Finanças, um dos principais campos de estudo das pesquisas atuais está relacionado ao problema de seleção de portfólios de ativos financeiros, que tem como questões centrais, a gestão de investimentos e a construção de estratégias de alocação de ativos. Este problema se resume a situações de um investidor que tem a sua disposição ativos conhecidos e capital limitado para realizar seu investimento. Deseja-se determinar quais ativos devem ser selecionados para distribuir seu capital, de modo que o portfólio resultante seja ótimo segundo critérios preestabelecidos.

O trabalho pioneiro envolvendo seleção de portfólios foi apresentado por (Markowitz, 1952), e nele foi proposto um modelo matemático, conhecido como **Teoria Moderna de Portfólio** para realizar seleção de portfólios de ativos através da ideia de diversificação, isto é, considerar a escolha de ativos que combina o máximo retorno com o menor risco possível. Em seu modelo Markowitz estabelece que um investidor pode reduzir o risco de um investimento combinando dois ou mais ativos financeiros e caso tenha que optar entre dois ativos com mesmo retorno, deverá escolher aquele que oferece menor risco.

A Teoria Moderna de Portfólio tem fornecido um sólido arcabouço matemático para abordar as questões relacionadas a gestão de investimentos e a construção de estratégias

de alocação de ativos, e nestas abordagens a análise das matrizes de covariância desempenha um papel fundamental na seleção de portfólios, sendo essencial para a avaliação do risco e do retorno de um portfólio, permitindo que os investidores compreendam como os ativos individuais interagem entre si.

Em seu trabalho, (Markowitz, 1952) utilizou as matrizes de covariância para encontrar a combinação ideal de ativos que maximiza o retorno esperado para um nível de risco específico ou minimiza o risco para um retorno que se deseja alcançar. Isso é feito por meio da construção da “fronteira eficiente”, que representa as carteiras ótimas com base nas matrizes de covariância.

Na medição de risco, as matrizes de covariância são usadas para calcular a volatilidade ou o desvio padrão dos ativos individuais e do portfólio como um todo. A volatilidade é uma medida de risco, e os investidores geralmente procuram minimizá-la para reduzir o potencial de perdas. No que diz respeito a diversificação de um portfólio, as matrizes de covariância permitem aos gestores de portfólios avaliarem como os ativos individuais se correlacionam entre si. Correlações negativas ou baixas indicam que os ativos podem se mover de forma independente ou em direções opostas, o que pode ser benéfico para a diversificação, contribuindo na redução do risco global do portfólio.

Motivado pelas informações valiosas que as matrizes de covariância carregam sobre a relação entre ativos individuais de um portfólio, a proposta deste trabalho foi aplicar o cálculo da distância δ_2^+ às matrizes de covariância de portfólios financeiros com o objetivo de verificar se a ordenação dos retornos e riscos de subportfólios extraídos de um portfólio dado se estabelecia de forma clara e consistente, isto é, se teríamos uma ordenação bem definida, à medida que suas matrizes de covariância se distanciavam da matriz do portfólio original. Buscamos ainda nesta investigação, verificar se os subportfólios com matrizes de covariância mais próximas à matriz do portfólio dado tendiam a apresentar retornos e riscos mais semelhantes ao deste portfólio e com isso buscar compreender como as distâncias entre matrizes de covariância poderiam influenciar a dinâmica dos subportfólios, podendo auxiliar a tomada de decisão, alocação de ativos e gerenciamento de risco em busca de estratégias mais eficientes no ambiente complexo dos mercados financeiros.

Para realização das investigações da nossa pesquisa foi considerado um estudo de caso em seleção de portfólios financeiros em que escolhemos de forma aleatória 40 ativos da base de dados do índice **S&P 500** para compor um portfólio. Foram utilizados os valores (preços) com

cotação em dólar de uma ação única de cada um dos ativos, considerando os dados históricos do dia 1º de cada mês no período de maio de 2021 à março de 2023.

Foi utilizado neste trabalho um método com base em Análise de Componentes Principais (PCA) proposto por (Rea; Rea, 2016), com a finalidade de extrair do nosso portfólio considerado um número de ativos menor do que 40, e que juntos pudessem replicar de perto o comportamento do portfólio total. O propósito da aplicação deste método foi, reordenar os 40 ativos, de modo que, estes extraídos ocupassem as primeiras posições, e com isso ter a presença de uma submatriz principal superior esquerda da matriz de covariância do portfólio total determinada por estes ativos que foram extraídos.

Esta dissertação encontra-se estruturada da seguinte forma:

O Capítulo 2 revisa conceitos da Álgebra Linear destacando definições e propriedades envolvendo produto interno, norma e matrizes. São apresentados conceitos introdutórios da Geometria Riemanniana, fornecendo definições que estarão presentes ao longo do trabalho. Ele fornece de forma breve, definições e resultados sobre a exponencial e o logaritmo de uma matriz.

O Capítulo 3 discute a distância geométrica entre matrizes definidas positivas, tanto para o caso equidimensional, quanto para o caso em que as matrizes possuem dimensões diferentes. Ele contém inicialmente uma apresentação das matrizes definidas positivas, destacando o Teorema do Entrelaçamento de Autovalores, ordenação parcial de Löwner, diagonalização simultânea de matrizes definidas positivas e duas equivalências entre a inclusão de elipsoides centrados na origem e a ordenação parcial de Löwner.

O Capítulo 4 fornece uma brevemente introdução à Análise de Componentes Principais, abordando dois métodos para seleção de componentes principais e um método que permite realizar a seleção de variáveis.

O Capítulo 5 traz os elementos básicos presentes na teoria moderna de portfólios, destacando os conceitos de retorno, risco, matriz de covariância e correlação de um portfólio de ativos financeiros. Detalha os dados utilizados na pesquisa, a análise realizada e os resultados numéricos obtidos.

O Capítulo 6 conclui o trabalho.

2 REVISANDO ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA RIEMANNIANA

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos pertinentes a respeito de produto interno e norma em um espaço vetorial, matrizes, geometria Riemanniana e exponencial e logaritmo de uma matriz, a fim de facilitar a compreensão deste trabalho.

2.1 Produto interno e norma

Apresentaremos a seguir alguns elementos importantes da álgebra linear referentes a produto interno e norma de vetores em um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} como apresentados em (Hoffman; Kunze, 1971), (Coelho; Lourenço, 2005), (Leon *et al.*, 2006), (Araujo, 2014).

Definição 2.1.1. *Seja \mathbb{F} o corpo dos números reais \mathbb{R} ou o corpo dos números complexos \mathbb{C} e seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} . Um **produto interno** sobre V é uma função que associa a cada par de vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} em V um número (real ou complexo) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, tal que, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ em V e qualquer escalar α :*

$$(i) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle;$$

$$(ii) \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle;$$

$$(iii) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \text{ onde a barra indica o complexo conjugado};$$

$$(iv) \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \text{ com } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Na definição acima, quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o complexo conjugado que aparece em (iii) é desnecessário; no entanto, no caso de $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ele é necessário para se obter a condição (iv), pois sem este complexo conjugado chegaríamos a uma contradição:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \text{ e } \langle i\mathbf{u}, i\mathbf{u} \rangle = i\langle \mathbf{u}, i\mathbf{u} \rangle = i\langle i\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = i^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0.$$

Denotaremos por \mathbb{F}^n o **espaço vetorial dos vetores n -dimensional sobre o corpo \mathbb{F}** .

Exemplo 1. *Sobre \mathbb{F}^n existe um produto interno denominado **produto interno canônico** definido sobre $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ por*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}.$$

Definição 2.1.2. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A **norma** do vetor $\mathbf{v} \in V$ proveniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é dada por*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}. \tag{2.1}$$

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Segue das definições envolvidas que

- (a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, com $\|\mathbf{u}\| = 0$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- (b) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$;
- (c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade triangular).

De fato, (a) segue diretamente da Definição 2.1.1 (iv). No caso (b) temos

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathbf{v}\| &= \sqrt{\langle \alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\alpha\langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{v} \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\ &= |\alpha|\|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Para verificar (c) usaremos um importante teorema que relaciona o produto interno de dois vetores com suas normas, conhecido por a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço vetorial com produto interno, então para quaisquer vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} em V tem-se*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|. \quad (2.2)$$

Demonstração. Segue das propriedades do produto interno que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v} \rangle + \langle -\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v} \rangle \\ &= \overline{\langle \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, -\alpha\mathbf{v} \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle -\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}, -\alpha\mathbf{v} \rangle} + \overline{\langle -\alpha\mathbf{v}, -\alpha\mathbf{v} \rangle} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \overline{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \overline{\overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \alpha\overline{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - \overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \overline{\overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + |\alpha|^2\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + |\alpha|^2\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

em que $\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$ denota a parte real do número $\overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. A desigualdade (2.2) é evidentemente verdadeira quando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e tomando na última igualdade acima

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2},$$

teremos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\right) + |\alpha|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}\right) + \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^4} \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\left(\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}\right) + \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \text{ ou ainda } |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

□

Usando agora o Teorema 2.1.1 podemos fazer a verificação de (c)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\
&= \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\
&= \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \text{ (pois } \operatorname{Re}(z) \leq |z| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}) \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.
\end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq 0$ segue que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Usaremos a notação \mathbf{u}^\top para denotar o **transposto** de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e \mathbf{u}^* para denotar o **transposto conjugado** de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.

Exemplo 2. Sobre \mathbb{F}^n temos que a **norma euclidiana** de $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Em notação matricial denotaremos

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}} \text{ quando } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

e

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^* \mathbf{u}} \text{ quando } \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n.$$

Definição 2.1.3. *Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores em um espaço vetorial V com produto interno. Dizemos que \mathbf{u} e \mathbf{v} são **ortogonais** se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Se S é um conjunto de vetores em V , dizemos que S é um **conjunto ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos em S são ortogonais. Um **conjunto ortonormal** é um conjunto ortogonal S , com a propriedade adicional de que $\|\mathbf{u}\| = 1$ para todo $\mathbf{u} \in S$.*

Teorema 2.1.2. *Se $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial V com produto interno, então $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Considere uma combinação linear nula dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, isto é,

$$\alpha \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ façamos o produto interno de \mathbf{u}_j com ambos os membros da igualdade acima, assim segue das propriedades (i) e (ii) da Definição 2.1.1 que

$$\alpha_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_j \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_j \rangle = 0$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um conjunto ortogonal, devemos ter $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Logo a igualdade acima se reduz a

$$\alpha_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = 0.$$

Sendo \mathbf{u}_j não nulo, segue que $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle \neq 0$, assim $\alpha_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$. Portanto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um conjunto linearmente independente. \square

Em particular, segue do Teorema 2.1.2 que, se $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um conjunto ortonormal de vetores em um espaço vetorial V com produto interno, então $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ são linearmente independentes.

2.2 Matrizes

A seguir serão apresentadas algumas definições e resultados importantes sobre matrizes que servirão de alicerce para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Antes de começarmos nossa discussão sobre matrizes, é importante apresentar algumas das terminologias gerais. Denotaremos por $\mathbb{F}^{m \times n}$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas sobre um corpo \mathbb{F} , que poderá ser o corpo dos números reais ou dos números complexos, isto é, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Denotamos a **matriz identidade** $n \times n$ por \mathbf{I}_n .

Uma matriz $\mathbf{D} = (d_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ que denotaremos por $\mathbf{D} = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ é chamada **matriz diagonal** se suas entradas $d_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. A matriz identidade é um caso particular da matriz diagonal cujas entradas diagonais $d_{ii} = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Dizemos que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é **não singular** ou **invertível**, se existir uma única **inversa** denotada por \mathbf{A}^{-1} , tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. No caso em que tal inversa não existe dizemos que a matriz \mathbf{A} é **singular**.

Vamos agora definir e apresentar algumas propriedades do traço de uma matriz. Para mais detalhes ver (Curtis, 1984).

Definição 2.2.1. *O traço de uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n \times n$ é a soma dos seus termos diagonais, isto é,*

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Temos claramente que

- (i) $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$ e $\text{tr}(\alpha \cdot \mathbf{A}) = \alpha \cdot \text{tr}(\mathbf{A})$ para toda matriz \mathbf{A}, \mathbf{B} e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. Assim tr é linear.

Supondo que $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então

- (ii) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$.

Para provar (ii) vamos escrever a soma dos termos diagonais de \mathbf{AB} ,

$$(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + \dots + a_{2n}b_{n2}) + \dots + (a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn})$$

e a soma dos termos diagonais de \mathbf{BA} ,

$$(b_{11}a_{11} + \dots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + \dots + b_{2n}a_{n2}) + \dots + (b_{n1}a_{1n} + \dots + b_{nn}a_{nn}).$$

Como \mathbb{R} e \mathbb{C} são comutativos, a igualdade verifica-se facilmente.

Outra identidade útil a respeito do traço é

- (iii) Se \mathbf{B} é uma matriz não singular, então

$$\text{tr}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{A}).$$

Para a prova de (iii) temos por (ii) que

$$\text{tr}((\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})) = \text{tr}(\mathbf{I}_n\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}).$$

Decorre do Exemplo 1 que, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ em $\mathbb{F}^{n \times n}$

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

define um produto interno sobre $\mathbb{F}^{n \times n}$, denominado **produto interno de Frobenius**. Além disso, introduzindo a matriz **transposta conjugada** (ou **adjunta**) \mathbf{B}^* , em que $(b_{ji})^* = \overline{b_{ij}}$ podemos exprimir este produto interno sobre $\mathbb{F}^{n \times n}$ em termo do traço

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^*) = \text{tr}(\mathbf{B}^*\mathbf{A}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^*) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{ji})^* \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}} \end{aligned}$$

A norma de $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é dada por

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})},$$

e é chamada **norma de Frobenius**.

Vamos agora relembrar os conceitos de autovalor, bem como o autovetor associado.

Definição 2.2.2. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Um **autovalor** da matriz \mathbf{A} é um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que existe um vetor não nulo \mathbf{x} com $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Se λ é um autovalor de \mathbf{A} , então todo vetor não nulo \mathbf{x} tal que, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ será chamado de **autovetor** de \mathbf{A} associado ao autovalor λ .*

Note que a equação $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dada na Definição 2.2.2 pode ser reescrita como

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Assim para que existam um escalar λ e um vetor não nulo \mathbf{x} satisfazendo a Equação (2.3) é necessário e suficiente que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0. \tag{2.4}$$

Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, o desenvolvimento do determinante apresentado na equação (2.4) levará a um polinômio de grau n na variável λ cujas raízes são os autovalores de \mathbf{A} . Esse polinômio será chamado de **polinômio característico** da matriz \mathbf{A} e será denotado por $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Definição 2.2.3. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é dita **diagonalizável** se existir uma matriz não singular \mathbf{S} e uma matriz diagonal \mathbf{D} tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}. \quad (2.5)$$

Neste caso dizemos que \mathbf{S} **diagonaliza** \mathbf{A} .

Dadas as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{T} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dizemos que \mathbf{A} e \mathbf{T} são **similares** se existir uma matriz não singular \mathbf{S} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}$. Desta forma, podemos dizer que uma matriz \mathbf{A} é diagonalizável se ela for similar a uma matriz diagonal.

Segue abaixo algumas propriedades de autovalores que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho e que podem ser vistas em (Meyer, 2000) e (Leon *et al.*, 2006).

Teorema 2.2.1. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são similares então possuem o mesmo polinômio característico.

Demonstração. Calculando

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \\ &= \det(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} - \lambda \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}) = \det(\mathbf{S}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{S}^{-1}) \\ &= \det \mathbf{S} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_n) \det \mathbf{S}^{-1} = \det \mathbf{S} (\det \mathbf{S})^{-1} \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_n) \\ &= \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_n) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.1. Dadas as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e suponha que sejam similares. Então \mathbf{A} e \mathbf{B} possuem os mesmos autovalores.

Proposição 2.2.2. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A matriz \mathbf{A} é singular se, e somente se, possui autovalor nulo.

Demonstração. \mathbf{A} é singular $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow 0$ resolve a equação $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \Leftrightarrow 0$ é autovalor de \mathbf{A} . □

Proposição 2.2.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz não singular. Se λ é autovalor de \mathbf{A} associado ao autovetor \mathbf{x} , então λ^{-1} é autovalor de \mathbf{A}^{-1} associado ao autovetor \mathbf{x} .

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ não singular e λ um autovalor de \mathbf{A} associado ao autovetor \mathbf{x} . Segue da Proposição 2.2.2 que $\lambda \neq 0$. Assim, multiplicando ambos os membros da equação $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ por \mathbf{A}^{-1} , obtemos:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

agora multiplicando ambos os membros desta última equação por λ^{-1} , obtemos:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}.$$

Portanto λ^{-1} é um autovalor de \mathbf{A}^{-1} associado ao autovetor \mathbf{x} . \square

Proposição 2.2.4. *Se $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ cujas raízes são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, autovalores de \mathbf{A} , então*

$$(i) \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$(ii) \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Omitiremos a demonstração da Proposição 2.2.4, mas esta pode ser encontrada em (Meyer, 2000).

Apresentaremos a seguir alguns tipos especiais de matrizes, começando com as definições das matrizes Hermitianas e simétricas.

Definição 2.2.4. *Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é dita ser **Hermitiana** se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$; Quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que \mathbf{A} é uma matriz **simétrica** e neste caso $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^{\top} = \mathbf{A}^{\top}$.*

Para um inteiro positivo n , denotaremos por \mathbb{S}^n o **espaço das matrizes $n \times n$ Hermitianas** (ou **simétricas** para o caso das matrizes com entradas em \mathbb{R}).

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, então as seguintes regras se verificam:

1. $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.
2. $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^* = \overline{\alpha}\mathbf{A}^* + \overline{\beta}\mathbf{B}^*$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
3. $(\mathbf{AC})^* = \mathbf{C}^*\mathbf{A}^*$.

Definição 2.2.5. *Seja $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dizemos que \mathbf{U} é uma matriz **unitária** se seus vetores coluna formam um conjunto ortonormal. Uma matriz unitária real é chamada de matriz **ortogonal**.*

Temos que \mathbf{U} é unitária se e somente se $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_n$. Logo, se \mathbf{U} é unitária, então seus vetores coluna são ortonormais, e pelo Teorema 2.1.2 são linearmente independentes, portanto \mathbf{U} é inversível (uma vez que uma matriz quadrada é inversível se, e somente se, seus vetores coluna são linearmente independentes (Zhang, 2011)). Assim para uma matriz unitária \mathbf{U} tem-se que

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}_n\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*\mathbf{I}_n = \mathbf{U}^*.$$

Como os números complexos aparecem de forma natural quando buscamos obter raízes de polinômios, desta forma apresentaremos os conceitos e resultados a seguir com matrizes

unitárias e Hermitianas, pois estas englobam respectivamente, o caso real das matrizes ortogonais e simétricas. Quando houver resultados particulares para matrizes reais, isso ficará evidenciado no texto.

Definição 2.2.6. Uma matriz $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é chamada **normal** se comuta com sua transposta conjugada, isto é, se $\mathbf{N}\mathbf{N}^* = \mathbf{N}^*\mathbf{N}$.

Lema 2.2.1 (Lema de Schur). Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, pode-se encontrar uma matriz unitária \mathbf{U} (ou ortogonal \mathbf{Q} , no caso real) e uma matriz \mathbf{T} triangular superior tais que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^*.$$

Além disso, \mathbf{T} possui os mesmos autovalores de \mathbf{A} , que correspondem aos elementos da diagonal de \mathbf{T} .

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a dimensão n da matriz \mathbf{A} . Para $n = 1$ a afirmação do lema é válida, pois, para $\mathbf{A} = [a_{11}] \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$. Tomando $\mathbf{U} = [1] \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$, tem-se $\mathbf{U}^* = \overline{\mathbf{U}}^\top = [1]$ e tomando $\mathbf{T} = [a_{11}] \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ teremos

$$\mathbf{A} = [a_{11}] = [1] \cdot [a_{11}] \cdot [1].$$

Suponha que o lema seja válida para matrizes $k \times k$ e seja \mathbf{A} uma matriz $(k+1) \times (k+1)$. Sejam λ_1 um autovalor de \mathbf{A} e \mathbf{w}_1 um autovetor unitário associado a λ_1 . Usando o processo de Gram-Schmidt¹, construa vetores $\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k+1}$ de modo que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k+1}\}$ seja uma base ortonormal para \mathbb{C}^{k+1} . Seja \mathbf{W} a matriz cujo i -ésimo vetor coluna é \mathbf{w}_i ($i = 1, \dots, k+1$). Então, por construção, \mathbf{W} é unitária. A primeira coluna de $\mathbf{W}^*\mathbf{A}\mathbf{W}$ será $\mathbf{W}^*\mathbf{A}\mathbf{w}_1$. Sendo \mathbf{w}_1 autovetor de \mathbf{A} associado ao autovalor λ_1 , segue que

$$\mathbf{W}^*\mathbf{A}\mathbf{w}_1 = \mathbf{W}^*\lambda_1\mathbf{w}_1 = \lambda_1\mathbf{W}^*\mathbf{w}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1,$$

em que $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$. Logo $\mathbf{W}^*\mathbf{A}\mathbf{W}$ é uma matriz da forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{M} & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

¹ O processo de Gram-Schmidt: a partir de qualquer vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ podemos obter uma base ortonormal do espaço \mathbb{C}^n . Ver (Leon *et al.*, 2006).

em que \mathbf{M} é uma matriz $k \times k$. Pela hipótese de indução, existe uma matriz $k \times k$ unitária \mathbf{V}_1 tal que $\mathbf{V}_1^* \mathbf{M} \mathbf{V}_1 = \mathbf{T}_1$, em que \mathbf{T}_1 é triangular superior. Seja

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{V}_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Temos \mathbf{V} é unitária e além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^* (\mathbf{W}^* \mathbf{A} \mathbf{W}) \mathbf{V} &= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{V}_1^* & \\ 0 & & & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{M} & \\ 0 & & & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{V}_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{V}_1^* \mathbf{M} \mathbf{V}_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{T}_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right] = \mathbf{T} \end{aligned}$$

em que \mathbf{T} é triangular superior.

Seja $\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{V}$. Temos que a matriz \mathbf{U} é unitária, já que

$$\mathbf{U}^* \mathbf{U} = (\mathbf{W} \mathbf{V})^* \mathbf{W} \mathbf{V} = \mathbf{V}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

e portanto $\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}$. □

A fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{T} \mathbf{U}^*$ é muitas vezes chamada de **decomposição de Schur** de \mathbf{A} . No caso em que \mathbf{A} é Hermitiana, a matriz \mathbf{T} será diagonal, como afirma o teorema a seguir.

Teorema 2.2.5 (Teorema Espectral). *Se \mathbf{A} é uma matriz Hermitiana, então existe uma matriz \mathbf{U} unitária que diagonaliza \mathbf{A} .*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.1, existe uma matriz unitária \mathbf{U} tal que $\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}$, em que \mathbf{T} é triangular superior. Além disso,

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U})^* = \mathbf{U}^* \mathbf{A}^* \mathbf{U} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}.$$

Logo, \mathbf{T} é Hermitiana e, portanto, tem que ser diagonal. Essa matriz diagonal será denotada por $\mathbf{\Lambda}$. □

Para o caso em que \mathbf{A} é uma matriz simétrica no Teorema 2.2.5, a matriz diagonalizante \mathbf{U} será ortogonal.

Note que no Teorema 2.2.5, as matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{\Lambda}$ possuem os mesmos autovalores. Além disso, se \mathbf{x} é autovetor de \mathbf{A} , então $\mathbf{U}^*\mathbf{x}$ será o autovetor correspondente.

De fato, seja λ um autovalor de \mathbf{A} e \mathbf{x} seu autovetor associado, então $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Logo

$$(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}^*\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{U}^*\mathbf{x}).$$

Assim, λ é autovalor de $\mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{U}^*\mathbf{x}$ é um seu autovetor associado, correspondente ao autovetor \mathbf{x} de \mathbf{A} . E mais, os autovalores da matriz $\mathbf{\Lambda}$, estão na diagonal (isso se verifica calculando as raízes de $p_{\mathbf{\Lambda}}(\lambda) = \det(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$ e concluído que em $\mathbf{\Lambda}$, os elementos diagonais $a_{ii} = \lambda_i$ para cada $i = 1, \dots, n$). Daí segue que

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de \mathbf{A} . Por simplicidade escreveremos

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Proposição 2.2.6. *Se $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é uma matriz normal triangular, então \mathbf{A} será uma matriz diagonal.*

Para uma demonstração da Proposição 2.2.6 ver (Araujo, 2014).

Teorema 2.2.7. *Uma matriz quadrada será unitariamente diagonalizável se, e somente se, for normal.*

Demonstração. Se \mathbf{A} for uma matriz unitariamente diagonalizável, então $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*$, daí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^* &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*)^* = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*)^*(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*) = \mathbf{A}^*\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, pelo Lema 2.2.1, $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^*$, para alguma matriz triangular superior \mathbf{T} e alguma matriz unitária \mathbf{U} . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{T}^* &= \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \\ &= \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U})^*\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{T}^*\mathbf{T}, \end{aligned}$$

então \mathbf{T} é normal. Logo pela Proposição 2.2.6, \mathbf{T} será diagonal e, portanto, \mathbf{A} será diagonalizável. \square

A seguir apresentaremos um conjunto de propriedades que caracterizam as matrizes Hermitianas.

Teorema 2.2.8. *Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ dada. \mathbf{A} é Hermitiana se e somente se pelo menos uma das condições a seguir for satisfeita:*

- (i) $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.
- (ii) \mathbf{A} é normal e tem apenas autovalores reais.
- (iii) $\mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}$ é Hermitiana para toda matriz \mathbf{S} , $n \times n$.

Demonstração. Supondo \mathbf{A} Hermitiana, temos

- (i) Calculando $\overline{(\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x})} = (\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{A} (\mathbf{x}^*)^* = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$, assim $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é igual ao seu complexo conjugado e, portanto, é real.
- (ii) Sendo \mathbf{A} Hermitiana, tem-se que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Daí obtemos

$$\mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^* \text{ e } \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}.$$

Logo

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$$

e portanto \mathbf{A} é normal.

Agora, se \mathbf{x} é um autovetor associado ao autovalor λ de \mathbf{A} , então $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Multiplicando esta igualdade por \mathbf{x}^* , obtemos

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \|\mathbf{x}\|^2,$$

na norma euclidiana. Por outro lado, sendo $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* (\mathbf{A} \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^* (\mathbf{A}^* \mathbf{x}) = (\mathbf{x}^* \mathbf{A}^*) \mathbf{x} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^* \mathbf{x} = (\lambda \mathbf{x})^* \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados, como \mathbf{x} não pode ser nulo, pois é autovetor, então $\|\mathbf{x}\|^2 \neq 0$, e portanto $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é, λ é um número real.

- (iii) Finalmente, $(\mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S})^* = \mathbf{S}^* \mathbf{A}^* (\mathbf{S}^*)^* = \mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}$, assim $\mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}$ é Hermitiana.

Reciprocamente,

- (i) Se $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, então $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^* \mathbf{A} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y}) + (\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x})$ é real para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. Como $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y}$ são reais por suposição, concluímos que $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. Se escolhermos $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ e $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, em que \mathbf{e}_i denota um vetor em \mathbb{C}^n cuja i -ésima entrada é 1 e as demais entradas são nulas, então $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{kj} + a_{jk}$ é real, então $\text{Im } a_{kj} = -\text{Im } a_{jk}$, em que $\text{Im } a_{kj}$ e $\text{Im } a_{jk}$ denotam a parte imaginária dos complexos a_{kj} e a_{jk} respectivamente. Se escolhermos $\mathbf{x} = i\mathbf{e}_k$ e $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, então $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = -ia_{kj} + ia_{jk}$ é real, então $\text{Re } a_{kj} = \text{Re } a_{jk}$. Combinando as identidades para as partes real e imaginária de a_{kj} e a_{jk} obtemos a identidade $a_{kj} = \bar{a}_{jk}$, e como j, k são arbitrários, concluímos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.
- (ii) Se \mathbf{A} é normal, segue do Teorema 2.2.7 que \mathbf{A} é unitariamente diagonalizável, então $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*$ com $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Em geral, temos $\mathbf{A}^* = \mathbf{U} \bar{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{U}^*$, mas se $\mathbf{\Lambda}$ for real, temos $\mathbf{A}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^* = \mathbf{A}$.
- (iii) Sendo $\mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}$ Hermitiana, para toda matriz \mathbf{S} , $n \times n$, tem-se que

$$(\mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S})^* = \mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S},$$

isto é,

$$\mathbf{S}^* \mathbf{A}^* \mathbf{S} = \mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}.$$

Tomando $\mathbf{S} = \mathbf{I}_n$, obtemos $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ e concluímos que \mathbf{A} é Hermitiana. □

A caracterização dada pelo Teorema 2.2.8(i) pode ser refinada considerando as formas Hermitianas que assumem apenas valores positivos (ou não negativos). Vejamos o teorema a seguir.

Teorema 2.2.9. *Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ dada. Então $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real e positivo (respectivamente $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real e não negativo) para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ não nulo, se e somente se, \mathbf{A} é Hermitiana e todos os seus autovalores são positivos (respectivamente não negativos).*

Demonstração. Se $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real e positivo (respectivamente real e não negativo) sempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ é real para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, logo segue do Teorema 2.2.8(i) que \mathbf{A} é Hermitiana. Além disso, $\lambda = \mathbf{u}^* (\lambda \mathbf{u}) = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}$ se $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor unitário de \mathbf{A} associado a um autovalor λ , assim a hipótese assegura que $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda \geq 0$).

Reciprocamente, se \mathbf{A} é Hermitiana e tem apenas autovalores positivos (respectivamente não negativos), então o Teorema 2.2.5 assegura que $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*$, em que as colunas da

matriz unitária $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ são autovetores de \mathbf{A} associados as entradas diagonais positivas (respectivamente não negativas) de $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^* \mathbf{x} = (\mathbf{U}^* \mathbf{x})^* \mathbf{\Lambda} (\mathbf{U}^* \mathbf{x}) \\
 &= \lambda_1 \mathbf{x}^* (\mathbf{u}_1^*)^* \mathbf{u}_1^* \mathbf{x} + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}^* (\mathbf{u}_n^*)^* \mathbf{u}_n^* \mathbf{x} \\
 &= \lambda_1 (\mathbf{u}_1^* \mathbf{x})^* (\mathbf{u}_1^* \mathbf{x}) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{u}_n^* \mathbf{x})^* (\mathbf{u}_n^* \mathbf{x}) \\
 &= \lambda_1 \|\mathbf{u}_1^* \mathbf{x}\|^2 + \cdots + \lambda_n \|\mathbf{u}_n^* \mathbf{x}\|^2 \\
 &= \lambda_1 |\mathbf{u}_1^* \mathbf{x}|^2 + \cdots + \lambda_n |\mathbf{u}_n^* \mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\mathbf{u}_k^* \mathbf{x}|^2
 \end{aligned}$$

que é sempre não negativo; ele é positivo para todo $\lambda_k > 0$ e algum $\mathbf{u}_k^* \mathbf{x} \neq 0$, que é certamente o caso se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. \square

Para finalizar esta seção serão apresentadas algumas definições a respeito de submatriz e matriz particionada (ou em bloco).

Uma **submatriz** de uma determinada matriz \mathbf{A} é um um arranjo retangular situada em subconjuntos especificados das linhas e colunas de uma determinada matriz. Assim, dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & \frac{1}{3} \\ \pi & -5 & 0 \end{bmatrix},$$

temos por exemplo que, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma submatriz de \mathbf{A} (situada na linha 2 e colunas 2 e 3) de \mathbf{A} .

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Para conjuntos de índices $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, m\}$ e $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$, denotamos por $\mathbf{A}[\mathcal{I}, \mathcal{J}]$ a submatriz de entradas que se encontram nas linhas de \mathbf{A} indexados por \mathcal{I} e as colunas indexadas por \mathcal{J} . Nesta notação, teríamos para o caso do exemplo anterior, que $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\{1\}, \{2, 3\}] = \begin{bmatrix} i & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Se $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, a submatriz $\mathbf{A}[\mathcal{I}, \mathcal{I}]$, que denotaremos simplesmente por $\mathbf{A}[\mathcal{I}]$ é chamada **submatriz principal** de \mathbf{A} . Uma matriz $n \times n$ tem $\binom{n}{k}$ submatrizes principais distintas de ordem k .

Para $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e algum inteiro k , $1 \leq k \leq n$, chamamos $\mathbf{A}[\{1, \dots, k\}]$ de **submatriz principal dominante** ou ainda **submatriz principal superior esquerda** de \mathbf{A} . A matriz \mathbf{A} possui n submatrizes principais dominantes.

O determinante de uma submatriz $k \times k$ de \mathbf{A} é chamado de **menor**. Se a submatriz $k \times k$ é uma submatriz principal, então seu determinante é chamado de **menor principal** (de ordem k) e se a submatriz é uma matriz principal dominante, então seu determinante será chamado **menor principal dominante**.

Se $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_r$ constitui uma partição do conjunto² $\{1, \dots, m\}$ e $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_s$ constitui uma partição do conjunto $\{1, \dots, n\}$, então a matriz $\mathbf{A}[\mathcal{I}_i, \mathcal{J}_j]$ forma uma **partição** da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

Se uma matriz é particionada por partições sequenciais de suas linhas e colunas, a matriz particionada resultante é chamada de **matriz em blocos**. Por exemplo, se as linhas e colunas de $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ são particionadas pela mesma partição sequencial $\mathcal{I}_1 = \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{I}_2 = \{k+1, \dots, n\}$, a matriz em blocos resultante será

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_1] & \mathbf{A}[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2] \\ \mathbf{A}[\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1] & \mathbf{A}[\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

em que os blocos são as submatrizes $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}[\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j]$, com $i, j = 1, 2$. Para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & \frac{1}{3} \\ \pi & -5 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

tomando a partição sequencial para as linhas e colunas de \mathbf{A} como sendo $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_2 = \{3\}$, resulta na matriz em bloco

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ \pi & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes em bloco 2×2 são as mais importantes e úteis. Faremos uso destas matrizes em breve.

² Uma **partição de um conjunto** X é qualquer coleção $\mathcal{P} = \{X_i, i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos não vazios de X com as seguintes propriedades: $\cup_{i \in \mathcal{I}} X_i = X$ e $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ em \mathcal{I} .

2.3 Conceitos introdutórios de geometria riemanniana

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos de Geometria Riemanniana. Demonstrações e detalhes mais específicos relacionados ao assunto podem ser encontrados em (Carmo, 2005) e (Petersen, 2006).

Definição 2.3.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de funções injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em que U_α são abertos de \mathbb{R}^n , tais que*

1. $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições 1 e 2.

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou a aplicação \mathbf{x}_α) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma **parametrização** (ou **sistema de coordenada**) de M em p .

Definição 2.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma **curva** (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis em p . O **vetor tangente à curva α em $t = 0$** é o operador $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Um **vetor tangente em p** é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM .

O conjunto T_pM , com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n chamado o **espaço tangente** de M em p .

Definição 2.3.3. *Uma **métrica Riemanniana** (ou **tensor métrico Riemanniano**) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p(M) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(\mathbf{e}_i)$, onde \mathbf{e}_i é o i -ésimo vetor canônico do \mathbb{R}^n , então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U para todos $i, j = 1, \dots, n$.*

O subscrito p geralmente será suprimido quando não houver possibilidade de confusão. Uma **variedade Riemanniana** é um par (M, g) onde M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana em M .

Definição 2.3.4. Uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow M$ em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e M uma variedade diferenciável chama-se uma **curva** (parametrizada).

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um **segmento**.

Definição 2.3.5. Uma **curva diferenciável por partes** é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis. Dizemos que γ liga os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

Conhecida a métrica Riemanniana de uma variedade Riemanniana M , podemos calcular o comprimento de um segmento γ ligando dois pontos quaisquer $p, q \in M$. Considere $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes satisfazendo $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Assim, o **comprimento** de γ é definido por

$$L(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

e a **distância Riemanniana** d entre p e q é definida como

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C_{p,q}} \{L(\gamma)\},$$

onde $C_{p,q}$ é o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p à q . De forma intuitiva, uma curva ligando p à q , tal que o comprimento desta curva seja menor ou igual à qualquer outra curva diferenciáveis por partes ligando p à q , é conhecida como **geodésica**.

2.4 Exponencial e logaritmo de matrizes

Definição 2.4.1. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, a **exponencial** de \mathbf{A} , denotada por $e^{\mathbf{A}}$ ou $\exp \mathbf{A}$ é a matriz $n \times n$ dado pela série de potências

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^m}{m!}. \quad (2.6)$$

Pode ser visto em (Higham, 2008) que a série em (2.6) sempre converge, então a exponencial de \mathbf{A} está bem definida. Observe que se \mathbf{A} é uma matriz 1×1 , a matriz exponencial de \mathbf{A} corresponde à exponencial ordinária de \mathbf{A} pensada como um número.

A seguir serão apresentadas propriedades da exponencial de uma matriz. Maiores detalhes das demonstrações dos resultados podem ser consultados em (Higham, 2008), (Tapp, 2016) e (Hall, 2013). A matriz exponencial satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.4.1. *Seja $\mathbf{0}$ a matriz $n \times n$ nula. Tem-se que*

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}_n.$$

Proposição 2.4.2. *Se as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ comutam, isto é, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ então*

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}.$$

Proposição 2.4.3. *Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, temos que $e^{\mathbf{A}}$ é não singular e sua inversa é $e^{-\mathbf{A}}$.*

Desta Proposição 2.4.3 segue que a aplicação $\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$ é na verdade uma aplicação de $\mathbb{C}^{n \times n}$ em $GL(n, \mathbb{C})$, onde $GL(n, \mathbb{C}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}; \det \mathbf{X} \neq 0\}$, chamado de *grupo linear geral*.

Proposição 2.4.4. *Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e \mathbf{B} é não singular, então*

$$e^{\mathbf{BAB}^{-1}} = \mathbf{B}e^{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1} \tag{2.7}$$

Demonstração. Observe inicialmente que $(\mathbf{BAB}^{-1})^n = (\mathbf{BAB}^{-1})(\mathbf{BAB}^{-1}) \dots (\mathbf{BAB}^{-1}) = \mathbf{BA}^n\mathbf{B}^{-1}$, e $\mathbf{B}(\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{BCB}^{-1} + \mathbf{BDB}^{-1}$. Segue destas igualdades e da definição de exponencial de uma matriz que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{BAB}^{-1}} &= \mathbf{I}_n + \mathbf{BAB}^{-1} + \frac{\mathbf{BA}^2\mathbf{B}^{-1}}{2!} + \frac{\mathbf{BA}^3\mathbf{B}^{-1}}{3!} + \dots \\ &= \mathbf{B} \left(\mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{B}^{-1} \\ &= \mathbf{B}e^{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.4.5. *Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, temos que $e^{\mathbf{A}^*} = (e^{\mathbf{A}})^*$.*

Proposição 2.4.6. *Se $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então $e^{\mathbf{A}} = \text{diag}(e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n})$.*

Proposição 2.4.7. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então $e^{\mathbf{A}}$ tem autovalores $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.1 tem-se que \mathbf{A} é similar a uma matriz triângular superior \mathbf{T} cujos elementos diagonais são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Qualquer que seja m inteiro positivo temos que \mathbf{T}^m é uma matriz triangular superior cujos elementos diagonais são $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$. Assim

$$e^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}_n + \mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{2!} + \frac{\mathbf{T}^3}{3!} + \dots$$

é uma matriz triangular superior cujos elementos diagonais são

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m}{m!}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^m}{m!}.$$

Portanto, pelo fato de $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$ qualquer que seja $x \in \mathbb{C}$ (Fernandez; Bernardes, 2013), temos que os autovalores de $e^{\mathbf{T}}$ são $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Como \mathbf{A} e \mathbf{T} são similares, existe uma matriz não singular \mathbf{B} tal que $\mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$. Pela Proposição 2.4.4, $e^{\mathbf{T}} = e^{\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}} = \mathbf{B}e^{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$, assim $e^{\mathbf{T}}$ e $e^{\mathbf{A}}$ são similares e portanto possuem os mesmos autovalores. \square

Corolário 2.4.1. *Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,*

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{tr}(\mathbf{A})}. \quad (2.8)$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2.4 o determinante e o traço de uma matriz $n \times n$ são o produto e a soma de seus autovalores respectivamente. Pelo Proposição 2.4.7,

$$\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}(\mathbf{A})}.$$

\square

Trataremos a seguir do logaritmo de uma matriz complexa $n \times n$, apresentando propriedades importantes que serão úteis no Capítulo 3. É importante ressaltar que as propriedades a serem tratadas aqui também são válidas para o caso em que as matrizes são reais. Um aprofundamento dos conceitos que serão apresentados podem ser encontrados como maiores detalhes, bem como demonstrações omitidas em (Higham, 2008) e (Hall, 2013).

A maneira mais simples de definir o logaritmo de uma matriz é por uma série de potências.

Definição 2.4.2. Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, o **logaritmo** de \mathbf{A} , denotado por $\log \mathbf{A}$ é a matriz $n \times n$ dada pela série de potência

$$\log \mathbf{A} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^m}{m} \quad (2.9)$$

sempre que a série convergir.

Proposição 2.4.8. Para $\|\mathbf{A} - \mathbf{I}_n\|_F < 1$ esta série em (2.9) converge.

Proposição 2.4.9. As seguintes afirmações são válidas

- (i) Para todo $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com $\|\mathbf{A} - \mathbf{I}_n\|_F < 1$, tem-se que $e^{\log \mathbf{A}} = \mathbf{A}$.
- (ii) Para todo $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com $\|\mathbf{A}\|_F < \log 2$ tem-se que

$$\|e^{\mathbf{A}} - \mathbf{I}_n\|_F < 1 \text{ e } \log e^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}.$$

Proposição 2.4.10. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz sem autovalores reais negativos ou zero e $|p| \leq 1$, então $\log(\mathbf{A}^p) = p \log \mathbf{A}$. Em particular, $\log(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \mathbf{A}$ e $\log(\mathbf{A}^{1/2}) = \frac{1}{2} \log \mathbf{A}$.

Proposição 2.4.11. Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz sem autovalores reais negativos ou zero e \mathbf{B} é não singular, então

$$\log(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{B}(\log \mathbf{A})\mathbf{B}^{-1}. \quad (2.10)$$

Finalizamos esta seção apresentando uma identidade conforme apresentada em (Boutsidis *et al.*, 2017), que relaciona o determinante e o traço.

Proposição 2.4.12. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e com autovalores positivos, então

$$\log \det \mathbf{A} = \text{tr}(\log \mathbf{A}). \quad (2.11)$$

3 DISTÂNCIAS GEOMETRIAS ENTRE MATRIZES DEFINIDAS POSITIVAS

Este capítulo discute a distância geométrica entre matrizes definidas positivas, tanto para o caso equidimensional, quanto para o caso em que as matrizes possuem dimensões diferentes. Com o propósito de enriquecer a discussão são apresentadas inicialmente propriedades das matrizes definidas positivas, concentrado-se principalmente nas desigualdades entre elas.

3.1 Matrizes definidas positivas

O objetivo principal desta seção é apresentar os resultados fundamentais a partir de (Zhang, 2011), (Horn; Johnson, 2012), (Laub, 2005), (Bhatia, 2009), (Lim *et al.*, 2019) sobre as matrizes definidas positivas, que serão frequentemente utilizados nas duas últimas seções deste capítulo.

3.1.1 Caracterização e propriedades

Definição 3.1.1. Uma matriz Hermitiana $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é dita **definida positiva**, escrita como $\mathbf{A} > 0$, se $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo vetor não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. \mathbf{A} é também chamada **semidefinida positiva**, escrita como $\mathbf{A} \geq 0$, se $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, a definição acima é válida, e neste caso substituímos o sobrescrito $*$ por \top . No restante desta seção consideraremos o caso complexo para todos os resultados a seguir, havendo especificidades para o caso real ficará claro no texto.

Para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitiana definida positiva, tem-se que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}$ define um produto interno em \mathbb{C}^n , isto é, satisfaz as propriedades da Definição 2.1.1. De fato,

- (i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{A}^* (\mathbf{v}^*)^* = (\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u})^* = \overline{(\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{u})} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.
- (ii) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^* \mathbf{A} \mathbf{w} = (\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*) \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$.
- (iii) $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\alpha \mathbf{u})^* \mathbf{A} \mathbf{v} = \overline{\alpha} \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v} = \overline{\alpha} (\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}) = \overline{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.
- (iv) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ não nulo.

Abaixo será apresentado um conjunto de condições que caracterizam as matrizes definidas positivas $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (1) \mathbf{A} é definida positiva se e somente se é Hermitiana e todos os seus autovalores são positivos.
- (2) \mathbf{A} é definida positiva se e somente se é Hermitiana e todos os seus menores principais são

positivos.

- (3) \mathbf{A} é definida positiva se e somente se existe uma matriz não singular \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\mathbf{B}$.
- (4) \mathbf{A} é definida positiva se e somente se existe uma única matriz definida positiva \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$. (A matriz \mathbf{B} é chamada *raiz quadrada* de \mathbf{A} e denotada por $\mathbf{A}^{1/2}$)
- (5) \mathbf{A} é definida positiva se e somente se existir uma única matriz triangular superior $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com elementos positivos na diagonal principal, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{T}^*\mathbf{T}$. Isso é chamado de **decomposição de Cholesky** da matriz \mathbf{A} .

Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se \mathbf{A} é definida positiva, então $\mathbf{X}^*\mathbf{A}\mathbf{X}$ é também definida positiva, qualquer que seja a matriz não nula $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Para verificação desta afirmação deve-se mostrar que $\mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*\mathbf{A}\mathbf{X})\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ não nulo. De fato,

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*\mathbf{A}\mathbf{X})\mathbf{x} = (\mathbf{X}\mathbf{x})^*\mathbf{A}(\mathbf{X}\mathbf{x}) > 0$$

pois \mathbf{A} é definida positiva e $\mathbf{X}\mathbf{x}$ é um elemento não nulo de \mathbb{C}^n .

Veremos alguns resultados de desigualdades de autovalores de matrizes Hermitianas, para obtê-los usaremos técnicas de espaços vetoriais.

Seja \mathbf{A} uma matriz Hermitiana $n \times n$ cujos os autovalores denotaremos por $\lambda_i(\mathbf{A}), i = 1, \dots, n$, ou por simplicidade λ_i . Pelo Teorema 2.2.5, existe uma matriz unitária \mathbf{U} , tal que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ou

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Os vetores colunas $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ de \mathbf{U} são autovetores ortonormais de \mathbf{A} correspondentes a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente, isto é,

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário (**Delta de Kronecker**).

Uma vez que os autovalores de uma matriz Hermitiana $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ são reais (Teorema 2.2.8 (ii)), podemos (e devemos) adotar a convenção de que eles estão sempre dispostos em ordem algébrica não-decrescente:

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}. \quad (3.2)$$

Para os resultados que serão apresentados a seguir usaremos a notação

$$\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$$

para denotar o **subespaço vetorial gerado pelos vetores** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Detalhes sobre subespaços geradores podem ser encontrado em (Hoffman; Kunze, 1971), (Coelho; Lourenço, 2005), (Leon *et al.*, 2006), (Araujo, 2014).

Teorema 3.1.1. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz Hermitiana e sejam $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ autovetores ortonormais de \mathbf{A} associados aos (não necessariamente distintos) autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de \mathbf{A} , respectivamente. Seja $S = \text{Span}\{\mathbf{u}_p, \dots, \mathbf{u}_q\}$, $1 \leq p \leq q \leq n$. Então para qualquer vetor unitário $\mathbf{x} \in S$ (isto é, $\|\mathbf{x}\| = 1$),*

$$\lambda_p(\mathbf{A}) \leq \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_q(\mathbf{A}). \quad (3.3)$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x} = \alpha_p \mathbf{u}_p + \dots + \alpha_q \mathbf{u}_q$. Então usando a relação (3.1) teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* \mathbf{A} (\alpha_p \mathbf{u}_p + \dots + \alpha_q \mathbf{u}_q) \\ &= \mathbf{x}^* (\alpha_p \mathbf{A} \mathbf{u}_p + \dots + \alpha_q \mathbf{A} \mathbf{u}_q) \\ &= \mathbf{x}^* (\alpha_p \lambda_p \mathbf{u}_p + \dots + \alpha_q \lambda_q \mathbf{u}_q) \\ &= \lambda_p \alpha_p \mathbf{x}^* \mathbf{u}_p + \dots + \lambda_q \alpha_q \mathbf{x}^* \mathbf{u}_q \\ &= \lambda_p \alpha_p (\overline{\alpha_p} \mathbf{u}_p^* + \dots + \overline{\alpha_q} \mathbf{u}_q^*) \mathbf{u}_p + \dots + \lambda_q \alpha_q (\overline{\alpha_p} \mathbf{u}_p^* + \dots + \overline{\alpha_q} \mathbf{u}_q^*) \mathbf{u}_q \\ &= \lambda_p |\alpha_p|^2 + \dots + \lambda_q |\alpha_q|^2. \end{aligned}$$

Sendo \mathbf{x} um vetor unitário, tem-se que $1 = \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \sum_{i=p}^q |\alpha_i|^2$. Assim de (3.2) obtemos as desigualdades desejadas,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} &= \lambda_p |\alpha_p|^2 + \dots + \lambda_q |\alpha_q|^2 \geq \lambda_p |\alpha_p|^2 + \dots + \lambda_p |\alpha_q|^2 = \lambda_p (|\alpha_p|^2 + \dots + |\alpha_q|^2) = \lambda_p \\ \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} &= \lambda_p |\alpha_p|^2 + \dots + \lambda_q |\alpha_q|^2 \leq \lambda_q |\alpha_p|^2 + \dots + \lambda_q |\alpha_q|^2 = \lambda_q (|\alpha_p|^2 + \dots + |\alpha_q|^2) = \lambda_q \end{aligned}$$

□

O teorema a seguir chamado **Teorema do Entrelaçamento de Autovalores**, também conhecido como o **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy**, afirma que os autovalores de uma submatriz principal de uma matriz Hermitiana entrelaçam os da matriz subjacente. Esse resultado é bastante usado para obter desigualdades matriciais.

Teorema 3.1.2 (Entrelaçamento de Autovalores). *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$, particionada como*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{B} \in \mathbb{S}^m$ é uma submatriz principal de \mathbf{A} , com $1 \leq m \leq n$. Sejam os autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{B} ordenados como em (3.2). Então

$$\lambda_k(\mathbf{A}) \leq \lambda_k(\mathbf{B}) \leq \lambda_{k+n-m}(\mathbf{A}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

Em particular, quando $m = n - 1$,

$$\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \lambda_1(\mathbf{B}) \leq \lambda_2(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{n-1}(\mathbf{B}) \leq \lambda_n(\mathbf{A}).$$

Demonstração. Por conveniência denotaremos os autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{B} respectivamente por

$$\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \lambda_2(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{A}) \text{ e } \lambda_1(\mathbf{B}) \leq \lambda_2(\mathbf{B}) \leq \dots \leq \lambda_m(\mathbf{B}).$$

Usaremos subespaços gerados por certos autovetores. Seja $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \in \mathbb{C}^m$ autovetores ortonormais de \mathbf{A} e \mathbf{B} associados aos autovalores $\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \dots, \lambda_n(\mathbf{A})$ e $\lambda_1(\mathbf{B}), \lambda_2(\mathbf{B}), \dots, \lambda_m(\mathbf{B})$ respectivamente. Simbolicamente temos por (3.1) que,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i(\mathbf{A})\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i^* \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_i = \lambda_i(\mathbf{B})\mathbf{y}_i \quad \mathbf{y}_i^* \mathbf{y}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m,$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário. Seja

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Para um dado $k \in \{1, \dots, m\}$, seja

$$S_1 = \text{Span} \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+n-m}\}$$

e

$$S_2 = \text{Span} \{\hat{\mathbf{y}}_k, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m\}.$$

Então $\dim S_1 = k + n - m$ e $\dim S_2 = m - k + 1$. Logo

$$\dim S_1 + \dim S_2 = n + 1,$$

assim o **Lema da Interseção de Subespaços**¹ assegura que existe um vetor unitário $\mathbf{x} \in S_1 \cap S_2$.

Como $\mathbf{x} \in S_2$, ele deve ser da forma $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ para algum vetor unitário $\mathbf{z} \in \text{Span} \{\mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{y}_m\} \subset$

¹ Lema da Interseção de Subespaços: Sejam S_1, \dots, S_k subespaços dados de \mathbb{C}^n . Se $\delta = \dim S_1 + \dots + \dim S_k - (k-1)n \geq 1$, existem vetores ortonormais $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\delta$ tais que $\mathbf{x}_i \in S_i$ para todo $i = 1, \dots, \delta$. Em particular, $S_1 \cap \dots \cap S_k$ contém um vetor unitário. (Horn; Johnson, 2012)

\mathbb{C}^m . Observe que,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{z} \\ \mathbf{C}^* \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{z}^* \mathbf{B} \mathbf{z}.$$

Segue de (3.3) que

$$\lambda_k(\mathbf{B}) \leq \mathbf{z}^* \mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_{k+n-m}(\mathbf{A}).$$

A primeira desigualdade segue de $\mathbf{z} \in \text{Span}\{\mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{y}_m\}$ e a segunda desigualdade decorre de $\mathbf{x} \in S_1$. \square

Definiremos agora uma relação de ordem (parcial) entre matrizes Hermitianas.

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$. Se $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ for semidefinida positiva, escrevemos

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{B} \leq \mathbf{A}.$$

É fácil ver que \geq é uma ordenação parcial, referida como **ordenação (parcial) de Löwner**, no conjunto \mathbb{S}^n , isto é,

- (i) $\mathbf{A} \geq \mathbf{A}$ para toda matriz Hermitiana \mathbf{A} .
- (ii) Se $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$, então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- (iii) Se $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$, então $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$.

Vejamos a seguir um teorema sobre a comparação de duas matrizes definidas positivas em termos de seus autovalores.

Teorema 3.1.3 ((Zhang, 2011), Theorem 8.11). *Sejam \mathbf{A}, \mathbf{B} matrizes Hermitianas definidas positivas. Então,*

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \Rightarrow \lambda_i(\mathbf{A}) \geq \lambda_i(\mathbf{B}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

As desigualdades $\lambda_i(\mathbf{A}) \geq \lambda_i(\mathbf{B})$ para todo i não podem garantir $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então, $\lambda_1(\mathbf{A}) = 3 \geq \lambda_1(\mathbf{B}) = 3$ e $\lambda_2(\mathbf{A}) = 2 \geq \lambda_2(\mathbf{B}) = 1$. Mas $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ tem um autovalor negativo -1 , obviamente não é semidefinida positiva.

Vejamos agora um resultado importante e útil que mostra que um par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) podem ser diagonalizadas simultaneamente por uma mesma matriz.

Teorema 3.1.4 (Diagonalização Simultânea). *Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$, com \mathbf{B} definida positiva. Existe uma matriz não singular \mathbf{Q} tal que*

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Q}^* \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n,$$

onde \mathbf{I}_n é a matriz identidade $n \times n$ e \mathbf{D} é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais de \mathbf{D} são os autovalores de $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{T}^* \mathbf{T}$ a decomposição de Cholesky da matriz \mathbf{B} e seja $\mathbf{C} = (\mathbf{T}^{-1})^* \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$. Como \mathbf{C} é Hermitiana (pelo Teorema 2.2.8 (iii)), segue do Teorema 2.2.5 que existe uma matriz unitária \mathbf{U} tal que $\mathbf{U}^* \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{D}$, onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal. Seja $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}$. Então

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{U})^* \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{U}^* (\mathbf{T}^{-1})^* \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{U}^* \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{D}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \mathbf{B} \mathbf{Q} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{U})^* \mathbf{B} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{U})^* (\mathbf{T}^* \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^* ((\mathbf{T}^{-1})^* \mathbf{T}^*) (\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1}) \mathbf{U} = \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Finalmente segue das igualdades mostradas acima que,

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = ((\mathbf{Q}^*)^{-1} \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* ((\mathbf{Q}^*)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1}.$$

Sendo \mathbf{Q} não singular, tem-se que $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ é similar a matriz diagonal \mathbf{D} . Segue do Corolário 2.2.1 que $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ possui os mesmos autovalores de \mathbf{D} . \square

3.1.2 Inclusão de elipsoides de dimensões diferentes

Apresentaremos agora algumas notações que tornarão práticas as alusões as matrizes Hermitianas e Hermitianas definidas positivas, além disso serão apresentadas duas equivalências que nos permitem caracterizar uma ordenação parcial entre matrizes a partir da inclusão entre elipsoides centrados na origem em \mathbb{F} definidos por essas matrizes, lembrando que \mathbb{F} denota o corpo dos números reais \mathbb{R} ou o corpo dos números complexos \mathbb{C} .

Denotaremos por

$$\mathbb{S}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}; \mathbf{A}^* = \mathbf{A}\} \quad (\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}\})$$

o espaço vetorial de todas as matrizes Hermitianas (simétricas, para o caso real) $n \times n$ e por

$$\mathbb{S}_{++}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n; \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\} \quad (\{\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n; \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\})$$

o conjunto de todas as matrizes Hermitianas (simétricas) definidas positivas $n \times n$.

É bem conhecido que \mathbb{S}_{++}^n é um **cone convexo aberto**, isto é, se $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{S}_{++}^n$ então $\mathbf{P} + t\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_{++}^n$ para qualquer $t > 0$.

De fato, dados $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{S}_{++}^n$, $t > 0$ e qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$), temos que

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{P} + t\mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top t\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + t(\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}) > 0.$$

Logo, $\mathbf{P} + t\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_{++}^n$ para qualquer $t > 0$.

Se $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^n$, então

$$\mathcal{E}_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n : \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 1\}$$

é o **elipsoide n -dimensional centrado na origem**.

Os dois teoremas a seguir apresentam equivalências simples entre a inclusão de elipsoides e a ordem parcial entre matrizes definidas positivas. Maiores detalhes podem ser encontrados em [(Lim *et al.*, 2019), lemma 4] e [(Lim *et al.*, 2019), lemma 5].

Teorema 3.1.5. *Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$, então $\mathcal{E}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ se e somente, $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{E}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$, então para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ satisfazendo

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 1$$

satisfaz também $\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x} \leq 1$. Para algum $\mathbf{y} \in \mathbb{F}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ seja $\rho := \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y}$. Então $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\rho}} \in \mathcal{E}_{\mathbf{A}}$, pois

$$\left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\rho}}\right)^* \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{1}{\rho} \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y} = \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

Como $\mathcal{E}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$, segue que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$, assim

$$\left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\rho}}\right)^* \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\rho}}\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\rho} (\mathbf{y}^* \mathbf{B} \mathbf{y}) \leq 1 \Rightarrow \mathbf{y}^* \mathbf{B} \mathbf{y} \leq \rho = \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Assim devemos ter

$$\mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \mathbf{B} \mathbf{y} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{y}^* (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y} \geq 0$$

Portanto $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq 0$, isto é, $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$.

Reciprocamente, se $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$, então $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq 0$, assim para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{A}}$, tem-se

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Como $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 1$, segue que da última desigualdade acima que $\mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x} \leq 1$. Logo $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ e portanto $\mathcal{E}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$. □

Vamos agora estender a inclusão apresentado no Teorema 3.1.5 para o caso de elipsoides de dimensões diferentes.

Sejam $m \leq n$ inteiros positivos e $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Considere a incorporação

$$\iota_{m,n} : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$$

definida por $\iota_{m,n}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Então devemos ter

$$\iota_{m,n}(\mathcal{E}_{\mathbf{A}}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{F}^n : \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 1\},$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ e $\mathbf{0} \in \mathbb{F}^{n-m}$ é o vetor nulo. Seja \mathbf{B}_{11} a submatriz principal superior esquerda de $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$, isto é, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12}^* & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$ com $\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \mathbf{B}_{22}$ matrizes de dimensões $m \times m, m \times (n-m)$ e $(n-m) \times (n-m)$ respectivamente.

Teorema 3.1.6. *Sejam $m \leq n$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Então $\iota_{m,n}(\mathcal{E}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ se e somente se, $\mathbf{B}_{11} \leq \mathbf{A}$.*

O conjunto \mathbb{S}_{++}^n de matrizes definidas positivas $n \times n$ é uma variedade diferenciável com uma estrutura Riemanniana natural. A geometria desta variedade está intimamente ligada a algumas desigualdades de matriz. Na seção a seguir abordaremos a distância geométricas entre matrizes Hermitianas definidas positivas de mesma dimensão.

3.2 Distância geométrica entre matrizes hermitianas definidas positivas de dimensões iguais

O conjunto $\mathbb{F}^{n \times n}$ constituído das matrizes $n \times n$ é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} com produto interno $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{B})$ e a norma associada $\|\mathbf{A}\|_F = [\text{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})]^{1/2}$. O conjunto de matrizes Hermitianas constitui um espaço vetorial real \mathbb{S}^n em $\mathbb{F}^{n \times n}$. O subconjunto \mathbb{S}_{++}^n constituído de matrizes definidas positivas é um conjunto aberto em \mathbb{S}^n . Portanto, é uma variedade diferenciável. O espaço tangente a \mathbb{S}_{++}^n em qualquer um de seus pontos \mathbf{A} é o espaço $T_{\mathbf{A}} \mathbb{S}_{++}^n = \{\mathbf{A}\} \times \mathbb{S}^n$ identificado para simplicidade, com \mathbb{S}^n . O produto interno em \mathbb{S}^n leva a uma métrica Riemanniana na variedade \mathbb{S}_{++}^n . Para um aprofundamento da geometria de \mathbb{S}_{++}^n ver (Lang, 2012). No ponto $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^n$, esta métrica é dada pela diferencial

$$\begin{aligned}
ds &= \|\mathbf{A}^{-1/2}d\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1/2}\|_F = \|\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1/2}\|_F \\
&= [\text{tr}((\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1/2})^*(\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1/2}))]^{1/2} \\
&= [\text{tr}((\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1/2})(\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1/2}))]^{1/2} \\
&= [\text{tr}(\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})^2\mathbf{A}^{-1/2})]^{1/2} \\
&= [\text{tr}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})^2)]^{1/2} \\
&= [\text{tr}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})^2]^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e é chamada de **métrica do traço**.

Esta Equação (3.5) nos permite calcular o comprimento de um caminho diferenciável (por partes) em \mathbb{S}_{++}^n . Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}_{++}^n$ é esse caminho, definimos seu comprimento como

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma^{-1/2}(t)\gamma'(t)\gamma^{-1/2}(t)\|_F dt. \tag{3.6}$$

Para cada $\mathbf{X} \in GL(n, \mathbb{F})$ a transformação de congruência $\Gamma_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \mathbf{X}^*\mathbf{A}\mathbf{X}$ é uma bijeção de \mathbb{S}_{++}^n sobre si mesmo. A composição $\Gamma_{\mathbf{X}} \circ \gamma$ é outro caminho diferenciável em \mathbb{S}_{++}^n .

Lema 3.2.1. Para cada $\mathbf{X} \in GL(n, \mathbb{F})$ e para cada caminho diferenciável γ

$$L(\Gamma \circ \gamma) = L(\gamma). \tag{3.7}$$

Demonstração. Segue da definição da norma $\|\cdot\|_F$ e do fato de $\text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{Y}\mathbf{X})$ quaisquer que sejam as matrizes $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ que, para cada $t \in [a, b]$ temos,

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})^{-1/2} (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})' (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})^{-1/2} \right\|_F \\
&= \left[\text{tr} \left((\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})' \right)^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[\text{tr} (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})' (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^*\gamma(t)\mathbf{X})' \right]^{1/2} \\
&= [\text{tr} \mathbf{X}^{-1} \gamma^{-1}(t) \gamma'(t) \gamma^{-1}(t) \gamma'(t) \mathbf{X}]^{1/2} \\
&= [\text{tr} \gamma^{-1}(t) \gamma'(t) \gamma^{-1}(t) \gamma'(t)]^{1/2} \\
&= \left[\text{tr} (\gamma^{-1}(t) \gamma'(t))^2 \right]^{1/2} \\
&= \left\| \gamma^{-1/2}(t) \gamma'(t) \gamma^{-1/2}(t) \right\|_F.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros em t , obtemos a igualdade (3.7) desejada. \square

Para quaisquer dois pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} no cone \mathbb{S}_{++}^n , seja

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \inf \{L(\gamma) : \gamma \text{ é um caminho de } \mathbf{A} \text{ para } \mathbf{B}\}. \quad (3.8)$$

Isso dá uma métrica sobre \mathbb{S}_{++}^n . A desigualdade triangular

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + \delta_2(\mathbf{C}, \mathbf{B}),$$

é uma consequência do fato de que um caminho γ_1 de \mathbf{A} a \mathbf{C} pode ser ligado a um caminho γ_2 de \mathbf{C} a \mathbf{B} para obter um caminho de \mathbf{A} a \mathbf{B} . O comprimento deste último caminho é $L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

De acordo com o Lema 3.2.1, cada $\Gamma_{\mathbf{X}}$ é uma isometria para o comprimento L . Portanto, também é uma isometria para a métrica δ_2 ; ou seja,

$$\delta_2(\Gamma_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}), \Gamma_{\mathbf{X}}(\mathbf{B})) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (3.9)$$

para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ e \mathbf{X} em $GL(n, \mathbb{F})$.

Esta observação nos ajuda a provar várias propriedades de δ_2 . Mostraremos que o ínfimo em (3.8) é atingido em um único caminho que une \mathbf{A} e \mathbf{B} , chamado de **geodésica** de \mathbf{A} a \mathbf{B} . Ao final desta seção obteremos uma fórmula explícita para esta geodésica e para seu comprimento. A desigualdade a seguir, chamada de **propriedade de crescimento métrico exponencial infinitesimal** (IEMI), desempenha um papel importante.

Escreveremos $De^{\mathbf{H}}$ para a derivada da função exponencial em um ponto \mathbf{H} de \mathbb{S}^n . Esta é uma função linear em \mathbb{S}^n , em que

$$De^{\mathbf{H}}(\mathbf{K}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\mathbf{H}+t\mathbf{K}} - e^{\mathbf{H}}}{t}.$$

Proposição 3.2.1 (IEMI). *Para todo \mathbf{H} e \mathbf{K} em \mathbb{S}^n temos*

$$\|e^{-\mathbf{H}/2} De^{\mathbf{H}}(\mathbf{K}) e^{-\mathbf{H}/2}\|_F \geq \|\mathbf{K}\|_F. \quad (3.10)$$

Um demonstração desta Proposição 3.2.1 pode ser consultada em (Bhatia, 2009).

Corolário 3.2.1. *Seja $\mathbf{H}(t)$, $a \leq t \leq b$ qualquer caminho em \mathbb{S}^n e seja $\gamma(t) = e^{\mathbf{H}(t)}$. Então,*

$$L(\gamma) \geq \int_a^b \|\mathbf{H}'(t)\|_F dt. \quad (3.11)$$

Demonstração. Pela regra da cadeia $\gamma'(t) = De^{\mathbf{H}(t)}(\mathbf{H}'(t))$. Assim a desigualdade (3.11) segue da definição de $L(\gamma)$ dada por (3.6) e por IEMI (3.2.1). \square

Se $\gamma(t)$ for qualquer caminho que une \mathbf{A} e \mathbf{B} em \mathbb{S}_{++}^n , então $\mathbf{H}(t) = \log \gamma(t)$ é um caminho que une $\log \mathbf{A}$ e $\log \mathbf{B}$ em \mathbb{S}^n . O lado direito de (3.11) corresponde ao comprimento desse caminho no espaço euclidiano \mathbb{S}^n . Temos que este caminho é limitado inferiormente pelo comprimento do segmento de reta que une $\log \mathbf{A}$ e $\log \mathbf{B}$. Assim, $L(\gamma) \geq \|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F$, daí segue o seguinte resultado importante denominado **propriedade de crescimento métrico exponencial** (EMI).

Teorema 3.2.2 (EMI). *Para cada par de pontos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ temos*

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq \|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F. \quad (3.12)$$

Em outras palavras, para quaisquer duas matrizes \mathbf{H} e \mathbf{K} em \mathbb{S}^n

$$\delta_2(e^{\mathbf{H}}, e^{\mathbf{K}}) \geq \|\mathbf{H} - \mathbf{K}\|_F. \quad (3.13)$$

Assim a função

$$(\mathbb{S}^n, \|\cdot\|_F) \xrightarrow{\text{exp}} (\mathbb{S}_{++}^n, \delta_2) \quad (3.14)$$

aumenta as distâncias ou a métrica aumenta.

A próxima proposição diz que quando \mathbf{A} e \mathbf{B} comutam, há igualdade em (3.12). Além disso, a função exponencial leva o segmento de reta que une o $\log \mathbf{A}$ e o $\log \mathbf{B}$ em \mathbb{S}^n para a geodésica que une \mathbf{A} e \mathbf{B} em \mathbb{S}_{++}^n . Um pouco de notação será útil aqui. Escrevemos $[\mathbf{H}, \mathbf{K}]$ para denotar o segmento de reta

$$\mathbf{H}(t) = (1-t)\mathbf{H} + t\mathbf{K}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ligando dois pontos \mathbf{H} e \mathbf{K} em \mathbb{S}^n . Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são dois pontos em \mathbb{S}_{++}^n , escrevemos $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ para denotar a geodésica de \mathbf{A} a \mathbf{B} . A existência de tal caminho ainda não foi estabelecida. Isso é feito primeiro no caso especial em que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} comutam.

Proposição 3.2.3. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes que comutam em \mathbb{S}_{++}^n . Então a função exponencial mapeia o segmento de reta $[\log \mathbf{A}, \log \mathbf{B}]$ em \mathbb{S}^n para a geodésica $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ em \mathbb{S}_{++}^n . Nesse caso*

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F.$$

Demonstração. Temos que verificar que o caminho

$$\gamma(t) = \exp((1-t)\log \mathbf{A} + t\log \mathbf{B}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

é o caminho único de menor comprimento que une \mathbf{A} e \mathbf{B} no espaço $(\mathbb{S}_{++}^n, \delta_2)$. Como \mathbf{A} e \mathbf{B} comutam, $\gamma(t) = \mathbf{A}^{1-t}\mathbf{B}^t$ e $\gamma'(t) = (\log \mathbf{B} - \log \mathbf{A})\gamma(t)$. A expressão (3.6) dá neste caso

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F dt = \|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F.$$

O EMI (3.2.2) diz que nenhum caminho pode ser mais curto do que este. Portanto, o caminho γ em consideração é de menor comprimento possível.

Suponha que $\tilde{\gamma}$ seja outro caminho que une \mathbf{A} e \mathbf{B} e tenha o mesmo comprimento de γ . Então $\tilde{\mathbf{H}}(t) = \log \tilde{\gamma}(t)$ é um caminho que une $\log \mathbf{A}$ e $\log \mathbf{B}$ em \mathbb{S}^n , e pelo Corolário 3.2.1 esse caminho tem comprimento $\|\log \mathbf{A} - \log \mathbf{B}\|_F$. Mas em um espaço euclidiano, o segmento de reta é o único caminho mais curto entre dois pontos. Portanto, $\tilde{\mathbf{H}}(t)$ é uma reparametrização do segmento de reta $[\log \mathbf{A}, \log \mathbf{B}]$. \square

Aplicando o raciocínio desta prova a qualquer subintervalo $[0, a]$ de $[0, 1]$, vemos que a parametrização

$$\mathbf{H}(t) = (1-t)\log \mathbf{A} + t\log \mathbf{B}$$

do segmento de reta $[\log \mathbf{A}, \log \mathbf{B}]$ é aquele que é mapeado isometricamente em $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ao longo de todo o intervalo. Em outras palavras, a parametrização natural da geodésica $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ quando \mathbf{A} e \mathbf{B} comutam é dada por

$$\gamma(t) = \mathbf{A}^{1-t}\mathbf{B}^t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

no sentido de que $\delta_2(\mathbf{A}, \gamma(t)) = t\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ para cada t . O caso geral é obtido com a ajuda das isometrias $\Gamma_{\mathbf{X}}$.

Teorema 3.2.4. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} quaisquer dois elementos de \mathbb{S}_{++}^n . Então existe uma geodésica única $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ligando \mathbf{A} e \mathbf{B} . Esta geodésica tem uma parametrização*

$$\gamma(t) = \mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^t\mathbf{A}^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.15)$$

o que é natural no sentido de que

$$\delta_2(\mathbf{A}, \gamma(t)) = t\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (3.16)$$

para cada t . Além disso, nós temos

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}\|_2. \quad (3.17)$$

Demonstração. A matriz \mathbf{I} e $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}$ comutam. Assim, a geodésica $[\mathbf{I}, \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}]$ é naturalmente parametrizada como

$$\gamma_0(t) = (\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^t.$$

Aplicando a isometria $\Gamma_{\mathbf{A}^{1/2}}$ nós obtemos o caminho

$$\gamma(t) = \Gamma_{\mathbf{A}^{1/2}}(\gamma_0(t)) = \mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^t \mathbf{A}^{1/2}$$

juntando os pontos $\Gamma_{\mathbf{A}^{1/2}}(\mathbf{I}) = \mathbf{A}$ e $\Gamma_{\mathbf{A}^{1/2}}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}) = \mathbf{B}$. Uma vez que $\Gamma_{\mathbf{A}^{1/2}}$ é uma isometria, este caminho é a geodésica $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. A igualdade (3.16) segue da propriedade semelhante para $\gamma_0(t)$ observada anteriormente. Usando a Proposição 3.2.3 novamente, vemos que

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \delta_2(\mathbf{I}, \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}) \\ &= \|\log \mathbf{I} - \log(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})\|_F \\ &= \|\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}\|_F. \end{aligned}$$

□

A fórmula (3.17) fornece uma representação explícita para a métrica δ_2 que foi definida por meio de (3.8). Esta é a **métrica Riemanniana** na variedade \mathbb{S}_{++}^n . A partir da definição da norma $\|\cdot\|_F$, e as propriedades de logaritmos de uma matriz apresentadas na Seção 2.4 vemos que

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left\| \log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2} \right\|_F \\ &= \left[\text{tr}(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^*(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\log(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^*)(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\log \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\log \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1/2})^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr} \mathbf{A}^{1/2}(\log \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1/2})^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\mathbf{A}^{1/2}(\log \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1/2})(\mathbf{A}^{1/2}(\log \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1/2}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\text{tr}(\mathbf{A}^{1/2}(\log \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^2\mathbf{A}^{-1/2}) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\operatorname{tr}(\log \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2]^{1/2} \\
&= [(\log \det(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}))^2]^{1/2} \\
&= \left[\left(\log \prod_{j=1}^n \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \right)^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{j=1}^n (\log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}))^2 \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left(\sum_{i=1}^n \log^2 \lambda_i(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \right)^{1/2}, \quad (3.18)$$

onde $\lambda_i(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$.

3.2.1 Propriedades de invariância de δ_2

Destacaremos abaixo três propriedades de invariância da distância δ_2 . A primeira afirma que δ_2 é invariante sob qualquer transformação de congruência, a segunda que δ_2 é invariante sobre semelhança, e a terceira afirma que δ_2 é invariante sob inversão.

Teorema 3.2.5. *Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz não singular e $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Então,*

$$\delta_2(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X}) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.19)$$

Demonstração. Temos que

$$(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}.$$

Logo $(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X})$ e $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ são similares e portanto pelo Corolário 2.2.1 possuem os mesmos autovalores. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta_2(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j((\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^* \mathbf{B} \mathbf{X})) \\
&= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \\
&= \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.6. *Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz não singular e $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Então,*

$$\delta_2(\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{X}^{-1}) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.20)$$

Demonstração. Temos que

$$(\mathbf{XAX}^{-1})^{-1}(\mathbf{XBX}^{-1}) = \mathbf{XA}^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{XBX}^{-1} = \mathbf{XA}^{-1}\mathbf{BX}^{-1} = (\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BX}^{-1}.$$

Logo $(\mathbf{XAX}^{-1})^{-1}(\mathbf{XBX}^{-1})$ e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ são similares e portanto pelo Corolário 2.2.1 possuem os mesmos autovalores. Assim,

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{XAX}^{-1}, \mathbf{XBX}^{-1}) &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j((\mathbf{XAX}^{-1})^{-1}(\mathbf{XBX}^{-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \\ &= \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.7. *Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Então,*

$$\delta_2(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.21)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}) &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j((\mathbf{A}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{BA}^{-1})^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j^{-1}(\mathbf{BA}^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-\log \lambda_j(\mathbf{BA}^{-1}))^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{BA}^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Note que o Corolário 2.2.1 garante que $\lambda_j(\mathbf{BA}^{-1}) = \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$, pois \mathbf{BA}^{-1} e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ são similares, uma vez que, $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{BA}^{-1})\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. □

3.3 Distância geométrica entre matrizes hermitianas definidas positivas de dimensões diferentes

A distância geométrica entre matrizes Hermitianas definidas positivas de dimensões diferentes foi apresentada por (Lim *et al.*, 2019). Neste trabalho os autores usam de forma natural

a distância δ_2 apresentada na seção anterior para definir uma nova distância geométrica, que denotaram por δ_2^+ , entre matrizes definidas positivas com dimensões diferentes, isto é, dadas as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ com $m \neq n$ foi mostrada uma expressão explícita e fácil de ser calculada para a distância $\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Considerando a correspondência biunívoca entre matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^n$ e elipsoides n -dimensionais centrados na origem,

$$\mathcal{E}_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n : \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 1\}$$

a distância δ_2^+ foi obtida por meio de uma abordagem em termo de elipsoides, o que segundo os autores em (Lim *et al.*, 2019), a construção se torna mais fácil com esse objeto geométrico concreto (elipsoides) em mente. Alguns resultados importantes para esta construção foram apresentados na seção 3.1, Teorema 3.1.5 e Teorema 3.1.6.

O resultado que impulsionou a obtenção da distância δ_2^+ é o seguinte:

Dado um elipsoide m -dimensional $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$ e um elipsoide n -dimensional $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$, digamos $m \leq n$. A distância de $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$ ao conjunto de elipsoides m -dimensionais contidos em $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ é igual à distância de $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ ao conjunto de elipsoides n -dimensionais contendo $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$, em que ambas as distâncias são medidas por meio de (3.18). Seu valor comum dá uma distância entre $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$ e $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ e, portanto, entre \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Definição 3.3.1. *Seja $m \leq n$ inteiros positivos. Para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$, definimos o conjunto convexo de elipsoides n -dimensionais contendo $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$ por*

$$\Omega_+(\mathbf{A}) := \left\{ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^* & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_{++}^n : \mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{A} \right\} \subseteq \mathbb{S}_{++}^n. \quad (3.22)$$

onde \mathbf{G}_{11} é a submatriz principal $m \times m$ superior esquerda de \mathbf{G} .

Para cada $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$, definimos o conjunto convexo de elipsoides m -dimensionais contidos em $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ por

$$\Omega_-(\mathbf{B}) := \{\mathbf{H} \in \mathbb{S}_{++}^m : \mathbf{B}_{11} \leq \mathbf{H}\} \subseteq \mathbb{S}_{++}^m. \quad (3.23)$$

onde \mathbf{B}_{11} é a submatriz principal $m \times m$ superior esquerda de \mathbf{B} .

Os nomes dados aos conjuntos apresentados na Definição 3.3.1 são justificados pelo Teorema 3.1.6. O conjunto $\Omega_+(\mathbf{A})$ parametriza todos os elipsoides n -dimensionais contendo $\iota_{m,n}(\mathcal{E}_{\mathbf{A}})$ e $\Omega_-(\mathbf{B})$ parametriza todos os elipsoides m -dimensionais contidos em $\mathcal{E}_{\mathbf{B}_{11}}$. Assim

dadas as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$, define-se de maneira natural a distância entre \mathbf{A} e \mathbf{B} como sendo a distância de \mathbf{A} ao conjunto $\Omega_-(\mathbf{B})$ ou igualmente pode-se definir como sendo a distância de \mathbf{B} ao conjunto $\Omega_+(\mathbf{A})$, isto é,

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) &:= \inf_{\mathbf{H} \in \Omega_-(\mathbf{B})} \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{H}) \\ &= \inf_{\mathbf{H} \in \Omega_-(\mathbf{B})} \left[\sum_{j=1}^m \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) &:= \inf_{\mathbf{G} \in \Omega_+(\mathbf{A})} \delta_2(\mathbf{G}, \mathbf{B}) \\ &= \inf_{\mathbf{G} \in \Omega_+(\mathbf{A})} \left[\sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O resultado a seguir mostra que as distâncias definidas em (3.24) e (3.25) são iguais e que o seu valor comum, que será denotado por δ_2^+ dá a distância de $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$.

Teorema 3.3.1 ((Lim *et al.*, 2019), Theorem 7). *Sejam $m \leq n$ inteiros positivos e $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Seja \mathbf{B}_{11} a submatriz principal $m \times m$ superior esquerda de \mathbf{B} . Então*

$$\delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) = \delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) \quad (3.26)$$

e seu valor comum é dado por

$$\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11})\}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.27)$$

ou alternativamente,

$$\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left[\sum_{j=1}^k \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) \right]^{1/2}, \quad (3.28)$$

onde k é tal que $\lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) \leq 1$ para $j = k+1, \dots, m$.

Demonstração. Vamos assumir que $m \leq n$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. A prova deste teorema será dividida em duas partes:

Parte 1: Mostraremos que

$$\delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11})\}^2 \right]^{1/2} \quad (3.29)$$

Considerando a partição de $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ como sendo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12}^* & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

temos $\mathbf{B}_{11} \in \mathbb{S}_{++}^m$, $\mathbf{B}_{12} \in \mathbb{F}^{m \times (n-m)}$ e $\mathbf{B}_{22} \in \mathbb{S}_{++}^{n-m}$. Segue do Teorema 3.1.4 que existe uma matriz não singular $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{m \times m}$ tal que

$$\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{X}^* \mathbf{B}_{11} \mathbf{X} = \mathbf{D},$$

onde $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}), \dots, \lambda_m(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}))$. Como \mathbf{B} é definida positiva \mathbf{B}_{22} também é, e assim existe uma matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{F}^{(n-m) \times (n-m)}$ não singular tal que

$$\mathbf{Y}^* \mathbf{B}_{22} \mathbf{Y} = \mathbf{I}_{n-m}.$$

Logo devemos ter

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12}^* & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{X}^* \mathbf{B}_{12} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^* \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{X} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Seja

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

Então pela propriedade de δ_2 ser invariante sob qualquer transformação de congruência (Teorema 3.2.5), temos que

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) &= \delta_2(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{X}^* \Omega_-(\mathbf{B}) \mathbf{X}) \\ &= \delta_2(\mathbf{I}_m, \Omega_-(\mathbf{Z}^* \mathbf{B} \mathbf{Z})). \end{aligned}$$

Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12}^* & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}), \dots, \lambda_m(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}))$ e $\mathbf{B}_{12} \in \mathbb{F}^{m \times (n-m)}$ é tal que \mathbf{B} é definida positiva.

Para concluir essa primeira parte mostraremos que existe uma matriz $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{S}_{++}^m$ tal que

$$\delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) = \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{H}_0) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11})\}^2 \right]^{1/2}.$$

Como visto anteriormente, podemos assumir as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} como em (3.30). Assim

$\Omega_-(\mathbf{B}) = \{\mathbf{H} \in \mathbb{S}_{++}^m : \mathbf{D} \leq \mathbf{H}\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) &= \inf_{\mathbf{D} \leq \mathbf{H}} \delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{H}) \\ &= \inf_{\mathbf{D} \leq \mathbf{H}} \left[\sum_{j=1}^m \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}) \right]^{1/2} \\ &= \inf_{\mathbf{D} \leq \mathbf{H}} \left[\sum_{j=1}^m \log^2 \lambda_j(\mathbf{I}_m^{-1}\mathbf{H}) \right]^{1/2}. \\ &= \inf_{\mathbf{D} \leq \mathbf{H}} \left[\sum_{j=1}^m \log^2 \lambda_j(\mathbf{H}) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

A condição $\mathbf{D} \leq \mathbf{H}$ implica pelo Teorema 3.1.3 que $\lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) \leq \lambda_j(\mathbf{H})$, $j = 1, \dots, m$.

Assim,

$$\inf_{\mathbf{D} \leq \mathbf{H}} \log^2 \lambda_j(\mathbf{H}) = \begin{cases} \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) > 1, \\ 0 & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) \leq 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Tomando $\mathbf{H}_0 = \text{diag}(h_1, \dots, h_m)$ onde

$$h_j = \begin{cases} \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) > 1, \\ 1 & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11}) \leq 1. \end{cases}$$

Aqui fica claro que $\mathbf{H}_0 - \mathbf{D} \geq 0$ o que implica $\mathbf{D} \leq \mathbf{H}_0$ e portanto \mathbf{H}_0 é a matriz desejada.

Parte 2: Nesta última parte será mostrado que

$$\delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{11})\}^2 \right]^{1/2} \quad (3.32)$$

Sendo $m \leq n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$. Novamente particionamos a matriz \mathbf{B} como na Parte 1.

Seja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Então temos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^*\mathbf{B}\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_{12}^*\mathbf{B}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12}^* & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^*\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e temos ainda que

$$\mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L} = \Omega_+(\mathbf{A}).$$

Para a verificação da segunda igualdade, deve-se mostrar que $\mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L} \subseteq \Omega_+(\mathbf{A})$ e que $(\mathbf{L}^{-1})^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}^{-1} \subseteq \Omega_+(\mathbf{A})$, isto é, $\Omega_+(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}$. De fato, se $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}$, então $\mathbf{F} = \mathbf{L}^* \mathbf{G} \mathbf{L}$ para algum $\mathbf{G} \in \Omega_+(\mathbf{A})$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{L}^* \mathbf{G} \mathbf{L} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & -\mathbf{G}_{11} \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12} + \mathbf{G}_{12} \\ -\mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12}^* & \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{11} \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12} - \mathbf{G}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{A}$, segue que $\mathbf{F} \in \Omega_+(\mathbf{A})$. De modo similar pode ser mostrado que $\Omega_+(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}$, por meio de $(\mathbf{L}^{-1})^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}^{-1} \subseteq \Omega_+(\mathbf{A})$. Desta duas inclusões obtém-se a igualdade $\mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L} = \Omega_+(\mathbf{A})$. Portanto, pela propriedade de δ_2 ser invariante sob qualquer transformação de congruência, pelo Teorema 3.2.5 temos

$$\begin{aligned} \delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) &= \delta_2(\mathbf{L}^* \mathbf{B} \mathbf{L}, \mathbf{L}^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{L}) \\ &= \delta_2(\mathbf{L}^* \mathbf{B} \mathbf{L}, \Omega_+(\mathbf{A})). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pelo Teorema 3.1.4 existe uma matriz não singular $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{m \times m}$ tal que

$$\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{X}^* \mathbf{B}_{11} \mathbf{X} = \mathbf{D},$$

onde $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}), \dots, \lambda_m(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}))$. Tomando $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} \mathbf{D}^{-1/2}$, temos que

$$\mathbf{X}_1^* \mathbf{A} \mathbf{X}_1 = \mathbf{D}^{-1}, \quad \mathbf{X}_1^* \mathbf{B}_{11} \mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_m$$

Além disso, como a matriz $\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12}$ é o complemento de Schur [ver (Zhang, 2011)] de \mathbf{B}_{11} em \mathbf{B} , que é definida positiva, segue que $\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12}$ também é definida positiva, assim existe uma matriz $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{F}^{(n-m) \times (n-m)}$ não singular tal que

$$\mathbf{Y}_1^* (\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}^* \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12}) \mathbf{Y}_1 = \mathbf{I}_{n-m}.$$

Seja

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{Z}_1^* \mathbf{L}^* \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}_1^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_1 = \Omega_+(\mathbf{D}^{-1}).$$

Daí pela identidade (3.33) e pela propriedade de δ_2 ser invariante sob qualquer transformação de congruência (Teorema 3.2.5), teremos

$$\begin{aligned}\delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) &= \delta_2(\mathbf{L}^* \mathbf{B} \mathbf{L}, \Omega_+(\mathbf{A})) \\ &= \delta_2(\mathbf{Z}_1^* \mathbf{L}^* \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_1^* \Omega_+(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_1) \\ &= \delta_2(\mathbf{I}_n, \Omega_+(\mathbf{D}^{-1})),\end{aligned}$$

Então, para calcular $\delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A}))$, é suficiente assumir que

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}), \dots, \lambda_m^{-1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11})), \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}_n \quad (3.34)$$

Para concluir essa segunda parte mostraremos que existe $\mathbf{G}_0 \in \mathbb{S}_{++}^n$ tal que

$$\delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A})) = \delta_2(\mathbf{G}_0, \mathbf{B}) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11})\}^2 \right]^{1/2}.$$

Assumindo que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são como em (3.34). Então temos

$$\begin{aligned}\delta_2(\mathbf{I}_n, \Omega_+(\mathbf{D}^{-1})) &= \inf_{\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}} \delta_2(\mathbf{I}_n, \mathbf{G}) \\ &= \inf_{\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}} \left[\sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{I}_n^{-1} \mathbf{G}) \right]^{1/2}, \\ &= \inf_{\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}} \left[\sum_{j=1}^n \log^2 \lambda_j(\mathbf{G}) \right]^{1/2}\end{aligned}$$

onde \mathbf{G}_{11} é a submatriz principal $m \times m$ superior esquerda de $\mathbf{G} \in \Omega_+(\mathbf{D}^{-1})$. Pelo Teorema 3.1.3, temos $\lambda_j(\mathbf{G}_{11}) \leq \lambda_j^{-1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11})$, $j = 1, \dots, m$. Além disso, pelo Teorema 3.1.2

$$\lambda_j(\mathbf{G}) \leq \lambda_j(\mathbf{G}_{11}) \leq \lambda_j^{-1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Portanto, para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\inf_{\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}} \log^2 \lambda_j(\mathbf{G}) = \begin{cases} \log^2 \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}) & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}) > 1, \\ 0 & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}) \leq 1, \end{cases} \quad (3.35)$$

e para cada $j = m+1, \dots, n$,

$$\inf_{\mathbf{G}_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}} \log^2 \lambda_j(\mathbf{G}) = 0,$$

como \mathbf{G}_{22} pode ser escolhido para ser \mathbf{I}_{n-m} . Seja $\mathbf{G}_0 = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$ onde

$$g_j = \begin{cases} \lambda_j^{-1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}) & \text{se } \lambda_j(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{11}) > 1 \text{ e } j = 1, \dots, m, \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então devemos ter que $(\mathbf{G}_0)_{11} \leq \mathbf{D}^{-1}$ e portanto \mathbf{G}_0 é a matriz que buscávamos obter.

□

Destacamos algumas observações a respeito da distância δ_2^+ apresentada no Teorema 3.3.1:

1. Para o cálculo de $\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ exige-se que a dimensão da matriz no primeiro argumento não seja maior do que a dimensão da matriz no segundo argumento.
2. $\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \delta_2^+(\mathbf{B}, \mathbf{A})$, e pelo item 1 o segundo membro não está definido, exceto para o caso em que $m = n$. Note que mesmo neste caso, $\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \delta_2^+(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ em geral, de fato, se $m = n$ então (3.27) torna-se

$$\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\}^2 \right]^{1/2},$$

e podemos trocar as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} em (3.26), daí obtemos a seguinte igualdade

$$\delta_2(\mathbf{A}, \Omega_-(\mathbf{B})) = \delta_2(\mathbf{B}, \Omega_+(\mathbf{A}))$$

cujos valores são dados pelo Teorema 3.3.1 é

$$\delta_2^+(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = \left[\sum_{j=1}^m \max\{0, \log \lambda_j(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\}^2 \right]^{1/2},$$

onde concluímos que $\delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \delta_2^+(\mathbf{B}, \mathbf{A})$.

3. δ_2^+ não define uma métrica em $\cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}_{+++}^n$, pois δ_2^+ é uma distância no sentido de uma distância de um ponto a um conjunto.

A seguir apresentamos um resultado que relaciona a distância δ_2 definida em (3.18) com a distância δ_2^+ definida no Teorema 3.3.1 para o caso em que $m = n$.

Teorema 3.3.2 ((Lim *et al.*, 2019), Proposition 8). *Seja $m = n$ inteiros positivos. Então as distâncias δ_2 em (3.18) e distância δ_2^+ em (3.28) possuem a seguinte relação*

$$\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})^2 = \delta_2^+(\mathbf{A}, \mathbf{B})^2 + \delta_2^+(\mathbf{B}, \mathbf{A})^2. \quad (3.36)$$

4 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS: UMA BREVE REVISÃO

A posse de um conjunto de dados de grande dimensão frequentemente pode se tornar uma questão problemática, já que isso pode acarretar em custos computacionais elevados e *overfitting*¹. Dessa forma, pode ser desejável reduzir a dimensão do conjunto de dados com o intuito de tornar a manipulação dos dados mais fácil e diminuir os recursos computacionais necessários, resultando em uma melhoria no desempenho do sistema e na retenção do máximo de informações possível dos dados originais.

A Análise de Componentes Principais (PCA, do inglês *Principal Component Analysis*), cujas primeiras descrições foram apresentadas por (Pearson, 1901) e (Hotelling, 1933) é uma técnica estatística multivariada que permite reduzir a dimensionalidade de um conjunto de dados, mantendo a maior parte da informação contida nele. Isso é feito transformando um conjunto de variáveis correlacionadas em um novo conjunto de variáveis não correlacionadas chamadas de componentes principais. Essas componentes principais são ordenadas de acordo com suas variâncias, de modo que a primeira componente principal capture a maior variância e cada componente subsequente capture a maior variância em ordem decrescente, sob a condição de que cada componente principal seja ortogonal as anteriores, pois elas são autovetores de uma matriz de covariância e os autovetores são mutuamente ortogonais.

O objetivo da PCA é fazer uma projeção dos componentes principais de um conjunto de dados de alta dimensão em um espaço de menor dimensão, preservando a estrutura dos dados, de modo a obter um conjunto de componentes principais, em que cada componente seja uma combinação linear das variáveis originais. Nestas combinações os coeficientes indicam a importância relativa da variável na componente.

Para simplicidade, usaremos a sigla PC (do inglês *Principal Component*) para identificação do termo componente principal.

A fim de apresentar uma interpretação geométrica da PCA, vamos considerar um caso, em que temos um conjunto de dados determinado apenas por duas variáveis que denotaremos por x_1 e x_2 . Na Figura 1, x_1 e x_2 representam as variáveis e eixos originais. A PC1 e a PC2 são as variáveis e os eixos transformados. A direção dos eixos principais indica as componentes principais. Para determinar a primeira componente principal procura-se uma função linear $\alpha_1^T \mathbf{x}$ que explique a maior variação dos dados, em que α_1 é um vetor de duas constantes α_{11}, α_{12} , de

¹ É um conceito usado na aprendizagem de máquina e na modelagem estatística. Refere-se a um problema onde um modelo se ajusta muito bem aos dados anteriormente observado, mas não generaliza bem para dados não vistos (dados de teste) ou para novas amostras.

modo que

$$\boldsymbol{\alpha}_1^\top \mathbf{x} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2.$$

Em seguida, procura-se uma outra função linear $\boldsymbol{\alpha}_2^\top \mathbf{x}$, não correlacionada com $\boldsymbol{\alpha}_1^\top \mathbf{x}$, isto é, $\text{cov}[\boldsymbol{\alpha}_1^\top \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_2^\top \mathbf{x}] = 0$, em que $\text{cov}(x, y)$ denota a covariância amostral entre as variáveis x e y , e que explique a máxima variação restante, de modo que

$$\boldsymbol{\alpha}_2^\top \mathbf{x} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2.$$

Para $i = 1, 2$, a i -ésima PC é dado por $\boldsymbol{\alpha}_i^\top \mathbf{x}$ e nos referimos a $\boldsymbol{\alpha}_i$ como o vetor de coeficientes da i -ésima PC. Considerando o caso em que o vetor de variáveis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ possui uma matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$, temos de modo geral que, a i -ésima PC de \mathbf{x} é $\boldsymbol{\alpha}_i^\top \mathbf{x}$ e $\text{var}(\boldsymbol{\alpha}_i^\top \mathbf{x}) = \lambda_i$ ($\text{var}(\boldsymbol{\alpha}_i^\top \mathbf{x})$ denota a variância de $\boldsymbol{\alpha}_i^\top \mathbf{x}$), onde λ_i é o i -ésimo maior autovalor de $\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\alpha}_i$ é o autovetor associado.

A realização da PCA a um determinado conjunto de dados \mathbf{X} segue as etapas abaixo:

- **Etapa 1:** Inicialmente prepara-se os dados para a análise. Neste caso pode-se incluir a remoção de dados ausentes, o tratamento de valores discrepantes (*outliers*) e a padronização das variáveis, se necessário. Esta etapa é importante para garantir que os dados estejam em um formato adequado para a PCA. Esta matriz preparada para a PCA será agora denotada por $\widehat{\mathbf{X}}$.

A padronização da conjunto \mathbf{X} pode ser feita por meio da fórmula

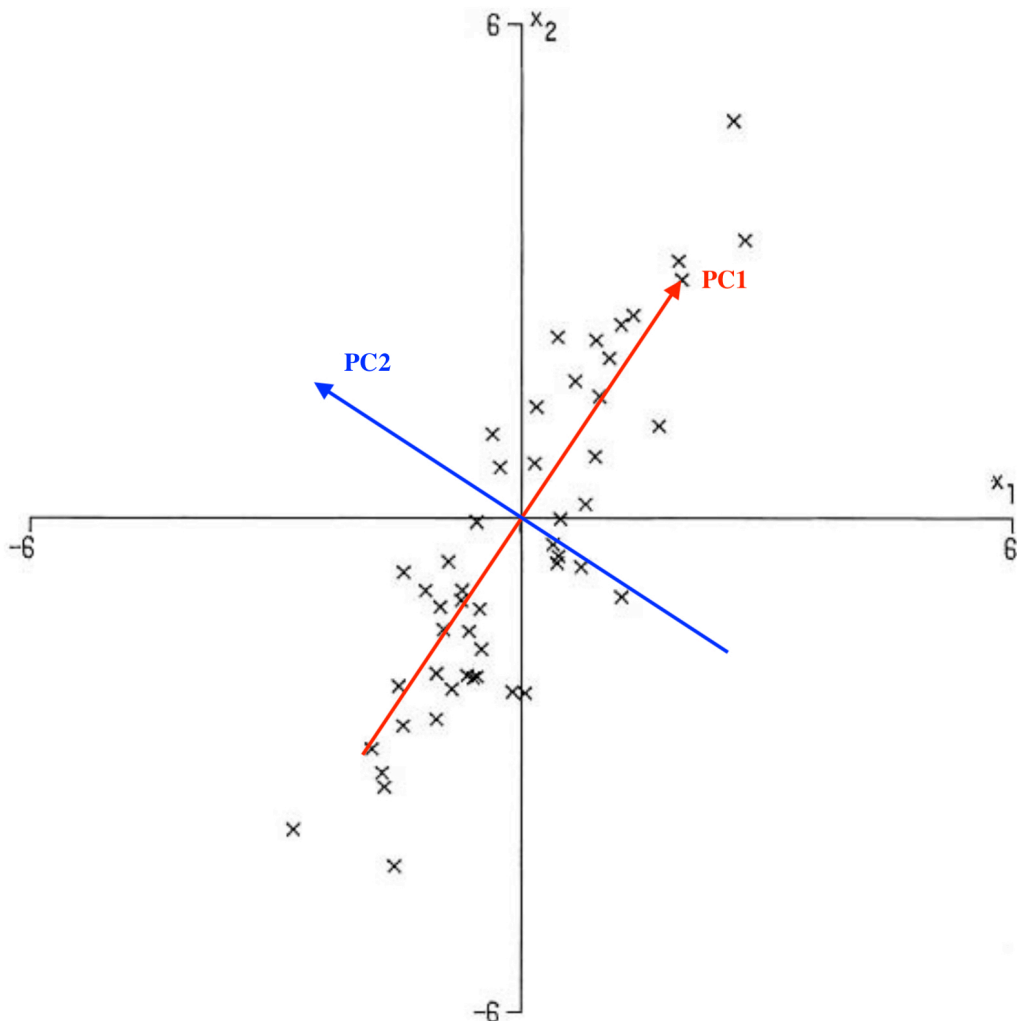
$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{\text{var}(x_j)}}$$

para cada $j = 1, \dots, n$, na qual x_{ij} corresponde a i -ésima observação da variável x_j , \bar{x}_j é a média da j -ésima variável e $\sqrt{\text{var}(x_j)}$ corresponde ao desvio padrão de x_j . O valor x'_{ij} será portanto a observação x_{ij} da variável x_j de forma padronizada.

- **Etapa 2:** Esta etapa envolve o cálculo da matriz de covariância ou da matriz de correlação do conjunto de dados $\widehat{\mathbf{X}}$.

Assim, para um conjunto preparado de dados $\widehat{\mathbf{X}} = [x_1 \ \dots \ x_n]^\top$ de tamanho $m \times n$ determinado por n variáveis x_1, \dots, x_n , a *matriz de covariância* será de tamanho $n \times n$ dada

Figura 1 – Interpretação geométrica da análise de componentes principais de duas variáveis



Fonte: adaptada de (Jolliffe, 2002, p. 2).

por

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_1, x_n) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \text{cov}(x_n, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

em que

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_{ki} - \bar{x}_i) \cdot (x_{kj} - \bar{x}_j)$$

corresponde a *covariância* entre as variáveis x_i e x_j , para cada $i, j = 1, \dots, n$. Nesta última fórmula x_{ki} e x_{kj} indicam as k -ésimas observações presentes nas variáveis x_i e x_j

respectivamente e \bar{x}_i, \bar{x}_j são as médias das variáveis x_i e x_j respectivamente, em que

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ki}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Note que, $\text{cov}(x_i, x_j) = \text{cov}(x_j, x_i)$, logo a matriz $\text{cov}(\widehat{\mathbf{X}})$ é simétrica.

Para muitos propósitos, é útil padronizar a covariância. A divisão da covariância entre duas variáveis pelo produto do desvio padrão de cada variável produz uma variável com as mesmas propriedades da covariância, mas com um intervalo de -1 a 1 . Essa medida é chamada de **coeficiente de correlação** entre as variáveis x_i e x_j e será dada por

$$\text{corr}(x_i, x_j) = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{\text{cov}(x_i, x_i)} \sqrt{\text{cov}(x_j, x_j)}} = \frac{\sum_{k=1}^m (x_{ki} - \bar{x}_i) \cdot (x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ki} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}},$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$.

A *matriz de correlação* do conjunto $\widehat{\mathbf{X}}$ será de tamanho $n \times n$ dada por

$$\text{corr}(\widehat{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} \text{corr}(x_1, x_1) & \text{corr}(x_1, x_2) & \cdots & \text{corr}(x_1, x_n) \\ \text{corr}(x_2, x_1) & \text{corr}(x_2, x_2) & \cdots & \text{corr}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{corr}(x_n, x_1) & \text{corr}(x_n, x_2) & \cdots & \text{corr}(x_n, x_n) \end{bmatrix}.$$

Note que, $\text{corr}(x_i, x_j) = \text{corr}(x_j, x_i)$, logo a matriz $\text{corr}(\widehat{\mathbf{X}})$ é simétrica, além disso, $\text{corr}(x_i, x_i) = 1$ para cada $i = 1, \dots, n$.

- **Etapa 3:** Aqui será realizada a decomposição da matriz $\widehat{\mathbf{X}}$, extraíndo as componentes principais. O método mais comum para realizar essa decomposição é conhecido como “decomposição de autovalores”. Nessa etapa, são calculados os autovalores e autovetores da matriz de covariância ou da matriz de correlação. Isso pode ser feito resolvendo a seguinte equação característica

$$\det(\text{cov}(\widehat{\mathbf{X}}) - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\text{corr}(\widehat{\mathbf{X}}) - \lambda \mathbf{I}_n) = 0.$$

Se as matrizes $\text{cov}(\widehat{\mathbf{X}})$ ou $\text{corr}(\widehat{\mathbf{X}})$ não apresentar nenhuma coluna que seja combinação linear de outra, as equações anteriores terão n raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que são os autovalores da matriz $\text{cov}(\widehat{\mathbf{X}})$ ou de $\text{corr}(\widehat{\mathbf{X}})$, para os quais teremos

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n.$$

Para cada autovalor λ_j , $j = 1, \dots, n$, existe um autovetor associado

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ \vdots \\ w_{nj} \end{bmatrix}.$$

Os autovetores \mathbf{w}_j são ortonormais, assim apresentam as seguintes propriedades:

$$\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k \rangle = 0 \text{ para } j \neq k,$$

$$\|\mathbf{w}_j\| = 1.$$

Sendo \mathbf{w}_j o autovetor associado ao autovalor λ_j , então a j -ésima componente principal será dada por:

$$\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}} = w_{1j}x_1 + w_{2j}x_2 + \dots + w_{nj}x_n.$$

As componentes principais $\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}}$ apresentam as seguintes propriedades:

1. A variância da j -ésima componente principal $\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}}$ é igual ao j -ésimo autovalor λ_j , isto é,

$$\text{var}(\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}}) = \lambda_j \text{ para cada } j = 1, \dots, n.$$

2. A primeira componente principal é a que apresenta maior variância e assim por diante, isto é,

$$\text{var}(\mathbf{w}_1^\top \widehat{\mathbf{X}}) > \text{var}(\mathbf{w}_2^\top \widehat{\mathbf{X}}) > \dots > \text{var}(\mathbf{w}_n^\top \widehat{\mathbf{X}}).$$

3. O total de variância das variáveis originais é igual ao somatório dos autovalores, que pelo item anterior, é igual ao total de variância das componentes principais, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \text{var}(x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n \text{var}(\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}}).$$

4. As componentes principais não são correlacionadas entre si, isto é

$$\text{cov}(\mathbf{w}_j^\top \widehat{\mathbf{X}}, \mathbf{w}_k^\top \widehat{\mathbf{X}}) = 0$$

para cada par $j, k = 1, \dots, n$ com $j \neq k$.

- **Etapa 4:** Realização de seleção de componentes principais. Com base nos autovalores, é possível determinar a quantidade de componentes principais a serem retidas. Os autovalores representam a quantidade de variação explicada por cada componente principal. Geralmente, as componentes principais com autovalores maiores são selecionadas, pois eles capturam a maior parte da variação dos dados. Serão apresentados mais adiante neste capítulo dois métodos apresentados em (Jolliffe, 2002) para retenção de componentes principais.
- **Etapa 5:** Os dados originais preparados, $\hat{\mathbf{X}}$, são transformados em um novo conjunto de variáveis, representadas pelas componentes principais selecionadas. Isso é feito multiplicando a matriz de dados pela matriz de autovetores correspondentes as componentes principais selecionadas. Cada entrada da matriz resultante deste produto é uma combinação das variáveis originais onde os pesos são determinados pelos autovetores.
- **Etapa 6:** Por fim, os resultados da PCA são analisados e interpretados. É possível examinar as cargas das componentes principais, que indicam a contribuição de cada variável para cada componente. Além disso, as componentes principais podem ser visualizadas em gráficos de dispersão ou em outras representações gráficas para entender a estrutura dos dados.

Discutiremos agora dois métodos que podem ser usados na Etapa 4 apresentada acima, cuja ideia é tentar reduzir a dimensionalidade de um conjunto de dados substituindo as n variáveis pelas primeiras m componentes principais (com $m < n$).

Um primeiro método de seleção de componentes principais

Uma abordagem mais comum para determinar o número de componentes a serem mantidas, é estabelecer a variância cumulativa desejada. A PCA é projetada de forma que as variâncias das componentes principais estejam dispostas em ordem decrescente, com a primeira componente principal explicando a maior variância. No caso de uma matriz de correlação, a variância percentual explicada pelas primeiras m componentes principais é calculada por

$$t_m = \frac{100}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (4.1)$$

em que λ_k é o autovalor da k -ésima componente principal e n corresponde ao número total de variáveis. Escolhendo um corte t^* que normalmente deve está entre 70% e 90%, o número de componentes principais a serem retidas será então o menor inteiro positivo, m , para o qual

$$t_m > t^*.$$

Um segundo método de seleção de componentes principais

Um segundo método está relacionado com a regra de Kaiser (Kaiser, 1960), e seu uso deve ser em geral realizado quando a PCA é aplicada a matrizes de correlação. Este método busca reter as componentes principais de uma matriz de correlação com autovalores maiores do que 1. A ideia por trás deste método é que se todas as variáveis são independentes, então as componentes principais são iguais às variáveis originais e todas estas componentes possuem variâncias unitárias no caso da matriz de correlação. Deste modo, não valerá a pena reter qualquer componente principal que possua variância menor do que 1, pois esta deverá conter menos informações do que uma das variáveis originais. Além disso, se o conjunto de dados contiver grupos de variáveis com grandes correlações dentro do grupo, mas pequenas entre as correlações do grupo, haverá uma componente principal associada a cada grupo cuja variância é > 1 , enquanto quaisquer outras componentes principais associadas ao grupo tem variâncias < 1 . Portanto, a regra geralmente reterá uma, e apenas uma, componente principal associado a cada um desses grupos de variáveis. (Jolliffe, 2002) afirma para este método que, excluir as componentes principais que tenha autovalores menores do que 1 poderá reter muito poucas variáveis e que seria recomendado escolher um corte $l^* < 1$ de modo a permitir a variação amostral. Neste caso com base em estudos de simulação feitos em (Jolliffe, 1972) um nível de corte aproximadamente correto seria de $l^* = 0,7$. Este método, embora tenha sido aplicado a matrizes de correlação ele pode ser adaptado para matrizes de covariância tomando como corte l^* o valor médio l dos autovalores ou, melhor, um corte um pouco mais baixo, como $l^* = 0,7l$.

Vamos agora apresentar um método baseado em componentes principais para selecionar um subconjunto de m variáveis do conjunto das n variáveis originais, com $m < n$, de modo que, esse subconjunto consiga preservar a maior parte da variação do conjunto de dados original.

Método para seleção de m variáveis

Este método associa uma variável a cada uma das m_1 últimas componentes principais que tenham autovalores menores que um certo nível l^* , que chamaremos aqui de critério de exclusão, e exclua essas m_1 variáveis. Isso pode ser feito apenas uma vez ou de forma iterativa. Para o segundo caso, um segundo PCA é executado nas variáveis restantes. Aplica-se o mesmo procedimento que associa uma variável a cada uma das m_2 últimas componentes principais que

possuem um autovalor menor que l^* , e exclui essas m_2 variáveis. O procedimento é repetido até que nenhuma outra exclusão seja considerada necessária com base no critério de parada l^* apresentado no segundo método de seleção de componentes principais, ou seja, até que os componentes principais das variáveis retidas tenham autovalores não inferiores a 0,7.

Fornecemos neste capítulo apenas uma breve discussão da análise de componentes principais com o propósito de ajudar a moldar a compreensão básica desta técnica que será usada no capítulo seguinte deste trabalho, um maior aprofundamento do tema pode ser obtido em (Jolliffe, 2002).

5 SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS

5.1 Elementos da teoria moderna de portfólio

Apresentaremos inicialmente os elementos básicos presentes na teoria moderna de portfólios como apresentado em (Elton *et al.*, 2014), buscando trazer os conceitos de retorno, risco, matriz de covariância e correlação de um portfólio de ativos financeiros.

Dados n ativos em cada um dos meses em um período considerado, a determinação do retorno de um ativo $j \in \{1, \dots, n\}$ em um determinado período de tempo i é feita comumente por meio da seguinte equação:

$$R_{i,j} = \frac{r_{i,j} - r_{i-1,j}}{r_{i-1,j}}, \quad (5.1)$$

em que $R_{i,j}$ é chamado de **taxa de retorno** do ativo j em um período de tempo i , e que fornece o ganho ou perda total experimentado em um investimento durante um período i . Na equação (5.1) $r_{i,j}$ denota o valor (preço) do ativo j no período i e $r_{i-1,j}$ corresponde ao valor (preço) do ativo j no período $i - 1$.

Com as taxas de retornos calculadas em cada período i , podemos agora obter o retorno médio de cada ativo, e assim determinar o retorno que se espera que um investimento produza ao longo do tempo. Para o caso em que os $R_{i,j}$ de um ativo j são igualmente prováveis em cada período i , o **retorno médio** do ativo j que denotaremos por μ_j será obtido por meio da seguinte fórmula:

$$\mu_j = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t R_{i,j}, \quad (5.2)$$

em que t é o número total de períodos considerados. Se as taxas de retornos não forem igualmente prováveis e se $P_{i,j}$ for a probabilidade da i -ésima taxa de retorno do j -ésimo ativo, então o retorno esperado deste ativo será dado por

$$\mu_j = \sum_{i=1}^t P_{i,j} \cdot R_{i,j}, \quad (5.3)$$

em que t é o número total de períodos considerados.

Denotaremos por w_j o **peso** que o ativo j tem no portfólio composto por todos os n ativos, este corresponde a fração dos recursos do investidor investidos neste j -ésimo ativo.

Finalmente a soma dos produtos entre o retorno médio de cada ativo e seu respectivo peso fornece o retorno do portfólio, isto é,

$$R_{\text{port.}} = \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot w_j, \quad (5.4)$$

onde $R_{\text{port.}}$ denota o **retorno do portfólio** e n é o número de ativos que o compõe. Além disso, é importante notar que $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Para o cálculo da **covariância** entre dois ativos j e k , utilizamos a seguinte fórmula:

$$\sigma_{j,k} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (R_{i,j} - \mu_j) \cdot (R_{i,k} - \mu_k). \quad (5.5)$$

A aplicação desta equação (5.5) aos pares de ativos do portfólio a ser considerado fornece a sua **matriz de covariância** $n \times n$, em que n corresponde ao número de ativos. Assim a matriz ficará

$$\text{Matriz_Cov}_{\text{port.}} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

A aplicação desta equação (5.8) aos pares de ativos do portfólio considerado fornece a sua **matriz de correlação** $n \times n$

$$\text{Matriz_Corr}_{\text{port.}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

em que n corresponde ao número de ativos e $\rho_{j,k}$ denota o coeficiente de correlação entre os ativos j e k , que deve ser obtido por meio da seguinte fórmula:

$$\rho_{j,k} = \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{\sigma_{j,j}} \sqrt{\sigma_{k,k}}} = \frac{\sum_{i=1}^t (R_{i,j} - \mu_j) \cdot (R_{i,k} - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^t (R_{i,j} - \mu_j)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^t (R_{i,k} - \mu_k)^2}}. \quad (5.8)$$

Da equação (5.8) segue que $\rho_{j,j} = 1$.

Finalmente chegamos ao cálculo da **variância do portfólio**, que deve ser obtida utilizando a seguinte fórmula:

$$\sigma_{\text{port.}}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_j w_k \sigma_{j,k}. \quad (5.9)$$

O **risco** de um portfólio foi definido por (Markowitz, 1952) como sendo o seu **desvio padrão**, isto é,

$$\sigma_{\text{port.}} = \sqrt{\sigma_{\text{port.}}^2}. \quad (5.10)$$

A seleção de portfólios é uma das questões centrais na gestão de investimentos e na construção de estratégias de alocação de ativos, e a Teoria Moderna de Portfólio tem fornecido um sólido arcabouço matemático para abordar essas questões. A análise das matrizes de covariância de portfólios financeiros desempenha um papel fundamental na seleção de portfólios sendo essenciais para a avaliação do risco e do retorno de um portfólio, permitindo que os investidores compreendam como os ativos individuais interagem entre si.

Diante das informações valiosas sobre a relação entre ativos individuais de um portfólio que a matriz de covariância carrega, buscamos neste trabalho, aplicar o cálculo da distância entre matrizes simétricas definidas positivas de dimensões diferentes dada em (3.28) às matrizes de covariância de portfólios financeiros, com objetivo era de verificar se a ordenação dos retornos e riscos de subportfólios extraídos de um portfólio dado se estabelecia de forma clara e consistente, isto é, se teríamos uma ordenação bem definida, à medida que suas matrizes de covariância se distanciavam da matriz do portfólio original. Além disso, investigamos se os subportfólios com matrizes de covariância mais próximas à matriz do portfólio dado tendiam a apresentar retornos e riscos mais semelhantes ao deste portfólio e com isso buscar compreender como as distâncias entre matrizes de covariância poderiam influenciar a dinâmica dos subportfólios, podendo auxiliar a tomada de decisão e a alocação de ativos em busca de estratégias mais eficientes no ambiente complexo dos mercados financeiros.

Para embasar nossas análises discutiremos a seguir a fonte de dados utilizada neste trabalho incluindo os resultados obtidos com base nos elementos da Seção 5.1.

5.2 Fonte de dados

Para o estudo de caso associado ao cálculo da distância apresentada na Seção 3.3 que estamos abordando neste trabalho, foi escolhido de forma aleatória um portfólio composto por 40 ativos da base de dados do índice **S&P 500**¹ (abreviação de Standard & Poor's 500) tomando o valor (preço) com cotação em dólar de uma ação única de cada um dos ativos, considerando os dados históricos do dia 1º de cada mês no período de maio de 2021 à março de 2023. Estes valores foram retirados do *site* Yahoo! Finance.

Os 40 ativos trabalhados do **S&P 500** são: UDR, O, DIS, TYL, KEYS, ATVI, AAP, D, MDT, ACGL, KHC, CMCSA, STT, MCO, MMC, NDSN, UAL, ROP, ELV, BR, SLB, SPG,

¹ É um índice do mercado acionário americano baseado nas capitalizações de mercado de 500 grandes empresas com ações ordinárias listadas na NYSE, NASDAQ ou na Cboe BZX Exchange.

EXR, BEN, WMB, HPE, LIN, CSGP, ADSK, AMT, ALGN, ZTS, PPL, NVDA, NEE, SBUX, EMN, WY, EOG, AJG. Os detalhes de todos estes ativos estão especificados na Tabela 4 no Apêndice A.

Para obtenção dos resultados que serão apresentados nesta seção e nas seções subsequentes foi utilizado o MATLAB versão R2022a - academic use.

Inicialmente obtemos as taxas de retornos de cada um dos ativos $j = 1, \dots, 40$ em cada um dos meses no período considerado, para isso utilizamos a equação (5.1). Estamos considerando que o investimento foi realizado no dia 1º de abril de 2021, e que o investidor comprou uma ação única de cada ativo. Os resultados destas taxas de retornos encontram-se presentes no Apêndice B.

Obtidas as taxas de retornos em cada período, encontramos em seguida o retorno médio de cada ativo por meio da equação (5.2). Os resultados destes retornos estão descritos na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – Retornos médios (μ_j) de cada um dos 40 ativos tomados da base **S&P 500** considerados no período de maio de 2021 à março de 2023

Ativos	UDR	O	DIS	TYL	KEYS	ATVI	AAP	D	MDT	ACGL
μ_j	-0.0035	0.0012	-0.0234	-0.0069	0.0069	0.0008	-0.0168	-0.0120	-0.0178	0.0248
Ativos	KHC	CMCSA	STT	MCO	MMC	NDSN	UAL	ROP	ELV	BR
μ_j	0.0023	-0.0131	0.0034	-0.0001	0.0105	0.0025	-0.0032	0.0013	0.0121	-0.0009
Ativos	SLB	SPG	EXR	BEN	WMB	HPE	LIN	CSGP	ADSK	AMT
μ_i	0.0343	0.0024	0.0076	0.0031	0.0152	0.0030	0.0119	-0.0068	-0.0102	-0.0069
Ativos	ALGN	ZTS	PPL	NVDA	NEE	SBUX	EMN	WY	EOG	AJG
μ_i	-0.0187	0.0015	0.0021	0.0414	0.0038	-0.0015	-0.0088	-0.0050	0.0297	0.0134

Fonte: elaborada pelo autor.

A fim de determinar o retorno $R_{\text{port.}}$ deste portfólio, precisamos obter os pesos w_j de cada um dos ativos que o compõe. Lembrando que os pesos correspondem as frações do recurso investido e que neste caso, o recurso é a soma dos preços de cada ativo no início do investimento. Os preços de cada ativo podem ser consultados na Tabela 5 no Apêndice B e os resultados dos pesos estão descritos na Tabela 2.

Tabela 2 – Pesos (w_j) de cada um dos 40 ativos tomados da base **S&P 500**

Ativos	UDR	O	DIS	TYL	KEYS	ATVI	AAP	D	MDT	ACGL
w_j	0.0073	0.0104	0.0313	0.0715	0.0243	0.0152	0.0321	0.0125	0.0208	0.0067
Ativos	KHC	CMCSA	STT	MCO	MMC	NDSN	UAL	ROP	ELV	BR
w_j	0.0064	0.0090	0.0134	0.0540	0.0222	0.0349	0.0092	0.0743	0.0624	0.0258
Ativos	SLB	SPG	EXR	BEN	WMB	HPE	LIN	CSGP	ADSK	AMT
w_i	0.0044	0.0182	0.0235	0.0047	0.0037	0.0025	0.0467	0.0144	0.0491	0.0410
Ativos	ALGN	ZTS	PPL	NVDA	NEE	SBUX	EMN	WY	EOG	AJG
w_i	0.1002	0.0287	0.0045	0.0252	0.0125	0.0185	0.0183	0.0058	0.0108	0.0238

Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a fórmula (5.4) aos retornos médios de cada ativo presente na Tabela 1 juntamente com os pesos da Tabela 2 obtemos o retorno deste portfólio

$$R_{\text{port.}} = -0,0011.$$

Outros elementos importantes para as nossas análises, e que foram obtidos são, as matrizes de covariância e correlação do portfólio, como também o seu risco. Estas matrizes podem ser consultadas no Apêndice B. Para a determinação de cada uma das entradas destas matrizes foram usadas as equações (5.5) e (5.8) respectivamente. Com os resultados das entradas da matriz de covariância e os dados dos pesos presentes na Tabela 2 obtemos por meio das equações (5.9) e (5.10) o risco do portfólio

$$\sigma_{\text{port.}} = 0,0628.$$

Como pode ser observado na fórmula explícita para o cálculo da distância entre matrizes simétricas definidas positivas de dimensões diferentes presente no Teorema 3.3.1 equação (3.28), se queremos obter a distância entre uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_{++}^m$ e uma matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{S}_{++}^n$ com $m < n$, a fórmula em (3.28) considera apenas a submatriz principal superior esquerda de \mathbf{B} com mesma dimensão que \mathbf{A} . Desta forma, quando queremos calcular distâncias entre matrizes de covariância de portfólios de dimensões diferentes, os elementos da matriz de dimensão maior que estão fora desta submatriz principal são desconsiderados no cálculo. Para contornar este problema decidimos permutar os ativos do portfólio, de modo que, aqueles que irão determinar a submatriz principal superior esquerda de dimensão menor que a matriz total consiga replicar de perto o comportamento do portfólio original.

Para obter os ativos que irão determinar esta submatriz citada acima, foi utilizado neste trabalho um método com base em Análise de Componentes Principais (PCA) proposto por (Rea; Rea, 2016), em que os autores conseguem extrair um número reduzido de ações do índice **ASX200**², de modo que estas juntas replicam de perto o comportamento deste índice.

Na seção subsequente mostraremos o processo de obtenção da permutação dos 40 ativos que determinará uma reordenação dos elementos da matriz de covariância do portfólio, em que a submatriz principal superior esquerda fica determinada pelos ativos que foram retidos pela aplicação do método com base em PCA.

² É um índice de mercado de ações ponderado por capitalização de mercado das 200 maiores ações por capitalização listadas na Bolsa de Valores da Austrália.

5.3 Obtenção da matriz de covariância do portfólio

Daremos início a esta seção apresentando o método de seleção de ativos proposto por (Rea; Rea, 2016). Este método está relacionado com a regra de Kaiser (Kaiser, 1960) que propõe reter as componentes principais de uma matriz de correlação com autovalor maior do que 1.

O procedimento para realização da seleção de ativos decorre do método de seleção de variáveis apresentado no Capítulo 4 e segue as seguintes etapas:

1. Aplica-se a PCA à matriz de correlação de um mercado de ações.
2. Em seguida associa-se uma ação com o maior coeficiente em valor absoluto a cada uma das últimas m_1 componentes principais que tenham autovalores menores do que um certo nível, l , que chamamos de critério de exclusão, e exclua essas m_1 ações. Por exemplo, pode-se usar a regra de Kaiser porque, no caso de uma matriz de correlação, uma componente principal com autovalor menor que 1 contém menos informações que uma das variáveis originais.
3. Um segundo PCA é executado nas ações restantes. Aplica-se o mesmo procedimento que associa uma ação a cada m_2 componentes principais que possuem um autovalor menor do que l , e exclui essas m_2 ações.
4. O procedimento é repetido até que nenhuma outra exclusão seja considerada necessária com base em um critério de parada. Pode-se decidir parar o procedimento de seleção com base no autovalor da última componente principal. Por exemplo, o critério de parada pode ser; exclua as ações até que as componentes principais das ações retidas tenham autovalores não inferiores a 0,7, como sugere (Jolliffe, 2002).

Estamos interessado em obter uma reordenação dos elementos da matriz de covariância do portfólio composto pelos 40 ativos, de modo que sua submatriz principal superior esquerda seja determinada por um conjunto de ativos extraídos destes 40. Queremos ainda que este conjunto de ativos consiga replica de perto o comportamento do portfólio original. Para isso, aplicamos o método de seleção descrito acima ao nosso conjunto de dados, que consiste nas taxas de retornos do 40 ativos em cada período considerado. Seguindo as etapas 2 e 4 do método acima, usamos um critério de exclusão de 1 e um critério de parada de 0,7.

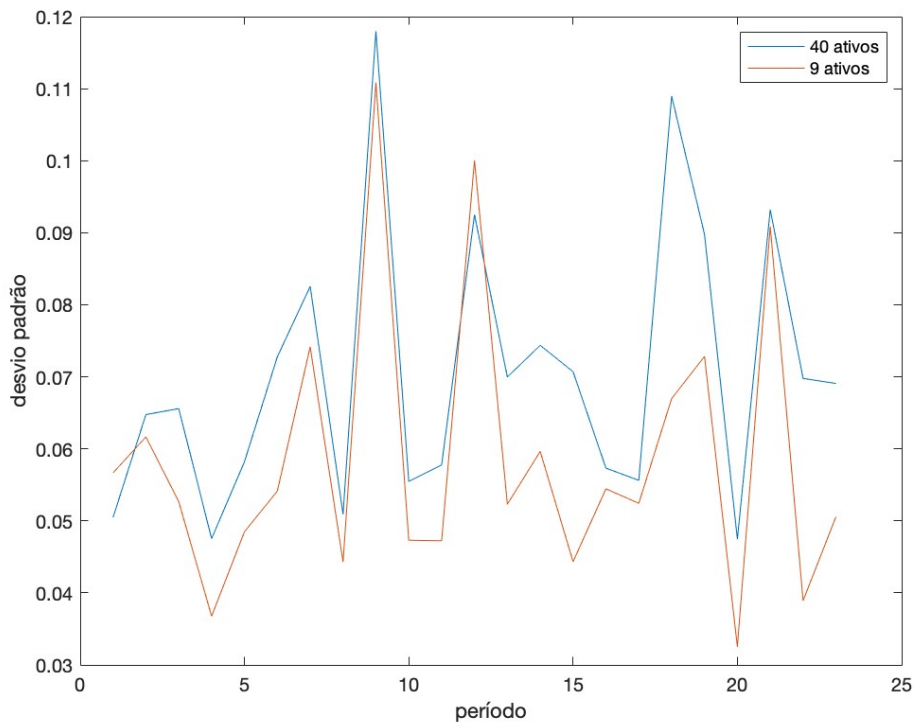
Inicialmente aplicamos a PCA a matriz de correlação do portfólio e obtivemos os resultados que encontram-se presentes na Tabela 6 no Apêndice C.

Em seguida, a segunda etapa do método foi realizada e das 39 componentes principais

obtidas (ver Tabela 6 no Apêndice C), haviam 38 componentes principais com autovalores menores que 1 e ainda inferiores a 0.7. Encontramos as ações com maior coeficiente em cada uma das 38 componentes principais e haviam 31 ações únicas. Observa-se que algumas ações têm o maior coeficiente em mais de uma componente principal. Removemos essas 31 ações do portfólio. As 9 ações retidas foram: DIS, KEYS, STT, NDSN, BEN, WMB, HPE, ZTS, WY. Os detalhes de cada um destes ativos encontram-se na Tabela 7 no Apêndice C. Um novo PCA foi aplicado a matriz de correlação destas ações restantes, porém todas as componentes principais apresentaram autovalores inferiores a 0,7, desta forma um único ciclo de exclusão de ações foi realizado.

A Figura 2 a seguir mostra que na maioria dos períodos considerados no estudo, a volatilidade (desvio padrão) do portfólio formado pelas 9 ações retidas possui um comportamento próximo a do portfólio formado pelas 40 ações.

Figura 2 – Volatilidade dos portfólios financeiros em cada período considerado



Fonte: elaborada pelo autor.

Realizando a reordenação dos 40 ativos de modo que os 9 retidos fiquem nas primeiras posições, obtemos DIS, KEYS, STT, NDSN, BEN, WMB, HPE, ZTS, WY, UDR, O, TYL, ATVI, AAP, D, MDT, ACGL, KHC, CMCSA, MCO, MMC, UAL, ROP, ELV, BR, SLB, SPG, EXR, LIN, CSGP, ADSK, AMT, ALGN, PPL, NVDA, NEE, SBUX, EMN, EOG,

AJG. Isso fornecerá a reordenação dos elementos da matriz de covariância do portfólio de tal modo que a sua submatriz principal superior esquerda fique determinada por estes 9 ativos. Para simplicidade denotaremos essa matriz de covariância por $C_{\text{port.}}$. A descrição desta matriz encontra-se no Apêndice C.

5.4 Resultados

Obtida a matriz de covariância $C_{\text{port.}}$ do portfólio composto pelos 40 ativos, cuja sua submatriz principal superior esquerda é formada pelas entradas da matriz de covariância do portfólio composto pelos 9 ativos extraídos na Seção 5.3. A fim de verificar se os retornos/riscos de subportfólios compostos de ações únicas escolhidas entre as 40 ações disponíveis possuía uma ordenação bem definida (aumentava ou diminuía) a medida que as matrizes de covariância destes subportfólios se distanciavam da matriz do portfólio total, consideramos 10 combinações aleatórias de portfólio compostos por 9 ações únicas. Para cada um deles foram obtidas as distâncias entre suas matrizes de covariância e a matriz de covariância do portfólio total. Estas matrizes encontram-se disponíveis no Apêndice D. Em seguida foram obtidos os retornos e os riscos de cada um deles. Os resultados destes cálculos estão presentes na Tabela 3.

Tabela 3 – Retornos e riscos de 10 portfólios de ações escolhidos de forma aleatória, cada um composto de 9 ações numeradas conforme Tabela 4 no Apêndice A extraídas das 40 ações dadas, bem como as distâncias que as matrizes de covariância destes portfólios estão da matriz de covariância do portfólio composto por todas as 40 ações

Portfólio	Ações do Portfólio	Distância	Retorno do Portfólio	Risco do Portfólio
1	22, 31, 7, 19, 38, 3, 28, 18, 36	2,2126	-0,0067	0,0699
2	13, 35, 26, 14, 10, 28, 6, 32, 21	2,5722	0,0024	0,0619
3	20, 33, 26, 9, 31, 28, 17, 7, 39	2,7952	-0,0118	0,0801
4	12, 18, 26, 7, 33, 36, 10, 23, 40	2,8474	0,0005	0,0582
5	5, 19, 37, 11, 29, 16, 34, 10, 40	3,0543	0,0075	0,0661
6	27, 6, 39, 8, 21, 18, 12, 25, 37	3,3620	0,0039	0,0565
7	40, 31, 8, 18, 6, 25, 28, 16, 20	3,4530	-0,0052	0,0673
8	2, 16, 29, 39, 8, 30, 37, 22, 12	3,5420	-0,0037	0,0681
9	33, 40, 27, 23, 14, 10, 35, 19, 8	3,5670	0,0076	0,0584
10	9, 14, 38, 24, 3, 12, 18, 26, 37	3,9611	-0,0059	0,0669

Fonte: elaborada pelo autor.

Para facilitar a compreensão dos resultados obtidos, ordenamos os 10 portfólios de acordo com a ordenação das distâncias entre suas matrizes de covariância e a matriz de covariância do portfólio total. Para cada j -ésimo portfólio da Tabela 3 vamos denotar a sua matriz de covariância por $C_{\text{port.},j}$, a distância de $C_{\text{port.},j}$ a $C_{\text{port.}}$ por $\delta_2^+(C_{\text{port.},j}, C_{\text{port.}})$, seu retorno

e o seu risco por $R_{\text{port.}j}$ e $\sigma_{\text{port.}j}$ respectivamente. Podemos notar por meio desta tabela, para o caso do retorno que,

$$\delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}1}, \mathbf{C}_{\text{port.}}) < \delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}2}, \mathbf{C}_{\text{port.}})$$

e $R_{\text{port.}1} < R_{\text{port.}2}$. E temos ainda que

$$\delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}2}, \mathbf{C}_{\text{port.}}) < \delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}3}, \mathbf{C}_{\text{port.}}),$$

mas neste caso $R_{\text{port.}2} > R_{\text{port.}3}$. Isso portanto assegura que não temos uma relação de ordem bem definida entre as distâncias e os retornos. Buscamos ainda analisar uma relação destes retornos $R_{\text{port.}j}$ com o retorno $R_{\text{port.}}$ do portfólio total, mas nota-se que a medida que as matrizes $\mathbf{C}_{\text{port.}j}$ se afastam de $\mathbf{C}_{\text{port.}}$ os retornos $R_{\text{port.}j}$ são algumas vezes superiores e outras inferiores a $R_{\text{port.}}$, o que impede realizar de forma prática a escolha de um subportfólio que supere, ou mesmo que tenham um retorno próximo ao do portfólio maior com base na distância que sua matriz de covariância encontra-se da matriz de covariância de todo o portfólio. Outro fato que pode ser notado na Tabela 3, agora para o caso do risco é

$$\delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}1}, \mathbf{C}_{\text{port.}}) < \delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}2}, \mathbf{C}_{\text{port.}})$$

e $\sigma_{\text{port.}1} > \sigma_{\text{port.}2}$. E temos ainda que

$$\delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}2}, \mathbf{C}_{\text{port.}}) < \delta_2^+(\mathbf{C}_{\text{port.}3}, \mathbf{C}_{\text{port.}}),$$

mas neste caso $\sigma_{\text{port.}2} < \sigma_{\text{port.}3}$. Isso também assegura que não temos uma relação de ordem bem definida entre as distâncias e os riscos. Buscamos também analisar uma relação destes riscos $\sigma_{\text{port.}j}$ com o risco $\sigma_{\text{port.}}$ do portfólio total, mas nota-se ainda que a medida que as matrizes $\mathbf{C}_{\text{port.}j}$ se afastam de $\mathbf{C}_{\text{port.}}$ os riscos $\sigma_{\text{port.}j}$ são algumas vezes superiores e outras inferiores a $\sigma_{\text{port.}}$. Este resultados mostra que não é possível realizar de forma prática a escolha de um subportfólio, entre os dez escolhidos, que possua risco inferior ao do portfólio maior com base na distância que sua matriz de covariância encontra-se da matriz de covariância de todo o portfólio.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, nossas investigações foram conduzidas por meio de um estudo de caso em seleção de portfólios financeiros considerando 40 ativos selecionados da base de dados do índice **S&P 500**. Os resultados deste estudo mostraram que não há uma relação significativa ou consistente entre as distâncias das matrizes de covariância e a variação dos retornos/riscos dos subportfólios extraídos de um portfólio dado. As flutuações nos resultados obtidos indicam a falta de uma ordenação bem definida entre os retornos e os riscos dos portfólios ao longo do processo de distanciamento das suas matrizes de covariância, assegurando a impossibilidade de realizar a seleção de um portfólio que supere ou mesmo que tenha retorno próximo ao do portfólio total, com base na ordenação das distâncias geométricas entre suas matrizes de covariância, além disso, esta falta de ordenação também impossibilita a realização da seleção de um portfólio que apresente um risco inferior ao do portfólio total.

Esta pesquisa forneceu informações valiosas sobre a distância geométrica entre matrizes de covariância de portfólios financeiros e sua relação com seus retornos e riscos. É necessário continuar a explorar esse campo de estudo em busca de uma melhor compreensão de como a dinâmica destes portfólios estão relacionadas com a distância entre suas matrizes de covariância e como isso pode contribuir na gestão de investimentos e na construção de estratégias de alocação de ativos. Por fim, espero que este trabalho possa ser uma porta de entrada para estudo futuros.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, T. de. **Álgebra linear**: teoria e aplicações. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- BARBARESCO, F. Innovative tools for radar signal processing based on cartan's geometry of spd matrices & information geometry. *In: IEEE. 2008 IEEE Radar Conference*. Rome: IEEE, 2008. p. 1–6.
- BHATIA, R. **Positive definite matrices**. New Jersey: Princeton University Press, 2009.
- BONNABEL, S.; SEPULCHRE, R. Riemannian metric and geometric mean for positive semidefinite matrices of fixed rank. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, United States, v. 31, n. 3, p. 1055–1070, 2010.
- BOUTSIDIS, C.; DRINEAS, P.; KAMBADUR, P.; KONTOPOULOU, E.-M.; ZOUZIAS, A. A randomized algorithm for approximating the log determinant of a symmetric positive definite matrix. **Linear Algebra and its Applications**, United States, v. 533, p. 95–117, 2017.
- CARMO, M. P. D. **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).
- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Edusp, 2005.
- CURTIS, M. L. **Matrix groups**. 2. ed. New York: Springer, 1984.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Modern portfolio theory and investment analysis**. United States: John Wiley & Sons, 2014.
- FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES, N. C. **Introdução às funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- FLETCHER, P. T.; JOSHI, S. Riemannian geometry for the statistical analysis of diffusion tensor data. **Signal Processing**, United States, v. 87, n. 2, p. 250–262, 2007.
- HALL, B. C. Lie groups, lie algebras, and representations. *In: HALL, Brian C. Quantum Theory for Mathematicians*. United States: Springer New York, 2013. p. 333–366.
- HIGHAM, N. J. **Functions of matrices**: theory and computation. United States: SIAM, 2008.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. A. **Linear algebra**. New Jersey, NJ, USA: Prentice-Hall, 1971.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012.
- HOTELLING, H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. **Journal of educational psychology**, United States, v. 24, n. 6, p. 417, 1933.

JOLLIFFE, I. T. Discarding variables in a principal component analysis. i: artificial data. **Journal of the Royal Statistical Society: Series C, Applied Statistics**, United Kingdom, v. 21, n. 2, p. 160–173, 1972.

JOLLIFFE, I. T. **Principal component analysis**. 2. ed. New York: Springer, 2002.

KAISER, H. F. The application of electronic computers to factor analysis. **Educational and psychological measurement**, United States, v. 20, n. 1, p. 141–151, 1960.

LANG, S. **Fundamentals of differential geometry**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. v. 191.

LAUB, A. J. **Matrix analysis for scientists and engineers**. Philadelphia, PA, USA: Siam, 2005. v. 91.

LAWSON, J. D.; LIM, Y. The geometric mean, matrices, metrics, and more. **The American Mathematical Monthly**, United States, v. 108, n. 9, p. 797–812, 2001.

LEON, S. J.; BICA, I.; HOHN, T. **Linear algebra with applications**. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Prentice Hall, 2006.

LIM, L.-H.; SEPULCHRE, R.; YE, K. Geometric distance between positive definite matrices of different dimensions. **IEEE Transactions on Information Theory**, United States, v. 65, n. 9, p. 5401–5405, 2019.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, United States, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MEYER, C. D. **Matrix analysis and applied linear algebra**. United States: Siam, 2000. v. 71.

MOAKHER, M.; ZÉRAÏ, M. The riemannian geometry of the space of positive-definite matrices and its application to the regularization of positive-definite matrix-valued data. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, United States, v. 40, n. 2, p. 171–187, 2011.

NESTEROV, Y. E.; TODD, M. J. *et al.* On the riemannian geometry defined by self-concordant barriers and interior-point methods. **Foundations of Computational Mathematics**, United States, v. 2, n. 4, p. 333–361, 2002.

PEARSON, K. Liii. on lines and planes of closest fit to systems of points in space. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**, United Kingdom, v. 2, n. 11, p. 559–572, 1901.

PENNEC, X. Intrinsic statistics on riemannian manifolds: basic tools for geometric measurements. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, Netherlands, v. 25, n. 1, p. 127–154, 2006.

PENNEC, X.; FILLARD, P.; AYACHE, N. A riemannian framework for tensor computing. **International Journal of Computer Vision**, United States, v. 66, n. 1, p. 41–66, 2006.

- PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. 2. ed. New York, NY, USA: Springer, 2006. v. 171.
- REA, A.; REA, B. Stock selection with principal component analysis. **Journal of Investment Strategies**, United Kingdom, v. 5, n. 2, p. 35–55, 2016.
- SMITH, S. T. Covariance, subspace, and intrinsic cramer-rao bounds. **IEEE Transactions on Signal Processing**, United States, v. 53, n. 5, p. 1610–1630, 2005.
- TAPP, K. **Matrix groups for undergraduates**. Providence, RI, USA: American Mathematical Soc., 2016. v. 79.
- ZHANG, F. **Matrix theory: basic results and techniques**. 2. ed. New York, NY, USA: Springer, 2011.

APÊNDICE A – LISTA DE ATIVOS DO S&P 500

Tabela 4 – Lista dos 40 ativos escolhidos aleatoriamente pertencentes ao índice S&P500

Ativo	Nome do Ativo	Código	Setor de Atuação
1	UDR Inc.	UDR	Imobiliário
2	Realty Income Corporation	O	Imobiliário
3	Walt Disney Company	DIS	Serviços de Comunicação
4	Tyler Technologies Inc.	TYL	Tecnologia
5	Keysight Technologies Inc.	KEYS	Tecnologia
6	Activision Blizzard Inc.	ATVI	Serviços de Comunicação
7	Advance Auto Parts Inc.	AAP	Consumo Cíclico
8	Dominion Energy Inc	D	Serviços de utilidade pública
9	Medtronic Plc	MDT	Assistência médica
10	Arch Capital Group Ltd.	ACGL	Serviço Financeiro
11	The Kraft Heinz Company	KHC	Defesa do consumidor
12	Comcast Corporation Class A	CMCSA	Serviços de Comunicação
13	State Street Corporation	STT	Serviço Financeiro
14	Moody's Corporation	MCO	Serviço Financeiro
15	Marsh & McLennan Companies Inc.	MMC	Serviço Financeiro
16	Nordson Corporation	NDSN	Industrial
17	United Airlines Holdings Inc.	UAL	Industrial
18	Roper Technologies Inc.	ROP	Tecnologia
19	Elevance Health Inc.	ELV	Assistência médica
20	Broadridge Financial Solutions Inc.	BR	Tecnologia
21	Schlumberger Limited	SLB	Energia
22	Simon Property Group Inc.	SPG	Imobiliário
23	Extra Space Storage Inc.	EXR	Imobiliário
24	Franklin Resources Inc.	BEN	Serviço Financeiro
25	Williams Companies Inc.	WMB	Energia
26	Hewlett Packard Enterprise Co.	HPE	Tecnologia
27	Linde plc	LIN	Materiais básicos
28	CoStar Group Inc.	CSGP	Imobiliário
29	Autodesk Inc.	ADSK	Tecnologia
30	American Tower Corporation	AMT	Imobiliário
31	Align Technology Inc.	ALGN	Assistência médica
32	Zoetis Inc.	ZTS	Assistência médica
33	PPL Corporation	PPL	Serviços de utilidade pública
34	NVIDIA Corporation	NVDA	Tecnologia
35	NextEra Energy Inc.	NEE	Serviços de utilidade pública
36	Starbucks Corporation	SBUX	Consumo Cíclico
37	Eastman Chemical Company	EMN	Materiais básicos
38	Weyerhaeuser Company	WY	Imobiliário
39	EOG Resources Inc.	EOG	Energia
40	Arthur J. Gallagher & Co.	AJG	Serviço Financeiro

Fonte: elaborada pelo autor.

APÊNDICE B – BASE DE DADOS COM 40 ATIVOS DO S&P 500

1	Matriz das Taxas de retornos = [
2	Colunas 1 a 9								
3									
4	0.0338	-0.0075	-0.0396	-0.0511	-0.0136	0.0716	-0.0521	-0.0471	-0.0331
5	0.0283	-0.0209	-0.0161	0.1221	0.0845	-0.0186	0.0812	-0.0338	-0.0194
6	0.1227	0.0569	0.0014	0.0890	0.0657	-0.1238	0.0390	0.0261	0.0632
7	-0.0106	0.0309	0.0300	-0.0141	0.0901	-0.0149	-0.0434	0.0397	0.0165
8	-0.0193	-0.0990	-0.0669	-0.0557	-0.0841	-0.0605	0.0298	-0.0619	-0.0609
9	0.0481	0.1052	-0.0006	0.1844	0.0957	0.0103	0.0849	0.0482	-0.0391
10	0.0285	-0.0187	-0.1430	-0.0446	0.0803	-0.2505	-0.0213	-0.0623	-0.1098
11	0.0575	0.0613	0.0689	0.0366	0.0619	0.1353	0.0868	0.1034	-0.0305
12	-0.0525	-0.0271	-0.0770	-0.1192	-0.1825	0.1876	-0.0308	0.0359	0.0068
13	-0.0287	-0.0444	0.0384	-0.0961	-0.0678	0.0315	-0.1168	-0.0140	0.0145
14	0.0456	0.0524	-0.0761	0.0388	0.0038	-0.0171	0.0121	0.0684	0.0568
15	-0.0725	0.0044	-0.1861	-0.1128	-0.1120	-0.0563	-0.0284	-0.0311	-0.0538
16	-0.0959	-0.0131	-0.0107	-0.0985	0.0380	0.0363	-0.0489	0.0316	-0.0403
17	-0.0368	0.0042	-0.1452	-0.0656	-0.0532	-0.0003	-0.0883	-0.0524	-0.1038
18	0.0513	0.0878	0.1239	0.2001	0.1795	0.0268	0.1284	0.0355	0.0388
19	-0.0652	-0.0740	0.0564	-0.0689	0.0079	-0.0183	-0.1290	-0.0022	-0.0497
20	-0.0704	-0.1446	-0.1584	-0.0646	-0.0398	-0.0529	-0.0729	-0.1551	-0.0816
21	-0.0468	0.0745	0.1294	-0.0696	0.1067	-0.0207	0.2256	0.0208	0.0903
22	0.0531	0.0169	-0.0814	0.0600	0.0387	0.0158	-0.2050	-0.1266	-0.0950
23	-0.0661	0.0097	-0.1123	-0.0593	-0.0543	0.0352	-0.0262	0.0034	-0.0167
24	0.0997	0.0735	0.2487	0.0011	0.0484	0.0003	0.0467	0.0493	0.0864
25	0.0161	-0.0537	-0.0819	-0.0047	-0.1081	-0.0042	-0.0481	-0.1260	-0.0106
26	-0.1013	-0.0469	-0.0401	0.0342	-0.0263	0.1060	-0.2085	-0.0268	-0.0382
27									
28	Colunas 10 a 18								
29									
30	0.0045	0.0557	0.0259	0.0361	0.0264	0.0233	0.0486	0.0726	0.0094
31	-0.0238	-0.0559	-0.0056	-0.0540	0.0826	0.0168	-0.0079	-0.1039	0.0449
32	0.0015	-0.0566	0.0317	0.0658	0.0376	0.0465	0.0302	-0.1065	0.0450
33	0.0538	-0.0645	0.0359	0.0662	0.0127	0.0717	0.0551	-0.0045	-0.0152
34	-0.0710	0.0345	-0.0783	-0.0881	-0.0658	-0.0367	0.0003	0.0228	-0.0769
35	0.0953	-0.0253	-0.0805	0.1710	0.1381	0.1015	0.0674	-0.0301	0.0936
36	-0.0344	-0.0635	-0.0239	-0.0972	-0.0334	-0.0133	-0.0001	-0.0841	-0.0474
37	0.1008	0.0802	0.0070	0.0453	0.0014	0.0597	0.0042	0.0360	0.0597
38	0.0421	-0.0028	-0.0068	0.0224	-0.1218	-0.1161	-0.0872	-0.0206	-0.1112
39	0.0171	0.0955	-0.0600	-0.0970	-0.0611	0.0150	-0.0260	0.0354	0.0266
40	0.0278	0.0043	0.0013	0.0210	0.0501	0.0966	0.0048	0.0441	0.0536
41	-0.0568	0.0937	-0.1508	-0.2265	-0.0620	-0.0512	-0.0502	0.0893	-0.0049
42	0.0392	-0.1126	0.1200	0.0824	-0.0471	-0.0077	0.0102	-0.0568	-0.0573
43	-0.0415	0.0184	-0.1138	-0.1495	-0.0959	-0.0294	-0.0686	-0.2564	-0.1080
44	-0.0240	-0.0343	-0.0438	0.1627	0.1408	0.0561	0.1410	0.0375	0.1065
45	0.0297	0.0155	-0.0289	-0.0379	-0.0829	-0.0121	-0.0165	-0.0473	-0.0767
46	-0.0039	-0.0990	-0.1896	-0.1103	-0.1437	-0.0749	-0.0631	-0.0708	-0.1067
47	0.2626	0.1535	0.0822	0.2295	0.0895	0.0817	0.0600	0.3243	0.1527

48	0.0419	0.0229	0.1646	0.0766	0.1261	0.0764	0.0511	0.0253	0.0605
49	0.0479	0.0453	-0.0456	-0.0264	-0.0636	-0.0445	0.0052	-0.1465	-0.0155
50	0.0250	-0.0044	0.1253	0.1869	0.1584	0.0570	0.0263	0.2987	-0.0124
51	0.0878	-0.0392	-0.0481	-0.0290	-0.1010	-0.0698	-0.0972	0.0613	0.0097
52	-0.0517	-0.0087	-0.0207	-0.1724	0.0131	-0.0049	-0.0305	-0.1928	0.0001
53									
54	Colunas 19 a 27								
55									
56	0.0496	0.0054	0.1582	0.0673	0.0075	0.1403	0.0813	-0.0037	0.0516
57	-0.0412	0.0129	0.0217	0.0155	0.0935	-0.0649	0.0080	-0.0865	-0.0383
58	0.0087	0.0779	-0.0957	-0.0303	0.0697	-0.0683	-0.0425	0.0022	0.0670
59	-0.0231	-0.0073	-0.0274	0.0742	0.0733	0.0978	-0.0144	0.0662	0.0234
60	-0.0062	-0.0324	0.0618	-0.0333	-0.1012	-0.0838	0.0506	-0.0783	-0.0674
61	0.1708	0.0747	0.0884	0.1405	0.1828	0.0692	0.1011	0.0366	0.0917
62	-0.0664	-0.0552	-0.1110	0.0427	0.0133	0.0289	-0.0463	-0.0205	-0.0033
63	0.1411	0.0845	0.0487	0.0453	0.1336	0.0336	-0.0280	0.0990	0.0889
64	-0.0460	-0.1260	0.3045	-0.0689	-0.1207	-0.0371	0.1671	0.0435	-0.0770
65	0.0246	-0.0817	0.0044	-0.0655	-0.0507	-0.0701	0.0448	-0.0251	-0.0798
66	0.0871	0.0650	0.0560	-0.0436	0.0927	-0.0609	0.0681	0.0496	0.0893
67	0.0247	-0.0703	-0.0557	-0.0917	-0.0688	-0.1104	0.0399	-0.0710	-0.0195
68	0.0153	0.0145	0.1782	-0.0284	-0.0621	0.1013	0.0808	0.0123	0.0408
69	-0.0530	-0.0251	-0.2191	-0.1721	-0.0453	-0.1392	-0.1579	-0.1500	-0.1144
70	-0.0088	0.1316	0.0355	0.1621	0.1246	0.1916	0.1048	0.0828	0.0542
71	0.0168	0.0661	0.0302	-0.0613	0.0486	-0.0503	-0.0018	-0.0449	-0.0634
72	-0.0636	-0.1569	-0.0590	-0.1199	-0.1309	-0.1745	-0.1587	-0.1191	-0.0469
73	0.2069	0.0443	0.4560	0.2352	0.0354	0.1036	0.1580	0.2019	0.1076
74	-0.0253	-0.0063	-0.0092	0.0960	-0.0944	0.1433	0.0602	0.1759	0.1316
75	-0.0374	-0.1005	0.0371	-0.0164	-0.0841	-0.0160	-0.0519	-0.0489	-0.0306
76	-0.0229	0.1266	0.0695	0.1102	0.0826	0.1964	-0.0076	0.0181	0.0181
77	-0.0606	-0.0637	-0.0662	-0.0496	0.0432	-0.0554	-0.0664	-0.0322	0.0527
78	-0.0121	0.0011	-0.1169	-0.1539	-0.0686	-0.1028	-0.0389	-0.0384	-0.0036
79									
80	Colunas 28 a 36								
81									
82	-0.0005	-0.0207	0.0079	-0.0090	0.0226	-0.0007	0.0823	-0.0553	-0.0053
83	-0.0302	0.0211	0.0575	0.0353	0.0548	-0.0392	0.2313	0.0008	-0.0143
84	0.0728	0.1001	0.0519	0.1388	0.0877	0.0291	-0.0249	0.0687	0.0860
85	-0.0463	-0.0344	0.0331	0.0190	0.0105	0.0345	0.1480	0.0782	-0.0324
86	0.0156	-0.0804	-0.0916	-0.0615	-0.0509	-0.0501	-0.0744	-0.0608	-0.0575
87	-0.0001	0.1138	0.0673	-0.0617	0.1136	0.0473	0.2342	0.0867	-0.0384
88	-0.0963	-0.1997	-0.0691	-0.0206	0.0282	-0.0337	0.2781	0.0170	0.0337
89	0.0163	0.1062	0.1144	0.0746	0.0990	0.0801	-0.0999	0.0806	0.0715
90	-0.1122	-0.1117	-0.1359	-0.2468	-0.1813	0.0016	-0.1674	-0.1632	-0.1594
91	-0.1304	-0.1183	-0.0979	0.0333	-0.0292	-0.1183	-0.0041	0.0019	-0.0664
92	0.0918	-0.0267	0.1073	-0.1475	-0.0261	0.0913	0.1190	0.0883	-0.0039
93	-0.0449	-0.1170	-0.0406	-0.3351	-0.0601	-0.0012	-0.3202	-0.1616	-0.1795
94	-0.0421	0.0976	0.0684	-0.0423	-0.0340	0.0661	0.0067	0.0658	0.0517
95	-0.0087	-0.1723	-0.0021	-0.1476	0.0056	-0.1011	-0.1881	0.0292	-0.0200
96	0.2016	0.2580	0.0659	0.1872	0.0620	0.0813	0.1984	0.0908	0.1098

97	-0.0406	-0.0674	-0.0620	-0.1326	-0.1410	0	-0.1690	0.0067	-0.0084
98	0.0001	-0.0741	-0.1549	-0.1501	-0.0526	-0.1283	-0.1958	-0.0737	0.0080
99	0.1877	0.1472	-0.0350	-0.0619	0.0168	0.0530	0.1122	-0.0116	0.0277
100	-0.0203	-0.0576	0.0756	0.0121	0.0245	0.1144	0.2538	0.0929	0.1803
101	-0.0464	-0.0747	-0.0424	0.0724	-0.0492	-0.0102	-0.1362	-0.0080	-0.0238
102	0.0080	0.1514	0.0622	0.2789	0.1292	0.0209	0.3369	-0.1073	0.1002
103	-0.0929	-0.0765	-0.1136	0.1474	0.0115	-0.0855	0.1883	-0.0482	-0.0646
104	-0.0393	0.0003	-0.0245	-0.0115	-0.0077	-0.0041	0.1428	0.0689	-0.0288
105									
106	Colunas 37 a 40								
107									
108	0.0867	-0.0209	0.0971	0.0115					
109	-0.0690	-0.0933	0.0386	-0.0445					
110	-0.0292	-0.0156	-0.1268	-0.0022					
111	0.0039	0.0673	-0.0566	0.0309					
112	-0.1098	-0.0119	0.1888	0.0350					
113	0.0392	0.0089	0.1519	0.1317					
114	0.0025	0.0678	-0.0547	-0.0284					
115	0.1594	0.0949	0.0210	0.0416					
116	-0.0098	-0.0138	0.2842	-0.0664					
117	-0.0039	-0.0383	0.0384	0.0016					
118	-0.0541	0.0098	0.0375	0.1037					
119	-0.0771	0.0926	-0.0123	-0.0319					
120	0.0730	-0.0412	0.1801	-0.0389					
121	-0.1851	-0.1619	-0.1936	0.0068					
122	0.0770	0.1017	0.0209	0.1013					
123	-0.0514	-0.0595	0.0989	0.0144					
124	-0.2192	-0.1639	-0.0789	-0.0570					
125	0.0909	0.0887	0.2370	0.0957					
126	0.1277	0.0575	0.0458	0.0643					
127	-0.0598	-0.0523	-0.0874	-0.0531					
128	0.0924	0.1168	0.0332	0.0407					
129	-0.0337	-0.0924	-0.1400	-0.0428					
130	-0.0536	-0.0568	-0.0411	-0.0065]					

Tabela 5 – Preço de cada um dos 40 ativos tomados da base S&P 500 em 1º de abril de 2021

Ativos	UDR	O	DIS	TYL	KEYS	ATVI	AAP	D	MDT	ACGL
Valor (\$)	43.6253	61.6745	186.0200	424.8600	144.3500	90.2144	190.4908	74.2698	123.8835	39.7100
Ativos	KHC	CMCSA	STT	MCO	MMC	NDSN	UAL	ROP	ELV	BR
Valor (\$)	37.9929	53.5629	79.6513	321.1799	131.9134	207.4265	54.4000	441.4677	370.9950	153.2232
Ativos	SLB	SPG	EXR	BEN	WMB	HPE	LIN	CSGP	ADSK	AMT
Valor (\$)	26.1945	108.1105	139.5281	27.9044	21.7897	15.0234	277.5943	85.4430	291.9100	243.4467
Ativos	ALGN	ZTS	PPL	NVDA	NEE	SBUX	EMN	WY	EOG	AJG
Valor (\$)	595.5300	170.6921	26.8022	149.8502	74.3367	109.9311	108.5043	34.5315	64.0315	141.4732

Fonte: elaborada pelo autor.

1	Matriz de Covariância do Portfolio = [
2	Colunas 1 a 9								
3									
4	0.0038	0.0021	0.0024	0.0035	0.0025	-0.0012	0.0023	0.0009	0.0012

5	0.0021	0.0037	0.0031	0.0029	0.0031	0.0004	0.0034	0.0027	0.0018
6	0.0024	0.0031	0.0104	0.0029	0.0048	0.0019	0.0046	0.0038	0.0040
7	0.0035	0.0029	0.0029	0.0078	0.0050	-0.0002	0.0029	0.0012	0.0010
8	0.0025	0.0031	0.0048	0.0050	0.0071	-0.0020	0.0041	0.0019	0.0013
9	-0.0012	0.0004	0.0019	-0.0002	-0.0020	0.0071	-0.0010	0.0017	0.0008
10	0.0023	0.0034	0.0046	0.0029	0.0041	-0.0010	0.0099	0.0032	0.0031
11	0.0009	0.0027	0.0038	0.0012	0.0019	0.0017	0.0032	0.0041	0.0022
12	0.0012	0.0018	0.0040	0.0010	0.0013	0.0008	0.0031	0.0022	0.0032
13	0.0002	0.0018	0.0030	-0.0000	0.0015	0.0013	0.0031	0.0014	0.0018
14	-0.0004	0.0008	0.0010	-0.0016	-0.0011	0.0014	0.0011	0.0007	0.0007
15	0.0018	0.0022	0.0046	0.0009	0.0029	0.0011	0.0005	0.0016	0.0018
16	0.0036	0.0050	0.0087	0.0044	0.0061	0.0016	0.0068	0.0038	0.0040
17	0.0035	0.0041	0.0055	0.0057	0.0056	-0.0001	0.0037	0.0021	0.0022
18	0.0021	0.0027	0.0034	0.0032	0.0039	-0.0003	0.0021	0.0018	0.0014
19	0.0015	0.0022	0.0031	0.0028	0.0038	-0.0004	0.0024	0.0014	0.0011
20	0.0022	0.0027	0.0077	-0.0008	0.0019	0.0003	0.0063	0.0018	0.0043
21	0.0020	0.0030	0.0033	0.0039	0.0036	0.0002	0.0037	0.0015	0.0020
22	0.0006	0.0025	0.0029	0.0012	0.0022	0.0012	0.0039	0.0026	0.0015
23	0.0028	0.0033	0.0057	0.0042	0.0047	0.0001	0.0034	0.0030	0.0020
24	-0.0009	0.0021	0.0060	-0.0021	0.0009	0.0045	0.0071	0.0035	0.0038
25	0.0031	0.0041	0.0063	0.0039	0.0061	-0.0005	0.0064	0.0021	0.0024
26	0.0036	0.0037	0.0052	0.0054	0.0052	-0.0007	0.0051	0.0032	0.0022
27	0.0028	0.0040	0.0069	0.0030	0.0055	0.0012	0.0034	0.0024	0.0020
28	0.0003	0.0020	0.0030	0.0006	0.0009	0.0023	0.0030	0.0023	0.0019
29	0.0017	0.0032	0.0043	0.0020	0.0034	0.0016	0.0028	0.0022	0.0021
30	0.0022	0.0026	0.0022	0.0031	0.0032	0.0000	0.0022	0.0011	0.0013
31	0.0016	0.0026	0.0035	0.0033	0.0041	-0.0005	0.0052	0.0016	0.0022
32	0.0028	0.0044	0.0088	0.0061	0.0066	0.0021	0.0070	0.0040	0.0039
33	0.0027	0.0036	0.0032	0.0043	0.0044	0.0007	0.0022	0.0028	0.0011
34	0.0050	0.0029	0.0086	0.0060	0.0057	-0.0003	0.0030	0.0013	0.0032
35	0.0033	0.0028	0.0033	0.0044	0.0042	-0.0012	0.0031	0.0010	0.0010
36	0.0014	0.0028	0.0026	0.0025	0.0030	0.0011	0.0019	0.0025	0.0012
37	0.0061	0.0045	0.0081	0.0093	0.0091	-0.0026	0.0032	0.0005	0.0027
38	0.0013	0.0019	0.0015	0.0041	0.0044	-0.0003	-0.0001	0.0013	-0.0000
39	0.0026	0.0018	0.0036	0.0034	0.0048	-0.0011	0.0008	0.0002	0.0005
40	0.0025	0.0035	0.0058	0.0022	0.0039	0.0023	0.0026	0.0027	0.0018
41	0.0020	0.0032	0.0040	0.0014	0.0030	-0.0004	0.0034	0.0026	0.0018
42	-0.0011	0.0006	0.0039	-0.0014	0.0000	0.0036	0.0036	0.0025	0.0014
43	0.0015	0.0022	0.0028	0.0027	0.0028	0.0001	0.0022	0.0015	0.0011
44									
45	Colunas 10 a 18								
46									
47	0.0002	-0.0004	0.0018	0.0036	0.0035	0.0021	0.0015	0.0022	0.0020
48	0.0018	0.0008	0.0022	0.0050	0.0041	0.0027	0.0022	0.0027	0.0030
49	0.0030	0.0010	0.0046	0.0087	0.0055	0.0034	0.0031	0.0077	0.0033
50	-0.0000	-0.0016	0.0009	0.0044	0.0057	0.0032	0.0028	-0.0008	0.0039
51	0.0015	-0.0011	0.0029	0.0061	0.0056	0.0039	0.0038	0.0019	0.0036
52	0.0013	0.0014	0.0011	0.0016	-0.0001	-0.0003	-0.0004	0.0003	0.0002
53	0.0031	0.0011	0.0005	0.0068	0.0037	0.0021	0.0024	0.0063	0.0037

54	0.0014	0.0007	0.0016	0.0038	0.0021	0.0018	0.0014	0.0018	0.0015
55	0.0018	0.0007	0.0018	0.0040	0.0022	0.0014	0.0011	0.0043	0.0020
56	0.0048	0.0015	0.0023	0.0054	0.0015	0.0015	0.0008	0.0048	0.0025
57	0.0015	0.0042	-0.0000	-0.0000	0.0003	0.0005	0.0001	0.0038	0.0016
58	0.0023	-0.0000	0.0069	0.0063	0.0041	0.0025	0.0020	0.0042	0.0020
59	0.0054	-0.0000	0.0063	0.0138	0.0072	0.0044	0.0045	0.0086	0.0047
60	0.0015	0.0003	0.0041	0.0072	0.0079	0.0044	0.0039	0.0048	0.0047
61	0.0015	0.0005	0.0025	0.0044	0.0044	0.0034	0.0025	0.0027	0.0031
62	0.0008	0.0001	0.0020	0.0045	0.0039	0.0025	0.0030	0.0022	0.0025
63	0.0048	0.0038	0.0042	0.0086	0.0048	0.0027	0.0022	0.0167	0.0041
64	0.0025	0.0016	0.0020	0.0047	0.0047	0.0031	0.0025	0.0041	0.0049
65	0.0033	0.0025	0.0010	0.0043	0.0027	0.0027	0.0017	0.0044	0.0034
66	0.0010	0.0001	0.0030	0.0057	0.0052	0.0035	0.0028	0.0032	0.0031
67	0.0065	0.0032	0.0048	0.0101	0.0026	0.0012	0.0021	0.0111	0.0029
68	0.0041	0.0012	0.0044	0.0100	0.0068	0.0040	0.0044	0.0084	0.0050
69	0.0020	-0.0004	0.0014	0.0058	0.0050	0.0036	0.0025	0.0029	0.0038
70	0.0028	0.0002	0.0063	0.0100	0.0066	0.0036	0.0044	0.0074	0.0035
71	0.0021	0.0018	0.0028	0.0052	0.0030	0.0015	0.0020	0.0056	0.0026
72	0.0040	0.0015	0.0048	0.0075	0.0045	0.0031	0.0028	0.0063	0.0040
73	0.0025	0.0002	0.0032	0.0053	0.0040	0.0028	0.0022	0.0039	0.0036
74	0.0016	0.0009	0.0010	0.0052	0.0040	0.0026	0.0029	0.0038	0.0033
75	0.0030	-0.0004	0.0040	0.0103	0.0072	0.0040	0.0043	0.0061	0.0051
76	0.0006	-0.0003	0.0035	0.0046	0.0052	0.0037	0.0027	0.0009	0.0030
77	0.0012	-0.0016	0.0051	0.0078	0.0062	0.0031	0.0033	0.0036	0.0038
78	0.0008	-0.0004	0.0018	0.0040	0.0047	0.0029	0.0022	0.0020	0.0031
79	0.0016	0.0003	0.0036	0.0050	0.0039	0.0026	0.0024	0.0027	0.0026
80	0.0023	-0.0030	0.0083	0.0110	0.0118	0.0062	0.0050	0.0068	0.0065
81	0.0007	-0.0011	0.0019	0.0027	0.0030	0.0031	0.0023	-0.0032	0.0025
82	0.0009	-0.0010	0.0040	0.0051	0.0042	0.0028	0.0026	0.0013	0.0021
83	0.0032	0.0014	0.0058	0.0077	0.0051	0.0032	0.0031	0.0065	0.0039
84	0.0015	0.0017	0.0030	0.0047	0.0042	0.0025	0.0026	0.0067	0.0029
85	0.0029	0.0020	0.0033	0.0060	0.0019	0.0007	0.0015	0.0070	0.0010
86	0.0014	0.0010	0.0012	0.0040	0.0036	0.0027	0.0022	0.0030	0.0026
87									
88	Colunas 19 a 27								
89									
90	0.0006	0.0028	-0.0009	0.0031	0.0036	0.0028	0.0003	0.0017	0.0022
91	0.0025	0.0033	0.0021	0.0041	0.0037	0.0040	0.0020	0.0032	0.0026
92	0.0029	0.0057	0.0060	0.0063	0.0052	0.0069	0.0030	0.0043	0.0022
93	0.0012	0.0042	-0.0021	0.0039	0.0054	0.0030	0.0006	0.0020	0.0031
94	0.0022	0.0047	0.0009	0.0061	0.0052	0.0055	0.0009	0.0034	0.0032
95	0.0012	0.0001	0.0045	-0.0005	-0.0007	0.0012	0.0023	0.0016	0.0000
96	0.0039	0.0034	0.0071	0.0064	0.0051	0.0034	0.0030	0.0028	0.0022
97	0.0026	0.0030	0.0035	0.0021	0.0032	0.0024	0.0023	0.0022	0.0011
98	0.0015	0.0020	0.0038	0.0024	0.0022	0.0020	0.0019	0.0021	0.0013
99	0.0033	0.0010	0.0065	0.0041	0.0020	0.0028	0.0021	0.0040	0.0025
100	0.0025	0.0001	0.0032	0.0012	-0.0004	0.0002	0.0018	0.0015	0.0002
101	0.0010	0.0030	0.0048	0.0044	0.0014	0.0063	0.0028	0.0048	0.0032
102	0.0043	0.0057	0.0101	0.0100	0.0058	0.0100	0.0052	0.0075	0.0053

103	0.0027	0.0052	0.0026	0.0068	0.0050	0.0066	0.0030	0.0045	0.0040
104	0.0027	0.0035	0.0012	0.0040	0.0036	0.0036	0.0015	0.0031	0.0028
105	0.0017	0.0028	0.0021	0.0044	0.0025	0.0044	0.0020	0.0028	0.0022
106	0.0044	0.0032	0.0111	0.0084	0.0029	0.0074	0.0056	0.0063	0.0039
107	0.0034	0.0031	0.0029	0.0050	0.0038	0.0035	0.0026	0.0040	0.0036
108	0.0053	0.0027	0.0057	0.0038	0.0032	0.0021	0.0031	0.0034	0.0027
109	0.0027	0.0058	0.0014	0.0042	0.0053	0.0046	0.0017	0.0029	0.0028
110	0.0057	0.0014	0.0196	0.0077	0.0006	0.0066	0.0093	0.0069	0.0027
111	0.0038	0.0042	0.0077	0.0101	0.0050	0.0090	0.0046	0.0064	0.0045
112	0.0032	0.0053	0.0006	0.0050	0.0079	0.0039	0.0011	0.0025	0.0030
113	0.0021	0.0046	0.0066	0.0090	0.0039	0.0112	0.0045	0.0063	0.0043
114	0.0031	0.0017	0.0093	0.0046	0.0011	0.0045	0.0070	0.0045	0.0020
115	0.0034	0.0029	0.0069	0.0064	0.0025	0.0063	0.0045	0.0070	0.0044
116	0.0027	0.0028	0.0027	0.0045	0.0030	0.0043	0.0020	0.0044	0.0045
117	0.0029	0.0039	0.0035	0.0043	0.0030	0.0029	0.0018	0.0030	0.0027
118	0.0042	0.0067	0.0064	0.0073	0.0061	0.0073	0.0036	0.0050	0.0046
119	0.0023	0.0047	0.0000	0.0035	0.0044	0.0044	0.0012	0.0029	0.0033
120	-0.0009	0.0051	-0.0020	0.0061	0.0055	0.0075	-0.0015	0.0027	0.0032
121	0.0015	0.0035	-0.0018	0.0040	0.0044	0.0036	-0.0007	0.0017	0.0028
122	0.0024	0.0033	0.0036	0.0039	0.0025	0.0046	0.0031	0.0044	0.0034
123	0.0007	0.0064	0.0014	0.0111	0.0081	0.0117	0.0031	0.0066	0.0065
124	0.0015	0.0030	-0.0024	0.0019	0.0032	0.0020	-0.0003	0.0023	0.0026
125	0.0004	0.0035	-0.0005	0.0039	0.0021	0.0048	-0.0005	0.0031	0.0030
126	0.0032	0.0039	0.0063	0.0069	0.0035	0.0084	0.0045	0.0064	0.0044
127	0.0024	0.0030	0.0037	0.0056	0.0027	0.0057	0.0035	0.0047	0.0029
128	0.0042	0.0012	0.0144	0.0048	-0.0004	0.0044	0.0086	0.0045	0.0010
129	0.0027	0.0030	0.0018	0.0036	0.0029	0.0029	0.0020	0.0028	0.0022
130									
131	Colunas 28 a 36								
132									
133	0.0016	0.0028	0.0027	0.0050	0.0033	0.0014	0.0061	0.0013	0.0026
134	0.0026	0.0044	0.0036	0.0029	0.0028	0.0028	0.0045	0.0019	0.0018
135	0.0035	0.0088	0.0032	0.0086	0.0033	0.0026	0.0081	0.0015	0.0036
136	0.0033	0.0061	0.0043	0.0060	0.0044	0.0025	0.0093	0.0041	0.0034
137	0.0041	0.0066	0.0044	0.0057	0.0042	0.0030	0.0091	0.0044	0.0048
138	-0.0005	0.0021	0.0007	-0.0003	-0.0012	0.0011	-0.0026	-0.0003	-0.0011
139	0.0052	0.0070	0.0022	0.0030	0.0031	0.0019	0.0032	-0.0001	0.0008
140	0.0016	0.0040	0.0028	0.0013	0.0010	0.0025	0.0005	0.0013	0.0002
141	0.0022	0.0039	0.0011	0.0032	0.0010	0.0012	0.0027	-0.0000	0.0005
142	0.0016	0.0030	0.0006	0.0012	0.0008	0.0016	0.0023	0.0007	0.0009
143	0.0009	-0.0004	-0.0003	-0.0016	-0.0004	0.0003	-0.0030	-0.0011	-0.0010
144	0.0010	0.0040	0.0035	0.0051	0.0018	0.0036	0.0083	0.0019	0.0040
145	0.0052	0.0103	0.0046	0.0078	0.0040	0.0050	0.0110	0.0027	0.0051
146	0.0040	0.0072	0.0052	0.0062	0.0047	0.0039	0.0118	0.0030	0.0042
147	0.0026	0.0040	0.0037	0.0031	0.0029	0.0026	0.0062	0.0031	0.0028
148	0.0029	0.0043	0.0027	0.0033	0.0022	0.0024	0.0050	0.0023	0.0026
149	0.0038	0.0061	0.0009	0.0036	0.0020	0.0027	0.0068	-0.0032	0.0013
150	0.0033	0.0051	0.0030	0.0038	0.0031	0.0026	0.0065	0.0025	0.0021
151	0.0029	0.0042	0.0023	-0.0009	0.0015	0.0024	0.0007	0.0015	0.0004

152	0.0039	0.0067	0.0047	0.0051	0.0035	0.0033	0.0064	0.0030	0.0035
153	0.0035	0.0064	0.0000	-0.0020	-0.0018	0.0036	0.0014	-0.0024	-0.0005
154	0.0043	0.0073	0.0035	0.0061	0.0040	0.0039	0.0111	0.0019	0.0039
155	0.0030	0.0061	0.0044	0.0055	0.0044	0.0025	0.0081	0.0032	0.0021
156	0.0029	0.0073	0.0044	0.0075	0.0036	0.0046	0.0117	0.0020	0.0048
157	0.0018	0.0036	0.0012	-0.0015	-0.0007	0.0031	0.0031	-0.0003	-0.0005
158	0.0030	0.0050	0.0029	0.0027	0.0017	0.0044	0.0066	0.0023	0.0031
159	0.0027	0.0046	0.0033	0.0032	0.0028	0.0034	0.0065	0.0026	0.0030
160	0.0065	0.0065	0.0028	0.0023	0.0023	0.0026	0.0024	0.0020	0.0031
161	0.0065	0.0129	0.0054	0.0083	0.0048	0.0045	0.0080	0.0031	0.0048
162	0.0028	0.0054	0.0061	0.0038	0.0037	0.0039	0.0059	0.0039	0.0036
163	0.0023	0.0083	0.0038	0.0187	0.0069	0.0013	0.0154	0.0036	0.0068
164	0.0023	0.0048	0.0037	0.0069	0.0054	0.0014	0.0083	0.0025	0.0034
165	0.0026	0.0045	0.0039	0.0013	0.0014	0.0043	0.0039	0.0024	0.0025
166	0.0024	0.0080	0.0059	0.0154	0.0083	0.0039	0.0323	0.0055	0.0073
167	0.0020	0.0031	0.0039	0.0036	0.0025	0.0024	0.0055	0.0060	0.0037
168	0.0031	0.0048	0.0036	0.0068	0.0034	0.0025	0.0073	0.0037	0.0063
169	0.0017	0.0060	0.0040	0.0058	0.0030	0.0044	0.0084	0.0021	0.0037
170	0.0022	0.0040	0.0027	0.0025	0.0021	0.0036	0.0051	0.0004	0.0017
171	0.0013	0.0037	-0.0001	-0.0044	-0.0025	0.0029	0.0008	-0.0018	-0.0012
172	0.0030	0.0034	0.0025	0.0014	0.0019	0.0022	0.0043	0.0022	0.0018
173									
174	Columnas 37 a 40								
175									
176	0.0025	0.0020	-0.0011	0.0015					
177	0.0035	0.0032	0.0006	0.0022					
178	0.0058	0.0040	0.0039	0.0028					
179	0.0022	0.0014	-0.0014	0.0027					
180	0.0039	0.0030	0.0000	0.0028					
181	0.0023	-0.0004	0.0036	0.0001					
182	0.0026	0.0034	0.0036	0.0022					
183	0.0027	0.0026	0.0025	0.0015					
184	0.0018	0.0018	0.0014	0.0011					
185	0.0032	0.0015	0.0029	0.0014					
186	0.0014	0.0017	0.0020	0.0010					
187	0.0058	0.0030	0.0033	0.0012					
188	0.0077	0.0047	0.0060	0.0040					
189	0.0051	0.0042	0.0019	0.0036					
190	0.0032	0.0025	0.0007	0.0027					
191	0.0031	0.0026	0.0015	0.0022					
192	0.0065	0.0067	0.0070	0.0030					
193	0.0039	0.0029	0.0010	0.0026					
194	0.0032	0.0024	0.0042	0.0027					
195	0.0039	0.0030	0.0012	0.0030					
196	0.0063	0.0037	0.0144	0.0018					
197	0.0069	0.0056	0.0048	0.0036					
198	0.0035	0.0027	-0.0004	0.0029					
199	0.0084	0.0057	0.0044	0.0029					
200	0.0045	0.0035	0.0086	0.0020					

201	0.0064	0.0047	0.0045	0.0028
202	0.0044	0.0029	0.0010	0.0022
203	0.0017	0.0022	0.0013	0.0030
204	0.0060	0.0040	0.0037	0.0034
205	0.0040	0.0027	-0.0001	0.0025
206	0.0058	0.0025	-0.0044	0.0014
207	0.0030	0.0021	-0.0025	0.0019
208	0.0044	0.0036	0.0029	0.0022
209	0.0084	0.0051	0.0008	0.0043
210	0.0021	0.0004	-0.0018	0.0022
211	0.0037	0.0017	-0.0012	0.0018
212	0.0085	0.0054	0.0046	0.0023
213	0.0054	0.0063	0.0029	0.0023
214	0.0046	0.0029	0.0144	0.0018
215	0.0023	0.0023	0.0018	0.0031]

1	Matriz de Correlacao do Portfolio = [
2	Coluna 1 a 9								
3									
4	1.0000	0.5705	0.3826	0.6429	0.4833	-0.2240	0.3787	0.2238	0.3452
5	0.5705	1.0000	0.5046	0.5385	0.6056	0.0840	0.5633	0.6885	0.5311
6	0.3826	0.5046	1.0000	0.3190	0.5610	0.2204	0.4543	0.5784	0.6966
7	0.6429	0.5385	0.3190	1.0000	0.6665	-0.0262	0.3333	0.2178	0.2021
8	0.4833	0.6056	0.5610	0.6665	1.0000	-0.2780	0.4815	0.3584	0.2655
9	-0.2240	0.0840	0.2204	-0.0262	-0.2780	1.0000	-0.1233	0.3221	0.1613
10	0.3787	0.5633	0.4543	0.3333	0.4815	-0.1233	1.0000	0.4959	0.5532
11	0.2238	0.6885	0.5784	0.2178	0.3584	0.3221	0.4959	1.0000	0.5975
12	0.3452	0.5311	0.6966	0.2021	0.2655	0.1613	0.5532	0.5975	1.0000
13	0.0551	0.4184	0.4255	-0.0051	0.2611	0.2203	0.4519	0.3052	0.4560
14	-0.0975	0.2001	0.1492	-0.2849	-0.2040	0.2593	0.1658	0.1648	0.1851
15	0.3489	0.4322	0.5388	0.1207	0.4062	0.1547	0.0569	0.3039	0.3806
16	0.5005	0.6947	0.7267	0.4247	0.6197	0.1618	0.5794	0.4985	0.6126
17	0.6390	0.7618	0.6141	0.7356	0.7526	-0.0099	0.4218	0.3752	0.4484
18	0.5851	0.7444	0.5728	0.6094	0.7842	-0.0695	0.3613	0.4833	0.4205
19	0.4614	0.6593	0.5601	0.5912	0.8297	-0.0891	0.4458	0.4034	0.3519
20	0.2776	0.3482	0.5856	-0.0707	0.1698	0.0308	0.4891	0.2130	0.5864
21	0.4747	0.7069	0.4678	0.6273	0.6179	0.0329	0.5267	0.3381	0.5172
22	0.1367	0.5537	0.3954	0.1922	0.3547	0.1896	0.5352	0.5501	0.3647
23	0.5873	0.7017	0.7382	0.6312	0.7283	0.0153	0.4451	0.6040	0.4708
24	-0.1066	0.2445	0.4179	-0.1733	0.0759	0.3796	0.5071	0.3855	0.4781
25	0.4962	0.6688	0.6187	0.4395	0.7166	-0.0626	0.6399	0.3323	0.4282
26	0.6531	0.6842	0.5730	0.6951	0.6977	-0.0913	0.5807	0.5655	0.4419
27	0.4312	0.6264	0.6376	0.3178	0.6134	0.1331	0.3221	0.3559	0.3416
28	0.0538	0.3893	0.3500	0.0878	0.1338	0.3225	0.3667	0.4275	0.4085
29	0.3344	0.6244	0.5059	0.2726	0.4835	0.2268	0.3355	0.4016	0.4551
30	0.5220	0.6397	0.3185	0.5155	0.5698	0.0062	0.3313	0.2447	0.3367
31	0.3232	0.5307	0.4297	0.4675	0.5986	-0.0733	0.6476	0.3130	0.4900
32	0.4012	0.6400	0.7636	0.6105	0.6866	0.2210	0.6178	0.5499	0.6174

33	0.5595	0.7526	0.4071	0.6231	0.6697	0.1020	0.2813	0.5620	0.2593
34	0.5999	0.3446	0.6200	0.4976	0.4944	-0.0295	0.2210	0.1426	0.4177
35	0.7378	0.6366	0.4457	0.6825	0.6829	-0.1949	0.4272	0.2111	0.2431
36	0.3514	0.7084	0.3928	0.4291	0.5410	0.2042	0.2826	0.5817	0.3347
37	0.5561	0.4098	0.4426	0.5880	0.5990	-0.1712	0.1796	0.0453	0.2694
38	0.2768	0.4048	0.1897	0.6002	0.6688	-0.0529	-0.0102	0.2708	-0.0001
39	0.5399	0.3696	0.4469	0.4776	0.7103	-0.1586	0.1046	0.0483	0.1117
40	0.4350	0.6278	0.6169	0.2759	0.4931	0.2917	0.2817	0.4635	0.3454
41	0.4097	0.6560	0.4917	0.2065	0.4478	-0.0556	0.4280	0.5046	0.3984
42	-0.1529	0.0773	0.3211	-0.1313	0.0036	0.3524	0.3031	0.3302	0.2068
43	0.4524	0.6617	0.4983	0.5558	0.5880	0.0144	0.4057	0.4119	0.3401
44									
45	Colunas 10 a 18								
46									
47	0.0551	-0.0975	0.3489	0.5005	0.6390	0.5851	0.4614	0.2776	0.4747
48	0.4184	0.2001	0.4322	0.6947	0.7618	0.7444	0.6593	0.3482	0.7069
49	0.4255	0.1492	0.5388	0.7267	0.6141	0.5728	0.5601	0.5856	0.4678
50	-0.0051	-0.2849	0.1207	0.4247	0.7356	0.6094	0.5912	-0.0707	0.6273
51	0.2611	-0.2040	0.4062	0.6197	0.7526	0.7842	0.8297	0.1698	0.6179
52	0.2203	0.2593	0.1547	0.1618	-0.0099	-0.0695	-0.0891	0.0308	0.0329
53	0.4519	0.1658	0.0569	0.5794	0.4218	0.3613	0.4458	0.4891	0.5267
54	0.3052	0.1648	0.3039	0.4985	0.3752	0.4833	0.4034	0.2130	0.3381
55	0.4560	0.1851	0.3806	0.6126	0.4484	0.4205	0.3519	0.5864	0.5172
56	1.0000	0.3443	0.4019	0.6680	0.2404	0.3753	0.2222	0.5390	0.5176
57	0.3443	1.0000	-0.0003	-0.0048	0.0595	0.1399	0.0348	0.4513	0.3458
58	0.4019	-0.0003	1.0000	0.6469	0.5590	0.5111	0.4453	0.3924	0.3425
59	0.6680	-0.0048	0.6469	1.0000	0.6910	0.6442	0.7059	0.5666	0.5734
60	0.2404	0.0595	0.5590	0.6910	1.0000	0.8491	0.8016	0.4188	0.7676
61	0.3753	0.1399	0.5111	0.6442	0.8491	1.0000	0.7833	0.3560	0.7638
62	0.2222	0.0348	0.4453	0.7059	0.8016	0.7833	1.0000	0.3168	0.6582
63	0.5390	0.4513	0.3924	0.5666	0.4188	0.3560	0.3168	1.0000	0.4561
64	0.5176	0.3458	0.3425	0.5734	0.7676	0.7638	0.6582	0.4561	1.0000
65	0.6538	0.5342	0.1708	0.4963	0.4182	0.6212	0.4231	0.4661	0.6589
66	0.1979	0.0281	0.4765	0.6317	0.7692	0.7737	0.6815	0.3212	0.5748
67	0.6691	0.3570	0.4150	0.6168	0.2099	0.1512	0.2726	0.6126	0.2981
68	0.5850	0.1795	0.5280	0.8446	0.7631	0.6788	0.8128	0.6430	0.7079
69	0.3180	-0.0688	0.1856	0.5522	0.6289	0.6986	0.5260	0.2536	0.6180
70	0.3840	0.0286	0.7134	0.8085	0.7068	0.5853	0.7735	0.5448	0.4763
71	0.3637	0.3288	0.4097	0.5317	0.4121	0.3066	0.4456	0.5212	0.4470
72	0.6899	0.2824	0.6933	0.7626	0.6025	0.6389	0.6058	0.5785	0.6765
73	0.5447	0.0407	0.5671	0.6720	0.6749	0.7149	0.6010	0.4444	0.7633
74	0.2907	0.1682	0.1566	0.5549	0.5646	0.5565	0.6546	0.3651	0.5912
75	0.3865	-0.0491	0.4190	0.7743	0.7172	0.6056	0.6988	0.4192	0.6498
76	0.1121	-0.0679	0.5333	0.5056	0.7474	0.7980	0.6294	0.0897	0.5513
77	0.1275	-0.1796	0.4486	0.4853	0.5073	0.3892	0.4497	0.2031	0.3972
78	0.1494	-0.0852	0.2916	0.4630	0.7307	0.6814	0.5412	0.2150	0.6091
79	0.3485	0.0717	0.6557	0.6502	0.6651	0.6625	0.6693	0.3144	0.5569
80	0.1814	-0.2617	0.5537	0.5212	0.7406	0.5885	0.5129	0.2919	0.5160
81	0.1338	-0.2269	0.3007	0.2959	0.4349	0.6746	0.5378	-0.3150	0.4562

131	Colunas 28 a 36								
132									
133	0.3232	0.4012	0.5595	0.5999	0.7378	0.3514	0.5561	0.2768	0.5399
134	0.5307	0.6400	0.7526	0.3446	0.6366	0.7084	0.4098	0.4048	0.3696
135	0.4297	0.7636	0.4071	0.6200	0.4457	0.3928	0.4426	0.1897	0.4469
136	0.4675	0.6105	0.6231	0.4976	0.6825	0.4291	0.5880	0.6002	0.4776
137	0.5986	0.6866	0.6697	0.4944	0.6829	0.5410	0.5990	0.6688	0.7103
138	-0.0733	0.2210	0.1020	-0.0295	-0.1949	0.2042	-0.1712	-0.0529	-0.1586
139	0.6476	0.6178	0.2813	0.2210	0.4272	0.2826	0.1796	-0.0102	0.1046
140	0.3130	0.5499	0.5620	0.1426	0.2111	0.5817	0.0453	0.2708	0.0483
141	0.4900	0.6174	0.2593	0.4177	0.2431	0.3347	0.2694	-0.0001	0.1117
142	0.2907	0.3865	0.1121	0.1275	0.1494	0.3485	0.1814	0.1338	0.1597
143	0.1682	-0.0491	-0.0679	-0.1796	-0.0852	0.0717	-0.2617	-0.2269	-0.1998
144	0.1566	0.4190	0.5333	0.4486	0.2916	0.6557	0.5537	0.3007	0.6051
145	0.5549	0.7743	0.5056	0.4853	0.4630	0.6502	0.5212	0.2959	0.5444
146	0.5646	0.7172	0.7474	0.5073	0.7307	0.6651	0.7406	0.4349	0.5950
147	0.5565	0.6056	0.7980	0.3892	0.6814	0.6625	0.5885	0.6746	0.5896
148	0.6546	0.6988	0.6294	0.4497	0.5412	0.6693	0.5129	0.5378	0.6091
149	0.3651	0.4192	0.0897	0.2031	0.2150	0.3144	0.2919	-0.3150	0.1308
150	0.5912	0.6498	0.5513	0.3972	0.6091	0.5569	0.5160	0.4562	0.3771
151	0.4926	0.5020	0.3971	-0.0928	0.2881	0.4922	0.0540	0.2703	0.0677
152	0.6289	0.7755	0.7859	0.4836	0.6216	0.6566	0.4669	0.5123	0.5783
153	0.3081	0.4010	0.0031	-0.1046	-0.1757	0.3881	0.0544	-0.2237	-0.0474
154	0.5310	0.6418	0.4397	0.4412	0.5416	0.5912	0.6114	0.2394	0.4873
155	0.4195	0.6038	0.6324	0.4520	0.6705	0.4205	0.5073	0.4614	0.3026
156	0.3454	0.6068	0.5282	0.5195	0.4684	0.6611	0.6187	0.2482	0.5723
157	0.2714	0.3818	0.1883	-0.1313	-0.1165	0.5666	0.2084	-0.0500	-0.0781
158	0.4449	0.5282	0.4418	0.2381	0.2687	0.7884	0.4352	0.3553	0.4668
159	0.5026	0.5995	0.6287	0.3505	0.5709	0.7630	0.5400	0.4901	0.5630
160	1.0000	0.7124	0.4481	0.2063	0.3821	0.4948	0.1677	0.3223	0.4764
161	0.7124	1.0000	0.6094	0.5374	0.5826	0.6032	0.3926	0.3531	0.5265
162	0.4481	0.6094	1.0000	0.3590	0.6537	0.7555	0.4227	0.6451	0.5850
163	0.2063	0.5374	0.3590	1.0000	0.6852	0.1492	0.6285	0.3368	0.6283
164	0.3821	0.5826	0.6537	0.6852	1.0000	0.2831	0.6347	0.4430	0.5881
165	0.4948	0.6032	0.7555	0.1492	0.2831	1.0000	0.3298	0.4706	0.4858
166	0.1677	0.3926	0.4227	0.6285	0.6347	0.3298	1.0000	0.3968	0.5091
167	0.3223	0.3531	0.6451	0.3368	0.4430	0.4706	0.3968	1.0000	0.5909
168	0.4764	0.5265	0.5850	0.6283	0.5881	0.4858	0.5091	0.5909	1.0000
169	0.2246	0.5763	0.5483	0.4567	0.4463	0.7224	0.5057	0.2908	0.4982
170	0.3502	0.4410	0.4314	0.2302	0.3615	0.6877	0.3537	0.0726	0.2752
171	0.1316	0.2699	-0.0068	-0.2699	-0.2794	0.3681	0.0363	-0.1986	-0.1252
172	0.6702	0.5464	0.5738	0.1827	0.4741	0.5927	0.4293	0.5178	0.4073
173									
174	Colunas 37 a 40								
175									
176	0.4350	0.4097	-0.1529	0.4524					
177	0.6278	0.6560	0.0773	0.6617					
178	0.6169	0.4917	0.3211	0.4983					
179	0.2759	0.2065	-0.1313	0.5558					

180	0.4931	0.4478	0.0036	0.5880
181	0.2917	-0.0556	0.3524	0.0144
182	0.2817	0.4280	0.3031	0.4057
183	0.4635	0.5046	0.3302	0.4119
184	0.3454	0.3984	0.2068	0.3401
185	0.5021	0.2676	0.3533	0.3580
186	0.2393	0.3243	0.2598	0.2857
187	0.7503	0.4556	0.3267	0.2559
188	0.7131	0.5086	0.4281	0.6113
189	0.6272	0.5954	0.1799	0.7246
190	0.5873	0.5382	0.1045	0.8401
191	0.6102	0.6036	0.2298	0.7145
192	0.5469	0.6524	0.4530	0.4193
193	0.6008	0.5259	0.1256	0.6659
194	0.4800	0.4105	0.4784	0.6772
195	0.5560	0.4959	0.1319	0.7153
196	0.4871	0.3315	0.8591	0.2371
197	0.7468	0.6982	0.3952	0.6372
198	0.4291	0.3891	-0.0357	0.5965
199	0.8569	0.6823	0.3457	0.5013
200	0.5803	0.5277	0.8571	0.4263
201	0.8225	0.7082	0.4457	0.6034
202	0.7054	0.5473	0.1246	0.5963
203	0.2246	0.3502	0.1316	0.6702
204	0.5763	0.4410	0.2699	0.5464
205	0.5483	0.4314	-0.0068	0.5738
206	0.4567	0.2302	-0.2699	0.1827
207	0.4463	0.3615	-0.2794	0.4741
208	0.7224	0.6877	0.3681	0.5927
209	0.5057	0.3537	0.0363	0.4293
210	0.2908	0.0726	-0.1986	0.5178
211	0.4982	0.2752	-0.1252	0.4073
212	1.0000	0.7290	0.4126	0.4521
213	0.7290	1.0000	0.3087	0.5170
214	0.4126	0.3087	1.0000	0.2668
215	0.4521	0.5170	0.2668	1.0000

APÊNDICE C – RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SELEÇÃO DE ATIVOS

Tabela 6 – Resultados do PCA aplicado a matriz de correlação do portfólio composto pelas 40 ações

Componentes Principais	Autovalores	Variância (%)	Variância Acumulada (%)
CP1	1.0297	51.3089	51.3089
CP2	0.4207	20.9601	72.2690
CP3	0.1644	8.1893	80.4583
CP4	0.1194	5.9496	86.4080
CP5	0.0765	3.8125	90.2205
CP6	0.0503	2.5053	92.7258
CP7	0.0419	2.0896	94.8154
CP8	0.0280	1.3929	96.2083
CP9	0.0194	0.9681	97.1764
CP10	0.0174	0.8690	98.0454
CP11	0.0126	0.6298	98.6752
CP12	0.0093	0.4656	99.1408
CP13	0.0052	0.2584	99.3992
CP14	0.0046	0.2304	99.6296
CP15	0.0031	0.1554	99.7850
CP16	0.0015	0.0752	99.8602
CP17	0.0011	0.0557	99.9159
CP18	0.0008	0.0382	99.9541
CP19	0.0004	0.0206	99.9747
CP20	0.0003	0.0132	99.9879
CP21	0.0002	0.0083	99.9962
CP22	0.0001	0.0038	100.0000
CP23	0.0000	0.0000	100.0000
CP24	0.0000	0.0000	100.0000
CP25	0.0000	0.0000	100.0000
CP26	0.0000	0.0000	100.0000
CP27	0.0000	0.0000	100.0000
CP28	0.0000	0.0000	100.0000
CP29	0.0000	0.0000	100.0000
CP30	0.0000	0.0000	100.0000
CP31	0.0000	0.0000	100.0000
CP32	0.0000	0.0000	100.0000
CP33	0.0000	0.0000	100.0000
CP34	0.0000	0.0000	100.0000
CP35	0.0000	0.0000	100.0000
CP36	0.0000	0.0000	100.0000
CP37	0.0000	0.0000	100.0000
CP38	0.0000	0.0000	100.0000
CP39	0.0000	0.0000	100.0000

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Lista das 9 ações retidas pela aplicação do método de seleção de ativos

Ativo	Nome do Ativo	Código	Setor de Atuação
3	Walt Disney Company	DIS	Serviços de Comunicação
5	Keysight Technologies Inc.	KEYS	Tecnologia
13	State Street Corporation	STT	Serviço Financeiro
16	Nordson Corporation	NDSN	Industrial
24	Franklin Resources Inc.	BEN	Serviço Financeiro
25	Williams Companies Inc.	WMB	Energia
26	Hewlett Packard Enterprise Co.	HPE	Tecnologia
32	Zoetis Inc. Class A	ZTS	Assistência médica
38	Weyerhaeuser Company	WY	Imobiliário

Fonte: elaborada pelo autor.

1	C_port. = [
2	Colunas 1 a 9								
3									
4	0.0104	0.0048	0.0087	0.0031	0.0069	0.0030	0.0043	0.0033	0.0040
5	0.0048	0.0071	0.0061	0.0038	0.0055	0.0009	0.0034	0.0042	0.0030
6	0.0087	0.0061	0.0138	0.0045	0.0100	0.0052	0.0075	0.0040	0.0047
7	0.0031	0.0038	0.0045	0.0030	0.0044	0.0020	0.0028	0.0022	0.0026
8	0.0069	0.0055	0.0100	0.0044	0.0112	0.0045	0.0063	0.0036	0.0057
9	0.0030	0.0009	0.0052	0.0020	0.0045	0.0070	0.0045	-0.0007	0.0035
10	0.0043	0.0034	0.0075	0.0028	0.0063	0.0045	0.0070	0.0017	0.0047
11	0.0033	0.0042	0.0040	0.0022	0.0036	-0.0007	0.0017	0.0054	0.0021
12	0.0040	0.0030	0.0047	0.0026	0.0057	0.0035	0.0047	0.0021	0.0063
13	0.0024	0.0025	0.0036	0.0015	0.0028	0.0003	0.0017	0.0033	0.0020
14	0.0031	0.0031	0.0050	0.0022	0.0040	0.0020	0.0032	0.0028	0.0032
15	0.0029	0.0050	0.0044	0.0028	0.0030	0.0006	0.0020	0.0044	0.0014
16	0.0019	-0.0020	0.0016	-0.0004	0.0012	0.0023	0.0016	-0.0012	-0.0004
17	0.0046	0.0041	0.0068	0.0024	0.0034	0.0030	0.0028	0.0031	0.0034
18	0.0038	0.0019	0.0038	0.0014	0.0024	0.0023	0.0022	0.0010	0.0026
19	0.0040	0.0013	0.0040	0.0011	0.0020	0.0019	0.0021	0.0010	0.0018
20	0.0030	0.0015	0.0054	0.0008	0.0028	0.0021	0.0040	0.0008	0.0015
21	0.0010	-0.0011	-0.0000	0.0001	0.0002	0.0018	0.0015	-0.0004	0.0017
22	0.0046	0.0029	0.0063	0.0020	0.0063	0.0028	0.0048	0.0018	0.0030
23	0.0055	0.0056	0.0072	0.0039	0.0066	0.0030	0.0045	0.0047	0.0042
24	0.0034	0.0039	0.0044	0.0025	0.0036	0.0015	0.0031	0.0029	0.0025
25	0.0077	0.0019	0.0086	0.0022	0.0074	0.0056	0.0063	0.0020	0.0067
26	0.0033	0.0036	0.0047	0.0025	0.0035	0.0026	0.0040	0.0031	0.0029
27	0.0029	0.0022	0.0043	0.0017	0.0021	0.0031	0.0034	0.0015	0.0024
28	0.0057	0.0047	0.0057	0.0028	0.0046	0.0017	0.0029	0.0035	0.0030
29	0.0060	0.0009	0.0101	0.0021	0.0066	0.0093	0.0069	-0.0018	0.0037
30	0.0063	0.0061	0.0100	0.0044	0.0090	0.0046	0.0064	0.0040	0.0056
31	0.0052	0.0052	0.0058	0.0025	0.0039	0.0011	0.0025	0.0044	0.0027
32	0.0022	0.0032	0.0053	0.0022	0.0043	0.0020	0.0044	0.0028	0.0029
33	0.0035	0.0041	0.0052	0.0029	0.0029	0.0018	0.0030	0.0023	0.0022
34	0.0088	0.0066	0.0103	0.0043	0.0073	0.0036	0.0050	0.0048	0.0040
35	0.0032	0.0044	0.0046	0.0027	0.0044	0.0012	0.0029	0.0037	0.0027

36	0.0086	0.0057	0.0078	0.0033	0.0075	-0.0015	0.0027	0.0069	0.0025
37	0.0026	0.0030	0.0050	0.0024	0.0046	0.0031	0.0044	0.0014	0.0036
38	0.0081	0.0091	0.0110	0.0050	0.0117	0.0031	0.0066	0.0083	0.0051
39	0.0015	0.0044	0.0027	0.0023	0.0020	-0.0003	0.0023	0.0025	0.0004
40	0.0036	0.0048	0.0051	0.0026	0.0048	-0.0005	0.0031	0.0034	0.0017
41	0.0058	0.0039	0.0077	0.0031	0.0084	0.0045	0.0064	0.0030	0.0054
42	0.0039	0.0000	0.0060	0.0015	0.0044	0.0086	0.0045	-0.0025	0.0029
43	0.0028	0.0028	0.0040	0.0022	0.0029	0.0020	0.0028	0.0019	0.0023
44									
45	Colunas 10 a 18								
46									
47	0.0024	0.0031	0.0029	0.0019	0.0046	0.0038	0.0040	0.0030	0.0010
48	0.0025	0.0031	0.0050	-0.0020	0.0041	0.0019	0.0013	0.0015	-0.0011
49	0.0036	0.0050	0.0044	0.0016	0.0068	0.0038	0.0040	0.0054	-0.0000
50	0.0015	0.0022	0.0028	-0.0004	0.0024	0.0014	0.0011	0.0008	0.0001
51	0.0028	0.0040	0.0030	0.0012	0.0034	0.0024	0.0020	0.0028	0.0002
52	0.0003	0.0020	0.0006	0.0023	0.0030	0.0023	0.0019	0.0021	0.0018
53	0.0017	0.0032	0.0020	0.0016	0.0028	0.0022	0.0021	0.0040	0.0015
54	0.0033	0.0028	0.0044	-0.0012	0.0031	0.0010	0.0010	0.0008	-0.0004
55	0.0020	0.0032	0.0014	-0.0004	0.0034	0.0026	0.0018	0.0015	0.0017
56	0.0038	0.0021	0.0035	-0.0012	0.0023	0.0009	0.0012	0.0002	-0.0004
57	0.0021	0.0037	0.0029	0.0004	0.0034	0.0027	0.0018	0.0018	0.0008
58	0.0035	0.0029	0.0078	-0.0002	0.0029	0.0012	0.0010	-0.0000	-0.0016
59	-0.0012	0.0004	-0.0002	0.0071	-0.0010	0.0017	0.0008	0.0013	0.0014
60	0.0023	0.0034	0.0029	-0.0010	0.0099	0.0032	0.0031	0.0031	0.0011
61	0.0009	0.0027	0.0012	0.0017	0.0032	0.0041	0.0022	0.0014	0.0007
62	0.0012	0.0018	0.0010	0.0008	0.0031	0.0022	0.0032	0.0018	0.0007
63	0.0002	0.0018	-0.0000	0.0013	0.0031	0.0014	0.0018	0.0048	0.0015
64	-0.0004	0.0008	-0.0016	0.0014	0.0011	0.0007	0.0007	0.0015	0.0042
65	0.0018	0.0022	0.0009	0.0011	0.0005	0.0016	0.0018	0.0023	-0.0000
66	0.0035	0.0041	0.0057	-0.0001	0.0037	0.0021	0.0022	0.0015	0.0003
67	0.0021	0.0027	0.0032	-0.0003	0.0021	0.0018	0.0014	0.0015	0.0005
68	0.0022	0.0027	-0.0008	0.0003	0.0063	0.0018	0.0043	0.0048	0.0038
69	0.0020	0.0030	0.0039	0.0002	0.0037	0.0015	0.0020	0.0025	0.0016
70	0.0006	0.0025	0.0012	0.0012	0.0039	0.0026	0.0015	0.0033	0.0025
71	0.0028	0.0033	0.0042	0.0001	0.0034	0.0030	0.0020	0.0010	0.0001
72	-0.0009	0.0021	-0.0021	0.0045	0.0071	0.0035	0.0038	0.0065	0.0032
73	0.0031	0.0041	0.0039	-0.0005	0.0064	0.0021	0.0024	0.0041	0.0012
74	0.0036	0.0037	0.0054	-0.0007	0.0051	0.0032	0.0022	0.0020	-0.0004
75	0.0022	0.0026	0.0031	0.0000	0.0022	0.0011	0.0013	0.0025	0.0002
76	0.0016	0.0026	0.0033	-0.0005	0.0052	0.0016	0.0022	0.0016	0.0009
77	0.0028	0.0044	0.0061	0.0021	0.0070	0.0040	0.0039	0.0030	-0.0004
78	0.0027	0.0036	0.0043	0.0007	0.0022	0.0028	0.0011	0.0006	-0.0003
79	0.0050	0.0029	0.0060	-0.0003	0.0030	0.0013	0.0032	0.0012	-0.0016
80	0.0014	0.0028	0.0025	0.0011	0.0019	0.0025	0.0012	0.0016	0.0003
81	0.0061	0.0045	0.0093	-0.0026	0.0032	0.0005	0.0027	0.0023	-0.0030
82	0.0013	0.0019	0.0041	-0.0003	-0.0001	0.0013	-0.0000	0.0007	-0.0011
83	0.0026	0.0018	0.0034	-0.0011	0.0008	0.0002	0.0005	0.0009	-0.0010
84	0.0025	0.0035	0.0022	0.0023	0.0026	0.0027	0.0018	0.0032	0.0014

85	-0.0011	0.0006	-0.0014	0.0036	0.0036	0.0025	0.0014	0.0029	0.0020
86	0.0015	0.0022	0.0027	0.0001	0.0022	0.0015	0.0011	0.0014	0.0010
87									
88	Colunas 19 a 27								
89									
90	0.0046	0.0055	0.0034	0.0077	0.0033	0.0029	0.0057	0.0060	0.0063
91	0.0029	0.0056	0.0039	0.0019	0.0036	0.0022	0.0047	0.0009	0.0061
92	0.0063	0.0072	0.0044	0.0086	0.0047	0.0043	0.0057	0.0101	0.0100
93	0.0020	0.0039	0.0025	0.0022	0.0025	0.0017	0.0028	0.0021	0.0044
94	0.0063	0.0066	0.0036	0.0074	0.0035	0.0021	0.0046	0.0066	0.0090
95	0.0028	0.0030	0.0015	0.0056	0.0026	0.0031	0.0017	0.0093	0.0046
96	0.0048	0.0045	0.0031	0.0063	0.0040	0.0034	0.0029	0.0069	0.0064
97	0.0018	0.0047	0.0029	0.0020	0.0031	0.0015	0.0035	-0.0018	0.0040
98	0.0030	0.0042	0.0025	0.0067	0.0029	0.0024	0.0030	0.0037	0.0056
99	0.0018	0.0035	0.0021	0.0022	0.0020	0.0006	0.0028	-0.0009	0.0031
100	0.0022	0.0041	0.0027	0.0027	0.0030	0.0025	0.0033	0.0021	0.0041
101	0.0009	0.0057	0.0032	-0.0008	0.0039	0.0012	0.0042	-0.0021	0.0039
102	0.0011	-0.0001	-0.0003	0.0003	0.0002	0.0012	0.0001	0.0045	-0.0005
103	0.0005	0.0037	0.0021	0.0063	0.0037	0.0039	0.0034	0.0071	0.0064
104	0.0016	0.0021	0.0018	0.0018	0.0015	0.0026	0.0030	0.0035	0.0021
105	0.0018	0.0022	0.0014	0.0043	0.0020	0.0015	0.0020	0.0038	0.0024
106	0.0023	0.0015	0.0015	0.0048	0.0025	0.0033	0.0010	0.0065	0.0041
107	-0.0000	0.0003	0.0005	0.0038	0.0016	0.0025	0.0001	0.0032	0.0012
108	0.0069	0.0041	0.0025	0.0042	0.0020	0.0010	0.0030	0.0048	0.0044
109	0.0041	0.0079	0.0044	0.0048	0.0047	0.0027	0.0052	0.0026	0.0068
110	0.0025	0.0044	0.0034	0.0027	0.0031	0.0027	0.0035	0.0012	0.0040
111	0.0042	0.0048	0.0027	0.0167	0.0041	0.0044	0.0032	0.0111	0.0084
112	0.0020	0.0047	0.0031	0.0041	0.0049	0.0034	0.0031	0.0029	0.0050
113	0.0010	0.0027	0.0027	0.0044	0.0034	0.0053	0.0027	0.0057	0.0038
114	0.0030	0.0052	0.0035	0.0032	0.0031	0.0027	0.0058	0.0014	0.0042
115	0.0048	0.0026	0.0012	0.0111	0.0029	0.0057	0.0014	0.0196	0.0077
116	0.0044	0.0068	0.0040	0.0084	0.0050	0.0038	0.0042	0.0077	0.0101
117	0.0014	0.0050	0.0036	0.0029	0.0038	0.0032	0.0053	0.0006	0.0050
118	0.0032	0.0040	0.0028	0.0039	0.0036	0.0027	0.0028	0.0027	0.0045
119	0.0010	0.0040	0.0026	0.0038	0.0033	0.0029	0.0039	0.0035	0.0043
120	0.0040	0.0072	0.0040	0.0061	0.0051	0.0042	0.0067	0.0064	0.0073
121	0.0035	0.0052	0.0037	0.0009	0.0030	0.0023	0.0047	0.0000	0.0035
122	0.0051	0.0062	0.0031	0.0036	0.0038	-0.0009	0.0051	-0.0020	0.0061
123	0.0036	0.0039	0.0026	0.0027	0.0026	0.0024	0.0033	0.0036	0.0039
124	0.0083	0.0118	0.0062	0.0068	0.0065	0.0007	0.0064	0.0014	0.0111
125	0.0019	0.0030	0.0031	-0.0032	0.0025	0.0015	0.0030	-0.0024	0.0019
126	0.0040	0.0042	0.0028	0.0013	0.0021	0.0004	0.0035	-0.0005	0.0039
127	0.0058	0.0051	0.0032	0.0065	0.0039	0.0032	0.0039	0.0063	0.0069
128	0.0033	0.0019	0.0007	0.0070	0.0010	0.0042	0.0012	0.0144	0.0048
129	0.0012	0.0036	0.0027	0.0030	0.0026	0.0027	0.0030	0.0018	0.0036
130									
131	Colunas 28 a 36								
132									
133	0.0052	0.0022	0.0035	0.0088	0.0032	0.0086	0.0026	0.0081	0.0015

134	0.0052	0.0032	0.0041	0.0066	0.0044	0.0057	0.0030	0.0091	0.0044
135	0.0058	0.0053	0.0052	0.0103	0.0046	0.0078	0.0050	0.0110	0.0027
136	0.0025	0.0022	0.0029	0.0043	0.0027	0.0033	0.0024	0.0050	0.0023
137	0.0039	0.0043	0.0029	0.0073	0.0044	0.0075	0.0046	0.0117	0.0020
138	0.0011	0.0020	0.0018	0.0036	0.0012	-0.0015	0.0031	0.0031	-0.0003
139	0.0025	0.0044	0.0030	0.0050	0.0029	0.0027	0.0044	0.0066	0.0023
140	0.0044	0.0028	0.0023	0.0048	0.0037	0.0069	0.0014	0.0083	0.0025
141	0.0027	0.0029	0.0022	0.0040	0.0027	0.0025	0.0036	0.0051	0.0004
142	0.0036	0.0022	0.0016	0.0028	0.0027	0.0050	0.0014	0.0061	0.0013
143	0.0037	0.0026	0.0026	0.0044	0.0036	0.0029	0.0028	0.0045	0.0019
144	0.0054	0.0031	0.0033	0.0061	0.0043	0.0060	0.0025	0.0093	0.0041
145	-0.0007	0.0000	-0.0005	0.0021	0.0007	-0.0003	0.0011	-0.0026	-0.0003
146	0.0051	0.0022	0.0052	0.0070	0.0022	0.0030	0.0019	0.0032	-0.0001
147	0.0032	0.0011	0.0016	0.0040	0.0028	0.0013	0.0025	0.0005	0.0013
148	0.0022	0.0013	0.0022	0.0039	0.0011	0.0032	0.0012	0.0027	-0.0000
149	0.0020	0.0025	0.0016	0.0030	0.0006	0.0012	0.0016	0.0023	0.0007
150	-0.0004	0.0002	0.0009	-0.0004	-0.0003	-0.0016	0.0003	-0.0030	-0.0011
151	0.0014	0.0032	0.0010	0.0040	0.0035	0.0051	0.0036	0.0083	0.0019
152	0.0050	0.0040	0.0040	0.0072	0.0052	0.0062	0.0039	0.0118	0.0030
153	0.0036	0.0028	0.0026	0.0040	0.0037	0.0031	0.0026	0.0062	0.0031
154	0.0029	0.0039	0.0038	0.0061	0.0009	0.0036	0.0027	0.0068	-0.0032
155	0.0038	0.0036	0.0033	0.0051	0.0030	0.0038	0.0026	0.0065	0.0025
156	0.0032	0.0027	0.0029	0.0042	0.0023	-0.0009	0.0024	0.0007	0.0015
157	0.0053	0.0028	0.0039	0.0067	0.0047	0.0051	0.0033	0.0064	0.0030
158	0.0006	0.0027	0.0035	0.0064	0.0000	-0.0020	0.0036	0.0014	-0.0024
159	0.0050	0.0045	0.0043	0.0073	0.0035	0.0061	0.0039	0.0111	0.0019
160	0.0079	0.0030	0.0030	0.0061	0.0044	0.0055	0.0025	0.0081	0.0032
161	0.0030	0.0045	0.0027	0.0046	0.0033	0.0032	0.0034	0.0065	0.0026
162	0.0030	0.0027	0.0065	0.0065	0.0028	0.0023	0.0026	0.0024	0.0020
163	0.0061	0.0046	0.0065	0.0129	0.0054	0.0083	0.0045	0.0080	0.0031
164	0.0044	0.0033	0.0028	0.0054	0.0061	0.0038	0.0039	0.0059	0.0039
165	0.0055	0.0032	0.0023	0.0083	0.0038	0.0187	0.0013	0.0154	0.0036
166	0.0025	0.0034	0.0026	0.0045	0.0039	0.0013	0.0043	0.0039	0.0024
167	0.0081	0.0065	0.0024	0.0080	0.0059	0.0154	0.0039	0.0323	0.0055
168	0.0032	0.0026	0.0020	0.0031	0.0039	0.0036	0.0024	0.0055	0.0060
169	0.0021	0.0030	0.0031	0.0048	0.0036	0.0068	0.0025	0.0073	0.0037
170	0.0035	0.0044	0.0017	0.0060	0.0040	0.0058	0.0044	0.0084	0.0021
171	-0.0004	0.0010	0.0013	0.0037	-0.0001	-0.0044	0.0029	0.0008	-0.0018
172	0.0029	0.0022	0.0030	0.0034	0.0025	0.0014	0.0022	0.0043	0.0022
173									
174	Colunas 37 a 40								
175									
176	0.0036	0.0058	0.0039	0.0028					
177	0.0048	0.0039	0.0000	0.0028					
178	0.0051	0.0077	0.0060	0.0040					
179	0.0026	0.0031	0.0015	0.0022					
180	0.0048	0.0084	0.0044	0.0029					
181	-0.0005	0.0045	0.0086	0.0020					
182	0.0031	0.0064	0.0045	0.0028					

183	0.0034	0.0030	-0.0025	0.0019
184	0.0017	0.0054	0.0029	0.0023
185	0.0026	0.0025	-0.0011	0.0015
186	0.0018	0.0035	0.0006	0.0022
187	0.0034	0.0022	-0.0014	0.0027
188	-0.0011	0.0023	0.0036	0.0001
189	0.0008	0.0026	0.0036	0.0022
190	0.0002	0.0027	0.0025	0.0015
191	0.0005	0.0018	0.0014	0.0011
192	0.0009	0.0032	0.0029	0.0014
193	-0.0010	0.0014	0.0020	0.0010
194	0.0040	0.0058	0.0033	0.0012
195	0.0042	0.0051	0.0019	0.0036
196	0.0028	0.0032	0.0007	0.0027
197	0.0013	0.0065	0.0070	0.0030
198	0.0021	0.0039	0.0010	0.0026
199	0.0004	0.0032	0.0042	0.0027
200	0.0035	0.0039	0.0012	0.0030
201	-0.0005	0.0063	0.0144	0.0018
202	0.0039	0.0069	0.0048	0.0036
203	0.0021	0.0035	-0.0004	0.0029
204	0.0030	0.0044	0.0010	0.0022
205	0.0031	0.0017	0.0013	0.0030
206	0.0048	0.0060	0.0037	0.0034
207	0.0036	0.0040	-0.0001	0.0025
208	0.0068	0.0058	-0.0044	0.0014
209	0.0025	0.0044	0.0029	0.0022
210	0.0073	0.0084	0.0008	0.0043
211	0.0037	0.0021	-0.0018	0.0022
212	0.0063	0.0037	-0.0012	0.0018
213	0.0037	0.0085	0.0046	0.0023
214	-0.0012	0.0046	0.0144	0.0018
215	0.0018	0.0023	0.0018	0.0031]

**APÊNDICE D – MATRIZES DE COVARIÂNCIA DOS 10 SUBPORTFÓLIOS
EXTRAÍDOS DE UM PORTFÓLIO DE ATIVOS FINANCEIROS COMPOSTO DE 40
AÇÕES ÚNICAS DO ÍNDICE S&P 500**

```

1 C_port_1 = [
2 0.0101    0.0061    0.0064    0.0038    0.0056    0.0063    0.0043    0.0050    0.0039
3 0.0061    0.0187    0.0030   -0.0009    0.0025    0.0086    0.0023    0.0038    0.0068
4 0.0064    0.0030    0.0099    0.0039    0.0034    0.0046    0.0052    0.0037    0.0008
5 0.0038   -0.0009    0.0039    0.0053    0.0024    0.0029    0.0029    0.0034    0.0004
6 0.0056    0.0025    0.0034    0.0024    0.0063    0.0040    0.0022    0.0029    0.0017
7 0.0063    0.0086    0.0046    0.0029    0.0040    0.0104    0.0035    0.0033    0.0036
8 0.0043    0.0023    0.0052    0.0029    0.0022    0.0035    0.0065    0.0033    0.0031
9 0.0050    0.0038    0.0037    0.0034    0.0029    0.0033    0.0033    0.0049    0.0021
10 0.0039    0.0068    0.0008    0.0004    0.0017    0.0036    0.0031    0.0021    0.0063
11 ]

```

```

1 C_port_2 = [
2 0.0138    0.0027    0.0075    0.0072    0.0054    0.0052    0.0016    0.0040    0.0101
3 0.0027    0.0060    0.0023    0.0030    0.0007    0.0020   -0.0003    0.0025   -0.0024
4 0.0075    0.0023    0.0070    0.0045    0.0040    0.0030    0.0016    0.0017    0.0069
5 0.0072    0.0030    0.0045    0.0079    0.0015    0.0040   -0.0001    0.0047    0.0026
6 0.0054    0.0007    0.0040    0.0015    0.0048    0.0016    0.0013    0.0008    0.0065
7 0.0052    0.0020    0.0030    0.0040    0.0016    0.0065   -0.0005    0.0023    0.0035
8 0.0016   -0.0003    0.0016   -0.0001    0.0013   -0.0005    0.0071   -0.0012    0.0045
9 0.0040    0.0025    0.0017    0.0047    0.0008    0.0023   -0.0012    0.0054   -0.0018
10 0.0101   -0.0024    0.0069    0.0026    0.0065    0.0035    0.0045   -0.0018    0.0196
11 ]

```

```

1 C_port_3 = [
2 0.0058    0.0033    0.0029    0.0020    0.0051    0.0039    0.0032    0.0034    0.0012
3 0.0033    0.0043    0.0044    0.0012    0.0013    0.0026    0.0027    0.0019    0.0029
4 0.0029    0.0044    0.0070    0.0021    0.0027    0.0030    0.0063    0.0028    0.0045
5 0.0020    0.0012    0.0021    0.0032    0.0032    0.0022    0.0043    0.0031    0.0014
6 0.0051    0.0013    0.0027    0.0032    0.0187    0.0023    0.0036    0.0030   -0.0044
7 0.0039    0.0026    0.0030    0.0022    0.0023    0.0065    0.0038    0.0052    0.0013
8 0.0032    0.0027    0.0063    0.0043    0.0036    0.0038    0.0167    0.0063    0.0070
9 0.0034    0.0019    0.0028    0.0031    0.0030    0.0052    0.0063    0.0099    0.0036
10 0.0012    0.0029    0.0045    0.0014   -0.0044    0.0013    0.0070    0.0036    0.0144
11 ]

```

```

1 C_port_4 = [
2 0.0069    0.0020    0.0048    0.0005    0.0036    0.0040    0.0023    0.0014    0.0012
3 0.0020    0.0049    0.0040    0.0037    0.0026    0.0021    0.0025    0.0038    0.0026
4 0.0048    0.0040    0.0070    0.0028    0.0044    0.0031    0.0040    0.0025    0.0028
5 0.0005    0.0037    0.0028    0.0099    0.0019    0.0008    0.0031    0.0051    0.0022
6 0.0036    0.0026    0.0044    0.0019    0.0043    0.0025    0.0016    0.0025    0.0022

```

```

7 | 0.0040    0.0021    0.0031    0.0008    0.0025    0.0063    0.0009    0.0021    0.0018
8 | 0.0023    0.0025    0.0040    0.0031    0.0016    0.0009    0.0048    0.0020    0.0014
9 | 0.0014    0.0038    0.0025    0.0051    0.0025    0.0021    0.0020    0.0079    0.0029
10| 0.0012    0.0026    0.0028    0.0022    0.0022    0.0018    0.0014    0.0029    0.0031
11| ]

```

```

1 | C_port_5 = [
2 | 0.0071    0.0022    0.0039   -0.0011    0.0066    0.0038    0.0091    0.0015    0.0028
3 | 0.0022    0.0053    0.0032    0.0025    0.0042    0.0017    0.0007    0.0033    0.0027
4 | 0.0039    0.0032    0.0085    0.0014    0.0060    0.0031    0.0084    0.0032    0.0023
5 | -0.0011   0.0025    0.0014    0.0042   -0.0004    0.0001   -0.0030    0.0015    0.0010
6 | 0.0066    0.0042    0.0060   -0.0004    0.0129    0.0043    0.0080    0.0030    0.0034
7 | 0.0038    0.0017    0.0031    0.0001    0.0043    0.0030    0.0050    0.0008    0.0022
8 | 0.0091    0.0007    0.0084   -0.0030    0.0080    0.0050    0.0323    0.0023    0.0043
9 | 0.0015    0.0033    0.0032    0.0015    0.0030    0.0008    0.0023    0.0048    0.0014
10| 0.0028    0.0027    0.0023    0.0010    0.0034    0.0022    0.0043    0.0014    0.0031
11| ]

```

```

1 | C_port_6 = [
2 | 0.0045    0.0000    0.0010    0.0011    0.0027    0.0036    0.0032    0.0020    0.0044
3 | 0.0000    0.0071    0.0036    0.0017    0.0045    0.0002    0.0011    0.0023    0.0023
4 | 0.0010    0.0036    0.0144    0.0025    0.0144    0.0010    0.0033    0.0086    0.0046
5 | 0.0011    0.0017    0.0025    0.0041    0.0035    0.0015    0.0016    0.0023    0.0027
6 | 0.0027    0.0045    0.0144    0.0035    0.0196    0.0029    0.0048    0.0093    0.0063
7 | 0.0036    0.0002    0.0010    0.0015    0.0029    0.0049    0.0020    0.0026    0.0039
8 | 0.0032    0.0011    0.0033    0.0016    0.0048    0.0020    0.0069    0.0028    0.0058
9 | 0.0020    0.0023    0.0086    0.0023    0.0093    0.0026    0.0028    0.0070    0.0045
10| 0.0044    0.0023    0.0046    0.0027    0.0063    0.0039    0.0058    0.0045    0.0085
11| ]

```

```

1 | C_port_7 = [
2 | 0.0031    0.0014    0.0015    0.0026    0.0001    0.0020    0.0030    0.0022    0.0030
3 | 0.0014    0.0187    0.0013    0.0038   -0.0003   -0.0015    0.0023    0.0033    0.0051
4 | 0.0015    0.0013    0.0041    0.0015    0.0017    0.0023    0.0016    0.0014    0.0030
5 | 0.0026    0.0038    0.0015    0.0049    0.0002    0.0026    0.0033    0.0025    0.0031
6 | 0.0001   -0.0003    0.0017    0.0002    0.0071    0.0023   -0.0005   -0.0004    0.0001
7 | 0.0020   -0.0015    0.0023    0.0026    0.0023    0.0070    0.0018    0.0020    0.0017
8 | 0.0030    0.0023    0.0016    0.0033   -0.0005    0.0018    0.0065    0.0029    0.0039
9 | 0.0022    0.0033    0.0014    0.0025   -0.0004    0.0020    0.0029    0.0030    0.0028
10| 0.0030    0.0051    0.0030    0.0031    0.0001    0.0017    0.0039    0.0028    0.0058
11| ]

```

```

1 | C_port_8 = [
2 | 0.0037    0.0022    0.0044    0.0006    0.0027    0.0036    0.0035    0.0041    0.0022
3 | 0.0022    0.0030    0.0043    0.0015    0.0014    0.0027    0.0031    0.0044    0.0020
4 | 0.0044    0.0043    0.0129    0.0037    0.0040    0.0054    0.0060    0.0073    0.0040

```

```

5 | 0.0006    0.0015    0.0037    0.0144    0.0025   -0.0001    0.0046    0.0048    0.0033
6 | 0.0027    0.0014    0.0040    0.0025    0.0041    0.0028    0.0027    0.0021    0.0016
7 | 0.0036    0.0027    0.0054   -0.0001    0.0028    0.0061    0.0040    0.0035    0.0035
8 | 0.0035    0.0031    0.0060    0.0046    0.0027    0.0040    0.0085    0.0069    0.0058
9 | 0.0041    0.0044    0.0073    0.0048    0.0021    0.0035    0.0069    0.0101    0.0044
10| 0.0022    0.0020    0.0040    0.0033    0.0016    0.0035    0.0058    0.0044    0.0069
11| ]

```

```

1 | C_port_9 = [
2 | 0.0043    0.0022    0.0034    0.0025    0.0039    0.0016    0.0024    0.0024    0.0025
3 | 0.0022    0.0031    0.0022    0.0029    0.0036    0.0014    0.0022    0.0027    0.0015
4 | 0.0034    0.0022    0.0045    0.0030    0.0040    0.0025    0.0026    0.0027    0.0011
5 | 0.0025    0.0029    0.0030    0.0079    0.0050    0.0020    0.0032    0.0032    0.0032
6 | 0.0039    0.0036    0.0040    0.0050    0.0079    0.0015    0.0030    0.0027    0.0021
7 | 0.0016    0.0014    0.0025    0.0020    0.0015    0.0048    0.0007    0.0033    0.0014
8 | 0.0024    0.0022    0.0026    0.0032    0.0030    0.0007    0.0060    0.0015    0.0013
9 | 0.0024    0.0027    0.0027    0.0032    0.0027    0.0033    0.0015    0.0053    0.0026
10| 0.0025    0.0015    0.0011    0.0032    0.0021    0.0014    0.0013    0.0026    0.0041
11| ]

```

```

1 | C_port_10 = [
2 | 0.0032    0.0022    0.0018    0.0020    0.0040    0.0018    0.0020    0.0021    0.0018
3 | 0.0022    0.0079    0.0042    0.0066    0.0055    0.0041    0.0047    0.0045    0.0051
4 | 0.0018    0.0042    0.0063    0.0057    0.0040    0.0030    0.0029    0.0047    0.0054
5 | 0.0020    0.0066    0.0057    0.0112    0.0069    0.0063    0.0035    0.0063    0.0084
6 | 0.0040    0.0055    0.0040    0.0069    0.0104    0.0046    0.0033    0.0043    0.0058
7 | 0.0018    0.0041    0.0030    0.0063    0.0046    0.0069    0.0020    0.0048    0.0058
8 | 0.0020    0.0047    0.0029    0.0035    0.0033    0.0020    0.0049    0.0040    0.0039
9 | 0.0021    0.0045    0.0047    0.0063    0.0043    0.0048    0.0040    0.0070    0.0064
10| 0.0018    0.0051    0.0054    0.0084    0.0058    0.0058    0.0039    0.0064    0.0085
11| ]

```