



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA**

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

**O EFEITO HALL QUÂNTICO NÃO-COMUTATIVO COM MOMENTO
MAGNÉTICO ANÔMALO EM TRÊS DIFERENTES CENÁRIOS RELATIVÍSTICOS**

FORTALEZA

2023

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

O EFEITO HALL QUÂNTICO NÃO-COMUTATIVO COM MOMENTO MAGNÉTICO
ANÔMALO EM TRÊS DIFERENTES CENÁRIOS RELATIVÍSTICOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O51e Oliveira, Rubens Raimundo de Sousa.

O efeito Hall quântico não-comutativo com momento magnético anômalo em três diferentes cenários relativísticos / Rubens Raimundo de Sousa Oliveira. – 2023.
141 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Efeito Hall Quântico. 2. Geometria Não-Comutativa. 3. Momento Magnético Anômalo. 4. Espaço-Tempo da Corda Cósmica Girante. 5. Equação de Dirac. I. Título.

CDD 530

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

O EFEITO HALL QUÂNTICO NÃO-COMUTATIVO COM MOMENTO MAGNÉTICO
ANÔMALO EM TRÊS DIFERENTES CENÁRIOS RELATIVÍSTICOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 05/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos meus pais, Maria das Graças de Sousa Oliveira e Raimundo Cícero de Oliveira, e aos meus irmãos, Rogério, Rayane, Raisa e Rejane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria das Graças de Sousa Oliveira e Raimundo Cícero de Oliveira, pelo esforço, amor, dedicação e apoio destinados à minha vida acadêmica e pessoal.

Aos meus irmãos, Rogério, Rayane, Raisal e Rejane pelo incentivo e carinho.

Ao Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho pela orientação durante a minha jornada no doutorado.

Ao Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho pela coorientação durante a minha jornada no doutorado.

Aos Profs. Drs. José Abdalla Helayël Neto, Marcony Silva Cunha e a Job Saraiva Furtado Neto por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

À todos os meus amigos (em especial, ao Wemerson Alencar, Avelar Souza e ao João Pedro Gomes), aos professores (em especial, ao Prof. Dr. Andrey Chaves) e à todos os funcionários do Departamento de Física.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro (bolsa de doutorado e taxa de bancada) bem como a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFis) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

*“O estudo da Física também é uma aventura.
Ela poderá ser desafiadora, algumas vezes
frustrante, ocasionalmente dolorosa e, com
frequência, significativamente gratificante.”
(Sears & Zemansky)*

RESUMO

Nesta tese de doutorado, investigamos as soluções de estado ligado do efeito Hall quântico não-comutativo com momento magnético anômalo em três diferentes cenários relativísticos: o espaço-tempo de Minkowski (caso plano inercial), o espaço-tempo da corda cósmica girante (caso curvo inercial) e o espaço-tempo da corda cósmica girante com efeitos não-inerciais (caso curvo não-inercial). Portanto, trabalhamos em dois diferentes backgrounds relativísticos, onde um é exclusivo da Teoria da Relatividade Especial (primeiro cenário) e o outro da Teoria da Relatividade Geral (segundo e terceiro cenário), ambos em $(2 + 1)$ -dimensões. Em particular, nos dois primeiros cenários temos um referencial inercial enquanto que no terceiro temos um referencial girante ou rotativo (referencial não-inercial). Com respeito às soluções, focamos nossa atenção principalmente nas soluções de uma dada equação de autovalores, ou seja, nas autofunções (spinor de Dirac de duas componentes e a função de onda de Schrödinger) e nos autovalores de energia (espectro de energia ou níveis de Landau). Para obter tais soluções, trabalhamos com a Equação de Dirac não-comutativa em coordenadas polares com acoplamentos mínimo e não-mínimo, cujas constantes de acoplamento são a carga elétrica e o momento magnético anômalo do férmion de Dirac. Além disso, por meio do spinor de Dirac normalizado também foi possível obter a expressão para a densidade de probabilidade radial do sistema. Então, uma vez obtidas às soluções, discutimos em detalhes a influência de todos os parâmetros e grandezas físicas nos níveis de energia relativísticos bem como na densidade de probabilidade (via gráficos). Por fim, analisamos o limite não-relativístico (regime de baixas energias) de nossos três cenários, onde também comparamos nosso problema com outros trabalhos. Consequentemente, verificamos que nossos resultados generalizam vários casos particulares da literatura.

Palavras-chave: Efeito Hall Quântico. Geometria Não-Comutativa. Momento Magnético Anômalo. Espaço-Tempo da Corda Cósmica Girante. Equação de Dirac.

ABSTRACT

In this doctoral thesis, we investigate the bound-state solutions of the noncommutative quantum Hall effect with anomalous magnetic moment in three different relativistic scenarios: the Minkowski spacetime (inertial flat case), the spinning cosmic string spacetime (inertial curved case) and the spinning cosmic string spacetime with noninertial effects (noninertial curved case). Therefore, we work in two different relativistic backgrounds, where one is exclusive to the Special Theory of Relativity (first scenario) and the other to the General Theory of Relativity (second and third scenario), both in $(2 + 1)$ -dimensions. In particular, in the first two scenarios, we have an inertial frame of reference while in the third we have a rotating frame of reference (noninertial frame of reference). With respect to solutions, we focus our attention mainly on the solutions of a given eigenvalue equation, that is, on the eigenfunctions (two-component Dirac spinor and the Schrödinger wave function) and on the energy eigenvalues (energy spectrum or Landau levels). To obtain such solutions, we work with the noncommutative Dirac Equation in polar coordinates with minimal and nonminimal couplings, whose coupling constants are the electric charge and the anomalous magnetic moment of the Dirac fermion. Furthermore, using the normalized Dirac spinor it was also possible to obtain the expression for the radial probability density of the system. So, once the solutions had been obtained, we discussed in detail the influence of all parameters and physical quantities on relativistic energy levels as well as on probability density (via graphs). Finally, we analyzed the nonrelativistic limit (low energy regime) of our three scenarios, where we also compared our problem with other works. Consequently, we verified that our results generalize several particular cases of the literature.

Keywords: Quantum Hall Effect. Noncommutative Geometry. Anomalous Magnetic Moment. Spinning Cosmic String Spacetime. Dirac Equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a =$ 1) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	41
Figura 2 – Gráfico de $ E_n^-(B) $ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	42
Figura 3 – Gráfico de $ E_n^K(\theta) $ versus θ para três diferentes valores de n .	43
Figura 4 – Gráfico de $ E_n^K(\eta) $ versus η para três diferentes valores de n .	44
Figura 5 – Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a) e $m_j = 3/2$ (b).	48
Figura 6 – Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .	49
Figura 7 – Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de θ .	50
Figura 8 – Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de η .	50
Figura 9 – Representação do espaço-tempo da corda cósmica girante.	62
Figura 10 – Representação de um grafeno cônico (ou cone de grafeno).	62
Figura 11 – Representação para quatro diferentes cones de grafeno.	63
Figura 12 – Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a =$ 1) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	67
Figura 13 – Gráfico de $ E_n^-(B) $ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	68
Figura 14 – Gráfico de $ E_n^K(\alpha) $ versus α para três diferentes valores de n .	69
Figura 15 – Gráfico de $ E_n^K(\beta) $ versus β para três diferentes valores de n .	69
Figura 16 – Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a) e $m_j = 3/2$ (b).	72
Figura 17 – Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .	73
Figura 18 – Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de α .	74
Figura 19 – Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de β .	75
Figura 20 – Gráfico de $\varepsilon_n(B)$ versus B para três diferentes valores de n .	77
Figura 21 – Gráfico de $\varepsilon_n(\alpha)$ versus α para três diferentes valores de n .	78
Figura 22 – Gráfico de $\varepsilon_n(\beta)$ versus β para três diferentes valores de n .	78
Figura 23 – Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a =$ 1) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	85
Figura 24 – Gráfico de $ E_n^-(B) $ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).	86

Figura 25 –Gráfico de $ E_n^K(\alpha) $ versus α para três diferentes valores de n .	87
Figura 26 –Gráfico de $ E_n^K(\beta) $ versus β para três diferentes valores de n .	88
Figura 27 –Gráfico de $ E_n^K(\omega) $ versus ω para três diferentes valores de n .	88
Figura 28 –Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$	
(a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).	89
Figura 29 –Gráfico de $ E_n^-(B) $ versus B para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$	
(a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).	91
Figura 30 –Gráfico de $E_n^+(\omega)$ versus ω para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$	
(a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).	92
Figura 31 –Gráfico de $ E_n^-(\omega) $ versus ω para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$	
(a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).	93
Figura 32 –Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a)	
e $m_j = 3/2$ (b).	97
Figura 33 –Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .	98
Figura 34 –Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de α .	99
Figura 35 –Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de β .	100
Figura 36 –Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de ω .	101
Figura 37 –Aparato experimental no qual o EH foi descoberto.	138
Figura 38 –Aparato experimental mais moderno para observar o EH.	138
Figura 39 –Comportamento (gráficos) das resistividades longitudinal e Hall em função	
do campo magnético para os casos clássico (a) e quântico (b).	141
Figura 40 –Aparato experimental para observar o EHQ não-inercial.	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Degenerescência do espectro dependendo dos valores de m_j .	37
Tabela 2 – Espectros de energia para os estados degenerados da partícula e antipartícula.	38
Tabela 3 – Espectros relativísticos e efetivos (não-relativísticos) da literatura.	39
Tabela 4 – Intervalos permitido e proibido para o campo magnético.	40
Tabela 5 – Restrições para os parâmetros NCs θ e η .	43
Tabela 6 – Espectros não-relativísticos particulares da literatura.	53
Tabela 7 – Espectros de energia para a partícula e antipartícula no espaço-tempo da CC girante.	66
Tabela 8 – Espectros de energia para a partícula e antipartícula em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante.	83

LISTA DE SIGLAS

TRE	Teoria da Relatividade Especial
MQ	Mecânica Quântica
MQR	Mecânica Quântica Relativística
EKG	Equação de Klein-Gordon
ED	Equação de Dirac
CPT	Carga-Paridade-Tempo
EHC	Efeito Hall Clássico
EH	Efeito Hall
EHQ	Efeito Hall Quântico
2DEG	Two-dimensional Electron Gas (Gás de Elétrons Bidimensional em Português)
MQNR	Mecânica Quântica Não-Relativística
EHQNL	Efeito Hall Quântico Não-Linear
NC	Não-Comutativo(a) ou Não-comutatividade
TQC	Teoria Quântica de Campos
GNC	Geométria Não-Comutativa
TRG	Teoria da Relatividade Geral
QED	Quantum Electrodynamics (Eletrodinâmica Quântica em Português)
OD	Oscilador de Dirac
OKG	Oscilador de Klein-Gordon
OHQ	Oscilador Harmônico Quântico
MMA	Momento Magnético Anômalo
MDM	Momento de Dipolo Magnético
EP	Equação de Pauli
MDE	Momento de Dipolo Elétrico
CC	Corda Cósmica
CTC	Closed time-like curve (Curva tipo-tempo fechada em Português)
EHQNC	Efeito Hall Quântico Não-Comutativo
EDNC	Equação de Dirac Não-Comutativa
OHQNC	Oscilador Harmônico Quântico Não-Comutativo
HDNC	Hamiltoniano de Dirac Não-Comutativo
SI	Sistema Internacional

LISTA DE SÍMBOLOS

\hat{x}_i	Operador Posição (usual ou comutativo)
\hat{p}_i	Operador Momento (usual ou comutativo)
$[,]$	Comutador
δ_{ij}	Delta de Kronecker (Tensor) em duas dimensões (ou métrica euclidiana usual)
\hat{x}_i^{NC}	Operador Posição Não-Comutativo
\hat{p}_i^{NC}	Operador Momento Não-Comutativo
ε_{ij}	Símbolo de Levi-Civita (Pseudotensor) em duas dimensões
$A(x) \star B(x)$	Produto estrela (ou Produto Moyal) de duas funções no espaço não-comutativo
γ^a	Matrizes Gama de Dirac (Matrizes Gama Usuais ou Cartesianas)
$\{ , \}$	Anti-comutador
$\tilde{\eta}_{ab} = \tilde{\eta}^{ab}$	Tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski (métrica de Minkowski)
σ^{ab}	Tensor anti-simétrico
F_{ab}	Tensor campo eletromagnético
A_a	Potencial eletromagnético ou Campo eletromagnético externo (tripotencial eletromagnético)
$\Psi_D(t, \vec{r})$	Spinor de Dirac (matriz ou vetor coluna de dois elementos)
$\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$	Índices referentes a um espaço-tempo curvo (quadro de referência geral)
a, b, c, d, \dots	Índices referentes a um espaço-tempo plano (quadro de referência local)
\vec{S}	Operador (vetor) de spin
$\Psi_D^{NC}(t, \vec{r})$	Spinor de Dirac não-comutativo
σ_i	Matrizes de Pauli ou Matrizes sigma de Pauli
H_S^{NC}	Hamiltoniano de Schrödinger não-comutativo dependente do tempo
$H_{iipo-OHQNC}$	Hamiltoniano tipo oscilador harmônico quântico não-comutativo
H_{Zeeman}^{NC}	Hamiltoniano de Zeeman não-comutativo
$\hat{\theta}^a$	Base não-coordenada
$e^\mu_a(x)$	Tetradas
$e^a_\mu(x)$	Tetradas inversas
$g_{\mu\nu}(x)$	Tensor métrico curvo (Métrica curva)
$\omega_{ab\mu}(x)$	Conexão de spin
$\Gamma^\nu_{\mu\sigma}(x)$	Símbolos de Christoffel do segundo tipo

$P_\mu(x)$	Operador momento curvo
$\nabla_\mu(x)$	Derivada covariante
$\gamma^\mu(x)$	Matrizes gama curvas
$A_\mu(x)$	Campo eletromagnético curvo
$\sigma^{\mu\nu}(x)$	Tensor anti-simétrico curvo
$F_{\mu\nu}(x)$	Tensor campo eletromagnético curvo
$\Gamma_\mu(x)$	Conexão spinorial (Conexão afim do spinor)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	O ESPAÇO DE FASE NÃO-COMUTATIVO	24
3	A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI (2+1)-DIMENSIONAL	28
3.1	Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico	34
3.2	Limite não-relativístico	51
4	A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO GENÉRICO (2+1)-DIMENSIONAL	55
5	A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA NO ESPAÇO-TEMPO DA CORDA CÓSMICA GIRANTE (2+1)-DIMENSIONAL	61
5.1	Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico	65
5.2	Limite não-relativístico	74
6	A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA EM UM REFERENCIAL GIRANTE NO ESPAÇO-TEMPO DA CORDA CÓSMICA GIRANTE (2+1)-DIMENSIONAL	79
6.1	Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico	82
6.2	Limite não-relativístico	98
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	102
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICE A – A EQUAÇÃO DE DIRAC	131
	APÊNDICE B – O EFEITO HALL QUÂNTICO	137
	APÊNDICE C – PUBLICAÇÃO RELACIONADA A ESTA TESE	142

1 INTRODUÇÃO

A descrição dos fenômenos físicos microscópicos de altas energias (sistemas moleculares, atômicos e subatômicos com energias relativísticas) requer, de forma indispensável, o uso das duas principais teorias surgidas no início do século XX: a Teoria da Relatividade Especial (TRE) e a Mecânica Quântica (MQ). A unificação destas duas teorias em uma teoria fisicamente consistente é chamada de Mecânica Quântica Relativística (MQR) [1-4]. Em geral, a MQR tem por objetivo estudar as soluções de estado ligado (espectro discreto) e as soluções de estado não-ligado ou de espalhamento (espectro contínuo) das equações de onda relativísticas para férmions (partículas de spin semi-inteiro) e bósons (partículas de spin inteiro). Atualmente, as principais equações de onda relativísticas conhecidas são (em ordem crescente de spin): a equação de Klein-Gordon (EKG), para partículas de spin-0, as equações de Dirac (ED) e Majorana, para partículas massivas de spin-1/2, a equação de Weyl, para partículas não-massivas de spin-1/2, as equações de Proca e Kemmer, para partículas de spin-1, e a equação de Rarita-Schwinger, para partículas de spin-3/2 [1-4]. Além disso, a MQR também pode ser aplicada em outras áreas da física e em áreas associadas, tal como na física de partículas [5-9], química [10-13], física atômica e da matéria condensada [14-17]. A temática da presente tese se enquadra nesta última área, ou seja, na MQR aplicada a um sistema da matéria condensada.

No entanto, foi através da ED, formulada em 1928 por Paul A. M. Dirac (prêmio Nobel de 1933) [18-22], que a MQR ganhou mais notoriedade e um grande sucesso logo de início (a EKG ainda tinha alguns “problemas”), e que continua até os dias atuais [23-28]. Em essência, a ED consegue descrever todas as partículas massivas elementares de spin-1/2 do modelo padrão, tal como os elétrons, múons, taus e quarks (talvez até os neutrinos), bem como entidades compostas (não elementares) tal como os prótons e nêutrons [5]. Outros pontos relevantes que também merecem ser destacados é que além da ED (efetiva ou tipo-Dirac) ser aplicada no grafeno (um dos “materiais do futuro”) [29-34], isolantes topológicos [35], semimetais [36-38], supercondutores [39, 40], fulerenos [41-43], mágnons, plásmos e anyons (quasipartículas) [37, 44-48], etc [49-52], e de introduzir na literatura uma das simetrias mais importantes e belas da natureza: a simetria Carga-Paridade-Tempo (CPT), consegue explicar/provar naturalmente o spin, a helicidade e a quiralidade das partículas, assim como prevê que para cada uma dessas partículas existem suas respectivas antipartículas. Em 1932, Carl D. Anderson (prêmio Nobel de 1936) descobriu a primeira antipartícula da história: o pósitron (ou antielétron) [53].

Em 1980, Klaus Von Klitzing et al (prêmio Nobel de 1985) descobriu a versão quantizada do efeito Hall clássico (EHC), ou simplesmente, efeito Hall (EH) [54], no qual é conhecido atualmente como efeito Hall quântico (EHQ) [55-59]. Diferentemente do EHC, no

EHQ o gás de elétrons bidimensional (two-dimensional electron gas or 2DEG em inglês) no material condutor está submetido a fortes campos magnéticos e a baixas temperaturas, consequentemente, o espectro de energia (níveis de Landau), a condutividade elétrica (condutividade Hall) e a resistividade elétrica (resistividade Hall) são então quantidades quantizadas (discretas). De fato, para campos fracos e altas temperaturas, o EHQ se reduz ao EHC (como deve ser). No entanto, em 2007 uma exceção foi observada, onde foi demonstrado que no grafeno o EHQ pode ser observado mesmo em temperatura ambiente (uma alta temperatura comparada ao EHQ original) [33]. Especificamente, isso se deve à natureza altamente incomum das partículas no grafeno, no qual se comportam como partículas relativísticas sem massa (férmions de Dirac sem massa) e também se movem com pouca dispersão em condições ambientais [33]. Então, além do grafeno [33,60–64], o EHQ também já foi observado em semicondutores [65,66], gases quânticos [67], materiais antiferromagnéticos [68,69], fios quânticos [70], isolantes topológicos [71], semimetais de Weyl [72] e em grafite [73]. Além disso, é oportuno mencionar que um modelo de EHQ sem níveis de Landau (ou campo magnético) já foi proposto na literatura [74].

Então, dentre os notáveis fenômenos quânticos “macroscópicos” em matéria condensada, o EHQ é sem sombra de dúvidas considerado um dos mais fascinantes e belos em todos os ramos da física [33,59,75–77]. Por meio dele (ou EHC) é possível determinar o sinal e a densidade dos portadores de carga em diferentes tipos de materiais, fabricar diversos dispositivos eletrônicos importantes da atualidade [78–85], e atualmente é usado como base para o padrão de resistência elétrica por laboratórios de metrologia em todo o mundo [86–88]. Na literatura, o EHQ pode se manifestar (ocorrer) de várias formas além do EHQ inteiro [55,56,58,59,89,90], tal como no EHQ fracionário [70,91,92], EHQ anômalo [93,94], EHQ fotônico [95,96], EHQ de spin [60,65,97] e no EHQ orbital [97]. É importante mencionar que além do EHQ ordinário ou linear, existe também o seu equivalente não-linear (um efeito mais recente), chamado de efeito Hall quântico não-linear (EHQNL) [98–104]. Ao contrário do EHQ linear, o EHQNL não requer uma quebra de simetria de reversão do tempo para existir, ou seja, o hamiltoniano não precisar ser variante sob simetria de reversão temporal para que haja uma condutividade Hall não-nula [98–104] (nesta tese, trabalhamos apenas com o EHQ inteiro linear). Agora, do ponto de vista teórico (ou fenomenológico), o EHQ tem sido estudado tanto em MQR [74,105–110] quanto em mecânica quântica não-relativística (MQNR) [76,77,111–116], ou seja, altas e baixas energias, e recentemente foi estudado em oscilações de Rabi [117], semimetais de Dirac e Weyl [103,118,119], metais topológicos [120] e em borofenos [121].

O conceito de espaços não-comutativos (NCs), ou espaços-tempos NCs, surgiu inicialmente em 1947 através de dois artigos feito por Hartland S. Snyder sobre espaços-tempos quantizados (“espaços-tempos quânticos”) [122–125]. Para Snyder, embora o espaço-tempo da TRE (espaço-tempo de Minkowski) seja um continuum (contínuo em português), esta suposição

não é exigida pela invariância de Lorentz. Portanto, Snyder propôs um modelo (generalização) de um espaço-tempo discreto invariante de Lorentz inspirado na MQNR, onde agora o espaço de fase quântico usual é definido por novas relações de comutação de Heisenberg. Expliciteamente, estas novas relações de comutação são dadas pelo comutador: $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = ia_{NC}^2 J_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), onde $J_{\mu\nu}$ são os geradores da álgebra do grupo de Lorentz (boosts e rotações) e a_{NC} é um parâmetro NC com dimensão de comprimento [122–125]. Portanto, vemos que posição não mais comuta com posição e nem com o tempo (agora são variáveis ou coordenadas NCs), e se tomarmos o limite $a_{NC} \rightarrow 0$, o espaço-tempo quantizado se reduz ao espaço-tempo contínuo ordinário de Minkowski (ou as relações de comutação de Heisenberg usuais) [122–124]. Segundo as Refs. [124, 126–131], um espaço-tempo NC poderia ser considerado um possível cenário para o comportamento de curta distância (comprimento de Planck) de algumas teorias físicas, tal como a gravidade quântica (gravidade na escala de Planck). Desse modo, espaços-tempos NCs poderiam fornecer um background (“plano de fundo”) natural para uma possível regularização de uma teoria quântica de campos (TQC) para a gravidade [132, 133].

Posteriormente, foi introduzido na literatura um conceito ainda mais geral, ou seja, o espaço de fase NC, no qual obedece a uma rigorosa formulação matemática: a geometria não-comutativa (GNC) [126, 134–138]. Em particular, John Von Neumann apelidou essa geometria de “geometria sem ponto” (“pointless geometry” em inglês), referindo-se assim ao fato de que a noção de ponto em um espaço de fase quântico não faz sentido por causa do princípio da incerteza de Heisenberg [126]. Em essência, o espaço de fase NC é baseado na suposição de que tanto posição quanto momento (linear) agora não mais comutam entre si e, conseqüentemente, devem satisfazer as seguintes relações de comutação (notação moderna/atualizada): $[\hat{x}_\mu^{NC}, \hat{x}_\nu^{NC}] = i\theta_{\mu\nu}$ e $[\hat{p}_\mu^{NC}, \hat{p}_\nu^{NC}] = i\eta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), onde $\theta_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$ são “tensores” constantes antissimétricos com dimensões de (comprimento)² e (momento)² [126–139]. Desde que a GNC foi introduzida na TQC [126, 132, 134, 135] e na teoria das cordas [136–138], diversas outras áreas da física bem como de vários sistemas quânticos (MQR e MQNR) em espaços NCs (ou espaço de fase NC) tem sido alvo de muita atenção (estudo) ao longo dos anos. Por exemplo, algumas áreas são: cosmologia quântica [140, 141], teoria da relatividade geral (TRG) [127, 142, 143], física de partículas [144–146], cromodinâmica quântica [147], eletrodinâmica quântica (QED em inglês) [139, 148–150], termodinâmica [151], etc; e alguns sistemas quânticos são: oscilador harmônico quântico (OHQ) [152–154], poço quântico gravitacional [133, 155, 156], entropia de Shannon [157], grafeno [158–160], efeito Aharonov-Bohm [161], átomo de hidrogênio [149, 162–164], osciladores de Dirac (OD) e Klein-Gordon (OKG) [165, 166] e no próprio EHQ [167–169].

Na QED, o chamado momento magnético anômalo (MMA) de um férmion de Dirac (bósons não possuem) é uma quantidade física adimensional que surge dos diagramas de Feynman com loops para férmions (carregados ou neutros) interagindo com fortes campos

eletromagnéticos externos, ou seja, é uma tipo de contribuição magnética adicional (ou um tipo de “anomalia magnética”) para o momento de dipolo magnético (MDM) total do férmion [1-3, 6, 170-174]. No entanto, esta contribuição é melhor analisada no limite não-relativístico da ED (3 + 1)-dimensional, onde já temos equação de Pauli (EP) com o MDM orbital e de spin [1, 175-177] e, portanto, agora temos: MDM total = MDM orbital + MDM de spin + MDM anômalo (ou seja, o férmion “possui três diferentes ímãs”). No entanto, em (2 + 1)-dimensões temos: MDM total = MDM anômalo + MDM orbital (agora o férmion “possui dois diferentes ímãs”). Além disso, ao contrário do MDM de spin (mas análogo ao MDM orbital), o MDM anômalo (originado pelo MMA) não é uma propriedade “intrínseca” do férmion (não “nasceu” com ele) [170], mas originado através de interações radiativas/dinâmicas com fortes campos eletromagnéticos externos. Porém, na QED em espaços NCs, já foi demonstrado que os elétrons possuem um certo MDM intrínseco independentemente do spin [150]. Uma das principais razões, se não a principal, para o sucesso da QED foi o cálculo do MMA dos férmions, no qual concorda com o valor experimental em mais de 10 algarismos significativos (dentre as maiores conquistas da física do século XX, certamente o MMA foi uma delas) [178-180]. Além dos elétrons, praticamente todos os férmions de Dirac possuem um MMA associado, a saber: múons [181-185], taus [186-188], núcleons (prótons e nêutrons) [189, 190] e quarks [191].

Além disso, na teoria de Dirac, o fator-g de Landé, ou simplesmente, o fator-g, é exatamente 2, onde tal fator aparece no MDM de spin do elétron ($g_s = 2$) e é basicamente uma correção do valor clássico, que é 1 (este valor clássico na realidade é para o MDM orbital) [176]. No entanto, na QED este fator é ligeiramente superior a 2, e, portanto, podemos definir a partir disso o MMA (simbolizado por a), da seguinte forma: $a = a^{QED} \equiv \frac{g^{QED}-2}{2} \neq 0$ ($g^{QED} > g^{Dirac} = 2$) [4], ou ainda, como: $a \simeq \frac{\alpha}{2\pi}$ [171, 192], onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ é a famosa constante de estrutura fina de Sommerfeld. Dessa forma, vemos que o termo “anômalo” é justificado porque na teoria de Dirac o MMA é nulo. É importante destacar que dentre os férmions que possuem um maior desvio (discrepância) entre os valores teóricos e experimentais do MMA são os múons. Devido a isto, possivelmente os múons estariam interagindo com outras partículas desconhecidas e, conseqüentemente, dando origem a uma “nova física” [182, 193-201]. Além disso, também é interessante mencionar que o objetivo principal de Klaus Von Klitzing et al [55] foi mostrar um novo método para medir com alta precisão a constante de estrutura fina via EHQ. Assim, podemos dizer que o EHQ e o MMA estão “altamente conectados/correlacionados”. Por outro lado, férmions relativísticos e não-relativísticos com MMA também já foram estudados no modelo padrão supersimétrico [202], simetria CPT/Lorentz [203], matéria escura [204-208], espalhamento luz por luz [209, 210], efeito Aharonov-Casher [211-213], estrelas de nêutrons, quarks e híbridas [214-218], fase quântica Anandan NC [219] e no OD (um modelo de OHQ relativístico para férmions, ou seja, uma versão relativística do OHQ para férmions) [220-224].

Nas últimas décadas, os efeitos inerciais (aqui chamaremos de efeitos não-inerciais) gerados por referenciais não-inerciais (referenciais girantes/rotativos), tais como as forças de inércia/fictícias (forças de Coriolis, centrífuga e de Euler, por exemplo), sobre sistemas físicos microscópicos (quânticos e clássicos) têm sido amplamente estudados na literatura, onde possivelmente os estudos mais antigos (e técnicos) sobre esta temática são: o efeito Sagnac (interferência óptica induzida por rotação), investigado em 1913 por Georges Sagnac [225–228], e o efeito Barnett (magnetização induzida por rotação), investigado em 1915 por Samuel J. Barnett [229–233]. No contexto da MQNR, efeitos não-inerciais possuem uma especial relevância em vários sistemas da matéria condensada (teórica e experimental), tal como em condensados de Bose-Einstein [234–236], gases atômicos [237,238], correntes de spin (spintrônica) [233,239–242], fulerenos (C_{60}) [243,244], anéis quânticos [245–248], átomos e moléculas com momento de dipolo elétrico (EDM) [249], poláritons [250], momento de London (campos magnéticos originados por supercondutores girantes) [251–255] e o próprio EHQ [233,239,241,256–261]. Ainda neste contexto, mas agora considerando a rotação da Terra, efeitos não-inerciais já foram usados para induzir o fenômeno de interferência quântica de nêutrons [262–265]. Para mais informações sobre MQNR (usual e NC) em referenciais girantes indicamos as Refs. [266–269].

Já no contexto da MQR (ou física de partículas), efeitos não-inerciais também possuem muita relevância, por exemplo, é aplicado no estudo de neutrinos interagindo com a matéria bem como em oscilações de neutrinos [270–272], bósons escalares [273,274], energia de Casimir no espaço-tempo com uma dimensão extra compactada [275], gás ideal relativístico [276,277], plasmas de quark-glúons [278], oscilador para bósons vetoriais e escalares [279,280], violação da simetria de Lorentz [281], etc. No entanto, considerando agora, em especial, férmions de Dirac (ED ou a lagrangiana de Dirac) em referenciais girantes (“férmions não-inerciais”) [282–284], podemos estudar problemas envolvendo efeitos de contorno em matéria fermiônica [285], momento de inércia e termodinâmica [286], cromodinâmica quântica [287,288], núcleos atômicos [289–293], supercondutores (momento de London relativístico) [294–296], transições de fase [297], quebra de simetria quiral [298], nanotubos de carbono [299], fulerenos [300–302], interações eletrofracas em pulsares [303], coerência quântica [304] e o próprio EHQ (3D) [305]. Além disso, a ED com MMA e MDE já foi usada para investigar a influência da rotação e gravidade da Terra em experimentos de física de altas energias [306]. Recentemente, o efeito Barnett relativístico tem sido estudado com a polarização de spin [307].

Além dos efeitos não-inerciais, outro tipo de efeitos que também tem ganhado bastante notoriedade na literatura são os efeitos (topológicos/gravitacionais) gerados por cordas cósmicas (CCs) [308–321], onde tais efeitos dão origem, por exemplo, à quantização da energia [322], auto-forças (ou forças de auto-interação) [323–328], polarização do vácuo [329], lentes gravitacionais [330–333], violação da causalidade através de curvas tipo-tempo fechadas

(CTCs em inglês) [334] e o atraso de tempo gravitacional [335]. Em particular, a teoria das CCs (não confundir com a teoria das cordas) foi introduzida pela primeira vez na literatura por Tom W. B. Kibble no final dos anos 70 [308], e além de serem um tipo “peculiar/exótico” de defeito topológico gravitacional linear (ainda hipotético), e previstos por alguns modelos da teoria da grande unificação, são objetos relativísticos altamente densos, estáveis, infinitamente longos e retos (defeito 1D), podem ser estáticas ou girantes (com ou sem momento angular), possuem simetria cilíndrica, é um dos modelos exatamente solúveis da TRG (soluções de “Kerr 3D” correspondem às soluções de CCs em 4D [336]), provavelmente surgiram devido às transições de fase cosmológicas com quebra de simetria rotacional (ou quebra espontânea da simetria de gauge) durante os estágios iniciais do universo primitivo (Big Bang), apresentam uma geometria localmente plana (mas não globalmente) com uma singularidade cônica (ou topologia cônica não-trivial) na origem e são caracterizadas principalmente por um déficit angular planar: o ângulo total ao redor da CC é inferior à 360° (logo, são defeitos cônicos). Além disso, CCs também poderiam ter contribuído para a anisotropia da radiação cósmica de fundo em micro-ondas e, conseqüentemente, para a estrutura em larga escala do universo, onde modelos mais realistas de CCs sem singularidades até já foram propostos (“CCs de Hiscock-Gott”) [327–331].

Outros exemplos de defeitos topológicos interessantes do tipo-cosmológico são as paredes de domínio (defeitos bidimensionais ou 2D), texturas (defeitos tridimensionais ou 3D) e monopolos globais (defeitos pontuais ou 0D), onde ambos também poderiam ter sido formados por quebras espontâneas de simetrias durante as transições de fase do universo primitivo [308, 311, 312, 337–342]. Do ponto de vista observacional, a Ref. [343] usou os dados da Missão Planck 2013 para fornecer novas restrições rigorosas sobre as CCs e outros defeitos cosmológicos. Além disso, alguns detectores vão tentar procurar por sinais de ondas gravitacionais que tenham algum vestígio de CCs, que são: o Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro a Laser (LIGO) [344–347], a Antena Espacial de Interferômetro a Laser (LISA) [348–351] e o Observatório Nanohertz da América do Norte para Ondas Gravitacionais (NANOGrav) [352–354]. Do ponto de vista da matéria condensada, há um tipo de defeito (“distorção, imperfeição ou deformação”) chamado de desclinações ou disclinações (em cunha), no qual aparecem em cristais líquidos e sólidos cristalinos [355–360], que apresentam algumas semelhanças com as CCs: são defeitos topológicos lineares com uma singularidade cônica que quebram a simetria rotacional [316, 357–359, 361]. Ou seja, uma desclinação pode ser vista como sendo o análogo não-relativístico (não o limite não-relativístico) de uma CC, onde o seu elemento de linha corresponde à parte espacial do elemento de linha da CC [362–366]. Portanto, isso fortalece ainda mais o fato de que a física da matéria condensada é um ótimo laboratório para “testar” vários modelos da cosmologia e gravitação [367–374]. A título de ilustração, até o grafeno já foi estudado no “espaço-tempo da CC” e na presença de desclinações [375–381].

Ao longo dos últimos anos, alguns pesquisadores usaram a combinação dos efeitos não-inerciais de referenciais girantes com os efeitos topológicos de CCs (estáticas) ou desclinações para estudar diversos sistemas interessantes da MQNR e da MQR. Por exemplo, em MQNR tal combinação já foi aplicado no estudo de pontos quânticos [382], anéis quânticos [383], espalhamento quântico [384], estados ligados para partículas com MMA e MDE [385, 386], fases quânticas geométricas [387] e no próprio EHQ [388]. Já em MQR, tal combinação já foi aplicado no estudo do OD e OKG [389-391], efeito Aharonov-Casher [392], anéis quânticos Aharonov-Bohm [393], bósons escalares [394-396] e fases quânticas geométricas [387]. Recentemente o OD e OKG foram estudados sob a influência de efeitos NCs e não-inerciais no espaço-tempo da CC [397, 398]. No entanto, estas duas referências tem duas “limitações”, que são: a primeira é que apenas o caso estático (usual) foi considerado, ou seja, o momento angular intrínseco (spin) da CC foi totalmente ignorado, e a segunda é que apenas a NC dos momentos foi considerada. Portanto, para uma descrição mais geral, ou seja, um background (espaço-tempo) mais geral e, conseqüentemente, poder extrair mais informações física do sistema, aqui, consideramos uma CC com um spin não-nulo (chamada de CC girante) e também a NC das posições, respectivamente. Aliás, o artigo que mais se aproxima de uma CC girante com efeitos não-inerciais é o da Ref. [399], onde bósons escalares (de Klein-Gordon) foram estudados em um referencial girante no espaço-tempo com um “deslocamento no tempo”.

A presente tese tem como objetivo:

- Investigar as soluções de estado ligado do efeito Hall quântico não-comutativo (EHQNC) com MMA em três diferentes cenários relativísticos: o espaço-tempo de Minkowski (caso plano inercial), o espaço-tempo da CC girante (caso curvo inercial) e o espaço-tempo da CC girante com efeitos não-inerciais (caso curvo não-inercial).

Portanto, trabalhamos em dois diferentes backgrounds relativísticos, onde um é exclusivo da TRE (o espaço-tempo de Minkowski) e o outro da TRG (o espaço-tempo da CC girante), ambos em $(2 + 1)$ -dimensões. Em particular, nos dois primeiros cenários o referencial do sistema é inercial (temos o EHQNC plano e curvo inerciais), enquanto que no terceiro é não-inercial, ou seja, há um referencial girante no espaço-tempo da CC girante (temos o EHQNC curvo não-inercial). Dessa forma, investigamos as soluções de estado ligado sob a influência de efeitos topológicos (ou de curvatura), efeitos não-inerciais (gerados unicamente por um referencial girante) e de efeitos NCs, respectivamente. No que diz respeito às soluções de estado ligado, focamos nossa atenção principalmente nas autofunções (spinor de Dirac e a função de onda) e, em especial, nos autovalores de energia ou autoenergias (espectro de energia ou níveis de Landau), ou seja, nas soluções de uma equação de autovalores. Além disso, através dos spinores de Dirac normalizados, também obtemos e analisamos a densidade de probabilidade.

Para alcançar tais soluções, usamos a equação de Dirac não-comutativa (EDNC) em coordenadas polares (ρ, φ, t) com acoplamentos mínimo e não-mínimo. Então, para incluir o espaço-tempo da CC girante (fixar o background), fizemos uma mudança na coordenada angular (ângulo polar) e também na coordenada temporal, ou seja: $\varphi \rightarrow \alpha\varphi$ e $t \rightarrow t + \beta\varphi$, onde $\alpha \equiv 1 - \frac{4GM}{c^2}$ é um parâmetro topológico (ou de curvatura) adimensional e $\beta \equiv \frac{4G\bar{J}}{c^4}$ é um parâmetro rotacional com dimensão de tempo (outra forma equivalente seria fazer: $ct \rightarrow ct + \beta\varphi$, onde agora $\beta \equiv \frac{4G\bar{J}}{c^3}$ teria a dimensão de espaço [317]), sendo $\bar{M} \geq 0$ a densidade linear de massa (massa por unidade de comprimento) e $\bar{J} \geq 0$ a densidade linear de momento angular (momento angular por unidade de comprimento) da CC, e G e c são a constante gravitacional e a velocidade da luz, respectivamente. Já para incluir o referencial girante S' , também fizemos uma mudança na coordenada angular, dada por: $\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$, onde $\omega \geq 0$ (rotação anti-horária) é a velocidade angular constante ao longo do seu eixo de rotação, que é o eixo- z (aqui podemos considerar um disco ou plataforma circular girante [259]). Dessa forma, somente as forças de Coriolis e centrífuga atuam no sistema e, conseqüentemente, um campo magnético uniforme aplicado a partir do laboratório (referencial inercial S) é sentido pelos férmions no referencial girante como um campo elétrico ($\vec{E}' = \vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{B} \geq 0$) e um campo magnético ($\vec{B}' = \vec{B} \geq 0$) [240, 257].

Esta tese está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, fizemos uma breve revisão do formalismo sobre o espaço de fase NC em duas dimensões (caso não-relativístico) e em $(2+1)$ -dimensões (caso relativístico). No Capítulo 3, estudamos a EDNC no espaço-tempo de Minkowski, onde obtemos suas soluções e a densidade de probabilidade. No Capítulo 4, estudamos a EDNC em um espaço-tempo curvo genérico $(2+1)$ -dimensional via formalismo das tetradas (ou conexões de spin). No Capítulo 5, estudamos a EDNC no espaço-tempo da CC girante, onde obtemos suas soluções e a densidade de probabilidade (no limite não-relativístico focamos apenas no espectro). No Capítulo 6, estudamos a EDNC em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante e depois obtemos suas soluções e a densidade de probabilidade (no limite não-relativístico focamos apenas no espectro). Neste último cenário, resolvemos analiticamente a equação diferencial considerando duas boas aproximações: a primeira é que a velocidade linear do referencial girante é muito menor que a velocidade da luz, e a segunda é que o acoplamento entre o spin da CC e a velocidade angular do referencial girante é muito fraco (acoplamento spin-rotação fraco). No Capítulo 7, apresentamos nossas conclusões e algumas perspectivas futuras. Por questão de conveniência, aqui usamos o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = G = 1$), o espaço-tempo com uma assinatura dada por $(+, -, -)$, a convenção de soma de Einstein, assim como o pacote latex chamado Tikz para fazer todos os gráficos e o software Wolfram Mathematica para auxiliar nos cálculos associados (principalmente) ao espaço-tempo da CC girante. Finalizamos este trabalho com três apêndices: A equação de Dirac, a origem do efeito Hall quântico e a publicação relacionada a esta tese.

2 O ESPAÇO DE FASE NÃO-COMUTATIVO

Na MQNR bidimensional (2D) usual, um espaço de fase quântico (ou espaço de fase comutativo), é definido através da substituição das variáveis canônicas clássicas de posição e de momento (linear ou canônico), dadas por x_i e p_j , pelos seus respectivos operadores quânticos, agora escritos como \hat{x}_i e \hat{p}_j (operadores posição e momento), no qual obedecem às seguintes relações/regras de comutação (canônicas) de Heisenberg (Álgebra de Heisenberg usual) [126]

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (i, j = 1, 2 = x, y), \quad (2.1)$$

onde $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ é o delta de Kronecker (um tensor simétrico), ou a métrica euclidiana usual. Consequentemente, as relações (princípio) de incerteza de Heisenberg são escritas como

$$\Delta\hat{x}_i\Delta\hat{p}_j \geq \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad \Delta\hat{x}_i\Delta\hat{x}_j = 0, \quad \Delta\hat{p}_i\Delta\hat{p}_j = 0, \quad (2.2)$$

onde usamos para tal o fato de que o produto das incertezas (desvios-padrão) de dois operadores hermitianos é dado por [176, 400]

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2, \quad (2.3)$$

sendo $\langle . \rangle$ usado para simbolizar o valor esperado ou o valor médio de um dado operador (ou observável). Basicamente, este formalismo afirma que não podemos medir simultaneamente e com alta precisão dois operadores que não comutam entre si (operadores incompatíveis), ou seja, quanto mais sabemos da medida de um operador (observável seria um nome mais apropriado), menos sabemos a do outro (e vice-versa). No entanto, como existe o delta de Kronecker em (2.2), esta afirmação só é verdadeira quando os operadores estão na mesma “direção”. Desse modo, não podemos medir simultaneamente e com uma precisão arbitrária a posição e o momento de uma partícula na mesma direção ($\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{p}_x$ ou $\Delta\hat{y}$ e $\Delta\hat{p}_y$), mas podemos em direções diferentes ($\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{p}_y$ ou $\Delta\hat{y}$ e $\Delta\hat{p}_x$), bem como medir simultaneamente todas as posições ($\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{y}$) ou todos os momentos ($\Delta\hat{p}_x$ e $\Delta\hat{p}_y$).

Agora, para definir um espaço de fase quântico NC, ou simplesmente, um espaço de fase NC [133, 155-159], as relações em (2.1) devem obedecer daqui em diante às seguintes relações de comutação (não-canônicas) de Heisenberg deformadas (Álgebra de Heisenberg deformada ou simplesmente Álgebra NC)

$$[\hat{x}_i^{NC}, \hat{p}_j^{NC}] = i\delta_{ij} \left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right), \quad [\hat{x}_i^{NC}, \hat{x}_j^{NC}] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i^{NC}, \hat{p}_j^{NC}] = i\eta_{ij}, \quad (2.4)$$

onde os operadores NCs dados por \hat{x}_i^{NC} e \hat{p}_i^{NC} são definidos como segue

$$\hat{x}_i^{NC} = \hat{x}_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j, \quad \hat{p}_j^{NC} = \hat{p}_j + \frac{1}{2}\eta_{jk}\hat{x}_k, \quad (\hat{x}_i = \delta_{ij}\hat{x}^j; \hat{p}_j = \delta_{ij}\hat{p}^i = -i\partial_j; i, j, k = 1, 2), \quad (2.5)$$

com $\theta_{ij} \equiv \theta\epsilon_{ij}$ e $\eta_{jk} \equiv \eta\epsilon_{jk}$ sendo “tensores” constantes antissimétricos, ou parâmetros de deformação real, ϵ_{ij} é o símbolo de Levi-Civita (um pseudotensor), e $\theta \geq 0$ e $\eta \geq 0$ são os parâmetros NCs de posição (ou espaço) e de momento com dimensões de (comprimento)² e (momento)², cujos valores de acordo com a Ref. [133] podem ser: $\theta \simeq 4.0 \times 10^{-40} \text{ m}^2$ e $\eta \simeq 2.3 \times 10^{-61} \text{ kg}^2\text{m}^2\text{s}^{-2}$ (neste caso foi usado o tal do poço quântico gravitacional NC). Do ponto de vista fenomenológico, supostas assinaturas da existência de NC foram investigadas através do decaimento de káons ($K \rightarrow \pi\gamma$) e de bósons vetoriais ($Z \rightarrow \gamma\gamma$) [401, 402], da interação fóton-neutrino [403], da birrefringência do vácuo [404] e em óptica quântica [405]. Além disso, um dos efeitos da NC do espaço-tempo é que ela implica diretamente na violação (quebra) da invariância (simetria) de Lorentz (uma violação amplamente estudada na literatura) [133, 406, 407]. Portanto, caso algum dia tal violação for observada, isso poderia ser uma evidência da NC. Então, para mais detalhes sobre a fenomenologia da NC indicamos as Refs. [408, 409]. Além disso, é interessante mencionar aqui que um “espaço de fase NC” também pode surgir naturalmente na física da matéria condensada, ou seja, a partir do próprio EHQ [126]. De fato, a teoria microscópica do EHQ é formulada de certa forma dentro de uma GNC [59]. Por exemplo, como o momento total (momento cinético) de um elétron ($q = -e$) em um campo magnético constante ($\vec{B} = B\vec{e}_z$) é dado por: $\vec{\Pi} = \vec{p} - q\vec{A}$ (acoplamento mínimo), onde $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ é o operador momento e $\vec{A} = A_i\vec{e}_i$ é o potencial vetor (gauge de Landau ou simétrico) com $A_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j$ sendo suas componentes, temos as seguintes relações de comutação não-canônicas [113, 126]

$$[\hat{x}_i, \hat{\Pi}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_j] = iqB\epsilon_{ij} = -\frac{i}{l_B^2}\epsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.6)$$

onde $\hat{\Pi}_{i(j)} = \hat{p}_{i(j)} - q\hat{A}_{i(j)}$ e $l_B \equiv \frac{1}{\sqrt{eB}} > 0$ é o tal do comprimento magnético (uma escala de comprimento fundamental na presença de um campo magnético). Portanto, como vemos claramente em (2.6), o momento total não comuta entre si, conseqüentemente, o espaço de momento na presença de um campo magnético torna-se NC (temos um “espaço de fase NC”). Por outro lado, considerando agora que $\hat{\Pi}_{i(j)}$ seja escrito em um espaço de fase NC (caso geral), temos $\hat{\Pi}_{i(j)}^{NC} = \hat{p}_{i(j)}^{NC} - q\hat{A}_{i(j)}^{NC}$ e, portanto, satisfaz a seguinte relação de comutação

$$[\hat{\Pi}_i^{NC}, \hat{\Pi}_j^{NC}] = i \left[\eta_{ij} + qB\epsilon_{ij} \left(1 + \frac{\theta\eta}{4} \right) + \left(\frac{qB}{2} \right)^2 \theta_{ij} \right]. \quad (2.7)$$

Por exemplo, para $\eta_{ij} = \theta_{ij} = 0$ (ausência do espaço de fase NC), obtemos o terceiro comutador em (2.6), e para $q = 0$ (ausência de carga elétrica), obtemos o terceiro comutador

em (2.4), respectivamente. Além disso, também é interessante mencionar que para $i = 1 = x$ e $j = 2 = y$ com $q = -e$, obtemos o seguinte comutador [169]

$$[\hat{\Pi}_1^{NC}, \hat{\Pi}_2^{NC}] = -i \left[eB - \frac{e^2 B^2 \theta}{4} - \eta + \frac{eB\theta\eta}{4} \right] = -ieB \left[1 - \frac{eB\theta}{4} - \frac{\eta}{eB} + \frac{\theta\eta}{4} \right], \quad (2.8)$$

ou ainda

$$[\hat{\Pi}_1^{NC}, \hat{\Pi}_2^{NC}] = -ieB\tau\lambda, \quad (2.9)$$

onde os parâmetros reais adimensionais τ e λ são definidos como segue [167]

$$\tau \equiv \left(1 - \frac{eB\theta}{4} \right), \quad \lambda \equiv \left(1 - \frac{\eta}{eB} \right). \quad (2.10)$$

Como veremos nos próximos capítulos, estes dois parâmetros estarão presentes em todos os espectros de energia, onde o produto de ambos deve ser sempre positivo ($\tau\lambda > 0$), caso contrário, ou seja, se for negativo ($\tau\lambda < 0$), então correremos o risco de ter energias imaginárias/complexas (fisicamente impossível), e se for nulo ($\tau\lambda = 0$), o espectro não dependerá de θ , η e B (também não queremos isso). Além disso, essa imposição (condição) permitirá obter uma inequação polinomial do segundo grau para B , onde somente a solução para $\tau\lambda > 0$ faz sentido (na ausência do espaço de fase NC o intervalo usual de B só é obtido nesta condição).

Por outro lado, a relação entre o conjunto de variáveis (operadores) NCs, dado por $\{\hat{x}_i^{NC}, \hat{p}_j^{NC}\}$ (aqui não é o anti-comutador), com o conjunto de variáveis comutativas (usuais), dado por $\{\hat{x}_i, \hat{p}_j\}$, é uma consequência de uma transformação linear (não-canônica) conhecida como transformação de Darboux, ou seja, as variáveis NCs são construídas através das variáveis comutativas por meio de uma transformação linear [133, 155, 158]. Além disso, o espaço NC causa uma mudança no produto usual de duas funções arbitrárias $F(\vec{x})$ e $G(\vec{x})$, onde agora tal produto é chamado de produto estrela ou produto Moyal, cuja definição é dada da seguinte forma [155, 410]

$$F(\vec{x}) \star G(\vec{x}) = F(\hat{x}_i^{NC}) G(\hat{x}_i^{NC}) \equiv F(\vec{x}) e^{(i/2)(\overleftarrow{\partial}_x \theta_{ij} \overrightarrow{\partial}_{x_j})} G(\vec{x}) = F(\vec{x}) e^{(i\theta/2)(\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \overrightarrow{\partial}_x)} G(\vec{x}), \quad (2.11)$$

onde implica

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j]_\star = \hat{x}_i \star \hat{p}_j - \hat{p}_j \star \hat{x}_i = \hat{x}_i^{NC} \hat{p}_j^{NC} - \hat{p}_j^{NC} \hat{x}_i^{NC} = [\hat{x}_i^{NC}, \hat{p}_j^{NC}], \quad (2.12)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j]_\star = \hat{x}_i \star \hat{x}_j - \hat{x}_j \star \hat{x}_i = \hat{x}_i^{NC} \hat{x}_j^{NC} - \hat{x}_j^{NC} \hat{x}_i^{NC} = [\hat{x}_i^{NC}, \hat{x}_j^{NC}], \quad (2.13)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j]_\star = \hat{p}_i \star \hat{p}_j - \hat{p}_j \star \hat{p}_i = \hat{p}_i^{NC} \hat{p}_j^{NC} - \hat{p}_j^{NC} \hat{p}_i^{NC} = [\hat{p}_i^{NC}, \hat{p}_j^{NC}]. \quad (2.14)$$

De fato, na ausência da NC da posição ($\theta = 0$), o produto estrela é simplesmente o produto usual $F(\vec{x})G(\vec{x})$. Além disso, as relações de incerteza numa abordagem NC agora são

escritas como

$$\Delta\hat{x}_i^{NC}\Delta\hat{p}_j^{NC} \geq \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(1 + \frac{\theta\eta}{4}\right), \quad \Delta\hat{x}_i^{NC}\Delta\hat{x}_j^{NC} \geq \frac{1}{2}|\theta_{ij}|, \quad \Delta\hat{p}_i^{NC}\Delta\hat{p}_j^{NC} \geq \frac{1}{2}|\eta_{ij}|. \quad (2.15)$$

Como vemos nas duas últimas expressões acima, agora podemos generalizar o princípio da incerteza, no qual chamaremos de o “princípio da incerteza NC”, no qual afirma que: “em um espaço de fase NC, não podemos medir simultaneamente e com uma precisão arbitrária todas as posições ($\Delta\hat{x}^{NC}$ e $\Delta\hat{y}^{NC}$) ou todos os momentos ($\Delta\hat{p}_x^{NC}$ e $\Delta\hat{p}_y^{NC}$)”. É interessante mencionar também que a primeira relação em (2.15) leva ao aparecimento de uma constante de “Planck efetiva (effective em inglês) ou NC” que depende dos parâmetros θ e η , ou seja (restaurando \hbar)

$$\hbar_{eff} = \hbar^{NC} = \hbar(1 + \xi) \quad (2.16)$$

onde $\xi \equiv \frac{\theta\eta}{4\hbar^2}$. Então, no limite $\xi \ll 1$ ou $\xi \rightarrow 0$, recuperamos as relações de incerteza usuais. Para uma discussão mais detalhada sobre os possíveis valores (hipotéticos) de ξ , indicamos a Ref. [133] (poço quântico gravitacional NC).

Por último, mas não menos importante, o espaço de fase NC pode ser expandido também para incluir o espaço-tempo de Minkowski (2 + 1)-dimensional da MQR [133, 135, 139]. Desse modo, temos

$$[\hat{x}_\mu^{NC}, \hat{p}_\nu^{NC}] = i\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\theta_\mu^\sigma\eta_{\nu\sigma}\right), \quad [\hat{x}_\mu^{NC}, \hat{x}_\nu^{NC}] = i\theta_{\mu\nu}, \quad [\hat{p}_\mu^{NC}, \hat{p}_\nu^{NC}] = i\eta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2). \quad (2.17)$$

onde

$$\hat{x}_\mu^{NC} = \hat{x}_\mu - \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\hat{p}^\nu, \quad \hat{p}_\nu^{NC} = \hat{p}_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}\hat{x}^\sigma, \quad (\hat{x}_\mu = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\hat{x}^\nu; \hat{p}_\nu = \tilde{\eta}_{\nu\mu}\hat{p}^\mu = i\partial_\nu), \quad (2.18)$$

e

$$F(\vec{x}) \star G(\vec{x}) = F(\hat{x}_\mu^{NC})G(\hat{x}_\mu^{NC}) \equiv F(\vec{x})e^{(i/2)(\overleftarrow{\partial}_{x^\mu}\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_{x^\nu})}G(\vec{x}), \quad (2.19)$$

sendo $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \tilde{\eta}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ o tensor métrico plano (métrica de Minkowski) [108]. Aqui, utilizamos os índices dados pelas letras Gregas para representar o espaço-tempo de Minkowski (espaço-tempo plano), como costuma ser feito na literatura (na ausência de curvatura ou de gravidade). No entanto, como nesta tese também estamos trabalhando em um espaço-tempo curvo, às vezes é convenção na literatura usar os índices dados pelas letras Gregas (μ, ν, α, \dots) para representar um espaço-tempo curvo (este seria o nosso quadro de referência geral) e os índices dados pelas letras Latinas (a, b, c, \dots) para representar um espaço-tempo plano (este seria o nosso quadro de referência local). Além disso, nesta tese consideramos apenas a NC das componentes espaciais de \hat{x}_μ^{NC} e \hat{p}_ν^{NC} , onde implica: $\theta_{0i} = \eta_{0j} = 0$ ($\theta_{ij} \neq 0$ e $\eta_{ij} \neq 0$), caso contrário, a unitariedade (causalidade e localidade) da MQ não seria preservada [126, 133–135].

3 A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI (2+1)-DIMENSIONAL

A equação de onda (movimento) que governa a dinâmica quântica relativística do EHQ com MMA é dada pela seguinte ED tensorial (“equação de Dirac-Pauli”) com acoplamentos mínimo e não-mínimo (“corrigida pela QED”) [1-3, 172-174, 306]

$$\left[\gamma^a (p_a - qA_a) + \frac{\mu_m}{2} \sigma^{ab} F_{ab} - m_0 \right] \Psi_D(\vec{r}, t) = 0, \quad (a, b = 0, 1, 2), \quad (3.1)$$

onde $\gamma^a = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ são as matrizes gama de Dirac usuais no qual satisfazem a relação de anti-comutação da Álgebra de Clifford: $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\tilde{\eta}^{ab} I_{2 \times 2}$ ($I_{2 \times 2}$ é matriz identidade de ordem 2), $p_a = i\partial_a = i\frac{\partial}{\partial x^a} = (p_0, -\vec{p})$ é o operador momento 3D (trivetor momento), $\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$ é um tensor anti-simétrico (não tem um nome específico na literatura), $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ é o tensor campo eletromagnético (também chamado de tensor de Faraday), sendo $A_a = (A_0, -\vec{A})$ o potencial eletromagnético (campo eletromagnético externo ou campo de gauge), $\Psi_D(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}^2$ é o spinor de Dirac de duas componentes (matriz/vetor coluna de dois elementos) [411], e $q = \pm e$, m_0 e $\mu_m = \mu_m^{QED} = \mu_{anômalo} \equiv a\mu_B$ são a carga elétrica (“constante de acoplamento mínimo”), a massa de repouso e o MDM do férmion (“constante de acoplamento não-mínimo ou de Pauli”), sendo a o MMA e $\mu_B = \frac{e}{2m_0} > 0$ é o famoso magnéton de Bohr (quantum de MDM). Então, considerando (nesta tese) o férmion/antiférmion mais “simples” e elementar, ou seja, o elétron e o pósitron, o MMA são dados por: $a_{e^-} = 0.0011596521884$ e $a_{e^+} = 0.0011596521879$ [180]. Além disso, por simplicidade omitiremos daqui por diante o símbolo para operadores quânticos.

Então, partindo do fato de que o acoplamento mínimo, dado por: $\gamma^a (p_a - qA_a)$, e o acoplamento não-mínimo (sem $\mu_m/2$), dado por: $\sigma^{ab} F_{ab}$, são escritos como segue [1, 6, 108, 126]

$$\gamma^a (p_a - qA_a) = \gamma^0 (p_0 - qA_0) + \gamma^i (p_i - qA_i) = i\gamma^0 \partial_t + \gamma^i (p_i - qA_i), \quad (p_i = -p^i, A_i = -A^i), \quad (3.2)$$

$$\sigma^{ab} F_{ab} = i\gamma^a \gamma^b F_{ab} = 2i\gamma^0 \gamma^i F_{0i} + i\gamma^j \gamma^k F_{jk} = 2i\gamma^0 \gamma^i E_i - 2\Sigma^3 B_3 = 2i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{E} - 4\vec{S} \cdot \vec{B} = -4\vec{S} \cdot \vec{B}, \quad (3.3)$$

a Eq. (3.1) toma a forma

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \gamma^i (p_i - qA_i) - 2\mu_m \vec{S} \cdot \vec{B} - m_0 \right] \Psi_D(\vec{r}, t) = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (3.4)$$

ou em função do (operador) Hamiltoniano de Dirac $H_D(\vec{r}, \vec{p})$, como (uma ED diferencial)

$$H_D(\vec{r}, \vec{p}) \Psi_D(\vec{r}, t) = \left[-\gamma^0 \gamma^i \left(p_i - \frac{qB}{2} \varepsilon^{ij} x_j \right) + 2\mu_m \gamma^0 \vec{S} \cdot \vec{B} + \gamma^0 m_0 \right] \Psi_D(\vec{r}, t) = i\partial_t \Psi_D(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

onde $\vec{B} = \vec{B}_{ext} = (0, 0, B)$ e $\vec{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ são o campo magnético externo uniforme e o campo elétrico externo (aqui consideramos nulo), e são pseudovetores em $(2+1)$ -dimensões, $B = B_3 = B_z = const. \geq 0$ é o módulo (pseudoscalar) de \vec{B} , $A_i = -A^i = \frac{B}{2} \varepsilon^{ij} x_j$ ($x_j = -x^j$) são as componentes espaciais do potencial vetor \vec{A} ($\neq \vec{A}(t)$), A_0 é o potencial escalar ou eletrostático (nulo também), $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$ é o operador (vetor) de spin, com $\vec{\Sigma} = \vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ sendo as matrizes de Pauli 2×2 (matrizes sigma). Diante disso, nota-se que o campo magnético do EHQNC se “adapta” muito bem em $(2+1)$ -dimensões, uma vez que não há B_x e B_y em F_{ab} , somente B_z .

Para obtermos a EDNC, é preciso aplicar o produto estrela na Eq. (3.5), ou seja: $\Psi_D \rightarrow \star \Psi_D$. Desse modo, temos a seguinte EDNC

$$H_D(\vec{r}, \vec{p}) \star \Psi_D(\vec{r}, t) = i \partial_t \star \Psi_D(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

ou em função das coordenadas e momentos NCs, como (“some” a estrela e aparece x_j^{NC} e p_i^{NC})

$$H_D^{NC}(x_j^{NC}, p_i^{NC}) \Psi_D^{NC}(\vec{r}, t) = i \partial_t \Psi_D^{NC}(\vec{r}, t), \quad (3.7)$$

onde o Hamiltoniano de Dirac não-comutativo (HDNC) é dado por

$$H_D^{NC}(x_j^{NC}, p_i^{NC}) = \left[-\gamma^0 \gamma^i \left(p_i^{NC} - \frac{qB}{2} \varepsilon^{ij} x_j^{NC} \right) + 2\mu_m \gamma^0 \vec{S} \cdot \vec{B} + \gamma^0 m_0 \right], \quad (3.8)$$

sendo $\Psi_D^{NC}(\vec{r}, t) = \Psi_D^{NC}(x, y, t)$ o nosso spinor de Dirac NC (Cartesiano).

Portanto, sabendo que os momentos NCs p_i^{NC} e as posições NCs x_j^{NC} são escritos na forma

$$p_i^{NC} = p_i + \frac{1}{2} \eta \varepsilon_{im} x^m, \quad x_j^{NC} = x_j - \frac{1}{2} \theta \varepsilon_{jn} p^n, \quad (i, j, m, n = 1, 2), \quad (3.9)$$

obtemos explicitamente a seguinte EDNC (ou o HDNC) na forma vetorial

$$H_D^{NC} \Psi_D^{NC}(\vec{r}, t) = \left[\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot (\tau \vec{p} + e \lambda \vec{A}) + 2\mu_m \gamma^0 \vec{S} \cdot \vec{B} + \gamma^0 m_0 \right] \Psi_D^{NC}(\vec{r}, t) = i \partial_t \Psi_D^{NC}(\vec{r}, t), \quad (3.10)$$

onde $\tau = (1 - \frac{eB\theta}{4})$ e $\lambda = (1 - \frac{\eta}{eB})$, $q = -e < 0$ é a carga elétrica (elementar) do elétron e usamos o fato de que: $\gamma^i p_i \rightarrow -\vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ e $\gamma^i A_i \rightarrow -\vec{\gamma} \cdot \vec{A}$. Além disso, usamos também as seguintes relações: $\varepsilon_{ij} \varepsilon^{mn} = \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m$, $\varepsilon_{ij} \varepsilon^{in} = \delta_j^n$, $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ e $\delta_n^i p^n = p^i = -p_i$. No entanto, para que o termo cinético em (3.10) seja não-nulo (algo que não gostaríamos, caso contrário, não haverá soluções de estado ligado alguma), devemos impor que $\tau \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ [167], ou melhor, que $\tau \lambda > 0$. Como uma consequência disso, implicará em duas possibilidades para os valores de τ e λ , que são: $\tau > 0$ e $\lambda > 0$, ou $\tau < 0$ e $\lambda < 0$ e, portanto, restringirá (limitará) os possíveis valores de θ e η (para um dado valor arbitrário de eB), e também implicará (também veremos em breve) em uma inequação polinomial do segundo grau cuja solução restringirá (limitará) os possíveis valores do campo magnético (para um dado valor arbitrário de θ e η).

Agora, em coordenadas polares (ρ, φ, t) onde o elemento de linha (ao quadrado) é dado por: $ds_{Mink}^2 = \tilde{\eta}_{ab} dx^a dx^b = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2$ ($a, b = t, \rho, \varphi$), com $\tilde{\eta}_{ab} = \text{diag}(1, -1, -\rho^2)$ sendo a métrica de Minkowski polar (ou curvilínea), temos as seguintes expressões para o operador momento \vec{p} e o potencial vetor \vec{A} escritos neste sistema de coordenadas

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla} = -i\left(\vec{e}_\rho \partial_\rho + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \partial_\varphi\right) = (p_\rho, p_\varphi), \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = A_\varphi \vec{e}_\varphi = (0, A_\varphi), \quad (3.11)$$

onde $-\infty < t < \infty$ é a coordenada temporal, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ é a coordenada angular e $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq \rho < \infty$) é a coordenada radial polar, respectivamente.

Então, substituindo (3.11) em (3.10), obtemos uma EDNC em coordenadas polares (EDNC curvilínea), dada por

$$H_D^{NC} \Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = i\partial_t \Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t), \quad (3.12)$$

onde

$$H_D^{NC} = \left[-i\tau \gamma^0 \gamma^\rho \partial_\rho - \gamma^0 \gamma^\varphi \left(\frac{i\tau}{\rho} \partial_\varphi - e\lambda A_\varphi \right) + \mu_m \gamma^0 \Sigma^3 B + \gamma^0 m_0 \right], \quad (3.13)$$

com $\gamma^\rho = \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_\rho = \gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi$ e $\gamma^\varphi = \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_\varphi = -\gamma^1 \sin \varphi + \gamma^2 \cos \varphi$ sendo as componentes (“rotacionadas por um ângulo φ ”) do “vetor gama curvilíneo”, definido como: $\vec{\gamma}_{curv} \equiv (\gamma^\rho, \gamma^\varphi)$, e satisfaz a relação de anti-comutação da Álgebra de Clifford “curvilínea”, ou seja: $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\tilde{\eta}^{ab} I_{2 \times 2}$ ($a, b = t, \rho, \varphi$) [412–415]. Em particular, a mudança de coordenadas $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$ induz uma rotação (não confundir com uma rotação física/mecânica, que é para o terceiro cenário) de um ângulo φ do referencial local: $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \rightarrow (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, onde todos os “campos vetoriais”, incluindo $\vec{\gamma}$ (“vetor gama Cartesiano”), agora são expressos neste referencial ($\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_{cart} \rightarrow \vec{\gamma}_{curv}$) [415]. Contudo, tal rotação não foi aplicada à base do spinor (ou simplesmente, ao spinor) que, portanto, permanece a mesma em qualquer ponto do círculo. Consequentemente, as notações γ^ρ e γ^φ podem ser enganosas (por isso usamos aspas em: “rotacionadas por um ângulo φ ”) [415]. Além disso, por causa da presença do $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ em $\vec{\gamma}_{curv}$, é difícil prosseguir sem uma simplificação da Eq. (3.12). De acordo com as Refs. [412–416], para eliminar este obstáculo é necessário usar uma transformação de similaridade feita por um operador unitário $U(\varphi) = e^{-\frac{i\varphi \Sigma^3}{2}} \in SU(2)$ ($\Sigma^3 = \Sigma_3 = i\gamma^1 \gamma^2$) [412–416]. Basicamente, este operador tem a função de rotacionar à base do spinor (ou o spinor) sobre o eixo-z. Dessa forma, podemos converter (“rotacionar”) as matrizes gama curvilíneas γ^ρ e γ^φ nas matrizes gama (fixas) Cartesianas γ^1 e γ^2 (no qual sabemos trabalhar facilmente) da seguinte forma [412–416]

$$U^{-1}(\varphi) \gamma^\rho U(\varphi) = \gamma^1, \quad U^{-1}(\rho) \gamma^\varphi U(\varphi) = \gamma^2, \quad (3.14)$$

onde U (ou U^{-1}) comuta com γ^0 e, lógico, também com Σ^3 .

Então, através de uma transformação de similaridade e partindo do fato de que no EHQ (polar) a componente angular do potencial vetor associada ao campo magnético $\vec{B} = B\vec{e}_z$ é dado por: $A_\varphi(\rho) = \frac{1}{2}B\rho$ (gauge simétrico ou polar) [213, 258, 259, 413], podemos então reescrever a Eq. (3.12) como

$$H' \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = i\partial_t \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t), \quad (3.15)$$

onde H' é o Hamiltoniano transformado (“rotacionado”), no qual é escrito em função do Hamiltoniano original (“não-rotacionado”) H_D^{NC} da seguinte forma

$$H' = H_{rot} = U^{-1} H_D^{NC} U = \left[-i\tau\gamma^0\gamma^1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - \gamma^0\gamma^2 \left(\frac{i\tau}{\rho} \partial_\varphi - \frac{\lambda eB}{2} \rho \right) + \mu_m \gamma^0 \Sigma^3 B + \gamma^0 m_0 \right], \quad (3.16)$$

com $\psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) \equiv U^{-1}(\varphi) \Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t)$ sendo o nosso spinor de Dirac NC curvilíneo rotacionado (por simplicidade aqui chamaremos apenas de spinor curvilíneo) e $\Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t)$ é o nosso spinor de Dirac NC curvilíneo não-rotacionado (por simplicidade aqui chamaremos apenas de spinor NC, uma vez que já nomeamos $\Psi_D^{NC}(x, y, t)$ de spinor de Dirac NC), no qual ambos os spinores devem satisfazer as seguintes condições de periodicidade: $\psi_C^{NC}(\varphi \pm 2\pi) = -\psi_C^{NC}(\varphi)$ e $\Psi_D^{NC}(\varphi \pm 2\pi) = \Psi_D^{NC}(\varphi)$. Em particular, estas condições mostram que o spinor NC é uma função contínua (em todos os lugares) e periódica cujo período é dado por $\pm 2\pi$ (estado final = estado inicial), enquanto que o spinor curvilíneo só é uma função contínua periódica se o período for de $\pm 4\pi$, ou seja: $\psi_C^{NC}(\varphi \pm 4\pi) = \psi_C^{NC}(\varphi)$ (estado final = estado inicial) [416]. Além disso também é importante destacar aqui (será útil nos próximos capítulos) que a transformação de similaridade modifica o produto $\gamma^a A_a = -\vec{\gamma} \cdot \vec{A} = -\gamma^\varphi A_\varphi$ para $-\gamma^2 A_\varphi$, ou seja, $U^{-1} \gamma^a A_a U = -\gamma^2 A_\varphi$. No entanto, a transformação de similaridade não modifica o produto $\sigma^{ab} F_{ab} = -4\vec{S} \cdot \vec{B}$, ou seja, $U^{-1} \sigma^{ab} F_{ab} U = -4\vec{S} \cdot \vec{B}$ (U comuta com ou \vec{S} ou Σ^3).

Por outro lado, uma vez que estamos trabalhando em um espaço-tempo $(2+1)$ -dimensional com assinatura $(+, -, -)$, é preciso escrever as matrizes gama $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2) = (\gamma_0, -\gamma_1, -\gamma_2)$ e a matriz Σ^3 diretamente em termos das matrizes de Pauli, ou seja, $\gamma_1 = \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2$, $\gamma_2 = s\sigma_3 \sigma_2 = -is\sigma_1$ e $\gamma^0 = \Sigma^3 = \sigma_3$ [390, 392, 411, 413, 417-419], onde $s = \pm 1$ é um parâmetro (adimensional) chamado de parâmetro de spin e descreve os “dois estados de spin” do férmion planar: $s = +1$ é para o spin “up” (“↑”) e $s = -1$ é para o spin “down” (“↓”). Aqui, é importante destacar que s (uma “infeliz” notação aliás) não é o número quântico de spin $s = 1/2$ ou, o número quântico magnético de spin $m_s = \pm 1/2 = \uparrow\downarrow$. Entretanto, podemos tranquilamente escrever s em termo de m_s (e vice-versa), ou seja: $s \equiv 2m_s$ (ou $m_s \equiv s/2$). Em particular, este parâmetro surgiu em dois artigos feitos por C. R. Hagen e publicados pela Physical Review Letters (revista científica de alto impacto e prestígio) em 1990. O primeiro artigo tinha como intuito mostrar que o espalhamento de partículas relativísticas de spin-1/2

em um potencial Aharonov-Bohm só poderia ser “plausível/consistente” se o parâmetro s fosse levado em consideração [418]. Com respeito ao segundo artigo, o mesmo tinha como intuito mostrar que existe uma equivalência exata entre o efeito Aharonov-Bohm e o efeito Aharonov-Casher (para férmions planares de spin-1/2). Então, como ambos os fenômenos são puramente planares ($p_z = z = 0$), esta equivalência só seria possível se o potencial vetor e o campo elétrico fossem duais entre si, ou seja, que a seguinte relação fosse satisfeita: $eA_i = s\mu_m \varepsilon_{ij} E^j$ ($\mu_m = a\mu_B$), onde A_i são as componentes do potencial vetor do efeito Aharonov-Bohm e E^j são as componentes do campo elétrico do efeito Aharonov-Casher, respectivamente [419].

Agora, assumindo que nosso sistema é um sistema quântico estacionário (ou seja, o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo), podemos então definir um ansatz (“padrão”) para o espinor curvilíneo, cuja expressão é dada por [1, 390, 392, 412–414]

$$\psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{i(m_j \varphi - Et)}}{\sqrt{2\pi}} R(\rho). \quad (3.17)$$

Deste modo, podemos obter a partir da Eq. (3.15) a seguinte EDNC independente do tempo (equação de autovalores relativística)

$$H' R(\rho) = E R(\rho), \quad (3.18)$$

onde

$$H' = H_{2 \times 2} = \left[i\tau\sigma_1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - s\sigma_2 \left(\frac{i\tau m_j}{\rho} + \frac{\lambda e B}{2} \rho \right) + \mu_m B + \sigma_3 m_0 \right], \quad (3.19)$$

sendo E a energia total relativística do férmion (ou antiférmion), espectro relativístico ou os níveis de Landau relativísticos (que são os autovalores de energia), $C_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é uma constante que surge da normalização da parte angular do spinor com $m_j = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots$ sendo o número quântico magnético total que surge da condição de periodicidade do spinor curvilíneo e $R(\rho) \equiv (f_+(\rho), if_-(\rho))^T$ é a autofunção spinorial (“função de onda spinorial”), onde $f_\pm(\rho)$ são funções radiais reais (componentes espaciais do spinor ou simplesmente as componentes spinoriais) e o sobrescrito T significa a transposta do spinor. Além disso, a conexão entre m_j e m_l , onde m_l é o número quântico magnético orbital (ou simplesmente número quântico magnético), é dada por

$$J_z \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = -i\partial_\varphi \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = m_j \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = (m_l + m_s) \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t), \quad (3.20)$$

sendo $J_z = L_z + S_z$ e os valores de m_s e m_l são: $m_s = \pm\frac{1}{2} \equiv \frac{s}{2}$ e $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots = 0, 1s, 2s, \dots$, respectivamente (podemos ver que m_s e m_l podem ser escritos em termos do parâmetro de spin). Em particular, o termo “magnético” nos nomes (em m_j , m_l e m_s) refere-se ao MDM associado a cada tipo de momento angular (orbital, spin e total), de modo que estados com diferentes números quânticos magnéticos mudam de energia em um campo magnético de acordo com o

efeito Zeeman. Então, com respeito aos valores de m_s , já sabemos o seu significado (spin up ou down), mas quanto aos de m_l e m_j ? Bem, m_l são os autovalores de L_z (em unidade naturais), ou seja, fornece a magnetude do vetor (operador) momento angular orbital \vec{L} ao longo do eixo- z (“eixo quantizado”) positivo ou negativo (ou o sentido de rotação do férmion); e m_j são os autovalores de J_z , ou seja, fornece a magnetude do vetor (operador) momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ também ao longo do eixo- z [176]. Como uma “consequência” disso, L_z e S_z podem ser paralelos (mesma direção e sentidos) ou antiparalelos (mesma direção, mas de sentidos opostos), ou seja, se em J_z tivermos $m_l > 0$ e $m_s = +1/2$ ou $m_l < 0$ e $m_s = -1/2$, então L_z e S_z são paralelos ($L_z \parallel S_z$) [176]. Agora, se tivermos $m_l > 0$ e $m_s = -1/2$ ou $m_l < 0$ e $m_s = +1/2$, então L_z e S_z são antiparalelos ($L_z \perp S_z$) [176]. Como veremos em breve, isso influenciará diretamente no espectro de energia e em sua degenerescência. Além disso, como uma consequência da transformação de similaridade, J_z e não L_z , é descrito por $-i\partial_\varphi$, ou seja: $J_z \equiv J_z^{curv} = U^{-1} J_z^{cart} U = U^{-1} (-i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\Sigma^3) U = -i\partial_\varphi = xp_y - yp_x = (\vec{r} \times \vec{p})_z$ [412, 413].

Então, sabendo que as matrizes de Pauli (da MQNR) são escritas como segue

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

obtemos a partir de (3.18) um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, dadas por (acopladas no sentido de que a equação depende das duas componentes)

$$\frac{(m_0 + \mu_m B - E)}{\tau} f_+(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} + sm_0 \Omega \rho + \frac{s}{\rho} \left(m_j + \frac{s}{2} \right) \right] f_-(\rho), \quad (3.22)$$

$$\frac{(m_0 - \mu_m B + E)}{\tau} f_-(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} - sm_0 \Omega \rho - \frac{s}{\rho} \left(m_j - \frac{s}{2} \right) \right] f_+(\rho), \quad (3.23)$$

onde $\Omega = \Omega_{eff} \equiv \frac{\lambda \omega_c}{2\tau} \geq 0$ é uma frequência angular efetiva, com $\tau = (1 - m_0 \omega_c \theta / 4)$ e $\lambda = (1 - \eta / m_0 \omega_c)$, sendo $\omega_c = \omega_z = \frac{eB}{m_0} \geq 0$ ($\vec{\omega}_c = \omega_c \vec{e}_z$) a famosa frequência cíclotron (ou frequência de rotação), que é a velocidade angular (rad/s) do movimento circular do férmion/antiférmion no plano (uma importante aplicação disso para baixas energias é no espectrômetro de massa).

Portanto, substituindo (3.23) em (3.22), e depois (3.22) em (3.23), obtemos como resultado a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem (“EDNC quadrática” ou “EDNC de segunda ordem”) para o EHQNC com MMA no espaço-tempo de Minkowski

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\gamma_u^2}{\rho^2} - (m_0 \Omega \rho)^2 + E_u \right] f_u(\rho) = 0, \quad (3.24)$$

onde definimos

$$\gamma_u \equiv \left(m_j - \frac{su}{2} \right), \quad E_u \equiv \frac{(E - \mu_m B)^2 - m_0^2}{\tau^2} - 2m_0 \Omega \left(m_j + \frac{su}{2} \right), \quad (3.25)$$

sendo $u = \pm 1$ um parâmetro (“spinorial”) que descreve as duas componentes do spinor, ou seja, $u = +1$ descreve a componente superior e $u = -1$ a componente inferior (com $f_+ \neq f_-$), respectivamente. No entanto, se a Eq. (3.24) fosse aplicada ao grafeno, $u = +1$ ($u = -1$) rotularia o elétron (pósitron), ou os autovalores de σ_z (os dois “pseudospins”) [29, 32, 420].

3.1 Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico

Para resolver analiticamente (exatamente) a Eq. (3.24), é aconselhável introduzir uma nova variável (adimensional) no sistema, por exemplo, dada por: $r = m_0\Omega\rho^2 \geq 0$. Desse modo, através de uma mudança de variável, a Eq. (3.24) torna-se

$$\left[r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{\gamma_u^2}{4r} - \frac{r}{4} + \frac{E_u}{4m_0\Omega} \right] f_u(r) = 0. \quad (3.26)$$

Agora, vamos analisar o comportamento (ou limite) assintótico da Eq. (3.26) para r grande e r pequeno. Dessa forma, temos dois comportamentos, dados como segue [112, 421]

- Para $r \rightarrow 0$: temos $r f_u'' + f_u' - \frac{\gamma_u^2}{4r} f_u \approx 0$, cuja solução é $f_u(r) \approx r^{\frac{|\gamma_u|}{2}}$ ($|\gamma_u| \geq 0$);
- Para $r \rightarrow \infty$: temos $f_u'' - \frac{1}{4} f_u \approx 0$, cuja solução é $f_u(r) \approx e^{-\frac{r}{2}}$ ($r \geq 0$),

no qual implica em uma solução regular para (3.26) dada pelo seguinte ansatz

$$f_u(r) = C_u r^{\frac{|\gamma_u|}{2}} e^{-\frac{r}{2}} F_u(r), \quad (3.27)$$

onde $C_u > 0$ são constantes de normalização, $F_u(r) \neq 0$ são funções desconhecidas a ser determinadas e $f_u(r)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno (são duas) para ser uma solução normalizável (solução finita ou fisicamente aceitável) [422]

$$f_u(r \rightarrow 0) = \text{finita} \geq 0 \quad (\text{por causa de } |\gamma_u| \geq 0), \quad (3.28)$$

e

$$f_u(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (\text{por causa de } r \geq 0). \quad (3.29)$$

Como veremos em breve, dependendo do valor de γ_u (maior ou igual à zero) podemos ter uma densidade de probabilidade nula ou não-nula na origem (uma consequência da primeira condição de contorno).

Então, substituindo (3.27) em (3.26), obtemos uma equação diferencial para $F_u(r)$

$$\left[r \frac{d^2}{dr^2} + (|\Gamma_u| - r) \frac{d}{dr} - \varepsilon_u \right] F_u(r) = 0, \quad (3.30)$$

onde

$$|\Gamma_u| \equiv |\gamma_u| + 1, \quad \varepsilon_u \equiv \frac{|\Gamma_u|}{2} - \frac{E_u}{4m_0\Omega}. \quad (3.31)$$

De acordo com a literatura [14, 413], a Eq. (3.30) é uma equação de Laguerre associada ou generalizada, cuja solução são os bem conhecidos polinômios de Laguerre associados ou generalizados (um tipo de função especial), escritos como $F_u(r) = L_n^{|\gamma_u|}(r)$ (na verdade, há uma segunda solução, mas já foi excluída porque não é regular na origem). Consequentemente, a quantidade ε_u deve ser igual a um inteiro não-positivo: $\varepsilon_u = -n$ (condição de quantização), onde $n = n_\rho = 0, 1, 2, \dots$ é um número quântico (as vezes chamado de número quântico radial porque está associado ao número de nós que a parte radial do spinor possui, ou seja, que f_u possui). Portanto, a partir desta condição obtemos o seguinte espectro relativístico (níveis de Landau relativísticos) para o EHQNC com MMA no espaço-tempo de Minkowski

$$E_{n,m_j,s,u}^\kappa = E_m + \kappa \sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_c^{NC}N}, \quad (3.32)$$

onde

$$E_m \equiv \mu_m B = \frac{a\omega_c}{2} \geq 0, \quad N = N_{eff} = N_{n,m_j,s,u} \equiv \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m_j - \frac{su}{2}| + (m_j + \frac{su}{2})}{2} \right) \geq 0, \quad (3.33)$$

e

$$\omega_c^{NC} \equiv \tau\lambda\omega_c \geq 0, \quad \tau\lambda = \frac{1}{4m_0\omega_c} (4 - m_0\omega_c\theta)(m_0\omega_c - \eta) > 0, \quad (3.34)$$

com $\kappa = \pm 1$ sendo um parâmetro (“parâmetro de energia”) que representa os estados de energia positiva ($\kappa = +1$) ou estados de partícula (elétron), bem como os estados de energia negativa ($\kappa = -1$) ou estados de antipartícula (pósitron) [1, 108, 400], ou seja, representa as “soluções de energia positiva e negativa” (soluções de “toda equação de onda relativística”), ω_c^{NC} é a frequência cíclotron NC (frequência cíclotron original modificada pela NC) [169] e N é um número quântico efetivo ou total (pois depende de todos os outros). De acordo com [1, 108, 400], o espectro (3.32) na verdade é tanto para um elétron (real ou observável) com energias positivas ($E > 0$) quanto para um elétron (“irreal” ou “inobservável”) com energias negativas ($E < 0$), o que este na realidade é um pósitron (real ou observável) com energias positivas ($E > 0$), onde seus respectivos espectros são dados por: $E_{elétron} = E^+ > 0$ e $E_{pósitron} = -E^- = |E^-| > 0$ (isso representa o “mar de Dirac = mar de estados negativos = mar de pósitrons”) e, portanto, tanto o elétron quanto o pósitron possuem energias positivas (mensuráveis). Além disso, a quantização da energia surge da chamada quantização de Landau, em homenagem à Lev Landau (Prêmio Nobel de 1962), na qual refere-se à quantização das “órbitas” de partículas carregadas em campos magnéticos uniformes (tal quantização é um ingrediente chave para explicar o EHQ inteiro e também a suscetibilidade eletrônica dos metais). Como resultado, as partículas só podem ocupar “órbitas” com valores discretos de energia, chamados de níveis de Landau. De fato, usamos aspas (em órbitas) porque o princípio da incerteza proíbe a ideia de um caminho bem definido (por razões históricas e didáticas, o conceito de órbitas em MQ é mais algo simbólico) [176].

Então, vemos que além do espectro (3.32) ser assimétrico, ou seja, as energias da partícula e antipartícula não são iguais ($|E^+| \neq |E^-|$), tal espectro depende linearmente da energia potencial magnética “anômala” E_m (ou simplesmente energia magnética) gerada pela interação do MMA (ou MDM) com o campo magnético externo B (como veremos em breve, esta energia é a causa da “quebra” de simetria dos espectros), onde tal energia tem praticamente o mesmo valor para ambas as partícula e antipartícula ($E_m^+ \cong E_m^-$), também depende explicitamente dos números quânticos n e m_j , do parâmetro de spin s , do parâmetro spinorial u , da frequência cíclotron ω_c e dos parâmetros NCs θ e η , respectivamente. Vale a pena mencionar que embora os espectros que dependem das componentes do spinor sejam “incomuns” na literatura (geralmente só é resolvido a equação diferencial para uma das componentes), nas Refs. [29, 32, 305, 420, 423-425] temos alguns exemplos interessantes de tais espectros, onde, por exemplo, o nosso número quântico efetivo N é muito similar ao da Ref. [305]. Além disso, os parâmetros θ e η permitem definir duas “frequências angulares NCs”, ou “frequências tipo-cíclotron” (tem dimensão de ω_c), definidas como: $\omega_\theta \equiv \frac{4}{m_0\theta}$ e $\omega_\eta \equiv \frac{\eta}{m_0}$, onde ω_θ é a frequência NC de posição (diminui com θ crescente) e ω_η é a frequência NC de momento (aumenta com η crescente), respectivamente. Desse modo, os parâmetros τ e λ são podem ser reescritos como: $\tau = (1 - \omega_c/\omega_\theta)$ e $\lambda = (1 - \omega_\eta/\omega_c)$, e como tais parâmetros não podem ser nulos ($\tau \neq 0$ e $\lambda \neq 0$), implica que: $\omega_c \neq \omega_\theta$ e $\omega_c \neq \omega_\eta$, ou seja, não há “estados de ressonância” no sistema e, portanto, a frequência cíclotron não pode coincidir ou “oscilar” com o mesmo valor das frequências NCs. Por outro lado, notamos também que mesmo na ausência do campo magnético ($B = 0$), o espectro ainda permanece quantizado/discreto devido à presença do parâmetro η (não de θ), no qual tal parâmetro atua como um tipo de “campo/potential NC”. Explicitamente, este espectro NC é escrito como segue

$$E_{n,m_j,s,u}^{NC} = \pm \sqrt{m_0^2 + 2\eta\bar{N}} = \pm \sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_\eta\bar{N}}, \quad \bar{N} = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m_j - \frac{su}{2}| - (m_j + \frac{su}{2})}{2} \right), \quad (3.35)$$

onde $\bar{N} \neq N$ é um novo número quântico efetivo (usamos o fato de que agora $\Omega = -\eta/2m_0$). Então, comparando (3.35) com a literatura, temos uma generalização do espectro da Ref. [426].

Antes de analisarmos graficamente (via gráficos 2D) e de forma detalhada o comportamento do espectro (3.32) em função do campo magnético B e dos parâmetros NCs θ e η para diferentes valores de n e m_j , com e sem a influência de E_m (ou do MMA), devemos primeiro analisar um dos aspectos mais importantes dos espectros de energia bidimensionais (e tridimensionais), ou seja, sua degenerescência ou os estados degenerados. Basicamente, quando duas (ou mais) autofunções linearmente independentes compartilham a mesma energia (auto-energia), diz-se que o espectro é degenerado (há estados degenerados no sistema) [176]. Em particular, verificamos que a degenerescência (finita ou infinita) de (3.32) depende apenas dos

valores de m_j . Além disso, sabendo que fixando um dado valor de m_j ($m_j > 0$ ou $m_j < 0$), podemos ter dois estados de spin ($s = +1$ ou $s = -1$), ou seja: $m_j = m_l + s/2 = m_l \pm 1/2 > 0$ e $m_j = m_l + s/2 = m_l \pm 1/2 < 0$. Portanto, como um resultado disso obtemos a Tabela 1, onde mostra quatro possíveis configurações para a degenerescência do espectro dependendo dos valores de s e m_j bem como os respectivos valores de N e m_l para um dado valor de s e também a orientação dos operadores L_z e S_z .

Tabela 1: Degenerescência do espectro dependendo dos valores de m_j .

Configuração	m_j	s	N	m_l	Degenerescência	Orientação de L_z e S_z
1	$m_j > 0$	+1	$n + m_l + 1$	$m_l \geq 0$	finita	paralelo
2	$m_j > 0$	-1	$n + m_l$	$m_l \geq 1$	finita	anti-paralelo
3	$m_j < 0$	+1	$n + \frac{1+u}{2}$	$m_l < 0$	infinita	anti-paralelo
4	$m_j < 0$	-1	$n + \frac{1-u}{2}$	$m_l < 0$	infinita	paralelo

Então, de acordo com a Tabela 1, vemos que o espectro pode ser finitamente ou infinitamente degenerado e, portanto, o sistema pode ter um número finito ou infinito de estados degenerados dependendo dos valores de m_j (mas não depende dos parâmetros de s ou u). Em outras palavras, todos os estados com $m_j > 0$ são finitamente degenerados e independem da escolha do spin bem como do próprio parâmetro u , ou seja, os valores de N para $s = +1$ ou $s = -1$ são exatamente os mesmos para as duas componentes do spinor (configs. 1 e 2). No entanto, para o caso infinitamente degenerado é diferente, ou seja, embora todos os estados com $m_j < 0$ são infinitamente degenerados, eles dependem tanto da escolha do spin quanto da componente do spinor e, portanto, os valores de N para este caso dependem dos valores de s e u (configs. 3 e 4). Por exemplo, a componente superior ($u = +1$) possui um N maior quando $m_j < 0$ e $s = +1$, enquanto que para a componente inferior ($u = -1$) é quando $m_j < 0$ e $s = -1$, respectivamente. Em particular, a degenerescência infinita surge quando o espectro só depende do número quântico n , e como m_l pode assumir qualquer valor inteiro (menor ou igual a zero) em $m_j = m_l + s/2 < 0$, implica que os estados são infinitamente degenerados [14,108,417,427,428]. Com relação à degenerescência finita, tal degenerescência surge quando o espectro depende de ambos os números quânticos n e m_j (ou m_l) [14,417,427-429], onde agora é possível definir um novo “número quântico” a partir de n e m_l , dado por: $k \equiv n + m_l \geq 1$ ($m_l \geq 1$), ou $k \equiv n + m_l \geq 0$ ($m_l \geq 0$), no qual a degenerescência aumenta em função de k . Então, a partir do número k podemos determinar a expressão para o grau total de degenerescência (ou degenerescência total) para cada nível de energia E_k , que é dado por: $\Omega(E_k) = \sum_{m_l=1}^k (2m_l + 1) = k(k+2)$, ou $\Omega(E_k) = \sum_{m_l=0}^k (2m_l + 1) = (k+1)^2$, onde $2m_l + 1$ é o número de estados degenerados

(estados quânticos diferentes) para um dado m_l [176, 427–429]. Como veremos em breve, a degenerescência total não-relativística será igual ao relativístico para $m_l \geq 0$ (e é análogo a degenerescência do átomo de hidrogênio, com $k + 1 \equiv n = 1, 2, \dots$ [176]). Dessa forma, vemos explicitamente que a degenerescência desempenha um papel fundamental no espectro do EHQNC, bem como em suas propriedades termodinâmicas, uma vez que podemos construir um ensemble canônico (gás de férmions não-interagentes) para o sistema [430]. É importante comentar que também poderíamos obter os resultados da Tabela 1 escrevendo diretamente o número quântico N em função de m_l , ou seja, substituindo m_j por $m_l + s/2$, no qual obtemos

$$N = N_{n,m_l,s,u} = \left(n + \frac{(1+su)}{2} + \frac{\left| m_l + s\frac{(1-u)}{2} \right| + \left(m_l + s\frac{(1-u)}{2} \right)}{2} \right). \quad (3.36)$$

Com base nas informações acima sobre a degenerescência, obtemos a Tabela 2, onde mostra quatro possíveis configurações para o espectro dependendo dos valores de s e m_j .

Tabela 2: Espectros de energia para os estados degenerados da partícula e antipartícula.

Config.	Espectro de Energia $E_{n,m_j,s,u}^\kappa$	Degenerescência
1	$E_{n,m_j>0,+}^\kappa = E_m + \kappa\sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_c^{NC}(n+m_l+1)}$	finita
2	$E_{n,m_j>0,-}^\kappa = E_m + \kappa\sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_c^{NC}(n+m_l)}$	finita
3	$E_{n,m_j<0,+u}^\kappa = E_m + \kappa\sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_c^{NC}\left(n + \frac{1+u}{2}\right)}$	infinita
4	$E_{n,m_j<0,-u}^\kappa = E_m + \kappa\sqrt{m_0^2 + 2m_0\omega_c^{NC}\left(n + \frac{1-u}{2}\right)}$	infinita

De acordo com a Tabela 2, vemos que para $m_j > 0$ (configs. 1 e 2) os espectros possuem exatamente os mesmos valores independentemente do spin escolhido ou da componente do spinor (o spin ou as componentes não altera os valores dos espectros) e, portanto, aumentam em função de n e m_j (ou m_l , na realidade). Nesse caso, vemos também que o estado fundamental ($n = 0$) ainda depende de ω_c^{NC} . Contudo, para $m_j < 0$ os espectros já são influenciados pelo spin e pelas componentes (configs. 3 e 4), logo, dependendo da escolha de s e u temos um N maior ou menor, e também um estado fundamental que depende ou não de ω_c^{NC} , respectivamente. Dessa forma, concluímos então que o espectro máximo (valores máximos de energia) é para $m_j > 0$ (configs. 1 e 2), enquanto que o espectro mínimo (valores mínimos de energia) é para $m_j < 0$ com: $s = -u = +1$ (config. 3) ou $s = -u = -1$ (config. 4). Além disso, independentemente da configuração escolhida (cada uma possui o espectro da partícula e antipartícula), as energias da partícula são sempre maiores do que as da antipartícula. Em particular, isso se deve à presença da energia magnética E_m , no qual “quebra” a simetria dos espectros.

Agora, vamos comparar rapidamente o espectro (3.32), ou melhor, os espectros da Tabela 2 (para $m_j < 0$), com outros trabalhos da literatura. Então, verificamos que na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$) e do MMA ($E_m = 0$), com $s = -u = \pm 1$ ($N = n \geq 0$), $s = u = \pm 1$ ($N = n + 1 = n' \geq 1$) ou $s = +1$ ($N_u = n + (1 + u)/2 \geq 0$), obtemos exatamente o espectro usual (simétrico) do EHQ relativístico para $m_0 \neq 0$ (caso massivo) [17, 74, 105, 108–110, 425] e para $m_0 = 0$ (caso não-massivo) [106, 107]. Já para $\theta = \eta = 0$ com $s = u = \pm 1$ ($N = n + 1 = n' \geq 1$), obtemos o espectro do EHQ relativístico com MMA [431]. Por outro lado, para $\theta = E_m = m_0 = 0$ (para certos valores de s e u), obtemos o espectro “relativístico” do EHQ para o grafeno NC ($\eta \neq 0$ e $e \rightarrow -e$) [158–160] ou para o grafeno usual ($\theta = \eta = 0$) [29, 32, 33, 61, 89, 90, 93, 420, 423, 432–434] no qual devemos fazer as seguintes substituições (restaurando c): $c \rightarrow v_f$ ou $c \rightarrow \sqrt{c_x c_y}$ ($c_x \neq c_y$) e $m_0 \rightarrow \Delta = m_{eff} v_f^2 \geq 0$ (caso massivo ou não-massivo), onde $v_f \approx c/300$ é a velocidade de Fermi (uma velocidade efetiva ou não-relativística dos férmions nos estados mais ocupados em um sistema à temperatura zero), c_x (ou c_y) é a velocidade efetiva na direção x (ou y), Δ é um gap de energia (lacuna ou “espaço” entre os estados de energia positiva e de energia negativa) e $m_{eff} = m^*$ é um tipo de “massa efetiva”. É importante mencionar que no caso do grafeno, o parâmetro u pode corresponder à sub-rede A ($u = +1$) ou à sub-rede B ($u = -1$) [424]. Do exposto, vemos claramente que o nosso espectro relativístico generaliza vários casos particulares da literatura. Na tabela 3, temos a condição para obter cada espectro particular (citados acima) bem como suas respectivas referências.

Tabela 3: Espectros relativísticos e efetivos (não-relativísticos) da literatura.

Condição	Espectro	Referências
$\theta = \eta = E_m = 0, s = -u = \pm 1$	$E_n^{rel} = \pm \sqrt{m_0^2 + 2m_0 \omega_c n}$	[74, 108, 109]
$\theta = \eta = E_m = 0, s = +1$	$E_{n,u}^{rel} = \pm \sqrt{m_0^2 + 2m_0 \omega_c N_u}$	[425]
$\theta = \eta = 0, s = u = \pm 1$	$E_{n',u}^{rel} = E_m \pm \sqrt{m_0^2 + 2m_0 \omega_c n'}$	[431]
$\theta = \eta = E_m = 0, s = u = \pm 1$	$E_{n'}^{rel} = \pm \sqrt{m_0^2 + 2m_0 \omega_c n'}$	[17, 105, 110]
$\theta = \eta = E_m = m_0 = 0, s = u = \pm 1$	$E_{n'}^{rel} = \pm \sqrt{2m_0 \omega_c n'}$	[106, 107]
$\theta = E_m = m_0 = 0, s = -u = \pm 1$	$E_n^{graf} = \pm \sqrt{2eB\hbar v_f^2 \left(1 + \frac{\eta}{eB\hbar}\right) n}$	[158–160]
$\theta = \eta = E_m = m_0 = 0, s = -u = \pm 1$	$E_n^{graf} = \pm \sqrt{2eB\hbar c_x c_y n}$	[93, 432]
$\theta = \eta = E_m = 0, s = -u = \pm 1$	$E_n^{graf} = \pm \sqrt{\Delta^2 + 2eB\hbar v_f^2 n}$	[33, 61, 89, 90]
$\theta = \eta = E_m = m_0 = 0, s = +1$	$E_{n,u}^{graf} = \pm \sqrt{2eB\hbar v_f^2 N_u}$	[29, 32, 420]
$\theta = \eta = E_m = 0, s = +1$	$E_{n,u}^{graf} = \pm \sqrt{\Delta^2 + 2eB\hbar v_f^2 N_u}$	[423, 433, 434]

No entanto, mesmo com os espectros bem definidos na Tabela 2, ainda não estamos prontos para analisar o comportamento do espectro em função do campo magnético, ou seja,

primeiro precisamos definir a restrição para este campo (restrição esta que será o intervalo permitido para B). Conforme já discutido, o produto $\tau\lambda$ deve obedecer à condição: $\tau\lambda > 0$, conseqüentemente, podemos obter a partir de (3.34) uma inequação polinomial do segundo grau para B . Então, supondo (por conveniência) que o produto $\tau\lambda$ também possa ser negativo ($\tau\lambda < 0$), temos a seguinte inequação para B

$$-B^2 + B((4 + \theta\eta)/e\theta) - (4\eta/e^2\theta) = s', \quad (3.37)$$

onde $s' > 0$ ou $s' < 0$. Dessa forma, resolvendo essa inequação obtemos a Tabela 4, onde é mostrado duas soluções possíveis para B dependendo dos valores de s' .

Tabela 4: Intervalos permitido e proibido para o campo magnético.

Restrições	s'	B
1	> 0	$\frac{(4+\theta\eta)-\sqrt{(4+\theta\eta)^2-16\theta\eta}}{2e\theta} < B < \frac{(4+\theta\eta)+\sqrt{(4+\theta\eta)^2-16\theta\eta}}{2e\theta}$
2	< 0	$\frac{(4+\theta\eta)+\sqrt{(4+\theta\eta)^2-16\theta\eta}}{2e\theta} < B < \frac{(4+\theta\eta)-\sqrt{(4+\theta\eta)^2-16\theta\eta}}{2e\theta}$

No entanto, apenas uma das restrições é fisicamente consistente (válida), que é a primeira ($s' > 0$), onde $(4 + \theta\eta)^2 - 16\theta\eta > 0$ (campos magnéticos reais e positivos). De fato, na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$), implica que o intervalo de B para $s' > 0$ é dado por $0 < B < \infty$ (ou $0 \leq B < \infty$), enquanto que para $s' < 0$, é dado por $\infty < B < 0$ e, portanto, apenas a primeira restrição nos permite recuperar o intervalo usual de B no qual o EHQ pode se manifestar (como deve ser). Desse modo, a restrição 1 define uma região permitida para o EHQNC, onde as regiões fora dessa região são regiões proibidas. Além disso, vemos aqui que os parâmetros NCs restringem (limitam) os valores do campo magnético, ou seja, para um dado valor arbitrário de θ e η , é definido um intervalo particular para B .

Portanto, agora podemos analisar o comportamento do espectro em função do campo magnético para diferentes valores de n . Por questões de praticidade e simplicidade, omitimos aqui a contribuição de m_l nos gráficos porque como vimos anteriormente, sua função (contribuição) é análoga à de n , ou seja, o espectro aumenta também com m_l crescente. Dessa forma, podemos usar, por exemplo, o espectro da config. 3 da Tabela 2 com $u = +1$ para tal análise (escolhemos $u = +1$ porque queremos um estado fundamental ainda dependente de ω_c^{NC}). Com isso, obtemos a Fig. 1, onde mostra o comportamento das energias da partícula em função do campo magnético para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$), com e sem a presença da energia magnética E_m , no qual usamos por simplicidade que $m_0 = e = \theta = \eta = 1$, onde o intervalo permitido para o campo é dado por $1 < B < 4$.

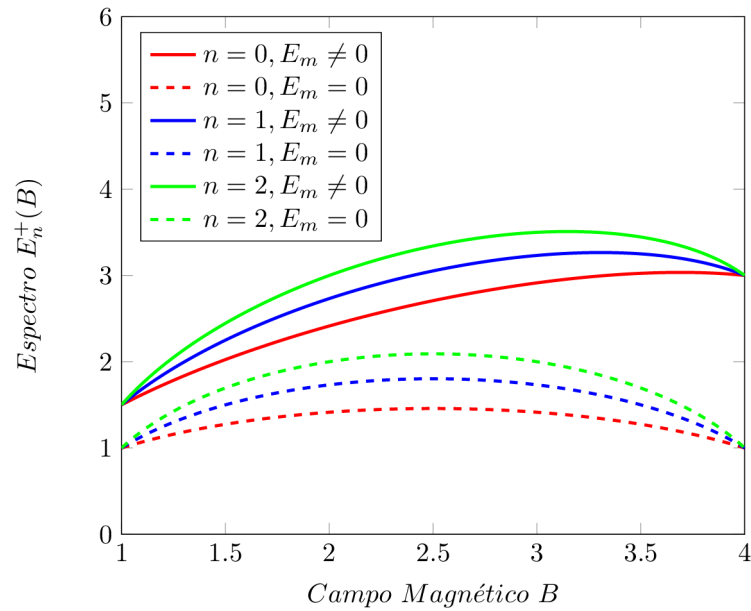


Figura 1: Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

De acordo com Fig. [1](#), vemos que as energias aumentam com o aumento de n , ou seja: $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n > 0$ (como deve ser), e são sempre maiores na presença da energia magnética ($E_m \neq 0$), ou seja: $\Delta E_{a \neq 0} > \Delta E_{a=0}$. Portanto, a função do MMA é aumentar as energias da partícula. Além disso, as energias podem aumentar ou diminuir em função de B . Por exemplo, para o caso $E_m \neq 0$, as energias aumentam entre $B \approx 1$ e $B \approx 3.3$ (mas com exceção de $n = 0$, onde este aumenta praticamente em todo o intervalo) e diminuem (levemente) entre $B \approx 3.3$ e $B \approx 4$, onde a variação de energia em todo o intervalo do campo é positiva, ou seja: $\Delta E(B) > 0$ ($E_{final} > E_{inicial}$ ou $E(B \approx 4) > E(B \approx 1)$). Já para o caso $E_m = 0$, as energias aumentam entre $B \approx 1$ e $B = 2.5$ (atingindo o valor máximo em $B = 2.5$) e depois diminuem entre $B = 2.5$ e $B \approx 4$, onde agora a variação da energia (em todo o intervalo) é zero ($\Delta E(B) = 0$ ou $E_{final} = E_{inicial}$). Portanto, vemos que $B = 2.5$ é um “ponto de simetria” (um “espelho”), ou seja, é uma região que separa o intervalo total em dois sub-intervalos onde a energia é sempre igual para uma mesma variação do campo ($\Delta B = B_{final} - B_{inicial}$).

Na Fig [2](#), é mostrado o comportamento das energias da antipartícula (valores absolutos) em função do campo magnético para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados (com $m_0 = e = \theta = \eta = 1$ e $1 < B < 4$). De acordo com esta Figura, vemos que as energias para o caso $E_m = 0$ são exatamente iguais às da partícula também com $E_m = 0$ (espectros simétricos) e, portanto, as energias aumentam com o aumento de n ($\Delta E_n > 0$) e sua variação (em todo o intervalo do campo) também é zero ($\Delta E(B) = 0$). No entanto, essas energias são maiores do que as energias para $E_m \neq 0$, ou seja, a função do MMA é diminuir as energias da antipartícula. Já para o caso $E_m \neq 0$, vemos que as energias podem aumentar ou diminuir

com o aumento de n . Por exemplo, entre $B \approx 1$ e $B \approx 3.1$, as energias são maiores com o aumento de n ($\Delta E_n > 0$), onde o valor de $B \approx 3.1$ foi calculado através do cruzamento das linhas (sólidas) vermelha e azul, no qual suas respectivas energias são iguais neste ponto ($E_0 = E_1$). Agora, entre $B \approx 3.25$ e $B \approx 4$, as energias são menores com o aumento de n (uma “anomalia” ou região fisicamente proibida, onde $\Delta E_n < 0$), onde o valor de $B \approx 3.25$ foi calculado através do cruzamento das linhas vermelha e verde ($E_0 = E_2$). Além disso (ainda para $E_m \neq 0$), as energias podem aumentar, diminuir ou serem “nulas” (“zero”) em função de B . Porém, aqui, energia “nula” não significa que a antipartícula não tenha energia, significa que a energia total (ou resultante) é nula, ou seja, para certos valores de B a energia magnética é igual à energia quantizada (“energia da raiz quadrada”). Em particular, tais energias “nulas” aparecem quando as linhas sólidas tocam o eixo- B (eixo do campo magnético), no qual depois aumentam até $B \approx 4$, onde a variação da energia é positiva ($\Delta E(B) > 0$ ou $E_{final} > E_{inicial}$). Portanto, resolvendo $|E_n^-(B)| = 0$ para cada estado quântico específico, temos os seguintes valores de B no qual a energia é “nula”: $B \approx 2.9$ ($n = 0$), $B \approx 3.3$ ($n = 1$) e $B \approx 3.4$ ($n = 2$), respectivamente. Por outro lado, comparando as energias da partícula e antipartícula, vemos que as energias da partícula são sempre maiores que as da antipartícula.

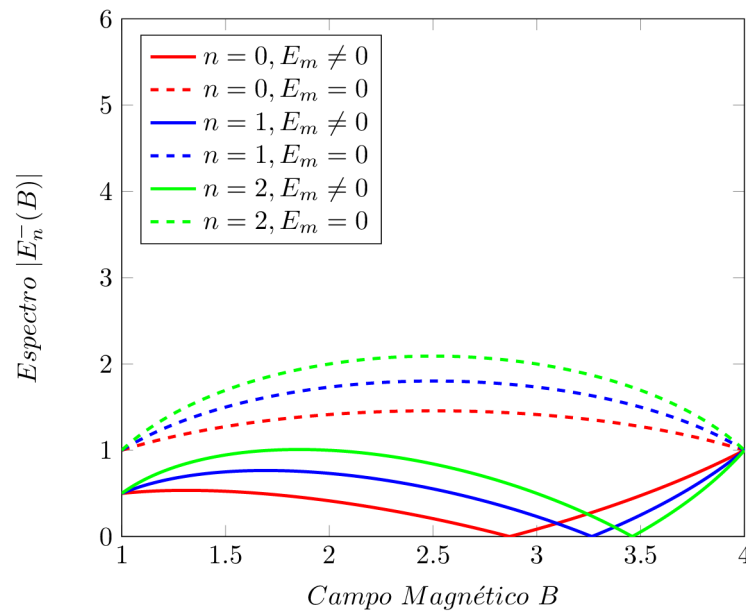


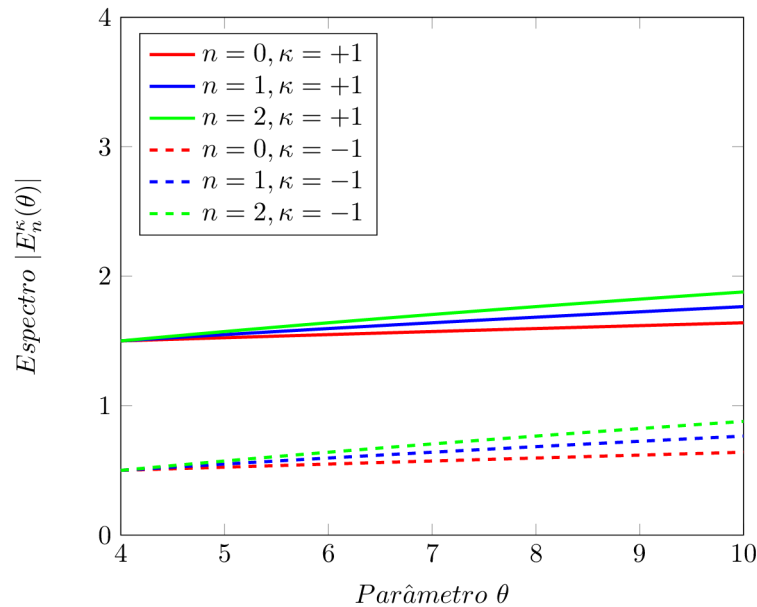
Figura 2: Gráfico de $|E_n^-(B)|$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

Agora, vamos analisar o comportamento do espectro em função dos parâmetros NCs. Porém, precisamos conhecer antes as restrições para θ e η . Desse modo, sabendo que o produto $\tau\lambda$ deve ser sempre maior que zero, isso implica em duas restrições para que tal condição seja satisfeita, que são: $\tau > 0$ e $\lambda > 0$ ou $\tau < 0$ e $\lambda < 0$. Portanto, devido a isso temos a Tabela 5, onde mostra duas possíveis restrições para θ e η para um dado valor de τ e λ .

Tabela 5: Restrições para os parâmetros NCs θ e η .

Restrições	τ	λ	θ	η
1	< 0	< 0	$\theta > 4/m_0\omega_c$	$\eta > m_0\omega_c$
2	> 0	> 0	$\theta < 4/m_0\omega_c$	$\eta < m_0\omega_c$

Desta forma, escolhendo, por exemplo (questão de visualização gráfica uma vez que o intervalo é maior), a restrição 1 da Tabela 5, obtemos a Fig. 3, onde mostra o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de θ para três diferentes valores de n ($n = 0, 1, 2$), onde $m_0 = e = a = B = 1$, $\eta = 1.1$ e $4 < \theta < \infty$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e a função de θ é aumentar (praticamente de forma linear) as energias, onde ΔE_n também aumenta em função de θ . Por outro lado, comparando as energias da partícula e antipartícula, vemos que as energias da partícula são sempre maiores que as da antipartícula com uma diferença de uma unidade, ou seja: $E_n^+(\theta) = 1 + |E_n^-(\theta)|$ (as linhas sólidas são paralelas às linhas tracejadas).

Figura 3: Gráfico de $|E_n^\kappa(\theta)|$ versus θ para três diferentes valores de n .

Já na Fig. 4, é mostrado o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de η para três diferentes valores de n ($n = 0, 1, 2$), onde $m_0 = e = a = B = 1$, $\theta = 4.1$ e $1 < \eta < \infty$. Em particular, esta Figura é muito semelhante à Figura anterior e, portanto, a função do parâmetro η (e n) também é aumentar as energias, onde as energias da partícula também são sempre maiores que as da antipartícula com uma diferença de uma unidade, ou seja: $E_n^+(\eta) = 1 + |E_n^-(\eta)|$. No entanto, a diferença de energia entre dois níveis consecutivos (ΔE_n) é maior no gráfico da energia em função de η do que em função de θ , mostrando assim

que o parâmetro η afeta a partícula e antipartícula mais “fortemente” do que o parâmetro θ .

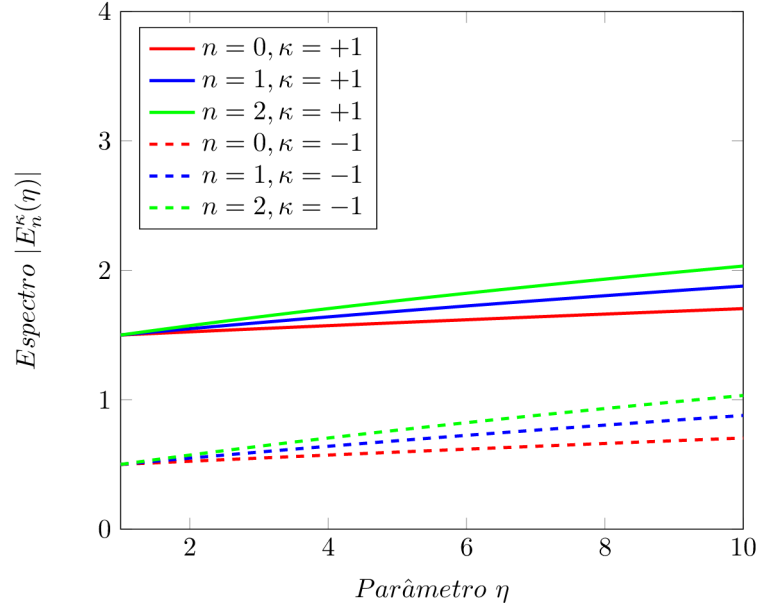


Figura 4: Gráfico de $|E_n^\kappa(\eta)|$ versus η para três diferentes valores de n .

Agora, vamos agora focar nossa atenção na forma do spinor de Dirac NC (spinor plano inercial) para os estados ligados relativísticos do EHQNC (e depois analisar rapidamente a densidade de probabilidade). Então, usando o fato de que a variável adimensional r é escrita como $r = m_0\Omega\rho^2$, podemos reescrever a função (3.27) na forma

$$f_u(\rho) = C_u(m_0\Omega)^{\frac{|\gamma_u|}{2}} \rho^{|\gamma_u|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_u|}(m_0\Omega\rho^2), \quad \gamma_u = \left(m_j - \frac{su}{2}\right), \quad (3.38)$$

onde os polinômios de Laguerre associados são escritos como segue

$$L_n^{|\gamma_u|}(r) = \frac{e^r r^{-|\gamma_u|}}{n!} \frac{d^n}{dr^n} \left(e^{-r} r^{n+|\gamma_u|} \right), \quad (3.39)$$

sendo os três primeiros polinômios são dados por (usaremos isso na densidade de probabilidade)

$$\begin{aligned} L_0^{|\gamma_u|}(r) &= 1, \\ L_1^{|\gamma_u|}(r) &= -r + |\gamma_u| + 1, \\ L_2^{|\gamma_u|}(r) &= \frac{1}{2} [r^2 - 2r(|\gamma_u| + 2) + (|\gamma_u| + 1)(|\gamma_u| + 2)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Com isso, implica que o spinor curvilíneo (3.17) toma a seguinte forma

$$\psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{i(m_j\varphi - Et)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} C_+(m_0\Omega)^{\frac{|\gamma_+|}{2}} \rho^{|\gamma_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ iC_-(m_0\Omega)^{\frac{|\gamma_-|}{2}} \rho^{|\gamma_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Portanto, partindo do fato de que o spinor original é dado por $\Psi_D^{NC} = e^{-\frac{i\varphi\Sigma_3}{2}} \psi_C^{NC}$,

onde o operador unitário é dado por $e^{-\frac{i\varphi\Sigma_3}{2}} = e^{-\frac{i\varphi\sigma_3}{2}} = \text{diag}(e^{-\frac{i\varphi}{2}}, e^{\frac{i\varphi}{2}})$ [14], implica que o spinor de Dirac NC será escrito como

$$\Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{-iEt}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} C_+(m_0\Omega)^{\frac{|\gamma_+|}{2}} e^{i\gamma_+\varphi} \rho^{|\gamma_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ iC_-(m_0\Omega)^{\frac{|\gamma_-|}{2}} e^{i\gamma_-\varphi} \rho^{|\gamma_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

onde satisfaz as duas condições de contorno: $\Psi_D^{NC}(\rho \rightarrow 0) \geq 0$ e $\Psi_D^{NC}(\rho \rightarrow \infty) = 0$, e a condição de periodicidade: $\Psi_D^{NC}(\varphi \pm 2\pi) = \Psi_D^{NC}(\varphi)$. Uma pequena observação sobre este spinor merece ser feita, ou seja, devemos ter $\Omega \neq 0$ (ou $\tau\lambda \neq 0$), caso contrário (se $\Omega = 0$, ou $\tau\lambda = 0$), então haveria a possibilidade de termos um spinor nulo (“estados de ressonância”) e, portanto, um EHQ sem partícula alguma, o que não é admissível (não faz sentido algum) uma vez que a partícula tem que existir em alguma região onde $0 \leq \rho < \infty$. Além disso, usando m_j como $m_j = m_l + s/2$, podemos então reescrever o spinor em função de m_l da seguinte forma

$$\Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{-iEt}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} C_+(m_0\Omega)^{\frac{|m_l|}{2}} e^{im_l\varphi} \rho^{|m_l|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|m_l|}(m_0\Omega\rho^2) \\ iC_-(m_0\Omega)^{\frac{|m_l+s|}{2}} e^{i(m_l+s)\varphi} \rho^{|m_l+s|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|m_l+s|}(m_0\Omega\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Comparando o spinor acima com a literatura, ele é basicamente o spinor da Ref. [417] sem o fator $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e com as funções radiais (componentes do spinor) ainda desconhecidas.

Aqui, é importante destacar que o nosso spinor de Dirac incorpora simultaneamente os valores positivos e negativos do número quântico m_j (ou m_l), o que não ocorre, por exemplo, nas Refs. [413, 414]. De fato, isso acontece porque não usamos um fator $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ na expressão do spinor curvilíneo, onde tal fator é meio que “opcional” de acordo com as Refs. [1, 14, 417]. Por exemplo, para o caso (3 + 1)-dimensional onde um spinor tem quatro componentes, o fator que o spinor pode carregar (se quiser) é outro, dado por $\frac{1}{r}$ (não confundir com o nosso r). Em outras palavras, usar ou não tais fatores é mais por razões matemáticas (estilo ou conveniência), ou seja, poder escrever a equação diferencial com outra “cara”, porém, o resultado final deve ser o mesmo [413, 417]. Do exposto, percorremos um caminho mais “simples e fácil” para poder escrever em um único spinor os valores positivos e negativos de m_j . Do ponto de vista prático, uma das vantagens de termos um spinor na forma (3.42) é a possibilidade de calcular a densidade de probabilidade ou os observáveis físicos de uma forma mais rápida e direta do que se tivéssemos dois spinores, um para cada valor de m_j (esse caso acontece quando $f(\rho) \rightarrow \frac{f(\rho)}{\sqrt{\rho}}$).

Por outro lado, para termos uma solução fisicamente aceitável, ainda falta encontrar as constantes de normalização C_{\pm} , onde isso é feito normalizando o spinor (3.42), ou melhor, normalizando a parte espacial (radial) deste spinor (a parte angular já foi normalizada, cujo valor é $1/\sqrt{2\pi}$ e já veio incluída no spinor curvilíneo). De acordo com a literatura [1, 14, 176, 417],

este spinor pode ser normalizado através da seguinte condição de normalização

$$\int_0^\infty R^\dagger(\rho)R(\rho)dA = \int_0^\infty [f_+^2(\rho) + f_-^2(\rho)] \rho d\rho = 1, \quad (3.44)$$

onde $R^\dagger(\rho) = (f_+(\rho), -if_-(\rho))$ é o conjugado transposto (conjugado Hermitiano ou matriz adjunta) de $R(\rho)$. Por simplicidade, podemos também reescrever a relação (3.44) em termos da variável r , ou seja

$$\frac{1}{2m_0\Omega} \int_0^\infty [f_+^2(r) + f_-^2(r)] dr = 1, \quad (3.45)$$

onde $\rho d\rho = dr/2m_0\Omega$. Explicitamente, temos então

$$\frac{1}{2m_0\Omega} \int_0^\infty \left[C_+^2 r^{|\gamma_+|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_+|}(r) \right]^2 + C_-^2 r^{|\gamma_-|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_-|}(r) \right]^2 \right] dr = 1. \quad (3.46)$$

No entanto, ao tentar resolver a expressão acima surge um “problema”, ou seja, uma constante será escrita em termos da outra. Para eliminar este “problema” e, portanto, buscar uma forma bem definida para cada constante, aqui, vamos supor que cada componente contribui com 50% (ou 1/2) de probabilidade para o sistema (cada componente tem o mesmo “peso probabilístico”). Dessa forma, temos as seguintes expressões a serem resolvidas

$$\frac{C_+^2}{2m_0\Omega} \int_0^\infty r^{|\gamma_+|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_+|}(r) \right]^2 dr = \frac{1}{2}, \quad (3.47)$$

$$\frac{C_-^2}{2m_0\Omega} \int_0^\infty r^{|\gamma_-|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_-|}(r) \right]^2 dr = \frac{1}{2}. \quad (3.48)$$

De acordo com a Ref. [112], o resultado das integrais acima são dadas por

$$\int_0^\infty r^{|\gamma_+|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_+|}(r) \right]^2 dr = \frac{\Gamma(n + |\gamma_+| + 1)}{\Gamma(n + 1)}, \quad (3.49)$$

$$\int_0^\infty r^{|\gamma_-|} e^{-r} \left[L_n^{|\gamma_-|}(r) \right]^2 dr = \frac{\Gamma(n + |\gamma_-| + 1)}{\Gamma(n + 1)}. \quad (3.50)$$

onde $\Gamma(n + 1) = n!$ e $\Gamma(n + |\gamma_\pm| + 1) = (n + |\gamma_\pm|)!$ são as funções gama (de Euler) e $n!$ (lê-se “ n fatorial”) é o fatorial de n .

Portanto, as constantes de normalização C_\pm serão escrita como segue

$$C_\pm = \sqrt{m_0\Omega \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + |\gamma_\pm| + 1)}} > 0. \quad (3.51)$$

Consequentemente, temos então o seguinte spinor de Dirac normalizado

$$\Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = e^{-iEt} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_+|+1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_++1)}} e^{i\gamma_+\varphi} \rho^{|\gamma_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_-|+1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_-+1)}} e^{i\gamma_-\varphi} \rho^{|\gamma_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{array} \right), \quad (3.52)$$

ou ainda (inserindo a parte temporal em cada componente spinorial [176])

$$\Psi_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_++1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_++1)}} e^{i(\gamma_+\varphi - E_+t)} \rho^{|\gamma_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ i\sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_-+1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_-+1)}} e^{i(\gamma_-\varphi - E_-t)} \rho^{|\gamma_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\gamma_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Agora, vamos discutir rapidamente o comportamento da densidade de probabilidade radial (probabilidade por unidade de área) para diferentes valores de n , m_j ($m_j > 0$), B , θ e η . Então, como a expressão para a densidade de probabilidade (positiva definida) é escrita da seguinte forma [14, 112]

$$P(\rho) = P_{n,m_j}(\rho) = (\Psi_D^{NC})^\dagger \Psi_D^{NC} = \frac{1}{2\pi} R^\dagger(\rho) R(\rho) = \frac{1}{2\pi} [f_+^2(\rho) + f_-^2(\rho)], \quad (3.54)$$

implica que

$$P(\rho) = \frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_++1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_++1)} \rho^{2|\gamma_+|} e^{-m_0\Omega\rho^2} \left[L_n^{|\gamma_+|}(m_0\Omega\rho^2) \right]^2 + \frac{(m_0\Omega)^{|\gamma_-+1}}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\gamma_-+1)} \rho^{2|\gamma_-|} e^{-m_0\Omega\rho^2} \left[L_n^{|\gamma_-|}(m_0\Omega\rho^2) \right]^2. \quad (3.55)$$

Em particular, essa densidade de probabilidade depende de ambos os números quânticos n e m_j , porém, independe dos valores do parâmetro s uma vez que para $s = +1$ ou $s = -1$ a expressão para $P(\rho)$ é a mesma, ou seja: $P(\rho)|_{s=+1} = P(\rho)|_{s=-1}$. Portanto, tomando $m_0 = e = B = s = 1$, $\theta = 3.9$ ($\tau > 0$) e $\eta = 0.9$ ($\lambda > 0$), obtemos a Fig. 5, onde mostra o comportamento da densidade de probabilidade (em função da distância radial) para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$) com $m_j = 1/2$ (equivalente à $m_l = m_j - s/2 = 0$, ou seja, um momento angular orbital nulo) e $m_j = 3/2$ (equivalente à $m_l = m_j - s/2 = 1$, ou seja, um momento angular orbital não-nulo). Na literatura, o estado com $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou $m_l = 0$) recebe o nome de nível de Landau mais baixo (Lowest Landau Level em inglês), cuja densidade de probabilidade associada (P_{LLL}) é uma função gaussiana centrada (ou ao redor) na origem [112].

De acordo com a Fig. 5(a), vemos que há uma densidade de probabilidade finita e não-nula na origem (uma consequência da primeira condição de contorno) cujo valor é o mesmo para os três estados quânticos, onde tal valor é o máximo permitido ($P_{n=0} = P_{n=1} = P_{n=2} = P_{máx}$), e também tende a zero à medida que ρ ($\rho > 3$) aumenta (uma consequência da segunda condição de contorno). Em particular, isso está em concordância (comportamento análogo) com a densidade de probabilidade gerada a partir da função de onda do EHQ não-relativístico (para $m_l = 0$) [112], e também a partir da função de onda do átomo de hidrogênio não-relativístico (para $l = 0$) [176]. Além disso, uma densidade de probabilidade finita e não-nula na origem também já foi investigada no oscilador de Dirac-Morse e para um potencial

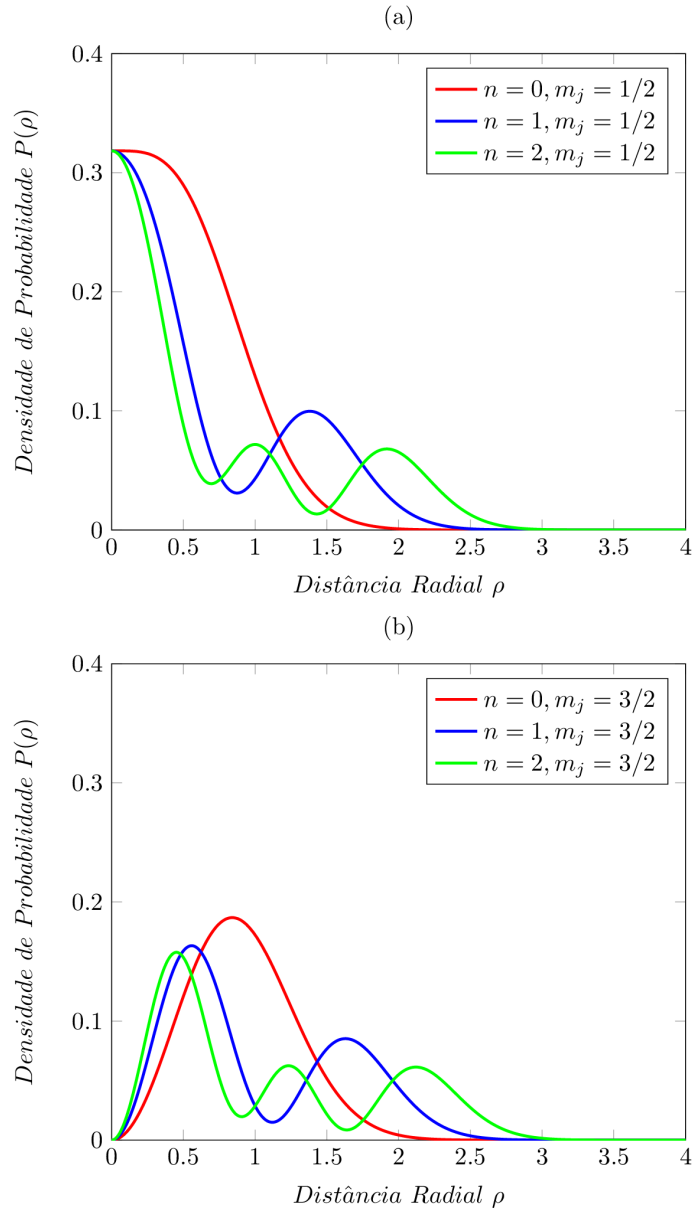


Figura 5: Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a) e $m_j = 3/2$ (b).

radial linear [422]. Ainda de acordo com a Fig. 5(a), vemos que o número de nós (“cristas”) aumenta à medida que n aumenta (de fato, esse número quântico nos diz o número de nós), ou seja, para $n = 0$ não há nenhum nó (nenhuma “crista”), para $n = 1$ há um nó (uma “crista”), para $n = 2$ há dois nós (duas “cristas”), e assim sucessivamente [112]. Já de acordo com a Fig. 5(b), vemos que a densidade de probabilidade é nula na origem (uma consequência também da primeira condição de contorno) para todos os três estados quânticos, onde tal densidade tende à um valor máximo em $\rho = 0.5$ ($n = 2$), $\rho \approx 0.6$ ($n = 1$) e $\rho = 1$ ($n = 0$), com $P_{n=0} > P_{n=1} > P_{n=2}$, e posteriormente tende a zero à medida que ρ ($\rho > 3$) aumenta (uma consequência da segunda condição de contorno). Então, comparando 5(a) com 5(b), vemos também que a densidade de probabilidade diminui e se move para fora da origem à medida que m_j (ou m_l) aumenta.

Na Fig. 6, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores de campo magnético ($1 < B < 4$), onde usamos $m_0 = e = \theta = \eta = s = 1$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que próximo da origem ($0 \leq \rho \leq 1$) a densidade de probabilidade aumenta à medida que B aumenta ($P_{B=2.50} > P_{B=2.00} > P_{B=1.50} > P_{B=1.15}$) e tende a zero à medida que ρ aumenta. Além disso, de todos os valores de B , o valor $B = 1.15$ é o que tem uma densidade de probabilidade de maior alcance (porém, de muito menor valor), onde tal valor é praticamente constante entre $\rho = 0$ e $\rho = 4$. Por outro lado (embora não mostrado no gráfico), para $B = 1$ temos uma densidade de probabilidade nula (em qualquer região) porque temos o caso trivial onde Ω seria nulo (e não queremos isso aqui).

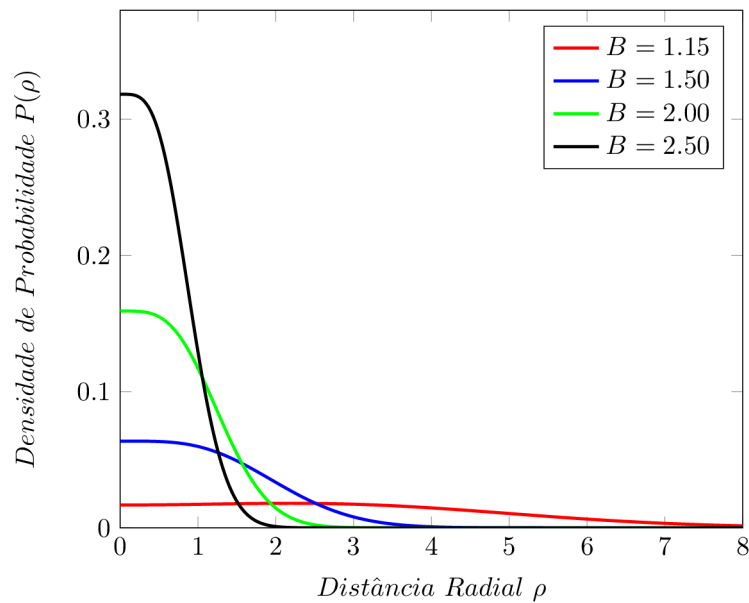


Figura 6: Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .

Na Fig. 7, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores do parâmetro θ ($0 < \theta < 4$), onde tomamos $m_0 = e = B = s = 1$, $\eta = 0.9$ ($\lambda > 0$), $n = 0$ e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade pode aumentar ou diminuir à medida que θ aumenta, no entanto, tende a zero à medida que ρ aumenta. Por exemplo, entre $\rho = 0$ e $\rho \approx 4$ a densidade de probabilidade aumenta com θ crescente ($P_{\theta=2.5} > P_{\theta=2.0} > P_{\theta=1.5} > P_{\theta=1.0}$), enquanto que entre $\rho \approx 4$ e $\rho = 12$ diminui ($P_{\theta=1.0} > P_{\theta=1.5} > P_{\theta=2.0} > P_{\theta=2.5}$). Em particular, a distância $\rho \approx 4$ é um “ponto de inversão de valores”, ou seja, os valores da densidade de probabilidade começam a ser invertidos à medida que a distância aumenta (ou diminuir) a partir de $\rho \approx 4$.

Já na Fig. 8, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores do parâmetro η ($0 < \eta < 1$), onde usamos $m_0 = e = B = s = 1$, $\theta = 3.9$ ($\tau > 0$), $n = 0$ e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade também pode aumentar ou diminuir à medida que η aumenta (mas tende a zero à medida que

ρ aumenta). No entanto, diferentemente da Fig. 7, aqui ocorre o “oposto” (aspas porque as escalas são diferentes), ou seja, entre $\rho = 0$ e $\rho \approx 0.4$ a densidade de probabilidade diminui com η crescente ($P_{\eta=0.2} > P_{\eta=0.4} > P_{\eta=0.6} > P_{\eta=0.8}$), enquanto que entre $\rho \approx 0.4$ e $\rho = 2$ aumenta ($P_{\eta=0.8} > P_{\eta=0.6} > P_{\eta=0.4} > P_{\eta=0.2}$), onde a distância $\rho \approx 0.4$ também é um “ponto de inversão de valores”. Além disso, diferentemente da Fig. 7, aqui os valores da densidade de probabilidade são muito maiores (porém, de menor alcance ou mais próximo da origem) e, portanto, o parâmetro η afeta a partícula (antipartícula) mais “fortemente” do que o parâmetro θ (assim como ocorre no gráfico das energias).

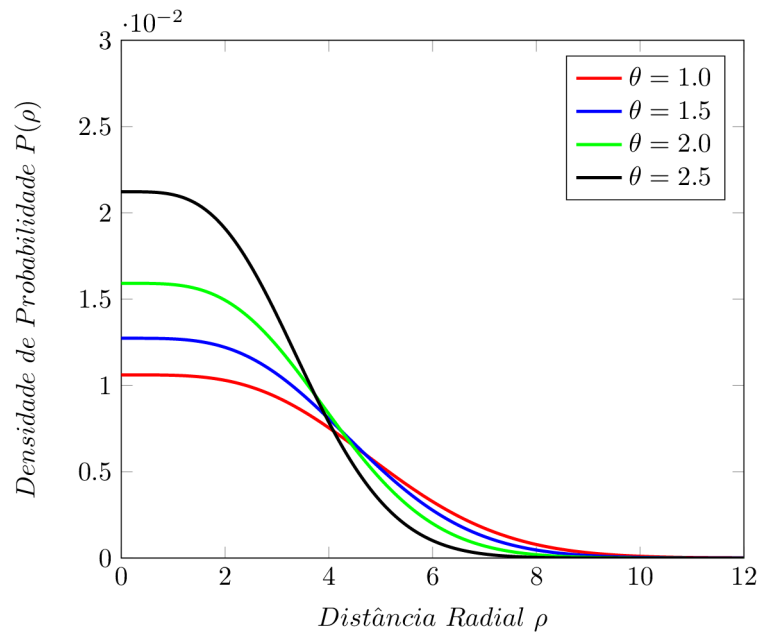


Figura 7: Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de θ .

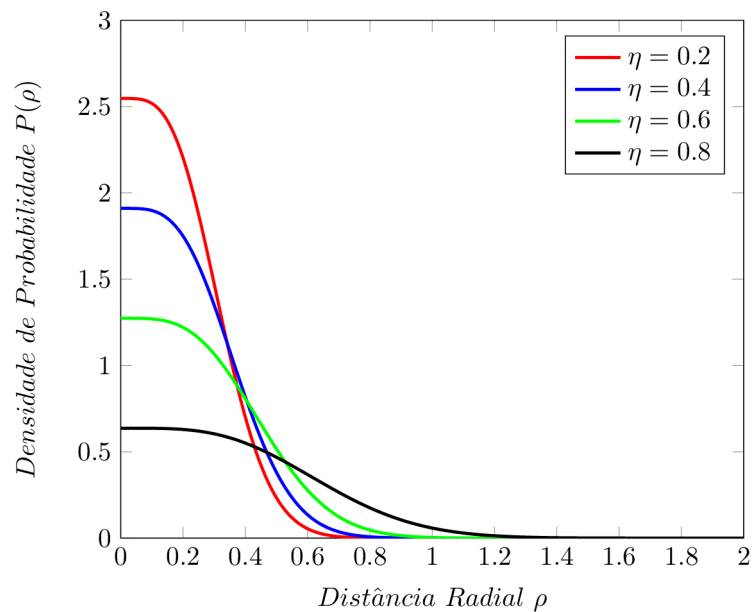


Figura 8: Gráfico de $P(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de η .

3.2 Limite não-relativístico

Para analisar o limite não-relativístico (regime de baixas energias) de nossos resultados (algo importante para possíveis aplicações em matéria condensada), é necessário considerar que a maior parte da energia total do sistema esteja concentrada na energia de repouso da partícula [1, 14], onde uma prescrição padrão (“receita padrão”) para que isto seja feito é dada por: $E \approx m_0 + \varepsilon$, onde $m_0 \gg \varepsilon$ e $m_0 \gg E_m$ (isso tem por objetivo cancelar termos quadráticos de m_0 , ε e E_m). Então, usando esta prescrição na Eq. (3.24) com $u = s = +1$ (partícula sem spin), obtemos a seguinte ES para o EHQNC com MMA no espaço Euclidiano bidimensional

$$i\partial_t \Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t) = H_S^{NC} \Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t) = [H_{\text{tipo-OHQNC}} + H_{\text{Zeeman}}^{NC}] \Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t), \quad (3.56)$$

onde

$$H_{\text{tipo-OHQNC}} = -\frac{\tau^2}{2m_0} \nabla^2 + \frac{1}{2} m_0 (\tau \Omega \rho)^2 = -\frac{1}{2M^{NC}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{L_z^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{8} M^{NC} \left(\omega_c^{NC} \rho \right)^2, \quad (3.57)$$

e

$$H_{\text{Zeeman}}^{NC} = -\vec{\mu}_{eff} \cdot \vec{B}_{ext}, \quad (3.58)$$

com

$$\vec{\mu}_{eff} = -(a\vec{n} + \tau\lambda\vec{L})\mu_B = -(\vec{\mu}_m - \tau\lambda\vec{\mu}_L), \quad \vec{\mu}_L = -\mu_B\vec{L}, \quad \vec{L} = (0, 0, L_z) = (0, 0, -i\partial_\varphi), \quad (3.59)$$

sendo H_S^{NC} o Hamiltoniano de Schrödinger NC (dependente do tempo), onde $H_{\text{tipo-OHQNC}}$ é um Hamiltoniano tipo-oscilador harmônico quântico não-comutativo (OHQNC) [153, 154], H_{Zeeman}^{NC} é o Hamiltoniano de Zeeman normal NC (“normal” porque não há spin [176]), $M^{NC} \equiv \frac{m_0}{\tau^2} > 0$ é uma “massa NC”, $\omega_c^{NC} = \tau\lambda\omega_c$ é a frequência ciclotron NC, $\Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{i(m_l\varphi - \varepsilon t)}}{\sqrt{2\pi\rho}} f_S(\rho)$, ou ainda $\Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t) = \frac{e^{i(m_l\varphi - \varepsilon t)}}{\sqrt{2\pi\rho}} F_S(\rho)$ [414] é a função de onda de Schrödinger NC (ou simplesmente a função de onda NC), ∇^2 é o operador laplaciano, \vec{L} é o (operador) momento angular orbital, $\vec{\mu}_{eff}$ é o MDM efetivo (total ou NC) da partícula (“MDM orbital corrigido pela QED”), onde $\vec{\mu}_L = \mu_L \vec{e}_z$ (sendo $\mu_L = \mu_z = -g\mu_B m_l$ e $g = g_{clássico} = g_{orbital} = 1$) é o bem conhecido MDM orbital (MDM associado ao movimento orbital [176]), $\vec{n} = (0, 0, 1)$ é um vetor unitário (inserido por conveniência) e $\mu_B = \frac{e}{2m_0}$ é o magnéton de Bohr, respectivamente. Como podemos ver em (3.58), o Hamiltoniano de Zeeman possui dois tipos de MDMs: o orbital e o anômalo (ambos de origem distintas). Em particular, na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$) e do MMA ($a = 0$), obtemos exatamente o Hamiltoniano de Schrödinger (usual) radial isotrópico 2D (EHQ polar) [112, 213, 435, 436].

A título de informação, o efeito Zeeman foi descoberto por Pieter Zeeman em 1896 (prêmio Nobel de 1902 junto com Hendrik A. Lorentz) e é um fenômeno que se ma-

nifesta quando um átomo (cujo spin resultante/total é nulo ou não-nulo) é colocado em um campo magnético externo uniforme, onde os níveis de energia do(s) elétron(s) são deslocados (divididos em subníveis de energia), em outras palavras, é o efeito da divisão de uma linha espectral em vários componentes na presença de um campo magnético estático [14, 176]. Além disso, no caso do Hamiltoniano de Zeeman NC, dado por (3.58), o seu espectro (espectro de Zeeman NC) é dado por: $E_{Zeeman}^{NC} = E_m + E_{m_l} = \mu_m B + \frac{1}{2} \omega_c^{NC} m_l$ (soma de dois tipos de energia magnética: uma contínua e uma quantizada), onde vemos que a função do MMA é aumentar os valores desse espectro. Em particular, na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$) e do MMA ($a = 0$), obtemos exatamente o Hamiltoniano de Zeeman usual (normal), dado por: $H_{Zeeman} = -\vec{\mu}_L \cdot \vec{B}_{ext} = \frac{e}{2m_0} \vec{L} \cdot \vec{B}_{ext}$, onde $\vec{L} \cdot \vec{B}_{ext} > 0$ (L_z e B_z são paralelos) é a condição para a energia máxima, e $\vec{L} \cdot \vec{B}_{ext} < 0$ (L_z e B_z são antiparalelos) é a condição para a energia mínima [176, 436]. Além disso, vemos que se a restrição para $\tau\lambda$ não for obedecida ($\tau\lambda > 0$), então teríamos apenas a energia magnética (anômala) como o único autovalor do Hamiltoniano caso $\tau\lambda = 0$, onde teríamos uma equação de autovalores dada por: $H_S \hat{f}(\rho) = H_{Zeeman} \hat{f}(\rho) = E_m \hat{f}(\rho)$, ou seja, teríamos um “Hamiltoniano de Zeeman anômalo” (não confundir com o verdadeiro Hamiltoniano de Zeeman anômalo, no qual leva em consideração o spin do átomo).

Então, usando novamente a prescrição padrão, ou seja: $E \approx m_0 + \varepsilon$ (com $m_0 \gg \varepsilon$, $m_0 \gg E_m$ e $u = s = +1$), mas agora em (3.32), obtemos o seguinte espectro não-relativístico (níveis de Landau não-relativísticos) para o EHQNC com MMA no espaço Euclidiano

$$\varepsilon_{n,m_l} = E_{tipo-OHQNC} + E_{Zeeman}^{NC} = E_m + \omega_c^{NC} \left[n + \frac{1}{2} + \frac{|m_l| + m_l}{2} \right], \quad (3.60)$$

ou

$$\varepsilon_{n,m_l} = E_m + \frac{\omega_c^{NC}}{2} \langle L_z \rangle, \quad \langle L_z \rangle = 2 \left[n + \frac{1}{2} + \frac{|m_l| + m_l}{2} \right], \quad (3.61)$$

onde $E_{tipo-OHQNC}$ são os autovalores (espectro) de $H_{tipo-OHQNC}$, $\langle L_z^{NC} \rangle$ é o valor esperado do momento angular NC [161] e também usamos a seguinte relação: $|m_j - 1/2| + (m_j + 1/2) \rightarrow |m_l| + m_l$ ($m_j = m_l \pm 1/2$), algo consistente do ponto de vista não-relativístico, uma vez que a partícula não tem spin e m_j não deve mais aparecer explicitamente no espectro (somente m_l [176]). Então, notamos que o espectro (3.60) possui algumas semelhanças e diferenças (mais semelhanças do que diferenças) com o caso relativístico (espectro (3.32)). Por exemplo, semelhante ao caso relativístico, o espectro (3.60)

- só admite estados de energia positiva ou de partícula ($\varepsilon_{n,m_l} > 0$);
- depende linearmente de E_m , onde tal energia também tem a função de aumentar os valores do espectro;

- possui uma degenerescência finita ($m_l \geq 0$) ou infinita ($m_l < 0$), onde $m_l \geq 0$ permite obter o espectro máximo e $m_l < 0$ o espectro mínimo;
- aumenta em função de n e m_l ($m_l \geq 0$);
- não admite “estados de ressonância” ($\omega_c \neq \omega_\theta$ e $\omega_c \neq \omega_\eta$), caso contrário, então $\varepsilon = E_m$;
- permanece quantizado (discreto) mesmo na ausência do campo magnético ($B = 0$), cujo espectro é dado por: $\varepsilon_{n,m_l}^{NC} = \frac{\eta}{m_0} \left[n + \frac{1}{2} + \frac{|m_l| - m_l}{2} \right] > 0$ (é o limite não-relativístico de (3.35)), onde $\dim[\eta/m_0] = \dim[\text{energia cinética}]$.

No entanto, diferentemente do caso relativístico, o espectro (3.60)

- não admite um estado fundamental independente de θ , η e ω_c , ou seja, o fator $\frac{1}{2}$ proíbe isso (no caso relativístico admite isso dependendo da escolha da componente do spinor).

Agora, vamos comparar rapidamente o espectro (3.60) com outros trabalhos da literatura. Então, verificamos que na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta$) e do MMA ($E_m = 0$), com $m_l \geq 0$ ou $m_l < 0$, obtemos exatamente o espectro usual do EHQ não-relativístico [111-113, 115, 213, 435, 437]. Já na ausência do MMA ($E_m = 0$) com $m_l < 0$, obtemos o espectro do EHQ não-relativístico em um espaço NC ($\theta \neq 0$ e $\eta = 0$, com $e \rightarrow -e$) [168] e em um espaço de fase NC ($\theta \neq 0$ e $\eta \neq 0$) [169]. Do exposto, vemos claramente que o nosso espectro não-relativístico também generaliza vários casos particulares da literatura. Na tabela 6, temos a condição para obter cada espectro particular (citados acima) bem como suas respectivas referências.

Tabela 6: Espectros não-relativísticos particulares da literatura.

Condição	Espectro	Referências
$\theta = \eta = E_m = 0$	$\varepsilon_{n,m_l} = \omega_c \left[n + \frac{1}{2} + \frac{ m_l + m_l}{2} \right]$	[111-113, 115, 213, 435-437]
$\eta = E_m = 0, m_l < 0$	$\varepsilon_n = \tau \omega_c \left[n + \frac{1}{2} \right]$	[168]
$E_m = 0, m_l < 0$	$\varepsilon_n = \omega_c^{NC} \left[n + \frac{1}{2} \right]$	[169]

Agora, vamos obter a função de onda NC para os estados ligados não-relativísticos do EHQNC. No entanto, esta função pode ser obtida de duas maneiras diferentes (mas equivalentes), ou seja: resolvendo diretamente a Eq. (3.56), ou partindo diretamente da função (3.38). Por simplicidade, escolhemos esta segunda opção. Então, usando as seguintes substituições

$$|\gamma_+| \rightarrow |m_l|, \quad C_+ \rightarrow C_S, \quad (3.62)$$

temos que

$$f_S(\rho) = C_S (m_0 \Omega)^{\frac{|m_l|}{2}} \rho^{|m_l|} e^{-\frac{m_0 \Omega \rho^2}{2}} L_n^{|m_l|}(m_0 \Omega \rho^2). \quad (3.63)$$

Usando agora a seguinte condição de normalização (escrita em termos da variável $r = m_0 \Omega \rho^2$) [112, 437]

$$\int_0^\infty |\Psi_S^{NC}|^2 \rho d\rho = \frac{C_S^2}{2m_0 \Omega} \int_0^\infty r^{|m_l|} e^{-r} [L_n^{|m_l|}(r)]^2 dr = 1, \quad (3.64)$$

a constante de normalização C_S ficará escrita como

$$C_S = \sqrt{2m_0 \Omega \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|m_l|+1)}} > 0. \quad (3.65)$$

Portanto, a função de onda normalizada assume a seguinte forma

$$\Psi_S^{NC}(\rho, \varphi, t) = \sqrt{\frac{(m_0 \Omega)^{|m_l|+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|m_l|+1)}} e^{i(m_l \varphi - \varepsilon t)} \rho^{|m_l|} e^{-\frac{m_0 \Omega \rho^2}{2}} L_n^{|m_l|}(m_0 \Omega \rho^2), \quad (3.66)$$

no qual deve satisfazer as seguintes condições de contorno para ser uma solução fisicamente aceitável (análogo ao caso relativístico)

$$\Psi_S^{NC}(\rho \rightarrow 0) = \text{finita} \geq 0, \quad \Psi_S^{NC}(\rho \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.67)$$

e também a satisfaz a seguinte condição de periodicidade (também análogo ao caso relativístico)

$$\Psi_S^{NC}(\varphi \pm 2\pi) = \Psi_S^{NC}(\varphi). \quad (3.68)$$

Em particular, na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$), obtemos exatamente a função de onda do EQ não-relativístico encontrado na literatura [112, 436, 437].

4 A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO GENÉRICO (2+1)-DIMENSIONAL

Aqui, vamos introduzir a EDNC em um espaço-tempo curvo genérico em $(2 + 1)$ -dimensões. Para alcançar tal objetivo, vamos usar o formalismo das tetradas (da TRG), uma vez que é um método bastante eficiente para introduzir férmions (ou campos fermiônicos) em espaços-tempos curvos (campos gravitacionais) [400,438,439]. Então, em coordenadas polares (ρ, φ, t) , o elemento de linha para um espaço-tempo curvo genérico (“arbitrário”) pode ser escrito pela seguinte expressão

$$ds_{genérico}^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = (Xdt + Yd\varphi)^2 - d\rho^2 - Z^2d\varphi^2, \quad (\mu, \nu = t, \rho, \varphi), \quad (4.1)$$

onde os coeficientes X , Y e Z são funções somente da coordenada radial polar: $X = X(\rho)$, $Y = Y(\rho)$ e $Z = Z(\rho)$, e $g_{\mu\nu}(x)$ é o tensor métrico curvo (ou simplesmente métrica curva), cujo inverso é dado $g^{\mu\nu}(x)$, onde ambos assumem a seguinte forma

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} X^2 & 0 & XY \\ 0 & -1 & 0 \\ XY & 0 & Y^2 - Z^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \frac{Z^2 - Y^2}{X^2 Z^2} & 0 & \frac{Y}{X Z^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{Y}{X Z^2} & 0 & -\frac{1}{Z^2} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

e satisfazem a relação de ortogonalidade, dada por: $g_{\mu\nu}(x)g^{\mu\sigma}(x) = \delta^\sigma_\nu$, com δ^σ_ν sendo o delta de Kronecker $(2 + 1)$ -dimensional e vale: $\delta^\sigma_\nu = 1$ para $\sigma = \nu$ e $\delta^\sigma_\nu = 0$ para $\sigma \neq \nu$, ou compactamente, como: $\delta^\sigma_\nu = \text{diag}(1, 1, 1)$. Em particular, para dizer que um objeto em questão depende do espaço-tempo curvo, escrevemos ele como uma função de $x = x^\mu$ (é uma nomenclatura usada na literatura para poder diferenciar tal objeto no espaço-tempo plano usual, no qual não é uma função de x). Além disso, como as métricas acima são não-diagonais (off-diagonais), implica que o tempo não é mais ortogonal ao espaço (o referencial é não-ortogonal ao tempo).

Desse modo, com o elemento de linha dado pela expressão (4.1), precisamos agora construir um quadro de referência local onde o observador vai ser colocado/posicionado (ou seja, o referencial do laboratório). Consequentemente, é neste quadro (referencial) local que podemos então definir as matrizes gama (ou o spinor) em um espaço-tempo curvo [389,390,400,438,439]. Portanto, através do formalismo das tetradas (da TRG) é perfeitamente possível alcançar esse objetivo, onde tal formalismo afirma que um dado espaço-tempo curvo pode ser introduzido ponto a ponto com um espaço-tempo plano através de objetos do tipo $e^\mu_a(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} = \partial_a x^\mu$ (transforma as coordenadas locais/planas em coordenadas gerais/curvas), que são chamadas de tetradas ou vierbeins (matrizes quadradas), e que junto com suas inversas, dadas por $e^a_\mu(x) = [e^\mu_a(x)]^{-1} = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} = \partial_\mu x^a$, obedecem as seguintes relações: $\hat{\theta}^a = e^a_\mu(x)dx^\mu$ e

$dx^\mu = e^\mu_a(x)\hat{\theta}^a$, onde $\hat{\theta}^a = (\hat{\theta}^0, \hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2)$ é uma quantidade chamada de base não-coordenada, no qual os índices Gregos é para o espaço-tempo curvo enquanto os índices Latinos é para o espaço-tempo plano, respectivamente. Além disso, as tetradas e suas inversas também devem obedecer as seguintes relações

$$e^a_\mu(x)e^\mu_b(x) = \delta^a_b, \quad e^\mu_a(x)e^a_\nu(x) = \delta^\mu_\nu, \quad (\mu, \nu = t, \rho, \varphi; a, b = 0, 1, 2), \quad (4.3)$$

e

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)e^b_\nu(x)\tilde{\eta}_{ab}, \quad \tilde{\eta}_{ab} = e^\mu_a(x)e^\nu_b(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (4.4)$$

onde $\tilde{\eta}_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski (cartesiana) e $\delta^a_b = \text{diag}(1, 1, 1)$. Então, através do formalismo das tetradas, podemos reescrever o elemento de linha (4.1) em termos da base não-coordenada da seguinte forma

$$ds^2_{\text{genérico}} = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = \tilde{\eta}_{ab}\hat{\theta}^a \otimes \hat{\theta}^b = (\hat{\theta}^0)^2 - (\hat{\theta}^1)^2 - (\hat{\theta}^2)^2, \quad (a, b = 0, 1, 2), \quad (4.5)$$

onde as componentes de $\hat{\theta}^{a(b)}$ são escritas como

$$\hat{\theta}^0 = Xdt + Yd\varphi, \quad \hat{\theta}^1 = d\rho, \quad \hat{\theta}^2 = Zd\varphi, \quad (4.6)$$

sendo \otimes o símbolo para o produto de Kronecker ou produto tensorial [265]. Com isso, as tetradas e suas inversas assumem a forma

$$e^\mu_a(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{X} & 0 & -\frac{Y}{XZ} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z} \end{pmatrix}, \quad e^a_\mu(x) = \begin{pmatrix} X & 0 & Y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Como podemos ver claramente em (4.6), onde as componentes de $\hat{\theta}^{a(b)}$ são funções explícitas da coordenada polar ρ , aqui, uma certa quantidade (ou parâmetro) com os índices Latinos a, b, c, \dots não significa necessariamente que tal quantidade (ou parâmetro) tenha coordenadas cartesianas (como já falamos anteriormente, tais índices servem para representar o espaço-tempo plano, no qual pode conter as coordenadas cartesianas ou polares). Por exemplo, tomando $X = 1, Y = 0$ e $Z = \rho$ em (4.4), obtemos exatamente a métrica de Minkowski polar, no qual é algo que não seria possível caso $\tilde{\eta}_{ab}$ também fosse escrita em coordenadas polares.

Agora, podemos obter um dos objetos fundamentais da ED em espaços-tempos curvos (sem torção), onde tal objeto é chamado de conexão de spin (um tensor antissimétrico nos seus índices locais) [298, 438, 439], e é definido como segue

$$\omega_{ab\mu}(x) = -\omega_{ba\mu}(x) = \tilde{\eta}_{ac}e^c_\nu(x) \left[e^\sigma_b(x)\Gamma^\nu_{\mu\sigma}(x) + \partial_\mu e^\nu_b(x) \right], \quad (4.8)$$

onde $\Gamma^\nu_{\mu\sigma}(x)$ são os símbolos de Christoffel do segundo tipo (um tensor simétrico), e escritos

da seguinte forma

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}(x) = \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu}(x) = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(x) [\partial_{\mu}g_{\lambda\sigma}(x) + \partial_{\sigma}g_{\lambda\mu}(x) - \partial_{\lambda}g_{\mu\sigma}(x)]. \quad (4.9)$$

e cujas componentes não-nulas são dadas por

$$\Gamma_{t\rho}^t(x) = \Gamma_{\rho t}^t(x) = \frac{2Z^2X' + XY Y' - Y^2X'}{2XZ^2}, \quad (4.10)$$

$$\Gamma_{\rho\varphi}^t(x) = \Gamma_{\varphi\rho}^t(x) = \frac{XY^2Y' - Y^3X' + XZ^2Y' + YZ(ZX' - 2XZ')}{2X^2Z^2}, \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{tt}^{\rho}(x) = XX', \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{t\varphi}^{\rho}(x) = \Gamma_{\varphi t}^{\rho}(x) = \frac{1}{2}(YX' + XY'), \quad (4.13)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho}(x) = YY' - ZZ', \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{t\rho}^{\varphi}(x) = \Gamma_{\rho t}^{\varphi}(x) = \frac{YX' - XY'}{2Z^2}, \quad (4.15)$$

$$\Gamma_{\rho\varphi}^{\varphi}(x) = \Gamma_{\varphi\rho}^{\varphi}(x) = \frac{Y^2X' - XY Y' + 2XZZ'}{2XZ^2}, \quad (4.16)$$

onde $X' = \frac{dX}{d\rho}$, $Y' = \frac{dY}{d\rho}$ e $Z' = \frac{dZ}{d\rho}$, respectivamente.

Consequentemente, as componentes não-nulas da conexão de spin são escritas como

$$\omega_{01t}(x) = -\omega_{10t}(x) = -X', \quad (4.17)$$

$$\omega_{12t}(x) = -\omega_{21t}(x) = \frac{XY' - YX'}{2Z}, \quad (4.18)$$

$$\omega_{02\rho}(x) = -\omega_{20\rho}(x) = \frac{XY' - YX'}{2XZ}, \quad (4.19)$$

$$\omega_{01\varphi}(x) = -\omega_{10\varphi}(x) = -\frac{XY' + YX'}{2X}, \quad (4.20)$$

$$\omega_{12\varphi}(x) = -\omega_{21\varphi}(x) = \frac{XY Y' - Y^2X'}{2XZ} - Z'. \quad (4.21)$$

Daqui em diante, vamos concentrar nossa atenção na EDNC em um espaço-tempo curvo genérico. Dessa forma, temos a seguinte ED tensorial com acoplamentos mínimo e não-mínimo em um espaço-tempo curvo genérico (em coordenadas polares) [298,387,390,392,438]

$$\left\{ \gamma^{\mu}(x)[P_{\mu}(x) - qA_{\mu}(x)] + \frac{\mu_m}{2}\sigma^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - m_0 \right\} \psi_C(\rho, \varphi, t) = 0, \quad (\mu, \nu = t, \rho, \varphi), \quad (4.22)$$

onde $\gamma^{\mu}(x) = e^{\mu}_a(x)\gamma^a$ são as matrizes gama curvas no qual satisfazem a relação de anti-comutação da Álgebra de Clifford Covariante: $\{\gamma^{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x)I_{2 \times 2}$, $P_{\mu}(x) = i\nabla_{\mu}(x) = i[\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}(x)]$ é o operador momento curvo, $\nabla_{\mu}(x)$ é a derivada covariante, sendo $\partial_{\mu} = (\partial_t, \partial_{\rho}, \partial_{\varphi})$ as derivadas parciais usuais ($\partial_{\mu} \neq e^c_{\mu}(x)\partial_c$), $\Gamma_{\mu}(x) = -\frac{i}{4}\omega_{ab\mu}(x)\sigma^{ab}$ é a conexão spinorial (ou

conexão afim do spinor), $\sigma^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)]$ é um tensor anti-simétrico curvo, $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)F_{ab}$ é o tensor campo eletromagnético curvo, com $A_\mu(x) = e^b{}_\mu(x)A_b$ sendo o potencial eletromagnético curvo (campo de gauge curvo) e $\psi_C(\rho, \varphi, t) = e^{\frac{i\varphi\Sigma^3}{2}}\Psi_D(\rho, \varphi, t)$ é o nosso espinor curvilíneo, onde $\Psi_D(\rho, \varphi, t)$ é o nosso spinor de Dirac original [412,413]. Como vimos no primeiro cenário, este operador unitário (exponencial complexa) aparece no spinor quando convertemos as matrizes gama curvilíneas nas matrizes gama Cartesianas (aqui, basicamente já estão convertidas).

Em particular, o produto $\gamma^\mu(x)A_\mu(x)$ é igual ao do primeiro cenário depois de feito a transformação de similaridade (isso meio que explica porque aqui o operador unitário já aparece explicitamente no spinor ψ_C), ou seja

$$\gamma^\mu(x)A_\mu(x) = e^\mu{}_a(x)e^b{}_\mu(x)\gamma^a A_b = \delta^b{}_a \gamma^a A_b = \gamma^a A_a = \gamma^2 A_2 = -\gamma^2 A_\varphi = -\frac{1}{2}B\rho\gamma^2, \quad (4.23)$$

onde $A_a = \tilde{\eta}_{ab}A^b = (A_0, A_1, A_2) = (0, 0, -A_\varphi)$. Portanto, aqui a componente A_2 deve ser igual a componente angular $-A_\varphi$ e não $-A_y$ (o sinal negativo é por causa da assinatura da métrica), caso contrário, o primeiro cenário em coordenadas polares não é recuperado. No entanto, como veremos no próximo capítulo, sabendo a forma das tetradas e suas inversas, saberemos a forma de $\gamma^\mu(x)$ e $A_\mu(x)$ separadamente, onde o produto de ambos vai (deve) gerá justamente o resultado em (4.23). Além disso, o produto $\sigma^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$ também é igual ao do primeiro cenário (que não é afetado pela transformação de similaridade), ou seja

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) &= i\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x)F_{\mu\nu}(x) \\ &= i(e^\mu{}_a(x)e^c{}_\mu(x))(e^\nu{}_b(x)e^d{}_\nu(x))\gamma^a\gamma^b F_{cd} \\ &= i(\delta^c{}_a)(\delta^d{}_b)\gamma^a\gamma^b F_{cd} \\ &= \sigma^{ab}F_{ab}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde implica

$$\frac{\mu_m}{2}\sigma^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) = -2\mu_m\vec{S}\cdot\vec{B}, \quad \left(\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right). \quad (4.25)$$

Agora, vamos introduzir o espaço de fase NC na Eq. (4.22). Então, partindo do fato de que é $A_\mu(x)$ dado por $A_\mu(x) = (0, A_{i'}(x))$, onde $A_{i'}(x) = -\frac{B}{2}\varepsilon^{i'j'}x_{j'}(x)$, ou $A_{i'}(x) = \frac{B}{2}\varepsilon^{i'j'}x_{j'}(x)$ ($i', j' = \rho, \varphi$) [126], implica que podemos reescrever a Eq. (4.22) como

$$\left\{ \gamma^t(x)P_t(x) + \gamma^{i'}(x) \left[P_{i'}(x) - \frac{qB}{2}\varepsilon^{i'j'}x_{j'}(x) \right] - 2\mu_m\vec{S}\cdot\vec{B} - m_0 \right\} \psi_C(\rho, \varphi, t) = 0, \quad (4.26)$$

ou em um espaço de fase NC, como

$$\left\{ \gamma^t(x)P_t(x) + \gamma^{i'}(x) \left[P_{i'}^{NC}(x) - \frac{qB}{2}\varepsilon^{i'j'}x_{j'}^{NC}(x) \right] - 2\mu_m\vec{S}\cdot\vec{B} - m_0 \right\} \psi_C^{NC}(\rho, \varphi, t) = 0. \quad (4.27)$$

No entanto, para obtermos a forma explícita da EDNC em um espaço-tempo curvo genérico, precisamos escrever também os operadores x_μ^{NC} e p_μ^{NC} (ver (2.18) por favor) no espaço-tempo curvo genérico (onde $p_\mu \rightarrow P_\mu(x)$). Para uma escolha conveniente, estes operadores podem ser escritos da seguinte forma

$$P_\mu^{NC}(x) = P_\mu(x) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}x^\nu(x), \quad x_\mu^{NC}(x) = x_\mu(x) - \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}P^\nu(x), \quad (\mu, \nu = t, i', j', l'), \quad (4.28)$$

ou melhor (NC apenas nas componentes espaciais)

$$P_{i'}^{NC}(x) = P_{i'}(x) + \frac{1}{2}\eta_{i'j'}x^{j'}(x), \quad x_{j'}^{NC}(x) = x_{j'}(x) - \frac{1}{2}\theta_{i'j'}P^{i'}(x). \quad (4.29)$$

Consequentemente, a Eq. (4.27) torna-se

$$\left\{ \gamma^t(x)P_t(x) + \gamma^{j'}(x) [\tau P_{i'}(x) - q\lambda A_{i'}(x)] - 2\mu_m \vec{S} \cdot \vec{B} - m_0 \right\} \psi_C^{NC} = 0, \quad (4.30)$$

ou melhor

$$\left[i\gamma^t(x)\partial_t + i\tau\gamma^\rho(x)\partial_\rho + i\tau\gamma^\phi(x)\partial_\phi - \frac{\lambda m_0 \omega_c}{2}\rho\gamma^2 - \mu_m \Sigma^z B - m_0 \right] \psi_C^{NC} + i[\gamma^t(x)\Gamma_t(x) + \tau\gamma^\rho(x)\Gamma_\rho(x) + \tau\gamma^\phi(x)\Gamma_\phi(x)] \psi_C^{NC} = 0, \quad (4.31)$$

onde $\tau = (1 - m_0\omega_c\theta/4)$, $\lambda = (1 - \eta/m_0\omega_c)$, $\omega_c = eB/m_0 > 0$ ($q = -e$) e $\psi_C^{NC} = \psi_C^{NC}(\rho, \phi, t)$.

Além disso, usando as expressões (4.17)-(4.21), obtemos as seguintes componentes (não-nulas) da conexão espinorial

$$\Gamma_t(x) = \frac{(YX' - XY')\gamma^1\gamma^2 + 2ZX'\gamma^0\gamma^1}{4Z}, \quad (4.32)$$

$$\Gamma_\rho(x) = \frac{(YX' - XY')}{4XZ}\gamma^0\gamma^2, \quad (4.33)$$

$$\Gamma_\phi(x) = \frac{(Y^2X' - XY Y' + 2XZZ')\gamma^1\gamma^2 + (X'YZ + XY'Z)\gamma^0\gamma^1}{4XZ}. \quad (4.34)$$

Com respeito às matrizes gama curvas, também temos

$$\gamma^t(x) = \frac{(Z\gamma^0 - Y\gamma^2)}{XZ}, \quad (4.35)$$

$$\gamma^\rho(x) = \gamma^1, \quad (4.36)$$

$$\gamma^\phi(x) = \frac{1}{Z}\gamma^2. \quad (4.37)$$

Portanto, usando as expressões (4.32)-(4.34) e (4.35)-(4.37), obtemos a seguinte

contribuição da conexão spinorial (ou de spin) para a EDNC

$$[\gamma'(x)\Gamma_t(x) + \tau\gamma^\rho(x)\Gamma_\rho(x) + \tau\gamma^\phi(x)\Gamma_\phi(x)] = \frac{(2\tau - 1)XY' - YX'}{4XZ}\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + \frac{(1 - \tau)(XY Y' - Y^2 X') + 2(\tau X Z Z' + X' Z^2)}{4XZ^2}\gamma^1. \quad (4.38)$$

Desse modo, substituindo então estas matrizes gama curvas e a contribuição da conexão spinorial na Eq. (4.31), obtemos a seguinte EDNC em um espaço-tempo curvo genérico em função de X , Y e Z (coeficientes do elemento de linha ou da métrica)

$$\left[i\frac{(Z\gamma^0 - Y\gamma^2)}{XZ}\partial_t + i\tau\gamma^1\partial_\rho + i\tau\frac{1}{Z}\gamma^2\partial_\phi - \frac{\lambda m_0\omega_c}{2}\rho\gamma^2 - \mu_m\Sigma^3 B - m_0 \right] \psi_C^{NC} + \left[\frac{(1 - \tau)(XY Y' - Y^2 X') + 2(\tau X Z Z' + X' Z^2)}{4XZ^2}i\gamma^1 + \frac{(2\tau - 1)XY' - YX'}{4XZ}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \right] \psi_C^{NC} = 0. \quad (4.39)$$

Por outro lado, usando agora o ansatz padrão (3.17) para o spinor da Eq. (4.39), obtemos a seguinte EDNC independente do tempo

$$\left[\frac{(Z\gamma^0 - Y\gamma^2)}{XZ}E + i\tau\gamma^1\partial_\rho - \frac{\tau m_j}{Z}\gamma^2 - \frac{\lambda m_0\omega_c}{2}\rho\gamma^2 - \Sigma^3 E_m - m_0 \right] R(\rho) + \left[\frac{(1 - \tau)(XY Y' - Y^2 X') + 2(\tau X Z Z' + X' Z^2)}{4XZ^2}i\gamma^1 + \frac{(2\tau - 1)XY' - YX'}{4XZ}\gamma^0\Sigma^3 \right] R(\rho) = 0, \quad (4.40)$$

onde $R(\rho) \equiv (f_+(\rho), if_-(\rho))^T$, sendo $\Sigma^3 = i\gamma^1\gamma^2$ e $E_m = \mu_m B$ (como já vimos antes). Portanto, é a partir da Eq. (4.40) que poderemos então modelar os dois últimos cenários deste trabalho.

5 A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA NO ESPAÇO-TEMPO DA CORDA CÓSMICA GIRANTE (2+1)-DIMENSIONAL

Em coordenadas polares (ρ, φ, t) , o elemento de linha (“métrica cônica”) da CC girante pode ser escrito pela seguinte expressão [316-322]

$$ds_{CC}^2 = (dt + \beta d\varphi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2, \quad (\varphi_{CC} = \alpha\varphi; 0 \leq \varphi_{CC} < 2\pi), \quad (5.1)$$

onde o tensor (de curvatura) de Riemann para tal defeito cósmico é dado por

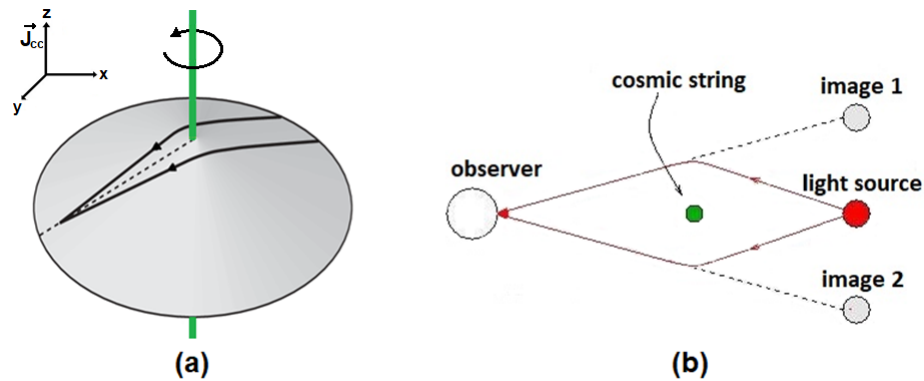
$$R_{\rho\varphi}^{\rho\varphi} = R_{\rho}^{\rho} = R_{\varphi}^{\varphi} = 2\pi \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \delta^2(\vec{r}), \quad (5.2)$$

sendo $\alpha = 1 - 4\bar{M}$ ($0 < \alpha \leq 1$) o parâmetro topológico ou de curvatura (curvatura localizada no eixo de simetria da CC, que é o eixo- z), $\beta = 4\bar{J}$ ($0 \leq \beta < \infty$) é o parâmetro rotacional ou de rotação (“raio” da CC) e $\delta^2(\vec{r})$ é a “função” delta de Dirac bidimensional (no espaço-tempo plano). Em particular, para $\alpha \rightarrow 1$ ($\bar{M} \rightarrow 0$), implica automaticamente em $\beta \rightarrow 0$, ou seja, na ausência (ou bem longe) da CC. No entanto, para $\beta \rightarrow 0$, não implica em $\alpha \rightarrow 1$, mas sim no elemento de linha de uma CC estática, usual ou sem spin (modelado somente por α). Então, com respeito à origem do parâmetro α , tal parâmetro surge porque a presença de um CC introduz (induz) um déficit angular no espaço-tempo de Minkowski (“corta o espaço-tempo plano na forma de uma cunha”), dado por: $\Delta\varphi = \varphi_{total} - \varphi_{CC} = 2\pi(1 - \alpha) = 8\pi G\bar{M} \geq 0$. Portanto, do ponto de vista geométrico, o espaço-tempo da CC às vezes é chamado de espaço-tempo de Minkowski com uma curvatura cônica ou tipo-cunha (ou com uma singularidade cônica). Agora, com respeito à origem do parâmetro β , tal parâmetro surge devido ao tensor energia-momento não-nulo para uma solução de “Kerr 3D” [320, 336] e, portanto, podemos definir \bar{J} como: $\bar{J} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\bar{J}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \int d^2x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) \geq 0$ [322, 336]. Além disso, para evitarmos as CTCs (ou violação da causalidade), aqui consideramos que $\rho > \beta/\alpha$ ou $(\alpha^2\rho^2 - \beta^2) > 0$ [318].

Na Fig. 9, é mostrado a representação do espaço-tempo da CC girante (linha verde), onde \bar{J}_{CC} é seu momento angular e a dimensão tempo (eixo- ct) foi omitida por de questão de visualização (impossível ver quatro dimensões em uma imagem bidimensional) [343, 440]. Na Fig. 9-(a), vemos que o espaço-tempo ao redor da CC é geometricamente cônico, ou seja, é como se uma pequena cunha fosse removida de uma folha circular plana (ou disco plano) e as bordas fossem unidas posteriormente. Já na Fig. 9-(b), vemos que a CC pode formar uma lente gravitacional, que por sua vez pode criar imagens duplas de objetos distantes atrás da CC.

Na Fig. 10, é mostrado a representação de um grafeno cônico (desclinado) ou cone de grafeno, ou seja, uma desclinação (2D) feito a base de grafeno, onde é mostrado também de forma simplificada a formação de tal defeito (via processo de Volterra de “cortar e colar”) e o

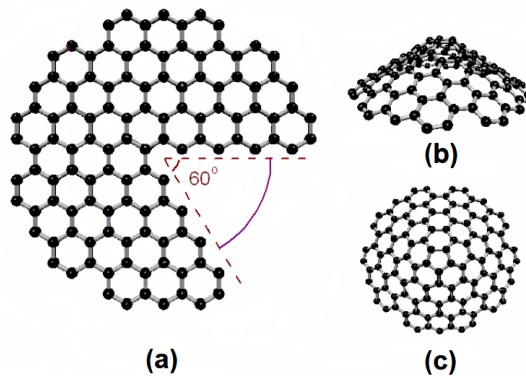
Figura 9 – Representação do espaço-tempo da corda cósmica girante.



Fonte: Adaptado das Refs. [343,440].

o sistema de coordenadas polares foi convertido em um cone tridimensional no sistema de coordenadas cartesianas [375,376,380,381,441-444]. É importante mencionar que em 2D, uma desclinação é um defeito pontual, enquanto que em 3D, é um defeito linear. Então, na Fig. 10(a) é mostrado uma folha (camada) plana de grafeno (curvatura nula) no qual foi removida (“cortada”) uma cunha de 60° ($\Delta\varphi = 60^\circ$) de déficit angular (ou ângulo de Frank ou de desclinação, como também são chamados). Já na Fig. 10(b), é mostrado a vista lateral do grafeno cônico no qual suas bordas foram conectadas (“coladas”), enquanto que na Fig. 10(c), é mostrado o seu topo (vértice) saindo da página. Além disso, de acordo com [375,376,444], para o grafeno cônico devemos ter $\alpha = 1 - \theta > 0$, onde o déficit de ângulo é dado por $\Delta\varphi = 2\pi(1 - \alpha) = 2\pi\theta$ e o parâmetro $\theta > 0$ assume apenas valores discretos por causa da simetria da rede do grafeno. Já de acordo com a Ref. [361], para defeitos lineares em outros materiais, por exemplo, desclinações em cristais líquidos, temos $\alpha = 1 + m/2\pi > 0$, onde a constante m é igual ao ângulo da cunha: para $-2\pi < m < 0$ ($0 < \alpha < 1$) o ângulo é cortado ou retirado (defeito cônico); para $0 < m < \infty$ ($0 < \alpha < \infty$) o ângulo é adicionado ao plano (defeito anti-cônico ou com curvatura negativa); e para $m = 0$ ($\alpha = 1$) corresponde à ausência de desclinação (curvatura nula).

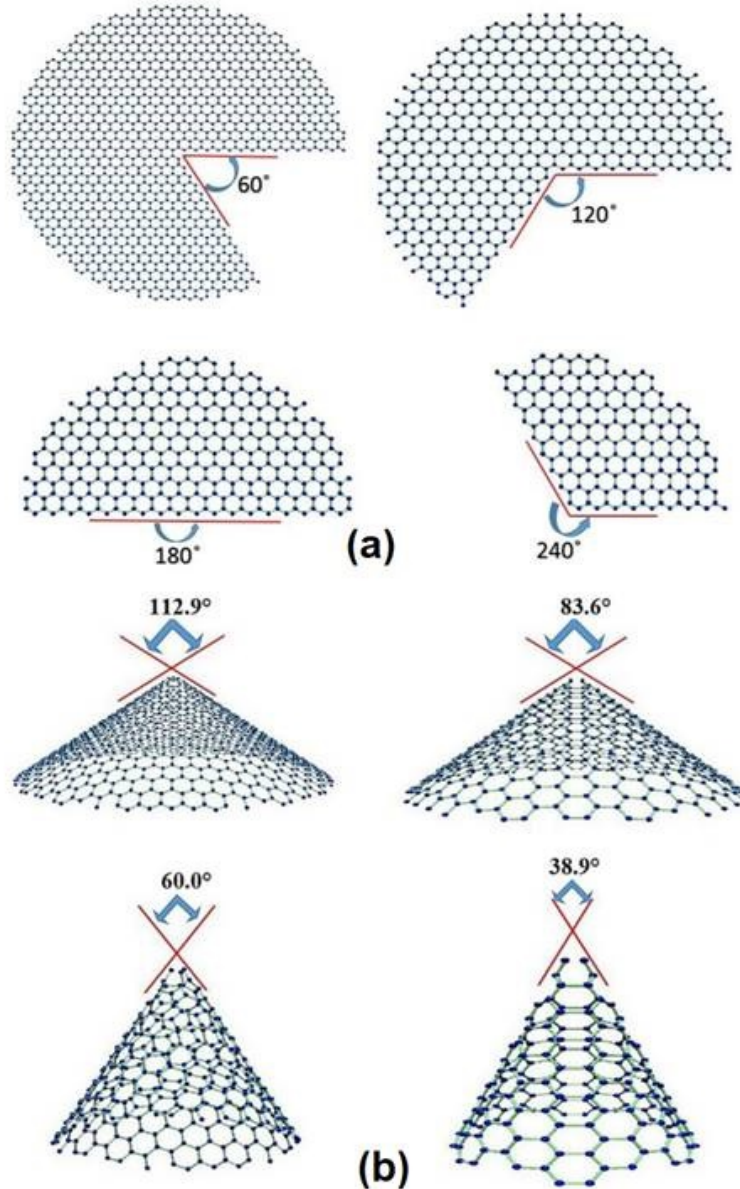
Figura 10 – Representação de um grafeno cônico (ou cone de grafeno).



Fonte: Adaptado das Refs. [375,376,380,381,442-444].

Já na Fig. 11, é mostrado quatro diferentes cones de grafeno, onde na Fig. 11-(a) é mostrado seus respectivos déficits angulares, dados por: $d\theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ e 240° , enquanto que na Fig. 11-(b) é mostrado seus respectivos ângulos de vértice: $112.9^\circ, 83.6^\circ, 60^\circ$ e 38.9° , onde tais ângulos são obtidos por meio da equação $2\sin^{-1}(1 - d\theta/360^\circ)$ [441].

Figura 11 – Representação para quatro diferentes cones de grafeno.



Fonte: Ref. [441].

Portanto, comparando (5.1) com (4.1), obtemos os seguintes coeficientes

$$X = 1, \quad Y = \beta, \quad Z = \alpha\rho, \quad (5.3)$$

e substituindo em (4.40), obtemos a seguinte EDNC no espaço-tempo da CC girante ($R \rightarrow \hat{R}$)

$$\left[\gamma^0 E + i\tau\gamma^1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - \gamma^2 \left(\frac{\tau m_j + \beta E}{\alpha\rho} + \frac{\lambda m_0 \omega_c}{2} \rho \right) - \Sigma^3 E_m - m_0 \right] \hat{R}(\rho) = 0. \quad (5.4)$$

É interessante mencionar aqui que por meio do coeficiente $Z = \alpha\rho$ (agora bem definido), podemos então obter $\gamma^\varphi(x)$ e $A_\varphi(x)$, ou seja

$$\gamma^\varphi(x) = e_2^\varphi(x)\gamma^2 = \frac{1}{\alpha\rho}\gamma^2, \quad (5.5)$$

e

$$A_\mu(x) = (0, A_\varphi(x), 0) = (0, e_\varphi^2(x)A_2, 0) = \left(0, -\frac{1}{2}\alpha B\rho^2, 0\right), \quad (5.6)$$

onde o produto de ambos é dado por (como esperado)

$$\gamma^\varphi(x)A_\varphi(x) = \left(\frac{1}{\alpha\rho}\gamma^2\right)\left(-\frac{1}{2}\alpha B\rho^2\right) = -\frac{1}{2}B\rho\gamma^2. \quad (5.7)$$

Em outras palavras, o potencial $A_\varphi(x)$ está de acordo com a literatura [317–319]. Por outro lado, em termos das matrizes de Pauli, podemos reescrever a Eq. (5.4) na seguinte equação de autovalores

$$H_{CC}\hat{R}(\rho) = E\hat{R}(\rho), \quad (5.8)$$

onde o Hamiltoniano de Dirac curvo H_{CC} é dado por

$$H_{CC} = \left[i\tau\sigma_1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - s\sigma_2 \left(\frac{\tau m_j + \beta E}{\alpha\rho} + \frac{\lambda m_0 \omega_c}{2} \rho \right) + E_m + \sigma_3 m_0 \right]. \quad (5.9)$$

Como podemos ver na equação acima, ambos os parâmetros α e β possuem a função de modificar (“deslocar”) o momento angular total do férmion (assim como ocorre no efeito Aharonov-Bohm onde a partícula carregada “sente” o fluxo magnético de forma indireta [176, 318, 390], ou no efeito Aharonov-Casher onde a partícula neutra “sente” à ação do campo elétrico externo [392]). Ou seja, aqui, tanto a curvatura quanto a rotação da CC modifica o momento angular total do férmion e, portanto, podemos dizer agora que o momento angular total do férmion será $M_j = (\tau m_j + \beta E)/\alpha$, onde J_z é reescrito como $J_z^{CC} = -i(\tau\partial_\varphi - \beta\partial_t)/\alpha$ [321].

Agora, temos que obter a partir de (5.8) uma equação diferencial de segunda ordem para as componentes do spinor. Análogo ao cenário anterior, isto é feito “separando” primeiro a Eq. (5.8) em um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Então, sabendo que $\hat{R}(\rho) = (\hat{f}_+(\rho), i\hat{f}_-(\rho))^T$, implica que estas duas equações acopladas são escritas da seguinte forma

$$\frac{(m_0 + E_m B - E)}{\tau} \hat{f}_+(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} + sm_0\Omega\rho + \frac{s}{\rho} \left(\hat{m}_j + \frac{s}{2} \right) \right] \hat{f}_-(\rho), \quad (5.10)$$

$$\frac{(m_0 - E_m B + E)}{\tau} \hat{f}_-(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} - sm_0\Omega\rho - \frac{s}{\rho} \left(\hat{m}_j - \frac{s}{2} \right) \right] \hat{f}_+(\rho), \quad (5.11)$$

onde $\hat{m}_j \equiv \frac{1}{\alpha}(m_j + \frac{\beta E}{\tau}) \neq 0$ ($E = E_{elétron} > 0$ e $E = E_{pósitron} > 0$) e $\Omega = \frac{\lambda\omega_c}{2\tau} > 0$.

Portanto, substituindo (5.11) em (5.10), e depois (5.10) em (5.11), obtemos como

resultado a seguinte equação diferencial de segunda ordem para o EHQNC com MMA no espaço-tempo da CC girante

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\hat{\gamma}_u^2}{\rho^2} - (m_0\Omega\rho)^2 + \hat{E}_u \right] \hat{f}_u(\rho) = 0, \quad (u = \pm 1), \quad (5.12)$$

onde definimos

$$\hat{\gamma}_u \equiv \left(\hat{m}_j - \frac{su}{2} \right), \quad \hat{E}_u \equiv \frac{(E - E_m)^2 - m_0^2}{\tau^2} - 2m_0\Omega \left(\hat{m}_j + \frac{su}{2} \right). \quad (5.13)$$

Em particular, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$) obtemos exatamente a EDNC no espaço-tempo de Minkowski, dada por (3.24).

5.1 Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico

Para resolver analiticamente a Eq. (5.12), podemos seguir todo o procedimento feito no cenário anterior (via mudança de variável e comportamento assintótico). No entanto, devido à semelhança desta equação com a Eq. (3.24), basta simplesmente substituir m_j por \hat{m}_j (um “mapeamento”) nos resultados do cenário anterior para obter (facilmente) o espectro do segundo cenário (no caso do spinor temos uma sutileza adicional, ou seja, não basta apenas substituir m_j por \hat{m}_j). Desse modo, usando a condição de quantização do caso anterior, dada por: $\frac{|\gamma_u|+1}{2} - \frac{E_u}{4m_0\Omega} = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), então nossa nova condição de quantização torna-se

$$\frac{|\hat{\gamma}_u|+1}{2} - \frac{\hat{E}_u}{4m_0\Omega} = -n, \quad (5.14)$$

onde temos a seguinte equação polinomial do segundo grau para a energia total relativística E

$$E^2 - (2E_m)E - \frac{m_0\tau\lambda\omega_c}{\alpha} \left[\left| L + \frac{\beta E}{\tau} \right| + \left(L + \frac{\beta E}{\tau} \right) \right] - [-E_m^2 + m_0^2 + m_0\tau\lambda\omega_c(2n+1+su)] = 0, \quad (5.15)$$

com $L = L(\alpha) \equiv m_j - \frac{su\alpha}{2} = m_j - u\alpha m_s \neq 0$ sendo um “número quântico magnético topológico” (pois depende de α).

Portanto, resolvendo a equação polinomial (5.15) para $L > 0$ e $L < 0$ (aqui, adotamos por simplicidade que $\tau > 0$ e $\lambda > 0$), obtemos o seguinte espectro relativístico (níveis de Landau relativísticos) para o EHQNC com MMA no espaço-tempo da CC girante

$$E_{n,L,s,u}^\kappa = [E_m + E_\alpha] + \kappa \sqrt{[E_m + E_\alpha]^2 - E_m^2 + m_0^2 + 2m_0\tau\lambda\omega_c N_\alpha}, \quad (5.16)$$

onde

$$E_\alpha \equiv m_0\omega_c\lambda\beta \left(\frac{|L|+L}{2\alpha L} \right) \geq 0, \quad N_\alpha \equiv \left(n + \frac{(1+su)}{2} + \frac{|L|+L}{2\alpha} \right) \geq 0, \quad (5.17)$$

sendo $\kappa = \pm 1$ o parâmetro de energia (partícula/antipartícula), N_α é um “número quântico

efetivo topológico” (pois depende de todos os outros e também de α) e E_α é um tipo de “energia magnética topológica”, ou simplesmente, “energia topológica” (surge devido ao “acoplamento” entre o campo magnético e o spin da CC, dado por $\vec{\beta} \cdot \vec{\omega}_c$). Por exemplo, para uma CC estática ($\beta = 0$) ou na ausência de campo magnético ($B = 0$), ou mesmo para $L < 0$, tal energia é completamente inexistente (não há mais o “acoplamento”). Em particular, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), obtemos exatamente o espectro relativístico do EHQNC no espaço-tempo de Minkowski, dado por (3.32). Porém, diferentemente de (3.32), aqui o espectro não é uma função linear da energia magnética E_m uma vez que tal quantidade se encontra dentro e fora da raiz quadrada. Conseqüentemente, não é possível saber de antemão qual a contribuição desta energia (ou do MMA) no espectro como um todo somente olhando a “cara” do espectro, ou seja, aqui não é trivial concluir como E_m afeta o espectro da partícula e antipartícula sem antes fazer uma análise gráfica do comportamento de tal espectro em função de B (veremos isso em breve). Então, analisando o espectro (5.16), vemos que ele se comporta de forma diferente dependendo dos valores de L . De fato, temos duas possíveis configurações para o espectro dependendo dos valores de L , conforme mostrado na Tabela 7.

Tabela 7: Espectros de energia para a partícula e antipartícula no espaço-tempo da CC girante.

Configuração	L	Espectro de Energia $E_{n,L,s,u}^K$
1	$L > 0$	$E_{n,L}^K = [E_m + E_\alpha] + \kappa \sqrt{[E_m + E_\alpha]^2 - E_m^2 + m_0^2 + 2m_0 \tau \lambda \omega_c N_+}$
2	$L < 0$	$E_{n,s,u}^K = E_m + \kappa \sqrt{m_0^2 + 2m_0 \tau \lambda \omega_c N_-}$

De acordo com a Tabela 7, vemos que para $L > 0$ o espectro (máximo possível) depende de ambos os parâmetros α e β , onde $N_+ = (n + \frac{1}{2} + \frac{m_j}{\alpha}) > 0$ e, portanto, vemos que o espectro também é independente do spin s (e de u), ou seja, análogo ao primeiro cenário para $m_j > 0$. Portanto, como $m_j > 0$, implica que a partícula “orbita” paralelamente à rotação da corda, ou seja, J_z e β são paralelos ($J_z \parallel \beta$ sobre o eixo- z positivo) [317]. Além disso, devido à presença do parâmetro α (não de β), a degenerescência do espectro é quebrada (“não é bem definida”), ou seja, a curvatura cônica da CC quebra a degenerescência (ou os estados degenerados) dos níveis de Landau [445]. Em particular, isso se deve ao fato de que não podemos mais construir um terceiro número quântico (inteiro e positivo) a partir de n e m_j uma vez que L/α não é um inteiro [427, 445]. Já para $L < 0$ (J_z e β são antiparalelos, ou seja, $J_z \perp \beta$), o espectro (mínimo possível) não depende nem de α e nem de β , onde $N_- = (n + \frac{1+su}{2}) \geq 0$. Neste caso, é como se o EHQNC “vivesse literalmente no espaço-tempo de Minkowski”, ou seja, reduzido exatamente ao primeiro cenário, como mostrados na Tabela 2 para $m_j < 0$ (configs. 3 e 4).

Por outro lado, comparando o espectro (5.16) com a literatura para $\theta = \eta = E_m = \beta = m_0 = 0$, obtemos um espectro parecido com o espectro do grafeno cônico [424]. De fato, não é exatamente igual porque antes teríamos que fazer uma “correção” na ED (na verdade adaptar para o grafeno), ou seja, incluir um termo (campo) de gauge não-abeliano dado por $-\frac{\Omega_\mu}{\rho}$, onde $\Omega_\mu = (0, 0, -\Omega_\varphi)$ sendo $\Omega_\varphi = \pm\frac{3}{2}(\alpha - 1)$.

Agora, vamos analisar o comportamento do espectro (5.16) em função do campo magnético B e dos parâmetros α e β para diferentes valores de n (com $m_j > 0$ fixo). Desta forma, considerando o espectro máximo (config. 1) da Tabela 7, temos a Fig. 12, onde mostra o comportamento das energias da partícula em função do campo magnético para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$), com e sem a presença da energia magnética E_m , no qual usamos $m_0 = e = \theta = \eta = \beta = 1$, $m_j = 1/2$ e $\alpha = 1/2$, sendo o campo dado por $1 < B < 4$.

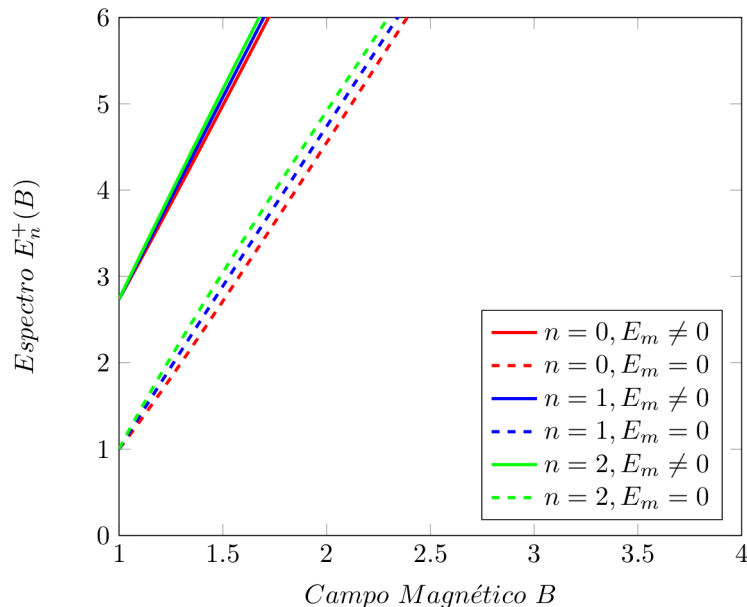


Figura 12: Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

Então, de acordo com Fig. 12, vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser), são sempre maiores para $E_m \neq 0$ (a função do MMA é aumentar as energias) e também sempre aumentam (“linearmente”) em função de B ($\Delta E(B) > 0$). No entanto, comparando o primeiro cenário com o segundo (Figs. 11 e 12), verificamos que as energias da partícula com os maiores valores são para o segundo cenário. Já na Fig. 13, vemos que as energias da antipartícula aumentam com o aumento de n (como deve ser) e praticamente diminuem em função de B ($\Delta E(B) < 0$), onde as energias para $E_m = 0$ são quase “nulas” em $B \approx 4$ ($0 < |E_n^-| \ll 1$), ou seja, a energia magnética é quase igual à energia quantizada (“energia da raiz quadrada”). Além disso, diferentemente do primeiro cenário, aqui as energias da antipartícula são maiores

na presença do MMA ($E_m \neq 0$), ou seja, aqui a função do MMA também é aumentar as energias. Agora, comparando o primeiro cenário com o segundo (Figs. 2 e 13), verificamos que as energias da antipartícula com os maiores valores também são para o segundo cenário.

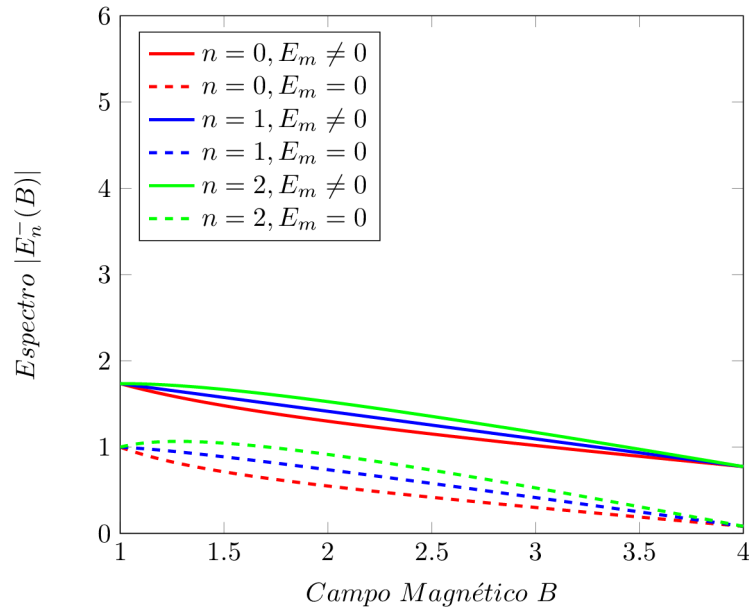


Figura 13: Gráfico de $|E_n^-(B)|$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

Agora, vamos analisar o comportamento do espectro em função dos parâmetros α e β para diferentes valores de n (com m_j fixo). Portanto, temos a Fig. 14, onde mostra o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de α para o estado fundamental ($n = 0$), o segundo estado excitado ($n = 2$) e o quarto estado excitado ($n = 4$), no qual usamos $m_0 = e = a = B = \beta = 1$, $\theta = 3$ ($\tau > 0$), $\eta = 1/2$ ($\lambda > 0$) e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser), porém, são praticamente iguais ($\Delta E_n \approx 0$) para $\alpha \leq 0.2$ (partícula) e $\alpha \leq 0.1$ (antipartícula). Além disso, as energias podem aumentar ou diminuir enquanto α diminui (um aumento da curvatura), ou seja, a função de α é aumentar as energias da partícula e diminuir as da antipartícula, onde as energias da partícula são sempre muito maiores que as da antipartícula ($E_+ \gg |E_-|$). Porém, diferentemente da antipartícula, onde a energia tende à zero no limite $\alpha \rightarrow 0$ (“curvatura infinita”), no caso da partícula a energia tende ao “infinito” neste limite e, portanto, a influência de α é muito mais significativa no caso da partícula.

Já na Fig. 15, é mostrado o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de β para o estado fundamental ($n = 0$), o segundo estado excitado ($n = 2$) e o quarto estado excitado ($n = 4$), onde usamos $m_0 = e = a = B = 1$, $\theta = 3$ ($\tau > 0$), $\eta = 1/2$ ($\lambda > 0$), $m_j = 1/2$ e $\alpha = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias da partícula e antipartícula aumentam com o aumento de n (como deve ser), onde as energias da partícula são

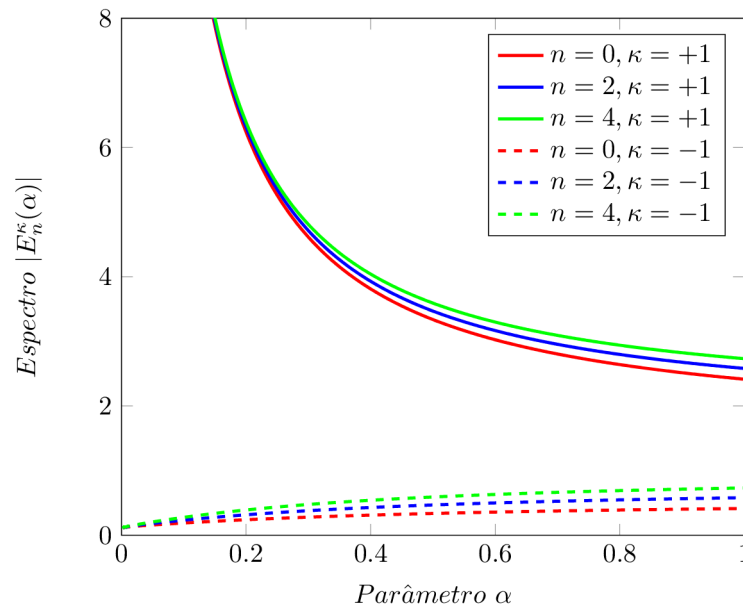


Figura 14: Gráfico de $|E_n^\kappa(\alpha)|$ versus α para três diferentes valores de n .

muito maiores, porém, a função de β é aumentar as energias da partícula (temos $E \rightarrow \infty$ para $\beta \rightarrow \infty$) e diminuir as da antipartícula (temos $E \rightarrow 0$ para $\beta \rightarrow \infty$). Dessa forma, quanto mais rápido a CC girar, maiores são as energias da partícula e menores as da antipartícula.

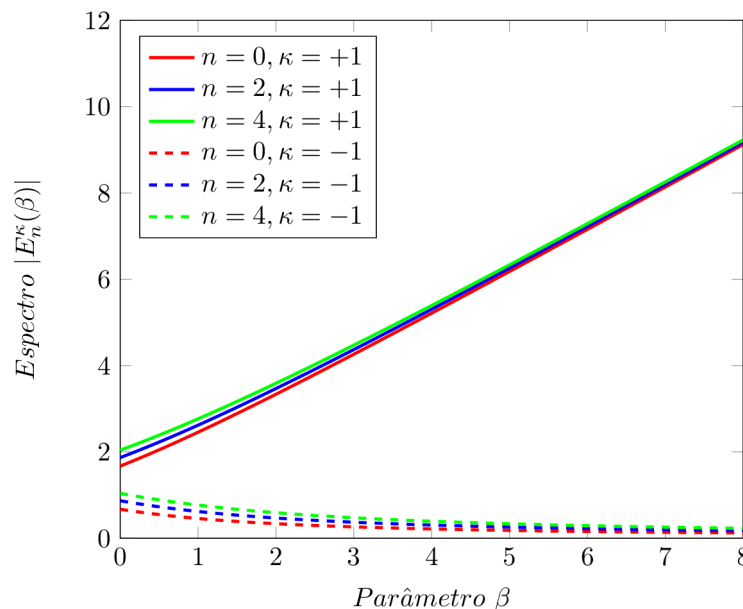


Figura 15: Gráfico de $|E_n^\kappa(\beta)|$ versus β para três diferentes valores de n .

Agora, vamos obter a forma do spinor de Dirac NC (spinor curvo inercial) para os estados ligados relativísticos do EHQNC (e depois analisar rapidamente a densidade de probabilidade). No entanto, diferentemente do espectro de energia, aqui não basta apenas substituir γ_u por $\hat{\gamma}_u$ em (3.52) para então obter o spinor de Dirac para o segundo cenário porque aqui temos uma sutileza (detalhe) adicional devido ao espaço-tempo curvo. Por outro lado, no caso das

componentes spinoriais isso pode ser feito tranquilamente, onde tais componentes são dadas como segue (fizemos $\gamma_u \rightarrow \hat{\gamma}_u$ e $C_u \rightarrow \hat{C}_u$ em (3.38))

$$\hat{f}_u(\rho) = \hat{C}_u(m_0\Omega)^{\frac{|\hat{\gamma}_u|}{2}} \rho^{|\hat{\gamma}_u|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\hat{\gamma}_u|}(m_0\Omega\rho^2). \quad (5.18)$$

Aqui, a condição de normalização deve ser modificada por um fator dado por $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \det(e^a{}_\mu) = XZ$ [373,438,439,446]. Para ser mais específico, o elemento de área na integral da condição de normalização deve ser substituído por um elemento de área em um espaço-tempo curvo, no qual é dado por $dA = \sqrt{-g}d\rho$ (em coordenadas polares). Então, usando a métrica (4.2) e os coeficientes (5.3), o elemento de área toma a forma $dA = \alpha\rho d\rho$ (α é um “fator de correção” ao passar do plano para o curvo e, portanto, *caso curvo* = $\alpha \times$ *caso plano*). Dessa forma, a condição de normalização (3.44) deve ser reescrita como

$$\alpha \int_0^\infty [\hat{f}_+^2(\rho) + \hat{f}_-^2(\rho)] \rho d\rho = 1, \quad (5.19)$$

ou em termos da variável r ($r = m_0\Omega\rho^2$), como

$$\frac{\alpha}{2m_0\Omega} \int_0^\infty [\hat{f}_+^2(r) + \hat{f}_-^2(r)] dr = 1, \quad (5.20)$$

ou ainda

$$\frac{\alpha}{2m_0\Omega} \int_0^\infty \left[\hat{C}_+^2 r^{|\hat{\gamma}_+|} e^{-r} \left[L_n^{|\hat{\gamma}_+|}(r) \right]^2 + \hat{C}_-^2 r^{|\hat{\gamma}_-|} e^{-r} \left[L_n^{|\hat{\gamma}_-|}(r) \right]^2 \right] dr = 1. \quad (5.21)$$

Portanto, usando as relações (3.49) e (3.50) em (5.21), temos as seguintes constantes de normalização para o segundo cenário

$$\hat{C}_\pm = C_\pm^{CC} = \sqrt{\frac{m_0\Omega}{\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_\pm|+1)}} > 0. \quad (5.22)$$

Desse modo, podemos obter então a partir de (3.52) o spinor de Dirac normalizado no espaço-tempo da CC girante, no qual é dado por

$$\hat{\Psi}_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = e^{-iEt} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_+|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_+|+1)}} e^{i\gamma_+\varphi} \rho^{|\hat{\gamma}_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\hat{\gamma}_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_-|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_-|+1)}} e^{i\gamma_-\varphi} \rho^{|\hat{\gamma}_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\hat{\gamma}_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{array} \right), \quad (5.23)$$

ou ainda (inserindo a parte temporal em cada componente spinorial [176])

$$\hat{\Psi}_D^{NC}(\rho, \varphi, t) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_+|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_+|+1)}} e^{i(\gamma_+\varphi - E_+t)} \rho^{|\hat{\gamma}_+|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\hat{\gamma}_+|}(m_0\Omega\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_-|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_-|+1)}} e^{i(\gamma_-\varphi - E_-t)} \rho^{|\hat{\gamma}_-|} e^{-\frac{m_0\Omega\rho^2}{2}} L_n^{|\hat{\gamma}_-|}(m_0\Omega\rho^2) \end{array} \right), \quad (5.24)$$

onde deve satisfazer as seguintes condições de contorno para ser uma solução fisicamente

aceitável

$$\hat{\Psi}_D^{NC}(\rho \rightarrow 0) = \hat{\Psi}_D^{NC}(\rho \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.25)$$

com $\hat{\gamma}_u = (m_j/\alpha - su/2 + \beta E_u/\alpha\tau) \neq 0$. Em particular, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$) obtemos exatamente o spinor de Dirac no espaço-tempo de Minkowski, dado por (3.52). No entanto, diferentemente da densidade de probabilidade gerada pelo spinor (3.52), aqui sempre teremos uma densidade de probabilidade nula na origem uma vez que $|\hat{\gamma}_u| > 0$.

Agora, vamos discutir rapidamente o comportamento da densidade de probabilidade para diferentes valores de n , m_j ($m_j > 0$), B , α e β . Então, como a expressão para a densidade de probabilidade é dada da seguinte forma

$$\hat{P}(\rho) = \hat{P}_{n,m_j}(\rho) = (\hat{\Psi}_D^{NC})^\dagger \hat{\Psi}_D^{NC} = \frac{1}{2\pi} \hat{R}^\dagger(\rho) \hat{R}(\rho) = \frac{1}{2\pi} [\hat{f}_+^2(\rho) + \hat{f}_-^2(\rho)], \quad (5.26)$$

implica que

$$\begin{aligned} \hat{P}(\rho) &= \frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_+|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_+|+1)} \rho^{2|\hat{\gamma}_+|} e^{-m_0\Omega\rho^2} \left[L_n^{|\hat{\gamma}_+|}(m_0\Omega\rho^2) \right]^2 \\ &+ \frac{(m_0\Omega)^{|\hat{\gamma}_-|+1}}{2\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|\hat{\gamma}_-|+1)} \rho^{2|\hat{\gamma}_-|} e^{-m_0\Omega\rho^2} \left[L_n^{|\hat{\gamma}_-|}(m_0\Omega\rho^2) \right]^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

No entanto, diferentemente da densidade de probabilidade do cenário anterior, aqui tal quantidade depende também do espectro relativístico E_u e, conseqüentemente, a expressão para $\hat{P}(\rho)$ pode depender ou não dos valores dos parâmetros s e u , ou seja, para $L > 0$ temos $\hat{P}(\rho)|_{s,u=+1} = \hat{P}(\rho)|_{s,u=-1}$ e para $L < 0$ temos $\hat{P}(\rho)|_{s,u=+1} \neq \hat{P}(\rho)|_{s,u=-1}$, respectivamente. Então, vamos usar como base as informações que foram usadas para construir o gráfico da Fig. 12, ou seja, que $m_0 = e = a = \theta = \eta = \beta = s = 1$, $m_j = 1/2$, $\alpha = 1/2$ e $B = 1.25$, com $E = E^+ > 0$ e $E_m > 0$. Em particular, esse valor do campo magnético permite que $\tau \approx 0.7 > 0$ e $\lambda = 0.2 > 0$ (exigimos valores maiores que zero) e que o valor da energia seja “facilmente” identificado no gráfico, no qual é dado por $E = E_0 \approx E_1 \approx E_2 \approx 4$ (aqui o espectro não depende de u). Com isso, obtemos a Fig. 16, onde mostra o comportamento da densidade de probabilidade para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$) para $m_j = 1/2, 3/2$.

De acordo com a Fig. 16, vemos que a densidade de probabilidade (picos máx.) diminui com o aumento de n , onde para $n = 0$ há um pico máximo em $\rho = 8$ (ou seja, uma gaussiana centrada em $\rho = 8$), para $n = 1$ há dois picos máximos: em $\rho \approx 7$ e $\rho \approx 10$, e para $n = 2$ há três picos máximos: em $\rho \approx 6$, $\rho \approx 8$ e $\rho \approx 11$, com $\hat{P}_{n=0} > \hat{P}_{n=1} > \hat{P}_{n=2}$. No entanto, comparando 16-(a) com 16-(b), vemos também que a densidade de probabilidade diminui à medida que m_j aumenta, onde os picos máximos diminuem com n crescente. Por outro lado, vemos também que, diferentemente da Fig. 5-(a), aqui há uma densidade de probabilidade nula

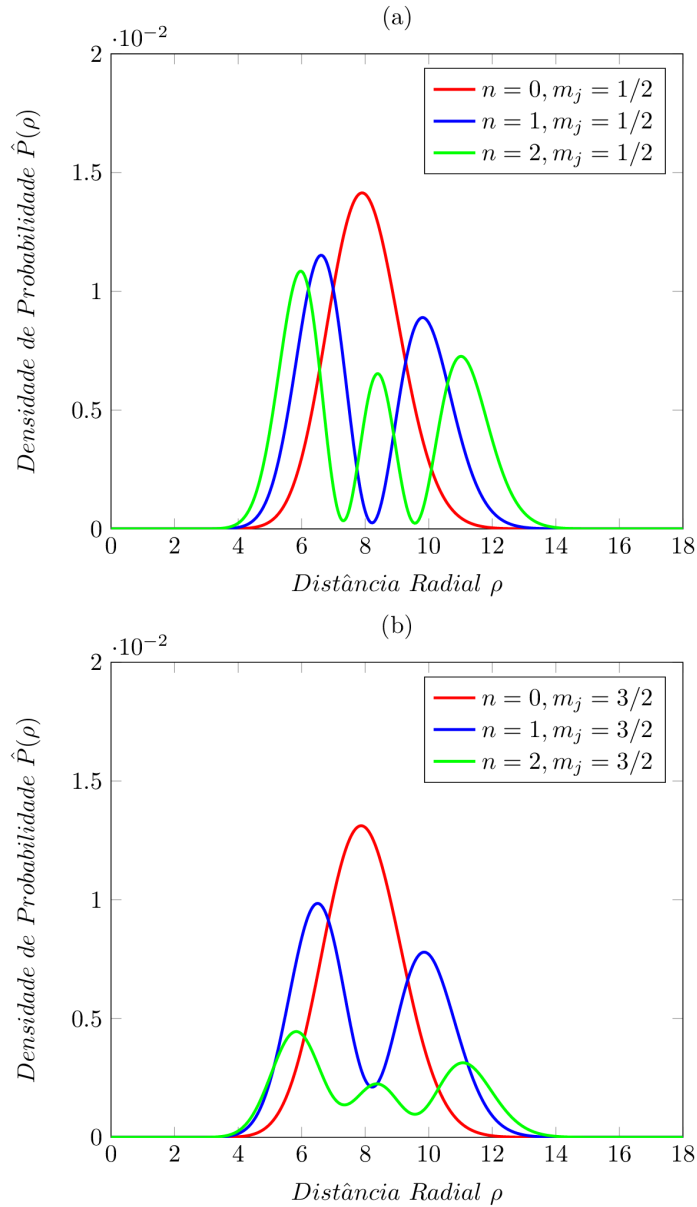


Figura 16: Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a) e $m_j = 3/2$ (b).

na origem, mesmo para $m_j = 1/2$. De fato, isso acontece porque aqui este valor de m_j não é mais equivalente à $m_l = 0$, como acontece no cenário anterior. Aqui, o parâmetro α não permite que $m_j - \alpha/2$ (em L ou em $\hat{\gamma}_u$) seja igual à $m_l = 0$ (somente para $\alpha = 1$ que isso é possível). Portanto, essa densidade de probabilidade nula na origem é uma consequência direta do parâmetro α (ou de β , embora este só exista por causa de α) e, que, por sua vez, satisfaz as condições de contorno (spinor nulo na origem e no infinito), dadas por (5.25). Agora, comparando o primeiro cenário com o segundo (Figs. 5 e 16), vemos claramente que a densidade de probabilidade é maior para o primeiro cenário.

Na Fig. 17, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores de campo magnético ($1 < B < 4$), onde usamos $m_0 = e = a = \theta = \eta = \beta =$

$s = 1$, $n = 0$, $m_j = 1/2$ e $\alpha = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 11). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) aumenta à medida que B aumenta ($\hat{P}_{B=2.50} > \hat{P}_{B=2.00} > \hat{P}_{B=1.50} > \hat{P}_{B=1.15}$), onde seus valores tendem a se concentrar cada vez mais em $\rho \approx 5$ (formando então uma “delta de Dirac”) ou mais perto da origem. Agora, comparando o primeiro cenário com o segundo (Figs. 6 e 17), vemos claramente que a densidade de probabilidade também é maior para o primeiro cenário.

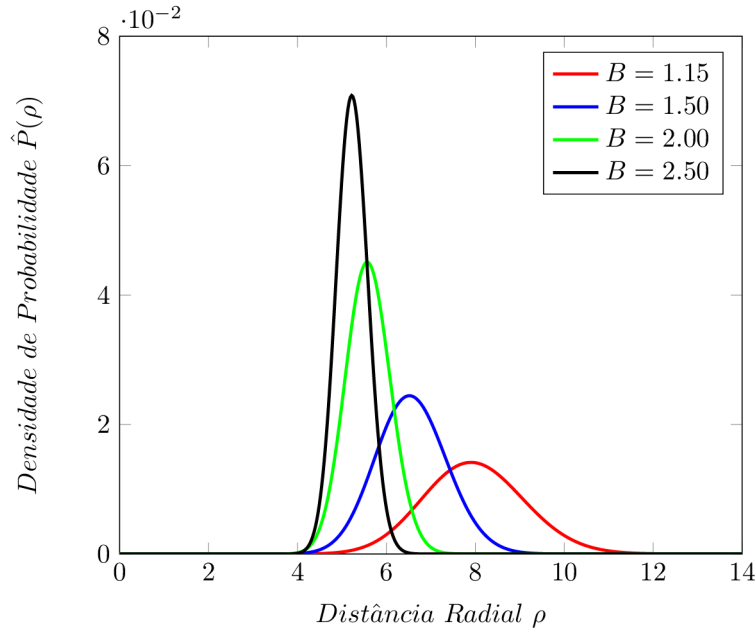


Figura 17: Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .

Na Fig. 18, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores do parâmetro α , onde usamos $m_0 = e = a = B = \beta = s = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 14). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) aumenta à medida que α diminui, ou seja, com o aumento da curvatura da CC ($\hat{P}_{\alpha=0.4} > \hat{P}_{\alpha=0.6} > \hat{P}_{\alpha=0.8} > \hat{P}_{\alpha=1.0}$), onde seus valores tendem a se afastar cada vez mais da origem. Já na Fig. 19, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores do parâmetro β , onde usamos $m_0 = e = a = B = s = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $n = 0$, $m_j = 1/2$ e $\alpha = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 15). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) diminui à medida que β aumenta, ou seja, com o aumento da rotação da CC ($\hat{P}_{\beta=0.0} > \hat{P}_{\beta=0.1} > \hat{P}_{\beta=0.3} > \hat{P}_{\beta=0.5}$), onde seus valores também tendem a se afastar cada vez mais da origem.

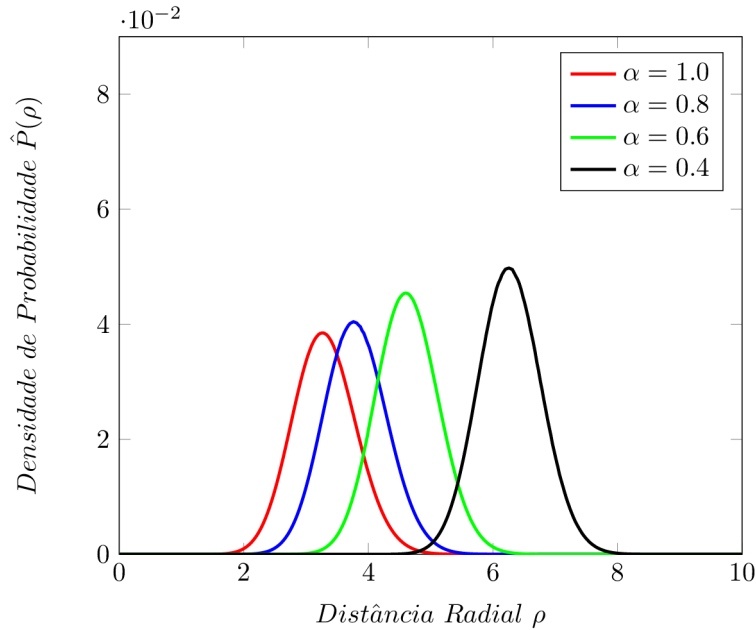


Figura 18: Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de α .

5.2 Limite não-relativístico

Para analisar o limite não-relativístico de nossos resultados e, em especial, o espectro relativístico, é necessário considerar a mesma prescrição padrão do cenário anterior com uma condição adicional, ou seja: $E \approx m_0 + \varepsilon$, onde $m_0 \gg \varepsilon$, $m_0 \gg E_m$ e $m_0 \gg E_\alpha$. Então, usando esta prescrição no espectro (5.16), obtemos o seguinte espectro não-relativístico (níveis de Landau não-relativísticos) para o EHQNC com MMA no espaço-tempo da CC girante

$$\varepsilon_{n,L,s,u} = E_m + E_\alpha + \tau\lambda\omega_c N_\alpha, \quad (5.28)$$

onde

$$E_\alpha = m_0\omega_c\lambda\beta \left(\frac{|L|+L}{2\alpha L} \right), \quad N_\alpha = \left(n + \frac{(1+su)}{2} + \frac{|L|+L}{2\alpha} \right), \quad L = m_j - \frac{su\alpha}{2} = m_j - u\alpha m_s. \quad (5.29)$$

Como vemos em (5.28), ou melhor, em L , o espectro não-relativístico também depende do número quântico magnético total $m_j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$, implicando assim que tal espectro também é para uma partícula com spin-1/2 ($m_s = s/2$). Portanto, aqui, a equação de movimento (equação de onda não-relativística) que descreve o EHQNC no espaço-tempo da CC girante deve ser uma equação tipo-Pauli (mas não tecnicamente Pauli). De fato, não temos uma ES porque não há como formar um inteiro a partir do número quântico L (α “atrapalha” esse objetivo), em outras palavras, não tem como o número quântico m_l aparecer aqui uma vez que α não “permite” isso ($L \neq m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). No entanto, mesmo se conseguíssemos obter um inteiro (o que não é o caso), ainda assim não poderíamos obter uma ES devido à presença do es-

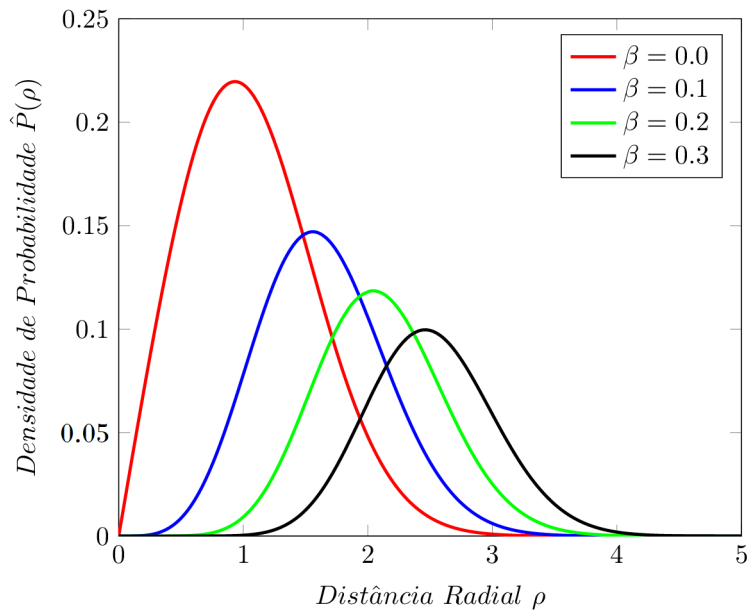


Figura 19: Gráfico de $\hat{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de β .

pectro relativístico E em $\hat{m}_j = \frac{1}{\alpha}(m_j + \frac{\beta E}{\tau})$, ou seja, não basta simplesmente chamar $E \approx m_0 + \varepsilon$ para tomar o limite não-relativístico da Eq. (5.12). Em particular, isso é um “problema” ainda não resolvido na literatura, seja para férmions [318] ou bósons [317] no espaço-tempo da CC girante. Por outro lado, uma forma de se trabalhar com partículas não-relativísticas no espaço-tempo da CC girante é excluir a dimensão tempo do problema (“extremamente complicado” tentar isso aqui), ou seja, considerar $dt = 0$ no elemento de linha (ou métrica) [320]. Dessa forma, usando a ES em um espaço curvo, pode-se modelar então toda a dinâmica quântica não-relativística da partícula (ou seja, obter as soluções de estado ligado não-relativístico) [320]. Além disso, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), com $u = s = +1$, obtemos exatamente o espectro não-relativístico do EHQNC no espaço Euclidiano, dado por (3.60). Além disso, notamos também que o espectro (5.28) possui algumas semelhanças e diferenças (mais semelhanças do que diferenças) com o caso relativístico (espectro (5.16)). Por exemplo, semelhante ao caso relativístico, o espectro (5.28)

- só admite estados de energia positiva ($\varepsilon_{n,L,s,u} > 0$);
- tem sua degenerescência quebrada devido à α , onde $L > 0$ permite obter o espectro máximo (depende de α e β) e $L < 0$ o espectro mínimo (não depende de α e β);
- aumenta em função de n e m_j ($L > 0$);
- aumenta em função de B , β e α ($L > 0$), ou seja, quanto maior o campo magnético, a rotação e a curvatura da CC, maiores as energias;
- possui maiores energias quando a energia magnética é diferente de zero ($E_m \neq 0$).

No entanto, diferentemente do caso relativístico, o espectro (5.28)

- depende linearmente das energias E_m e E_α .

Agora, vamos comparar o espectro (5.28) com um da literatura (e para o caso 2D, ou seja, $p_z = k_z = 0$) e, em particular, com o espectro de uma partícula carregada sem spin na presença de um campo magnético uniforme e de uma CC estática, dado por (com $\hbar = c = 1$ e $a = \beta$) [320, 445]

$$\varepsilon_{n,l} = E_{n,l}^{\text{estática}} + \Delta = \frac{\omega_c}{2\alpha} \left(2n + 1 + \frac{|l| - l}{\alpha} \right) + m_0 \left(\frac{\beta \omega_c}{2\alpha^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{|l|}{l} \right), \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.30)$$

onde $E_{n,l}^{\text{estática}}$ é o espectro (denota a parte estática e quantizada do espectro total) da CC estática e $\Delta = E_l^{\text{angular}}$ é a energia (denota a parte angular e contínua do espectro total) devido ao spin da CC, respectivamente. De acordo com a Ref. [320], a energia Δ pode ser interpretada como o análogo do efeito Zeeman quadrático para os níveis de Landau.

Já para o nosso caso sem o espaço de fase NC e o MMA ($\theta = \eta = E_m = 0$) com $\omega_c \rightarrow \omega_c/\alpha$ (redefinindo a frequência ciclotron) e $e \rightarrow -e$ (que é equivalente a $L + su \rightarrow -L - su$), implica que o espectro (5.28) toma a seguinte forma

$$\varepsilon_{n,L,s,u} = \varepsilon_{n,L,s,u}^{\text{estática}} + E_\alpha = \frac{\omega_c}{2\alpha} \left(2n + (1 - su) + \frac{|L| - L}{\alpha} \right) + m_0 \left(\frac{\beta \omega_c}{2\alpha^2} \right) \left(1 - \frac{|L|}{L} \right). \quad (5.31)$$

Então, como podemos ver em (5.30) e (5.31), os espectros possuem uma certa semelhança com respeito à parte estática, no entanto, com respeito à parte angular, não são diferentes, ou seja, uma partícula sem spin depende quadraticamente da quantidade $\Lambda \equiv \left(\frac{\beta \omega_c}{2\alpha^2} \right)$, enquanto que uma partícula com spin depende linearmente de tal quantidade, respectivamente. No entanto, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$) com $u = s = +1$, ambos os espectros são iguais (como deve ser porque agora a partícula “não tem mais” o spin).

Com o intuito de saber como o spin da partícula influencia em suas energias, vamos agora plotar os gráficos dos espectros (5.31) e (5.30) em função do campo magnético e dos parâmetros α e β para diferentes valores de n com m_l e m_j fixos (assim como fizemos no caso relativístico). Dessa forma, para que haja uma contribuição não-nula do momento angular da CC, devemos considerar $l < 0$ ($l = -1$) e $L < 0$ ($m_j = -1/2$). No entanto, $L < 0$ implica em um espectro independente do spin (da partícula), ou melhor, do produto su , onde tal quantidade é cancelada devido à presença de L . Portanto, tomando $m_0 = e = \beta = 1$, $\alpha = 1/2$, temos a Fig. 20, onde mostra o comportamento das energias da partícula com e sem spin em função de B para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$).

De acordo com Fig. 20, vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e também com o aumento de B , onde as energias aumentam linearmente para o

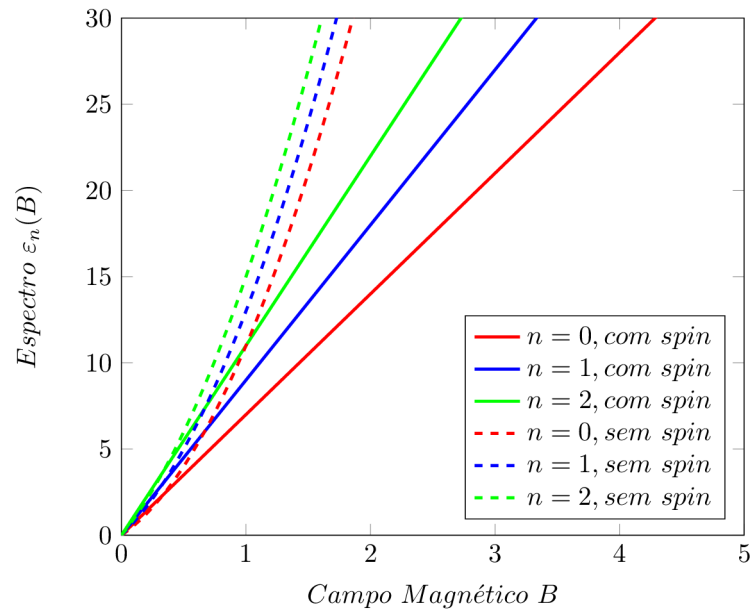


Figura 20: Gráfico de $\varepsilon_n(B)$ versus B para três diferentes valores de n .

caso com spin (linhas sólidas) e quadraticamente para o caso sem spin (linhas tracejadas). Além disso, para campos fracos ($0 < B \leq 0.5$) o spin não influencia nos valores das energias, ou seja, tanto faz a partícula ter ou não o spin que as energias são praticamente iguais. No entanto, para campos fortes ($B > 0.5$) o spin já influencia substancialmente, ou seja, a medida que o campo aumenta as energias para o caso sem spin ficam (são) cada vez maiores em relação ao caso com spin. Por outro lado, a diferença de energia entre dois níveis consecutivos se comportam de forma diferente para cada caso. Por exemplo, para o caso com spin a diferença de energia aumenta à medida que o campo aumenta ($\lim_{B \rightarrow \infty} \Delta E_n = \infty$), enquanto que para o caso sem spin é praticamente constante para $B \geq 1$ ($\Delta E_n = const. > 0$).

Na Fig. [21](#), é mostrado o comportamento das energias da partícula em função de α para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados (com $m_0 = e = B = \beta = 1$ e $0.1 \leq \alpha \leq 1$). De acordo com esta Figura, vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e também com a diminuição (aumento da curvatura) de α . Além disso, para baixas curvaturas ($1 < \alpha \leq 0.8$) o spin não influencia nos valores das energias, ou seja, tanto faz a partícula ter ou não o spin que as energias são praticamente iguais. No entanto, para médias e altas curvaturas ($\alpha < 0.8$) o spin já influencia substancialmente, ou seja, a medida que a curvatura aumenta as energias para o caso sem spin ficam (são) cada vez maiores em relação ao caso com spin. Por outro lado, no limite $\alpha \rightarrow 1$ (sem CC), as energias para ambos os casos são iguais (como deve ser porque agora a partícula não tem mais o spin).

Já na Fig. [22](#), é mostrado o comportamento das energias da partícula em função de β para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados (com $m_0 = e = B = 1$ e $\alpha = 1/2$). De acordo com esta Figura, vemos que as energias aumentam com o aumento de n

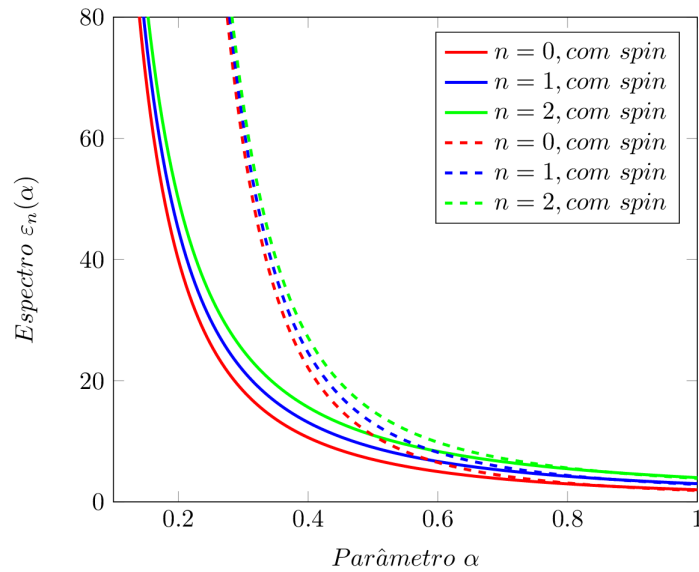


Figura 21: Gráfico de $\varepsilon_n(\alpha)$ versus α para três diferentes valores de n .

(como deve ser) e também com o aumento de β (aumento da rotação da CC), onde as energias aumentam linearmente para o caso com spin (linhas sólidas) e quadraticamente para o caso sem spin (linhas tracejadas). Aqui, independentemente se β é grande ou pequeno (ou até nulo), o spin já influencia nos valores das energias, onde as energias são sempre maiores para o caso sem spin. Por outro lado, a diferença de energia entre dois níveis consecutivos se comportam de forma diferente para cada caso. Por exemplo, para o caso com spin a diferença de energia é sempre constante ($\Delta E_n = \text{const.} > 0$) independentemente do valor de β , enquanto que para o caso sem spin diminui substancialmente com o aumento de β ($\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Delta E_n = 0$).

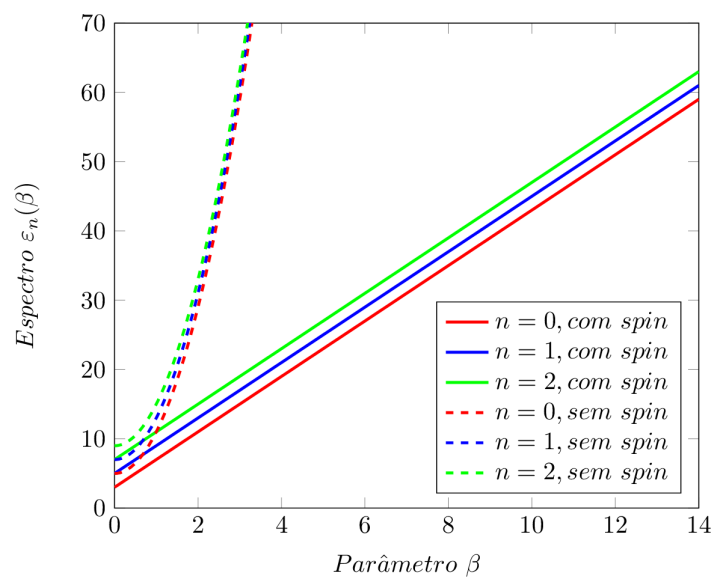


Figura 22: Gráfico de $\varepsilon_n(\beta)$ versus β para três diferentes valores de n .

6 A EQUAÇÃO DE DIRAC NÃO-COMUTATIVA EM UM REFERENCIAL GIRANTE NO ESPAÇO-TEMPO DA CORDA CÓSMICA GIRANTE (2+1)-DIMENSIONAL

Para construir o elemento de linha em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante, no qual é o background geral (“plano de fundo geral”) desta tese, precisamos fazer uma mudança na coordenada angular na forma: $\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$, onde $\omega = const. \geq 0$ (uma rotação anti-horária) é a velocidade angular ou rotacional (rad/s) do referencial girante (modelado por uma plataforma circular rígida de raio ρ) [447]. Portanto, fazendo essa mudança no elemento de linha (5.1), obtemos o seguinte elemento de linha para o nosso background geral

$$d\bar{s}_{CC}^2 = (b^2 - V^2) \left(dt + \frac{b\beta - V\alpha\rho}{(b^2 - V^2)} d\varphi \right)^2 - d\rho^2 - \frac{\alpha^2\rho^2}{(b^2 - V^2)} d\varphi^2, \quad (6.1)$$

onde b é um parâmetro adimensional (aqui chamaremos de parâmetro não-inercial ao invés de rotacional para não confundir com o β) definido como $b \equiv 1 + \beta\omega > 0$ e $V \equiv \alpha\omega\rho \geq 0$ é a razão entre as velocidades do referencial girante (velocidade linear ou tangencial) e da luz (SI: $V = \frac{v_{ref}}{c} = \frac{\alpha(\vec{\omega} \times \vec{r})_{\varphi}}{c} = \frac{\alpha\omega\rho}{c}$) e deve obrigatoriamente satisfazer: $V < 1$, ou $V < b$ (requisito de causalidade). Em particular, tomando $\omega = 0$ em (6.1) temos o elemento de linha do espaço-tempo da CC girante; tomando $\omega = \beta = 0$ e $\alpha = 1$ temos o elemento linha do espaço-tempo de Minkowski; e tomando apenas $\beta = 0$, temos o elemento de linha para um referencial girante no espaço-tempo da CC estática [387, 390, 392, 393]. Além disso, é importante mencionar que o elemento de linha (6.1) define um novo intervalo para a coordenada radial ρ , dado por: $0 \leq \rho < \rho_0$, onde $\rho_0 \equiv \frac{b}{\alpha\omega}$ (SI: $\rho_0 \equiv \frac{bc}{\alpha\omega}$) [387, 390, 392, 393]. No entanto, para todos os valores onde $\rho > \rho_0$ ($V > b$) significa que o férmion estará fora do cone de luz, ou seja, a velocidade do férmion é maior que a da luz (algo fisicamente impossível). Desta forma, o intervalo $0 \leq \rho < \rho_0$ impõe uma restrição espacial onde o spinor de Dirac pode ser normalizado, ou seja, que soluções de estado ligado (normalizáveis) sejam alcançadas. Desse modo, devemos impor que tais soluções desapareçam quando $\rho \rightarrow \rho_0$ ($V \rightarrow b$), com $\alpha\omega \ll 1$, o que implica em $\rho_0 \gg 1$, ou “ $\rho_0 \rightarrow \infty$ ” (um “raio” suficientemente grande), bem como desaparecer também quando $\rho \rightarrow 0$ (agora temos as duas condições de contorno bem definidas) [239, 240, 284, 298, 389–391]. Portanto, neste caso onde $\alpha\omega \ll 1$ temos $v_{ref} = \alpha\omega\rho \approx const. \geq 0$, consequentemente, temos $v_{ref} \ll c$, ou ainda: $V \ll b$ (ou seja, sem dilatação do tempo).

Então, comparando (6.1) com (4.1), obtemos os seguintes coeficientes

$$X = \sqrt{b^2 - V^2}, \quad Y = \frac{b\beta - V\alpha\rho}{\sqrt{b^2 - V^2}}, \quad Z = \frac{\alpha\rho}{\sqrt{b^2 - V^2}}, \quad (6.2)$$

e substituindo (6.2) em (4.40), temos a seguinte EDNC no background geral ($R \rightarrow \bar{R}$)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 - V^2}} \left[\gamma^0 - \left(\frac{b\beta - V\alpha\rho}{\alpha\rho} \right) \gamma^2 \right] E + i\tau\gamma^1 \partial_\rho - \frac{\sqrt{b^2 - V^2}}{\alpha\rho} \tau m_j \gamma^2 - \frac{\lambda m_0 \omega_c}{2} \rho \gamma^2 \right\} \bar{R}(\rho) + [i\bar{A}\gamma^1 + \bar{B}\gamma^0 \Sigma^3 - \Sigma^3 E_m - m_0] \bar{R}(\rho) = 0, (6.3)$$

onde definimos

$$\bar{A} \equiv \frac{\sqrt{b^2 - V^2} \left[(1 - \tau) \left(\frac{V\alpha\omega(b\beta - V\alpha\rho)^2}{(b^2 - V^2)^{3/2}} + \left(\frac{V\alpha\omega(b\beta - V\alpha\rho)}{(b^2 - V^2)^{3/2}} - \frac{2V\alpha}{\sqrt{b^2 - V^2}} \right) (b\beta - V\alpha\rho) \right) \right]}{4\alpha^2 \rho^2} + \frac{\sqrt{b^2 - V^2} \left[2\alpha\tau\rho \left(\frac{\alpha V^2}{(b^2 - V^2)^{3/2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{b^2 - V^2}} \right) - \frac{2V^3 \alpha^2 \rho}{(b^2 - V^2)^{3/2}} \right]}{4\alpha^2 \rho^2}, (6.4)$$

e

$$\bar{B} \equiv \frac{(2\tau - 1)\sqrt{b^2 - V^2} \left(\frac{V\alpha\omega(b\beta - V\alpha\rho)}{(b^2 - V^2)^{3/2}} - \frac{2\alpha V}{\sqrt{b^2 - V^2}} \right) + \frac{V\alpha\omega(b\beta - V\alpha\rho)}{b^2 - V^2}}{4\alpha\rho}. (6.5)$$

No entanto, vemos que é difícil prosseguir sem uma simplificação adequada da Eq. (6.3). Desse modo, para resolver analiticamente esta equação, consideramos duas aproximações: a primeira é a que já comentamos anteriormente, ou seja, que a velocidade (linear) do referencial girante é muito menor que a velocidade da luz ($V \ll b$), ou seja, adotar um regime de rotação lenta, e a segunda é que o acoplamento entre o momento angular (spin) da CC e a velocidade angular do referencial girante é muito fraco ($\beta\omega = \vec{\beta} \cdot \vec{\omega} \ll 1$) [320]. Portanto, usando estas duas aproximações na Eq. (6.3), com $(\alpha\omega)(\beta\omega) \ll 1$, obtemos a seguinte equação

$$\left\{ \gamma^0 \frac{E}{b} + i\tau\gamma^1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\omega}(\tau - 1)}{2\tau\rho} \right) - \gamma^2 \left[\frac{b\tau m_j + \beta E}{\alpha\rho} + \left(\frac{\lambda m_0 \omega_c}{2} - \frac{\alpha\omega E}{b} \right) \rho \right] \right\} \bar{R} - \left[(2\tau - 1)\alpha\gamma^0 \vec{S} \cdot \vec{\omega} + \Sigma^3 E_m + m_0 \right] \bar{R} = 0, (6.6)$$

onde o termo $\vec{S} \cdot \vec{\omega}$ é chamado de acoplamento spin-rotação (do férmion) [239, 240, 283], sendo $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$, $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ e $\vec{\beta} \cdot \vec{\omega}$ também é um tipo de acoplamento spin-rotação, mas da CC com o referencial girante (e também está presente em b). Em particular, como $\vec{S} \cdot \vec{\omega}$ pode ser positivo ($\vec{S} \cdot \vec{\omega} > 0$) ou negativo ($\vec{S} \cdot \vec{\omega} < 0$), implica que o spin do férmion pode ser paralelo (mesma direção e sentido) ou antiparalelo (mesma direção, mas de sentido oposto) à velocidade angular. Porém, como $\vec{\beta} \cdot \vec{\omega} > 0$, implica que o spin da CC só pode ser paralelo à velocidade angular. É oportuno mencionar que também poderíamos ter chegado exatamente na Eq. (6.6) usando as duas aproximações logo de início, assim como a Ref. [284] fez para o caso do OD rotativo. Portanto, aplicando as duas aproximações em (6.2), obtemos $X \approx b$, $Y \approx \frac{(b\beta - V\alpha\rho)}{b}$ e $Z \approx \frac{\alpha\rho}{b}$.

Por outro lado, podemos ainda simplificar a Eq. (6.6) através de uma redefinição

adequada para o spinor \bar{R} , cujo objetivo é cancelar o quarto termo desta equação. Por exemplo, redefinindo \bar{R} como $\bar{R} \rightarrow \bar{R} \equiv \rho^{-\frac{\beta \cdot \vec{\omega}(\tau-1)}{2\tau}} \bar{f}$, com $\bar{f} = (\bar{f}_+, i\bar{f}_-)^T$, podemos então cancelar o “termo indesejado” da Eq. (6.6). Como veremos em breve, esta redefinição ainda vai satisfazer as condições de contorno do problema. Desse modo, temos:

$$\left\{ \gamma^0 \frac{E}{b} + i\tau \gamma^1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - \gamma^2 \left[\frac{b\tau m_j + \beta E}{\alpha\rho} + \left(\frac{\lambda m_0 \omega_c}{2} - \frac{\alpha \omega E}{b} \right) \rho \right] \right\} \bar{f} - \left[(2\tau - 1) \alpha \gamma^0 \vec{S} \cdot \vec{\omega} + \Sigma^3 E_m + m_0 \right] \bar{f} = 0. \quad (6.7)$$

Em termos das matrizes de Pauli, podemos então reescrever a Eq. (6.7) na seguinte equação de autovalores

$$\bar{H}_{CC} \bar{f} = E \bar{f}, \quad (6.8)$$

onde o Hamiltoniano de Dirac \bar{H}_{CC} é dado por

$$\bar{H}_{CC} = ib\tau \sigma_1 \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} \right) - sb\sigma_2 \left[\frac{b\tau m_j + \beta E}{\alpha\rho} + \tau m_0 \bar{\Omega} \rho \right] + b \left[\frac{(2\tau - 1)}{2} \alpha \omega + E_m + \sigma_3 m_0 \right], \quad (6.9)$$

onde $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{eff} \equiv \left(\frac{\lambda \omega_c}{2\tau} - \frac{\alpha \omega E}{b\tau m_0} \right) > 0$ é uma “frequência angular efetiva topológica”.

Agora, temos que obter a partir de (6.8) uma equação diferencial de segunda ordem para as componentes do spinor. Análogo aos dois casos anteriores, isto é feito “separando” primeiro a Eq. (6.8) em um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Feito isso, temos duas equações acopladas da seguinte forma

$$\left[\frac{\left(m_0 + \frac{(2\tau-1)}{2} \alpha \omega \right) + \left(E_m - \frac{E}{b} \right)}{\tau} \right] \bar{f}_+(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} + sm_0 \bar{\Omega} \rho + \frac{s}{\rho} \left(\bar{m}_j + \frac{s}{2} \right) \right] \bar{f}_-(\rho), \quad (6.10)$$

$$\left[\frac{\left(m_0 + \frac{(2\tau-1)}{2} \alpha \omega \right) - \left(E_m - \frac{E}{b} \right)}{\tau} \right] \bar{f}_-(\rho) = \left[\frac{d}{d\rho} - sm_0 \bar{\Omega} \rho - \frac{s}{\rho} \left(\bar{m}_j - \frac{s}{2} \right) \right] \bar{f}_+(\rho), \quad (6.11)$$

onde $\bar{m}_j \equiv \frac{1}{\alpha} (bm_j + \frac{\beta E}{\tau}) \neq 0$.

Portanto, substituindo (6.11) em (6.10), e depois (6.10) em (6.11), obtemos como resultado a seguinte equação diferencial de segunda ordem para o EHQC com MMA em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tilde{\gamma}_u^2}{\rho^2} - (m_0 \bar{\Omega} \rho)^2 + \bar{E}_u \right] \bar{f}_u(\rho) = 0, \quad (u = \pm 1), \quad (6.12)$$

onde definimos

$$\tilde{\gamma}_u \equiv \left(\bar{m}_j - \frac{su}{2} \right), \quad \bar{E}_u \equiv \frac{\left(\frac{E}{b} - E_m \right)^2 - \left(m_0 + \frac{(2\tau-1)}{2} \alpha \omega \right)^2}{\tau^2} - 2m_0 \bar{\Omega} \left(\bar{m}_j + \frac{su}{2} \right). \quad (6.13)$$

Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$) obtemos exatamente a EDNC no espaço-tempo da CC girante, dada por (5.12).

6.1 Soluções de Estado Ligado: Spinor de Dirac e o Espectro Relativístico

Para resolver analiticamente a Eq. (6.12), vamos seguir o mesmo procedimento do cenário anterior, ou seja, um “mapeamento”. Então, devido à semelhança desta equação com a Eq. (5.12), basta simplesmente substituir \hat{m}_j por \bar{m}_j e Ω por $\bar{\Omega}$ nos resultados do cenário anterior para obter (facilmente) o espectro do terceiro cenário (no caso do spinor isso não é o bastante uma vez que $\bar{R} \neq \bar{f}$). Desse modo, usando a condição de quantização do cenário anterior, dada por: $\frac{|\hat{y}_u|+1}{2} - \frac{\hat{E}_u}{4m_0\Omega} = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), então nossa nova condição de quantização torna-se

$$\frac{|\bar{y}_u|+1}{2} - \frac{\bar{E}_u}{4m_0\bar{\Omega}} = -n, \quad (6.14)$$

onde temos a seguinte equação polinomial do segundo grau para a energia total relativística E

$$E^2 - [2bE_m - 2b\tau\alpha\omega\bar{n}]E - \frac{2m_0b^2}{\alpha} \left(\frac{\tau\lambda\omega_c}{2} - \frac{\tau\alpha\omega E}{m_0b} \right) \left[\left(\bar{L} + \frac{\beta E}{\tau} \right) + \left| \bar{L} + \frac{\beta E}{\tau} \right| \right] + [E_m^2 - M_0^2 - b^2\tau\lambda m_0\omega_c\bar{n}] = 0, \quad (6.15)$$

onde

$$M_0 = M_\alpha^\omega \equiv b \left(m_0 + \frac{(2\tau-1)}{2} \alpha\omega \right) > 0, \quad \bar{E}_m \equiv bE_m > 0, \quad \bar{n} \equiv 2n + 1 + su, \quad (6.16)$$

sendo M_0 uma “massa topológica não-inercial” (pois depende de α e ω), \bar{E}_m é uma “energia magnética não-inercial” e $\bar{L} = \bar{L}(\alpha) \equiv bm_j - \frac{su\alpha}{2} = bm_j - u\alpha m_s \neq 0$ é um “número quântico magnético topológico não-inercial” (pois depende de α e ω).

Portanto, resolvendo a equação polinomial (6.15) para $\bar{L} > 0$ e $\bar{L} < 0$ (com $\tau > 0$ e $\lambda > 0$), obtemos o seguinte espectro relativístico (níveis de Landau relativísticos) para o EHQNC com MMA em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante

$$E_{n,\bar{L},s,u}^\kappa = \frac{[\bar{E}_\alpha + \bar{E}_m - E_\omega]}{\left[1 + 4\beta\omega \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\bar{L}} \right) \right]} + \kappa \sqrt{\frac{[\bar{E}_\alpha + \bar{E}_m - E_\omega]^2}{\left[1 + 4\beta\omega \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\bar{L}} \right) \right]^2} + \frac{[-\bar{E}_m^2 + M_0^2 + 2m_0b^2\tau\lambda\omega_c\bar{N}_\alpha]}{\left[1 + 4\beta\omega \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\bar{L}} \right) \right]}}, \quad (6.17)$$

onde definimos

$$\bar{E}_\alpha \equiv b^2 m_0 \omega_c \lambda \beta \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha\bar{L}} \right) \geq 0, \quad E_\omega \equiv 2\alpha\omega\bar{N}_\alpha^\tau \geq 0, \quad (6.18)$$

e

$$\bar{N}_\alpha \equiv \left(\frac{\bar{n}}{2} + \frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha} \right) \geq 0, \quad \bar{N}_\alpha^\tau \equiv \left(\tau \frac{\bar{n}}{2} + \frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha} \right) \geq 0, \quad (6.19)$$

sendo $\kappa = \pm 1$ o parâmetro de energia (partícula/antipartícula), \bar{N}_α é um novo “número quântico efetivo topológico”, \bar{N}_α^τ é um “número quântico efetivo topológico NC” (pois também depende de τ), E_ω é um tipo de energia rotacional quantizada (e é “análoga” ao espectro rotacional de moléculas diatômicas modeladas por um rotor rígido) e \bar{E}_α é uma “energia magnética topológica não-inercial”. Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$), obtemos exatamente o espectro no espaço-tempo da CC girante, dado por (5.16). No entanto, ao contrário do espectro (5.16), o espectro (5.28) ainda depende de α e β mesmo para $\bar{L} < 0$. De fato, isso acontece devido à presença da velocidade angular ω , onde ω está “amarrado” ao parâmetro β (em b) e também ao parâmetro α (em E_ω), respectivamente. Além disso, ao contrário do espectro (5.16), o espectro (5.28) ainda permanece quantizado mesmo na ausência do campo magnético ($B = 0$) e do momento NC ($\eta = 0$), onde tal espectro depende de E_ω (parte quantizada do espectro). Neste caso, na ausência também da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), temos então o espectro quantizado de um férmion/antiférmion em um referencial girante (sujeito às forças de Coriolis e centrífuga, ou seja, a um “campo rotacional”). No entanto, análogo ao espectro (5.16), aqui a degenerescência do espectro ainda permanece quebrada (devido à presença de α), e as energias da partícula e antipartícula também são maiores quando ambas têm um momento angular positivo (\bar{N}_α e \bar{N}_α^τ são maiores para $\bar{L} > 0$ ou $m_j > 0$). Na Tabela 8, temos duas possíveis configurações para o espectro dependendo dos valores de \bar{L} , onde $\bar{N}_+ = n + \frac{1}{2} + \frac{bm_j}{\alpha}$, $\bar{N}_- = n + \frac{(1+su)}{2}$, $E_\omega^\pm = 2\alpha\omega\bar{N}_\alpha^{\tau,\pm}$, com $\bar{N}_\alpha^{\tau,\pm}$ sendo dado por $\bar{N}_\alpha^{\tau,\pm} = \frac{\tau(2n+1+su)}{2} + \frac{\bar{L}(1\pm 1)}{2\alpha}$.

Tabela 8: Espectros de energia para a partícula e antipartícula em um referencial girante no espaço-tempo da CC girante.

Configuração	\bar{L}	Espectro de Energia $E_{n,\bar{L},s,u}^\kappa$
1	$\bar{L} > 0$	$E_{n,\bar{L}}^\kappa = \frac{[\bar{E}_m + \bar{E}_\alpha - E_\omega^+]}{[1+4\beta\omega]} + \kappa \sqrt{\frac{[\bar{E}_m + \bar{E}_\alpha - E_\omega^+]^2}{[1+4\beta\omega]^2} + \frac{-\bar{E}_m^2 + M_0^2 + 2m_0b^2\tau\lambda\omega_c\bar{N}_+}{[1+4\beta\omega]}}$
2	$\bar{L} < 0$	$E_{n,s,u}^\kappa = [\bar{E}_m - E_\omega^-] + \kappa \sqrt{[\bar{E}_m - E_\omega^-]^2 - \bar{E}_m^2 + M_0^2 + 2m_0b^2\tau\lambda\omega_c\bar{N}_-}$

Por outro lado, também é oportuno comparar o nosso espectro (6.17) com a literatura. Portanto, na ausência da NC ($\theta = \eta = 0$), do MMA ($E_m = 0$) e do espaço-tempo da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$) com $s = +1$ e fazendo $e \rightarrow -e$ (isso faz $\bar{\Omega} \rightarrow -\bar{\Omega}$ em (6.12), com $\bar{\Omega} = (\frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega E}{m_0}) > 0$), obtemos um espectro que seria a versão bidimensional do EHQ (3+1)-dimensional em um referencial girante para férmion carregado positivamente [305]. Em

particular, o nosso espectro é dado pela seguinte expressão

$$E_{2+1} = \omega N_u \pm \sqrt{\omega^2 N_u^2 + \left(m_0 + \frac{\omega}{2}\right)^2 + m_0 \omega_c N_u}, \quad N_u = (2n + 1 - u + |\gamma_u| - \gamma_u), \quad (6.20)$$

enquanto que o da Ref. [305], é dado por

$$E_{3+1} = -\omega \left(l_{\pm} \pm \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{m_0^2 + p_z^2 + m_0 \omega_c \bar{N}_u}, \quad \bar{N}_u = (2n + 1 \mp 1 + |l_{\pm}| - l_{\pm}), \quad (6.21)$$

onde os sinais \pm descrevem as duas componentes de um spinor e l_{\pm} são os números quânticos associados à parte angular do spinor. Então, como este spinor deve satisfazer a invariância rotacional, ou seja, o spinor deve ser uma função periódica com uma periodicidade de $\pm 2\pi$ (análogo ao nosso spinor), implica que l_{\pm} deve ser um inteiro ($l_{\pm} \in \mathbb{Z}$).

Como podemos ver (6.20) e em (6.21), ambos os espectros possuem mais diferenças do que semelhanças. Por exemplo, em (6.20) há vários termos envolvendo à velocidade angular, onde o primeiro termo do espectro pode ser positivo ou nulo ($\omega N_u \geq 0$), enquanto que em (6.21) só há um termo envolvendo à velocidade angular, que é o primeiro termo do espectro, e pode ser positivo ($l_{\pm} \pm 1/2 < 0$) ou negativo ($l_{\pm} \pm 1/2 > 0$). Desse modo, somente o espectro (6.21) pode ser reescrito como a soma de dois espectros: um envolvendo a velocidade angular e o outro livre de rotação (ou seja, a “espectro da raiz quadrada”). Além disso, somente em (6.20) que há um termo de massa “misturado/amarrado” à velocidade angular. No entanto, ambos os espectros tem uma coisa em comum, que é o número quântico dentro da raiz quadrada, ou seja, N_u e \bar{N}_u , no qual são bem similares (e de certa forma podem até gerar os mesmos valores uma vez que l_{\pm} e γ_u são números inteiros). Por último mas não menos importante, tomando $p_z = 0$ em (6.21) não chegamos em (6.20). De fato, isso só é alcançável se o sistema estiver livre de rotações, onde $E_{3+1} \xrightarrow{p_z = \omega \rightarrow 0} E_{2+1}$. Portanto, não podemos dizer (tecnicamente) que (6.20) é o caso particular de (6.21), ou que (6.21) é o caso geral de (6.20), uma vez que para $p_z = 0$ não podemos reduzir exatamente o espectro $(3 + 1)$ -dimensional no espectro $(2 + 1)$ -dimensional. Vale a pena mencionar também que o espectro (6.20) é muito similar (com $u = +1$ e $\gamma_+ > 0$) ao espectro do OD $(2 + 1)$ -dimensional em um referencial girante [284]. De fato, fazendo $\omega_c \rightarrow 2\Omega$, onde Ω é a frequência angular, obtemos exatamente o espectro do OD.

Agora, vamos analisar o comportamento do espectro (6.17) em função do campo magnético B , dos parâmetros α e β e da velocidade angular ω para diferentes valores de n (com $m_j > 0$ fixo). Portanto, usando a config. 1 da Tabela 8 temos a Fig. 23, onde mostra o comportamento das energias da partícula em função do campo magnético para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$), com e sem a presença da energia magnética, no qual usamos $m_0 = e = \theta = \eta = s = u = 1$, $\beta = \omega = 0.1$, $\alpha = 1/2$ (deve satisfazer $\beta\omega \ll 1$ e $\alpha\omega \ll 1$) e $m_j = 1/2$, sendo o campo dado por $1 < B < 4$. De acordo com esta Figura,

vemos que as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e a função do MMA é aumentar as energias da partícula, ou seja, as energias são maiores quando o MMA é levado em consideração (análogo aos dois cenários anteriores). Além disso, as energias podem aumentar ou diminuir em função de B , onde tal comportamento é muito semelhante com o do primeiro cenário (ver Fig. 1). Por exemplo, para o caso $E_m \neq 0$, as energias aumentam praticamente em todo o intervalo (onde $\Delta E(B) > 0$), enquanto que para o caso $E_m = 0$, aumentam entre $B \approx 1$ e $B \approx 3$ (atingindo o valor máximo em $B \approx 3$) e depois diminuem entre $B \approx 3$ e $B \approx 4$ (onde $\Delta E(B) > 0$). Agora, comparando os três cenários (Figs. 1, 12 e 23), verificamos que as energias com os maiores valores são para o segundo cenário (a condição $\beta\omega \ll 1$ e $\alpha\omega \ll 1$ limita muito os valores do espectro da partícula).

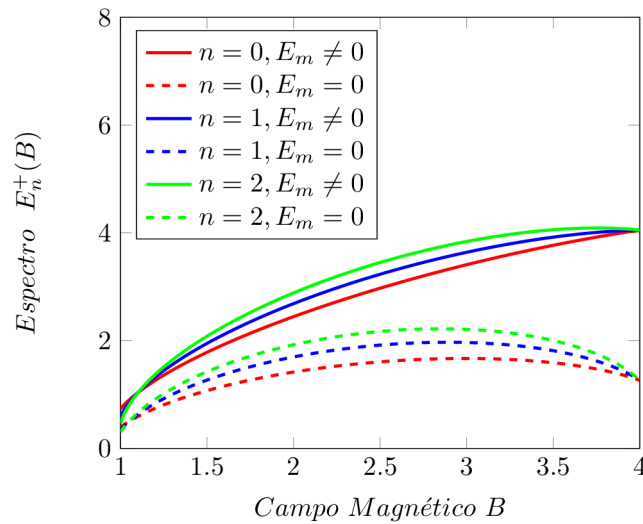


Figura 23: Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

Na Fig. 24, é mostrado o comportamento das energias da antipartícula em função do campo magnético para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados (com $m_0 = e = \theta = \eta = s = u = 1$, $\beta = \omega = 0.1$, $\alpha = 1/2$, $m_j = 1/2$ e $1 < B < 4$). De acordo com esta Figura, vemos que as energias podem aumentar ou diminuir com o aumento de n e para certos intervalos de B , onde tal comportamento possui algumas semelhanças (e diferenças) com o do primeiro cenário (ver Fig. 2). Por exemplo, para o caso $E_m = 0$, vemos que as energias aumentam com o aumento de n , e com relação ao campo aumentam entre $B \approx 1$ e $B \approx 2.3$ e diminuem entre $B \approx 2.3$ e $B \approx 4$ (onde $\Delta E < 0$ ou $E_{final} < E_{inicial}$), respectivamente. Agora, para o caso $E_m \neq 0$, vemos que entre $B \approx 1$ e $B \approx 3$ (linhas azul e vermelha se tocam) as energias são maiores com o aumento de n , enquanto que entre $B \approx 3.3$ (linhas azul e verde se tocam) e $B \approx 4$ as energias são já menores (uma “anomalia”, logo, $\Delta E_n < 0$). Além disso (ainda para $E_m \neq 0$), as energias podem aumentar, diminuir ou serem “nulas” (“zero”) em função de B . Em particular, estas energias “nulas” aparecem na origem ($B \approx 1$), em $B \approx 2.7$ (linha vermelha ou

$n = 0$), em $B \approx 3.2$ (linha azul ou $n = 1$) e em $B \approx 3.4$ (linha verde ou $n = 2$). Agora, comparando os três cenários, verificamos que as energias com os maiores valores são para o primeiro cenário (a condição $\beta\omega \ll 1$ e $\alpha\omega \ll 1$ limita muito os valores do espectro da antipartícula).

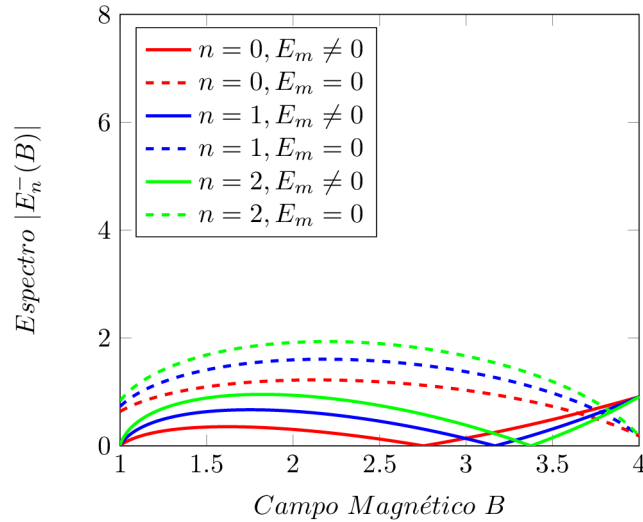


Figura 24: Gráfico de $|E_n^-(B)|$ versus B para três diferentes valores de n com $E_m \neq 0$ ($a = 1$) e $E_m = 0$ ($a = 0$).

Na Fig. 25, é mostrado o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de α para o estado fundamental ($n = 0$), o segundo estado excitado ($n = 2$) e o quarto estado excitado ($n = 4$), onde usamos $m_0 = e = a = B = s = u = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $\beta = \omega = 0.1$ e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias da partícula e antipartícula aumentam com o aumento de n (como deve ser), onde as energias da partícula são muito maiores, porém, a função de α (ou da curvatura) é aumentar as energias da partícula e antipartícula (o que é diferente do segundo cenário, onde as energias da antipartícula diminuem). Na realidade, no caso da antipartícula as energias são praticamente constantes em um bom intervalo de α (os estados $n = 2$ e $n = 4$ tem energias constantes para $0.2 < \alpha < 1$ enquanto o estado $n = 0$ tem energia constante para $\alpha > 0.5$). Agora, comparando o segundo cenário com o terceiro, verificamos que as energias da partícula (antipartícula) com os maiores valores são para o segundo (terceiro) cenário. A título de ilustração, a energia da partícula para $\alpha = 0.15$ do segundo cenário é aproximadamente 8 enquanto que a do terceiro cenário é aproximadamente 2 (ou seja, a energia da partícula é no mínimo quatro vezes menor quando temos um referencial girante envolvido). Além disso, a energia da antipartícula para $\alpha = 0.15$ do segundo cenário é aproximadamente 0.3 enquanto que a do terceiro cenário é aproximadamente 0.7 (ou seja, a energia da antipartícula é no mínimo 2 vezes menor quando temos um referencial girante envolvido).

Na Fig. 26, é mostrado o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de β para o estado fundamental ($n = 0$), o segundo estado excitado ($n = 2$) e o quarto estado excitado ($n = 4$), onde usamos $m_0 = e = a = B = s = u = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$,

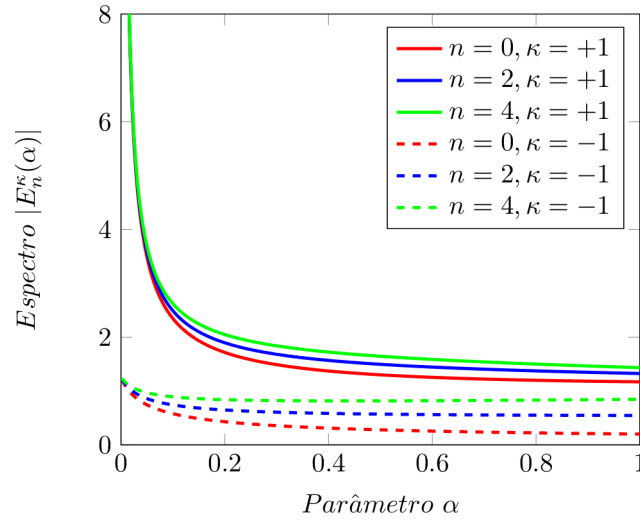


Figura 25: Gráfico de $|E_n^{\kappa}(\alpha)|$ versus α para três diferentes valores de n .

$\alpha = 1/2$, $\omega = 0.1$ e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias da partícula e antipartícula aumentam com o aumento de n (como deve ser), onde as energias da partícula são muito maiores, porém, a função de β é aumentar as energias da partícula (quase de forma linear) e diminuir as da antipartícula. Dessa forma, quanto mais rápido a CC girar, maiores são as energias da partícula e menores as da antipartícula, respectivamente. Agora, comparando o segundo cenário com o terceiro, verificamos que as energias da partícula (antipartícula) com os maiores valores são para o terceiro (segundo) cenário. A título de ilustração, a energia da partícula para $\beta = 1$ do segundo cenário é aproximadamente 3 enquanto que a do terceiro cenário é aproximadamente 10 (ou seja, a energia da partícula é no mínimo três vezes maior quando temos um referencial girante envolvido). Além disso, a energia da antipartícula para $\beta = 1$ do segundo cenário é aproximadamente 0.5 enquanto que a do terceiro cenário é aproximadamente 0.15 (ou seja, a energia da antipartícula é no mínimo três vezes menor quando temos um referencial girante envolvido).

Já na Fig. 27, é mostrado o comportamento das energias da partícula e antipartícula em função de ω para o estado fundamental ($n = 0$), o segundo estado excitado ($n = 2$) e o quarto estado excitado ($n = 4$), onde usamos $m_0 = e = a = B = s = u = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $\alpha = \beta = 0.1$ (deve satisfazer $\beta\omega \ll 1$ e $\alpha\omega \ll 1$) e $m_j = 1/2$. De acordo com esta Figura, vemos que as energias de ambas as partícula e antipartícula aumentam com o aumento de n (como deve ser), onde a diferença de energia (entre os níveis) diminui ($\Delta E_n \rightarrow 0$) para a partícula e é praticamente constante ($\Delta E_n \approx const.$) para a antipartícula à medida que ω aumenta. Então, à medida que ω aumenta vemos também que as energias da partícula diminuem enquanto as da antipartícula aumentam. Dessa forma, quanto mais rápido o referencial girar, menores são as energias da partícula e maiores as da antipartícula, respectivamente.

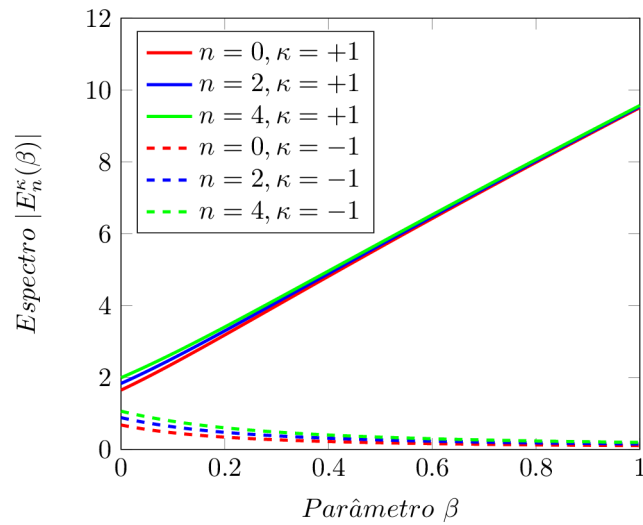


Figura 26: Gráfico de $|E_n^K(\beta)|$ versus β para três diferentes valores de n .

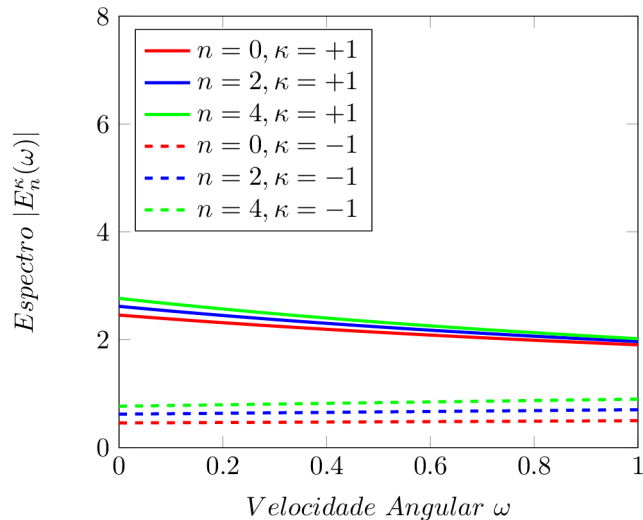


Figura 27: Gráfico de $|E_n^K(\omega)|$ versus ω para três diferentes valores de n .

Por outro lado, também é interessante analisar (rapidamente) o gráfico das energias do EHQ em $(2+1)$ e $(3+1)$ -dimensões, cujos espectros são dados pelas expressões (6.20) e (6.21). Nosso intuito com isso é saber como uma dimensão espacial “extra” (eixo- z) afeta o comportamento das energias em função do campo magnético e da velocidade angular. Portanto, usando $m_0 = e = p_z = u = 1$, $n = 0, 1, 2$ (três estados quânticos) e $\omega = 0.1$, obtemos a Fig. 28, onde mostra o comportamento das energias da partícula em função do campo magnético para $D = 2 + 1$ e $D = 3 + 1$ (D representa a dimensão total do espaço-tempo), com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (sendo $l_+ = 1$) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (sendo $\gamma_+ = l_+ = -1$).

De acordo com a Fig. 28, vemos que para ambos os casos, (a) e (b), as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e podem aumentar ou permanecer constante em função de B . Por exemplo, na Fig. 28-(a) vemos que o estado fundamental é uma constante

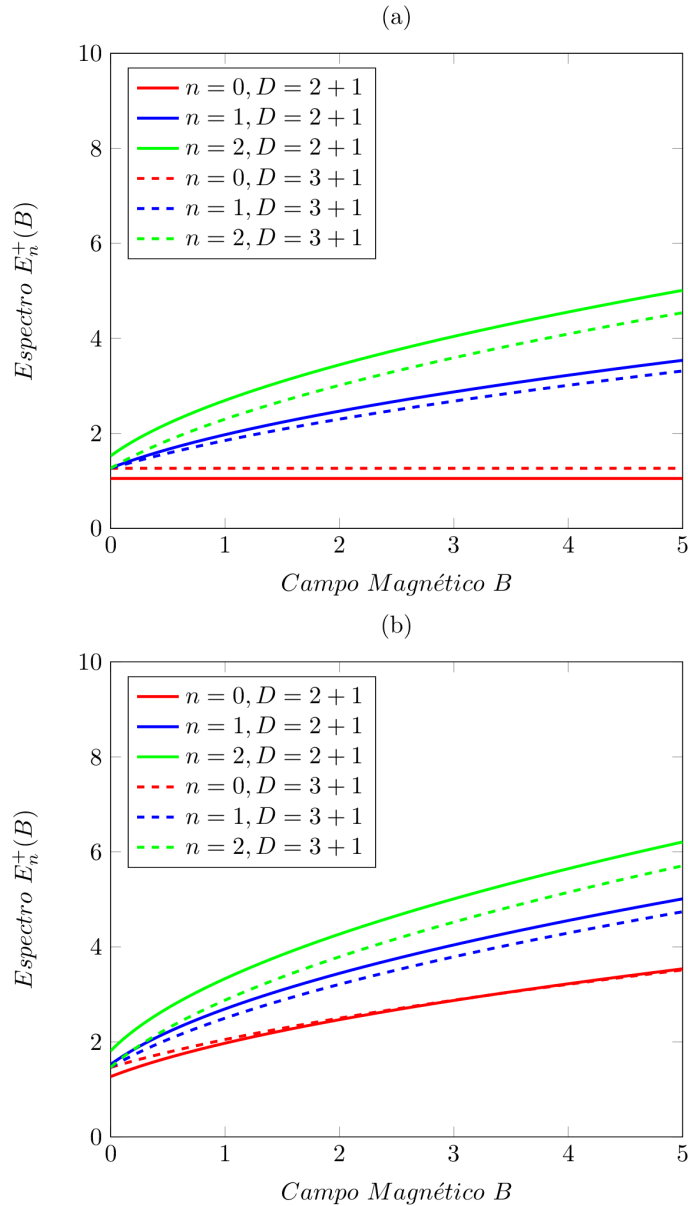


Figura 28: Gráfico de $E_n^+(B)$ versus B para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).

(independe do valor de B), enquanto que os estados excitados já não são, ou seja, aumentam em função de B (assim como acontece com todos os níveis de energia da Fig. 28-(b)). Além disso, a dimensão do sistema afeta os níveis de energia dependendo do estado quântico analisado. Por exemplo, vemos na Fig. 28-(a) que a energia do estado fundamental é maior para o caso $D = 3 + 1$, enquanto que na Fig. 28-(b) são praticamente iguais independentemente da dimensão do sistema (linhas vermelhas sólida e tracejada se sobrepõem para $B \geq 1$). No entanto, comparando 28-(a) com 28-(b), vemos que as energias dos estados excitados são maiores para o caso $D = 2 + 1$ (ou seja, os estados excitados tem mais energia no “mundo bidimensional ao invés do mundo tridimensional”), onde todos os estados tem mais energias para $\gamma_+ = l_+ < 0$ (momento angular negativo).

Na Fig. 29, é mostrado o comportamento das energias da antipartícula em função do campo magnético, onde usamos $m_0 = e = B = p_z = u = 1$, $n = 0, 1, 2$, $\gamma_+ = l_+ > 0$ (sendo $l_+ = 1$) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (sendo $\gamma_+ = l_+ = -1$). De acordo com esta Figura, vemos que há semelhanças e diferenças com o caso da partícula. Por exemplo, similar ao caso da partícula, vemos na Fig. 29(a) que o estado fundamental é uma constante (independe do valor de B), enquanto que os estados excitados não são, ou seja, aumentam em função de B (assim como acontece com todos os níveis de energia da Fig. 29(b)). Além disso, comparando 29(a) com 29(b), vemos que todos os estados também tem mais energias para $\gamma_+ = l_+ < 0$ (momento angular negativo). Agora, diferentemente do caso da partícula, aqui todas as energias são maiores para o caso $D = 3 + 1$ (ou seja, todos os estados tem mais energia no “mundo tridimensional ao invés do mundo bidimensional”).

Na Fig. 30, é mostrado o comportamento das energias da partícula em função da velocidade angular, onde usamos $m_0 = e = B = p_z = u = 1$, $n = 0, 1, 2$, $\gamma_+ = l_+ > 0$ (sendo $l_+ = 1$) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (sendo $\gamma_+ = l_+ = -1$). De acordo com esta figura, vemos que para ambos os casos, 30(a) e 30(b), as energias aumentam com o aumento de n (como deve ser) e podem aumentar ou diminuir em função de ω de acordo com a dimensão do sistema, ou seja, as energias aumentam para o caso $D = 2 + 1$ e diminuem para o caso $D = 3 + 1$ (neste caso diminuem até serem “nulas” para certos valores de ω). Além disso, a diferença de energia (entre os níveis) aumenta para o caso $D = 2 + 1$ e permanece constante para o caso $D = 3 + 1$ à medida que ω aumenta. Já na Fig. 31, é mostrado o comportamento das energias da antipartícula em função da velocidade angular, onde usamos $m_0 = e = B = p_z = u = 1$, $n = 0, 1, 2$, $\gamma_+ = l_+ > 0$ (sendo $l_+ = 1$) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (sendo $\gamma_+ = l_+ = -1$). De acordo com esta figura, vemos que as energias podem aumentar ou diminuir (uma “anomalia”) com o aumento de n , ou seja, as energias sempre aumentam para o caso $D = 3 + 1$ e aumentam ($0 < \omega < 0.4$) ou diminuem ($\omega > 0.4$) para o caso $D = 2 + 1$ (neste caso as energias do primeiro e segundo estado excitado são praticamente as mesmas, ou seja, $|E_1^-(\omega)| \approx |E_2^-(\omega)|$). Além disso, as energias podem aumentar, diminuir ou serem constantes em função de ω de acordo com a dimensão do sistema. Por exemplo, para $D = 3 + 1$ as energias sempre aumentam (linearmente) em função de ω , enquanto que para $D = 2 + 1$ a energia só aumenta (linearmente) em função de ω para o estado fundamental com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (momento angular positivo). Neste último caso, as energias dos estados excitados diminuem entre $0 < \omega \leq 3$ e logo depois tendem a um valor constante à medida que ω aumenta (isso também acontece para $\gamma_+ = l_+ < 0$, como mostrado em 31(b)).

Agora, vamos focar nossa atenção na forma do spinor de Dirac NC (espinor curvo não-inercial) para os estados ligados relativísticos do EHQNC (e depois analisar rapidamente a densidade de probabilidade). No entanto, devemos nos atentar quando à forma do spinor \bar{R} , no qual é escrito como $\bar{R} = \rho^{-\bar{\alpha}} \bar{f}$, onde definimos $\bar{\alpha} \equiv \frac{\beta\omega(\tau-1)}{2\tau} < 0$ ($\tau = 1 - m_0\omega_c\theta/4 > 0$). Desse

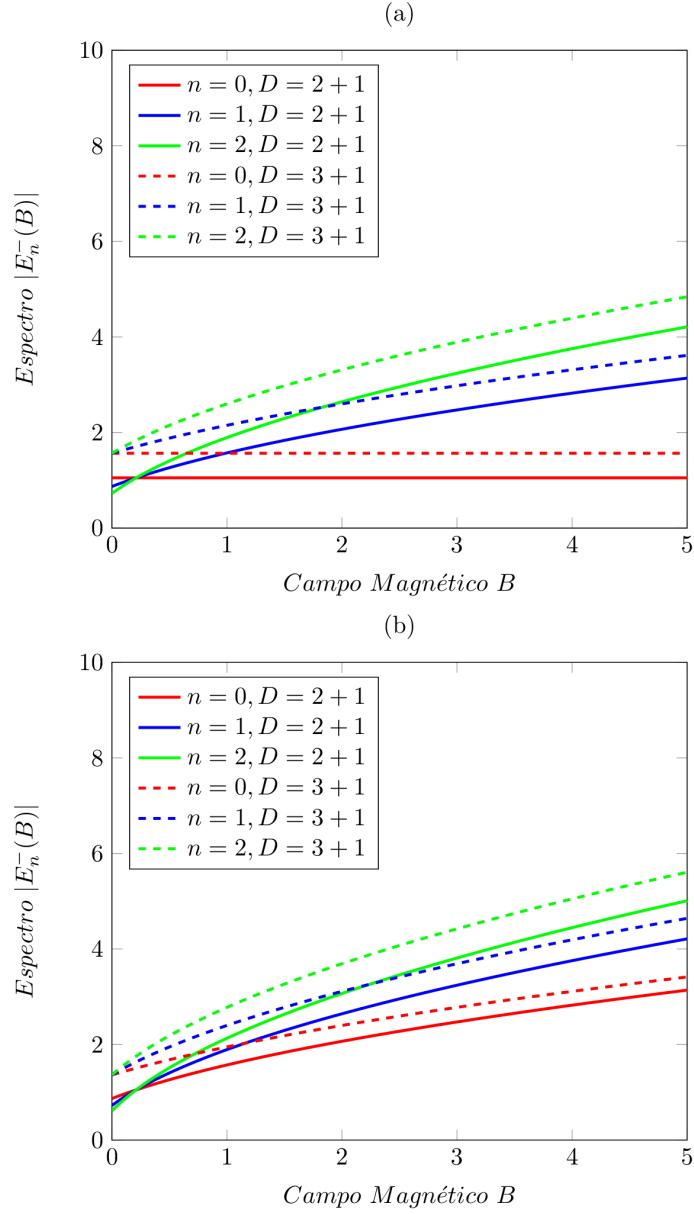


Figura 29: Gráfico de $|E_n^-(B)|$ versus B para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).

modo, fazendo o uso de um “mapeamento” em (5.18) onde $\hat{m}_j \rightarrow \bar{m}_j$, $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}_u$ (pois depende de E_u) e $\hat{f}_u \rightarrow \bar{f}_u$, implica que o spinor \bar{R} toma a seguinte forma

$$\bar{R}(\rho) = \begin{pmatrix} \bar{C}_+(m_0\bar{\Omega}_+)^{\frac{|\bar{\gamma}_+|}{2}} \rho^{|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_+\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(m_0\bar{\Omega}_+\rho^2) \\ i\bar{C}_-(m_0\bar{\Omega}_-)^{\frac{|\bar{\gamma}_-|}{2}} \rho^{|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_-\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(m_0\bar{\Omega}_-\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Para achar as constantes de normalização \bar{C}_\pm , podemos usar a relação (5.19). Deste modo, temos (em termos da variável $\bar{r} = m_0\bar{\Omega}_u\rho^2$)

$$\frac{1}{2}\alpha \int_0^\infty \left[(m_0\bar{\Omega}_+)^{\bar{\alpha}-1} \bar{C}_+^2 \bar{r}^{|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha}} e^{-\bar{r}} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(\bar{r}) \right]^2 + (m_0\bar{\Omega}_-)^{\bar{\alpha}-1} \bar{C}_-^2 \bar{r}^{|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha}} e^{-\bar{r}} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(\bar{r}) \right]^2 \right] d\bar{r} = 1. \quad (6.23)$$

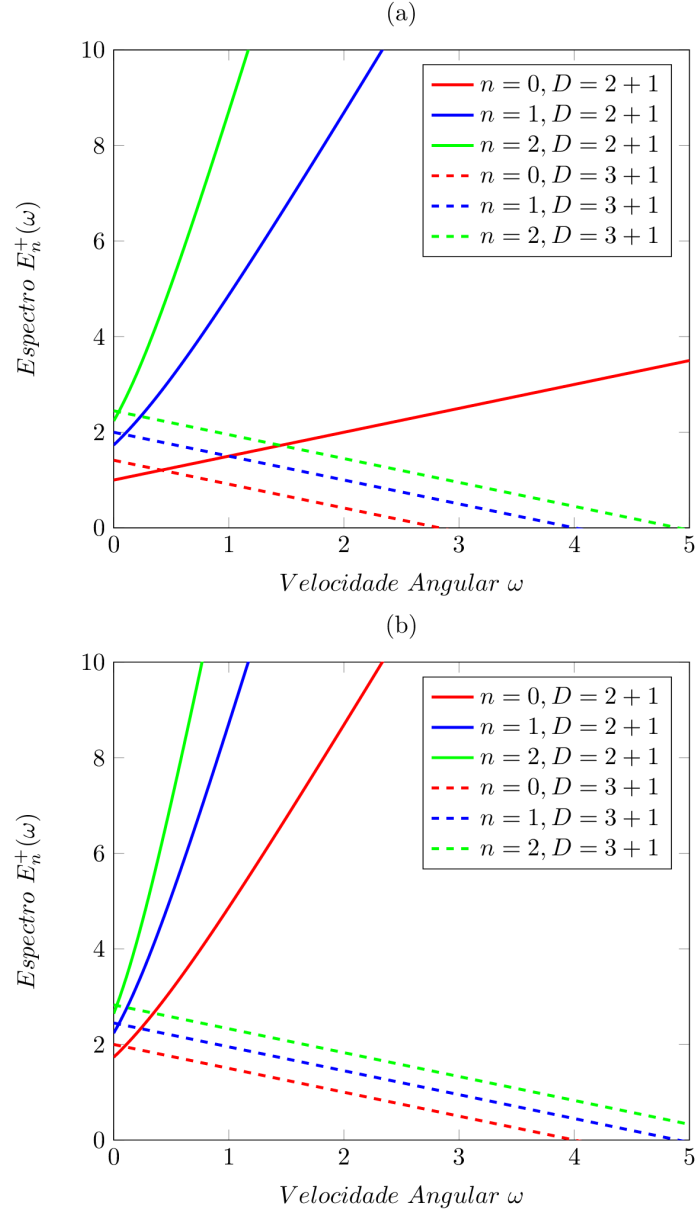


Figura 30: Gráfico de $E_n^+(\omega)$ versus ω para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).

Consequentemente, temos duas expressões a serem resolvidas, dadas a seguir

$$\frac{1}{2} \bar{C}_+^2 \alpha (m_0 \bar{\Omega}_+)^{\bar{\alpha}-1} \int_0^\infty \bar{r}^{|\bar{\gamma}_+| - \bar{\alpha}} e^{-\bar{r}} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(\bar{r}) \right]^2 d\bar{r} = \frac{1}{2}, \quad (6.24)$$

e

$$\frac{1}{2} \bar{C}_-^2 \alpha (m_0 \bar{\Omega}_-)^{\bar{\alpha}-1} \int_0^\infty \bar{r}^{|\bar{\gamma}_-| - \bar{\alpha}} e^{-\bar{r}} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(\bar{r}) \right]^2 d\bar{r} = \frac{1}{2}. \quad (6.25)$$

De acordo com a Ref. [437], as expressões acima podem ser resolvidas usando a seguinte fórmula geral para a integração do produto de dois polinômios de Laguerre associados

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} L_n^b(x) L_{n'}^{b'}(x) dx = (-1)^{n+n'} \Gamma(a+1) \sum_k \binom{a-b}{n-k} \binom{a-b'}{n'-k} \binom{a+k}{k}, \quad (6.26)$$

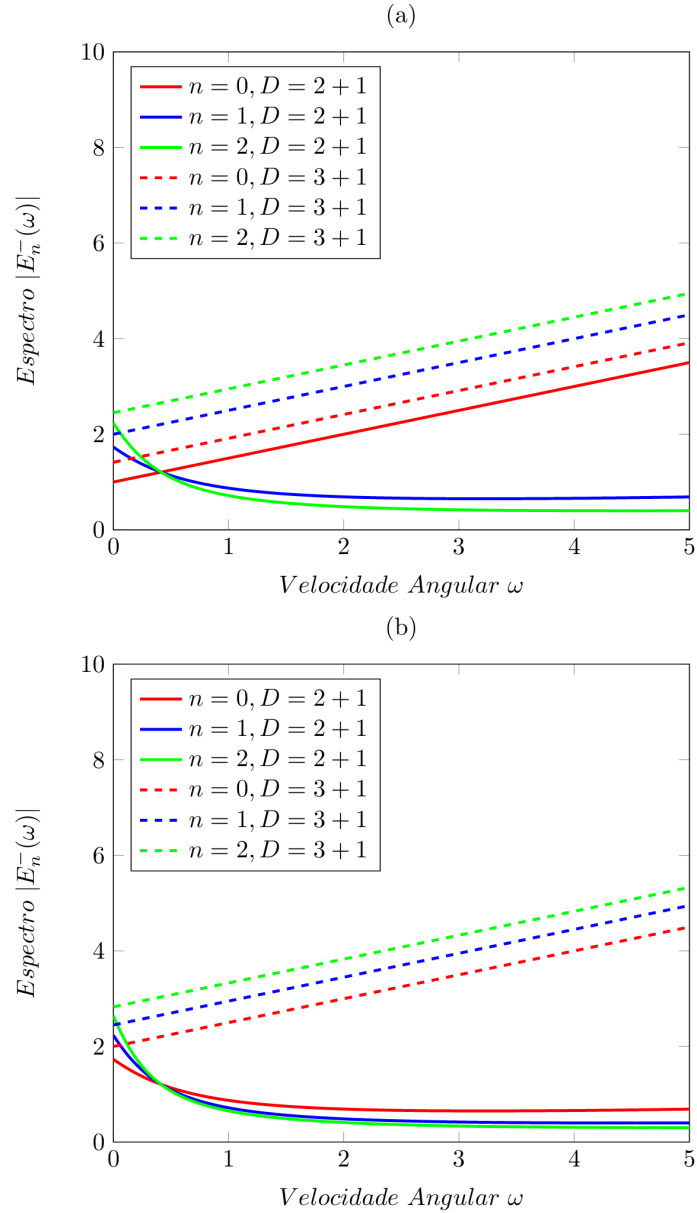


Figura 31: Gráfico de $|E_n^-(\omega)|$ versus ω para três diferentes valores de n com $\gamma_+ = l_+ > 0$ (a) e $\gamma_+ = l_+ < 0$ (b).

onde

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}, \quad (6.27)$$

é o coeficiente (número) binomial.

Então, chamando $a = |\tilde{\gamma}_u| - \bar{\alpha}$, $b = b' = |\tilde{\gamma}_u|$ e $n = n'$, a integral (6.26) pode ser reescrita como

$$\int_0^\infty x^{|\tilde{\gamma}_u| - \bar{\alpha}} e^{-x} \left[L_n^{|\tilde{\gamma}_u|}(x) \right]^2 dx = \Gamma(|\tilde{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + 1) \sum_k \binom{-\bar{\alpha}}{n-k}^2 \binom{|\tilde{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + k}{k}. \quad (6.28)$$

No entanto, o primeiro coeficiente binomial deve satisfazer duas condições de acordo com os valores de k , que são

$$\binom{-\bar{\alpha}}{n-k} = \begin{cases} \frac{(-\bar{\alpha})!}{(n-k)!(-\bar{\alpha}-n+k)!}, & \text{se } k \geq n; \\ 0, & \text{se } k < n. \end{cases} \quad (6.29)$$

Desse modo, implica que nossa integral toma a seguinte forma

$$\int_0^\infty x^{|\bar{\gamma}_u|-\bar{\alpha}} e^{-x} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_u|}(x) \right]^2 dx = \Gamma(|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + 1) \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{(n-k)!(-\bar{\alpha}-n+k)!} \right)^2 \left(\frac{(|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + k)!}{k!(|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha})!} \right). \quad (6.30)$$

Por outro lado, o somatório acima possui o seguinte resultado [448,449]

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{(n-k)!(-\bar{\alpha}-n+k)!} \right)^2 \left(\frac{(|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + k)!}{k!(|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha})!} \right) = \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!} \right)^2 {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; 1), \quad (6.31)$$

onde ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)$ é a função hipergeométrica generalizada e é dada como segue

$${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; 1) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(p+a_1)}{\Gamma(a_1)} \frac{\Gamma(p+a_2)}{\Gamma(a_2)} \frac{\Gamma(p+a_3)}{\Gamma(a_3)}}{\frac{\Gamma(p+b_1)}{\Gamma(b_1)} \frac{\Gamma(p+b_2)}{\Gamma(b_2)}} \frac{1}{\Gamma(p+1)}, \quad (6.32)$$

sendo $a_1 = |\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha} + 1$, $a_2 = a_3 = -n$ e $b_1 = b_2 = -\bar{\alpha} - n + 1$, respectivamente. Em particular, supondo que $\bar{\alpha} = 0, \pm 1$ e $|\bar{\gamma}_u| = |m|$ ($m \equiv m_l$), obtemos exatamente os resultados da Ref. [437].

Portanto, temos as seguintes constantes de normalização para o terceiro cenário

$$\bar{C}_{\pm} = \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!} \right)^2 {}_3F_2(a_1^{\pm}, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} > 0, \quad (6.33)$$

onde fizemos $a_1 \rightarrow a_1^{\pm}$ (pois depende de $u = \pm 1$). Explicitamente, as três primeiras constantes (para $n = 0, 1, 2$) são dadas a seguir (usaremos isso na densidade de probabilidade)

$$\bar{C}_{0,\pm} = \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})!}}, \quad (6.34)$$

$$\bar{C}_{1,\pm} = \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})! (|\bar{\gamma}_{\pm}| + \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 1)}} \approx \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})! (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha} + 1)}}, \quad (\bar{\alpha}^2 \approx 0), \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2,\pm} &= \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})! (4 + 2|\bar{\gamma}_{\pm}|^2 + 6|\bar{\gamma}_{\pm}| - 6\bar{\alpha} + 7\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4 - 4|\bar{\gamma}_{\pm}|\bar{\alpha} + 4|\bar{\gamma}_{\pm}|\bar{\alpha}^2)/4}} \\ &\approx \sqrt{\frac{(m_0 \bar{\Omega}_{\pm})^{1-\bar{\alpha}}}{\alpha (|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha})! (4 + 2|\bar{\gamma}_{\pm}|^2 + 6(|\bar{\gamma}_{\pm}| - \bar{\alpha}) - 4|\bar{\gamma}_{\pm}|\bar{\alpha})/4}}, \quad (\bar{\alpha}^2 = \bar{\alpha}^3 = \bar{\alpha}^4 \approx 0) \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde usamos o fato de que $\beta\omega \ll 1$ (ou $\bar{\alpha} \ll 1$).

Consequentemente, o spinor curvilíneo (3.17) será escrito como

$$\bar{\Psi}_C^{NC} = \frac{e^{i(m_j\varphi - Et)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_+)^{|\bar{\gamma}_+|+1-\bar{\alpha}}}{\alpha(|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^+, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} \rho^{|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_+\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(m_0\bar{\Omega}_+\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_-)^{|\bar{\gamma}_-|+1-\bar{\alpha}}}{\alpha(|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^-, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} \rho^{|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_-\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(m_0\bar{\Omega}_-\rho^2) \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Portanto, como $\bar{\Psi}_D^{NC} = e^{-\frac{i\varphi\Sigma_3}{2}} \bar{\Psi}_C^{NC}$ (não confundir com o spinor adjunto, dado por $\bar{\Psi}_D = \Psi_D^\dagger \gamma^0$ [1]), obtemos o seguinte spinor de Dirac normalizado

$$\bar{\Psi}_D^{NC} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_+)^{|\bar{\gamma}_+|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^+, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} e^{i\gamma_+\varphi} \rho^{|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_+\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(m_0\bar{\Omega}_+\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_-)^{|\bar{\gamma}_-|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^-, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} e^{i\gamma_-\varphi} \rho^{|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_-\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(m_0\bar{\Omega}_-\rho^2) \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

ou ainda (inserindo a parte temporal em cada componente spinorial [176])

$$\bar{\Psi}_D^{NC} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_+)^{|\bar{\gamma}_+|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^+, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} e^{i(\gamma_+\varphi - E+t)} \rho^{|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_+\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(m_0\bar{\Omega}_+\rho^2) \\ i \sqrt{\frac{(m_0\bar{\Omega}_-)^{|\bar{\gamma}_-|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2 {}_3F_2(a_1^-, a_2, a_3; b_1, b_2; 1)}} e^{i(\gamma_-\varphi - E-t)} \rho^{|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha}} e^{-\frac{m_0\bar{\Omega}_-\rho^2}{2}} L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(m_0\bar{\Omega}_-\rho^2) \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

onde deve satisfazer as seguintes condições de contorno para ser uma solução fisicamente aceitável

$$\bar{\Psi}_D^{NC}(\rho \rightarrow 0) = \bar{\Psi}_D^{NC}(\rho \rightarrow \infty) = 0, \quad (6.40)$$

com $|\bar{\gamma}_u| - \bar{\alpha} > 0$, sendo $\bar{\gamma}_u = (bm_j/\alpha - su/2 + \beta E_u/\alpha\tau)$. Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$) obtemos exatamente o spinor de Dirac no espaço-tempo da CC girante, dado por (5.24). Neste caso, o resultado da integral (6.30) é simplesmente $\Gamma(n + |\hat{\gamma}_u| + 1)/\Gamma(n + 1)$.

Agora, vamos discutir rapidamente o comportamento da densidade de probabilidade para diferentes valores de n, m_j ($m_j > 0$), B, α, β e ω . Então, como a expressão para a densidade de probabilidade e dada da seguinte forma

$$\bar{P}(\rho) = \bar{P}_{n,m_j}(\rho) = (\bar{\Psi}_D^{NC})^\dagger \bar{\Psi}_D^{NC} = \frac{1}{2\pi} \bar{R}^\dagger(\rho) \bar{R}(\rho) = \frac{1}{2\pi} [\bar{f}_+^2(\rho) + \bar{f}_-^2(\rho)], \quad (6.41)$$

implica que

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{(m_0 \bar{\Omega}_+)^{|\bar{\gamma}_+|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2} \rho^{2(|\bar{\gamma}_+|-\bar{\alpha})} e^{-m_0 \bar{\Omega}_+ \rho^2} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_+|}(m_0 \bar{\Omega}_+ \rho^2) \right]^2 \\ &+ \frac{(m_0 \bar{\Omega}_-)^{|\bar{\gamma}_-|+1-\bar{\alpha}}}{2\pi\alpha(|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha})! \left(\frac{(-\bar{\alpha})!}{n!(-\bar{\alpha}-n)!}\right)^2} \rho^{2(|\bar{\gamma}_-|-\bar{\alpha})} e^{-m_0 \bar{\Omega}_- \rho^2} \left[L_n^{|\bar{\gamma}_-|}(m_0 \bar{\Omega}_- \rho^2) \right]^2. \end{aligned} \quad (6.42)$$

No entanto, diferentemente do cenário anterior, aqui o espectro E_u depende de s e u mesmo para $\bar{L} > 0$ (ou $m_j > 0$) e, portanto, implica que a densidade de probabilidade também depende de s e u uma vez que E_u está presente tanto em $\bar{\gamma}_u$ quanto em $\bar{\Omega}_u$ (o que deixa o problema muito mais sutil do que o do cenário anterior). Então, vamos usar como base as informações que foram usadas para construir o gráfico da Fig. 23, porém, com $B = 1.25$ (mesmo do cenário anterior) e $u = \pm 1$. Com isso, obtemos a Fig. 32, onde mostra o comportamento da densidade de probabilidade para o estado fundamental ($n = 0$) e os dois primeiros estados excitados ($n = 1, 2$) para $m_j = 1/2, 3/2$.

De acordo com a Fig. 32-(a), vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) diminui com o aumento de n ($\bar{P}_{n=0} > \bar{P}_{n=1} > \bar{P}_{n=2}$) e possui um valor aproximadamente igual para os três estados quânticos no intervalo (região) entre $\rho = 0$ e $\rho = 2$ ($\bar{P}_{n=0} \approx \bar{P}_{n=1} \approx \bar{P}_{n=2}$). Agora, de acordo com a Fig. 32-(b), vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) se comporta de uma forma um tanto diferente (uma “anomalia”) da Fig. 32-(a), ou seja, a densidade de maior valor é para $n = 2$ enquanto a de menor valor é para $n = 1$, onde o estado fundamental tem um valor intermediário, logo, temos $\bar{P}_{n=2} > \bar{P}_{n=0} > \bar{P}_{n=1}$. Além disso, comparando 32-(a) com 32-(b), vemos que a densidade de probabilidade (picos máxs.) se afasta da origem à medida que m_j aumenta. Agora, comparando os três cenários (Figs. 5, 16 e 32), verificamos que a densidade de probabilidade com os maiores valores é para o primeiro cenário.

Na Fig. 33, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores de campo magnético ($1 < B < 4$), onde usamos $m_0 = e = a = \theta = \eta = s = 1$, $\beta = \omega = 0.1$, $\alpha = 1/2$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 23 com $u = \pm 1$). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade aumenta à medida que B aumenta (onde $\bar{P}_{B=2.50} > \bar{P}_{B=2.00} > \bar{P}_{B=1.50} > \bar{P}_{B=1.15}$) e seus valores tendem a se concentrar cada vez mais em $\rho \approx 1$ (formando então uma “delta de Dirac”) ou mais perto da origem. No entanto, a densidade para $B = 1.15$ é quase nula em todo o intervalo (região). Agora, comparando os três cenários (Figs. 6, 17 e 33), verificamos que a densidade de probabilidade com os maiores valores é para o primeiro cenário.

Na Fig. 34, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro

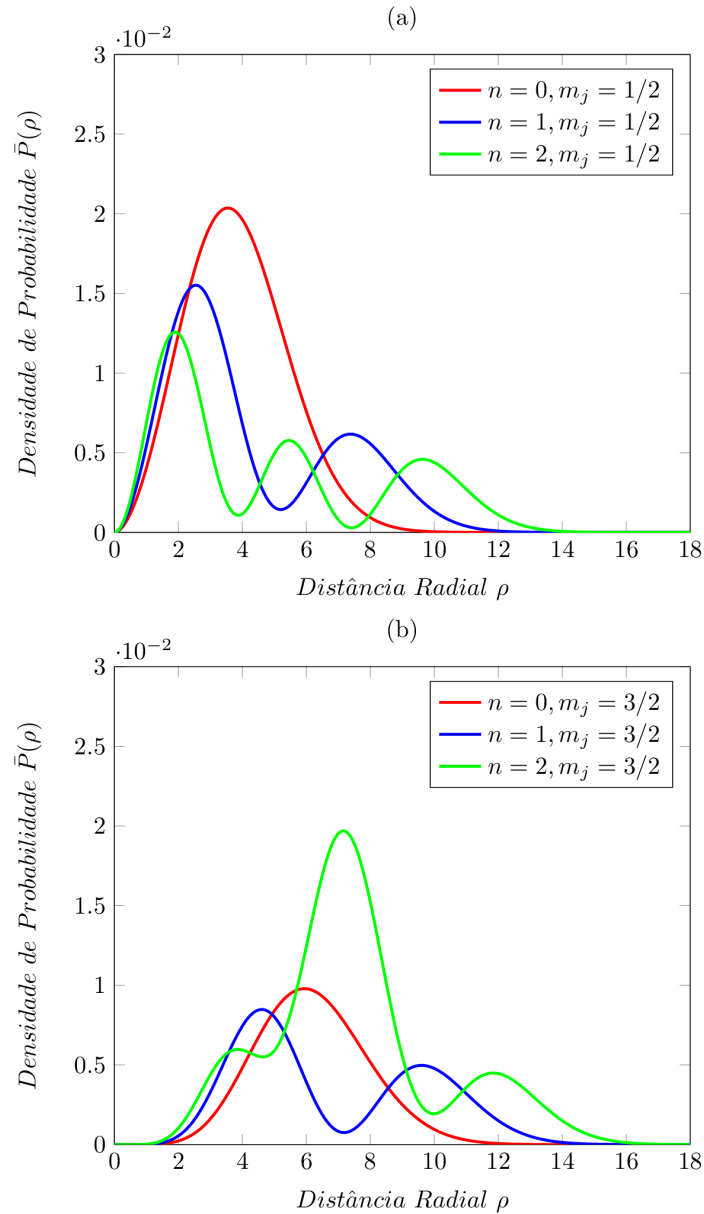


Figura 32: Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para três diferentes valores de n com $m_j = 1/2$ (a) e $m_j = 3/2$ (b).

diferentes valores do parâmetro α , onde usamos $m_0 = e = a = B = s = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $\beta = \omega = 0.1$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 25 com $u = \pm 1$). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade pode aumentar ou diminuir em função de α , ou seja, a densidade aumenta à medida que α diminui de 1 para 0.6 (atingindo um valor/pico máximo) e diminui para α abaixo de 0.6 (onde $\bar{P}_{\alpha=0.6} > \bar{P}_{\alpha=0.8} > \bar{P}_{\alpha=1.0} > \bar{P}_{\alpha=0.4}$). Agora, comparando o segundo cenário com o terceiro (Figs. 18 e 34), verificamos que a densidade de probabilidade com os maiores valores é para o terceiro cenário.

Na Fig. 35, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes valores do parâmetro β , onde usamos $m_0 = e = a = B = s = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $\omega = 0.1$, $\alpha = 1/2$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 26

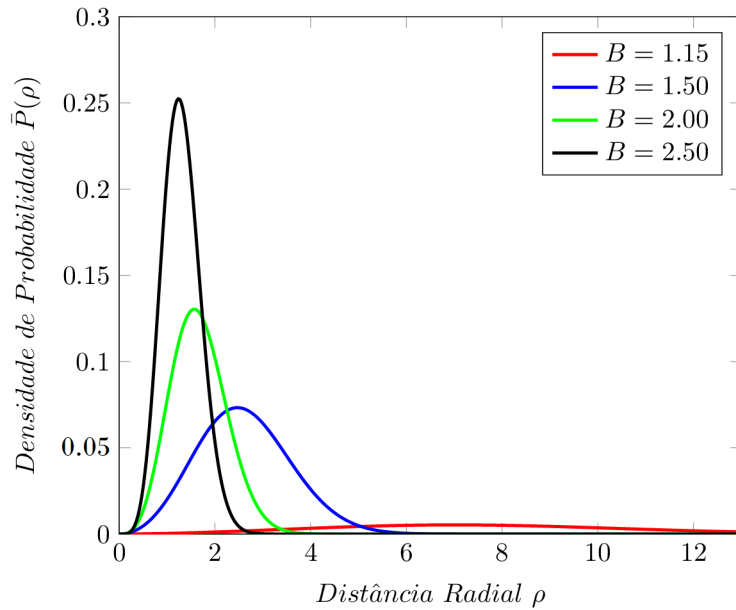


Figura 33: Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de B .

com $u = \pm 1$). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade diminui em função de β , ou seja, quanto mais rápido a CC girar menor é a densidade de probabilidade (onde $\bar{P}_{\beta=0.0} > \bar{P}_{\beta=0.1} > \bar{P}_{\beta=0.2} > \bar{P}_{\alpha=0.3}$). Agora, comparando o segundo cenário com o terceiro (Figs. 19 e 35), verificamos que a densidade de probabilidade com os maiores valores é para o segundo cenário.

Já na Fig. 36, é mostrado o comportamento da densidade de probabilidade para quatro diferentes da velocidade angular ω , onde usamos $m_0 = e = a = B = s = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 1/2$, $\alpha = \beta = 0.1$, $n = 0$ e $m_j = 1/2$ (ou seja, as mesmas informações usadas na Fig. 27 com $u = \pm 1$). De acordo com esta Figura, vemos que a densidade de probabilidade diminui à medida que ω aumenta (onde $\bar{P}_{\omega=0.1} > \bar{P}_{\omega=0.2} > \bar{P}_{\omega=0.3} > \bar{P}_{\omega=0.4}$) e seus valores tendem a se afastar cada vez mais da origem, ou seja, quanto mais rápido o referencial girar, menor a probabilidade de encontrar a partícula perto da origem. De fato, isso é plausível uma vez que a força centrífuga é uma “força” que expulsa a partícula da origem (como deve ser).

6.2 Limite não-relativístico

Para analisar o limite não-relativístico do espectro relativístico, não podemos usar apenas a prescrição padrão dos cenários anteriores. Aqui, devemos fazer uma pequena “correção” nesta prescrição devido ao referencial girante, ou seja, considerar o parâmetro b , onde $E \approx b(m_0 + \varepsilon)$, com $m_0 \gg \varepsilon$, $m_0 \gg \bar{E}_m$, $m_0 \gg \bar{E}_\alpha$ e $m_0 \gg E_\omega$ (ou $m_0 \gg \alpha\omega$). Portanto, usando esta prescrição no espectro (6.17), obtemos o seguinte espectro não-relativístico (níveis de Landau não-relativísticos) para o EHQNC com MMA para uma partícula de spin-1/2 em um referencial

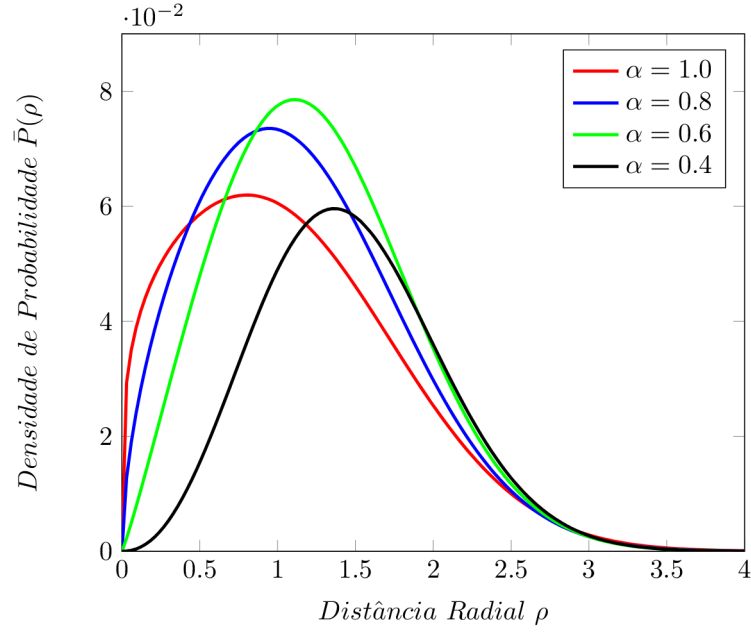


Figura 34: Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de α .

girante no espaço-tempo da CC girante

$$\varepsilon_{n,\bar{L},s,u} = \frac{\left[\bar{E}_\alpha + \bar{E}_m - E_\omega + \tau\lambda\omega_c\bar{N}_\alpha + \frac{(2\tau-1)}{2}\alpha\omega \right]}{\left[1 + 4\beta\omega \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\bar{L}} \right) \right]}, \quad (6.43)$$

onde

$$\bar{E}_\alpha = b^2 m_0 \omega_c \lambda \beta \left(\frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha\bar{L}} \right) \geq 0, \quad \bar{E}_m = bE_m > 0, \quad E_\omega = 2\alpha\omega\bar{N}_\alpha^\tau \geq 0, \quad b = 1 + \beta\omega, \quad (6.44)$$

e

$$\bar{N}_\alpha = \left(\frac{\bar{n}}{2} + \frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha} \right) \geq 0, \quad \bar{N}_\alpha^\tau = \left(\tau \frac{\bar{n}}{2} + \frac{|\bar{L}| + \bar{L}}{2\alpha} \right) \geq 0, \quad \bar{L} = bm_j - \frac{su\alpha}{2} = bm_j - u\alpha m_s. \quad (6.45)$$

Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$), obtemos exatamente o espectro não-relativístico no espaço-tempo da CC girante, dado por (5.28). Agora, ignorando o último termo em (6.43), que é o mesmo que considerar $M_0^2 \approx m_0^2$, e na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$), do MMA ($E_m = 0$) e da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), com $m_l < 0$ e $s = +1$ (sem spin), obtemos o espectro do EHQ não-relativístico em um referencial girante para elétrons, cujo espectro é dado por $\varepsilon_n = \hbar(\omega_c - 2\omega)(n + 1/2) > 0$ [258, 260]. No entanto, diferentemente de [258, 260], o nosso espectro ainda permanece válido mesmo para $B = 0$, ou seja, a frequência angular $\bar{\Omega}$ em (6.12) não é zero para $B = 0$, como acontece em [258, 260].

Além disso, notamos também que o espectro (6.43) possui algumas semelhanças e diferenças (mais semelhanças do que diferenças) com o caso relativístico (espectro (6.17)). Por exemplo, semelhante ao caso relativístico, o espectro (6.43)

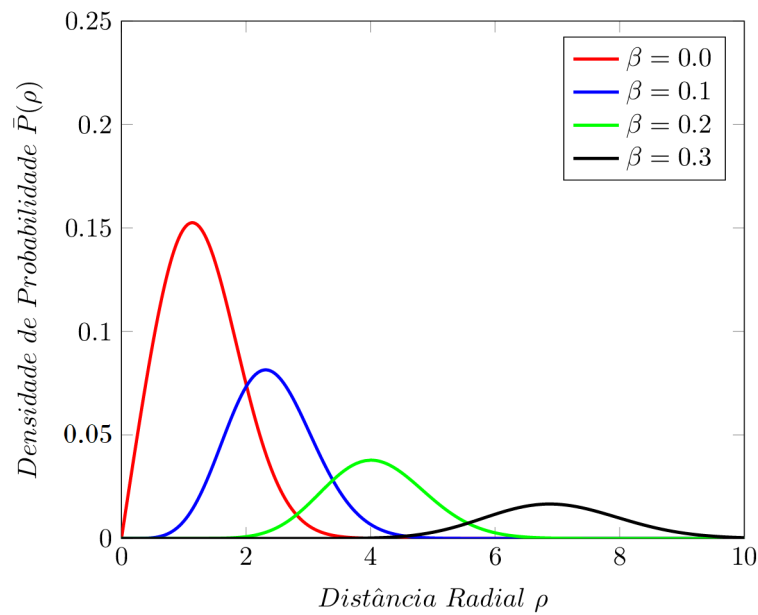


Figura 35: Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de β .

- só admite estados de energia positiva ($\epsilon_{n,\bar{L},s,u} > 0$);
- tem sua degenerescência quebrada devido à α , onde $\bar{L} > 0$ permite obter o espectro máximo (depende de α e β) e $\bar{L} < 0$ o espectro mínimo (também depende de α e β);
- aumenta em função de n e m_j ;
- aumenta em função de B e diminui em função de ω , ou seja, quanto maior o campo magnético e menor a rotação do referencial, maiores as energias;
- possui maiores energias quando a energia magnética é diferente de zero ($E_m \neq 0$);
- permanece quantizado (discreto) mesmo na ausência do campo magnético ($B = 0$) e do momento NC ($\eta = 0$), onde tal espectro depende de E_ω .

No entanto, diferentemente do caso relativístico, o espectro (6.43)

- depende linearmente das energias \bar{E}_m , \bar{E}_α e E_ω .

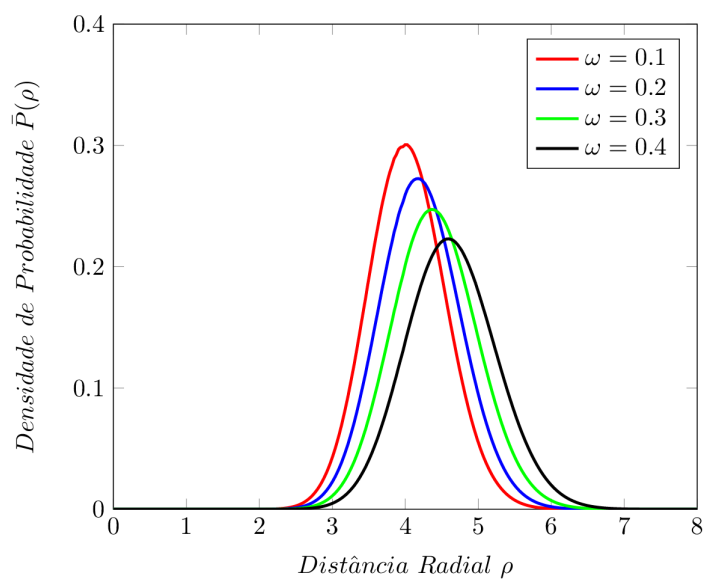


Figura 36: Gráfico de $\bar{P}(\rho)$ versus ρ para quatro diferentes valores de ω .

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese, investigamos as soluções de estado ligado do EHQNC com MMA em três diferentes cenários relativísticos, a saber: o espaço-tempo Minkowski (caso plano inercial), o espaço-tempo da CC girante (caso curvo inercial) e o espaço-tempo da CC girante com efeitos não-inerciais (caso curvo não-inercial). Portanto, trabalhamos em dois diferentes backgrounds relativísticos, onde um é exclusivo da TRE (espaço-tempo de Minkowski) e o outro da TRG (espaço-tempo da CC girante), ambos em $(2 + 1)$ -dimensões. Em particular, nos dois primeiros cenários o referencial do sistema é inercial enquanto que no terceiro é não-inercial (há um referencial girante no espaço-tempo da CC girante). Dessa forma, investigamos as soluções de estado ligado sob a influência de efeitos topológicos ou de curvatura, efeitos não-inerciais e de efeitos NCs, respectivamente. Com respeito às soluções, focamos nossa atenção principalmente nas autofunções (spinor de Dirac de duas componentes e a função de onda de Schrödinger) e, em especial, nos autovalores de energia (espectro de energia ou níveis de Landau). Além disso, também analisamos em detalhes a densidade de probabilidade (caso relativístico). Para alcançar tais soluções, usamos a EDNC em coordenadas polares com acoplamentos mínimo e não-mínimo, onde consideramos (diferentemente da literatura) uma CC com um spin não-nulo e também a NC das posições. Porém, para resolver analiticamente a nossa equação diferencial também para o terceiro cenário, consideramos duas aproximações: a primeira é que a velocidade linear do referencial girante é muito menor que a velocidade da luz e a segunda é que o acoplamento entre o spin da CC e a velocidade angular do referencial girante é muito fraco.

Nossas principais conclusões para cada cenário podem ser resumidas a seguir:

- **Primeiro Cenário:** Após resolver uma equação diferencial de segunda ordem, verificamos que o spinor de Dirac é escrito em termos dos polinômios de Laguerre associados e que o espectro relativístico depende da energia magnética E_m , dos números quânticos n e m_j , dos parâmetros de spin s e spinorial u , da frequência cíclotron ω_c e dos parâmetros NCs θ e η , onde tais parâmetros permitem definir duas “frequências angulares NCs”: $\omega_\theta = \frac{1}{m_0\theta}$ e $\omega_\eta = \frac{\eta}{m_0}$, sendo ω_θ a frequência NC de posição e ω_η a frequência NC de momento, no qual satisfazem: $\omega_c \neq \omega_\theta$ e $\omega_c \neq \omega_\eta$, ou seja, não há “estados de ressonância” no sistema (ω_c não pode “oscilar” com o mesmo valor de ω_θ e ω_η). Além disso, o espectro é assimétrico (as energias da partícula e antipartícula são diferentes), depende linearmente de E_m (uma energia gerada pela interação do MMA com o campo magnético B), pode ser finitamente ou infinitamente degenerado, aumenta em função de n e m_j para $m_j > 0$ ou em função de apenas n para $m_j < 0$ (no caso da antipartícula temos pequenas exceções

ou “anomalias”, ou seja, $\Delta E_n < 0$), onde as energias da partícula são sempre maiores que as da antipartícula, a função do MMA é aumentar (diminuir) as energias da partícula (antipartícula), as energias da partícula podem aumentar ou diminuir em função de B enquanto as da antipartícula podem aumentar, diminuir ou até serem “nulas”, a função de θ e η é aumentar as energias e o espectro ainda permanece quantizado mesmo para $B = 0$. Comparando o espectro com a literatura, notamos que na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$) obtemos o espectro do EHQ relativístico com e sem o MMA, para o caso massivo ($m_0 \neq 0$) e não-massivo ($m_0 = 0$). Já para $\theta = E_m = m_0 = 0$, obtemos o espectro “relativístico” do EHQ para o grafeno NC ($\eta \neq 0$) e usual ($\eta = 0$). Portanto, o nosso espectro relativístico generaliza vários casos particulares da literatura. Com respeito à densidade de probabilidade, notamos que ela pode ser nula ou não-nula na origem: para $m_j = 1/2$ temos um valor não-nulo e para $m_j = 3/2$ um valor nulo. Além disso, ela diminui com n e m_j crescente, aumenta com B crescente e pode aumentar ou diminuir com θ e η crescente. Já no limite não-relativístico, obtemos o Hamiltoniano de Schrödinger NC que depende de dois Hamiltonianos: um tipo-OHQNC e o de Zeeman NC (este depende de dois MDMs: o orbital e anômalo). Similar ao caso relativístico, o espectro não-relativístico só admite energias positivas, depende linearmente de E_m (cujas energias aumentam), possui uma degenerescência finita ou infinita, aumenta em função de n e m_l , não admite “estados de ressonância” e permanece quantizado mesmo para $B = 0$. Porém, diferentemente do caso relativístico, o espectro não-relativístico não admite um estado fundamental independente de θ , η e ω_c . Além disso, o nosso espectro não-relativístico também generaliza vários casos particulares da literatura.

- Segundo Cenário: Após fazer um mapeamento entre a equação diferencial deste cenário com a do primeiro (ambas são bem similares), obtemos o espectro relativístico no qual depende da energia magnética topológica ou energia topológica E_α (surge devido ao acoplamento entre o campo magnético e o spin da CC), do número quântico magnético topológico $L = L(\alpha) = m_j - \frac{su\alpha}{2}$, sendo α o parâmetro topológico ou de curvatura da CC, e do parâmetro rotacional β (depende do spin da CC). Em particular, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), obtemos exatamente o espectro no espaço-tempo de Minkowski. Porém, aqui o espectro não é uma função linear da energia magnética E_m e sua degenerescência é quebrada devido à α . Quanto aos valores de L , notamos que para $L > 0$ ($m_j > 0$) o espectro depende tanto de α quanto de β , onde tais parâmetros tem a função de aumentar (diminuir) as energias da partícula (antipartícula). Já para $L < 0$ ($m_j < 0$), o espectro não depende nem de α e nem de β (é como se o OHQNC “vivesse no espaço-tempo de Minkowski”). Além disso, as energias aumentam em função de n e m_j , onde

as energias da partícula são sempre maiores que as da antipartícula, a função do MMA é aumentar tanto as energias da partícula quanto as da antipartícula (diferentemente do primeiro cenário) e as energias da partícula (antipartícula) aumentam (diminuem) em função de B . Então, comparando os gráficos de E vs. B dos dois cenários (com MMA), notamos que as energias são maiores para o segundo cenário. Com respeito à densidade de probabilidade, notamos que ela é sempre nula na origem independentemente dos valores de m_j . Além disso, ela aumenta com B crescente e α decrescente (aumento da curvatura), e diminui com n , m_j e β crescente. Então, comparando as densidades de probabilidade dos dois cenários em função de n , m_j e B , notamos que as densidades são maiores para o primeiro cenário. Já no limite não-relativístico, obtemos um espectro não-relativístico também para uma partícula com spin-1/2 (“partícula de Pauli”). Ou seja, neste caso não é possível converter o número quântico topológico L em m_l devido à presença de α . Em particular, na ausência da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), obtemos exatamente o espectro no espaço Euclidiano. Então, similar ao caso relativístico, o espectro não-relativístico só admite energias positivas, tem sua degenerescência quebrada, aumenta em função de n , m_j , B , α e β e seus valores são maiores na presença do MMA. Porém, diferentemente do caso relativístico, o espectro não-relativístico depende linearmente das energias E_m e E_α .

- Terceiro Cenário: Após fazer o mesmo procedimento do segundo cenário, ou seja, um mapeamento entre as equações diferenciais de ambos os cenários, obtemos o espectro relativístico no qual depende da energia rotacional E_ω (é uma função linear da velocidade angular ω), do número quântico magnético topológico não-inercial $\bar{L} = \bar{L}(\alpha) = bm_j - \frac{su\alpha}{2}$, sendo $b = 1 + \beta\omega$ o parâmetro não-inercial (surge devido ao acoplamento entre o spin da CC e a velocidade angular), da massa topológica não-inercial M_0 (surge devido ao acoplamento entre o spin do férmion e a velocidade angular), da energia magnética não-inercial $\bar{E}_m = bE_m$ e da energia magnética topológica não-inercial $\bar{E}_\alpha = bE_\alpha$. Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$), obtemos exatamente o espectro no espaço-tempo da CC girante. No entanto, aqui o espectro ainda depende de α e β mesmo para $\bar{L} < 0$ ($m_j < 0$), onde α tem a função de aumentar as energias da partícula e antipartícula enquanto β tem a função de aumentar (diminuir) as energias da partícula (antipartícula). Então, comparando os gráficos de E vs. α do segundo e terceiro cenário, notamos que as energias da partícula (antipartícula) são maiores para o segundo (terceiro) cenário. Já para os gráficos de E vs. β , notamos que as energias da partícula (antipartícula) são maiores para o terceiro (segundo) cenário. Além disso, as energias aumentam em função de n e m_j (no caso da antipartícula temos pequenas exceções ou “anomalias”, ou seja, $\Delta E_n < 0$), onde as energias da partícula são sempre maiores que as da antipartícula, a

função do MMA é aumentar (diminuir) as energias da partícula (antipartícula), as energias da partícula aumentam em função de B enquanto as da antipartícula podem aumentar, diminuir ou até serem “nulas” e a função de ω é diminuir (aumentar) as energias da partícula (antipartícula). Então, comparando os gráficos de E vs. B dos três cenários (com MMA), notamos que as energias da partícula (antipartícula) são maiores para o segundo (primeiro) cenário. Com respeito à densidade de probabilidade, notamos que ela também é sempre nula na origem independentemente dos valores de m_j . Além disso, ela aumenta com B crescente e α decrescente, e diminui com n , m_j (há uma “anomalia” para $m_j = 3/2$) e β crescente. Então, comparando as densidades de probabilidade dos três cenários em função de n , m_j e B , notamos que as densidades são maiores para o primeiro cenário. Agora, comparando as densidades de probabilidade dos dois últimos cenários em função de α e β , notamos que para α as densidades são maiores para o terceiro cenário enquanto para β são para o segundo. Por outro lado, a densidade de probabilidade diminui em função de ω , onde seus valores tendem a se afastar cada vez mais da origem (um efeito da força centrífuga). Já no limite não-relativístico, obtemos um espectro não-relativístico também para uma partícula de spin-1/2, onde tal espectro possui algumas semelhanças com o caso relativístico, ou seja, só admite energias positivas, tem sua degenerescência quebrada, aumenta em função de n , m_j e B , onde seus valores são maiores na presença do MMA e diminui em função de ω . Porém, diferentemente do caso relativístico, o espectro não-relativístico depende linearmente das energias \bar{E}_m e \bar{E}_α . Em particular, na ausência do referencial girante ($\omega = 0$), obtemos exatamente o espectro no espaço-tempo da CC girante. Por último mas não menos importante, na ausência do espaço de fase NC ($\theta = \eta = 0$), do MMA ($E_m = 0$) e da CC girante ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), obtemos o espectro do EHQ não-relativístico em um referencial girante (um caso particular da literatura).

Como perspectivas para futuros trabalhos baseados nesta pesquisa, podemos propor os seguintes tópicos:

- calcular as propriedades termodinâmicas dos dois primeiros cenários;
- trabalhar em outro espaço-tempo curvo, tal como o espaço-tempo de Gödel e tipo-Gödel (já existe tal espaço-tempo na presença de uma CC estática e sem efeitos não-inerciais);
- incluir termos na EDNC que violam a simetria de Lorentz;
- trabalhar em outro cenário tal como o cenário de comprimento mínimo (é um tipo de princípio da incerteza de Heisenberg generalizado);
- incluir o potencial do OD.

REFERÊNCIAS

- [1] GREINER, W. *Relativistic quantum mechanics*. Berlin: Springer, 2000. v. 2.
- [2] GREINER, W.; MÜLLER, B.; RAFELSKI, J. *Quantum electrodynamics of strong fields: with an introduction into modern relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Mcgraw-Hill College, 1964.
- [4] PERKINS, D. H. *Introduction to high energy physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- [5] MARTIN, B. R.; SHAW, G. *Particle physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- [6] GRANDY, W. T. *Relativistic quantum mechanics of leptons and fields*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1990. v. 41.
- [7] GHOSE, P. Relativistic quantum mechanics of spin-0 and spin-1 bosons. *Found. Phys.*, Springer, v. 26, p. 1441–1455, 1996.
- [8] COESTER, F.; POLYZOU, W. N. Relativistic quantum mechanics of particles with direct interactions. *Phys. Rev. D*, APS, v. 26, p. 1348, 1982.
- [9] HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. Relativistic quantum mechanics of supersymmetric particles. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 143, p. 127–159, 1982.
- [10] PYYKKÖ, P. Relativistic quantum chemistry. Elsevier, v. 11, p. 353–409, 1978.
- [11] DYALL, K. G.; JR, K. F. *Introduction to relativistic quantum chemistry*. [S.l.]: Oxford University Press, 2007.
- [12] LIU, W. Ideas of relativistic quantum chemistry. *Mol. Phys.*, v. 108, p. 1679–1706, 2010.
- [13] VISSCHER, L. The dirac equation in quantum chemistry: Strategies to overcome the current computational problems. *J. Comput. Chem.*, v. 23, p. 759–766, 2002.
- [14] STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics: with applications in condensed matter and atomic physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.
- [15] GRANT, I. P. *Relativistic quantum theory of atoms and molecules: theory and computation*. [S.l.]: Springer, 2007.
- [16] MOHN, P. *Magnetism in the solid state: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 134.
- [17] LAMATA, L. et al. Relativistic quantum mechanics with trapped ions. *New J. Phys.*, v. 13, p. 095003, 2011.
- [18] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. London A*, v. 117, p. 610–624, 1928.

- [19] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. part ii. *Proc. R. Soc. London A*, v. 118, p. 351–361, 1928.
- [20] DIRAC, P. A. M. A theory of electrons and protons. *Proc. R. Soc. London A*, v. 126, p. 360–365, 1930.
- [21] DIRAC, P. A. M. On the annihilation of electrons and protons. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 26, p. 361–375, 1930.
- [22] DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. R. Soc. London A*, v. 133, p. 60–72, 1931.
- [23] GERRITSMAN, R. et al. Quantum simulation of the dirac equation. *Nature*, v. 463, p. 68–71, 2010.
- [24] THALLER, B. *The Dirac equation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] LAMATA, L. et al. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 253005, 2007.
- [26] XU, J.; SHAO, S.; TANG, H. Numerical methods for nonlinear dirac equation. *J. Comput. Phys.*, v. 245, p. 131–149, 2013.
- [27] D'ARIANO, G. M.; PERINOTTI, P. Derivation of the dirac equation from principles of information processing. *Phys. Rev. A*, v. 90, p. 062106, 2014.
- [28] HADDAD, L.; CARR, L. The nonlinear dirac equation in bose-einstein condensates: Foundation and symmetries. *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, v. 238, p. 1413–1421, 2009.
- [29] NOVOSELOV, K. S. et al. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature*, v. 438, p. 197, 2005.
- [30] GEIM, A. K.; NOVOSELOV, K. S. The rise of graphene. v. 6, p. 183, 2007.
- [31] NETO, A. C. et al. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, v. 81, p. 109, 2009.
- [32] KATSNELSON, M. I. Graphene: carbon in two dimensions. *Mater. Today*, v. 10, p. 20, 2007.
- [33] NOVOSELOV, K. S. et al. Room-temperature quantum hall effect in graphene. *science*, v. 315, p. 1379–1379, 2007.
- [34] WEHLING, T.; BLACK-SCHAFFER, A. M.; BALATSKY, A. V. Dirac materials. *Adv. Phys.*, v. 63, p. 1, 2014.
- [35] SHEN, S.-Q.; SHAN, W.-Y.; LU, H.-Z. Topological insulator and the dirac equation. v. 1, p. 33, 2011.
- [36] YOUNG, S. M.; KANE, C. L. Dirac semimetals in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 115, p. 126803, 2015.
- [37] POLITANO, A. et al. 3d dirac plasmons in the type-ii dirac semimetal pte 2. *Phys. Rev. Lett.*, v. 121, p. 086804, 2018.

- [38] BURKOV, A. Topological semimetals. *Nat. Mater.*, v. 15, p. 1145–1148, 2016.
- [39] ZHANG, R.-X.; HSU, Y.-T.; SARMA, S. D. Higher-order topological dirac superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 102, p. 094503, 2020.
- [40] ZYUZIN, A. A.; SIMON, P. Disorder-induced exceptional points and nodal lines in dirac superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 99, p. 165145, 2019.
- [41] GONZALEZ, J.; GUINEA, F.; VOZMEDIANO, M. A. The electronic spectrum of fullerenes from the dirac equation. *Nucl. Phys. B.*, v. 406, p. 771, 1993.
- [42] GONZÁLEZ, J.; GUINEA, F.; VOZMEDIANO, M. A. H. Continuum approximation to fullerene molecules. *Phys. Rev. Lett.*, v. 69, p. 172, 1992.
- [43] HUERTAS-HERNANDO, D.; GUINEA, F.; BRATAAS, A. Spin-orbit coupling in curved graphene, fullerenes, nanotubes, and nanotube caps. *Phys. Rev. B*, v. 74, p. 155426, 2006.
- [44] PIETRO, P. D. et al. Observation of dirac plasmons in a topological insulator. *Nat. Nanotechnol.*, v. 8, p. 556, 2013.
- [45] HANSSON, T.; SPORRE, M.; LEINAAS, J. Anyons from dirac fermions. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 6, p. 45, 1991.
- [46] MANUEL, C.; TARRACH, R. Contact interactions and dirac anyons. *Phys. Lett. B*, v. 301, p. 72, 1993.
- [47] FRANSSON, J.; BLACK-SCHAFFER, A. M.; BALATSKY, A. V. Magnon dirac materials. *Phys. Rev. B*, v. 94, p. 075401, 2016.
- [48] LUPI, S.; MOLLE, A. Emerging dirac materials for thz plasmonics. *Appl. Mater. Today*, v. 20, p. 100732, 2020.
- [49] MENG, Z. et al. Quantum spin liquid emerging in two-dimensional correlated dirac fermions. *Nature*, v. 464, p. 847–851, 2010.
- [50] HU, S. et al. Dirac spin liquid on the spin-1/2 triangular heisenberg antiferromagnet. *Phys. Rev. Lett.*, v. 123, p. 207203, 2019.
- [51] RAN, Y. et al. Spontaneous spin ordering of a dirac spin liquid in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 047205, 2009.
- [52] MACDONALD, A. H.; VOSKO, S. A relativistic density functional formalism. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, v. 12, p. 2977, 1979.
- [53] ANDERSON, C. D. The Positive Electron. *Phys. Rev.*, v. 43, p. 491, 1933.
- [54] HALL, E. H. On a new action of the magnet on electric currents. *Am. J. Math.*, v. 2, p. 287, 1879.
- [55] KLITZING, K. von; DORDA, G.; PEPPER, M. New method for high accuracy determination of the fine structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, v. 45, p. 494, 1980.

- [56] KLITZING, K. von. The quantized Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, v. 58, p. 519, 1986.
- [57] KLITZING, K. von et al. 40 years of the quantum hall effect. *Nat. Rev. Phys.*, v. 2, p. 397–401, 2020.
- [58] LAUGHLIN, R. B. Quantized Hall conductivity in two-dimensions. *Phys. Rev. B*, v. 23, p. 5632, 1981.
- [59] EZAWA, Z. F. *Quantum Hall effects: Recent theoretical and experimental developments*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2013.
- [60] KANE, C. L.; MELE, E. J. Quantum Spin Hall Effect in Graphene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 226801, 2005.
- [61] ZHANG, Y. et al. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *Nature*, v. 438, p. 201, 2005.
- [62] JIANG, Z. et al. Quantum hall effect in graphene. *Solid State Commun.*, v. 143, p. 14–19, 2007.
- [63] EZAWA, M. Intrinsic zeeman effect in graphene. *J. Phys. Soc. Japan*, v. 76, p. 094701, 2007.
- [64] PERES, N.; GUINEA, F.; NETO, A. C. Electronic properties of disordered two-dimensional carbon. *Phys. Rev. B*, v. 73, p. 125411, 2006.
- [65] BERNEVIG, B. A.; HUGHES, T. L.; ZHANG, S.-C. Quantum spin hall effect and topological phase transition in hgte quantum wells. *Science*, v. 314, p. 1757, 2006.
- [66] KATO, Y. K. et al. Observation of the spin hall effect in semiconductors. *Science*, v. 306, p. 1910, 2004.
- [67] BEELER, M. C. et al. The spin hall effect in a quantum gas. *Nature*, v. 498, p. 201–204, 2013.
- [68] SHINDOU, R.; NAGAOSA, N. Orbital ferromagnetism and anomalous hall effect in antiferromagnets on the distorted fcc lattice. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 116801, 2001.
- [69] KIMATA, M. et al. Magnetic and magnetic inverse spin hall effects in a non-collinear antiferromagnet. *Nature*, v. 565, p. 627–630, 2019.
- [70] KANE, C.; MUKHOPADHYAY, R.; LUBENSKY, T. Fractional quantum hall effect in an array of quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 036401, 2002.
- [71] XU, Y. et al. Observation of topological surface state quantum hall effect in an intrinsic three-dimensional topological insulator. *Nat. Phys.*, v. 10, p. 956–963, 2014.
- [72] KUMAR, N. e. a. Planar hall effect in the weyl semimetal gdptbi. *Phys. Rev. B*, v. 98, p. 041103, 2018.
- [73] ZHENG, Y.; ANDO, T. Hall conductivity of a two-dimensional graphite system. *Physical Review B*, v. 65, p. 245420, 2002.
- [74] HALDANE, F. D. M. Model for a quantum hall effect without landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Phys. Rev. Lett.*, v. 61, p. 2015, 1988.

- [75] IMRY, Y. The quantised hall effect and other macroscopic quantum phenomena. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, v. 15, p. L221, 1982.
- [76] ISHIKAWA, K.; MATSUYAMA, T. A microscopic theory of the quantum hall effect. *Nucl. Phys. B*, v. 280, p. 523–548, 1987.
- [77] CAGE, M. E. e. a. *The quantum Hall effect*. [S.l.]: Springer, 2003.
- [78] POPOVIC, R. S. *Hall effect devices*. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- [79] CHIEN, C. *The Hall effect and its applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [80] LENZ, J. E. A review of magnetic sensors. *Proceedings of the IEEE*, v. 78, p. 973–989, 1990.
- [81] LENZ, J.; EDELSTEIN, S. Magnetic sensors and their applications. *IEEE Sens. J.*, v. 6, p. 631–649, 2006.
- [82] JUNGWIRTH, T.; WUNDERLICH, J.; OLEJNÍK, K. Spin hall effect devices. *Nat. Mater.*, v. 11, p. 382–390, 2012.
- [83] RAMSDEN, E. *Hall-effect sensors: theory and application*. [S.l.]: Elsevier, 2011.
- [84] WUNDERLICH, J. et al. Spin hall effect transistor. *Science*, v. 330, p. 1801–1804, 2010.
- [85] SANDHU, A. et al. 50 nm hall sensors for room temperature scanning hall probe microscopy. *Jpn. J. Appl. Phys.*, v. 43, p. 777, 2004.
- [86] JECKELMANN, B.; JEANNERET, B. The quantum hall effect as an electrical resistance standard. *Rep. Prog. Phys.*, v. 64, p. 1603, 2001.
- [87] TAYLOR, B.; WITT, T. New international electrical reference standards based on the josephson and quantum hall effects. *Metrologia*, v. 26, p. 47, 1989.
- [88] POIRIER, W.; SCHOPFER, F. Resistance metrology based on the quantum hall effect. *Eur. Phys. J.*, v. 172, p. 207–245, 2009.
- [89] GUSYNIN, V. P.; SHARAPOV, S. G. Unconventional integer quantum Hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 146801, 2005.
- [90] GUSYNIN, V.; SHARAPOV, S. Transport of dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities. *Phys. Rev. B*, v. 73, p. 245411, 2006.
- [91] THAKURATHI, M.; BURKOV, A. A. Theory of the fractional quantum hall effect in weyl semimetals. *Phys. Rev. B*, v. 101, p. 235168, 2020.
- [92] MOORE, G.; READ, N. Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nucl. Phys. B*, v. 360, p. 362–396, 1991.
- [93] GOLDMAN, N. et al. Non-abelian optical lattices: Anomalous quantum hall effect and dirac fermions. *Phys. Rev Lett.*, v. 103, p. 035301, 2009.
- [94] HE, K.; WANG, Y.; XUE, Q.-K. Topological materials: quantum anomalous hall system. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, v. 9, p. 329–344, 2018.

- [95] BAHARI, B. et al. Photonic quantum hall effect and multiplexed light sources of large orbital angular momenta. *Nat. Phys.*, v. 17, p. 700, 2021.
- [96] MITTAL, S. et al. Photonic anomalous quantum Hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 123, p. 043201, 2019.
- [97] TANAKA, T. et al. Intrinsic spin hall effect and orbital hall effect in 4 d and 5 d transition metals. *Phys. Rev. B*, v. 77, p. 165117, 2008.
- [98] KIM, J. S. et al. Nonlinear hall effect and multichannel conduction in $\text{LaTiO}_3/\text{SrTiO}_3$ superlattices. *Phys. Rev. B*, v. 82, p. 201407, 2010.
- [99] SODEMANN, I.; FU, L. Quantum nonlinear hall effect induced by berry curvature dipole in time-reversal invariant materials. *Phys. Rev. Lett.*, v. 115, p. 216806, 2015.
- [100] NANDY, S.; SODEMANN, I. Symmetry and quantum kinetics of the nonlinear hall effect. *Phys. Rev. B*, v. 100, p. 195117, 2019.
- [101] MA, Q. et al. Observation of the nonlinear hall effect under time-reversal-symmetric conditions. *Nature*, v. 565, p. 337–342, 2019.
- [102] KANG, K. et al. Nonlinear anomalous hall effect in few-layer WTe_2 . *Nat. Mater.*, v. 18, p. 324–328, 2019.
- [103] KUMAR, D. et al. Room-temperature nonlinear hall effect and wireless radiofrequency rectification in weyl semimetal TaIrTe_4 . *Nat. Nanotechnol.*, v. 16, p. 421–425, 2021.
- [104] DU, Z.; LU, H.-Z.; XIE, X. Nonlinear hall effects. *Nat. Rev. Phys.*, v. 3, p. 744–752, 2021.
- [105] SCHAKEL, A. M. J. Relativistic quantum Hall effect. *Phys. Rev. D*, v. 43, p. 1428, 1991.
- [106] BENEVENTANO, C. G.; SANTANGELO, E. M. The Finite-temperature relativistic Landau problem and the relativistic quantum Hall effect. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 39, p. 7457, 2006.
- [107] BENEVENTANO, C. G. et al. Planar qed at finite temperature and density: Hall conductivity, berry's phases and minimal conductivity of graphene. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 42, p. 275401, 2009.
- [108] MIRANSKY, V. A.; SHOVKOVY, I. A. Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and dirac semimetals. *Phys. Rep.*, v. 576, p. 1, 2015.
- [109] ISHIKAWA, K. Axial anomaly in three dimensions and planar fermions. *Phys. Rev. D*, v. 31, p. 1432, 1985.
- [110] BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. Mesoscopic superposition states in relativistic landau levels. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, p. 123602, 2007.
- [111] YOSHIOKA, D. *The quantum Hall effect*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 133.

- [112] BHUIYAN, A.; MARSIGLIO, F. Landau levels, edge states, and gauge choice in 2d quantum dots. *Am. J. Phys.*, v. 88, p. 986–1005, 2020.
- [113] GOERBIG, M. O. Quantum hall effects. *arXiv preprint: 0909.1998*, 2009.
- [114] FROHLICH, J.; STUDER, U. M. $U(1) \times SU(2)$ gauge invariance of nonrelativistic quantum mechanics, and generalized Hall effects. *Commun. Math. Phys.*, v. 148, p. 553, 1992.
- [115] TONG, D. Lectures on the quantum hall effect. *arXiv preprint: 1606.06687*, 2016.
- [116] MENG, S. Integer quantum hall effect. *Proseminar in Theoretical Physics, Departement Physik ETH Zurich*, 2018. Disponível em: <https://ethz.ch/en.html>. Acesso em: 06 de Jun. de 2023.
- [117] TRAN, D. T.; COOPER, N. R.; GOLDMAN, N. Quantized rabi oscillations and circular dichroism in quantum hall systems. *Phys. Rev. A*, v. 97, p. 061602, 2018.
- [118] SHVETSOV, O. O. et al. Nonlinear hall effect in three-dimensional weyl and dirac semimetals. *JETP Letters*, v. 109, p. 715–721, 2019.
- [119] SCHUMANN, T. e. a. Observation of the quantum hall effect in confined films of the three-dimensional dirac semimetal cd_3as_2 . *Phys. Rev. Lett.*, v. 120, p. 016801, 2018.
- [120] BURKOV, A. Giant planar hall effect in topological metals. *Phys. Rev. B*, v. 96, p. 041110, 2017.
- [121] LI, J. et al. Photoinduced anomalous hall and nonlinear hall effect in borophene. *Solid State Commun.*, v. 322, p. 114092, 2020.
- [122] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 71, p. 38, 1947.
- [123] SNYDER, H. S. The electromagnetic field in quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 72, p. 68, 1947.
- [124] ADDAZI, A. et al. Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era—a review. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 125, p. 103948, 2022.
- [125] MIGNEMI, S. Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic snyder model. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 025021, 2011.
- [126] SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rep.*, v. 378, p. 207, 2003.
- [127] NICOLINI, P. Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 24, p. 1229, 2009.
- [128] MOFFAT, J. W. Noncommutative quantum gravity. *Phys. Lett. B*, v. 491, p. 345, 2000.
- [129] MOFFAT, J. W. Perturbative noncommutative quantum gravity. *Phys. Lett. B*, v. 493, p. 142, 2000.
- [130] SZABO, R. J. Quantum Gravity, Field Theory and Signatures of Noncommutative Spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 42, p. 1, 2010.

- [131] MAJID, S. Meaning of noncommutative geometry and the Planck scale quantum group. *Lect. Notes Phys.*, v. 541, p. 227, 2000.
- [132] HO, P.-M.; KAO, H.-C. Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 151602, 2002.
- [133] BERTOLAMI, O. et al. Noncommutative gravitational quantum well. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 025010, 2005.
- [134] DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 73, p. 977, 2001.
- [135] GOMIS, J.; MEHEN, T. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys. B*, v. 591, p. 265, 2000.
- [136] SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.*, v. 1999, p. 32, 1999.
- [137] ARDALAN F., A. H.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative geometry from strings and branes. *J. High Energy Phys.*, v. 1999, p. 16, 1999.
- [138] BLUMENHAGEN, R. A Course on Noncommutative Geometry in String Theory. *Fortsch. Phys.*, v. 62, p. 709, 2014.
- [139] CARROLL, S. M. et al. Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 141601, 2001.
- [140] GARCIA-COMPEAN, H.; OBREGON, O.; RAMIREZ, C. Noncommutative quantum cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 161301, 2002.
- [141] BASTOS, C. et al. Phase-Space Noncommutative Quantum Cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 023516, 2008.
- [142] NICOLINI, P.; SMAILAGIC, A.; SPALLUCCI, E. Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole. *Phys. Lett. B*, v. 632, p. 547, 2006.
- [143] MODESTO, L.; NICOLINI, P. Charged rotating noncommutative black holes. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 104035, 2010.
- [144] BEHR, W. et al. The $Z \rightarrow \gamma\gamma, gg$ decays in the noncommutative standard model. *Eur. Phys. J. C*, v. 29, p. 441, 2003.
- [145] CALMET, X. et al. The Standard model on noncommutative space-time. *Eur. Phys. J. C*, v. 23, p. 363, 2002.
- [146] MELIC, B. et al. The Standard model on non-commutative space-time: Electroweak currents and Higgs sector. *Eur. Phys. J. C*, v. 42, p. 483, 2005.
- [147] CARLSON, C. E.; CARONE, C. D.; LEBED, R. F. Bounding noncommutative QCD. *Phys. Lett. B*, v. 518, p. 201, 2001.
- [148] HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative qed on r_4 . *Phys. Lett. B*, v. 478, p. 394, 2000.

- [149] CHAICHIAN, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 2716, 2001.
- [150] RIAD, I. F.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative QED and anomalous dipole moments. *J. High Energy Phys.*, v. 08, p. 045, 2000.
- [151] HUANG, W.-H.; HUANG, K.-W. Thermodynamics on noncommutative geometry in coherent state formalism. *Phys. Lett. B*, v. 670, p. 416, 2009.
- [152] ACATRINEI, C. Path integral formulation of noncommutative quantum mechanics. *J. High Energy Phys.*, v. 09, p. 007, 2001.
- [153] GIRI, P. R.; ROY, P. The non-commutative oscillator, symmetry and the landau problem. *Eur. Phys. J. C*, v. 57, p. 835–839, 2008.
- [154] KIJANKA, A.; KOSIŃSKI, P. Noncommutative isotropic harmonic oscillator. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 127702, 2004.
- [155] BERTOLAMI, O.; LEAL, P. Aspects of Phase-Space Noncommutative Quantum Mechanics. *Phys. Lett. B*, v. 750, p. 6, 2015.
- [156] BANERJEE, R.; ROY, B. D.; SAMANTA, S. Remarks on the noncommutative gravitational quantum well. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 045015, 2006.
- [157] NASCIMENTO, J. P.; AGUIAR, V.; GUEDES, I. Entropy and Information of a harmonic oscillator in a time-varying electric field in 2D and 3D noncommutative spaces. *Physica A*, v. 477, p. 65, 2017.
- [158] BASTOS, C. et al. Noncommutative Graphene. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 28, p. 1350064, 2013.
- [159] SANTOS, V.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. Thermodynamical properties of graphene in noncommutative phase-space. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 349, p. 402, 2014.
- [160] KHORDAD, R.; SEDEHI, H. R. Magnetic susceptibility of graphene in non-commutative phase-space: Extensive and non-extensive entropy. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 134, p. 9, 2019.
- [161] LI, K.; DULAT, S. The Aharonov-Bohm effect in noncommutative quantum mechanics. *Eur. Phys. J. C*, v. 46, p. 825, 2006.
- [162] KUPRIYANOV, V. G. A hydrogen atom on curved noncommutative space. *J. Phys. A*, v. 46, p. 245303, 2013.
- [163] ADORNO, T. C. et al. Dirac Equation in Noncommutative Space for Hydrogen Atom. *Phys. Lett. B*, v. 682, p. 235, 2009.
- [164] BERTOLAMI, O.; QUEIROZ, R. Phase-Space Noncommutativity and the Dirac Equation. *Phys. Lett. A*, v. 375, p. 4116, 2011.
- [165] MOHADESI, M.; MIRZA, B. The Klein-Gordon and the Dirac oscillators in a noncommutative space. *Commun. Theor. Phys.*, v. 42, p. 664, 2004.

- [166] CAI, S. et al. Dirac oscillator in noncommutative phase space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 49, p. 1695, 2010.
- [167] DULAT, S.; LI, K. Quantum hall effect in noncommutative quantum mechanics. *Eur. Phys. J. C*, v. 60, n. 1, p. 163–168, 2009.
- [168] DELDUC, F. et al. Magnetic fields in noncommutative quantum mechanics. v. 103, p. 012020, 2008.
- [169] GANGOPADHYAY, S.; SAHA, A.; HALDER, A. On the landau system in noncommutative phase-space. *Phys. Lett. A*, v. 379, p. 2956–2961, 2015.
- [170] GEIGER, K. et al. Magnetic moment interactions in the e^-e^+ system. *Z. Phys. A - Atomic Nuclei*, v. 329, p. 77, 1988.
- [171] SCHWINGER, J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, v. 73, p. 416, 1948.
- [172] SALAMIN, Y. I. On the dirac equation with anomalous magnetic moment term and a plane electromagnetic field. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 26, p. 6067, 1993.
- [173] SILENKO, A. Y. Quantum-mechanical description of the electromagnetic interaction of relativistic particles with electric and magnetic dipole moments. *Russ. Phys. J.*, v. 48, p. 788–792, 2005.
- [174] XU, K.; CHAO, J.; HUANG, M. Effect of the anomalous magnetic moment of quarks on magnetized QCD matter and meson spectra. *Phys. Rev. D*, v. 103, p. 076015, 2021.
- [175] BLOM, A. Exact solution of the zeeman effect in single-electron systems. *Phys. Scr.*, v. 2005, p. 90, 2005.
- [176] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall), 2005.
- [177] JEGERLEHNER, F.; NYFFELER, A. The muon $g-2$. *Phys. Rep.*, v. 477, p. 1, 2009.
- [178] HANNEKE, D.; FOGWELL, S.; GABRIELSE, G. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 120801, 2008.
- [179] AOYAMA, T. et al. Tenth-order qed contribution to the electron g_2 and an improved value of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 111807, 2012.
- [180] JR, R. S. V. D.; SCHWINBERG, P. B.; DEHMELT, H. G. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Phys. Rev. Lett.*, v. 59, p. 26, 1987.
- [181] CHARPAK, G. et al. Measurement of the anomalous magnetic moment of the muon. *Phys. Rev. Lett.*, v. 6, p. 128, 1961.
- [182] AOYAMA, T. et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model. *Phys. Rep.*, 2020.
- [183] FENG, J. L.; MATCHEV, K. T. Supersymmetry and the anomalous magnetic moment of the muon. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 3480, 2001.

- [184] ABI, B. et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, p. 141801, 2021.
- [185] KINOSHITA, T.; LINDQUIST, W. Eighth-order anomalous magnetic moment of the electron. *Phys. Rev. Lett.*, v. 47, p. 1573, 1981.
- [186] ABDALLAH, J.; COLLABORATION, D. et al. Study of tau-pair production in photon-photon collisions at lep and limits on the anomalous electromagnetic moments of the tau lepton. *arXiv preprint hep-ex/0406010*, 2004.
- [187] COLLABORATION, D. Study of tau-pair production in photon-photon collisions at lep and limits on the anomalous electromagnetic moments of the tau lepton. *Eur. Phys. J. C*, v. 35, p. 159, 2004.
- [188] EIDELMAN, S.; PASSERA, M. Theory of the τ lepton anomalous magnetic moment. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 22, p. 159, 2007.
- [189] LIN, Y.-C. Prediction of the anomalous magnetic moment of the nucleon from the nucleon anomaly. *Phys. Lett. B*, v. 354, p. 470, 1995.
- [190] DISCIACCA, J.; GABRIELSE, G. Direct measurement of the proton magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, p. 153001, 2012.
- [191] CHANG, L.; LIU, Y.-X.; ROBERTS, C. D. Dressed-quark anomalous magnetic moments. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 072001, 2011.
- [192] AOYAMA, T. et al. Tenth-order qed contribution to the electron $g-2$ and an improved value of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 111807, 2012.
- [193] CZARNECKI, A.; MARCIANO, W. J. Muon anomalous magnetic moment: A harbinger for “new physics”. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 013014, 2001.
- [194] ALEKHIN, S. e. a. A facility to search for hidden particles at the cern sps: the ship physics case. *Rep. Prog. Phys.*, v. 79, p. 124201, 2016.
- [195] ATHRON, P. e. a. New physics explanations of a_μ in light of the final muon $g-2$ measurement. *J. High Energy Phys.*, v. 2021, p. 1–115, 2021.
- [196] KESHAVARZI, A. e. a. Muon $g-2$ and $\delta\alpha$ connection. *Phys. Rev. D*, v. 102, p. 033002, 2020.
- [197] LINDNER, M.; PLATSCHER, M.; QUEIROZ, F. S. A call for new physics: the muon anomalous magnetic moment and lepton flavor violation. *Phys. Rep.*, v. 731, p. 1–82, 2018.
- [198] QUEIROZ, F. S.; SHEPHERD, W. New physics contributions to the muon anomalous magnetic moment: a numerical code. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 095024, 2014.
- [199] CRIVELLIN, A.; HOFERICHTER, M. Consequences of chirally enhanced explanations of $(g-2)_\mu$ for $h \rightarrow \mu\mu$ and $Z \rightarrow \mu\mu$. *JHEP*, v. 07, p. 135, 2021. [Erratum: *JHEP* 10, 030 (2022)].
- [200] CAPDEVILLA, R. et al. No-lose theorem for discovering the new physics of $(g-2)_\mu$ at muon colliders. *Phys. Rev. D*, v. 105, p. 015028, 2022.

- [201] NOMURA, T.; OKADA, H. Explanations for anomalies of muon anomalous magnetic dipole moment, $b \rightarrow s \mu \mu^-$, and radiative neutrino masses in a leptoquark model. *Phys. Rev. D*, v. 104, p. 035042, 2021.
- [202] MOROI, T. Muon anomalous magnetic dipole moment in the minimal supersymmetric standard model. *Phys. Rev. D*, v. 53, p. 6565, 1996.
- [203] STADNIK, Y.; ROBERTS, B.; FLAMBAUM, V. Tests of c p t and lorentz symmetry from muon anomalous magnetic dipole moment. *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 045035, 2014.
- [204] BARGER, V. et al. Dipole moment dark matter at the lhc. *Phys. Lett. B*, v. 717, p. 219, 2012.
- [205] MASSÓ, E.; MOHANTY, S.; RAO, S. Dipolar dark matter. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 036009, 2009.
- [206] HEO, J. H. Minimal dirac fermionic dark matter with nonzero magnetic dipole moment. *Phys. Lett. B*, v. 693, p. 255, 2010.
- [207] BANKS, T.; FORTIN, J.-F.; THOMAS, S. Direct detection of dark matter electromagnetic dipole moments. *arXiv preprint:1007.5515*, 2010.
- [208] SIGURDSON, K. et al. Dark-matter electric and magnetic dipole moments. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 083501, 2004.
- [209] BLUM, T. et al. Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment from lattice qcd. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, p. 012001, 2015.
- [210] BLUM, T. et al. Calculation of the hadronic vacuum polarization disconnected contribution to the muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, p. 232002, 2016.
- [211] AHARONOV, Y.; CASHER, A. Topological quantum effects for neutral particles. *Phys. Rev. Lett.*, v. 53, p. 319, 1984.
- [212] MIRZA, B.; ZAREI, M. Non-commutative quantum mechanics and the aharonov-casher effect. *Eur. Phys. J. C*, v. 32, p. 583, 2004.
- [213] RIBEIRO, L. et al. Landau analog levels for dipoles in non-commutative space and phase space. *Eur. Phys. J. C*, Springer, v. 56, p. 597, 2008.
- [214] BRODERICK, A.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields. *Astrophys. J*, v. 537, p. 351, 2000.
- [215] LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.*, v. 442, p. 109, 2007.
- [216] SUH, I.-S.; MATHEWS, G. Cold ideal equation of state for strongly magnetized neutron star matter: Effects on muon production and pion condensation. *Astrophys. J.*, v. 546, p. 1126, 2001.
- [217] FELIPE, R. G. et al. Magnetized strange quark matter and magnetized strange quark stars. *Phys. Rev. C*, v. 77, p. 015807, 2008.

- [218] DEXHEIMER, V.; NEGREIROS, R.; SCHRAMM, S. Hybrid stars in a strong magnetic field. *Eur. Phys. J. A*, v. 48, p. 1, 2012.
- [219] PASSOS, E. et al. Noncommutative anandan quantum phase. *Phys. Rev. A*, v. 76, p. 012113, 2007.
- [220] MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The dirac oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 22, p. L817, 1989.
- [221] FRANCO-VILLAFANE, J.-A. et al. First experimental realization of the dirac oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 111, p. 170405, 2013.
- [222] ROMERO, R. Martinez-y; NÚÑEZ-YÉPEZ, H.; SALAS-BRITO, A. Relativistic quantum mechanics of a dirac oscillator. *Eur. J. Phys*, v. 16, p. 135, 1995.
- [223] BENITEZ, J. et al. Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 1643–1645, 1990.
- [224] OLIVEIRA, R.; MALUF, R.; ALMEIDA, C. Bound-state solutions of the dirac oscillator in an aharonov-bohm-coulomb system. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 400, p. 1–8, 2019.
- [225] SAGNAC, M. G. The demonstration of the luminiferous aether by an interferometer in uniform rotation. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, v. 157, p. 708, 1913.
- [226] SAGNAC, M. G. On the proof of the reality of the luminiferous aether by the experiment with a rotating interferometer. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, v. 157, p. 1410, 1913.
- [227] POST, E. J. Sagnac effect. *Rev. Mod. Phys.*, v. 39, p. 475, 1967.
- [228] ANANDAN, J. Sagnac effect in relativistic and nonrelativistic physics. *Phys. Rev. D*, v. 24, p. 338, 1981.
- [229] BARNETT, S. J. Magnetization by rotation. *Phys. Rev.*, v. 6, p. 239, 1915.
- [230] MATOS, C. D.; TAJMAR, M. Gravitomagnetic barnett effect. *arXiv preprint gr-qc/0012091*, 2000.
- [231] ARABGOL, M.; SLEATOR, T. Observation of the nuclear barnett effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 122, p. 177202, 2019.
- [232] CHUDO, H. et al. Observation of barnett fields in solids by nuclear magnetic resonance. *Appl. Phys. Express*, v. 7, p. 063004, 2014.
- [233] MATSUO, M.; SAITOH, E.; MAEKAWA, S. Spin-mechatronics. *J. Phys. Soc. Japan*, v. 86, p. 011011, 2017.
- [234] BUTTS, D.; ROKHSAR, D. Predicted signatures of rotating bose-einstein condensates. *Nature*, v. 397, p. 327, 1999.
- [235] COOPER, N. R.; WILKIN, N. K.; GUNN, J. Quantum phases of vortices in rotating bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 120405, 2001.
- [236] SCHWEIKHARD, V. et al. Rapidly rotating bose-einstein condensates in and near the lowest landau level. *Phys. Rev. Lett.*, v. 92, p. 040404, 2004.

- [237] COOPER, N. R. Rapidly rotating atomic gases. *Adv. Phys.*, v. 57, p. 539, 2008.
- [238] CHEN, P.-K. et al. Rotating atomic quantum gases with light-induced azimuthal gauge potentials and the observation of the hess-fairbank effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 121, p. 250401, 2018.
- [239] MATSUO, M. et al. Spin-dependent inertial force and spin current in accelerating systems. *Phys. Rev. B*, v. 84, p. 104410, 2011.
- [240] MATSUO, M. et al. Effects of mechanical rotation on spin currents. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 076601, 2011.
- [241] MATSUO, M. et al. Spin current generation due to mechanical rotation in the presence of impurity scattering. *Appl. Phys. Lett.*, v. 98, p. 242501, 2011.
- [242] KOBAYASHI, D. et al. Spin current generation using a surface acoustic wave generated via spin-rotation coupling. *Phys. Rev. Lett.*, v. 119, p. 077202, 2017.
- [243] SHEN, J.-Q.; HE, S.-L. Geometric phases of electrons due to spin-rotation coupling in rotating C_{60} molecules. *Phys. Rev. B*, v. 68, p. 195421, 2003.
- [244] SHEN, J.-Q.; HE, S.; ZHUANG, F. Aharonov-carmi effect and energy shift of valence electrons in rotating C_{60} molecules. *Eur. Phys. J. D*, v. 33, p. 35, 2005.
- [245] FONSECA, I. C.; BAKKE, K. Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 131, p. 67, 2016.
- [246] PEREIRA, L. F. C.; CUNHA, M. M.; SILVA, E. O. 1D Quantum ring: A Toy Model Describing Noninertial Effects on Electronic States, Persistent Current and Magnetization. *Few-Body Syst.*, v. 63, p. 58, 2022.
- [247] MERLIN, R. Rotational anomalies of mesoscopic rings. *Phys. Lett. A*, v. 181, p. 421–423, 1993.
- [248] VIGNALE, G.; MASHHOON, B. Persistent current in a rotating mesoscopic ring. *Phys. Lett. A*, v. 197, p. 444–448, 1995.
- [249] OLIVEIRA, A. B.; BAKKE, K. Some aspects of an induced electric dipole moment in rotating and non-rotating frames. *R. Soc. Open Sci.*, v. 4, p. 170541, 2017.
- [250] CEDERBAUM, L. S. Polaritonic states of matter in a rotating cavity. *J. Phys. Chem. Lett.*, v. 12, p. 6056–6061, 2021.
- [251] TATE, J. et al. Precise determination of the cooper-pair mass. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 845, 1989.
- [252] VERHEIJEN, A. et al. Measurement of the london moment in two high-temperature superconductors. *Nature*, v. 345, p. 418–419, 1990.
- [253] TAJMAR, M.; MATOS, C. J. de. Gravitomagnetic field of a rotating superconductor and of a rotating superfluid. *Phys. C*, v. 385, p. 551–554, 2003.
- [254] TAJMAR, M. et al. Experimental detection of the gravitomagnetic london moment. *arXiv preprint gr-qc/0603033*, 2006.

- [255] MATOS, C. J. de; TAJMAR, M. Gravitomagnetic london moment and the graviton mass inside a superconductor. *Phys. C*, v. 432, p. 167–172, 2005.
- [256] JOHNSON, B. Inertial forces and the hall effect. *Am. J. Phys.*, v. 68, p. 649, 2000.
- [257] MATSUO, M. et al. Spin-dependent inertial force and spin current in accelerating systems. *Phys. Rev. B*, v. 84, p. 104410, 2011.
- [258] FILGUEIRAS, C.; BRANDAO, J.; MORAES, F. Tuning the hall conductivity with rotation. *Europhys. Lett.*, v. 110, p. 27003, 2015.
- [259] BRANDÃO, J. E. et al. Inertial-hall effect: the influence of rotation on the hall conductivity. *Results Phys.*, v. 5, p. 55, 2015.
- [260] BRANDÃO, J. E. Efeitos geométricos, inerciais e topológicos na condutividade hall. *Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa*, p. 80, 2017.
- [261] FISCHER, U. R.; SCHOPOHL, N. Hall state quantization in a rotating frame. *Europhys. Lett.*, v. 54, p. 502, 2001.
- [262] WERNER, S. A.; STAUDENMANN, J. L.; COLELLA, R. Effect of Earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Phys. Rev. Lett.*, v. 42, p. 1103, 1979.
- [263] MASHHOON, B. Neutron interferometry in a rotating frame of reference. *Phys. Rev. Lett.*, v. 61, p. 2639, 1988.
- [264] BONSE, U.; WROBLEWSKI, T. Measurement of Neutron Quantum Interference in Noninertial Frames. *Phys. Rev. Lett.*, v. 51, p. 1401, 1983.
- [265] SAKURAI, J. J. Comments on Quantum Mechanical Interference Due to the Earth's Rotation. *Phys. Rev. D*, v. 21, p. 2993, 1980.
- [266] GULSHANI, P.; ROWE, D. Quantum mechanics in rotating frames. i. the impossibility of rigid flow. *Canadian Journal of Physics*, v. 56, p. 468–479, 1978.
- [267] ANANDAN, J.; SUZUKI, J. Quantum mechanics in a rotating frame. *Relativity in rotating frames: Fundam. Theor. Phys.*, p. 361–370, 2004.
- [268] CHRISTIANSEN, H.; SCHAPOSNIK, F. Noncommutative quantum mechanics and rotating frames. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 086005, 2002.
- [269] CUI, S.-M.; XU, H.-H. Berry's phase in rotating systems. *Phys. Rev. A*, v. 44, p. 3343, 1991.
- [270] DVORNIKOV, M. Neutrino interaction with matter in a noninertial frame. *J. High Energy Phys.*, v. 10, p. 053, 2014.
- [271] DVORNIKOV, M. Neutrino interaction with background matter in a non-inertial frame. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 30, p. 1530017, 2015.
- [272] LAMBIASE, G. Neutrino oscillations in non-inertial frames and the violation of the equivalence principle. Neutrino mixing induced by the equivalence principle violation. *Eur. Phys. J. C*, v. 19, p. 553, 2001.

- [273] CASTRO, L. B. Noninertial effects on the quantum dynamics of scalar bosons. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, p. 61, 2016.
- [274] WU, S.-M.; ZENG, H.-S.; CAO, H.-M. Quantum coherence and distribution of n-partite bosonic fields in noninertial frame. *Class. Quantum Gravity*, v. 38, p. 185007, 2021.
- [275] SANTOS, L.; JR, C. B. Rotational effects on the casimir energy in the space-time with one extra compactified dimension. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 33, p. 1850122, 2018.
- [276] BECATTINI, F.; PICCININI, F. The ideal relativistic spinning gas: Polarization and spectra. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 323, p. 2452–2473, 2008.
- [277] BECATTINI, F.; TINTI, L. The ideal relativistic rotating gas as a perfect fluid with spin. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 325, p. 1566–1594, 2010.
- [278] CHERNODUB, M. N. Inhomogeneous confining-deconfining phases in rotating plasmas. *Phys. Rev. D*, v. 103, p. 054027, 2021.
- [279] GUVENDI, A. Effects of rotating frame on a vector boson oscillator. *Sakarya Univ. J. Sci.*, v. 25, p. 834–40, 2021.
- [280] SANTOS, L. C. N. et al. Some remarks on scalar particles under the influence of noninertial effects in a spacetime with a screw dislocation. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 138, p. 174, 2023.
- [281] BAKKE, K.; BELICH, H. On the effects of rotation and violation of the Lorentz symmetry on the scalar field. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 35, p. 2050023, 2020.
- [282] IYER, B. R. Dirac field theory in rotating coordinates. *Phys. Rev. D*, v. 26, p. 1900, 1982.
- [283] HEHL, F. W.; NI, W.-T. Inertial effects of a Dirac particle. *Phys. Rev. D*, v. 42, p. 2045, 1990.
- [284] STRANGE, P.; RYDER, L. H. The dirac oscillator in a rotating frame of reference. *Phys. Lett. A*, v. 380, p. 3465, 2016.
- [285] EBIHARA, S.; FUKUSHIMA, K.; MAMEDA, K. Boundary effects and gapped dispersion in rotating fermionic matter. *Phys. Lett. B*, v. 764, p. 94, 2017.
- [286] CHERNODUB, M. N.; GONGYO, S. Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics. *J. High Energy Phys.*, v. 1, p. 136, 2017.
- [287] YAMAMOTO, A.; HIRONO, Y. Lattice QCD in rotating frames. *Phys. Rev. Lett.*, v. 111, p. 081601, 2013.
- [288] YAMAMOTO, A. Overview of external electromagnetism and rotation in lattice QCD. *Eur. Phys. J. A*, v. 57, p. 211, 2021.
- [289] RING, P. Relativistic mean field theory in finite nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 37, p. 193–263, 1996.
- [290] KOEPF, W.; RING, P. A relativistic description of rotating nuclei: The yrast line of Ne-20. *Nucl. Phys. A*, v. 493, p. 61, 1989.

- [291] KOEPF, W.; RING, P. A relativistic theory of superdeformations in rapidly rotating nuclei. *Nucl. Phys. A*, v. 511, p. 279–300, 1990.
- [292] KÖNIG, J.; RING, P. Identical bands in superdeformed nuclei: A relativistic description. *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, p. 3079, 1993.
- [293] FUKUSHIMA, K. Extreme matter in electromagnetic fields and rotation. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 107, p. 167–199, 2019.
- [294] PAPINI, G. London moment of rotating superconductors and lense-thirring fields of general relativity. *II Nuovo Cimento B (1965-1970)*, v. 45, p. 66–68, 1966.
- [295] CABRERA, B.; GUTFREUND, H.; LITTLE, W. Relativistic mass corrections for rotating superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 25, p. 6644, 1982.
- [296] BRADY, R. Correction to the formula for the london moment of a rotating superconductor. *J. Low Temp. Phys.*, v. 49, p. 1–17, 1982.
- [297] JIANG, Y.; LIAO, J. Pairing Phase Transitions of Matter under Rotation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 117, p. 192302, 2016.
- [298] CHERNODUB, M. N.; GONGYO, S. Effects of rotation and boundaries on chiral symmetry breaking of relativistic fermions. *Phys. Rev. D*, v. 95, p. 096006, 2017.
- [299] CUNHA, M. M. et al. Spin splitting at the fermi level in carbon nanotubes in the absence of a magnetic field. *Eur. Phys. J. B*, v. 88, p. 1, 2015.
- [300] LIMA, J. R. et al. Effects of rotation in the energy spectrum of c 60. *Eur. Phys. J. D*, v. 68, p. 1–7, 2014.
- [301] LIMA, J. R.; MORAES, F. The combined effect of inertial and electromagnetic fields in a fullerene molecule. *Eur. Phys. J. B*, v. 88, p. 1, 2015.
- [302] GARCIA, G. Q. et al. The geometric theory of defects description for c 60 fullerenes in a rotating frame. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 132, p. 1–9, 2017.
- [303] DVORNIKOV, M. Galvano-rotational effect induced by electroweak interactions in pulsars. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, v. 2015, p. 037, 2015.
- [304] HUANG, Z.; SITU, H. Quantum coherence behaviors of fermionic system in non-inertial frame. *Quantum Inf. Process.*, v. 17, p. 1–18, 2018.
- [305] CHEN, H.-L. et al. Analogy between rotation and density for dirac fermions in a magnetic field. *Phys. Rev. D*, v. 93, p. 104052, 2016.
- [306] OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Manifestations of the rotation and gravity of the earth in high-energy physics experiments. *Phys. Rev. D*, v. 94, p. 044019, 2016.
- [307] BUZZEGOLI, M. Spin polarization induced by magnetic field and the relativistic barnett effect. *Nucl. Phys. A*, p. 122674, 2023.
- [308] KIBBLE, T. W. Topology of cosmic domains and strings. *J. Phys. A*, v. 9, p. 1387, 1976.

- [309] HINDMARSH, M. . B.; KIBBLE, T. W. B. Cosmic strings. *Rep. Prog. Phys.*, v. 58, p. 477, 1995.
- [310] VILENKIN, A. Gravitational radiation from cosmic strings. *Phys. Lett. B*, v. 107, p. 47, 1981.
- [311] VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Phys. Rep.*, v. 121, p. 263, 1985.
- [312] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- [313] VACHASPATI, T.; VILENKIN, A. Formation and evolution of cosmic strings. *Phys. Rev. D*, v. 30, p. 2036, 1984.
- [314] WEIGEL, H.; QUANDT, M.; GRAHAM, N. Stable charged cosmic strings. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 101601, 2011.
- [315] PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Class. Quant. Grav.*, v. 14, p. 1129–1149, 1997.
- [316] MELLO, E. R. B. de. Effects of anomalous magnetic moment in the quantum motion of neutral particle in magnetic and electric fields produced by a linear source in a conical spacetime. *J. High Energy Phys.*, v. 2004, p. 016, 2004.
- [317] CUNHA, M. et al. Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, p. 1, 2016.
- [318] CUNHA, M. M.; DIAS, H. S.; SILVA, E. O. Dirac oscillator in a spinning cosmic string spacetime in external magnetic fields: Investigation of the energy spectrum and the connection with condensed matter physics. *Phys. Rev. D*, v. 102, p. 105020, 2020.
- [319] MEDEIROS, E. F.; MELLO, E. Bezerra de. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *Eur. Phys. J. C*, v. 72, p. 2051, 2012.
- [320] MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; CUNHA, M. S. Landau quantization in the spinning cosmic string spacetime. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 350, p. 105, 2014.
- [321] BEZERRA, V. B. Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, p. 2553–2564, 1997.
- [322] MAZUR, P. O. Spinning cosmic strings and quantization of energy. *Phys. Rev. Lett.*, p. 929, 1986.
- [323] LINET, B. Force on a charge in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, v. 33, p. 1833, 1986.
- [324] SMITH, A. Gravitational effects of an infinite straight cosmic string on classical and quantum fields: self-forces and vacuum fluctuations. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Proceedings of the Symposium of the Formation and Evolution of Cosmic Strings*. [S.l.], 1990. p. 263.
- [325] MELLO, E. B. D. et al. Self-forces on electric and magnetic linear sources in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, v. 51, p. 7140, 1995.

- [326] MUNIZ, C.; BEZERRA, V. Self-force on an electric dipole in the spacetime of a cosmic string. *Ann. Phys.*, v. 340, p. 87, 2014.
- [327] MORAES, F. et al. Topological interactions in spacetimes with thick line defects. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 043512, 2003.
- [328] KHUSNUTDINOV, N.; BEZERRA, V. Self-energy and self-force in the space-time of a thick cosmic string. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 083506, 2001.
- [329] FROLOV, V. P.; SEREBRIANY, E. Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, v. 35, p. 3779, 1987.
- [330] III, J. R. G. Gravitational lensing effects of vacuum strings-exact solutions. *Astrophys. J.*, v. 288, p. 422–427, 1985.
- [331] HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, v. 31, p. 3288, 1985.
- [332] SAZHIN, M. V. et al. Gravitational lens images generated by cosmic strings. *Open Astron.*, v. 3, 2010.
- [333] VOLLIK, D.; UNRUH, W. Gravitational lensing properties of curved cosmic strings. *Phys. Rev. D*, v. 44, p. 2388, 1991.
- [334] III, J. R. G. Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings: Exact solutions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 66, p. 1126, 1991.
- [335] HARARI, D.; POLYCHRONAKOS, A. P. Gravitational time delay due to a spinning string. *Phys. Rev. D*, v. 38, p. 3320, 1988.
- [336] DESER, S.; JACKIW, R.; HOOFT, G. Three-dimensional einstein gravity: dynamics of flat space. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 152, p. 220–235, 1984.
- [337] DURRER, R. Topological defects in cosmology. *New Astron. Rev.*, v. 43, p. 111, 1999.
- [338] BEREZINSKY, V.; BLASI, P.; VILENKIN, A. Signatures of topological defects. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 103515, 1998.
- [339] TUROK, N. Global texture as the origin of cosmic structure. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, p. 2625, 1989.
- [340] BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, p. 341–343, 1989.
- [341] BENNETT, D. P.; RHIE, S. H. Cosmological evolution of global monopoles and the origin of large-scale structure. *Phys. Rev. Lett.*, v. 65, p. 1709, 1990.
- [342] MAVROMATOS, N. E.; SARKAR, S. Magnetic monopoles from global monopoles in the presence of a kalb-ramond field. *Phys. Rev. D*, v. 95, p. 104025, 2017.
- [343] ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. xxv. searches for cosmic strings and other topological defects. *Astronomy & Astrophysics*, v. 571, p. A25, 2014.
- [344] SIEMENS, X.; MANDIC, V.; CREIGHTON, J. Gravitational-wave stochastic background from cosmic strings. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 111101, 2007.

- [345] CUI, Y. et al. Probing the pre-bbn universe with gravitational waves from cosmic strings. *J. High Energy Phys.*, v. 2019, p. 1, 2019.
- [346] ABBOTT, B. P. et al. Constraints on cosmic strings using data from the first advanced ligo observing run. *Phys. Rev. D*, v. 97, p. 102002, 2018.
- [347] ABBOTT, R. et al. Constraints on cosmic strings using data from the third advanced ligo-virgo observing run. *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, p. 241102, 2021.
- [348] KHAKHALEVA-LI, Z.; HOGAN, C. J. Will lisa detect harmonic gravitational waves from galactic cosmic string loops? *arXiv preprint:2006.00438*, 2020.
- [349] AUCLAIR, P. et al. Probing the gravitational wave background from cosmic strings with lisa. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, v. 2020, p. 034, 2020.
- [350] BLANCO-PILLADO, J. J.; OLUM, K. D.; SIEMENS, X. New limits on cosmic strings from gravitational wave observation. *Phys. Lett. B*, v. 778, p. 392, 2018.
- [351] BARTOLO, N. et al. Probing anisotropies of the stochastic gravitational wave background with lisa. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, v. 2022, p. 009, 2022.
- [352] BUCHMULLER, W.; DOMCKE, V.; SCHMITZ, K. From nanograv to ligo with metastable cosmic strings. *Phys. Lett. B*, v. 811, p. 135914, 2020.
- [353] BLASI, S.; BRDAR, V.; SCHMITZ, K. Has nanograv found first evidence for cosmic strings? *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, p. 041305, 2021.
- [354] ELLIS, J.; LEWICKI, M. Cosmic string interpretation of nanograv pulsar timing data. *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, p. 041304, 2021.
- [355] CHANDRASEKHAR, S.; RANGANATH, G. The structure and energetics of defects in liquid crystals. *Adv. Phys.*, v. 35, p. 507, 1986.
- [356] MURAYAMA, M. et al. Atomic-level observation of disclination dipoles in mechanically milled, nanocrystalline fe. *Science*, v. 295, p. 2433, 2002.
- [357] KLÉMAN, M. Defects in liquid crystals. *Rep. Prog. Phys.*, v. 52, p. 555, 1989.
- [358] KLÉMAN, M.; FRIEDEL, J. Disclinations, dislocations, and continuous defects: A reappraisal. *Rev. Mod. Phys.*, v. 80, p. 61, 2008.
- [359] MURAYAMA, M. et al. Atomic-level observation of disclination dipoles in mechanically milled, nanocrystalline fe. *Science*, v. 295, p. 2433–2435, 2002.
- [360] LIU, Y. et al. Bulk-disclination correspondence in topological crystalline insulators. *Nature*, v. 589, p. 381–385, 2021.
- [361] KATANAEV, M.; VOLOVICH, I. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 216, p. 1, 1992.
- [362] MARQUES, G. de A. et al. Landau levels in the presence of topological defects. *J. Phys. A*, v. 34, p. 5945, 2001.
- [363] OLIVEIRA, J. et al. Evolution of landau levels in graphene-based topological insulators in the presence of wedge disclinations. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 383, p. 610, 2017.

- [364] FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Phys. Lett. A*, v. 195, p. 90, 1994.
- [365] ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. Physical regularization for the spin-1/2 aharonov-bohm problem in conical space. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 041701, 2012.
- [366] CARVALHO, J.; FURTADO, C.; MORAES, F. Dirac oscillator interacting with a topological defect. *Phys. Rev. A*, v. 84, p. 032109, 2011.
- [367] BOWICK, M. J. et al. The cosmological kibble mechanism in the laboratory: string formation in liquid crystals. *Science*, v. 263, p. 943, 1994.
- [368] RUUTU, V. et al. Vortex formation in neutron-irradiated superfluid ^3He as an analogue of cosmological defect formation. *Nature*, v. 382, p. 334, 1996.
- [369] MORAES, F. Condensed matter physics as a laboratory for gravitation and cosmology. *Braz. J. Phys.*, v. 30, p. 304, 2000.
- [370] ZUREK, W. H. Cosmological experiments in condensed matter systems. *Phys. Rep.*, v. 276, p. 177, 1996.
- [371] HENDRY, P. et al. Generation of defects in superfluid ^4He as an analogue of the formation of cosmic strings. *Nature*, v. 368, p. 315, 1994.
- [372] CHUANG, I. et al. Cosmology in the laboratory: Defect dynamics in liquid crystals. *Science*, v. 251, p. 1336–1342, 1991.
- [373] GONZALEZ, J.; HERRERO, J. Graphene wormholes: a condensed matter illustration of dirac fermions in curved space. *Nucl. Phys. B*, v. 825, p. 426, 2010.
- [374] GARCIA, G. et al. Graphene wormhole trapped by external magnetic field. *Nucl. Phys. B*, v. 950, p. 114853, 2020.
- [375] CORTIJO, A.; VOZMEDIANO, M. A. Electronic properties of curved graphene sheets. *Europhys. Lett.*, v. 77, p. 47002, 2007.
- [376] CORTIJO, A.; VOZMEDIANO, M. A. Effects of topological defects and local curvature on the electronic properties of planar graphene. *Nucl. Phys. B*, v. 763, p. 293–308, 2007.
- [377] SITENKO, Y. A.; VLASII, N. Electronic properties of graphene with a topological defect. *Nucl. Phys. B*, v. 787, p. 241–259, 2007.
- [378] KOLESNIKOV, D.; OSIPOV, V. The continuum gauge field-theory model for low-energy electronic states of icosahedral fullerenes. *Eur. Phys. J. B*, v. 49, p. 465–470, 2006.
- [379] ROMANOV, A. E.; ROZHKOVA, M. A.; KOLESNIKOVA, A. L. Disclinations in polycrystalline graphene and pseudo-graphenes. review. *Lett. Mater.*, v. 8, p. 384–400, 2018.
- [380] ROZHKOVA, M. et al. Disclination ensembles in graphene. *Low Temp. Phys.*, v. 44, p. 918–924, 2018.
- [381] ROZHKOVA, M. et al. Evolution of dirac cone in disclinated graphene. *Rev. Adv. Mater. Sci.*, v. 57, p. 137–142, 2018.

- [382] ROJAS, M. et al. Topological and non-inertial effects on the interband light absorption. *Phys. Lett. A*, v. 382, p. 432, 2018.
- [383] DANTAS, L.; FURTADO, C.; NETTO, A. S. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Phys. Lett. A*, v. 379, p. 11–15, 2015.
- [384] MOTA, H. F.; BAKKE, K. Noninertial effects on nonrelativistic topological quantum scattering. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 49, p. 104, 2017.
- [385] BAKKE, K.; FURTADO, C. Bound states for neutral particles in a rotating frame in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 084025, 2010.
- [386] BAKKE, K. On the influence of curvature on the landau–he–mckellar–wilens quantization induced by noninertial effects. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 26, p. 4239, 2011.
- [387] BAKKE, K.; FURTADO, C. Geometric phase for a neutral particle in rotating frames in a cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 024033, 2009.
- [388] BRANDÃO J., F. C. R. M.; MORAES, F. Inertial and topological effects on a 2d electron gas. *J. Phys. Commun.*, v. 1, p. 035004, 2017.
- [389] BAKKE, K. Rotating effects on the dirac oscillator in the cosmic string spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 45, p. 1847, 2013.
- [390] OLIVEIRA, R. R. S. Noninertial and spin effects on the 2D Dirac oscillator in the magnetic cosmic string background. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 52, p. 1, 2020.
- [391] SANTOS, L. C. N.; BARROS, C. C. Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, p. 13, 2018.
- [392] OLIVEIRA, R. R. S. Topological, noninertial and spin effects on the 2D Dirac oscillator in the presence of the Aharonov–Casher effect. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, p. 1, 2019.
- [393] OLIVEIRA, R. R. S. Topological and noninertial effects in an Aharonov–Bohm ring. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 51, p. 120, 2019.
- [394] CASTRO, L. B. Noninertial effects on the quantum dynamics of scalar bosons. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, p. 61, 2016.
- [395] VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. Rotating effects on the scalar field in the cosmic string spacetime, in the spacetime with space-like dislocation and in the spacetime with a spiral dislocation. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, p. 175, 2018.
- [396] MOTA, H.; BAKKE, K. Noninertial effects on the ground state energy of a massive scalar field in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 027702, 2014.
- [397] CUZINATTO, R. R.; MONTIGNY, M. de; POMPEIA, P. J. Non-commutativity and non-inertial effects on the Dirac oscillator in a cosmic string space–time. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 51, p. 107, 2019.
- [398] CUZINATTO, R. R.; MONTIGNY, M. de; POMPEIA, P. J. Non-commutativity and non-inertial effects on a scalar field in a cosmic string space-time: I. klein-gordon oscillator. *Class. Quantum Gravity*, v. 39, p. 075006, 2022.

- [399] BAKKE, K.; BEZERRA, V.; VITÓRIA, R. Scalar field in a uniformly rotating frame in the time-dislocation space–time. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 35, p. 2050129, 2020.
- [400] NETO, J. B. *Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Spinors*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. v. 1.
- [401] MELIĆ, B.; PASSEK-KUMERIČKI, K.; TRAMPETIĆ, J. $K \rightarrow \pi \gamma$ decays and space-time noncommutativity. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 057502, 2005.
- [402] BURIC, M. et al. Nonzero $Z \rightarrow \gamma\gamma$ decays in the renormalizable gauge sector of the noncommutative standard model. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 097701, 2007.
- [403] SCHUPP, P. et al. The Photon neutrino interaction in noncommutative gauge field theory and astrophysical bounds. *Eur. Phys. J. C*, v. 36, p. 405, 2004.
- [404] ABEL, S. A. et al. Vacuum Birefringence as a Probe of Planck Scale Noncommutativity. *J. High Energy Phys.*, v. 09, p. 074, 2006.
- [405] PIKOVSKI, I. et al. Probing Planck-scale physics with quantum optics. *Nature Phys.*, v. 8, p. 393, 2012.
- [406] CONNES, A.; DOUGLAS, M. R.; SCHWARZ, A. Noncommutative geometry and matrix theory. *J. High Energy Phys.*, v. 1998, p. 003, 1998.
- [407] AGHABABAEI, S.; HAGHIGHAT, M.; KHEIRANDISH, A. Lorentz violation in the higgs sector and the noncommutative standard model. *Phys. Rev. D*, v. 87, p. 047703, 2013.
- [408] HINCHLIFFE, I.; KERSTING, N.; MA, Y. L. Review of the phenomenology of noncommutative geometry. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 19, p. 179, 2004.
- [409] ANISIMOV, A. et al. Remarks on noncommutative phenomenology. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 085032, 2002.
- [410] DAYI, O. F.; JELLAL, A. Landau diamagnetism in noncommutative space and the nonextensive thermodynamics of Tsallis. *Phys. Lett. A*, v. 287, p. 349, 2001.
- [411] SON, D. T. Is the composite fermion a dirac particle? *Phys. Rev. X*, v. 5, p. 031027, 2015.
- [412] SCHLÜTER, P.; WIETSCHORKE, K.-H.; GREINER, W. The dirac equation in orthogonal coordinate systems. i. the local representation. *J. Phys. A*, v. 16, p. 1999, 1983.
- [413] VILLALBA, V. M.; MAGGIOLO, A. R. Energy spectrum of a 2d dirac electron in the presence of a constant magnetic field. *Eur. Phys. J. B*, v. 22, p. 31, 2001.
- [414] VILLALBA, V. M.; PINO, R. Energy spectrum of the ground state of a two-dimensional relativistic hydrogen atom in the presence of a constant magnetic field. *Mod. Phys. Lett. B*, v. 17, p. 1341, 2003.
- [415] BERCHE, B.; CHATELAIN, C.; MEDINA, E. Mesoscopic rings with spin-orbit interactions. *Eur. J. Phys.*, v. 31, p. 1267, 2010.
- [416] SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. Modern quantum mechanics, revised edition. American Association of Physics Teachers, 1995.

- [417] ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O. Remarks on the dirac oscillator in $(2+1)$ dimensions. *Europhys. Lett.*, v. 108, p. 30003, 2014.
- [418] HAGEN, C. Aharonov-bohm scattering of particles with spin. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 503, 1990.
- [419] HAGEN, C. Exact equivalence of spin-1/2 aharonov-bohm and aharonov-casher effects. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 2347, 1990.
- [420] PERES, N.; NETO, A. C.; GUINEA, F. Dirac fermion confinement in graphene. *Phys. Rev. B*, v. 73, p. 241403, 2006.
- [421] NETO, J. B. *Matemática Para Físicos com Aplicações: Tratamentos Clássico e Quântico*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. v. 2.
- [422] OLIVEIRA, M. de; SCHMIDT, A. G. Exact solutions of dirac equation on a static curved space-time. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 401, p. 21–39, 2019.
- [423] QUIMBAY, C.; STRANGE, P. Graphene physics via the dirac oscillator in $(2+1)$ dimensions. *arXiv preprint:1311.2021*, 2013.
- [424] BUENO, M.; FURTADO, C.; CARVALHO, A. de M. Landau levels in graphene layers with topological defects. *Eur. Phys. J. B*, v. 85, p. 1–5, 2012.
- [425] JENTSCHURA, U. D.; MOORE, C. Quantum electrodynamic corrections to cyclotron states in a penning trap. *Phys. Rev. D*, v. 108, p. 036004, 2023.
- [426] JELLAL, A. Measuring space deformation via graphene under constraints. *Phys. Lett. A*, v. 385, p. 126964, 2021.
- [427] OLIVEIRA, R. R. S.; FILHO, A. A. A. Thermodynamic properties of neutral dirac particles in the presence of an electromagnetic field. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 135, p. 1–10, 2020.
- [428] PACHECO, M. et al. Three-dimensional dirac oscillator in a thermal bath. *Europhys. Lett.*, v. 108, p. 10005, 2014.
- [429] ARDA, A.; TEZCAN, C.; SEVER, R. Schrödinger equation with a non-central potential: Some statistical quantities. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 131, p. 1–8, 2016.
- [430] OLIVEIRA, R. R. S.; LANDIM, R. R. Thermodynamic properties of the noncommutative quantum hall effect with anomalous magnetic moment. *arXiv preprint:2302.04371*, 2023.
- [431] SILENKO, A. Y. Comparative analysis of direct and “step-by-step” foldy-wouthuysen transformation methods. *Theor. Math. Phys.*, v. 176, p. 987–999, 2013.
- [432] WU, S.; KILLI, M.; PARAMEKANTI, A. Graphene under spatially varying external potentials: Landau levels, magnetotransport, and topological modes. *Phys. Rev. B*, v. 85, p. 195404, 2012.
- [433] NAKAMURA, M. Orbital magnetism and transport phenomena in two-dimensional dirac fermions in a weak magnetic field. *Phys. Rev. B*, v. 76, p. 113301, 2007.

- [434] DÓRA, B. et al. Rabi oscillations in landau-quantized graphene. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 036803, 2009.
- [435] ROSAS, R. et al. Energy spectrum of a confined two-dimensional particle in an external magnetic field. *Am. J. Phys.*, v. 68, p. 840, 2000.
- [436] WAKAMATSU, M. et al. The physics of helical electron beam in a uniform magnetic field as a testing ground of gauge principle. *Phys. Lett. A*, v. 384, p. 126415, 2020.
- [437] LI, C.-F.; WANG, Q. The quantum behavior of an electron in a uniform magnetic field. *Phys. B: Condens. Matter*, v. 269, p. 22–27, 1999.
- [438] LAWRIE, I. D. *A unified grand tour of theoretical physics*. [S.l.]: CRC Press, 2012.
- [439] OLIVEIRA, M. de. Mapping the dirac equation with spin and pseudospin symmetries in curved spacetime in the non-relativistic regime. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 136, p. 533, 2021.
- [440] SMOOT, G. String dynamics. *Smoot Group: Astrophysics & Cosmology*, Disponível em: <https://aether.lbl.gov/index.html>. Acesso em: 17 Ago. 2021.
- [441] ARDESHANA, B. et al. An approach to modelling and simulation of single-walled carbon nanocones for sensing applications. *AIMS Mater. Sci.*, v. 4, p. 1010–1028, 2017.
- [442] YANG, N.; ZHANG, G.; LI, B. Carbon nanocone: A promising thermal rectifier. *Appl. Phys. Lett.*, v. 93, p. 243111, 2008.
- [443] VOZMEDIANO, M. A.; KATSNELSON, M.; GUINEA, F. Gauge fields in graphene. *Phys. Rep.*, v. 496, p. 109, 2010.
- [444] FONSECA, J. M.; MOURA-MELO, W. A.; PEREIRA, A. R. Scattering of charge carriers in graphene induced by topological defects. *Phys. Lett. A*, v. 374, p. 4359, 2010.
- [445] LIMA, A. A. de; FILGUEIRAS, C. Integer quantum hall effect on an interface with disclinations. *Eur. Phys. J. B*, v. 85, p. 1, 2012.
- [446] OLIVEIRA, M. D.; SCHMIDT, A. G. Exact solution for the dirac oscillator in curved spacetime. *Phys. Scr.*, v. 95, p. 055304, 2020.
- [447] RIZZI, G.; RUGGIERO, M. L. *Relativity in rotating frames: relativistic physics in rotating reference frames*. [S.l.]: Springer, 2004.
- [448] ASKEY, R. A.; DAALHUIS, A. B. O. *Generalized hypergeometric functions and Meijer G-function*. *NIST Handbook of mathematical functions*. 2010.
- [449] MINTON, B. M. Generalized hypergeometric function of unit argument. *J. Math. Phys.*, v. 11, p. 1375–1376, 1970.
- [450] RELATIVISTIC Quantum Mechanics. *USP*, Disponível em: <https://macbeth.if.usp.br/gusev/dirac.pdf>. Acesso em: 25 Out. 2023.
- [451] USING the Hall Effect for Nano Electronics. *AZONANO*, Disponível em: <https://www.azonano.com/article.aspx?ArticleID=5177>. Acesso em: 27 Set. 2021.

APÊNDICE A – A EQUAÇÃO DE DIRAC

Em 1928, Dirac propôs uma equação de onda relativística que descreve com sucesso a dinâmica quântica (relativística) de partículas massivas de spin-1/2. No Sistema Internacional (SI), a ED na forma originalmente proposta por Dirac é escrita no espaço-tempo de Minkowski (3+1)-dimensional como (equação tipo-Schrödinger) [1-6,14]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H_D \Psi(\vec{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} H_D = H_0 = H_{\text{livre}} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2 &= c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m_0 c^2, \quad (\alpha_i p_i = \alpha^i p^i = -\alpha_i p^i), \\ &= i\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \partial_i + \beta m_0 c^2, \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \\ &= -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_0 c^2, \quad (\alpha_i \partial_i = \alpha^i \partial^i = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sendo H_D o Hamiltoniano de Dirac para uma partícula livre de massa de repouso m_0 (neste caso o Hamiltoniano de Dirac é chamado de Hamiltoniano de Dirac livre ou sem interação), os coeficientes $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3) = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e β são as matrizes de Dirac (matrizes alfa e beta), $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) = (-p_1, -p_2, -p_3)$ ou simplesmente $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} = (p_x, p_y, p_z)$ é o operador momento tridimensional (ou trivetor momento numa linguagem relativística), $c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ é a energia cinética ou termo cinético, $\beta m_0 c^2$ (ou somente $m_0 c^2$) é a energia de repouso, c é a velocidade da luz no vácuo, \hbar a constante de Planck reduzida ($\hbar = h/2\pi$) e $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T \in \mathbb{C}^4$ é o spinor de Dirac de quatro componentes, no qual é expresso por uma matriz/vetor coluna de quatro elementos, respectivamente. Para Dirac, uma equação relativística (ou um Hamiltoniano relativístico) para o elétron (por exemplo) deveria ser linear na derivada temporal e também nas derivadas espaciais, colocando assim tempo e espaço em pé de igualdade (igualdade de coordenadas espaciais e temporais como a relatividade requer). Consequentemente, isso eliminaria o problema da densidade de probabilidade negativa (não positiva definida) gerada pela EKG quando aplicada ao elétron (na verdade soube depois que a EKG não é adequada para os elétrons, mas somente para partículas de spin-0 ou sem spin).

No entanto, para a ED ser realmente consistente (fisicamente falando), ela deve reproduzir a relação energia-momento (relação de dispersão relativística), ou mesmo a EKG,

cuja expressão é dada por: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$ (a EKG é obtida simplesmente substituindo E por $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e \vec{p} por $-i\hbar \vec{\nabla}$). De fato, ela reproduz, no qual basta elevar ao quadrado o Hamiltoniano H_D ($H_D^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$) [450], onde um “preço a se pagar” por isso (ED linear no tempo e no espaço) é que as matrizes $\vec{\alpha}$ e β devem satisfazer as seguintes relações (da Álgebra de Clifford)

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I_{4 \times 4} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{A.3})$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I_{4 \times 4}, \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{tr} \alpha_i = \text{tr} \beta = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde as duas primeiras relações significam que as matrizes alfa anticomutam entre si e também com a matriz beta, a terceira relação significa que alfa e beta são matrizes unitárias, a quarta relação significa que alfa e beta são matrizes Hermitianas e a quinta relação significa que alfa e beta possuem traço nulo (soma dos elementos da diagonal principal são nulos), respectivamente.

Então, na representação de Dirac (representação padrão), as matrizes $\vec{\alpha}$ e β são escritas em termos das matrizes de spin de Pauli como segue

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1 = I_{2 \times 2}), \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} . \quad (\text{A.9})$$

No entanto, em $(2 + 1)$ -dimensões as matrizes $\vec{\alpha}$ e β são na verdade as próprias matrizes de Pauli, ou seja, $\vec{\alpha} = \vec{\sigma}$ (mas sem o σ_3) e $\beta = \sigma_3$.

Além disso, a ED permite obter uma equação de continuidade (relativística), ou seja, uma generalização relativística da equação de continuidade gerada pela ES (e tal equação expressa a conservação local da probabilidade). Para isso, primeiro devemos multiplicar a Eq. (A.1) pela esquerda por Ψ^\dagger (conjugado Hermitiano de Ψ), onde obtemos

$$i\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\hbar c\Psi^\dagger\sum_{i=1}^3\alpha_i(\partial_i\Psi) + m_0c^2\Psi^\dagger\beta\Psi. \quad (\text{A.10})$$

Agora, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (A.1), usando a relação (A.6) e depois multiplicando pela direita por Ψ , obtemos

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi = -i\hbar c\sum_{i=1}^3\alpha_i(\partial_i\Psi^\dagger)\Psi + m_0c^2\Psi^\dagger\beta\Psi, \quad (\text{A.11})$$

onde $(\frac{\partial}{\partial t})^\dagger = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\partial_i^\dagger = \partial_i$, ou seja, as derivadas também são hermitinas (porém, em MQNR as derivadas espaciais não são [176]).

Portanto, subtraindo (A.10) com (A.11), obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi &= i\hbar c\Psi^\dagger\sum_{i=1}^3\alpha_i(\partial_i\Psi) + i\hbar c\sum_{i=1}^3\alpha_i(\partial_i\Psi^\dagger)\Psi, \\ \frac{\partial(\Psi^\dagger\Psi)}{\partial t} &= c\sum_{i=1}^3\partial_i(\Psi^\dagger\alpha_i\Psi), \\ \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^3\partial_i J_i &= 0, \quad P = \Psi^\dagger\Psi, \quad J_i = c\Psi^\dagger\alpha_i\Psi, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^3\partial_i J^i &= 0, \quad (J_i = -J^i), \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}\vec{J} &= 0, \quad (\text{div}\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

que é justamente a equação de continuidade para férmions de Dirac relativísticos, onde $P = P(\vec{r}, t)$ é a densidade de probabilidade (positiva definida) e $\vec{J} = c\Psi^\dagger\vec{\alpha}\Psi = (J^1, J^2, J^3)$ é o vetor densidade de corrente de probabilidade, ou simplesmente, a corrente de probabilidade (na realidade, \vec{J} não é tecnicamente um vetor uma vez que $\vec{\alpha}$ também não é).

Por outro lado, a ED também pode ser escrita numa forma mais compacta do ponto de vista relativístico (tempo e espaço aparecem simetricamente na equação), ou seja, numa forma tensorial, quadrimensional ou manifestamente covariante (de Lorentz). Então, para termos uma formulação covariante da ED é preciso definir novas matrizes de Dirac, no qual são conhecidas como matrizes gama e definidas como $\gamma^0 \equiv \beta$ e $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ (ou $\vec{\gamma} \equiv \beta\vec{\alpha}$). Desse modo,

a Eq. (A.1) será reescrita (compactamente) como segue (por simplicidade aqui omitiremos o somatório, ou seja, usaremos a convenção de soma de Einstein ou notação de Einstein)

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\hbar c \alpha_i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \beta m_0 c^2 \Psi &= 0, \\
i\hbar \beta \frac{\partial \Psi}{\partial (ct)} + i\hbar \beta \alpha^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - m_0 c \Psi &= 0, \quad (\alpha_i = -\alpha^i), \\
i\hbar \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial (ct)} + \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \Psi - m_0 c \Psi &= 0, \\
i\hbar \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \Psi - m_0 c \Psi &= 0, \quad (x^0 = x^t \equiv ct), \\
i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - m_0 c \Psi &= 0, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \\
i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_0 c \Psi &= 0, \quad (\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma_\mu \partial^\mu),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

ou

$$\gamma^\mu p_\mu \Psi - m_0 c \Psi = 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu = \gamma_\mu p^\mu), \tag{A.14}$$

onde $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^j) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ são as matrizes gama de Dirac (γ^0 e γ^j são suas componentes temporal e espacial), no qual satisfaz uma relação de anticomutação mais geral (da Álgebra de Clifford), dada por $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_{4 \times 4}$, sendo $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ a métrica de Minkowski, $p_\mu = i\hbar \partial_\mu = (i\hbar \partial_0, i\hbar \partial_i) = (p_0, p_i) = (p_0, -\vec{p})$ é o operador momento quadrimensional (ou quadrivetor momento ou quadrimomento), $\partial_\mu = \vec{\partial}_\mu$ (a seta diz que as derivadas atuam para à direita) é o quadrivetor gradiente (ou quadrigradiente) e $x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, \vec{x})$ é o operador posição quadrimensional (quadrivetor posição ou quadriposição), respectivamente. Aqui, usamos letras Gragas ao invés de Latinas para representar as coordenadas espaço-temporais e $g^{\mu\nu}$ ao invés de $\tilde{\eta}^{ab}$ para a métrica porque a ED foi construída originalmente por meio delas. Além disso, caso tivéssemos uma métrica com uma assinatura dada por $(-, +, +, +)$, então o termo de massa da ED (A.13)-(A.14) deve ser modificado ($m_0 c \rightarrow -m_0 c$), ou seja, $\gamma^\mu p_\mu \Psi + m_0 c \Psi = 0$ é a ED para uma métrica com assinatura $(-, +, +, +)$.

Em particular, as matrizes γ^j devem satisfazer as seguintes relações

$$(\gamma^j)^2 = -I_{4 \times 4} = -\gamma^j \gamma^{j\dagger} \quad (\gamma^{j\dagger} = (\gamma^j)^{-1}), \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j, \quad \text{tr} \gamma^j = 0, \tag{A.15}$$

ou seja, γ^j é unitária, anti-Hermitiana e tem traço nulo, respectivamente. Em particular, γ^j e $\vec{\gamma}$ são escritas da seguinte forma

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.16}$$

sendo que em $(2 + 1)$ -dimensões, temos $\vec{\gamma} = \sigma^3 \vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ e $\sigma^3 = \sigma_3$. Por outro lado, ainda existe uma quinta matriz gama de Dirac, no entanto, não parece explicitamente na ED. Em particular, estamos falando de γ^5 , onde o número de índice 5 é uma relíquia da notação antiga no qual μ variava de 1 à 5 (depois foi proposto de 0 à 4). Então, γ^5 é definido por meio do produto das quatro matrizes gama da seguinte forma (na representação de Dirac)

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

e satisfaz

$$\gamma^5 = \gamma_5, \quad (\gamma^5)^2 = I_{4 \times 4}, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \text{tr}\gamma^5 = 0, \quad (\text{A.18})$$

ou seja, γ^5 é contravariante e covariante ao mesmo tempo (análogo à γ^0), é unitária, Hermitiana, anticomuta com γ^μ (as quatro matrizes gama) e tem traço nulo, respectivamente. No entanto, em $(2 + 1)$ -dimensões, temos $\gamma^5 = \sigma^1$ [63].

Além disso, introduzindo os potenciais eletromagnéticos na ED via acoplamento mínimo, temos

$$\gamma^\mu (p_\mu - qA_\mu)\Psi - m_0c\Psi = 0, \quad (\text{A.19})$$

ou

$$i\hbar\gamma^\mu D_\mu\Psi - m_0c\Psi = 0, \quad (\text{A.20})$$

onde $A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, -\vec{A})$ é o potencial quadrimensional (quadrivetor potencial ou quadripotencial eletromagnético), sendo A_0 e \vec{A} suas componentes temporal (potencial escalar) e espacial (potencial vetor) e $D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}A_\mu$ ($q = \pm e$) é a derivada covariante. Então, em virtude da assinatura da métrica, temos as seguintes relações entre os tensores contravariantes (índices superiores) e covariantes (índices inferiores)

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}), \quad (\gamma^0 = \gamma_0; \gamma^j = -\gamma_j \rightarrow \alpha^i = -\alpha_i), \quad (\text{A.21})$$

$$p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu = (p^0, \vec{p}), \quad p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (p_0, -\vec{p}), \quad (p^0 = p_0; p^i = -p_i), \quad (\text{A.22})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -\vec{x}), \quad (x^0 = x_0; x^i = -x_i), \quad (\text{A.23})$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu = (A^0, \vec{A}), \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu = (A_0, -\vec{A}), \quad (A^0 = A_0; A^i = -A_i), \quad (\text{A.24})$$

ou seja, as componentes espaciais covariantes carregam um sinal negativo. Além disso, é importante mencionar que em $(2 + 1)$ -dimensões onde $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, não basta apenas tomar a componente-3 (ou z em coordenadas cartesianas) do quadrivetor igual à zero (muitos na literatura cometem esse erro). De fato, em notação matricial isso é um erro grave (o produto

matricial não é satisfeito). Em outras palavras, pegando p_μ como exemplo (mas poderia ser x_μ ou A_μ), temos

$$p_\mu \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}. \quad (\text{A.25})$$

No entanto, escrevendo $p^\mu = (p^0, p^1, p^2)^T$, ou seja, sem a componente-3 (sistema puramente planar), aí sim o produto matricial é satisfeito em $(2+1)$ -dimensões. Consequentemente, na presente tese escrevemos p_μ como $p_\mu = (p_0, -\vec{p}) = (p_t, -p_\rho, -p_\phi)$ ao invés de $p_\mu = (p_t, -p_\rho, -p_\phi, 0)$ e A_μ como $A_\mu = (A_0, -\vec{A}) = (0, 0, -A_\phi)$ ao invés de $A_\mu = (0, 0, -A_\phi, 0)$.

Antes de finalizar este apêndice, vamos agora obter a formulação covariante da equação de continuidade. Então, multiplicando a Eq. (A.13) pela esquerda por $\Psi^\dagger \gamma^0$, obtemos

$$\Psi^\dagger \gamma^0 [i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - m_0 c] \Psi = 0. \quad (\text{A.26})$$

Agora, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (A.13), usando o fato de que $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ e $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ e depois multiplicando pela direita por $\gamma^0 \Psi$, obtemos

$$[-i\hbar (\gamma^\mu \partial_\mu \Psi)^\dagger - m_0 c \Psi^\dagger] \gamma^0 \Psi = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$[-i\hbar \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - m_0 c \Psi^\dagger \gamma^0] \Psi = 0, \quad ((\gamma^\mu \partial_\mu \Psi)^\dagger = \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger}), \quad (\text{A.28})$$

$$[i\hbar \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 + m_0 c \Psi^\dagger \gamma^0] \Psi = 0, \quad (\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0), \quad (\text{A.29})$$

$$[i\hbar \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu + m_0 c \Psi^\dagger \gamma^0] \Psi = 0, \quad (\gamma^0 \gamma^0 = 1), \quad (\text{A.30})$$

$$\bar{\Psi} [i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m_0 c] \Psi = 0, \quad (\partial_\mu = \overleftarrow{\partial}_\mu), \quad (\text{A.31})$$

onde $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ é o spinor adjunto de Dirac. Além disso, supondo que $\Psi \neq 0$, implica que $\bar{\Psi} [i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m_0 c] = 0$, ou seja, temos a equação adjunta de Dirac [1].

Portanto, somando (A.26) com (A.31), obtemos

$$\bar{\Psi} i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi} i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$\partial_\mu (c \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \quad (\text{multiplicamos tudo por } c/i\hbar), \quad (\text{A.33})$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (\text{A.34})$$

que é justamente a formulação covariante (ou tensorial) para a equação da continuidade, onde $J^\mu = c \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = c \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi = (J^0, \vec{J}) = (cP, c\Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi)$ é o quadrivetor densidade de corrente de probabilidade ou quadricorrente de probabilidade.

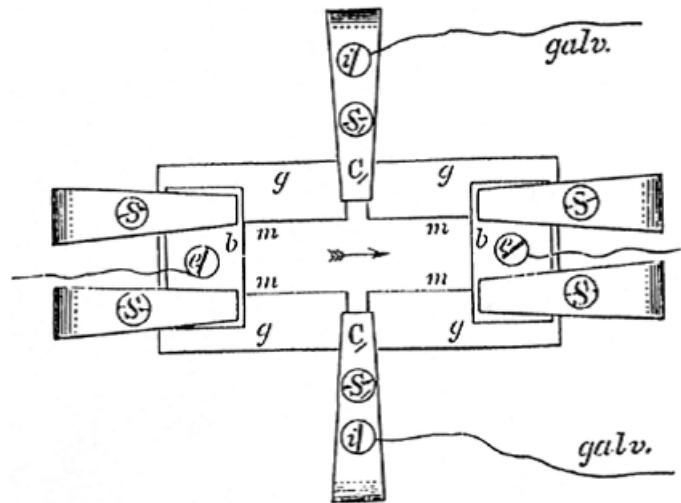
APÊNDICE B – O EFEITO HALL QUÂNTICO

Em 1879, o físico americano Edwin H. Hall descobriu um efeito eletromagnético que leva o seu nome, ou seja, o EH (ou EHC), enquanto trabalhava em sua tese de doutorado na Universidade Johns Hopkins em Baltimore, Maryland [54]. Basicamente, o EH consiste no surgimento de uma diferença de potencial (voltagem Hall) em um condutor percorrido por uma corrente elétrica e submetido a um campo magnético externo perpendicular ao condutor [54]. Em outras palavras, cargas elétricas negativas de um dada fonte de corrente contínua se acumulavam de um lado do material condutor quando o mesmo era submetido à um campo magnético uniforme e perpendicular ao material ou à corrente (ou seja, devido a força de Lorentz). Vale destacar que Hall determinou a existência de portadores de carga negativa muitos anos antes (18 anos) da descoberta dos elétrons por Joseph J. Thomson (prêmio Nobel de 1906). Portanto, o EH é a primeira prova real de que a corrente elétrica em metais se deve ao movimento dos elétrons e não dos prótons.

Na Fig. 37, é mostrado um aparato experimental (“placa ou elemento Hall”) no qual Hall descobriu o EH (em um referencial inercial), onde *gggg* representa uma placa de vidro sobre a qual uma tira de metal *mmmm* está montada, a seta (flecha) representa a corrente principal, *bb* representa os dois blocos de latão no qual a fonte é conectada, sendo que um galvanômetro é conectado nos grampos *CC* através dos parafusos *ii* para então medir a voltagem Hall (ou tensão Hall). Já na Fig. 38, é mostrado um aparato experimental mais moderno para observar o EH, onde V_L e V_H são as voltagens longitudinal e transversal (ou voltagem Hall), I é a corrente elétrica gerada pela fonte contínua e C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são os contatos para conectar a amostra na fonte e nos dois volímetros [113]. Neste aparato, uma amostra condutora retangular contém um gás de elétrons bidimensional (gás de elétrons livres para se mover em duas dimensões onde geralmente é o plano cartesiano ou o plano polar e fortemente confinado na direção- z) sujeito à um campo magnético uniforme externo $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ($B = B_z = \text{const.} > 0$). De acordo com a Fig. 38, uma corrente I é conduzida através dos contatos C_1 e C_4 , onde a voltagem longitudinal pode ser medida entre os contatos C_5 e C_6 (ou alternativamente entre C_2 e C_3) e a voltagem transversal (ou Hall) pode ser medida entre os contatos C_3 e C_5 , respectivamente.

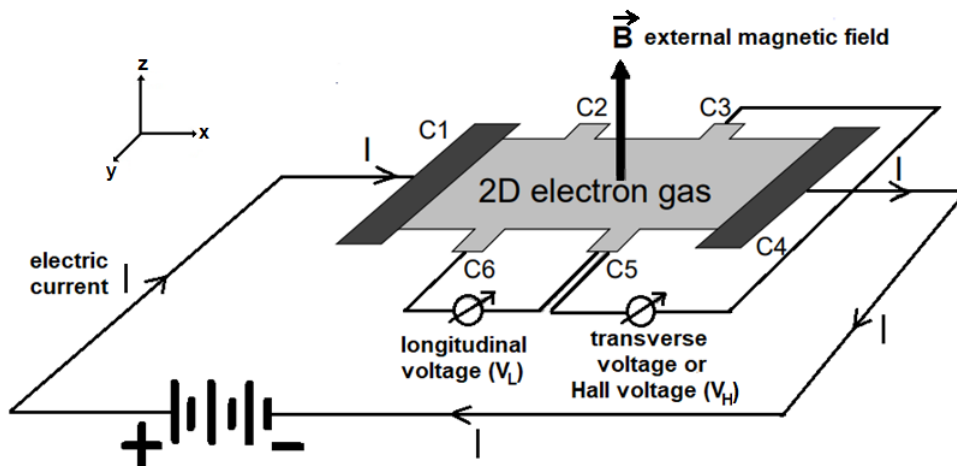
Quase um século depois, ou seja, em 1980, Klaus Von Klitzing, Gerhard Dorda e Michael Pepper publicaram um artigo sobre a versão quantizada do EH, no qual ficou conhecido como EHQ (inteiro e não-relativístico) [55-58]. Neste artigo, o objetivo central foi mostrar

Figura 37 – Aparato experimental no qual o EH foi descoberto.



Fonte: Refs. [54,78].

Figura 38 – Aparato experimental mais moderno para observar o EH.



Fonte: Ref. [113].

um novo método para medir com alta precisão a constante de estrutura fina via EHQ, no qual é uma constante de fundamental importância na QED e no modelo padrão das partículas elementares bem como na própria definição do MMA (este é escrito em termos de potências de α) [192]. Além disso, diferentemente do EH, no EHQ o gás de elétrons está submetido a fortes campos magnéticos ($B > 1.5$ T) e a baixas temperaturas ($T < 4$ K), desse modo, o espectro de energia, a condutividade elétrica e a resistividade elétrica são então grandezas físicas quantizadas (discretas). Em particular, as resistividades longitudinal (determinada por meio da voltagem longitudinal ou na direção y) e Hall (determinada por meio da voltagem Hall ou na direção x), bem como as condutividades longitudinal e Hall (inversas das resistividades), são compactamente escritas em termos de matrizes da seguinte forma (para uma amostra isotrópica)

[55, 56, 58, 86, 111, 113, 115, 116]

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sigma = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}\rho_{yx}} \begin{pmatrix} \rho_{xx} & -\rho_{yx} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_L = 0, \quad \rho_{xy} = \rho_H = \frac{R_K}{\nu}, \quad \rho_{yx} = -\rho_{xy}, \quad (\text{B.2})$$

e

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_L = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_H = \frac{\nu}{R_K}, \quad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy}, \quad (\text{B.3})$$

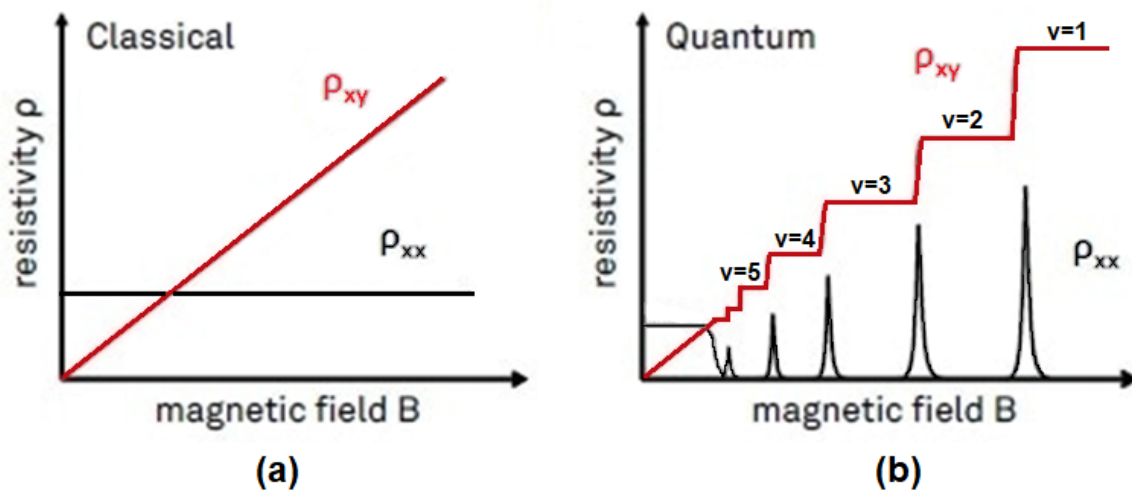
sendo ρ (ou σ) a matriz de resistividade (ou condutividade) na sua forma mais geral, cuja origem vem a seguinte relação: $\vec{J} = \vec{E}/\rho$ ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$), onde $\vec{J} = (J_x, J_y)^T$ e $\vec{E} = (E_x, E_y)^T$ são a densidade de corrente e o campo elétrico (aqui são entidades bidimensionais, logo, são pseudo-vetores), e cujas componentes ρ_{ij} (ou σ_{ij}) são tensores antissimétricos ($\rho_{xy} \neq 0$ é a resistividade Hall e $\sigma_{xy} \neq 0$ é a condutividade Hall), chamados de tensores de resistividade (ou condutividade), $R_K > 0$ é a constante de von Klitzing (quantum de resistividade), dada por $R_K = h/e^2$, onde h é a constante de Planck e e é a carga elétrica elementar e ν é um número inteiro positivo chamado de fator de preenchimento quantizado (quantized filling factor em inglês) medido com uma precisão extraordinária (uma parte em 10^9), dado por $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Além disso, em um experimento mede-se a resistência (grandeza macroscópica ou “experimental”) e não tecnicamente a resistividade (grandeza microscópica ou “teórica”). Entretanto, em 2D a resistência transversal (resistência Hall) e a resistividade transversal (resistividade Hall) são exatamente as mesmas ($R_H = \rho_H$) e não dependem das dimensões da amostra (ou seja, são invariantes de escala) [55-57, 111, 113, 116]. Vale ressaltar que a quantização da resistência Hall (devido à ν) é um fenômeno universal, ou seja, independente das propriedades particulares da amostra, como sua geometria (como já falamos), os materiais hospedeiros usados para fabricar o gás de elétrons 2D e, ainda mais importante, sua concentração ou distribuição de impurezas [113]. Desta forma, esta universalidade é a razão para a enorme precisão da quantização da resistência Hall, que é hoje – desde 1990 – utilizado como padrão de resistência: $R_{K-90} = 25812.807\Omega$

Na Fig. 39, é mostrado (plotado) o comportamento das resistividades longitudinal (ρ_{xx}) e Hall (ρ_{xy}) em função do campo magnético B (na verdade o seu módulo ou magnetude), onde a Fig. 39-(a) mostra o comportamento do EHC e a Fig. 39-(b) o comportamento do EHQ, respectivamente [115, 116, 451]. Então, no caso clássico, ρ_{xy} (linha vermelha) depende linearmente de B (representada por uma reta crescente) enquanto que ρ_{xx} (linha preta) é independente de B , ou seja, é uma constante (diferente de zero mesmo para $B = 0$). Por outro lado, no caso quântico as coisas são bem diferentes (uma consequência da quantização do espectro de energia, de fortes campos magnéticos e baixas temperaturas), onde tanto a resistividade Hall quanto a re-

sistividade longitudinal apresentam um comportamento interessante (peculiar/inusitado). Neste caso, ρ_{xy} (linha vermelha) mostra platôs (“níveis”) à medida que B aumenta, onde cada valor de ν define um dado platô (“nível”) no qual a resistividade tem um valor constante e bem definido. Em particular, a característica mais marcante (para muitos) do EHQ é o fato de que a resistividade Hall varia (aumenta) em forma de uma “escada”, ou seja, “salta de platô em platô” (ou de “degrau em degrau”) à medida que B aumenta (e são independentes dos detalhes da amostra e do valor preciso do campo magnético). Além disso, a resistividade longitudinal também surpreende, ou seja, quando ρ_{xy} fica em um dado platô (região na figura onde cada valor de ν está colocado e a resistividade é constante), a resistividade longitudinal desaparece: $\rho_{xx} = 0$ (satisfazendo assim [B.2](#)). Porém, ρ_{xx} aumenta apenas quando ρ_{xy} salta para o próximo platô (parecendo uma “função degrau”), onde ρ_{xx} apresenta picos (parecendo uma “função delta de Dirac”). Então, por que os picos da resistividade longitudinal aparecem toda vez que a resistividade Hall salta? Basicamente, nos platôs os níveis de Landau estão completamente preenchidos e não há dissipação, enquanto que no salto os níveis de Landau estão parcialmente preenchidos e isso introduz dissipação, logo, o único lugar onde ρ_{xx} é diferente de zero é entre os platôs (ou no degrau). Em particular, estes níveis de Landau (níveis de energia permitidos e quantizados) são calculados por meio da expressão: $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2) > 0$, onde $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida (ou seja, a constante de Plank h dividida por 2π), $\omega_c = eB/m_0$ é a frequência cíclotron e a diferença de energia entre dois níveis é dado por: $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_c > 0$ (ou seja, os níveis tem um espaçamento uniforme dado por $\hbar\omega_c$). Também é oportuno destacar que para campos magnéticos fracos e altas temperaturas (temperatura ambiente, por exemplo), ou então para altos valores de ν , a resistividade longitudinal torna-se uma constante diferente de zero (picos suficientemente próximos uns dos outros) e a resistividade Hall torna-se uma função linear de B , o que significa que o resultado clássico é alcançado (o EHQ se reduz ao EHC).

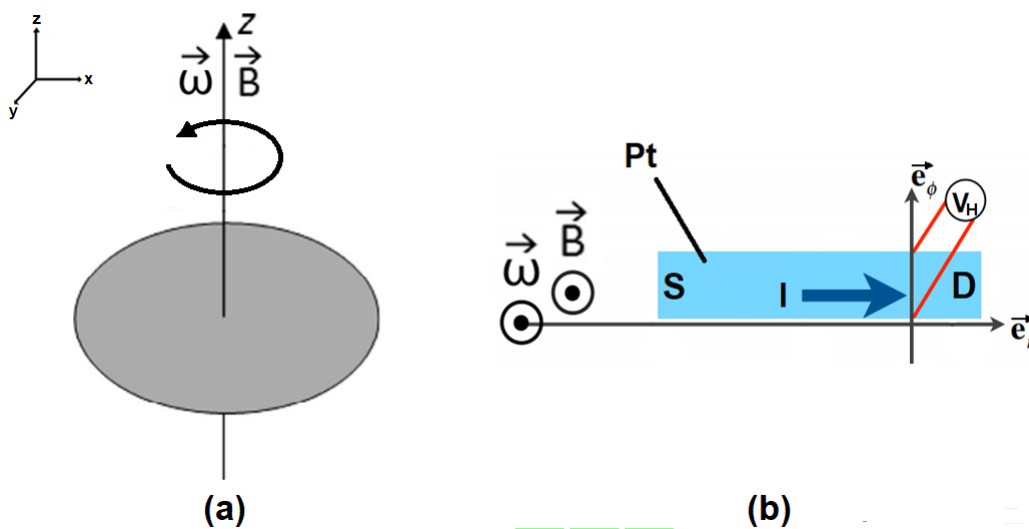
Por último, mas não menos importante, também é importante fazermos uma breve discussão sobre o EHQ não-inercial (EHQ em um referencial girante/rotativo). Na Fig. [40](#), é mostrado um aparato experimental para observar o EHQ não-inercial, onde na Fig. [40](#)(a) temos um disco plano rotativo sujeito à um campo magnético uniforme perpendicular, cujo vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ e o vetor campo magnético \vec{B} estão na direção z -positiva [\[259\]](#). Já na Fig. [40](#)(b), temos uma “visão por cima” do aparato, onde a amostra a ser usada para observar o EHQ é um filme fino de platina (Pt) fixado ao disco, I é a corrente contínua gerada pela fonte S e captada pelo dreno D , V_H é a voltagem Hall e \vec{e}_r e \vec{e}_ϕ são os vetores unitário polares, respectivamente [\[239, 256\]](#).

Figura 39 – Comportamento (gráficos) das resistividades longitudinal e Hall em função do campo magnético para os casos clássico (a) e quântico (b).



Fonte: Refs. [115,116,451].

Figura 40 – Aparato experimental para observar o EQH não-inercial.



Fonte: Refs. [239,256,259].

APÊNDICE C – PUBLICAÇÃO RELACIONADA A ESTA TESE

OLIVEIRA, R. R. S.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. The noncommutative quantum Hall effect with anomalous magnetic moment in three different relativistic scenarios. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. **55**, p. 15, 2023. (Qualis: A4 e Fator de Impacto: 2.8)

General Relativity and Gravitation (2023) 55:15
<https://doi.org/10.1007/s10714-022-03057-5>

RESEARCH



The noncommutative quantum Hall effect with anomalous magnetic moment in three different relativistic scenarios

R. R. S. Oliveira¹ · G. Alencar¹ · R. R. Landim¹

Received: 11 October 2022 / Accepted: 20 December 2022 / Published online: 19 January 2023

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2023

Abstract

In the present paper, we investigate the bound-state solutions of the noncommutative quantum Hall effect with anomalous magnetic moment in three different relativistic scenarios, namely: the Minkowski spacetime (inertial flat case), the spinning cosmic string (CS) spacetime (inertial curved case), and the spinning CS spacetime with non-inertial effects (noninertial curved case). In particular, in the first two scenarios, we have an inertial frame, while in the third, we have a rotating frame. With respect to bound-state solutions, we focus primarily on eigenfunctions (Dirac spinor and wave function) and on energy eigenvalues (Landau levels), where we use the flat and curved Dirac equation in polar coordinates to reach such solutions. However, unlike the literature, here we consider a CS with a non-null angular momentum and also the NC of the positions, and therefore, we seek a more general description for the QHE. Once the solutions are obtained, we discuss the influence of all parameters and physical quantities on relativistic energy levels. Finally, we analyze the nonrelativistic limit, and we also compared our problem with other works, where we verified that our results generalize some particular cases of the literature.

Contents

1 Introduction	2
2 The noncommutative phase space	6
3 The noncommutative Dirac equation in the Minkowski spacetime	8
3.1 Bound-state solutions: two-component Dirac spinor and relativistic Landau levels	12