



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL COSTA LEITE

**CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO EM TÉCNICA ORIENTADA A
DADOS DE DECOMPOSIÇÃO DE MODO DINÂMICO POLINOMIAL**

FORTALEZA

2023

GABRIEL COSTA LEITE

CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO EM TÉCNICA ORIENTADA A
DADOS DE DECOMPOSIÇÃO DE MODO DINÂMICO POLINOMIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Wilkley Bezerra
Correia.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L552c Leite, Gabriel Costa.
Controle preditivo não linear baseado em técnica orientada a dados de decomposição de modo dinâmico polinomial / Gabriel Costa Leite. – 2023.
132 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia.

1. Dados. 2. Data-driven. 3. Sistemas dinâmicos não lineares. 4. Decomposição de modo dinâmico polinomial. 5. Controle preditivo não linear.. I. Título.

CDD 621.3

GABRIEL COSTA LEITE

CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR BASEADO EM TÉCNICA ORIENTADA A
DADOS DE DECOMPOSIÇÃO DE MODO DINÂMICO POLINOMIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 22/11/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Eng. Alber Keyler Gondim de Almeida

À Deus, por todas suas bênçãos e realizações na minha vida, sempre me guiando a evoluir todos os dias. Pai e Mãe, a dedicação, o cuidado, a doação e o esforço de vocês me inspiram continuamente a ser um orgulho em suas vidas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, demonstro minha infinita gratidão a Deus e a todas as bênçãos que Ele proporciona a mim e a minha família todos os dias. Toda minha caminhada de vida é graças a Ele. Peço a Deus que sempre me guie segundo Sua vontade, que eu possa constantemente evoluir como Seu servo no mundo. A Ele seja dada toda honra, glória e poder.

Agradeço ao meu pai José Elizardo Silva Leite e a minha mãe Maria Valdisia Costa Leite, que são a sustentação da minha vida. Me orgulho em dizer o quão incrível é ter a honra de ser filho de vocês. Muito obrigado por todos os ensinamentos durante toda minha vida, minha jornada de vida é fruto da incessante dedicação e trabalho de vocês dois. O senhor e a senhora são minhas inspirações de honra e dignidade. A vocês eu devo tudo que eu sou hoje, e é pelo exemplo de vocês que busco todos os dias me tornar um homem melhor.

Ao meu irmão Guilherme Costa, que sempre está comigo nas minhas conquistas, me inspirando a sempre estar sendo referência e exemplo na sua vida.

Aos meus familiares, que sempre me aconselharam nas decisões acadêmicas, sempre sendo exemplos de pessoas e profissionais na minha vida. Particularmente, em memória a minha avó Aldenira Costa e minha tia Veralucia Costa, e as minhas tias Valdenira Costa e Valdelucia Costa, que sempre torceram e me abençoaram na minha caminhada.

À minha namorada, Gisele Brito, que durante todo o percurso desse trabalho me motivou, me incentivou e sempre me apoiou para que eu pudesse entregar o meu melhor. Muito obrigado por todo carinho, dedicação e amor.

Aos meus amigos, que me motivam e me impulsionam a sempre dar o meu melhor em todas minhas atividades. Em especial, sou extremamente grato a parceria com meu amigo e engenheiro mecânico João Victor Fernandes, que desde o ensino fundamental compartilha experiências acadêmicas e profissionais.

Ao meu orientador Professor Dr. Wilkley Bezerra Correia, que dedicou seu tempo a me ensinar e me guiar, fonte de inspiração profissional e acadêmica.

Ao Laboratório de Sistemas Motrizes (Lamotriz) que me acolheu durante todo o curso, lugar onde desenvolvi meus trabalhos e fiz amigos que irei levar para vida toda, em especial meu amigo João Vitor Rodrigues.

À empresa Casa dos Ventos, lugar onde tenho aprendido e desenvolvido habilidades técnicas, profissionais e pessoais. Em especial, expresso minha gratidão ao time de SAP que me acolhe e me motiva a sempre me tornar um melhor profissional.

"Cause sometimes you just feel tired, feel weak,
and when you feel weak, you feel like you
wanna just give up. But you gotta search within
you, you gotta find that inner strength and just
pull that shit out of you and get that motivation
to not give up and not be a quitter, no matter
how bad you wanna just fall flat on your face
and collapse." (Eminem, 2002, Till I Collapse.)

RESUMO

A crescente complexidade nos processos empresariais, industriais e científicos, impulsionada pelas atuais inovações tecnológicas, exige a capacidade de modelar operações, prever resultados, classificar indicadores, estimar ganhos e controlar sistemas de maneira ágil e eficiente, dada a vasta quantidade de dados gerados e coletados diariamente. Nesse cenário, os estudos, trabalhos e desenvolvimentos orientados por dados desempenham um papel fundamental na solução dos desafios tecnológicos contemporâneos. Portanto, este trabalho tem como objetivo propor avanços em técnicas *data-driven*, com foco na identificação e controle de sistemas dinâmicos não lineares complexos, sejam eles racionais ou não, a partir de uma abordagem totalmente orientada por conjuntos de dados. Conseqüentemente, sugere-se a exploração do método de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, com base em polinômios, aplicado ao Controle Preditivo Não Linear. Essa evolução teórica visa à aplicação prática em um sistema elétrico-hidráulico não linear e racional, com o propósito de identificar protótipos polinomiais que possam ser usados como modelos de previsão no controle de nível de líquidos do sistema.

Palavras-chave: dados; *data-driven*; sistemas dinâmicos não lineares; Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial; Controle Preditivo Não Linear.

ABSTRACT

The increasing complexity in business, industrial, and scientific processes, driven by current technological innovations, demands the ability to model operations, predict outcomes, categorize indicators, estimate gains, and control systems swiftly and efficiently, given the vast amount of data generated and collected daily. In this context, data-driven studies, work, and developments play a pivotal role in addressing contemporary technological challenges. Therefore, this work aims to propose advancements in data-driven techniques, focusing on the identification and control of complex nonlinear dynamic systems, whether they rational or not, based on a data-driven approach. Consequently, we suggest the exploration of the Dynamic Mode Decomposition with Polynomials method applied to Nonlinear Model Predictive Control. This theoretical evolution seeks practical application in a nonlinear and rational electric-hydraulic system, with the purpose of identifying polynomial prototypes that can be used as predictive models in liquid level control within the system.

Keywords: data; data-driven; nonlinear dynamic systems; Dynamic Mode Decomposition with Polynomials; Nonlinear Model Predictive Control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema hidráulico.	49
Figura 2 – Sistema elétrico-hidráulico.	50
Figura 3 – Geometria do tronco de cone. (a) Vista perspectiva e (b) Vista da seção frontal.	51
Figura 4 – Gráfico do ensaio do sistema com $k_o = 0 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/s$ e $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$	59
Figura 5 – Gráfico do ensaio do sistema com $k_o = 0.0043 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/s$ e $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$	60
Figura 6 – Gráfico do ensaio do sistema variando a velocidade angular com $k_o = 0 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/s$	61
Figura 7 – Gráfico do ensaio do sistema variando k_o com $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$	62
Figura 8 – Gráfico do ensaio do sistema para entrada senoidal	63
Figura 9 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.24) e o real h	64
Figura 10 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.24) e o real h	65
Figura 11 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.28) e o real h	66
Figura 12 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.28) e o real h	67
Figura 13 – Gráfico da comparação entre os modelos polinomiais S_1 ao S_{10} e o real h	70
Figura 14 – Gráfico do erro entre os modelos polinomiais S_1 ao S_{10} e o real h	71
Figura 15 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.29)	73
Figura 16 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.29)	74
Figura 17 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.29)	74
Figura 18 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.38)	75
Figura 19 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.38)	76
Figura 20 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.38)	76
Figura 21 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com todos os modelos de predição	77
Figura 22 – Gráfico do sinal de controle do sistema com todos os modelo de predição	78
Figura 23 – Gráfico do sinal de erro do sistema com todos os modelo de predição	78
Figura 24 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.29) e horizonte de controle igual a 3	80
Figura 25 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.29)	81
Figura 26 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.29)	81

Figura 27 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3	82
Figura 28 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3	83
Figura 29 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3	84
Figura 30 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.30) e o real h	92
Figura 31 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial(5.30) e o real h	93
Figura 32 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.31) e o real h	93
Figura 33 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.31) e o real h	94
Figura 34 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.32) e o real h	94
Figura 35 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.32) e o real h	95
Figura 36 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.33) e o real h	95
Figura 37 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.33) e o real h	96
Figura 38 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.34) e o real h	96
Figura 39 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.34) e o real h	97
Figura 40 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.35) e o real h	97
Figura 41 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.35) e o real h	98
Figura 42 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.36) e o real h	98
Figura 43 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.36) e o real h	99
Figura 44 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.37) e o real h	99
Figura 45 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.37) e o real h	100
Figura 46 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.30)	101
Figura 47 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.30) . . .	102
Figura 48 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.30)	102
Figura 49 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.31)	103
Figura 50 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.31) . . .	104
Figura 51 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.31)	104
Figura 52 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.32)	105

Figura 53 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.32) . . .	106
Figura 54 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.32)	106
Figura 55 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.33)	107
Figura 56 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.33) . . .	108
Figura 57 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.33)	108
Figura 58 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.34)	109
Figura 59 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.34) . . .	110
Figura 60 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.34)	110
Figura 61 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.35)	111
Figura 62 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.35) . . .	112
Figura 63 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.35)	112
Figura 64 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.36)	113
Figura 65 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.36) . . .	114
Figura 66 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.36)	114
Figura 67 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.37)	115
Figura 68 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.37) . . .	116
Figura 69 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.37)	116
Figura 70 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.30)	117
Figura 71 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.30) . . .	118
Figura 72 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.30)	118
Figura 73 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.31)	119
Figura 74 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.31) . . .	120
Figura 75 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.31)	120
Figura 76 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.32)	121

Figura 77 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.32) . . .	122
Figura 78 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.32)	122
Figura 79 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.33)	123
Figura 80 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.33) . . .	124
Figura 81 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.33)	124
Figura 82 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.34)	125
Figura 83 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.34) . . .	126
Figura 84 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.34)	126
Figura 85 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.35)	127
Figura 86 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.35) . . .	128
Figura 87 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.35)	128
Figura 88 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.36)	129
Figura 89 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.36) . . .	130
Figura 90 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.36)	130
Figura 91 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.37)	131
Figura 92 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.37) . . .	132
Figura 93 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.37)	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema	58
Tabela 2 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos S_1 ao S_{10} . .	70
Tabela 3 – Configurações do controlador	72
Tabela 4 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos Z_1 ao Z_{10} . .	79
Tabela 5 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos Z_1 ao Z_{10} com horizonte de predição igual a 3	84

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AR ²	Coeficiente de Determinação Ajustado
DMC	Dynamic Matrix Control
DMD	Dynamic Mode Decomposition
DMDc	Dynamic Mode Decomposition with Control
DMDp	Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial
EHAC	Extended Horizon Adaptive Control
EPSAC	Extended Prediction Self Adaptive Control
GPC	Generalized Predictive Control
ICC	Índice de concordância
MAC	Model Algorithmic Control
MAE	Erro Médio Absoluto
MPC	Model Predictive Control
MPHC	Model Predictive Heuristic Control
MSE	Erro Quadrático Médio
NDDPC	Nonlinear data-driven Predictive Control
NMDPC	Nonlinear Model Data Predictive Control
NMPC	Nonlinear Model Predictive Control
PFC	Predictive Functional Control
R ²	Coeficiente de Determinação
RMSE	Raiz do Erro Quadrático Médio

LISTA DE SÍMBOLOS

k	Intervalo de tempo ou de controle
t	Variável de tempo ou horizonte de predição
x	Variável de estado
u	Sinal de controle ou sinal de entrada
Δu	Variações do sinal de controle ($u_k - u_{k-1}$)
y	Variável de saída
d	Variável de perturbação ou atraso
r	Variável de referência
x_k	$[x(k)]$ Variável x no instante de tempo k
$x(i k)$	Variável x no instante i do horizonte de predição em k
\mathbb{R}^n	Conjunto real de dimensão $n \times 1$
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto real de dimensão $n \times n$
\mathcal{P}^n	Conjunto polinomial de dimensão $n \times 1$
$\mathcal{P}^{n \times n}$	Conjunto polinomial de dimensão $n \times n$
$i \times j$	Dimensão i por j
\dagger	Pseudo-inversa de Penrose
$\left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$	Representação matricial
T	Transposta
$rank \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$	Posto de uma matriz
$ x $	Função módulo de x
$f(x), g(x)$	Funções polinomiais da variável x
$F(x), G(x), Z(x), W(x), H(x)$	Funções matriciais da variável x
A, B, C, D	Matrizes ou operadores de estados
A^t	Matriz A no instante futuro t
I	Matriz identidade
$\underset{\rightarrow k}{x}$	Vetor de valores futuros de x

W_i	Variável de peso da variável i
J	Função custo
$\min_x J$	Minimização da função custo J em razão de x
z^{-1}	Operador de atraso unitário em z
$\frac{\partial}{\partial x}$	Derivada parcial em x
\underline{x}	Limite inferior de x
\bar{x}	Limite superior de x
p	Horizonte de predição
n_i	Número de variáveis de i
s^i	Fator escolar de i
ε_k	Variável de folga do intervalo de controle k
ρ_ε	Variável de penalização da violação de restrição
z_k	Vetor de variáveis de decisão
$\frac{d}{dt}$	Derivada temporal
V	Volume
q_i	Vazão de entrada
q_o	Vazão de saída
π	Pi
h	Altura do nível de líquido
r'	Raio da base maior do tanque preenchido por líquido
r	Raio da base menor do tanque
R	Raio da base maior do tanque
H	Altura total do tanque
P	Pressão do fluido
ρ	Densidade do fluido
v	Velocidade do fluido
g	Aceleração da gravidade
A_r	Área

k_o	Constante de proporcionalidade
k_i	Constante de eficiência da bomba centrífuga
ω	Velocidade angular da bomba centrífuga
H_{tsi}	Altura entre o tanque inferior e superior
H_m	Altura manométrica de operação da bomba centrífuga
Pot	Potência nominal da bomba centrífuga
$q_{i,nominal}$	Vazão nominal da bomba centrífuga

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Metodologia	21
2	CONTROLE DATA-DRIVEN	24
2.1	Decomposição de Modo Dinâmico	25
2.2	Decomposição de Modo Dinâmico com Controle	26
2.2.1	<i>Operador B conhecido</i>	26
2.2.2	<i>Operador B desconhecido</i>	27
2.3	Persistência de Excitação em Modelos Data-driven	27
2.4	Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos Data-driven	30
3	DECOMPOSIÇÃO DE MODO DINÂMICO POLINOMIAL	32
3.1	Definição do Sistema Polinomial	32
3.2	Decomposição de Modo Dinâmico	34
3.2.1	<i>Operador B conhecido</i>	34
3.2.2	<i>Operador B desconhecido</i>	34
3.3	Condição Persistentemente Excitante dos Dados	35
4	CONTROLE PREDITIVO	38
4.1	Fundamentos básicos	38
4.1.1	<i>Modelo de predição</i>	38
4.1.2	<i>Otimização da função custo</i>	40
4.1.3	<i>Lei de controle</i>	41
4.2	Perspectiva Histórica	41
4.2.1	<i>Model Algorithmic Control</i>	42
4.2.2	<i>Dynamic Matrix Control</i>	42
4.2.3	<i>Predictive Functional Control</i>	42
4.2.4	<i>Extended Prediction Self Adaptive Control</i>	42
4.2.5	<i>Extended Horizon Adaptive Control</i>	43
4.2.6	<i>Generalized Predictive Control</i>	44
4.3	Controle Preditivo por Modelo	45
4.4	Controle Preditivo por Modelo Não Linear	45

4.4.1	<i>Projeto do algoritmo</i>	46
5	ESTUDO DE CASO	49
5.1	Modelo teórico	50
5.1.1	<i>Geometria espacial</i>	50
5.1.2	<i>Mecânica dos fluidos</i>	52
5.1.3	<i>Sistema de controle</i>	54
5.1.3.1	<i>Entrada e saída</i>	54
5.1.3.2	<i>Parâmetros dinâmicos</i>	55
5.1.3.3	<i>Grandezas geométricas</i>	56
5.2	Simulação do projeto em malha aberta	56
5.2.1	<i>Dimensões do sistema</i>	56
5.2.2	<i>Comportamento do sistema</i>	57
5.2.3	<i>Simulação do sistema em malha aberta</i>	58
5.3	Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial do Sistema	62
5.4	Controle Preditivo Não Linear	71
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	86
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A –GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS MODELOS DO ESTUDO DE CASO DO	92
	APÊNDICE B –GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS RESULTADOS DE CONTROLE DO ESTUDO DE CASO PARA HORIZONTE DE PREDIÇÃO UNITÁRIO	101
	APÊNDICE C –GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS RESULTADOS DE CONTROLE DO ESTUDO DE CASO PARA HORIZONTE DE PREDIÇÃO IGUAL A 3	117

1 INTRODUÇÃO

Nos tempos modernos, a evolução tecnológica e científica em sistemas de informações é responsável pelo aumento exponencial na disponibilidade e geração de dados em empresas e indústrias ao redor do mundo. Com efeito, o processamento de grandes volumes de dados muda a dinâmica de tomada de decisões, tornando-as mais eficazes e seguras. O conceito *data-driven* é o ponto focal nesse avanço tecnológico, empenhando técnicas orientada a dados capazes de prever resultados, identificar tendências, medir desempenho e melhorar a eficiência de processos. Enquanto as leis matemáticas e físicas traçam uma linha temporal lenta em seu desenvolvimento, a quantidade de dados gerados e coletados evolui a cada dia.

As técnicas baseadas em *data-driven* surgem da necessidade de modelar, prever, classificar, estimar e controlar sistemas complexos, que normalmente são não lineares, dinâmicos e incertos. O impacto da evolução dos métodos orientados a dados é visto principalmente na viabilização de resolução de problemas científicos e de engenharia precursores do desenvolvimento tecnológico do mundo. Inúmeras técnicas e análises teóricas e experimentais podem ser encontrados no livro Brunton e Kutz (2019).

Diversas áreas de estudos estão sendo envolvidas no crescimento constante do uso dos dados como fonte referencial de análise. Em adição, pesquisas na área de neurociência aplicada a interface de dados entre cérebros e computadores (AGRAWAL *et al.*, 2016), estudos para detectar progressão de glaucomas em nervos ópticos usando técnicas de decomposições ortogonais de dados (BALASUBRAMANIAN *et al.*, 2009), estimações e previsões climáticas (KISI *et al.*, 2015; TEEGAVARAPU; CHANDRAMOULI, 2005), metodologias pioneiras em caracterização petrofísica de reservatórios com abordagens em *machine learning* (BRAGA, 2023), aplicações e manipulações em sistemas robóticos (BROAD *et al.*, 2018; GU *et al.*, 2017) e sistemas aeroespaciais (AMSALLEM *et al.*, 2009; HUANG *et al.*, 2016; FONZI *et al.*, 2020) são exemplos da globalização de técnicas baseadas em dados aplicadas a inúmeros centros de estudos variados.

Nesse trabalho, a área de interesse da aplicação de métodos orientados a dados está na engenharia de controle e identificação de processos industriais complexos com modelos matemáticos, físicos e analíticos que requerem uma análise cada vez mais elaborada. Essa complexidade não deve inviabilizar o projeto de controladores eficientes e robustos que usam como base essas modelos. Com a tecnologia avançada de equipamentos e máquinas, a coleta de grandes quantidades de dados proporcionam o desenvolvimento de técnicas *data-driven* capazes

de promover análises importantes de funcionamento, modelagem e controle.

Esse estudo é focado em detalhar os fundamentos das técnicas *data-driven* de Decomposição de Modo Dinâmico, de Decomposição de Modo Dinâmico com Controle, de Persistência de Excitação e de Representações de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos *Data-driven* aplicadas ao controle com a finalidade de desenvolver o método de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial. Essa técnica proposta nesse trabalho busca modelar equações polinomiais a partir de dados de acionamentos e respostas de sistemas dinâmicos com o objetivo de usá-los como modelos de previsão de um controlador preditivo não linear.

Inicialmente, desenvolve-se conhecimentos básicos na Decomposição de Modo Dinâmico, uma técnica *data-driven* amplamente estudada e aplicada principalmente a sistemas de mecânicas de fluidos (SCHMID; SESTERHENN, 2008; SCHMID, 2010). Diversos estudos, aprimorações e aplicações foram realizados ao longo do tempo no Dynamic Mode Decomposition (DMD) (PAN *et al.*, 2011; CHEN *et al.*, 2012; KUTZ *et al.*, 2016; ASKHAM; KUTZ, 2018).

Até então, o DMD baseava-se apenas em dados de sistemas não previamente controlados, conseqüentemente a técnica evoluiu dando origem a Decomposição de Modo Dinâmico com Controle, conhecido por Dynamic Mode Decomposition with Control (DMDc), que corresponde ao DMD com um sinal de acionamento acoplado em sua equação fundamental (PROCTOR *et al.*, 2016).

Outrossim, surge a necessidade de garantir a viabilidade, estabilidade, otimização e robustez do controle baseado no conjunto de dados. Isso pode ser atingido com o estudo de Persistência de Excitação do modelo (WILLEMS *et al.*, 2005; PERSIS; TESI, 2019).

A Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos *Data-driven* (GUO *et al.*, 2021) possibilita o desenvolvimento da Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, que engloba todas essas quatro técnicas *data-driven* com o intuito de desenvolver modelos mais precisos e fieis a sistemas dinâmicos complexos e não lineares.

Com efeito, esse trabalho aplica a Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial (DMDp) como modelo de previsão do Nonlinear Model Predictive Control (NMPC) (CHEN; ALLGÖWER, 1998; ALLGÖWER *et al.*, 1999, 1999). Dessa forma, é realizado um estudo teórico em controle preditivo baseando nos livros de Camacho e Alba (2013) e Rossiter (2022), explicitando todo o desenvolvimento histórico do NMPC. Ainda, são abordados todos os pontos fundamentais do controlador, caracterizados pelo modelo de previsão, pela otimização da função custo com restrições e pela computação do sinal de controle. Exemplifica-se também o

funcionamento do algoritmo do controlador preditivo não linear desenvolvido em MathWorks (2023) no software The MathWorks, Inc. (2023).

Finalmente, toda a fundamentação teórica envolvendo a Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial e o Controle Preditivo Não Linear é aplicada em um estudo de caso que busca identificar e controlar um sistema elétrico-hidráulico semelhante ao desenvolvido no trabalho proposto por Vasconcelos *et al.* (2021), caracterizado por um conjunto de tanques em alturas distantes, onde busca-se controlar a altura de líquido no tanque superior. O interesse na escolha dessa planta é analisar a proposta desse trabalho em um sistema com comportamento não linear e racional.

1.1 Metodologia

A proposta desse trabalho inicia-se com a fundamentação teórica abordada nos Capítulos 2, 3 e 4 com a ideia de introduzir o leitor a utilização da técnica desenvolvida durante o trabalho da Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial capaz de ser usada para obter modelos de equações polinomiais para serem empregadas como modelos de predição no projeto de controladores preditivos não lineares, originando o controle preditivo não linear baseado em um modelo de dados.

Com isso, é possível propor um estudo de caso baseado em um algoritmo genérico, onde a partir da escolha de um sistema dinâmico segue-se os passos com a finalidade de projetar a simulação de um controlador preditivo não linear a partir apenas dos dados de acionamento e resposta da planta ensaiados:

1. Escolha do sistema;
2. Implementar a simulação do sistema em malha aberta;
3. Escolha do sinal de acionamento da planta em malha aberta adequada para obtenção de todas as dinâmicas existentes do sistema;
4. Obtenção do sinal de resposta a partir da simulação do ensaio com o sinal de acionamento escolhido;
5. Averiguar a persistência de excitação do sinal de entrada e saída obtidos a partir do ensaio;
6. Definir o polinômio pelo qual se deseja modelar o sistema tendo em vista as especificações técnicas de que é seu valor na origem é nulo e que seu grau superior seja conhecido;
7. Alimentar os vetores das séries temporais descritas nas (3.4), (3.7) e (3.8);
8. Resolver a equação principal da técnica de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial

(3.14);

9. Montar o polinômio modelo a partir do resultado obtido;
10. Projetar o controlador preditivo não linear com as configurações desejadas e com o modelo preditivo igual ao polinômio obtido;
11. Ensaiar o sistema controlado definitivo, verificando a eficácia do projeto desenvolvido.

É importante esclarecer que a Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial é aplicado a um sistema caixa preta, ou seja, não é preciso um entendimento matemático, físico ou analítico da planta. Entretanto, a proposta do estudo de caso do presente trabalho é apresentar todo o equacionamento fundamental da planta. Essa decisão é relevante para a programação do algoritmo de simulação do sistema, além de explicitar características adotadas no levantamento do sinal de acionamento adequada para planta em malha aberta e no projeto da função custo do controlador preditivo não linear, o qual deve respeitar as restrições físicas do modelo.

No estudo de caso a análise de diversos modelos polinomiais usando a técnica *DMD_p* fornece o principal resultado comparativo entre os algoritmos, onde é possível observar experimentalmente uma melhoria no modelo obtido provocado pelo aumento do número de monômios no polinômio. À luz dessas afirmações, pode-se comprovar experimentalmente para o estudo de caso adotado que a utilização do *DMD_p* é melhor que seu caso particular semelhante ao *DMD_c*.

O processo convencional desse estudo associa-se a utilização de procedimentos técnicos caracterizados inicialmente por pesquisas bibliográficas como fonte base no desenvolvimento do método proposto de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial. Com efeito, pesquisas experimentais possibilitaram o entendimento e viabilização da técnica proposta. Por fim, propõe-se um estudo de caso, com a aplicação em um sistema real simulado, obtendo o comportamento de identificação e controle para mais de um modelo projetado.

Quanto à abordagem, é possível descrever o estudo qualitativamente baseando-se na análise de funcionamento do sistema projetado, onde viabiliza-se por meio do conhecimento prévio da planta em estudo a escolha do sinal de acionamento para realização de um ensaio adequado. Ainda assim, a análise gráfica dos dados em estudo possibilitam o entendimento prático e a análise preliminar dos resultados, concluindo previamente se está condizente ou não com o esperado. É importante ressaltar que a escolha do polinômio também deve ser feita de forma qualitativa, onde entende-se inicialmente os potências polinômios capazes de modelar o sistema escolhido para estudo. Outro ponto fundamental é a visualização do comportamento do

sinal de controle, avaliando a compatibilidade com o projeto desenvolvido.

Embora a abordagem qualitativa seja um ponto importante no estudo, a análise quantitativa é predominante nesse trabalho. Com efeito, a persistência de excitação dos dados obtidos é determinante da viabilização na modelagem *data-driven* do sistema, em que o resultado quantitativo deve ser obedecido. Ademais, em uma análise do trabalho orientado a dados é imprescindível que seja utilizado critérios métricos na avaliação dos resultados obtidos comparados ao resultado esperado. Logo, esse estudo é baseado na aplicação do Erro Médio Absoluto (MAE) usado para avaliar a precisão dos resultados, do Erro Quadrático Médio (MSE) visando enfatizar a magnitude do erro, da Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE) com o intuito de analisar o MSE em sua unidade original, do Coeficiente de Determinação (R^2) para interpretação da variação e confiabilidade do modelo, do Índice de concordância (ICC) para aferir a concordância e semelhança entre os modelos e do Coeficiente de Determinação Ajustado (AR^2) julgando a superestimação da qualidade do modelo levando em consideração as variáveis independentes do problema.

A natureza aplicada dessa pesquisa busca introduzir um conhecimento novo com a aprimoração da técnica de Decomposição de Modo Dinâmico, disseminada mundialmente, criando o método *DMDp*. Além disso, busca-se realizar experimentos práticos com o estudo de caso, a fim de promover a melhoria proposta implementada na técnica de controle preditivo não linear, criando o *NMDPC*. Esses resultados são consequências de objetivos exploratórios, visto que esse trabalho é precursor da técnica do *DMDp* e a partir dessa descoberta, visualiza-se inúmeras pesquisas futuras na área. Ademais, no estudo de caso, existe o objetivo descritivo quanto a explicação e fundamentação da planta em estudo, onde é realizado uma análise matemática, física e analítica detalhada do sistema.

2 CONTROLE DATA-DRIVEN

Os estudos em *data-driven* surgiram na ciência de computação, ganhando força em controle, otimização e identificação de sistemas posteriormente. Segundo Hou e Wang (2013), o controle *data-driven* inclui todos os modelos de controle baseados e projetados diretamente por meio de ensaios *on-line* ou *off-line* de dados de entrada e saída dos sistemas controlados ou conhecimento prévio no processamento de dados que não contenham informações explícitas do modelo matemático do sistema, e que possa ser garantido por meio de uma análise matemática, sobre condições razoáveis, a estabilidade, convergência e robustez do processo.

As primeiras contribuições em controle *data-driven* originaram-se com o controle adaptativo proposto por Ziegler e Nichols (1942) no artigo titulado de *Optimum Settings for Automatic Controllers*, onde apesar de não serem utilizados dados na prática para o projeto do controlador PID, essa técnica se baseia em utilizar experimentos físicos e observações práticas do sistema, não precisando do desenvolvimento analítico do mesmo.

Mais a frente, técnicas em controle *data-driven* foram incorporadas no projeto de controladores de sistemas lineares chamados de *Linear-Quadratic-Gaussian*. Skelton e Shi (1994) e Furuta e Wongsaisuwon (1995) começaram a utilizar e explorar essa técnica em seus trabalhos.

Uma das grandes contribuições *data-driven* está no controle de sistemas não lineares, abordado inicialmente em *Model-free adaptive control* por Hou (1994), utilizando uma derivada parcial em um modelo equivalente linearizado visando substituir o sistema não linear em um determinado ponto de operação de forma *on-line*.

No mesmo ano, modelos de controle *data-driven off-line* foram proposto em *Iterative feedback tuning* por Hjalmarsson *et al.* (1994) tendo como ponto focal a técnica de otimização iterativa dos parâmetros do controlador de acordo com a estimação de um gradiente. Sua versão desenvolvida para sistemas não lineares é abordado também por Hjalmarsson (1998).

Outro controle *data-driven* conhecido é o *Virtual reference feedback tuning* introduzido por Campi *et al.* (2002), com o intuito de selecionar parâmetros de controle para sistemas lineares invariantes no tempo adicionando um sinal virtual de referência.

Entretanto, o questionamento relevante em relação ao *data-driven* era como explicitar o comportamento de processos reais com dados. Esse questão foi sanada por Willems *et al.* (2005) com o Lema fundamental de *Willems et al.'s*, que prova que se o sinal de entrada de um sistema controlável linear e invariante no tempo é persistentemente excitante e de ordem

suficientemente alta, esse sinal descreve o comportamento completo do sistema.

2.1 Decomposição de Modo Dinâmico

Entre as inúmeras técnicas *data-driven*, a Decomposição de Modo Dinâmico, mais conhecido por ser termo original *Dynamic Mode Decomposition* (DMD), foi popularizada inicialmente por Schmid e Sesterhenn (2008) e por Schmid (2010), tendo como objetivo de decompor séries temporais complexas em modos dinâmicos capazes de capturar padrões de comportamento e evolução ao longo do tempo de sistemas dinâmicos de fluidos. Esse método foi revisitado e desenvolvido por Kutz *et al.* (2016) na aplicação de modelagem *data-driven* de sistemas dinâmicos complexos.

Suponha que x_k seja a medição dos estados de um sistema dinâmico discreto, assumindo k como o instante temporal discreto e $x \in \mathbb{R}^n$, a técnica matemática do DMD propõe que o estado instantaneamente futuro x_{k+1} é relacionável linearmente com x_k através do operador $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.1)$$

Com efeito, define-se a série temporal de dados dos estados como:

$$X := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$X' := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_T \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Em que a equação (2.1) pode ser reescrita matricialmente como:

$$X' = AX \quad (2.4)$$

Dessa forma, a modelagem DMD busca encontrar a melhor estimativa para o valor do operador A , definido por:

$$A = X' X^\dagger \quad (2.5)$$

Onde, \dagger representa a pseudo-inversa de Penrose (1955)

2.2 Decomposição de Modo Dinâmico com Controle

A Decomposição de Modo Dinâmico com Controle (PROCTOR *et al.*, 2016), titularizado de *Dynamic Mode Decomposition with Control* (DMDc), é uma variação do DMD que adiciona a equação (2.1) o termo referente a entrada de controle do sistema u_k , assumindo $u \in \mathbb{R}^m$, relacionado linear com x_{k+1} através do operador $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.6)$$

Então, define-se a série temporal de dados de entrada como:

$$U := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Em que a equação (2.6) pode ser reescrita matricialmente como:

$$X' = AX + BU \quad (2.8)$$

Existem duas análises possíveis na resolução do problema dependendo do conhecimento prévio ou não do operador B .

2.2.1 Operador B conhecido

Nesse caso, a técnica DMDc é simplificada ao DMD, onde a equação (2.8) pode ser reescrita de maneira que:

$$X' - BU = AX \quad (2.9)$$

Em que o operador A deve ser determinada analogamente a equação (2.5):

$$A = (X' - BU)X^\dagger \quad (2.10)$$

2.2.2 Operador B desconhecido

Quando não possui nenhum conhecimento prévio da matriz B , deve-se reescrever a (2.8) como

$$X' = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Dessa forma, determina-se o operador $S \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ definido como:

$$S = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Assim, o operador S é determinado de acordo com:

$$S = X' \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \quad (2.13)$$

2.3 Persistência de Excitação em Modelos Data-driven

O trabalho de Persis e Tesi (2019) intitulado de *Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness*, revisita o trabalho de Willems *et al.* (2005), provando a existência de parametrizações de sistemas de controle em malha fechada capazes de reduzir o problema de estabilidade para um modelo de desigualdade matricial linear dependente dos dados de entrada e saída persistentemente excitantes e de ordem superior.

A primeira definição proposto por Willems *et al.* (2005) e que será fundamental para o seguimento desse trabalho é que um sinal $q \in \mathbb{R}^\sigma$ e de tamanho T é dito persistentemente excitante de ordem L se sua representação matricial Q é de *full rank* σL . Observe que por essa definição, tem-se também que $T \geq (\sigma + 1)L - 1$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} q(0) & q(1) & \cdots & q(T-L) \\ q(1) & q(2) & \cdots & q(T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(L-1) & q(L) & \cdots & q(T-1) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

À luz dessas definições, sugere-se a perspectiva do trabalho Persis e Tesi (2019) aplicado a dados de entrada e saída de trajetória unitária, representado pela a escolha de $t := 1$ para a ordem da matriz de Toeplitz e da matriz de observabilidade.

Considerando sistema linear e discreto:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.15a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.15b)$$

Onde, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$, a partir do Lema 1 de Persis e Tesi (2019), temos que para uma sequência de entrada persistentemente excitante de ordem $n + 1$ e de tamanho $T \geq (m + 1)n + m$:

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = n + m \quad (2.16)$$

Onde U e X são as séries temporais de entrada (2.7) e de estados (2.2) respectivamente.

A condição (2.16) responde ao fato de que garante que os dados de entrada e saída correspondem ao funcionamento do sistema.

Ainda assim, o Lema 2 de Persis e Tesi (2019) torna factível o fato que para uma sequência de entrada persistentemente excitante de ordem $n + 1$, qualquer trajetória de entrada e saída pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} g \quad (2.17)$$

Onde, $g \in \mathbb{R}^T$ e a Y representa a série temporal de saída:

$$Y := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

A consequência do Lema 2 e da condição (2.16) sugere o tipo de identificação tratado pela Decomposição de Modo Dinâmico, em que pelo Teorema 1 de Persis e Tesi (2019) obtém-se que o sistema (2.15a) equivale a:

$$x_{k+1} = X' \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Sendo X' a série temporal (2.3).

Aplicando ao Lema 2, tem-se que uma equação similar a (2.13):

$$\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} = X' \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \quad (2.20)$$

Essa proposta é somente válida para os casos em que se conhece o sistema (2.15). Em termo de disponibilidade apenas de dados de entrada e saída da planta, pode-se considerar o seguinte sistema:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.21)$$

De acordo com o Corolário 2 proposto por Willems *et al.* (2005), tem-se dois casos particulares:

1. Para uma sequência de entrada persistentemente excitante de ordem n :

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = n + 1 \quad (2.22)$$

2. Para uma sequência de entrada persistentemente excitante de ordem $n + 1$:

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = n + m \quad (2.23)$$

2.4 Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos Data-driven

O trabalho *Data-driven stabilization of nonlinear polynomial systems with noisy data* proposto por Guo *et al.* (2021), busca aplicar *data-driven* em sistemas polinomiais não lineares, obtendo modelos de controle estáveis usando duas técnicas principais, que são elas a estabilidade de *Lyapunov* e métodos de soma de quadrados utilizando a ferramenta de Papachristodoulou J. Anderson e Jagt (2021) na otimização do controlador.

Considerando o sistema polinomial

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.24)$$

Onde, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in \mathcal{P}^{n \times 1}$ e $g(x) \in \mathcal{P}^{n \times m}$ representam os polinômios desconhecidos presentes no sistema.

Assumindo que a origem do sistema é equilibrado, ou seja, $f(0) = 0$ e que o grau máximo de $f(x)$ e $g(x)$ são conhecidos, é possível reescrever (2.24) da seguinte forma:

$$\dot{x} = AZ(x) + BW(x)u \quad (2.25)$$

Em que, $Z(x) \in \mathcal{P}^{N \times 1}$ representa o vetor de N polinômios de estados do sistema presentes em $f(x)$, $W(x) \in \mathcal{P}^{q \times m}$ representa a matriz de $q \times m$ polinômios de estados presentes na entrada, e $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ são matrizes desconhecidas.

É importante citar que os autores Guo *et al.* (2021) propõe substituir $Z(x)$ pelo vetor $\hat{Z}(x) \in \mathcal{P}^{p \times 1}$ que possui menor grau e menor dimensão, proporcionando ganho de eficiência computacional. Normalmente, restringe-se $\hat{Z}(x)$ ao vetor de estados. Com efeito, deve ser satisfeito que:

$$Z(x) = H(x)\hat{Z}(x) \quad (2.26)$$

Onde $H(x) \in \mathcal{P}^{N \times p}$.

Com isso, a análise de estabilidade é baseada na função de *Lyapunov* dada por:

$$V(X) = \hat{Z}(x)^T P^{-1} \hat{Z}(x) \quad (2.27)$$

Sendo P uma matriz positiva e definida.

À luz dessas considerações, no capítulo 3, do trabalho oferece uma abordagem unificada entre os conceitos desenvolvidos em Decomposição de Modo Dinâmico com Controle e em Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos Data-driven considerando os fatores chaves presentes em Persistência de Excitação em Modelos Data-driven.

3 DECOMPOSIÇÃO DE MODO DINÂMICO POLINOMIAL

O uso de polinômios simplifica a modelagem de sistemas dinâmicos complexos, resultando em uma análise mais versátil. Além disso, são extremamente eficientes em termos computacionais. Outra vantagem da utilização de modelos polinomiais, é a existência ampla de aplicações em técnicas de controle, estabilização, predição, identificação e análise de robustez. O DMDp permite retratar o sistema em uma ampla faixa de polinômios em funções dos estados da planta.

Com efeito, o DMDp representa a proposta principal desse estudo, que explora a obtenção de modelos polinomiais capazes de descrever sistemas dinâmicos complexos, lineares ou não lineares, racionais ou não racionais, utilizando apenas dados de entrada e de saída da planta. O DMDp fundamenta-se na unificação das técnicas abordadas nas seções Decomposição de Modo Dinâmico, Decomposição de Modo Dinâmico com Controle, Persistência de Excitação em Modelos Data-driven e Representação de Sistemas Polinomiais Não Lineares em Modelos Data-driven do capítulo 2.

3.1 Definição do Sistema Polinomial

Considerando o sistema polinomial discreto definido como:

$$x_{k+1} = F(x_k) + G(x_k) u_k \quad (3.1)$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, $F(x) \in \mathcal{P}^{n \times 1}$ e $G(x) \in \mathcal{P}^{n \times m}$ representam os polinômios desconhecidos presentes no sistema.

Assume-se que os graus superiores de $F(x)$ e $G(x)$ são conhecidos e que a origem do sistema está em equilíbrio, ou seja, $F(0) = 0$.

Portanto, pode-se representar a equação (3.1) por:

$$x_{k+1} = AZ(x_k) + BW(x_k) u_k \quad (3.2)$$

Em que, $Z(x) \in \mathcal{P}^{N \times 1}$ representa o vetor de N polinômios de estados do sistema presentes em $f(x)$, $W(x) \in \mathcal{P}^{q \times m}$ representa a matriz de $q \times m$ polinômios de estados presentes na entrada, e $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ representam os operadores lineares do DMDp.

Sem perda de generalidade, com a definição que $Z(0) = 0$ e que o grau superior de $Z(x)$ é conhecido, pode-se escrever que $Z(x) = H(x)x$ para $H(x) \in \mathcal{P}^{N \times n}$, assim a equação (3.2) se torna:

$$x_{k+1} = AH(x_k)x_k + BW(x_k)u_k \quad (3.3)$$

Após isso, define-se as séries temporais de x_{k+1} , $Z(x_k)$ e $W(x_k)$ respectivamente por:

$$X' := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_T \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$X := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$U := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$Z_o := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ H(x_0)x_0 & H(x_1)x_1 & \dots & H(x_{T-1})x_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$W_o := \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ W(x_0)u_0 & W(x_1)u_1 & \dots & W(x_{T-1})u_{T-1} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Logo, a equação (3.3) pode ser reescrita matricialmente:

$$X' = AZ_o + BW_o \quad (3.9)$$

À luz desses resultados, a partir do modelo polinomial discreto (3.1) foi possível obter a equação (3.9) que representa o modelo em série temporal do sistema.

3.2 Decomposição de Modo Dinâmico

A equação obtida para o DMDp (3.9) se assemelha a equação do DMDc (2.8). Ademais, a análise a partir de agora é análoga a utilizada anteriormente, que depende do conhecimento prévio do operador B .

3.2.1 Operador B conhecido

Nesse caso, a equação (3.9) deve ser reescrita como:

$$X' - BW_o = AZ_o \quad (3.10)$$

Então, o operador A é:

$$A = (X' - BW_o)Z_o^\dagger \quad (3.11)$$

3.2.2 Operador B desconhecido

Quando B é desconhecido, segue-se que:

$$X' = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Define-se o operador $S \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ como:

$$S = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Logo,

$$S = X' \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix}^\dagger \quad (3.14)$$

É importante ressaltar que para o caso em que se escolha $Z(x) = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$ e $W(x) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, o DMDp é igual ao DMDc.

3.3 Condição Persistentemente Excitante dos Dados

As técnicas *data-driven* DMD e DMDc não garantem que os dados utilizados na obtenção dos operadores representam fielmente o sistema e que podem servir de modelos viáveis na descrição do funcionamento prática da planta. Portanto, busca-se provar a condição de persistência excitante dos dados a fim de assegurar a qualidade dos dados na representação fundamental do sistema em estudo, o qual pode ser utilizado como modelos preditores, rastreadores ou classificadores.

De acordo com o que já foi detalhada na seção 2.3, se U for persistentemente excitante de ordem $n + 1$, então:

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = n + m \quad (3.15)$$

Pelo teorema de *Rouché–Capelli*¹ e assumindo que a (3.15) é verdade, tem-se que a o sistema (3.16) admite infinitas soluções para $g \in \mathbb{R}^T$, explicitando o resultado do Teorema 1 proposto por Persis e Tesi (2019):

$$\begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} g \quad (3.16)$$

Com efeito, g pode ser expresso como a soma da resposta particular e da resposta adicional de espaço nulo do sistema, de acordo com a Equação (3.17).

$$g = \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left(I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \quad (3.17)$$

Onde $\omega \in \mathbb{R}^T$ é um vetor arbitrário no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}$ que compõe a resposta adicional do espaço nulo.

A equação (3.3) pode ser reescrita como:

¹ Seja $Ax = B$ um sistema linear de n variáveis, existe solução somente se o *rank* da matriz A for igual ao *rank* da matriz aumentada $[A|B]$. Ainda assim, se $n = \mathbf{rank}(A)$ então a solução é única, caso contrário existem infinitas soluções.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} BW(x_k) & AH(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.16) em (3.18), obtém-se que:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} BW(x_k) & AH(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left(I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \right] \quad (3.19)$$

Com isso, é possível notar o resultado análogo ao da equação (3.12), para $Z_o = H_o X$:

$$X' = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pode-se resumir a formulação (3.19) em:

$$x_{k+1} = X' \left[\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} + \left(I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega \right] \quad (3.21)$$

Sem perda de generalidade, pode-se anular o termo da resposta adicional do espaço nulo:

$$X' \left(I - \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} \right) \omega = 0 \quad (3.22)$$

Resultando assim na seguinte representação linear do sistema:

$$x_{k+1} = X' \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_k \\ x_k \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

À luz desses resultados, percebe-se uma relação direta por meio da equação (3.12) entre o trabalho proposto por Willems *et al.* (2005) e a Decomposição de Modo Dinâmico. Isso promove uma factibilidade do sistema identificado, o operador S dado por (3.13) representa os coeficientes do polinômio $\begin{bmatrix} W(x_k)u_k & Z(x_k) \end{bmatrix}^T$. Com isso, a partir de dados de saída \in

\mathbb{R}^n e de entrada $\in \mathbb{R}^m$ persistentemente excitante de ordem $n + 1$, onde faz-se válido que o $\mathbf{rank} \begin{bmatrix} input & output \end{bmatrix}^T = n + m$, é possível obter um modelo polinomial para qualquer sistema que cumpra as condições.

Esse modelo polinomial para o sistema será utilizado no capítulo 4 como modelo de planta para o controlador preditivo não linear.

4 CONTROLE PREDITIVO

A origem do Controle Preditivo por Modelo, conhecido mundialmente como Model Predictive Control (MPC), data da década de 1970, surgindo com o objetivo de utilizar um modelo de previsão do sistema capaz de constituir uma lei de controle baseada na otimização de uma função custo. Com efeito, essa função deve ser parametrizada com os valores previsto pelo modelo dentro de um horizonte de predição e com os valores de controle dentro de um horizonte de entrada. Inicialmente foram propostas otimizações analíticas lineares, que foram substituídas por técnicas computacionais, advindo do desenvolvimento de algoritmos mais sofisticadas na área. Com essa evolução, as funções custos passaram a poder ter restrições vinculadas, fortificando mais ainda o Controle Preditivo.

4.1 Fundamentos básicos

Todos os tipos de controles preditivos tomam como base três processos fundamentais, que devem seguir a ordem de:

1. Construção do modelo de predição do sistema dentro de um horizonte de tempo;
2. Otimização de uma função custo planejada;
3. Obtenção da lei de controle.

Visando entender os conceitos do controle preditivo, esse trabalho é baseado em fundamentos abordados nos livros de Camacho e Alba (2013) e Rossiter (2022).

4.1.1 Modelo de predição

Considere o sistema discreto em espaço de estado:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{4.1a}$$

$$y_k = Cx_k + d_k \tag{4.1b}$$

Onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$: estados;
- $u \in \mathbb{R}^m$: entradas;
- $y \in \mathbb{R}^p$: saídas;
- $d \in \mathbb{R}^p$: perturbações nas saídas.

A partir desse sistema, obtemos que o estado e a saída a um passo futuro é dada por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (4.2a)$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + d_{k+1} \quad (4.2b)$$

Substituindo (4.4a) em (4.4b):

$$y_{k+1} = CAx_k + CBu_k + d_{k+1} \quad (4.3)$$

Sendo assim, a saída a t passos no futuro é:

$$x_{k+t} = A^t x_k + A^{t-1} Bu_k + A^{t-2} Bu_{k+1} + \dots + Bu_{k+t-1} \quad (4.4a)$$

$$y_{k+t} = C[A^t x_k + A^{t-1} Bu_k + A^{t-2} Bu_{k+1} + \dots + Bu_{k+t-1}] + d_{k+t} \quad (4.4b)$$

$$y_{k+1} = CAx_k + CBu_k + d_{k+1} \quad (4.5)$$

Logo, é possível definir o modelo matricial de predição para um horizonte t_y :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ x_{k+3} \\ \vdots \\ x_{k+t_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^{t_y} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots \\ AB & B & 0 & \dots \\ A^2 B & AB & B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{t_y-1} B & A^{t_y-2} B & A^{t_y-3} B & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+t_y-1} \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \\ \vdots \\ y_{k+t_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{t_y} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots \\ CAB & CB & 0 & \dots \\ CA^2 B & CAB & CB & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{t_y-1} B & CA^{t_y-2} B & CA^{t_y-3} B & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+t_y-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ d_{k+2} \\ d_{k+3} \\ \vdots \\ d_{k+t_y} \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

Simplificando, temos que o modelo de predição é:

$$x_{\rightarrow k+1} = P_x x_k + H_x u_{\rightarrow k} \quad (4.7a)$$

$$y_{\rightarrow k+1} = P x_k + H u_{\rightarrow k} + d_{\rightarrow k+1} \quad (4.7b)$$

Normalmente, é interessante adotar a variação do sinal de entrada $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$, consequentemente, tem-se que a equação (4.1) deve ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (4.8a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + d_k \quad (4.8b)$$

Em que o sistema (4.7) se torna:

$$w_{\rightarrow k+1} = P_w w_k + H_w \Delta u_{\rightarrow k} \quad (4.9a)$$

$$y_{\rightarrow k+1} = P w_k + H \Delta u_{\rightarrow k} + d_{\rightarrow k+1} \quad (4.9b)$$

$$\text{Para } w_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Otimização da função custo

Com o modelo de predição obtido, o próximo passo é obter a função custo e otimizar-la, minimizando seu valor em relação ao sinal de controle. A existência de restrições no projeto implica a necessidade de ser feita uma otimização numérica, entretanto as configurações sem restrições podem ser resolvidas de forma analítica. A função custo normalmente é quadrática, tendo o termo referente ao erro entre a saída prevista e o sinal de referência desejado e termo referente a variação do sinal de entrada. Com efeito, pode-se desenvolver a seguinte função custo genérica:

$$J = \sum_{j=t_w}^{t_y} [r_{k+j} - y_{k+j}]^T W_y [r_{k+j} - y_{k+j}] + \sum_{j=0}^{t_u-1} \Delta u_{k+j}^T W_{\Delta u} \Delta u_{k+j} \quad (4.10)$$

Onde:

- t_y : máximo horizonte de predição;
- t_w : mínimo horizonte de predição;
- t_u : horizonte de controle;
- W_y : peso de predição;
- $W_{\Delta u}$: peso de controle;
- r : sinal de referência;

A equação (4.10) pode ser escrita em uma forma mais compacta:

$$J = \begin{bmatrix} r_{\rightarrow k+1} & -y_{\rightarrow k+1} \end{bmatrix}^T W_y \begin{bmatrix} r_{\rightarrow k+1} & -y_{\rightarrow k+1} \end{bmatrix} + \Delta u_{\rightarrow k}^T W_{\Delta u} \Delta u_{\rightarrow k} \quad (4.11)$$

4.1.3 Lei de controle

A lei de controle é então definida como a minimização da função custo (4.11) em função de Δu_{\rightarrow} :

$$\min_{\Delta u_{\rightarrow}} J = \begin{bmatrix} r_{\rightarrow k+1} & -y_{\rightarrow k+1} \end{bmatrix}^T W_y \begin{bmatrix} r_{\rightarrow k+1} & -y_{\rightarrow k+1} \end{bmatrix} + \Delta u_{\rightarrow k}^T W_{\Delta u} \Delta u_{\rightarrow k} \quad (4.12)$$

As escolhas futuras do sinal de controle representam o grau de liberdade na minimização de J , que geralmente é igual ao horizonte de controle t_u . Assumi-se também que a variação do sinal de controle além do seu horizonte seja nulo.

No estudo do MPC, um dos pontos chaves na obtenção da lei de controle é o conceito do horizonte retrocedente, onde a otimização acontece sempre no intervalo de tempo do modelo de predição, levando em consideração o horizonte de predição.

Outrossim, a equação (4.12) pode conter restrições, tanto no sinal de controle quanto no sinal de predição. Essa possibilidade singulariza o MPC, em que a escolha de limites inferiores, superiores e adição de inequações variadas aos sinais implica segurança e estabilidade a planta. Contudo, essa característica necessita da utilização de otimizadores numéricos que resolvam problemas computacionais quadráticos.

4.2 Perspectiva Histórica

Todas as técnicas de controle preditivo seguem a premissa dos três fundamentos citados na seção anterior, diferenciadas por suas propostas no projeto de cada processo. Histori-

camente pode-se entender o processo de desenvolvimento do controle preditivo analisando as técnicas propostas pelos diferentes autores ao passar do tempo.

4.2.1 *Model Algorithmic Control*

Proposto por Rault *et al.* (1978) e inicialmente denominado de Model Predictive Heuristic Control (MPHC), o Model Algorithmic Control (MAC) foi um dos primeiros trabalhos sobre controle preditivo por modelo. Idealizando um modelo de predição baseado em uma resposta ao impulso, é válido somente para processos estáveis em malha aberta. Outra característica do MAC é a utilização do sinal de entrada e não de sua variação, com horizonte de controle inexistente.

4.2.2 *Dynamic Matrix Control*

Dynamic Matrix Control (DMC) representa uma das técnicas pioneiras nos estudos do MPC, promovido por Cutler e Ramaker (1980). Usando um modelo de predição de respostas ao degrau com um horizonte de predição, usa otimização numérica em um modelo com restrições.

4.2.3 *Predictive Functional Control*

Desenvolvido por Richalet (1993), o Predictive Functional Control (PFC) usa um modelo de predição baseado em espaço de estados, permitindo a utilização de modelos não lineares e linearmente instáveis. O PFC divide-se em duas características básicas. A primeira, chamada de pontos coincidentes, determina que apenas um conjunto do horizonte de predição seja utilizado no cálculo da função custo. Já o conceito de funções básicas parametriza o sinal de controle usando um conjunto de funções polinomiais. A função custo do PFC é:

$$J = \sum_{j=1}^{t_y} [r_{k+j} - y_{k+j}]^T [r_{k+j} - y_{k+j}] \quad (4.13)$$

4.2.4 *Extended Prediction Self Adaptive Control*

O Extended Prediction Self Adaptive Control (EPSAC) foi popularizado por Keyser e Cauwenberghe (1985) e usa um modelo baseado em função de transferência com um termo de perturbação $v(t)$:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u_{t-d} + v(t) \quad (4.14)$$

Considerando que a partir de um instante de tempo t , a variação do sinal de controle é nulo, a função custo do EPSAC usa um atraso d e um conjunto polinomial $P(z^{-1})$ em sua formulação:

$$J = \sum_{j=d}^{t_y} [r_{k+j} - P(z^{-1})y_{k+j}]^T W_y [r_{k+j} - P(z^{-1})y_{k+j}] \quad (4.15)$$

A lei de controle pode ser obtida analiticamente em função da resposta ao impulso do sistema discreto h_j :

$$u_k = \frac{\sum_{j=d}^{t_y} h_j W_y [r_{k+j} - P(z^{-1})y_{k+j}]}{\sum_{j=d}^{t_y} W_y h_j^2} \quad (4.16)$$

4.2.5 Extended Horizon Adaptive Control

Sugerido por Ydstie (1984), o Extended Horizon Adaptive Control (EHAC) utiliza um modelo baseado em função de transferência:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u_{t-d} \quad (4.17)$$

Em que a o modelo de predição é dado por:

$$y_{k+t_y} = y_k + F(z^{-1})\Delta y_k \quad (4.18)$$

Propõe a minimização do esforço no sinal de controle, sendo a sua função custo dada por:

$$J = \sum_{j=0}^{t_y-d} \Delta u_{t+j}^T \Delta u_{t+j} \quad (4.19)$$

A lei de controle considera um coeficiente α_j que corresponde a variação do sinal de controle.

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\alpha_0 [r_{k+t_y} - y_{k+t_y}]}{\sum_{j=0}^{t_y-d} \alpha_j^2} \quad (4.20)$$

4.2.6 Generalized Predictive Control

A fim de generalizar todas as funções custos dos controles citados anteriormente, Clarke *et al.* (1987) propôs o Generalized Predictive Control (GPC), que representa um dos grandes momentos do Controle Preditivo.

Pode-se fazer uma abordagem tanto em função de transferência como em espaço de estado e como em modelo interno do GPC. No caso desse trabalho, será explorado o modelo em espaço de estado, representando pela equação (4.8) expandida:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (4.21a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + D\Delta u_k + d_k \quad (4.21b)$$

O modelo deve satisfazer que $y = r$ e $\Delta u = 0$. Ainda assim, sem perda de generalidade e visando obter uma lei de controle rastreadora, adiciona-se a representação as respostas em estado estacionário de referencia dos estados x_{ss} e das entradas u_{ss} . Isso implica a seguinte otimização da função custo:

$$\min_{\vec{u}} J = [\vec{x} - x_{ss}]^T W_y [\vec{x} - x_{ss}] + [\vec{u} - u_{ss}]^T W_u [\vec{u} - u_{ss}] \quad (4.22)$$

Onde W_y deve conter termos presentes de $C^T C$ para $r - y = C(x_{ss} - x)$.

Utilizando o modelo de predição (4.7), é possível fazer uma simples translação da trajetória, onde a função custo (4.22) é escrita como:

$$\min_{\vec{u}} J = [P_x x + H_x \vec{u}]^T W_y [P_x x + H_x \vec{u}] + \vec{u}^T W_u \vec{u} \quad (4.23)$$

A minimização analítica busca obter o valor de \vec{u} tal que:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{u}} = 0 \quad (4.24)$$

Com efeito, isso resulta na seguinte lei de controle:

$$\vec{u} = -[H_x^T W_y H_x + W_u]^{-1} H_x^T W_y P_x x = -Kx \quad (4.25)$$

Incorporando o erro de estimação com as respostas em espaço estacionário:

$$u_k - u_{ss} = -(r - y)^T [H_x^T W_y H_x + W_u]^{-1} H_x^T W_y P_x (x - x_{ss}) \quad (4.26)$$

4.3 Controle Preditivo por Modelo

Observe que todos os controladores citados na seção Perspectiva Histórica usam como referência um modelo de predição. Isso caracteriza o fundamento do Controle Preditivo por Modelo, que engloba todos esses controladores preditivos.

Com efeito, o MPC proporciona uma abordagem mais completa ao GPC, expandindo as possibilidades com a otimização numérica computacional. Conseqüentemente, essa característica oferece a adição de restrições ao modelo, o que torna o MPC singular. Com efeito é possível colocar restrições lineares nas entradas, nas variações das entradas, nos estados e nas saídas:

- $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$;
- $\underline{\Delta u} \leq \Delta u \leq \bar{\Delta u}$;
- $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$;
- $\underline{y} \leq y \leq \bar{y}$;

Ainda é possível adicionar outras inequações variadas, dependendo do programa de otimização a ser utilizado.

Dessa forma, a equação (4.12) se resume a:

$$\min_{\vec{\Delta u}} J \quad \text{s.t.} \quad \text{constraints} \quad (4.27)$$

4.4 Controle Preditivo por Modelo Não Linear

Até então, todo o desenvolvimento abordado leva em conta um modelo de predição linear, otimizadores lineares e leis de controles lineares. O NMPC surge oferecendo uso direto de modelos de predição não lineares e restrições não lineares. O estudo proposto por Chen e

Allgöwer (1998) oferece modelos de NMPC, o quais são desenvolvidos em outros trabalhos de Allgöwer *et al.* (1999) e Findeisen *et al.* (2003).

Outrossim, o desenvolvimento de estudos de estabilidade, otimização e robustez do NMPC são pontos focais dos trabalhos propostos por Mayne *et al.* (2000) e por Nicolao *et al.* (2000).

O NMPC desfruta da evolução dos otimizadores computacionais, os quais possibilitam o desenvolvimento de minimização de funções custos não lineares seguindo restrições que também podem ser não lineares. Contudo, ainda assim é um controlador que demanda muito esforço computacional, sendo fundamental a escolha correta do modelo de predição, o qual deve ser sempre o mais simples possível que garanta um resultado satisfatório.

4.4.1 Projeto do algoritmo

Nesse trabalho, o projeto do controlador preditivo não linear é baseado no algoritmo implementado por MathWorks (2023), que fornece um objeto *nlmpc* capaz de gerar sinais de controle otimizados. O fundamento do programa é resolver a minimização de uma função custo não linear e não quadrática seguindo as restrições que também podem ser não lineares. Ademais, é possível passar modelos de predições não lineares para controlador.

Com efeito, a implementação do algoritmo abordada nesse trabalho pode ser descrita pelo seguintes passos:

1. Inicializar as quantidades de entradas, estados e saídas necessárias para criação do controlador;
2. Informar ao controlador o tempo de amostragem do modelo de predição, o horizonte de predição, o horizonte de controle e o número de parâmetros adicionais;
3. Caso seja utilizado a função custo padrão, conforme será realizado nesse trabalho, deve-se passar ao controlador os valores de pesos das variáveis manipuláveis e das variáveis de saída, assim como as restrições de limites inferiores e superiores para cada uma;
4. Por fim, fornecer ao controlador o modelo de predição e informar se é contínuo ou discreto.

Seguindo esses passos, é possível configurar o algoritmo do controlador que estará apto a operar conforme projetado.

O objetivo desse trabalho é implementar modelos de predições polinomiais obtidos pela técnica DMDp descrita no capítulo anterior e portanto observar o seu comportamento como protótipo interno do controlador preditivo não linear. Portanto, é viável o uso da função custo

padrão do MathWorks (2023) assim como a simplificação máxima do controlador. Por padrão, a otimização é baseado na seguinte equação:

$$J(z_k) = J_y(z_k) + J_u(z_k) + J_{\Delta u}(z_k) + J_\varepsilon(z_k) \quad (4.28)$$

Onde J_y representa o custo de rastreamento de referência do sinal de saída, J_u é o custo de rastreamento do sinal de entrada, $J_{\Delta u}$ é designado ao custo da variação do sinal de controle e $J_\varepsilon(z_k)$ é o custo da violação das restrições. Tem-se que o equacionamento para cada uma dessas funções é dado por:

$$J_y(z_k) = \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{W_{i,j}^y}{s_j^y} [r_j(k+i|k) - y_j(k+i|k)] \right\}^2 \quad (4.29)$$

$$J_u(z_k) = \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{i=0}^{p-1} \left\{ \frac{W_{i,j}^u}{s_j^u} [u_j(k+i|k) - u_{j,target}(k+i|k)] \right\}^2 \quad (4.30)$$

$$J_{\Delta u}(z_k) = \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{i=0}^{p-1} \left\{ \frac{W_{i,j}^{\Delta u}}{s_j^u} [u_j(k+i|k) - u_j(k+i-1|k)] \right\}^2 \quad (4.31)$$

$$J_\varepsilon(z_k) = \rho_\varepsilon \varepsilon_k^2 \quad (4.32)$$

Em que:

- k : intervalo de controle atual;
- p : horizonte de predição;
- n_y : número de variáveis de saída do sistema;
- n_u : número de variáveis de controle do sistema;
- $W_{i,j}^y$: peso do sinal de saída j no horizonte de predição i ;
- $W_{i,j}^u$: peso do sinal de controle j no horizonte de predição i ;
- $W_{i,j}^{\Delta u}$: peso de variação do sinal controle j no horizonte de predição i ;
- s_j^y : fator escalar do sinal de saída j ;
- s_j^u : fator escalar do sinal de controle j ;
- ε_k : variável de folga do intervalo de controle k ;

- ρ_ε : variável de penalização da violação de restrição;
- $y_j(k+i|k)$: valor de predição do sinal de saída j no horizonte de predição i ;
- $r_j(k+i|k)$: valor de referência do sinal de saída j no horizonte de predição i ;
- $u_j(k+i|k)$: valor do sinal de controle j no horizonte de predição i ;
- $u_{j,target}(k+i|k)$: valor de referência do sinal de controle j no horizonte de predição i ;
- z_k : vetor de variáveis de decisão equacionadas por

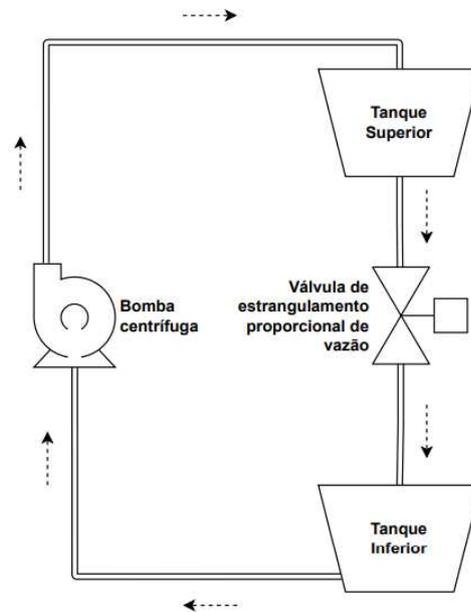
$$z_k^T = \left[u(k|k)^T \quad u(k+1|k)^T \quad \dots \quad u(k+p-1|k)^T \quad \varepsilon_k \right] \quad (4.33)$$

À luz das considerações, seguindo todos esses passos é possível projetar e configurar o algoritmo simplificado de controle preditivo não linear usando o *software* MathWorks (2023). Observa-se que a vantagem do enfoque não linear no projeto do controle preditivo é a utilização de modelos polinomiais diversos na obtidos com o DMDp através dos dados de entrada e saída ensaiados da planta. Logo, esse tipo de controle pode ainda ser classificado como Nonlinear Model Data Predictive Control (NMDPC), ou seja, controle preditivo não linear baseado em um modelo de dados. Existe ainda a possibilidade de usar diretamente o operador S do DMDp como preditor do controlador, não necessitando assim obter o modelo polinomial do sistema. A implementação dessa ideia, possibilitaria a criação do Nonlinear data-driven Predictive Control (NDDPC), isto é, o controle preditivo não linear *data-driven*.

5 ESTUDO DE CASO

A proposta do estudo de caso desse trabalho consiste no projeto de um sistema elétrico-hidráulico fundamentado em um par de tanques cônicos, uma bomba centrífuga, uma válvula de estrangulamento proporcional de vazão, tubos de transporte de fluidos, um inversor de frequência, um sensor de nível de líquido e um sistema de acionamento e controle.

Figura 1 – Sistema hidráulico.

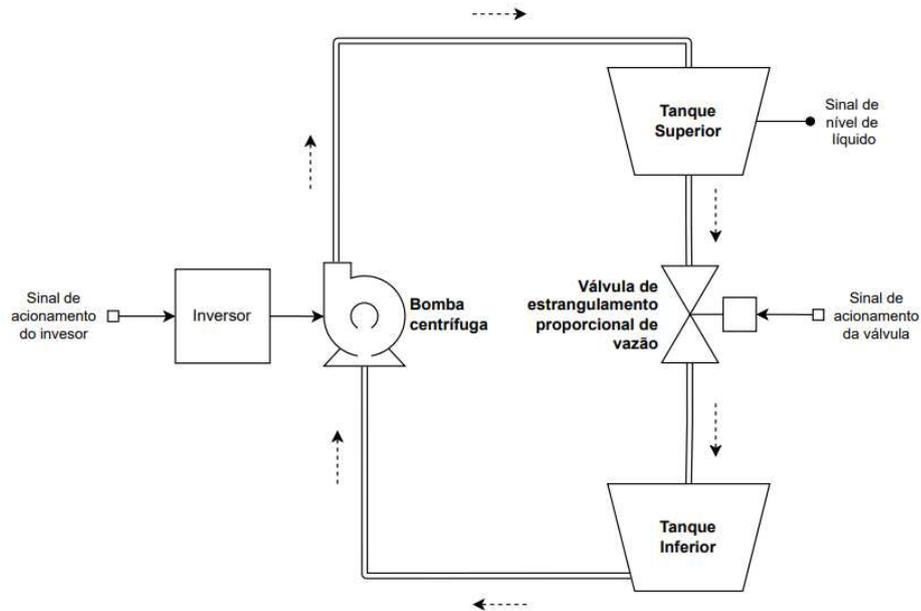


Fonte: elaborada pelo autor.

O sistema hidráulico é esquematizado conforme a Figura 1. Um dos tanques é posicionado ao nível do solo, sendo esse chamado de tanque inferior. O segundo reservatório fica a uma determinada altura do chão, sendo esse nomeado de tanque superior. A bomba centrífuga é responsável por realizar o trabalho de transportar o líquido presente no tanque inferior para o tanque superior. Completando o ciclo hidráulico, o líquido escoar do tanque superior ao tanque inferior, através de uma válvula de estrangulamento proporcional de vazão.

Com efeito, o sistema elétrico é visto de acordo com a Figura 2, representado por um inversor de frequência, acoplado a um sistema de acionamento e controle, responsável por acionar a bomba centrífuga. E mesmo sistema de acionamento e controle é responsável por determinar o estrangulamento proporcional na válvula de vazão. Finalizando o fluxo, o sensor de nível de líquido é posicionado no tanque superior, sendo o sinal do mesmo captado pelo sistema de controle.

Figura 2 – Sistema elétrico-hidráulico.



Fonte: elaborada pelo autor.

5.1 Modelo teórico

O sistema é fundamentado na geometria espacial do tanque, na mecânica dos fluidos envolvendo o princípio hidráulico da planta e no sistema de controle responsável por sensoria-mento e acionamento do sistema.

5.1.1 Geometria espacial

O modelo matemático proposto para o sistema elétrico hidráulico consiste na análise física da variação de volume de líquido no tanque superior. Essa variação é igual a diferença da vazão de líquido que entra, proveniente do trabalho realizado pela bomba centrífuga, e da vazão de líquido que sai, ajustada conforme o estrangulamento proporcional da válvula de vazão, de modo representado pela equação:

$$\frac{d}{dt}V = q_i - q_o \quad (5.1)$$

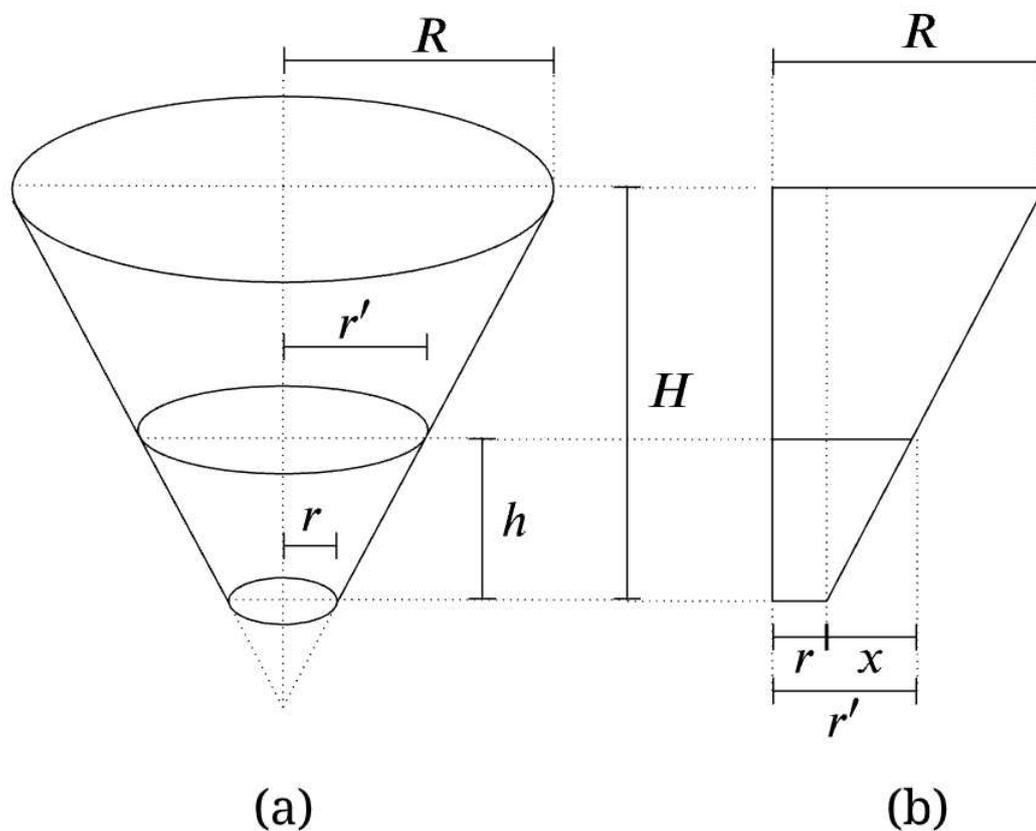
Onde:

- V é o volume de líquido do tanque, em metros cúbicos (m^3);
- q_i é a vazão de entrada do líquido, em metros cúbicos por segundo (m^3/s);
- q_o é a vazão de saída do líquido, em metros cúbicos por segundo (m^3/s);

Os dois tanques são iguais e possuem a geometria de um tronco de cone, quando existente uma coluna de líquido de altura não nula. Representado na Figura 3, o volume geométrico é dado pela equação:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r'^2 + r^2 + r' r) \quad (5.2)$$

Figura 3 – Geometria do tronco de cone. (a) Vista perspectiva e (b) Vista da seção frontal.



Fonte: elaborada pelo autor.

Onde:

- r' é o raio da base maior do tanque preenchido pela coluna de líquido, em metros (m);
- r é o raio da base menor do tanque, em metros (m);
- R é o raio da base maior do tanque, em metros (m);
- h é a altura da coluna de líquido no tanque, em metros (m);
- H é a altura total do tanque, em metros (m);

É necessário ainda que duas condições sejam atendidas dado a descrição do tronco de cone, que são:

- $0 \leq h \leq H$;
- $r \leq r' \leq R$;

Utilizando semelhança triangular, tomando como base a vista de seção frontal na Figura 3, resulta em:

$$r' = r + \frac{h(R-r)}{H}. \quad (5.3)$$

Ainda assim, reescrevendo (5.2) substituindo r' :

$$V = \pi r^2 h + \frac{\pi r h^2 (R-r)}{H} + \frac{\pi h^3 (R-r)^2}{3H^2} \quad (5.4)$$

Resolvendo a equação diferencial (5.1) com a expressão (5.4) do volume do tronco de cone, encontra-se que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q_i - q_o}{\pi r^2 + \frac{2\pi r h (R-r)}{H} + \frac{\pi h^2 (R-r)^2}{H^2}} \quad (5.5)$$

5.1.2 Mecânica dos fluidos

O conceito de mecânica dos fluidos aplicado ao tanque é baseado na proposta por Bernoulli (1738), que visa obter a vazão de entrada e de saída em função da altura da coluna de líquido, responsáveis por descrever o sistema. Inicialmente, tem-se que a principal equação pode ser expressado por:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constante} \quad (5.6)$$

Onde:

- P é a pressão do fluido, em pascals (Pa);
- ρ é a densidade do fluido, em quilogramas por metro cúbico (kg/m^3);
- v é a velocidade do fluido, em metros por segundo (m/s);
- g é a aceleração da gravidade, em metros por segundo quadrado (m/s^2);

– h é a altura do fluido, em metros (m).

A vazão de saída de um fluido pode ser calculada a partir da seguinte equação:

$$q_o = A_r v \quad (5.7)$$

Onde:

– A_r é a área da abertura, em metros quadrados (m²);

– v é a velocidade do fluido, em metros por segundo (m/s);

Por sua vez, a equação da velocidade de um fluido é dado por:

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \quad (5.8)$$

Trabalhando com as equações (5.6), (5.7) e (5.8), simplifica-se:

$$q_o = A_r \sqrt{\frac{2gh}{\rho}} \quad (5.9)$$

Define-se k_o como a constante de proporcionalidade que representa a relação entre a área da abertura e a vazão de saída do líquido:

$$k_o = A_r \sqrt{\frac{2g}{\rho}} \quad (5.10)$$

Dessa forma, substituindo (5.10) em (5.9):

$$q_o = k_o \sqrt{h} \quad (5.11)$$

Com isso, a equação (5.5) pode ser reescrita como:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q_i - k_o \sqrt{h}}{\pi r^2 + \frac{2\pi r h (R-r)}{H} + \frac{\pi h^2 (R-r)^2}{H^2}} \quad (5.12)$$

A bomba centrífuga é um dispositivo que bombeia um volume constante de fluido por unidade de tempo. A velocidade angular da bomba é diretamente proporcional à quantidade

de fluido bombeado por unidade de tempo, e a velocidade de rotação é controlada pelo inversor de frequência.

$$q_i = k_i \omega \quad (5.13)$$

Onde:

- k_i é uma constante da eficiência da bomba e depende do design da bomba, em $\text{m}^3/\text{s}/\text{rad}/\text{s}$;
- ω é a velocidade angular da bomba, em radianos por segundo (rad/s).

Substituindo (5.13) em (5.12), é possível obter a principal fundamentação matemática do sistema:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_i \omega - k_o \sqrt{h}}{\pi r^2 + \frac{2 \pi r h (R - r)}{H} + \frac{\pi h^2 (R - r)^2}{H^2}} \quad (5.14)$$

Observando a equação principal do sistema (5.14), verifica-se uma planta caracterizada pela não linearidade em relação a altura do fluido. Além disso, esse modelo é representado por uma equação racional. Essa particularidade dificulta a análise matemática e física da planta, assim como o projeto de controle. Portanto, será utilizado a Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, explicitado no capítulo 3, para obter o modelo polinomial referente ao modelo analítico do sistema, usando apenas dados de entrada e saída adquirido pelo ensaio simulado da planta (5.14).

5.1.3 Sistema de controle

O sistema de controle é estruturado com base em uma variável de entrada, a velocidade angular da bomba, e uma variável de saída, a altura do fluido no tanque. Ademais, constituem de forma auxiliar ao sistema parâmetros dinâmicos, a constante de proporcionalidade e a constante da eficiência da bomba, e grandezas geométricas relacionadas ao reservatório em forma de tronco de cone.

5.1.3.1 Entrada e saída

A variável de entrada mecânica definida para o sistema é a velocidade angular da bomba (ω), sendo responsável pelo acionamento da planta, fazendo com que o fluido seja transportado do tanque inferior ao tanque superior em uma determinada proporção de vazão.

A variável de saída mecânica é representada pela altura do fluido no tanque (h), que é obtida através do sensor de nível de líquido, presente do tanque superior.

No modelo de controle, são analisados pontos de operação de referência, onde para a entrada será definido como ω_s e para a saída h_s , respectivamente representados pela velocidade angulas de referência e a altura do fluido de referência. A diferença entre a variável real e a variável de referência é o sinal de controle.

Sendo assim, definimos a entrada de controle do sistema como:

$$u(t) = \omega - \omega_s \quad (5.15)$$

E a saída de controle como:

$$y(t) = h - h_s \quad (5.16)$$

5.1.3.2 Parâmetros dinâmicos

A constante de proporcionalidade (k_o) é um dos parâmetros dinâmicos do sistema, sendo essa constante diretamente dependente da válvula de estrangulamento proporcional. A segunda variável dinâmica é a constante de eficiência (k_i), a qual depende da bomba centrífuga adotada no sistema.

Esses dois parâmetros dinâmicos podem ser obtidos através de um ensaio em malha aberta do sistema para cada variável. O resultado desse ensaio será um conjunto de dados de saída por tempo. Após isso, realiza-se uma regressão linear com esses valores.

Descritivamente, para obter k_i é necessário fechar totalmente a válvula de estrangulamento proporcional de vazão de saída e acionar o conjunto motor bomba para trabalhar com uma vazão de entrada constante definida pelo operador. A medição da altura do nível de líquido no tanque pelo tempo decorrido de ensaio fornece os dados necessários para a realização de k_i .

Por outro lado, para a aquisição do valor de k_o , requer que o tanque esteja com sua capacidade máxima de volume e o conjunto motor bomba desligado. Com isso, abre-se a válvula de estrangulamento proporcional de vazão de saída a um certo nível determinado pelo operador. Analogamente a variável k_i , os dados coletados de altura da coluna do líquido pelo tempo decorrido de ensaio é suficiente para a aquisição do valor de k_o referente a abertura definida para a válvula.

5.1.3.3 Grandezas geométricas

As grandezas geométricas do tanque são dadas pelo o raio da base menor do tanque (r), o raio da base maior do tanque (R) e a altura limite do tanque (H). Esses fatores são tratados como constantes.

5.2 Simulação do projeto em malha aberta

A proposta de simulação do sistema em malha aberta requer o projeto da planta. Para isso, define-se inicialmente as dimensões que o tanque. Após isso é imprescindível a idealização do comportamento modelo visando definição dos valores dos parâmetros dinâmicos e dos limites dos sinais de entrada e de saída. Finalmente, utilizando o software *MATLAB* (The MathWorks, Inc., 2023), é desenvolvido um programa para simular o comportamento do sistema resolvendo a equação diferencial (5.14).

5.2.1 Dimensões do sistema

O projeto das dimensões da planta especifica as grandezas geométricas do tanque. A base dessas medidas foram escolhidas de acordo com reservatórios reais e possuem as seguintes medidas:

- $r = 0.635$, em metros (m);
- $R = 0.73$, em metros (m);
- $H = 1.38$, em metros (m);

É importante ressaltar que a altura da coluna de líquido será limitada por $0 \leq h \leq 1.38$, em metros (m), e o volume do tanque varia de $0 \leq V \leq 2.0227$, em metros cúbicos (m^3), calculado segundo a equação (5.4).

Projeta-se a utilização um sistema motor bomba acionado por um inversor de frequência capaz de operar com uma frequência f que varia de $0 \leq f \leq 60$, em ciclos por segundo (Hz). Dessa forma, a entrada do sistema caracterizada pela velocidade angular da bomba é limitada por $0 \leq \omega \leq 376.9911$, em radianos por segundo (rad/s).

Deseja-se que o tanque superior fique a uma altura de 12 metros do tanque inferior, ou seja, é necessário que a bomba centrífuga opera com uma altura manométrica total de 12 metros. Ademais, será utilizado uma motor com potência igual a 1.5 cv. À luz dessas definições, é dimensionado uma bomba centrífuga de 1.5 cv com vazão nominal de $14.0 m^3/h$.

5.2.2 Comportamento do sistema

O comportamento do modelo projetado segue a premissa de que quando a válvula de estrangulamento proporcional de vazão de saída está totalmente fechada e a velocidade do conjunto motor bomba está operando em seu valor máximo de forma constante. Empregando a equação (5.13) dimensiona-se o valor de k_i como:

$$k_i = \frac{q_{i,nominal}}{\omega_{max}} \quad (5.17)$$

Onde:

- $q_{i,nominal} = 14$: vazão nominal da bomba centrífuga, em metros cúbicos por hora (m^3/h);
- $\omega_{max} = 376.9911$: velocidade angular máxima.

Substituindo os valores:

$$k_i = 1.0316 \times 10^{-5} [m^3/s/rad/s] \quad (5.18)$$

Outrossim, o modelo projetado segue uma segunda premissa de que quando o motor está ligado com frequência de 60 Hz e a válvula de estrangulamento proporcional de vazão de saída é aberta por completo, a vazão de entrada será igual a vazão de saída quando a coluna de líquido atinge 60% da altura máxima do tanque H , equivalente a 0.8280 m .

À luz dessas considerações, iguala-se as equações (5.11) e (5.13) visando obter o valor máximo de k_o a partir da especificação e do valor de k_i previamente adquirido.

$$k_{o,max} = \frac{k_i \omega}{\sqrt{0.60H}} \quad (5.19)$$

Substituindo valores:

$$k_{o,max} = 0.0043 [m^5/s] \quad (5.20)$$

Portanto, resumi-se os valores paramétricos do sistema na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema

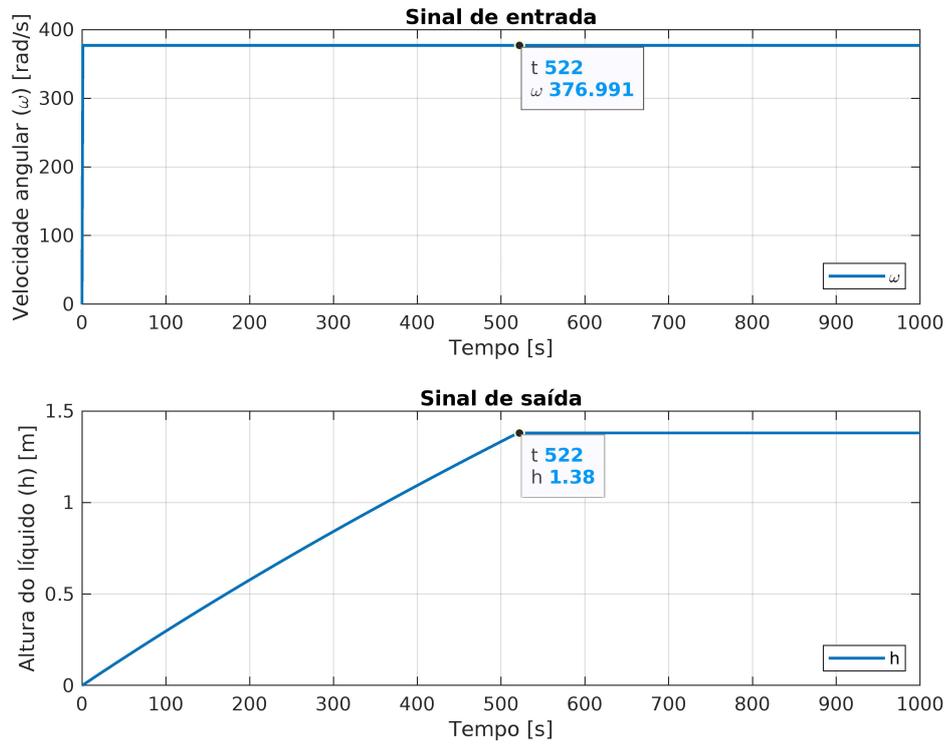
Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
r	Raio da base menor do tanque	0.635	m
R	Raio da base maior do tanque	0.73	m
H	Altura limite do tanque	1.38	m
h	Altura da coluna de líquido	$0 \leq h \leq 1.38$	m
V	Volume de líquido	$0 \leq V \leq 2.0227$	m^3
f	Frequência de acionamento do inversor	$0 \leq f \leq 60$	Hz
ω	Velocidade angular de acionamento da bomba	$0 \leq \omega \leq 376.9911$	rad/s
H_{tsi}	Altura entre o tanque inferior e superior	12	m
H_m	Altura manométrica de operação da bomba	12	m
Pot	Potência nominal da bomba	1.5	cv
$q_{i,nominal}$	Vazão nominal da bomba	14	m^3/h
k_i	Constante de eficiência	1.0316×10^{-5}	$m^3/s/rad/s$
k_o	Constante de proporcionalidade	$0 \leq k_o \leq 0.0043$	$m^{\frac{5}{2}}/s$

5.2.3 Simulação do sistema em malha aberta

Com efeito, pode-se analisar o comportamento do sistema em malha aberta por diversos ângulos diferentes, compreendendo o comportamento esperado da planta conforme o projetado, as saídas para diferentes valores de entrada e a resposta do modelo para diferentes valores de k_o .

Inicialmente, verifica-se o comportamento do sistema simulando a vazão máxima da bomba centrífuga com a válvula de estrangulamento proporcional totalmente e fechada, quando $k_o = 0 m^{\frac{5}{2}}/s$. Esse resultado providência a veracidade do valor projetado de k_i , como mostra a Figura 4.

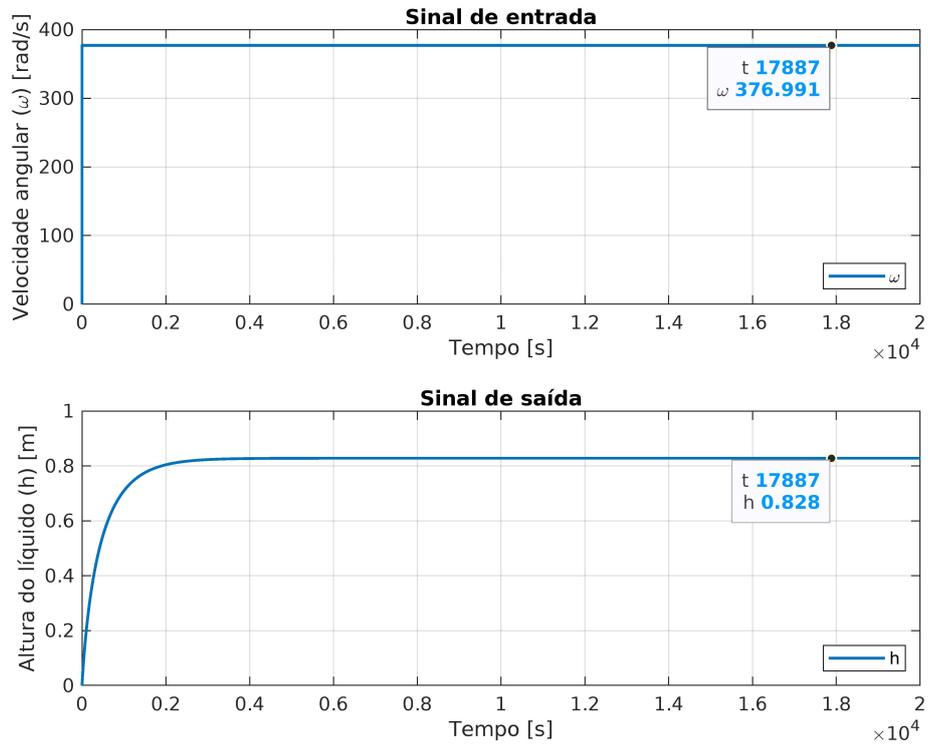
Figura 4 – Gráfico do ensaio do sistema com $k_o = 0 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/\text{s}$ e $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Outrossim, utilizando a abertura máxima da válvula de estrangulamento proporcional igual a $k_o = 0.0043 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/\text{s}$, é visível na Figura 5 o comportamento do sistema, que satura na altura especificada de 0.8280 m . Ademais, é possível observar que o sistema demora mais para atingir o ponto de operação, sendo necessário 17887 segundos para alcançar a altura projetada.

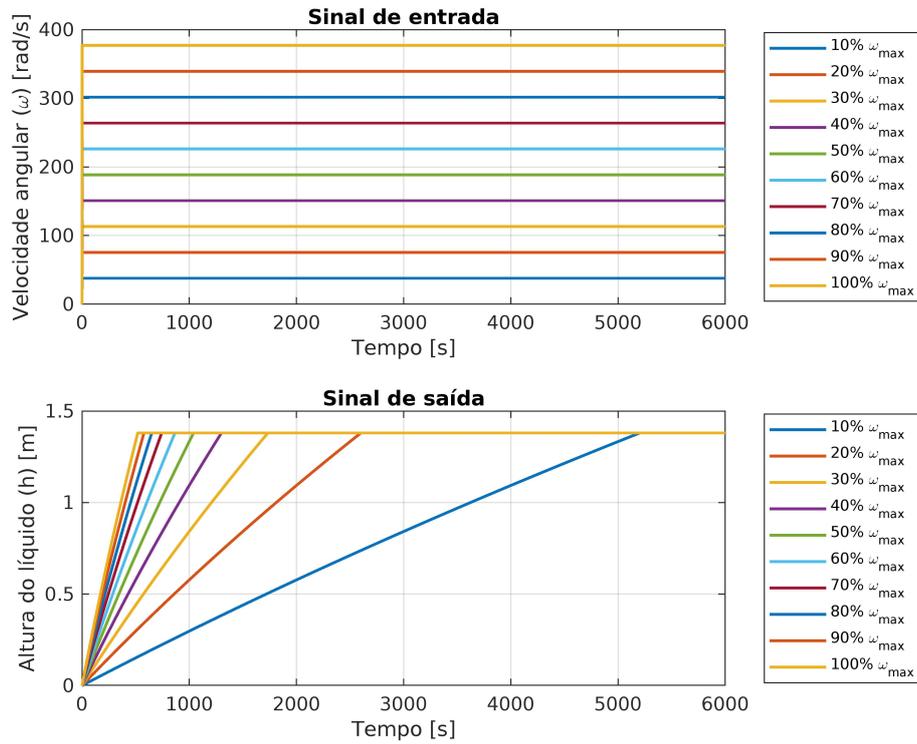
Figura 5 – Gráfico do ensaio do sistema com $k_o = 0.0043 \text{ m}^5/\text{s}$ e $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Com efeito, varia-se a velocidade angular de 10% em 10% do limite máximo, mantendo a válvula de estrangulamento proporcional totalmente fechada, a fim de avaliar o comportamento da variável de vazão de entrada do sistema como mostra a Figura 6. Esse ensaio é responsável por viabilizar a análise de não linearidade existente na geometria do reservatório.

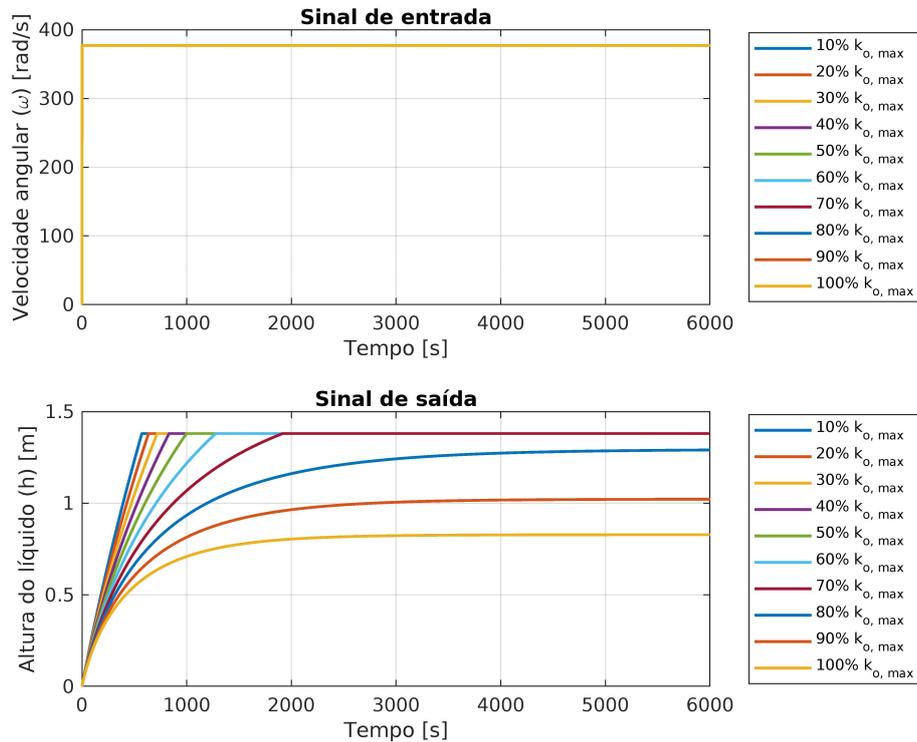
Figura 6 – Gráfico do ensaio do sistema variando a velocidade angular com $k_o = 0 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/s$



Fonte: elaborada pelo autor.

Especificando uma variação apenas na constante de proporcionalidade da vazão de saída k_o de 10% em 10% do valor máximo, conservando a velocidade angular em seu limite superior, é possível verificar o comportamento da variável de vazão de saída do sistema como mostra a Figura 7. Esse resultado mostra o quanto o comportamento do sistema varia com a mudança na abertura da válvula de estrangulamento proporcional, a qual quanto mais aberta maior a influência no sistema, alterando principalmente o ponto de saturação e o tempo de assentamento.

Figura 7 – Gráfico do ensaio do sistema variando k_o com $\omega = 376.9911 \text{ rad/s}$



Fonte: elaborada pelo autor.

5.3 Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial do Sistema

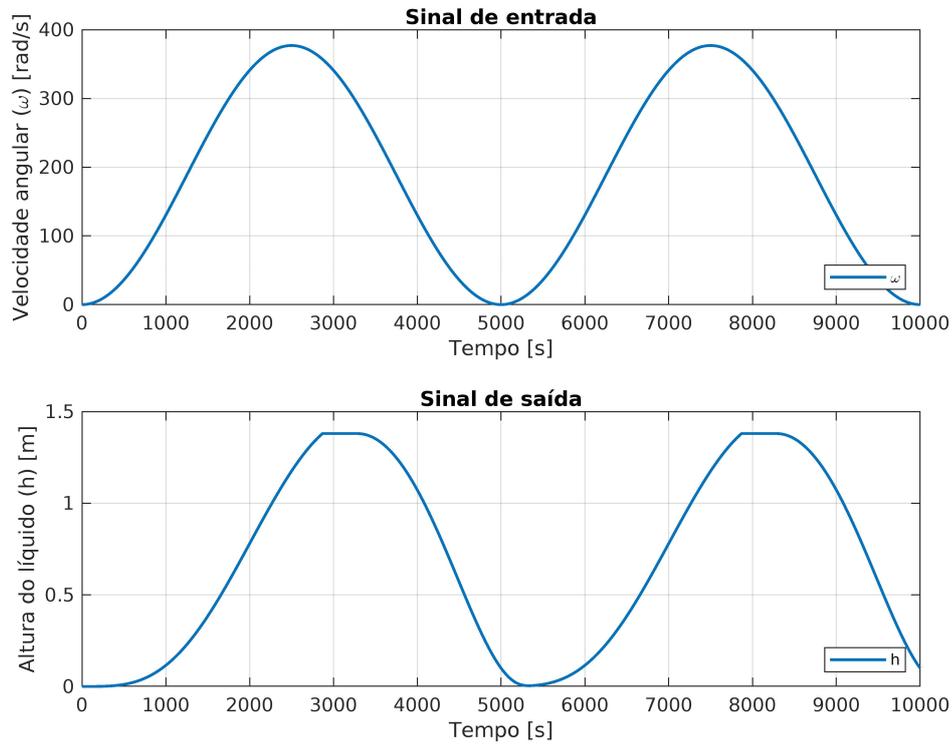
A partir do projeto e da simulação desenvolvida para o sistema em estudo, pode-se aplicar os conceitos *data-driven* da Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial obtidos no Capítulo 3, com o objetivo de descrever a planta racional (5.14) de forma polinomial e semelhante a (3.2).

O DMDp depende apenas do ensaio do sistema a partir de uma entrada persistentemente excitante e capaz de fornecer dados que abrangem todas as dinâmicas presentes na planta. Contudo,

A simulação do sistema em malha aberta fornece características fundamentais da planta, facilitando a escolha de um sinal de entrada capaz de ser persistentemente excitante e dinamicamente rico. Logo, propõe-se ensaiar um sinal senoidal com período igual a 5000 segundos e amplitude igual a 376.9911 rad/s conforme mostrado na Figura 8.

O comportamento do sistema é significativamente dependente do valor do parâmetro k_o , sendo necessário fixá-lo com uma constante, escolhendo-se $k_o = 60\% k_{o,max} = 0.00258 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/\text{s}$.

Figura 8 – Gráfico do ensaio do sistema para entrada senoidal



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir do ensaio da planta, define-se o polinômio modelo a ser utilizado, que deve ser análogo a equação (3.2). Para isso sabe-se que a planta escolhida possui apenas uma entrada e uma saída, caracterizando um sistema *SISO*. Ademais, não existe influência do estado na entrada, logo verifica-se que $W(x) = 1$ obrigatoriamente. Logo, tem-se que:

$$x_{k+1} = AZ(x_k) + Bu_k \quad (5.21)$$

Lembra-se ainda a necessidade de que $Z(0) = 0$ e que o seu grau superior seja conhecido.

Inicialmente, escolhe-se $Z(x) = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$. Esse caso particular do DMDp é igual ao DMDc.

Como definido nas séries temporais (3.4), (3.7) e (3.8), e lembrando que $Z_o = H(X)X$ e $W_o = W(X)U$ tem-se que:

$$X' = AZ_o + BW_o \quad (5.22)$$

É comprovado computacionalmente que U é persistentemente excitante de ordem 2 e que $\text{rank} \begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = 2$. Logo, conclui-se que dos dados obtidos são factíveis, permitindo o prosseguindo da análise.

A partir de (3.14), é possível encontrar que:

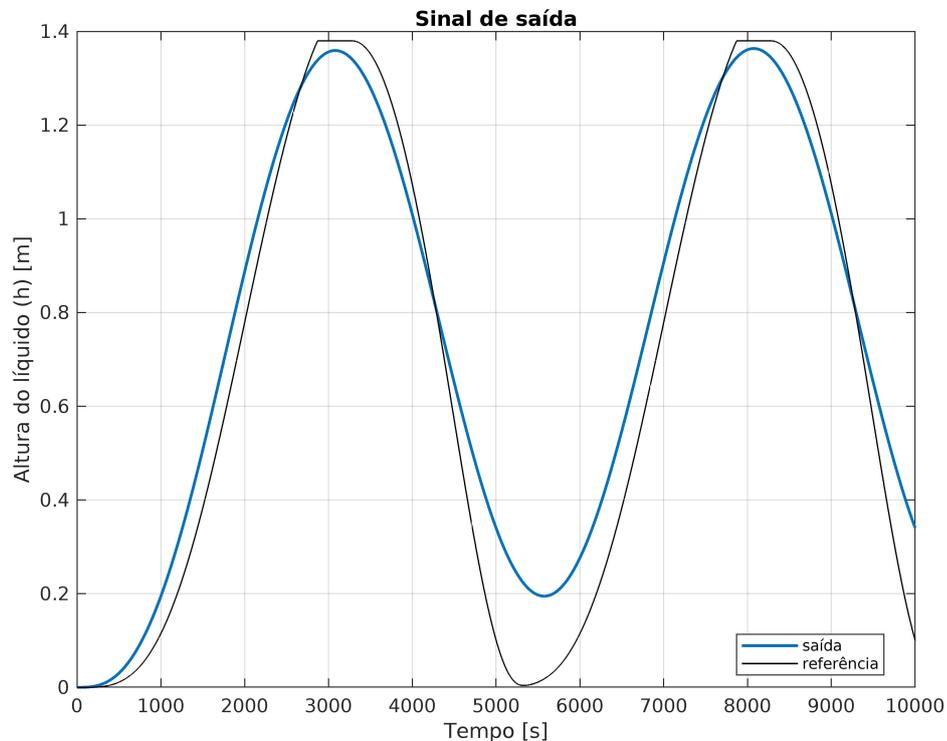
$$S_1 = \begin{bmatrix} 5.8857 \times 10^{-6} & 0.99858 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Portanto, $A_1 = 0.99858$ e $B_1 = 5.8857 \times 10^{-6}$, resultando em:

$$x_{k+1} = 5.8857 \times 10^{-6} u_k + 0.99858 x_k \quad (5.24)$$

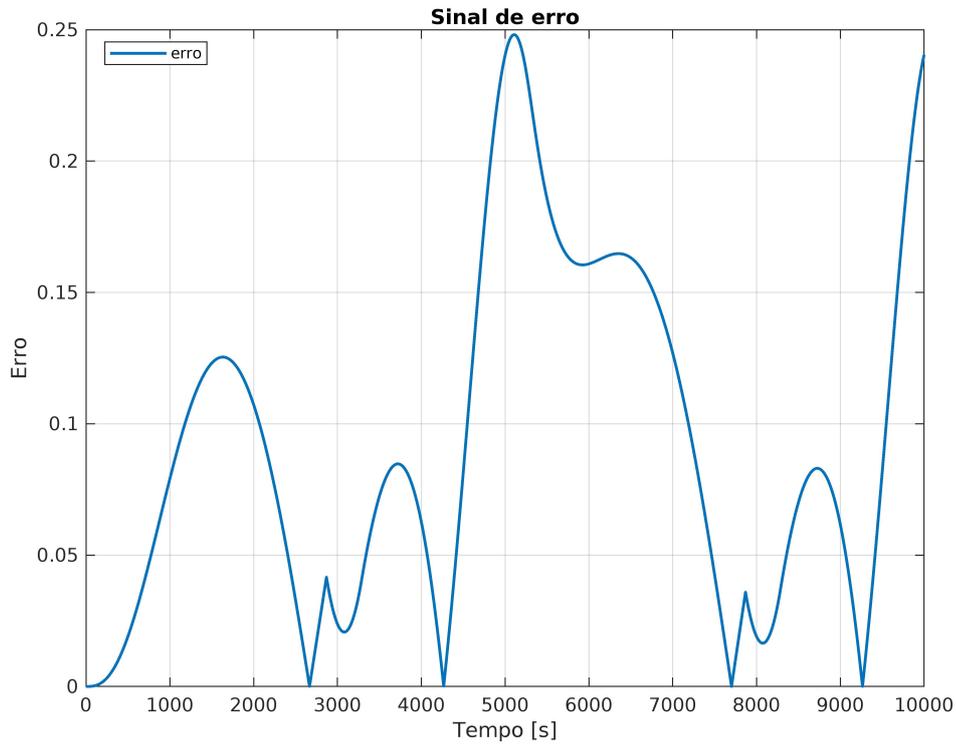
A comparação do modelo polinomial obtido com o real é mostrado na Figura 9 e o erro absoluto na Figura 10.

Figura 9 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.24) e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 10 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.24) e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando o caso polinomial mais complexo abordado, em que:

$$Z(x) = \left[x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \quad x^7 \quad x^8 \quad x^9 \quad x^{10} \right]^T \quad (5.25)$$

Obtém-se pelo DMDp o seguinte resultado:

$$S_{10} = \begin{bmatrix} 6.9384 \times 10^{-6} & 0.98797 & 0.10923 & -0.60757 & 1.9087 & -3.5154 \\ \dots & 3.808 & -2.2791 & 0.57542 & 0.050545 & -0.039495 \end{bmatrix}^T \quad (5.26)$$

Com isso,

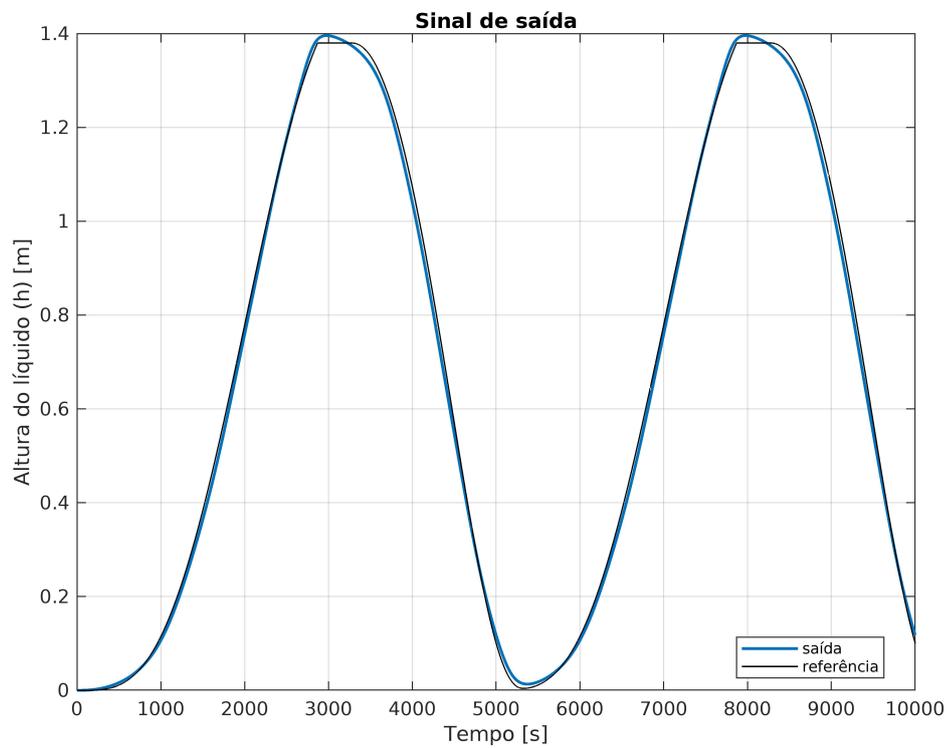
$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0.98797 & 0.10923 & -0.60757 & 1.9087 & -3.5154 & 3.808 \\ \dots & -2.2791 & 0.57542 & 0.050545 & -0.039495 & \end{bmatrix}^T \quad (5.27)$$

E $B_{10} = 6.9384 \times 10^{-6}$, resultando em:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = & 6.9384 \times 10^{-6} u_k + 0.98797 x_k + 0.10923 x_k^2 - 0.60757 x_k^3 \\
 & + 1.9087 x_k^4 - 3.5154 x_k^5 + 3.808 x_k^6 - 2.2791 x_k^7 + 0.57542 x_k^8 \\
 & + 0.050545 x_k^9 - 0.039495 x_k^{10}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

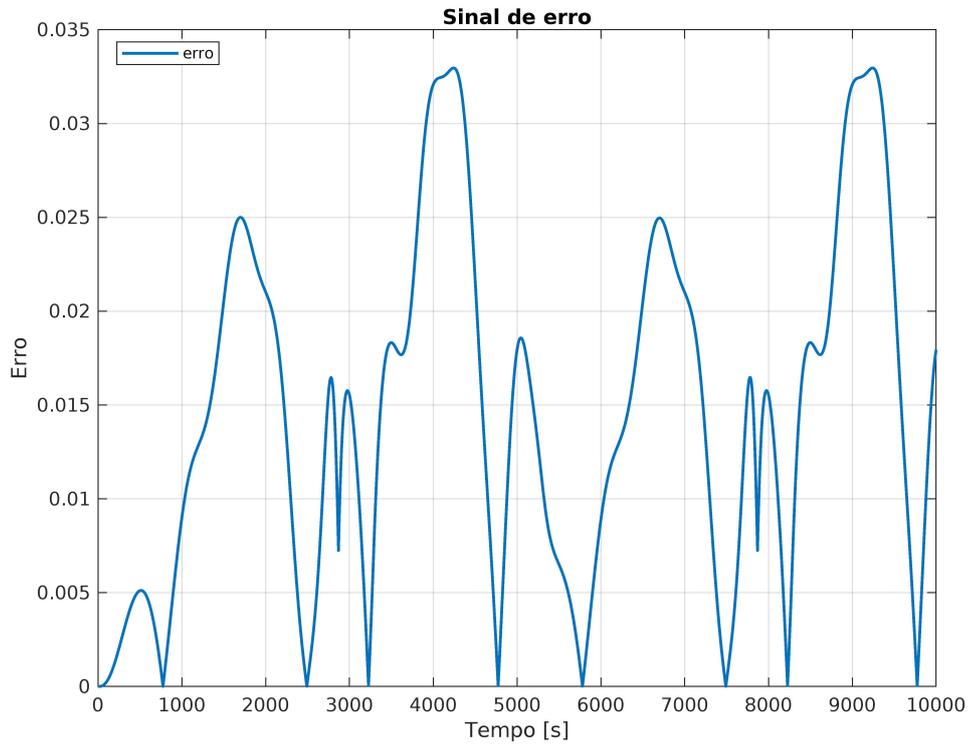
Observa-se na Figura 11 e na 12 que a adição do termo quadrático de x em $Z(x)$ melhorou significativamente o modelo polinomial.

Figura 11 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.28) e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 12 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.28) e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da análise das Figuras 9 e 11 nota-se uma melhoria significativa na forma de onda modelada com a utilização do polinômio mais complexo em $Z(x)$, enfatizando a ideia de que o DMDp surge como uma melhoria imediata do DMDc. Esse resultado qualitativo é ainda explicitado na análise quantitativa nas Figuras 10 e 12, onde visualiza-se uma diminuição significativa no valor de erro, decaindo consideravelmente de S_1 em S_10 .

Com isso, levanta-se a hipótese experimental de que o aumento de monômios no polinômio $Z(x)$ é responsável por tornar o modelo mais preciso. Sendo assim, é possível examinar, de forma prática, a influência do aumento do número de polinômios em $Z(x)$, analisando os seguintes casos:

1. $Z_1(x) = [x]^T$
2. $Z_2(x) = [x \ x^2]^T$
3. $Z_3(x) = [x \ x^2 \ x^3]^T$
4. $Z_4(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4]^T$
5. $Z_5(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5]^T$
6. $Z_6(x) = [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6]^T$

$$\begin{aligned}
7. Z_7(x) &= [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7]^T \\
8. Z_8(x) &= [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8]^T \\
9. Z_9(x) &= [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9]^T \\
10. Z_{10}(x) &= [x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9 \ x^{10}]^T
\end{aligned}$$

A partir dos polinômios escolhidos e da técnica DMDp aplicado a coleção de dados obtidos e representados na Figura 8, obtém-se os seguintes sistemas, respectivamente:

1.

$$x_{k+1} = 5.8857 \times 10^{-6} u_k + 0.99858 x_k \quad (5.29)$$

2.

$$x_{k+1} = 6.5574 \times 10^{-6} u_k + 0.99729 x_k + 0.00095314 x_k^2 \quad (5.30)$$

3.

$$x_{k+1} = 6.8184 \times 10^{-6} u_k + 0.99565 x_k + 0.0044946 x_k^2 - 0.0017869 x_k^3 \quad (5.31)$$

4.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 6.8454 \times 10^{-6} u_k + 0.99484 x_k + 0.0079553 x_k^2 - 0.0060376 x_k^3 \\
&\quad + 0.0015796 x_k^4
\end{aligned} \quad (5.32)$$

5.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 6.9007 \times 10^{-6} u_k + 0.99298 x_k + 0.020614 x_k^2 - 0.033343 x_k^3 \\
&\quad + 0.024866 x_k^4 - 0.0068538 x_k^5
\end{aligned} \quad (5.33)$$

6.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 6.9036 \times 10^{-6} u_k + 0.99256 x_k + 0.024904 x_k^2 - 0.047501 x_k^3 \\
&\quad + 0.045301 x_k^4 - 0.020255 x_k^5 + 0.0032706 x_k^6
\end{aligned} \quad (5.34)$$

7.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 6.9268 \times 10^{-6} u_k + 0.99038 x_k + 0.054944 x_k^2 - 0.18697 x_k^3 \\
&\quad + 0.34395 x_k^4 - 0.34395 x_k^5 + 0.17596 x_k^6 - 0.03603 x_k^7
\end{aligned} \quad (5.35)$$

8.

$$x_{k+1} = 6.9269 \times 10^{-6} u_k + 0.99029 x_k + 0.056488 x_k^2 - 0.19657 x_k^3 + 0.37228 x_k^4 - 0.38872 x_k^5 + 0.21484 x_k^6 - 0.053536 x_k^7 + 0.0031919 x_k^8 \quad (5.36)$$

9.

$$x_{k+1} = 6.9384 \times 10^{-6} u_k + 0.98779 x_k + 0.1146 x_k^2 - 0.6614 x_k^3 + 2.1731 x_k^4 - 4.2496 x_k^5 + 5.0387 x_k^6 - 3.5492 x_k^7 + 1.365 x_k^8 - 0.22056 x_k^9 \quad (5.37)$$

10.

$$x_{k+1} = 6.9384 \times 10^{-6} u_k + 0.98797 x_k + 0.10923 x_k^2 - 0.60757 x_k^3 + 1.9087 x_k^4 - 3.5154 x_k^5 + 3.808 x_k^6 - 2.2791 x_k^7 + 0.57542 x_k^8 + 0.050545 x_k^9 - 0.039495 x_k^{10} \quad (5.38)$$

A título de comparação dos modelos serão utilizados os critérios métricos de MAE, MSE, RMSE, R^2 , ICC e AR^2 :

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |X_h - X_S| \quad (5.39)$$

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (X_h - X_S)^2 \quad (5.40)$$

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (5.41)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (X_h - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_S)^2}{\sum (X_h - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_h)^2} \quad (5.42)$$

$$ICC = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^T (X_h - X_S)^2}{\sum_{i=1}^T (X_h^2) + \sum_{i=1}^T (X_S^2)} \quad (5.43)$$

$$AR^2 = 1 - (1 - R^2)(T - 1)/(T - m - 1) \quad (5.44)$$

Onde:

- T: Número de observações;
- m: Número de entradas

Com base nesses critérios de comparação para cada polinômio Z_i , levanta-se a Tabela

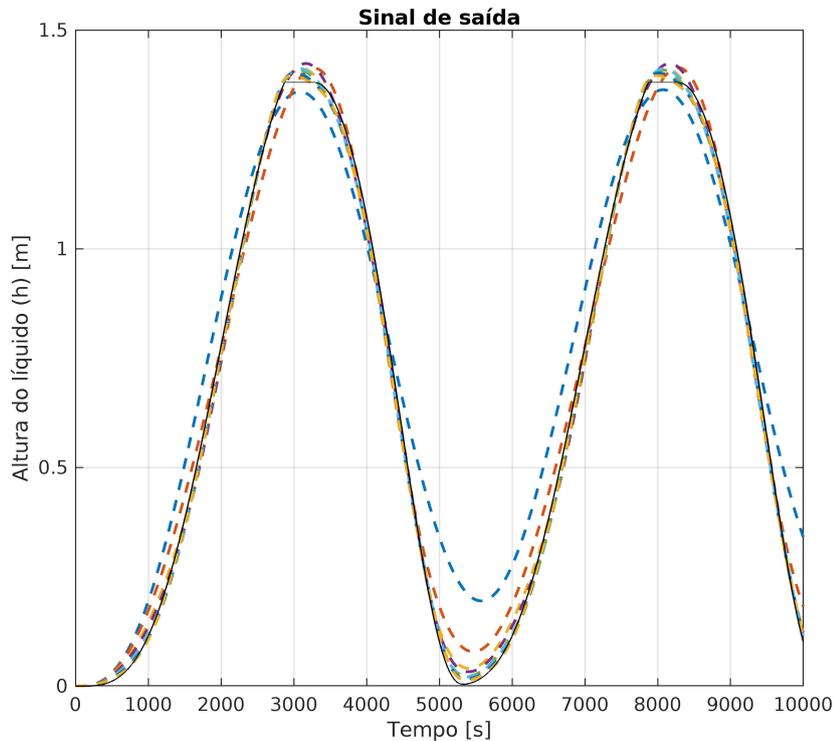
2.

Tabela 2 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos S_1 ao S_{10}

Polinômio	MAE	MSE	RMSE	R^2	ICC	AR^2
Z_1	0.091822	0.012738	0.11286	0.95047	0.98305	0.95046
Z_2	0.038258	0.0020259	0.04501	0.99212	0.99724	0.99212
Z_3	0.020068	0.00055382	0.023533	0.99785	0.99924	0.99785
Z_4	0.018178	0.00048518	0.022027	0.99811	0.99934	0.99811
Z_5	0.016938	0.00037101	0.019262	0.99856	0.99949	0.99856
Z_6	0.016927	0.00037186	0.019284	0.99855	0.99949	0.99855
Z_7	0.015791	0.0003329	0.018246	0.99871	0.99954	0.99871
Z_8	0.015806	0.00033373	0.018268	0.9987	0.99954	0.9987
Z_9	0.014691	0.00030212	0.017382	0.99883	0.99959	0.99883
Z_{10}	0.014666	0.00030064	0.017339	0.99883	0.99959	0.99883

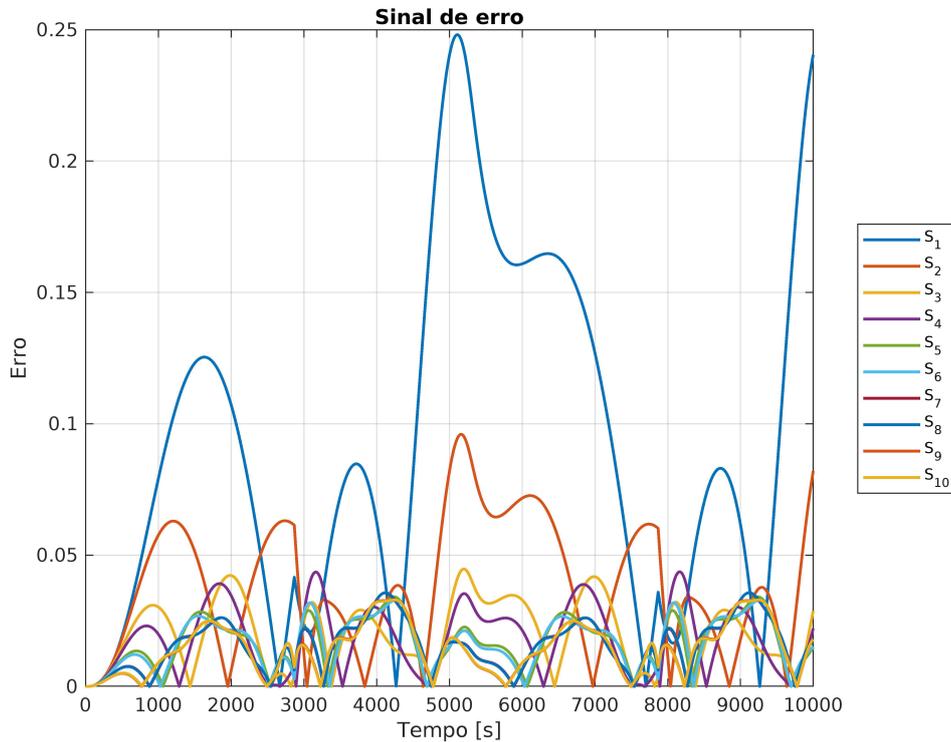
Outrossim, as Figuras 13 e 14 permitem examinar visualmente o comportamento de cada característica projetada.

Figura 13 – Gráfico da comparação entre os modelos polinomiais S_1 ao S_{10} e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 14 – Gráfico do erro entre os modelos polinomiais S_1 a S_{10} e o real h



Fonte: elaborada pelo autor.

No Apêndice A são expostos todos os gráficos particulares para os modelos obtido de (5.30) a (5.37).

À luz dos resultados obtidos, percebe-se a melhora significativa no modelo com o aumento no número de termos polinomiais, como era esperado. Em soma, percebe-se a diminuição contínua dos critérios métricos MAE, MSE e RMSE e o aumento gradual em R^2 , ICC e AR^2 . Contudo, almejando usar esses sistemas como modelos de predição de um controlador preditivo não linear, deve ser considerado um custo benefício entre a complexidade e a eficácia do modelo, visando a otimização do custo computacional sem prejudicar o desempenho esperado do controlador.

5.4 Controle Preditivo Não Linear

Conforme os conceitos do controle preditivo não linear introduzidos no Capítulo 4, serão projetados controladores que utilizaram como modelo de predição interno do sistema os protótipos polinomiais obtidos na seção anterior utilizando a técnica do *DMDp*.

Com efeito, esse estudo foca no desempenho do controlador a partir do modelo

interno de predição *data-driven*, sendo assim, projeta-se dez controladores com configurações iguais e com cada um utilizando um modelo de predição baseado na lista de polinômios obtidos em 5.3. Essas premissa são fundamentais para configurar o controlador de forma que o modelo interno domine a resposta do mesmo.

De acordo com 4.4.1, define-se as configurações do controlador preditivo não linear seguindo os passos:

1. Inicialização do controlador com uma entrada, uma estado e uma saída, onde a saída é igual ao estado;
2. O tempo de amostragem escolhido é de 1 segundo, igual ao utilizado na obtenção dos polinômios, o horizonte de predição e de controle configurados respectivamente como 50 e 3, e o número de parâmetros adicionais unitário;
3. Utilização da função custo padrão, adotando o peso da variável de saída igual a 50, o peso da variável de controle é nulo, o peso da variação do sinal de controle é de 0.001, a variável de folga é igual ao padrão 100000, o limite inferior e superior do sinal de saída é de 0 e 1.38 respectivamente e o limite inferior e superior do sinal de controle é de 0 e 376.9911 respectivamente.
4. Por fim, configura-se o modelo interno desejado e indica-se a adoção de um modelo discreto.

Todos os valores das configurações estão listadas na Tabela 3 de forma simplificada.

Tabela 3 – Configurações do controlador

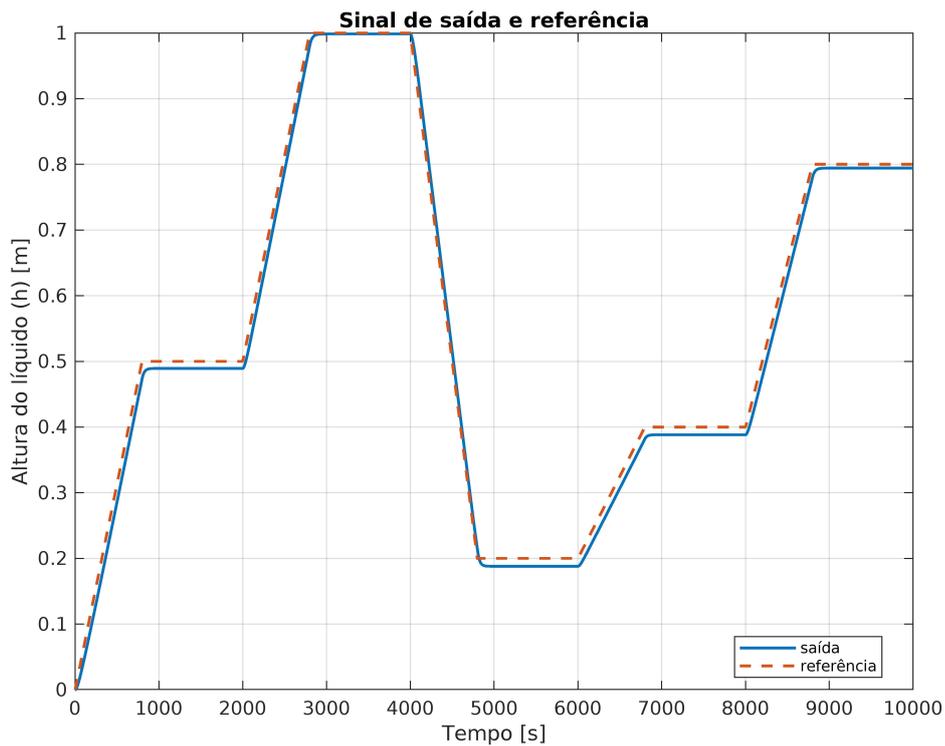
Configuração	Descrição	Valor
n_y	Número de saídas	1
n_x	Número de estados	1
n_u	Número de entradas	1
T_s	Tempo de amostragem	1
n_p	Número de parâmetros	1
k	Horizonte de controle	1
p	Horizonte de predição	50
W^y	Peso do sinal de saída	50
W^u	Peso do sinal de entrada	0
$W^{\Delta u}$	Peso da variação do sinal de entrada	0.001
\mathcal{E}_k	Variável de folga	100000
y_{inf}	Limite inferior do sinal de saída	0
y_{sup}	Limite superior do sinal de saída	1.38
u_{inf}	Limite inferior do sinal de entrada	0
u_{sup}	Limite superior do sinal de entrada	376.9911

A seguir, obtêm-se todos os resultados dos ensaios do controlador para cada modelo de predição configurado a partir dos polinômios $DMDp$. Ademais, para cada um, em um total de tempo ensaiado de 10000 segundos, é possível analisar três gráficos principais, onde um mostra o sinal de saída do sistema controlada em comparação com a referência adotada, o segundo mostra o sinal de erro entre a saída e a referência, e por fim tem-se o sinal de controle do sistema.

Outrossim, a título de comparação entre os modelos internos, segue-se os mesmos critérios de estatísticos adotados anteriormente na Seção 5.3 com adição do tempo médio de execução de cada iteração do controlador.

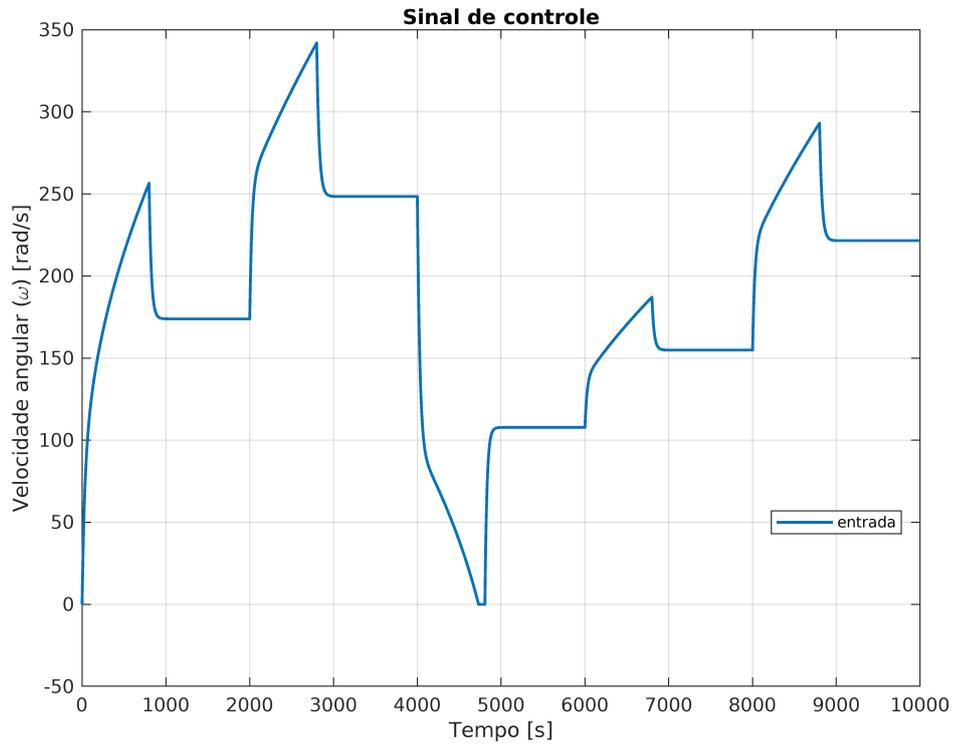
Quando o modelo de predição do controlador é dado pela equação (5.24) referente ao modelo mais simples, observa-se os gráficos expostos nas Figuras 15, 16 e 17

Figura 15 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.29)



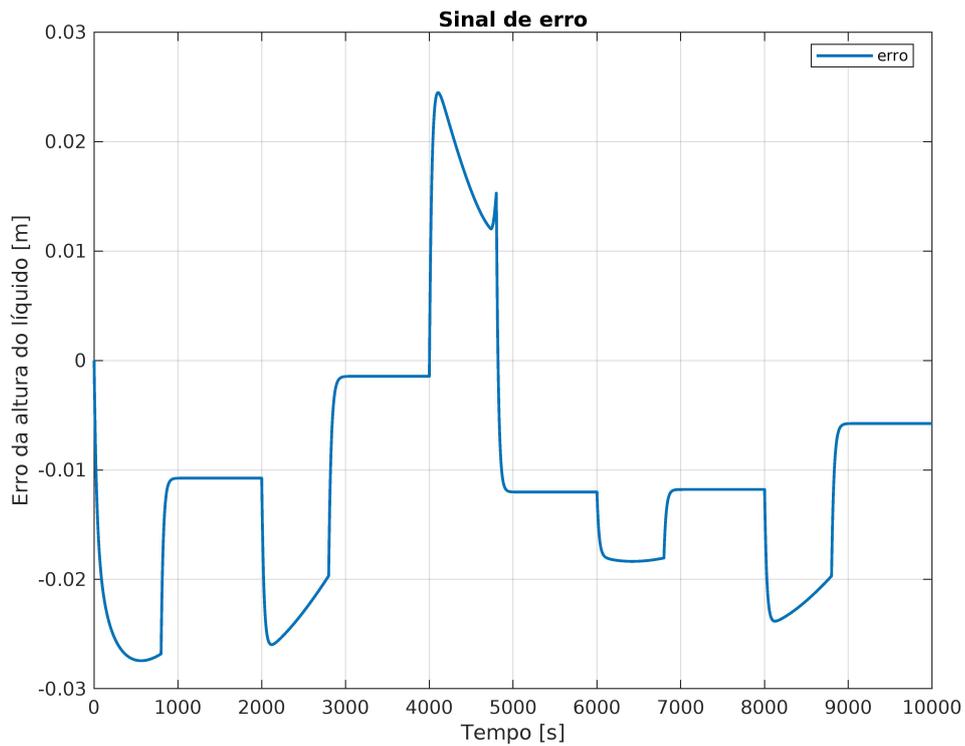
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 16 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de previsão (5.29)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 17 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de previsão (5.29)

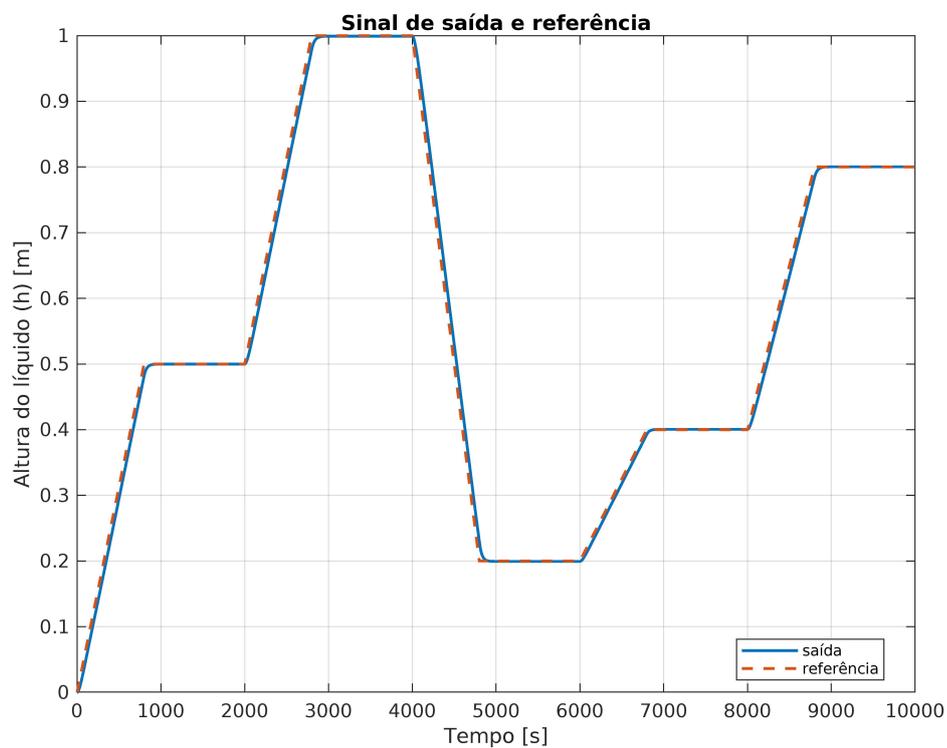


Fonte: elaborada pelo autor.

Observa-se o bom desempenho do controlador com o modelo preditivo mais simples do $DMDp$, que se assemelha ao $DMDc$, onde o valor do erro manteve-se na faixa de valores de 10^{-2} , seguindo o sinal de referência durante todo o ensaio.

Escolhendo agora o modelo dado pela equação (5.28) referente ao modelo mais complexo projetado, é possível analisar nas Figuras 18, 19 e 20 o comportamento do controlador utilizando o protótipo de predição melhor do que (5.24).

Figura 18 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.38)



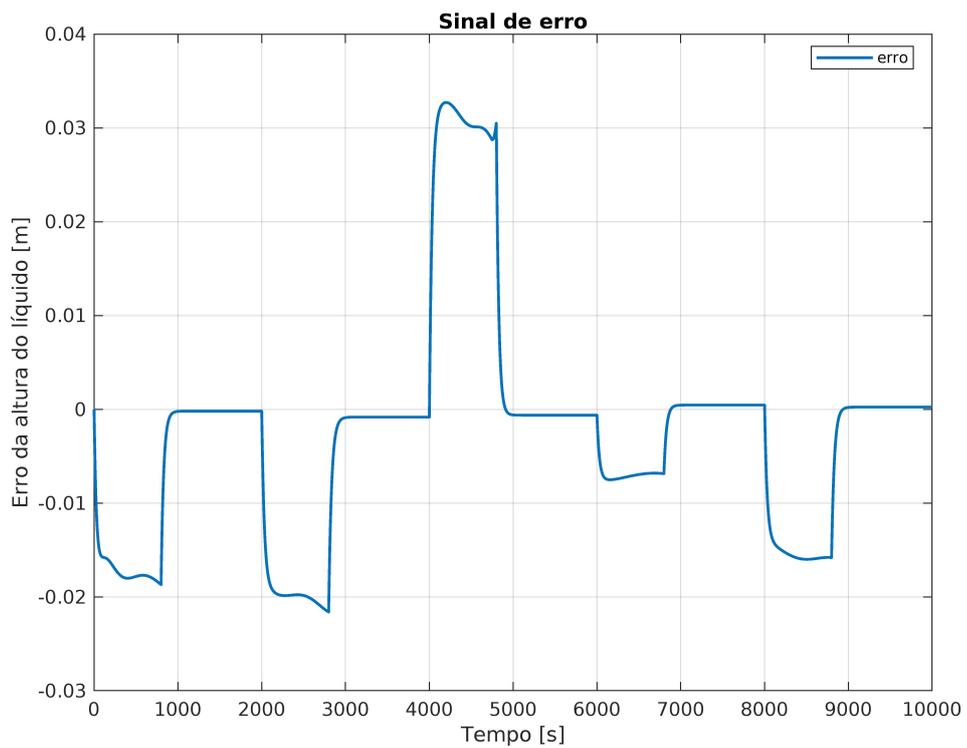
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 19 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de previsão (5.38)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 20 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de previsão (5.38)

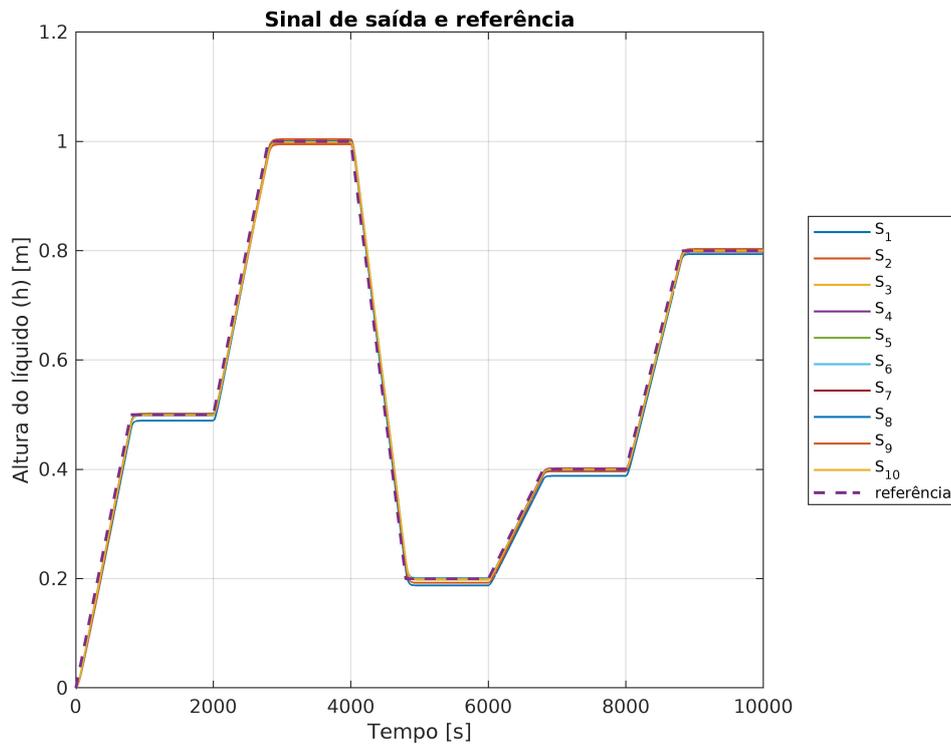


Fonte: elaborada pelo autor.

Com esse ensaio, observa-se um controlador mais agressivo do que o anterior, onde o erro oscila acima e abaixo do valor nulo, diferentemente de quando utilizado o S_1 , que permaneceu mais abaixo na maior parte do ensaio. Esse fator é importante, pois justifica o fato de que o modelo S_2 é melhor, uma vez que seu valor médio absoluto e quadrático estão mais próximos do valor zero, embora visualmente visualiza-se um pico maior de erro e um sinal mais disperso.

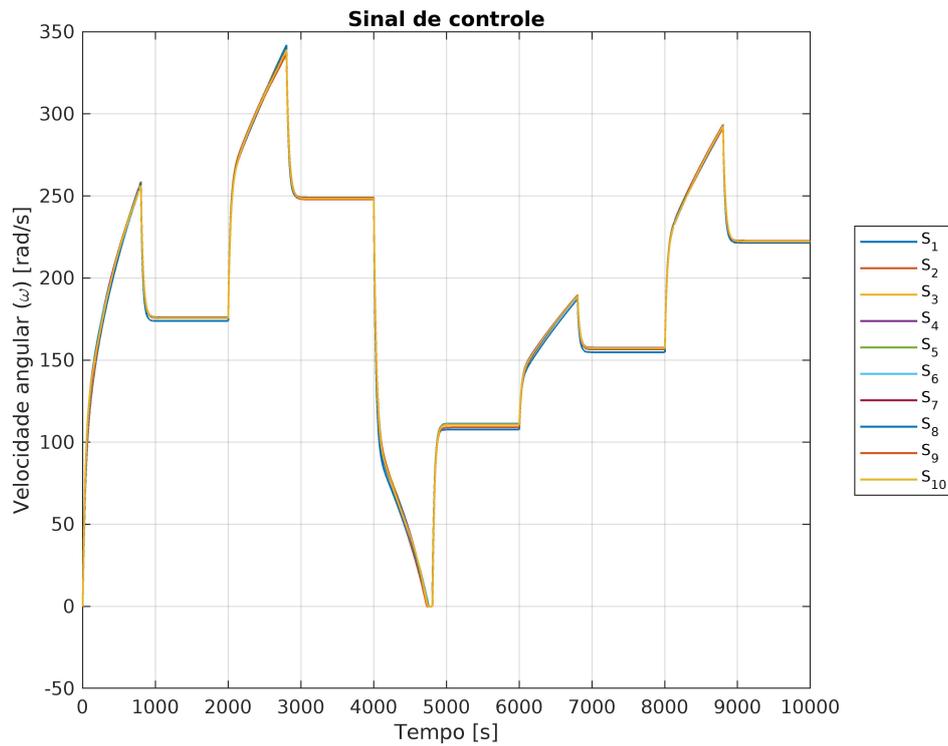
A partir de todos os polinômios obtidos com a técnica do DMDp equacionados de (5.29) até (5.38), exibe-se nas Figuras 21, 22 e 23 os gráficos com todos os resultados do sinal de saída, do sinal de erro e do sinal de entrada dos modelos de S_1 até S_{10} .

Figura 21 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com todos os modelos de predição



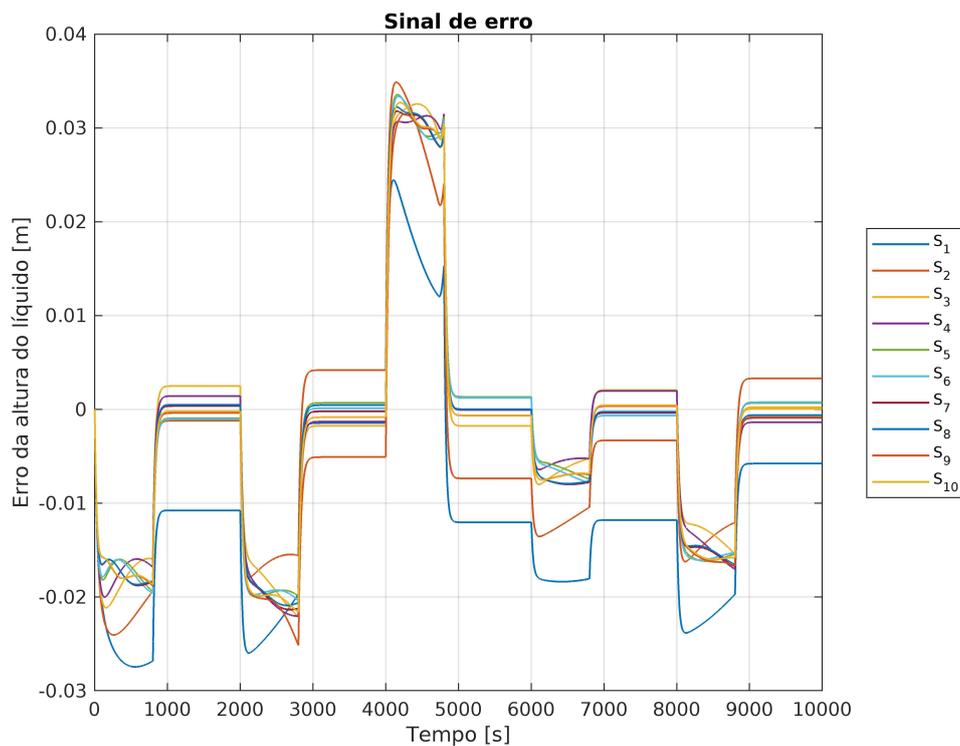
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 22 – Gráfico do sinal de controle do sistema com todos os modelo de predição



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 23 – Gráfico do sinal de erro do sistema com todos os modelo de predição



Fonte: elaborada pelo autor.

No Apêndice B é exposto todos os gráficos particulares para os resultados obtidos utilizando os modelos Z_2 até Z_9 como modelos de predição.

A partir desse ensaio é possível listar na Tabela 4 os critérios obtidos para cada ensaio de acordo com o modelo de predição.

Tabela 4 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos Z_1 ao Z_{10}

Modelo	Tempo	MAE	MSE	RMSE	R^2	ICC	AR^2
Z_1	0.0094721	0.01354	0.00023911	0.015463	0.99688	0.99935	0.99687
Z_2	0.0080696	0.0097291	0.00016614	0.01289	0.99784	0.99956	0.99784
Z_3	0.0080973	0.0079301	0.00014799	0.012165	0.99802	0.9996	0.99802
Z_4	0.0082882	0.0077733	0.00014848	0.012185	0.998	0.9996	0.998
Z_5	0.0081504	0.0076554	0.00015033	0.012261	0.99799	0.9996	0.99799
Z_6	0.0084466	0.0076774	0.0001503	0.01226	0.99799	0.9996	0.99799
Z_7	0.0080052	0.0075271	0.00015062	0.012273	0.99798	0.9996	0.99798
Z_8	0.0078352	0.0074865	0.0001502	0.012255	0.99799	0.9996	0.99799
Z_9	0.0084065	0.0081611	0.00015479	0.012441	0.99791	0.99958	0.99791
Z_{10}	0.0083176	0.0075396	0.00015099	0.012288	0.99798	0.9996	0.99798

À luz desses resultados, é possível concluir que o tempo médio de execução de cada iteração não é significativo com o aumento da complexidade do modelo de predição, sendo assim o melhor modelo é o que obtiver melhores métricas de desempenho. Lembrando que o primeiro modelo de predição é o que se assemelha ao DMDc, conclui-se que a proposta desse trabalho com o DMDp supera em todas as métricas estatísticas de aplicação seu caso particular. Ainda assim, o controlador foi capaz de obter resultados adequados a aplicação do planta projetada, com o melhor protótipo o polinômio com as características de Z_{10} de acordo com a equação (5.38).

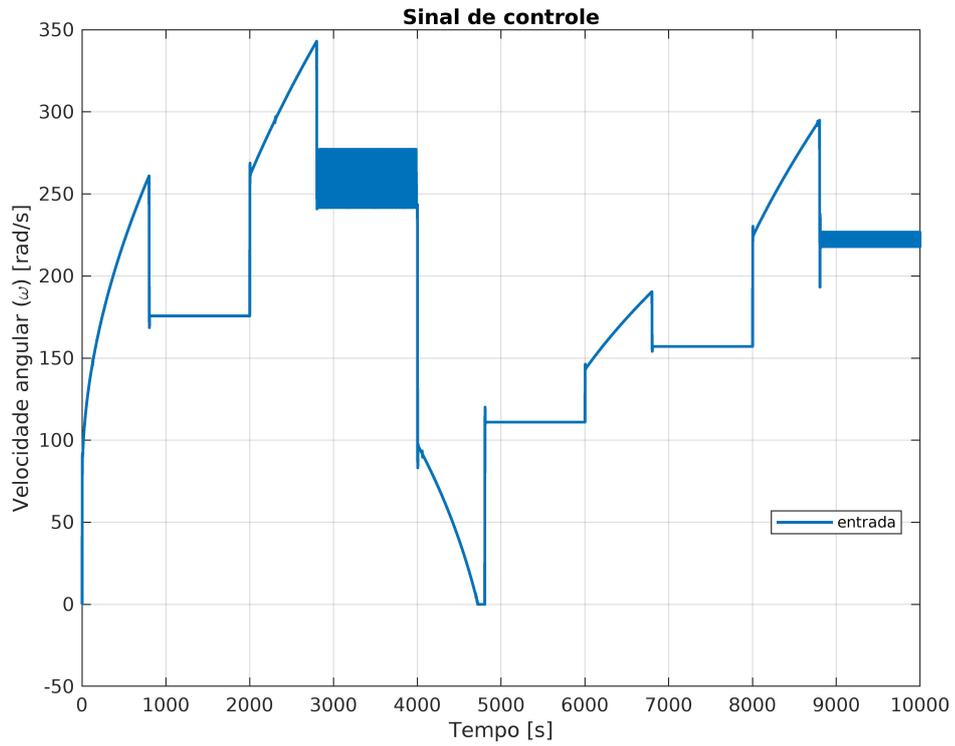
Uma característica prática importante a comentar é que quando o horizonte de controle aumenta, nota-se uma melhora na significativa no controle da planta, embora o controlador permaneça por mais tempo em regiões não lineares. Analogamente ao ensaio anterior e usando um horizonte de controle igual a 3, obtêm-se nas Figuras 24, 25 e 26 as repostas do controlador para o protótipo polinomial mais simples e nas Figuras 27, 28 e 29 as repostas do controlador para o modelo mais complexo. Ademais, na Tabela 5 explicita-se os critérios métricos para os modelos de Z_1 a Z_{10}

Figura 24 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.29) e horizonte de controle igual a 3



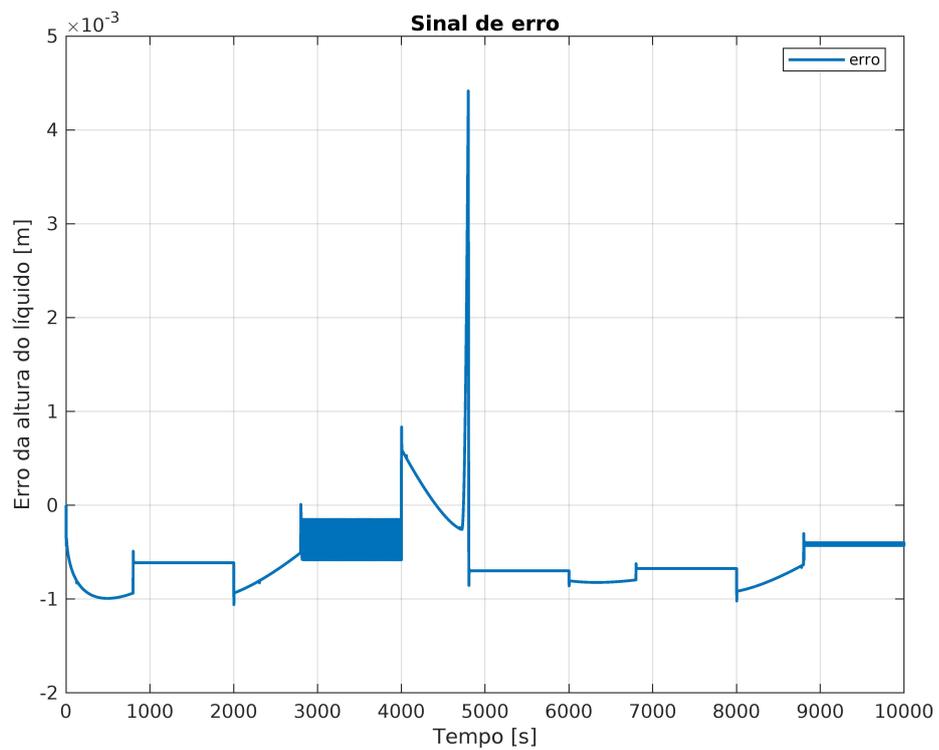
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 25 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de previsão (5.29)



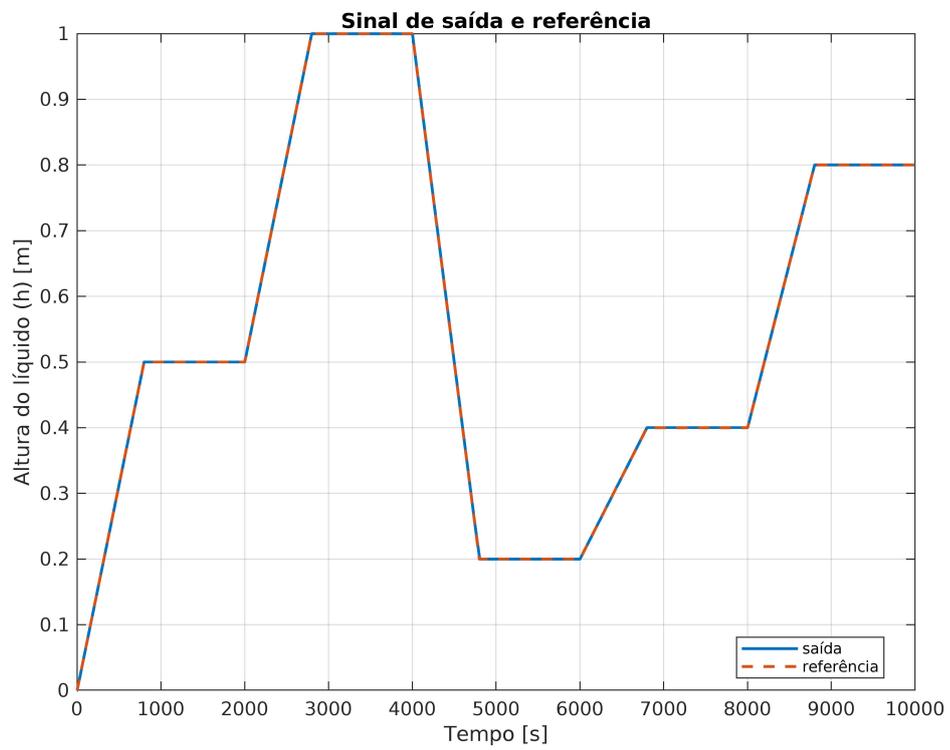
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 26 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de previsão (5.29)



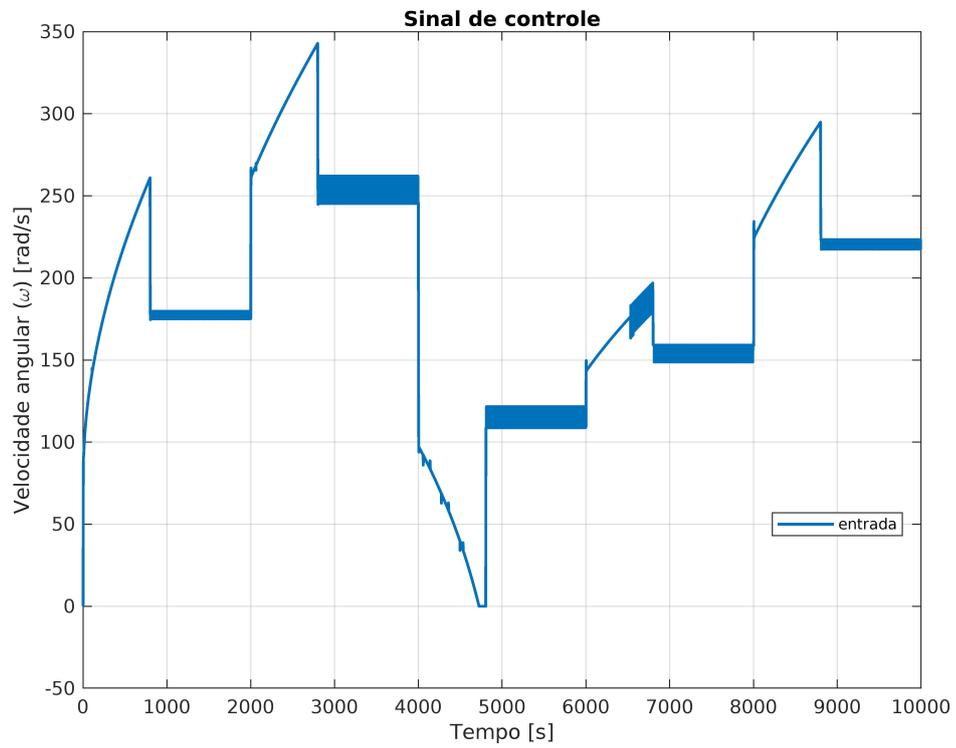
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 27 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3



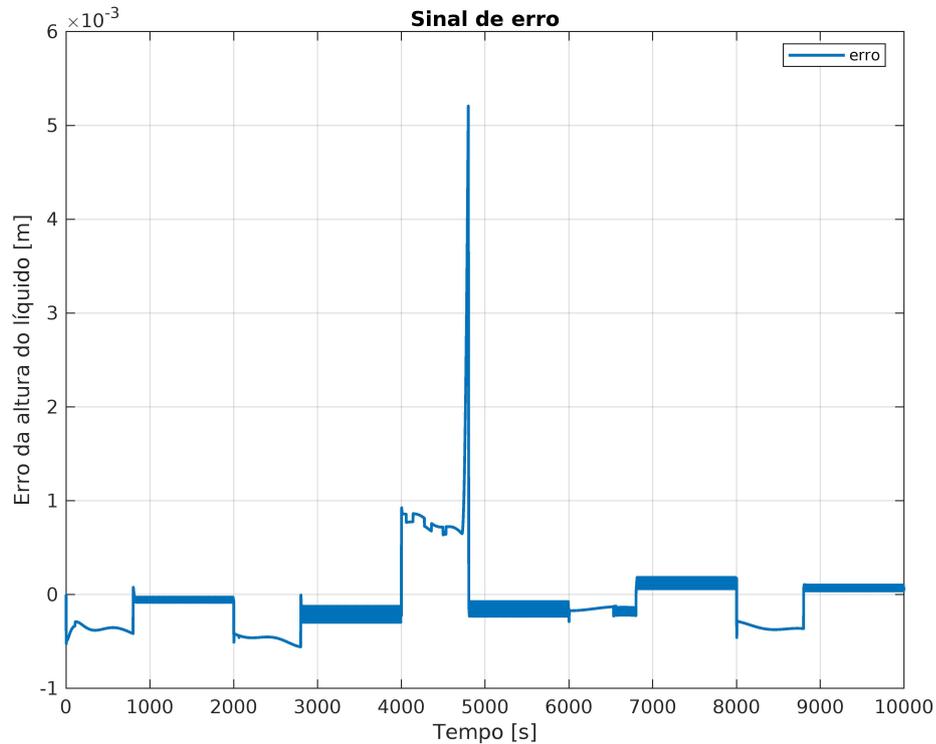
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 28 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 29 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.38) e horizonte de controle igual a 3



Fonte: elaborada pelo autor.

No Apêndice C é exposto todos os gráficos particulares para os resultados obtidos utilizando os modelos Z_2 até Z_9 como modelos de predição e e horizonte de controle igual a 3.

Tabela 5 – Tabela de resultados dos critérios de comparação dos modelos Z_1 ao Z_{10} com horizonte de predição igual a 3

Modelo	Tempo	MAE	MSE	RMSE	R^2	ICC	AR^2
Z_1	0.028593	0.00061862	$4.4866 \cdot 10^{-7}$	0.00066982	0.99999	1	0.99999
Z_2	0.028793	0.00041313	$2.3279 \cdot 10^{-7}$	0.00048249	1	1	1
Z_3	0.021497	0.00032053	$1.8169 \cdot 10^{-7}$	0.00042625	1	1	1
Z_4	0.02139	0.00031828	$1.7992 \cdot 10^{-7}$	0.00042417	1	1	1
Z_5	0.023012	0.00028241	$1.5855 \cdot 10^{-7}$	0.00039818	1	1	1
Z_6	0.021524	0.00027708	$1.5613 \cdot 10^{-7}$	0.00039514	1	1	1
Z_7	0.019929	0.00024259	$1.433 \cdot 10^{-7}$	0.00037855	1	1	1
Z_8	0.020023	0.00024076	$1.4174 \cdot 10^{-7}$	0.00037648	1	1	1
Z_9	0.023357	0.00030367	$1.7187 \cdot 10^{-7}$	0.00041457	1	1	1
Z_{10}	0.021522	0.00025486	$1.4817 \cdot 10^{-7}$	0.00038492	1	1	1

À luz desses resultados, observa-se que o desempenho do controlador com o horizonte de controle igual a 3 é melhor do que com o horizonte de controle unitário, onde ainda assim o melhor modelo é o Z_{10} . Entretanto, o esforço computacional cresce com o aumento

do horizonte de controle e é perceptível que quanto maior a complexidade do modelo maior é a permanência do sinal do controle em faixas não lineares de otimização, causando o efeito de *chattering*, semelhante ao que ocorre em no controle de modo deslizante.

Portanto, esse estudo de caso é relevante para entendimento prático do funcionamento do algoritmo proposto nesse trabalho de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial, aplicando a um sistema dinâmico não linear e racional, sendo capaz de obter variados protótipos da planta representados por polinômios. Ainda assim, observa-se que além dos exemplares se assemelharam ao comportamento do sistema em malha aberto, é factível utiliza-los como modelo de predição de um controlador preditivo não linear orientado a dados, analisando o alto nível de viabilidade prática tomando como base os resultados qualitativos e quantitativos expostos nesse trabalho para diferentes configurações de controle.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

À luz dos resultados obtidos, a técnica *data-driven* proposta nesse trabalho de Decomposição de Modo Dinâmico Polinomial se comportou adequadamente nos dois principais objetivos desse método, sendo a primeira a identificação de um sistema dinâmico não linear e racional, transformando um modelo de dados de entrada e saída em um protótipo polinomial que pode ser projetado utilizando um diverso espaço amostral de monômios. O segundo ganho do DMDp é na sua caracterização como modelo de predição do controlador preditivo não linear, sendo fundamental no excelente desempenho do controlador configurado.

Ainda assim, o DMDp superou em todas as métricas quantitativas e qualitativas o seu caso particular semelhante ao DMDc, sendo mais adequado tanto na identificação *data-driven* do polinômio quanto na sua aplicação no controle. Ademais, a comprovação da persistência de excitação é fundamental para a comprovação factível da aplicação do DMDp em um sistema dinâmico, justificando a qualidade do conjunto de dados obtidos, não no DMD nem no DMDc.

Com efeito, o DMDp caracteriza-se como uma técnica escalável, onde é possível obter diversos modelos polinomiais com o mesmo conjunto de dados, em que percebe-se a evolução métrica dos resultados com o aumento do número de monômios do modelo polinomial. Embora essa comprovação seja apenas prática, cria-se a possibilidade de trabalhos futuros capazes de provar tal fato observado.

A partir do conjunto DMDp e NMPC propõe-se ainda uma nova classificação do controle preditivo não linear representado pelo NMDPC, em que o modelo obtido é derivado de uma técnica *data-driven*. Em soma, visualiza-se um estudo futuro na aplicação direta do DMDp na formulação do controlador, sem precisar necessariamente obter um modelo polinomial caracterizando o NDDPC.

Adiante, são previstos trabalhos propondo a utilização do DMDp aplicado a controle *data-driven* utilizando conceitos de estabilidade de Lyapunov e técnicas de soma de quadrados exemplificados no trabalho de Guo *et al.* (2021).

Em soma, trabalhos futuros voltados para caracterização das configurações do controlador preditivo não linear com o uso de modelos preditivos orientado a dados polinomiais são essências, visto a mudança obtida no resultado prático quando o horizonte de controle aumentou, atingindo regiões não lineares de otimização que crescem com o grau de complexidade do protótipo polinomial.

Outrossim, a técnica do DMDp pode vir a provar e caracterizar a robustez e estabili-

dade de sistemas já controlados ou com inteligência artificial embarcado, uma vez que a planta é vista como uma caixa preta pelo método.

Portanto, a proposta do DMDp contribui significativamente tanto na identificação e controle de sistema dinâmicos não lineares e racionais, apresentando uma vasta gama de possibilidades de trabalhos futuros, além de novas aplicações em plantas complexas reais.

REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, M.; VIDYASHANKAR, S.; HUANG, K. On-chip implementation of ecog signal data decoding in brain-computer interface. In: IEEE. **2016 IEEE 21st International Mixed-Signal Testing Workshop (IMSTW)**. [S. l.], 2016. p. 1–6.
- ALLGÖWER, F.; BADGWELL, T. A.; QIN, J. S.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Nonlinear predictive control and moving horizon estimation—an introductory overview. **Advances in control: Highlights of ECC'99**, Springer, p. 391–449, 1999.
- AMSALLEM, D.; CORTIAL, J.; FARHAT, C. On-demand cfd-based aeroelastic predictions using a database of reduced-order bases and models. In: **47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition**. [S. l.: s. n.], 2009. p. 800.
- ASKHAM, T.; KUTZ, J. N. Variable projection methods for an optimized dynamic mode decomposition. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, SIAM, v. 17, n. 1, p. 380–416, 2018.
- BALASUBRAMANIAN, M.; ZABIC, S.; BOWD, C.; THOMPSON, H. W.; WOLENSKI, P.; IYENGAR, S. S.; KARKI, B. B.; ZANGWILL, L. M. A framework for detecting glaucomatous progression in the optic nerve head of an eye using proper orthogonal decomposition. **IEEE Transactions on Information Technology in biomedicine**, IEEE, v. 13, n. 5, p. 781–793, 2009.
- BERNOULLI, D. **Hydrodynamica: sive de viribus et motibus fluidorum in statu aequilibrii et lationis**. [S. l.]: Bousquet, 1738.
- BRAGA, J. V. F. **Machine Learning Aplicado à Caracterização Petrofísica de Reservatórios: Um Exemplo da Bacia do Ceará**. Tese de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Ceará, 2023.
- BROAD, A.; MURPHEY, T.; ARGALL, B. Learning models for shared control of human-machine systems with unknown dynamics. **arXiv preprint arXiv:1808.08268**, 2018.
- BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N. **Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2019.
- CAMACHO, E.; ALBA, C. **Model Predictive Control**. Springer London, 2013. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9780857293985. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tXZDAAAQBAJ>.
- CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, Elsevier, v. 38, n. 8, p. 1337–1346, 2002.
- CHEN, H.; ALLGÖWER, F. Nonlinear model predictive control schemes with guaranteed stability. In: **Nonlinear model based process control**. [S. l.]: Springer, 1998. p. 465–494.
- CHEN, K. K.; TU, J. H.; ROWLEY, C. W. Variants of dynamic mode decomposition: boundary condition, koopman, and fourier analyses. **Journal of nonlinear science**, Springer, v. 22, p. 887–915, 2012.

- CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control—part i. the basic algorithm. **Automatica**, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 137–148, 1987.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: **joint automatic control conference**. [S. l.: s. n.], 1980. p. 72.
- FINDEISEN, R.; IMSLAND, L.; ALLGOWER, F.; FOSS, B. A. State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. **European journal of control**, Elsevier, v. 9, n. 2-3, p. 190–206, 2003.
- FONZI, N.; BRUNTON, S. L.; FASEL, U. Data-driven nonlinear aeroelastic models of morphing wings for control. **Proceedings of the Royal Society A**, The Royal Society Publishing, v. 476, n. 2239, p. 20200079, 2020.
- FURUTA, K.; WONGSAISUWAN, M. Discrete-time lqg dynamic controller design using plant markov parameters. **Automatica**, Elsevier, v. 31, n. 9, p. 1317–1324, 1995.
- GU, S.; HOLLY, E.; LILLICRAP, T.; LEVINE, S. Deep reinforcement learning for robotic manipulation with asynchronous off-policy updates. In: **IEEE. 2017 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)**. [S. l.], 2017. p. 3389–3396.
- GUO, M.; PERSIS, C. D.; TESI, P. Data-driven stabilization of nonlinear polynomial systems with noisy data. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 67, n. 8, p. 4210–4217, 2021.
- HJALMARSSON, H. Control of nonlinear systems using iterative feedback tuning. In: **IEEE. Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 98CH36207)**. [S. l.], 1998. v. 4, p. 2083–2087.
- HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: **IEEE. Proceedings of 1994 33rd IEEE conference on decision and control**. [S. l.], 1994. v. 2, p. 1735–1740.
- HOU, Z. S. The parameter identification, adaptive control and model free learning adaptive control for nonlinear systems. **Shenyang: North-eastern University**, 1994.
- HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. **Information Sciences**, v. 235, p. 3–35, 2013. ISSN 0020-0255. Data-based Control, Decision, Scheduling and Fault Diagnostics. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025512004781>.
- HUANG, C.; ANDERSON, W. E.; HARVAZINSKI, M. E.; SANKARAN, V. Analysis of self-excited combustion instabilities using decomposition techniques. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 54, n. 9, p. 2791–2807, 2016.
- KEYSER, R. D.; CAUWENBERGHE, A. V. Extended prediction self-adaptive control. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 18, n. 5, p. 1255–1260, 1985.
- KISI, O.; SANIKHANI, H.; ZOUNEMAT-KERMANI, M.; NIAZI, F. Long-term monthly evapotranspiration modeling by several data-driven methods without climatic data. **Computers and Electronics in Agriculture**, Elsevier, v. 115, p. 66–77, 2015.
- KUTZ, J. N.; BRUNTON, S. L.; BRUNTON, B. W.; PROCTOR, J. L. **Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems**. [S. l.]: SIAM, 2016.

MathWorks. **MATLAB Nonlinear MPC Toolbox**. 2023. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/nonlinear-mpc.html>.

MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. Constrained model predictive control: Stability and optimality. **Automatica**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 789–814, 2000.

NICOLAO, G. D.; MAGNI, L.; SCATTOLINI, R. Stability and robustness of nonlinear receding horizon control. In: **Nonlinear model predictive control**. [S. l.]: Springer, 2000. p. 3–22.

PAN, C.; YU, D.; WANG, J. Dynamical mode decomposition of gurney flap wake flow. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 012002, 2011.

PAPACHRISTODOULOU J. ANDERSON, G. V. S. P. P. S. P. A. P. M. M. P. A.; JAGT, D. **SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB**. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>, 2021. Available from <https://github.com/oxfordcontrol/SOSTOOLS>.

PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 51, n. 3, p. 406–413, 1955.

PERSIS, C. D.; TESI, P. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality, and robustness. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 65, n. 3, p. 909–924, 2019.

PROCTOR, J. L.; BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N. Dynamic mode decomposition with control. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, SIAM, v. 15, n. 1, p. 142–161, 2016.

RAULT, J.; RICHALET, A.; TESTUD, J.; PAPON, J. Model predictive heuristic control: application to industrial processes. **Automatica**, v. 14, n. 5, p. 413–428, 1978.

RICHALET, J. Pratique de la commande prédictive. **Traité des nouvelles technologies**, Hermes, 1993.

ROSSITER, J. **A First Course in Predictive Control**. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022. ISBN 9781032339160. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=E6cozwEACAAJ>.

SCHMID, P. J. Dynamic mode decomposition for numerical and experimental data. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 656, p. 5–28, 2010.

SCHMID, P. J.; SESTERHENN, J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. In: AMERICAN PHYSICAL SOCIETY. **61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics**. [S. l.], 2008.

SKELTON, R.; SHI, G. The data-based lqg control problem. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. [S. l.: s. n.], 1994. v. 2, p. 1447–1452 vol.2.

TEEGAVARAPU, R. S.; CHANDRAMOULI, V. Improved weighting methods, deterministic and stochastic data-driven models for estimation of missing precipitation records. **Journal of hydrology**, Elsevier, v. 312, n. 1-4, p. 191–206, 2005.

The MathWorks, Inc. **MATLAB**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.

VASCONCELOS, F. J. S.; LEITE, G. C.; NETO, G. B. F.; CORREIA, W. B.; AGUIAR, V. P. B.; PAIVA, D. A. Anfis identification applied to a reservoir level liquid system. In: **2021 9th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA)**. [S. l.: s. n.], 2021. p. 135–140.

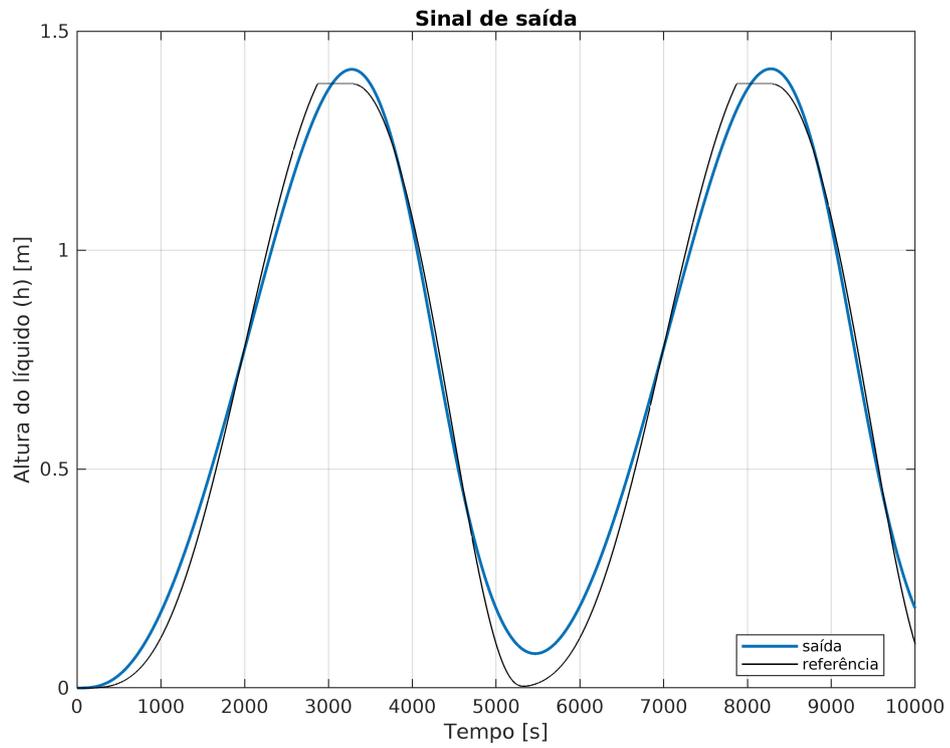
WILLEMS, J. C.; RAPISARDA, P.; MARKOVSKY, I.; MOOR, B. L. D. A note on persistency of excitation. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 325–329, 2005.

YDSTIE, B. Extended horizon adaptive control. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 911–915, 1984.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the American society of mechanical engineers**, American Society of Mechanical Engineers, v. 64, n. 8, p. 759–765, 1942.

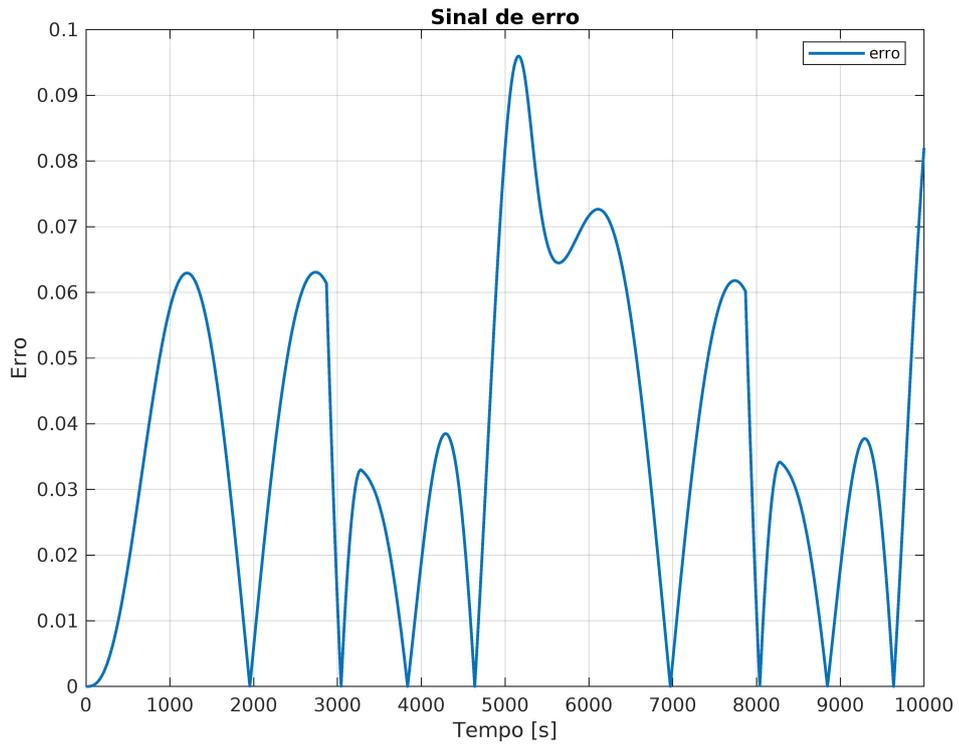
APÊNDICE A – GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS MODELOS DO ESTUDO DE CASO DO

Figura 30 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.30) e o real h



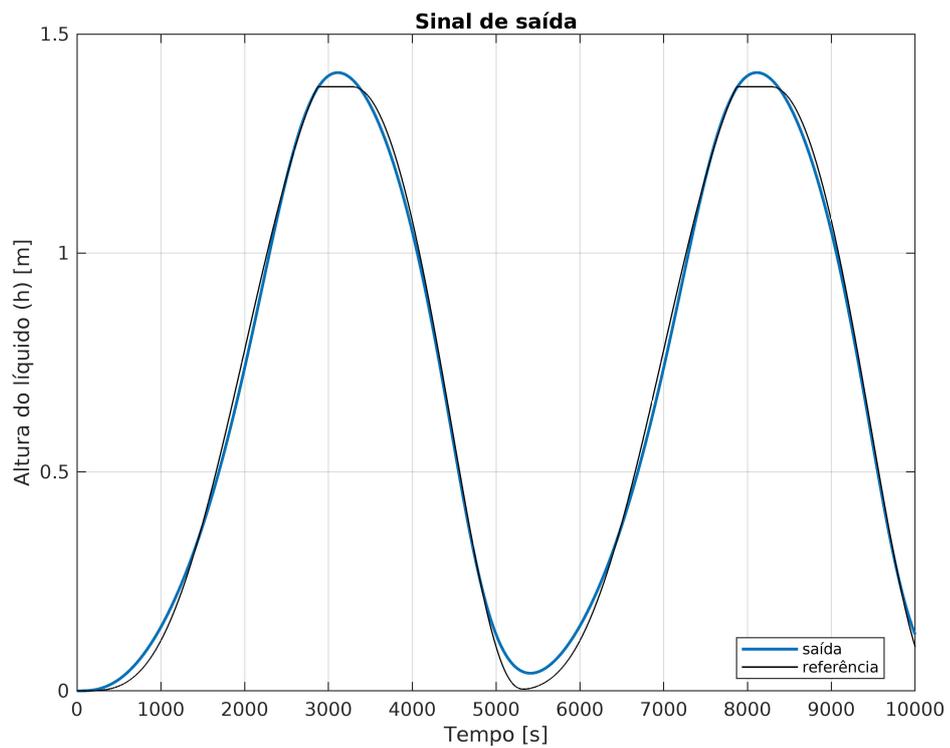
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 31 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial(5.30) e o real h



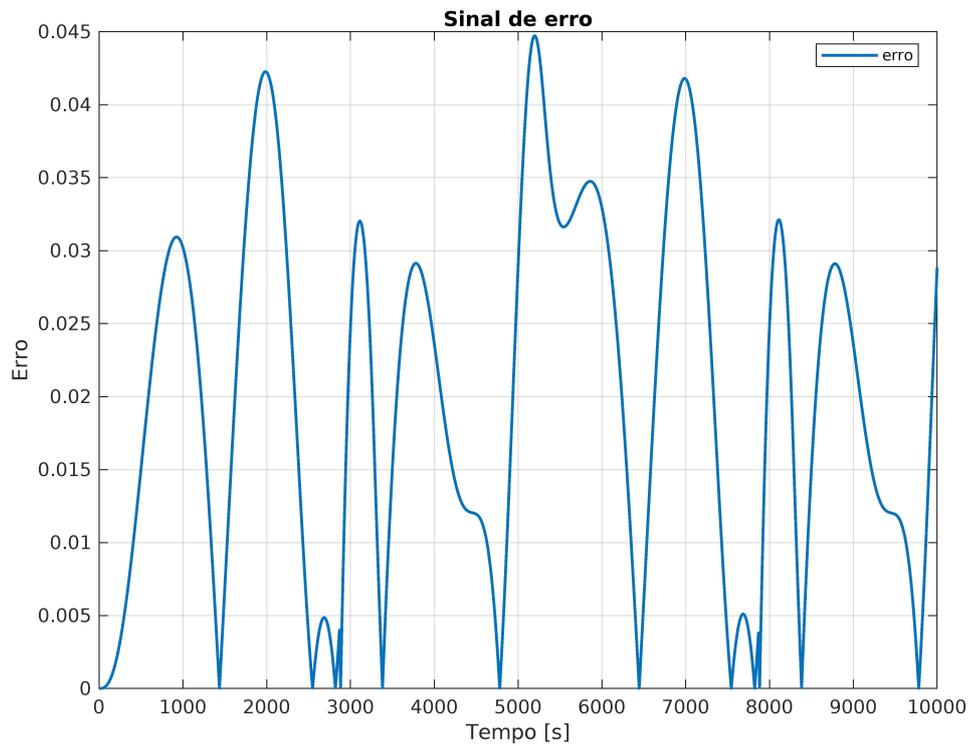
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 32 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.31) e o real h



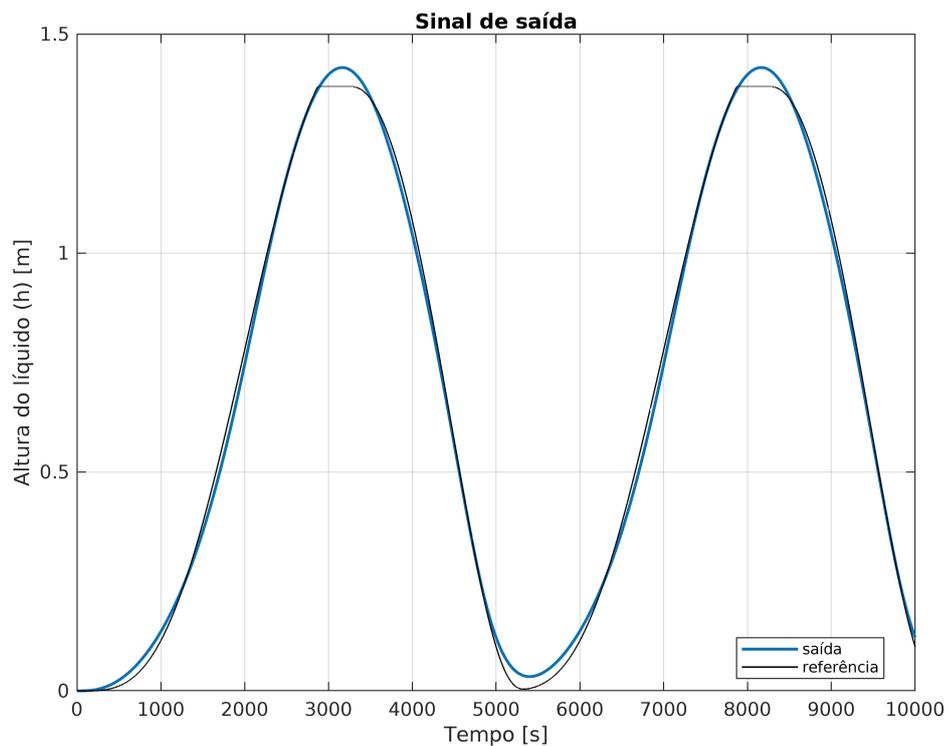
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 33 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.31) e o real h



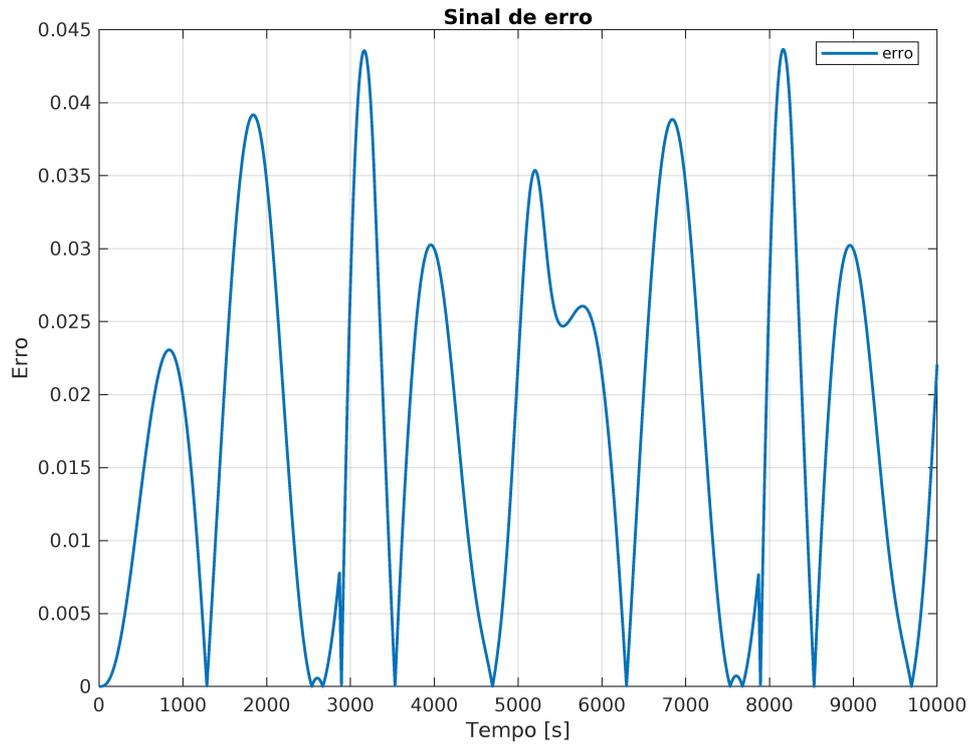
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 34 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.32) e o real h



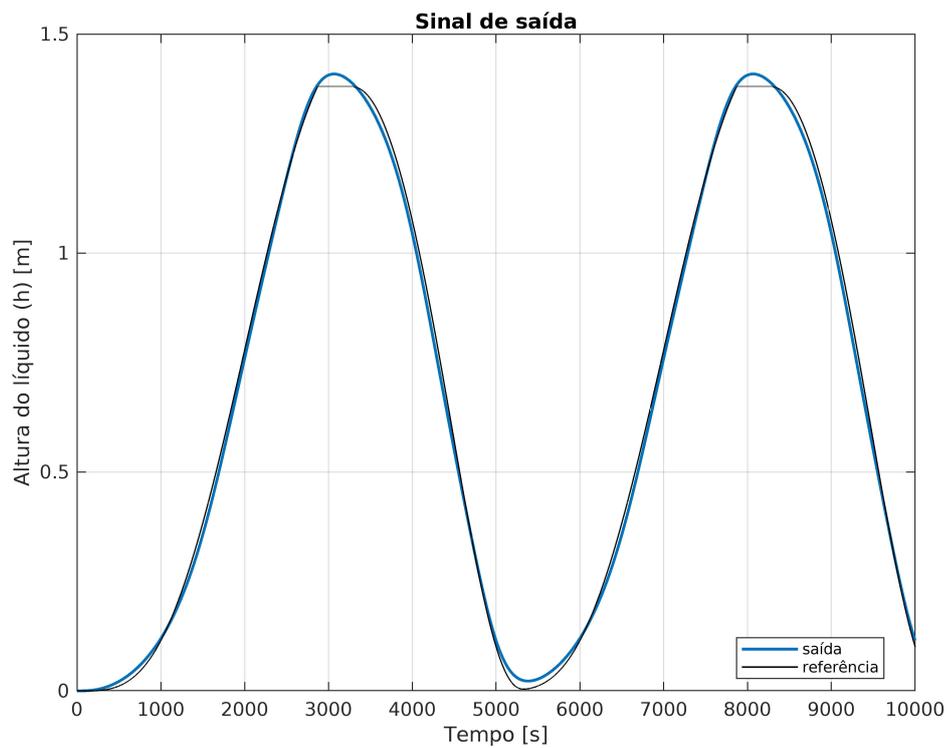
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 35 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.32) e o real h

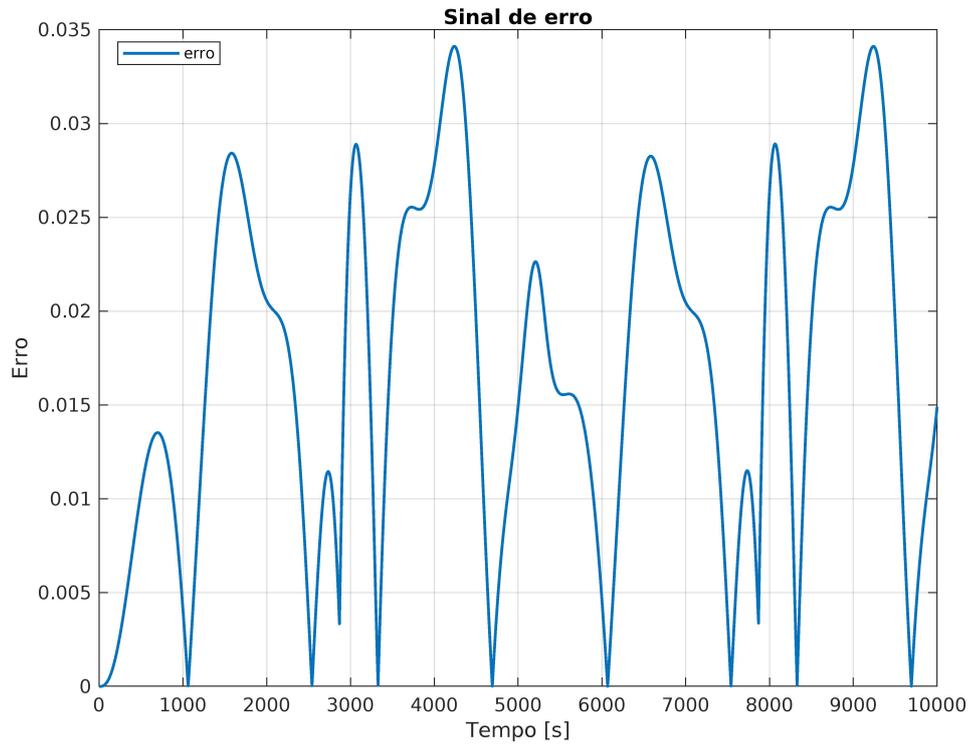


Fonte: elaborada pelo autor.

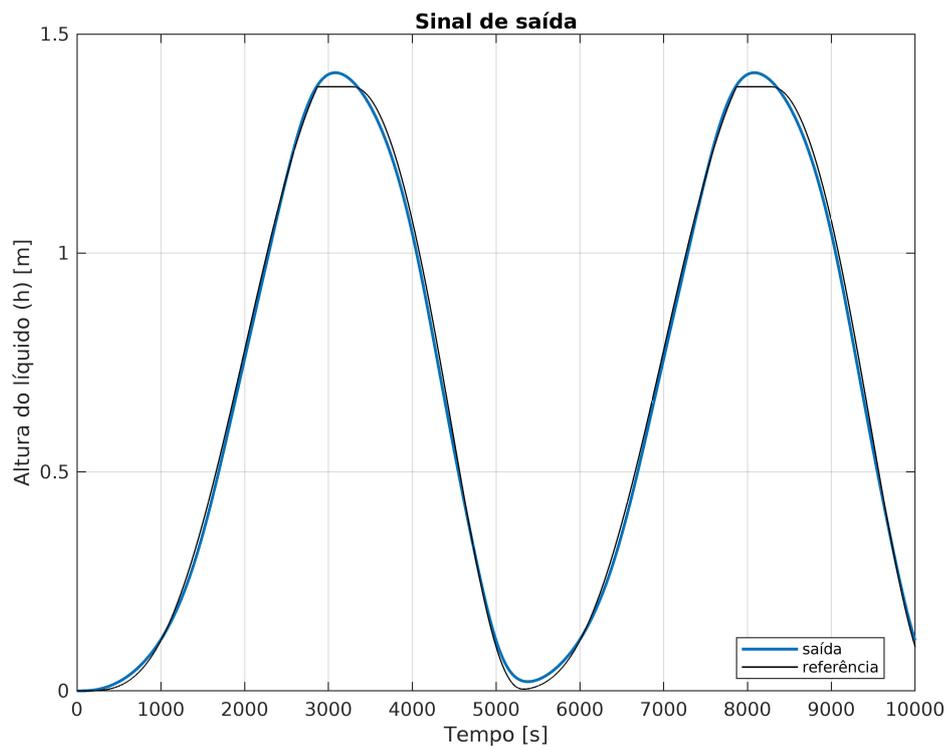
Figura 36 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.33) e o real h



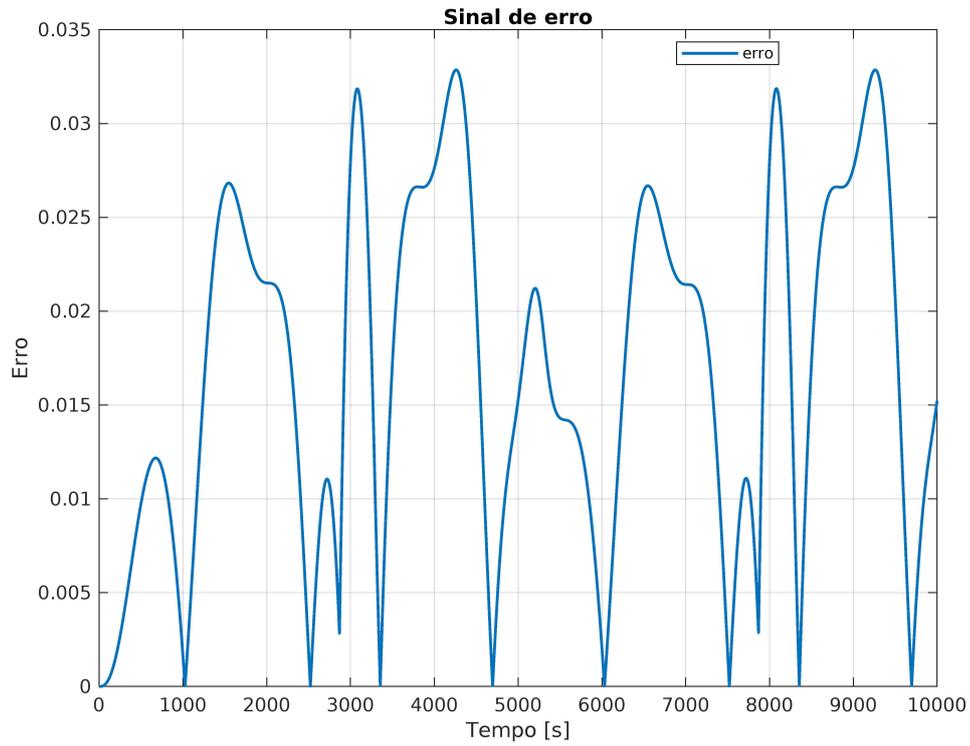
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 37 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.33) e o real h 

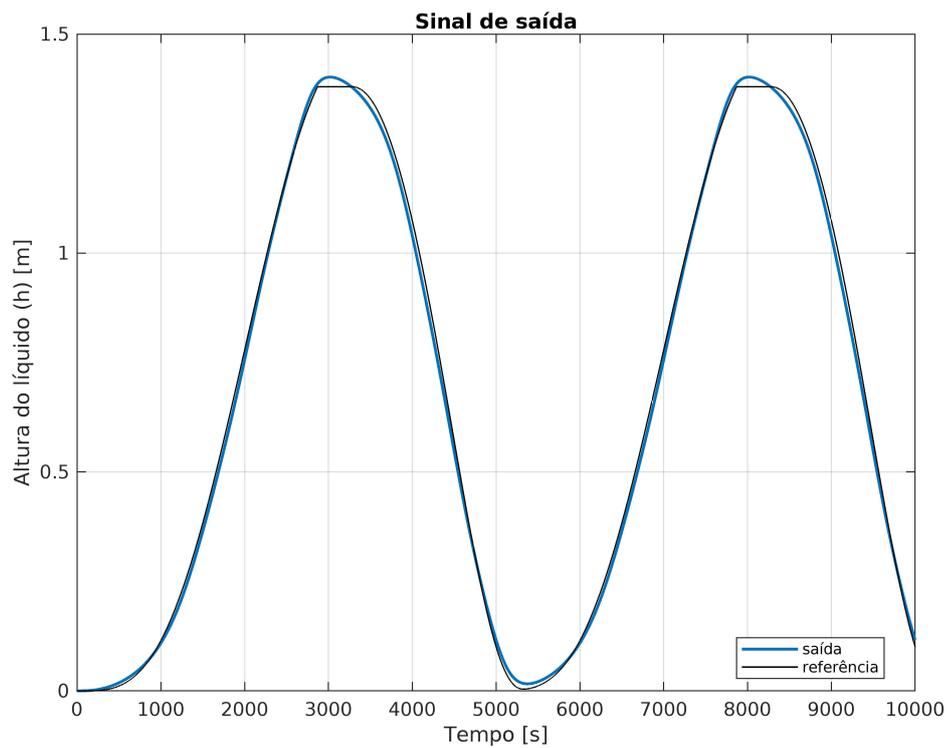
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 38 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.34) e o real h 

Fonte: elaborada pelo autor.

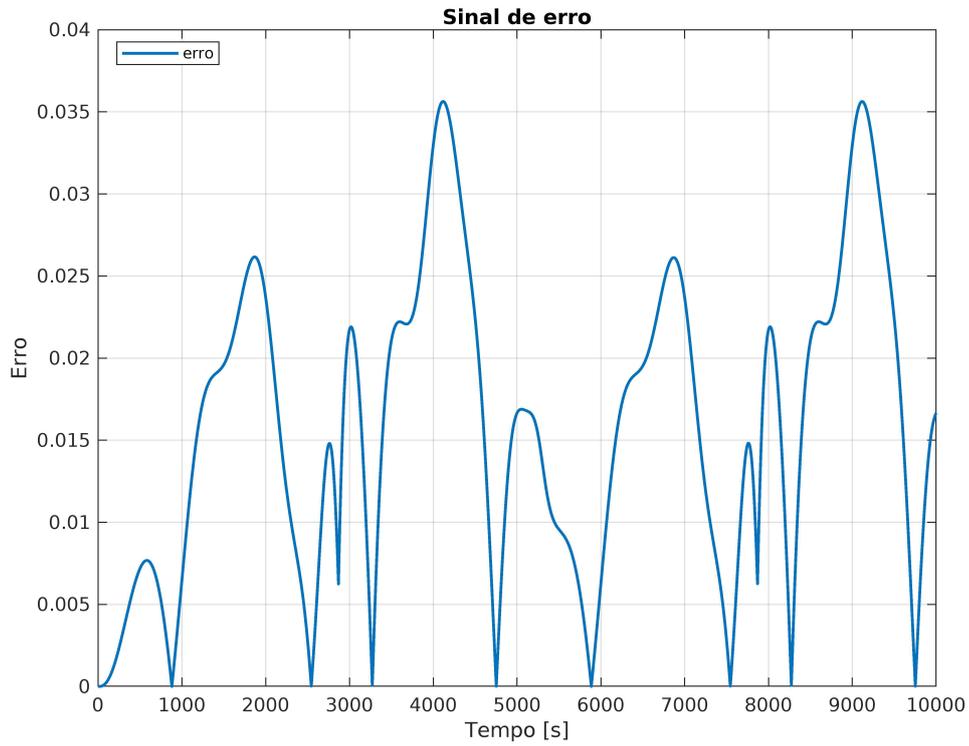
Figura 39 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.34) e o real h 

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 40 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.35) e o real h 

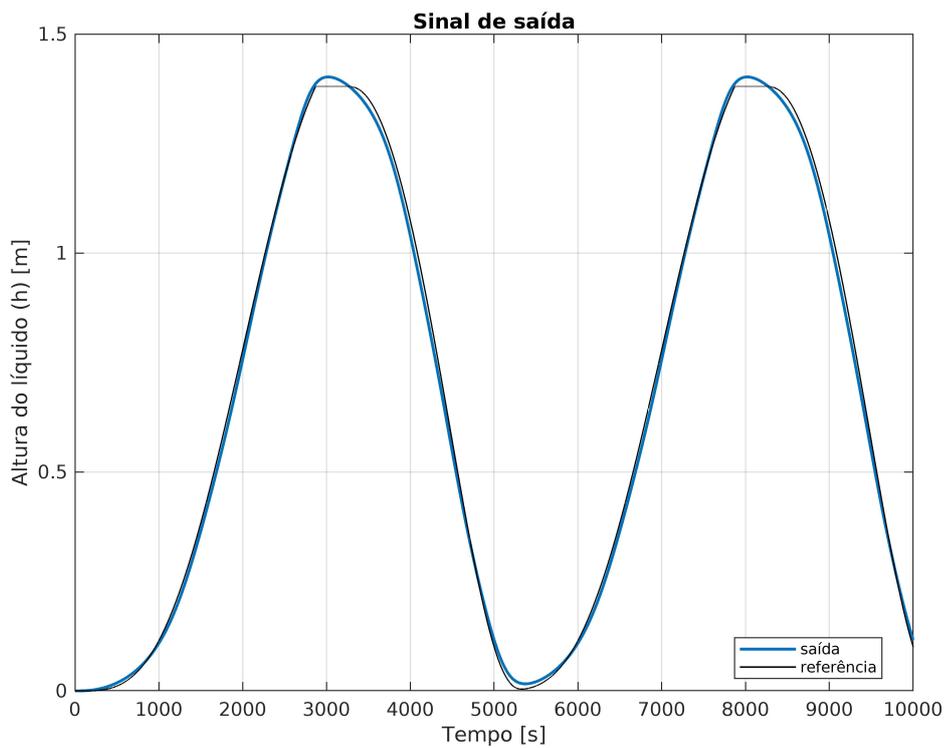
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 41 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.35) e o real h



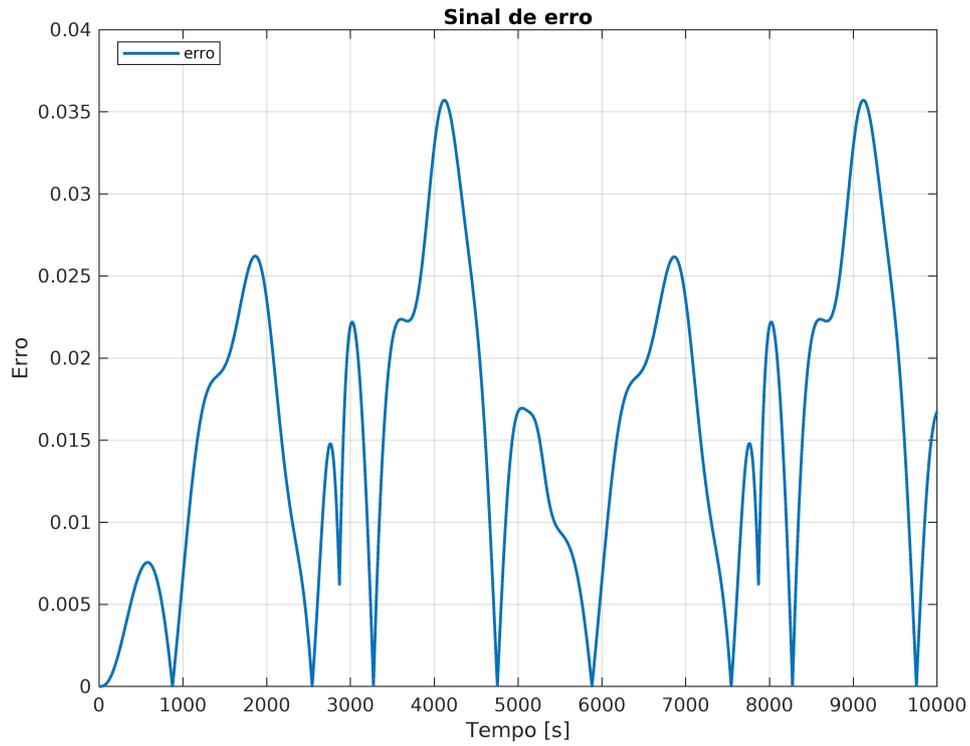
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 42 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.36) e o real h



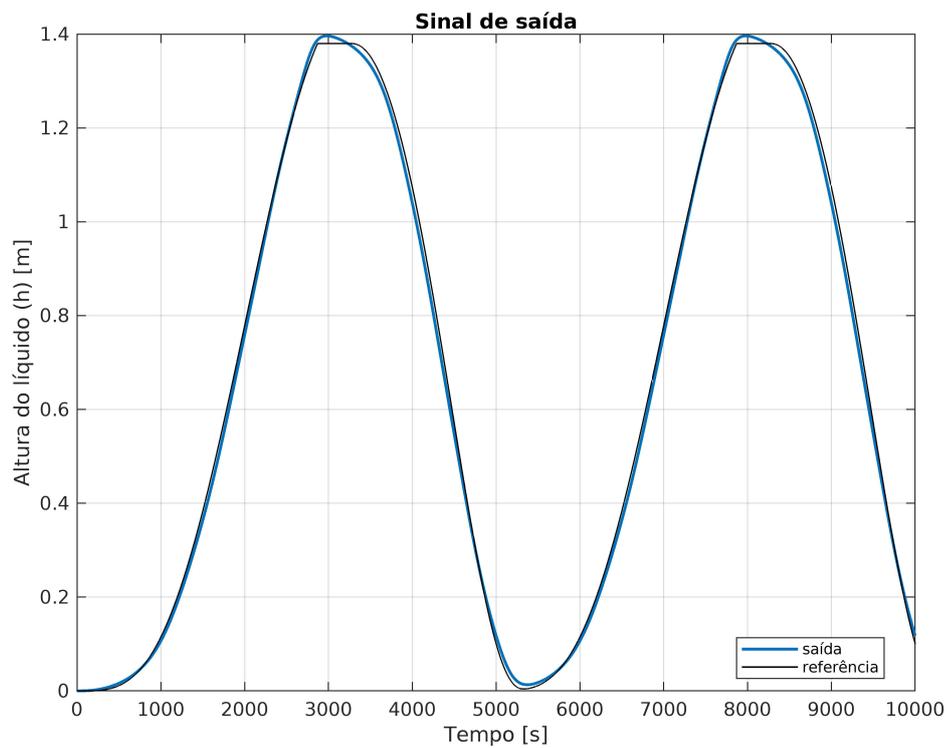
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 43 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.36) e o real h

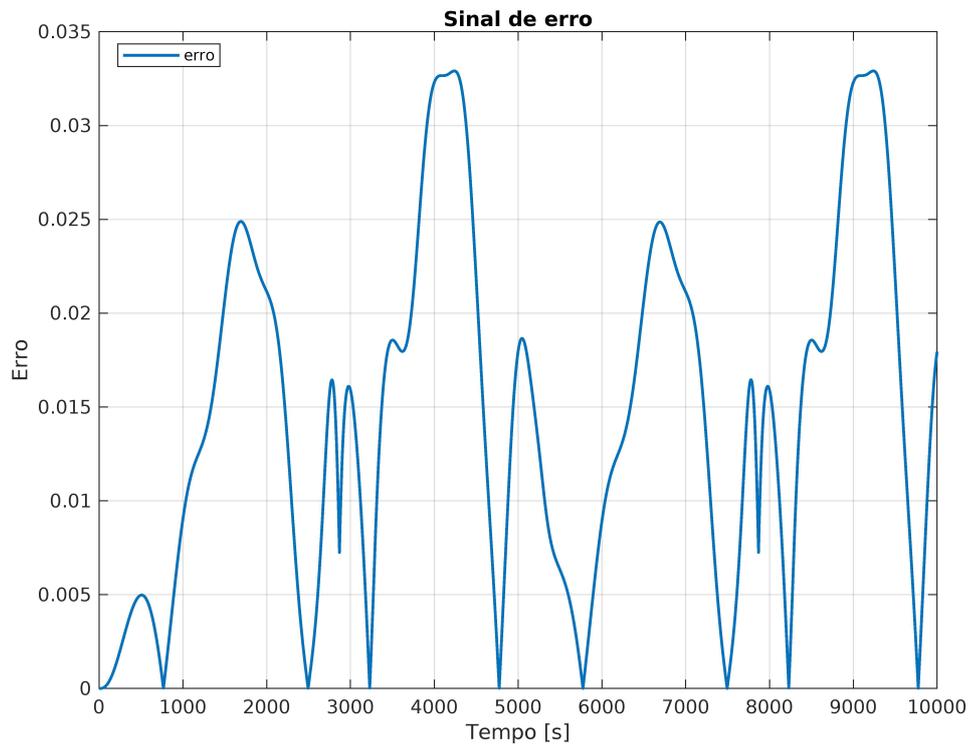


Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 44 – Gráfico da comparação entre o modelo polinomial (5.37) e o real h



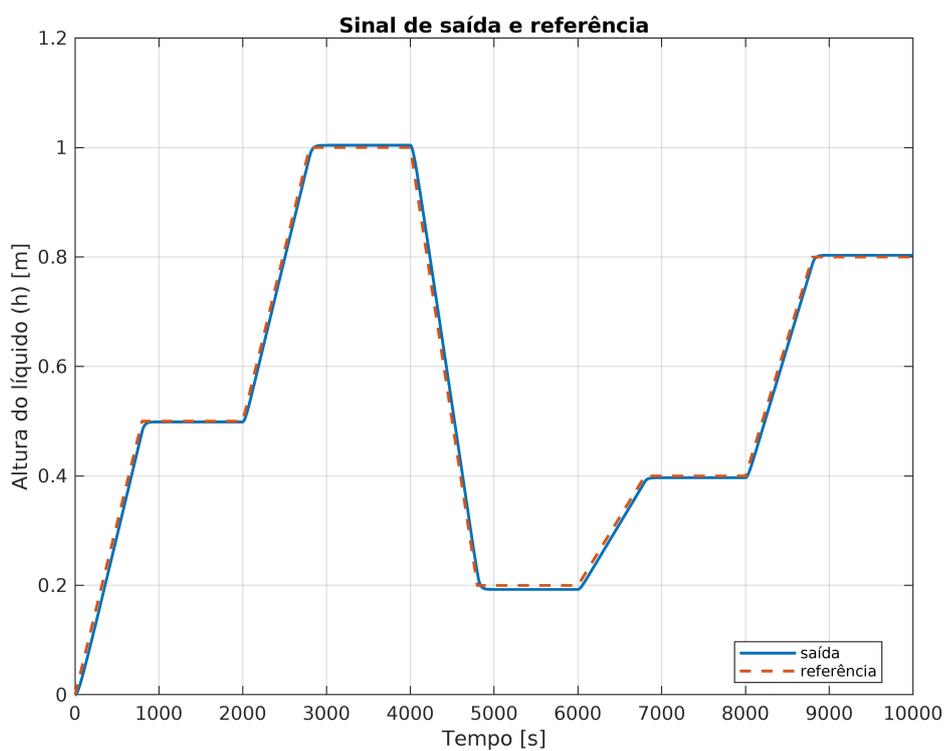
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 45 – Gráfico do erro entre o modelo polinomial (5.37) e o real h 

Fonte: elaborada pelo autor.

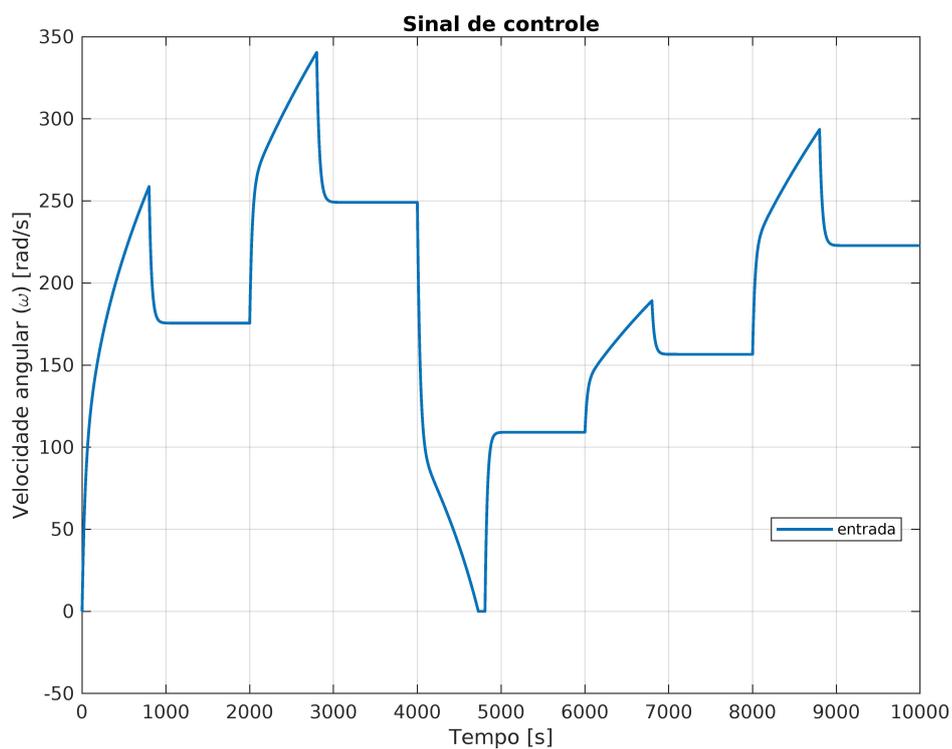
APÊNDICE B – GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS RESULTADOS DE CONTROLE DO ESTUDO DE CASO PARA HORIZONTE DE PREDIÇÃO UNITÁRIO

Figura 46 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.30)



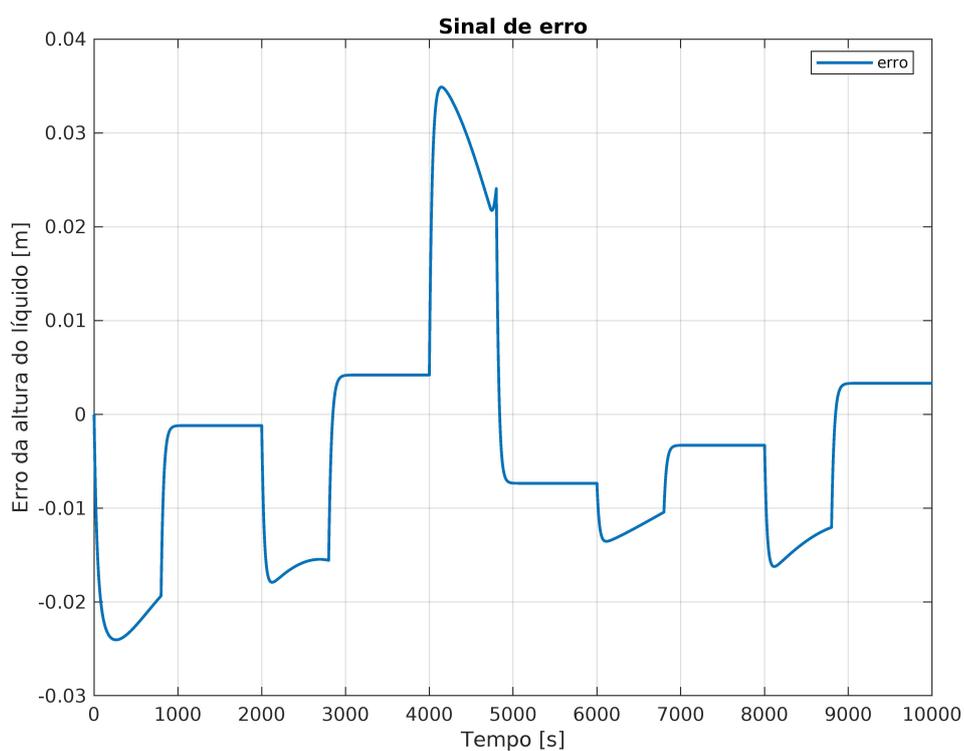
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 47 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.30)



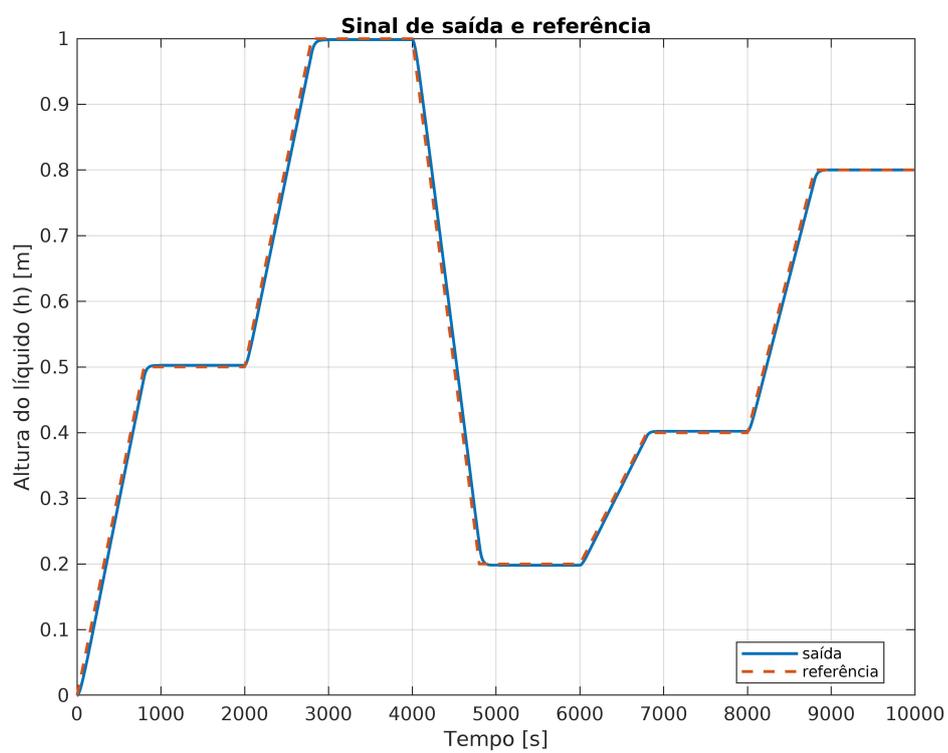
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 48 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.30)



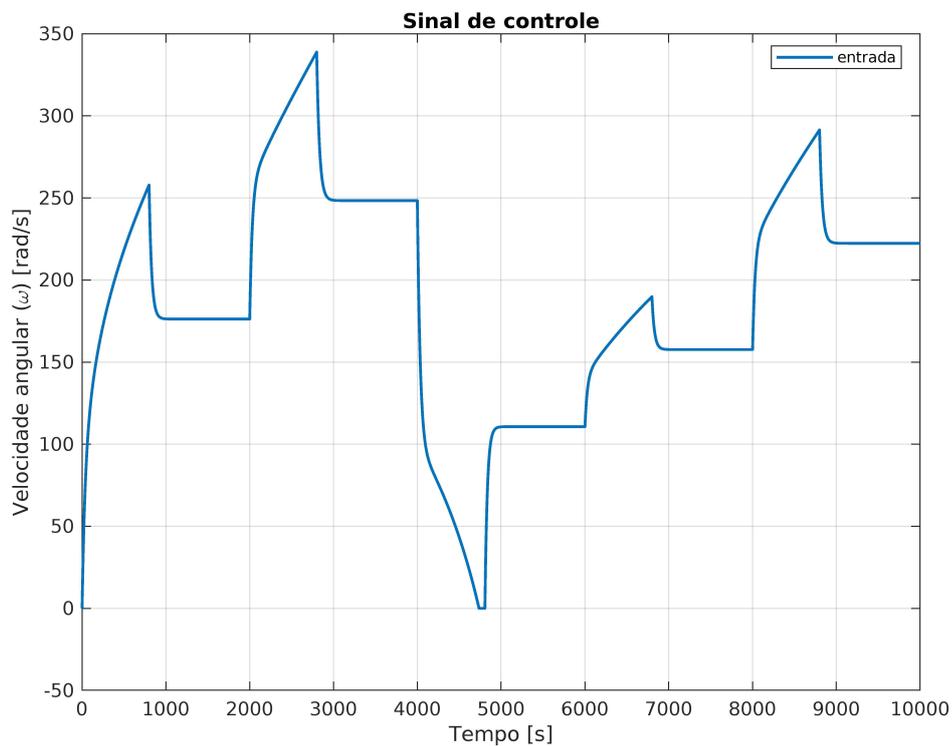
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 49 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.31)



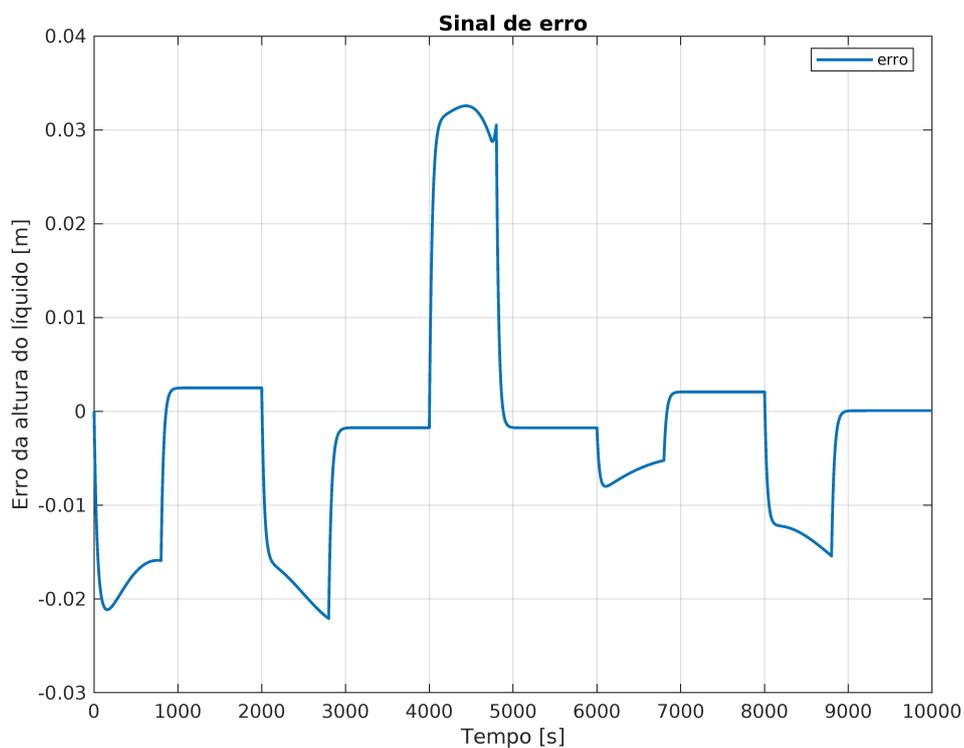
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 50 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.31)



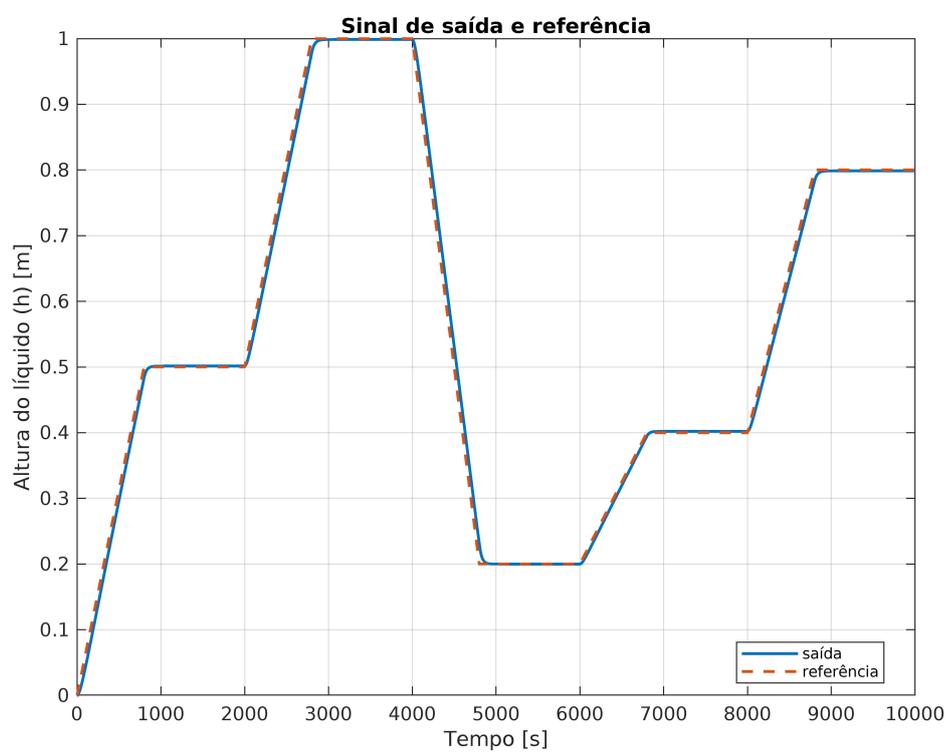
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 51 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.31)



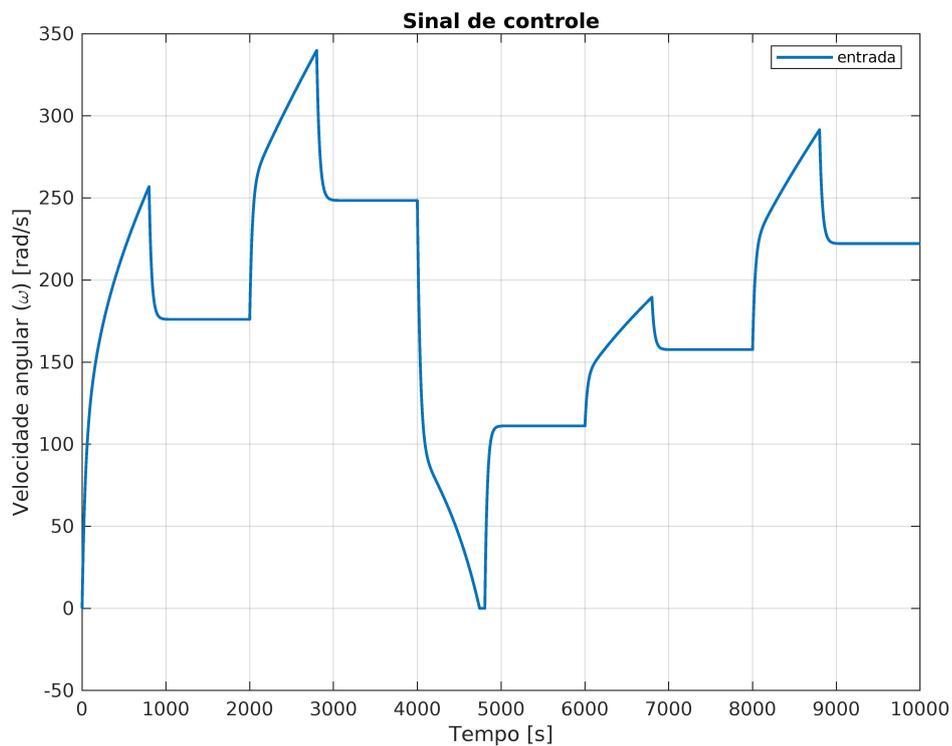
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 52 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.32)



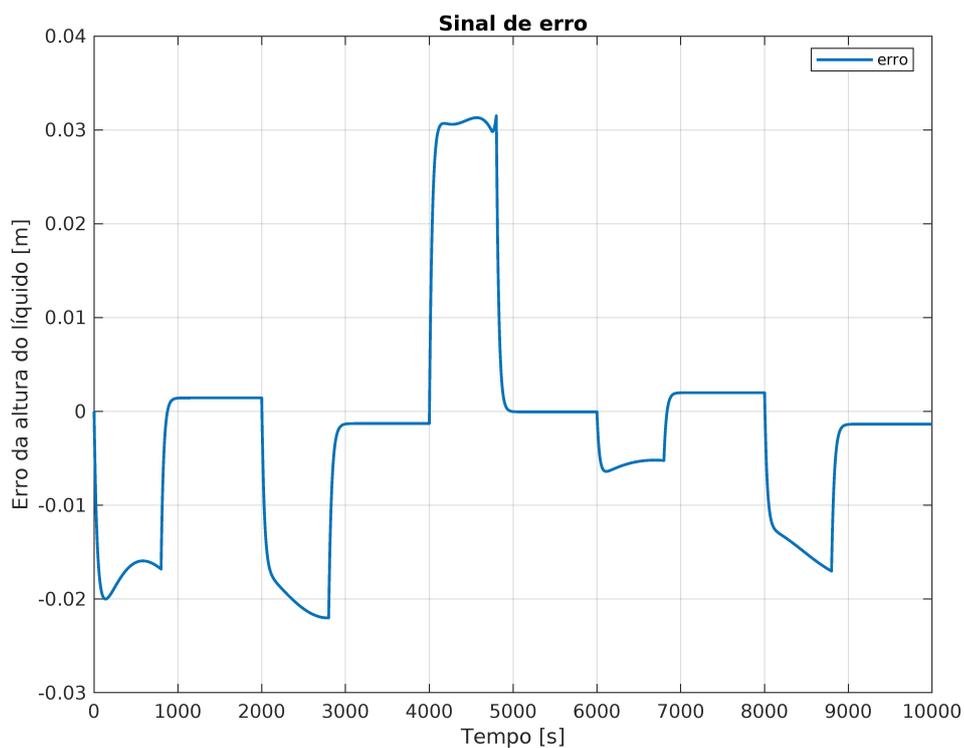
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 53 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.32)



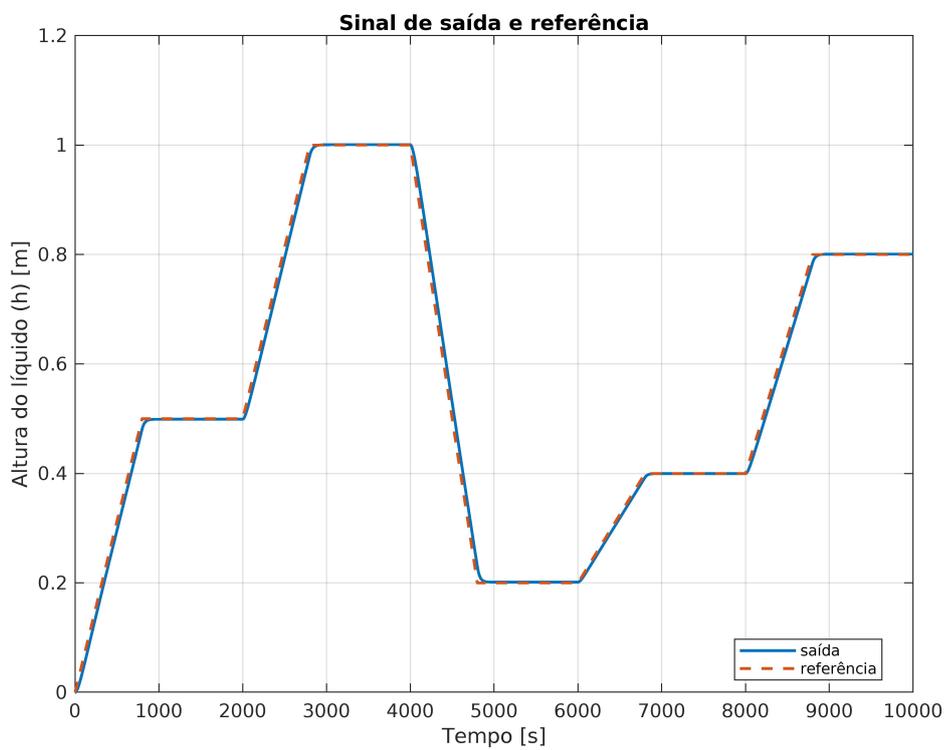
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 54 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.32)



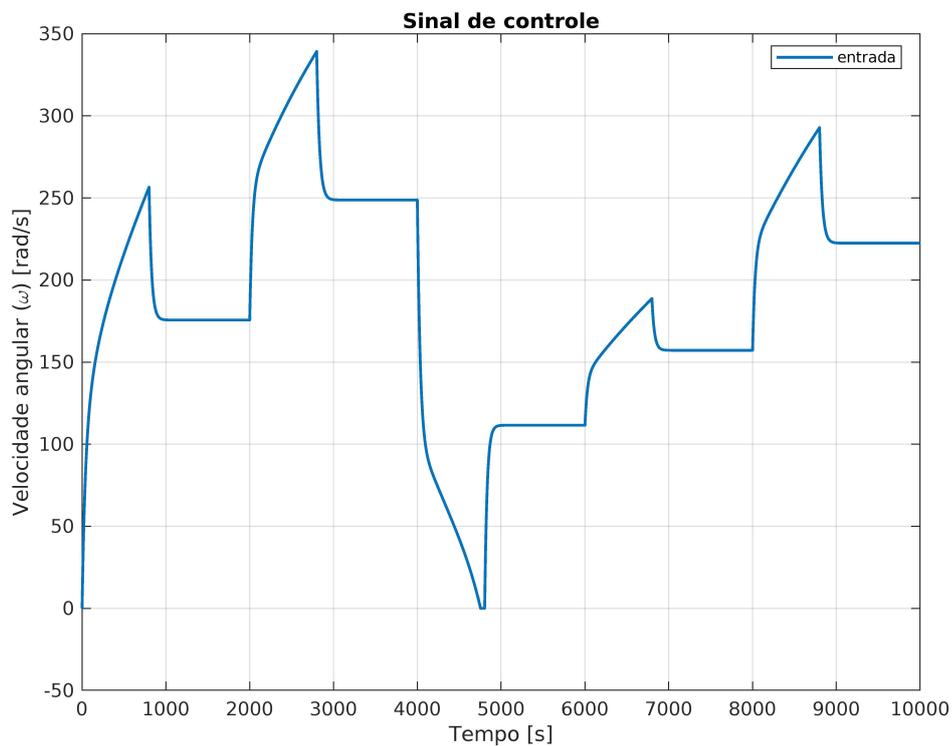
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 55 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.33)



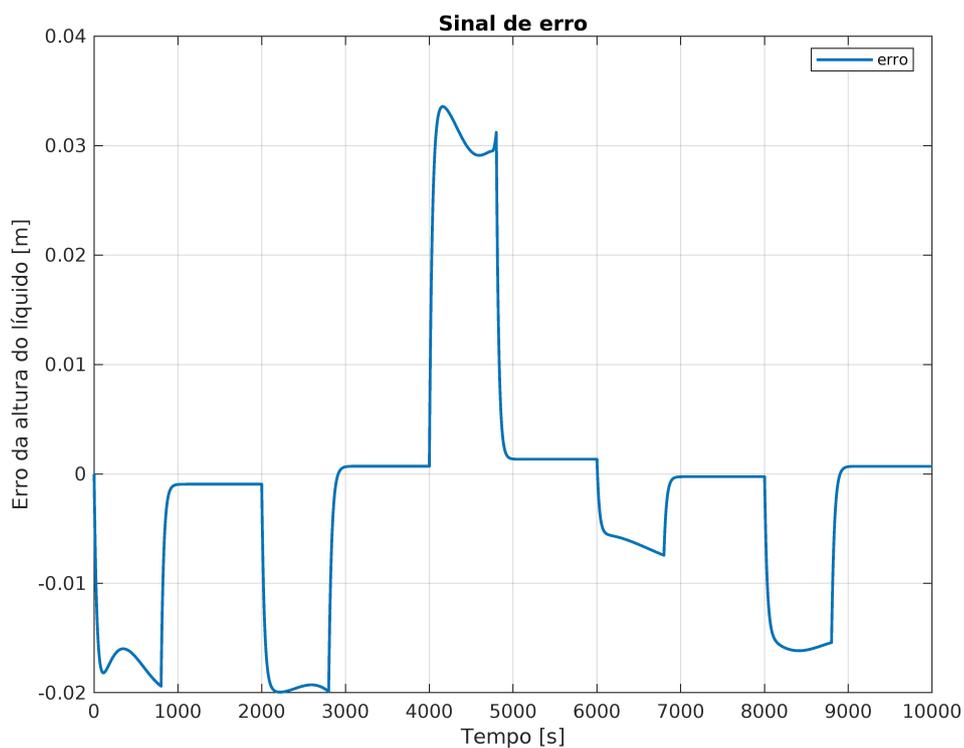
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 56 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.33)



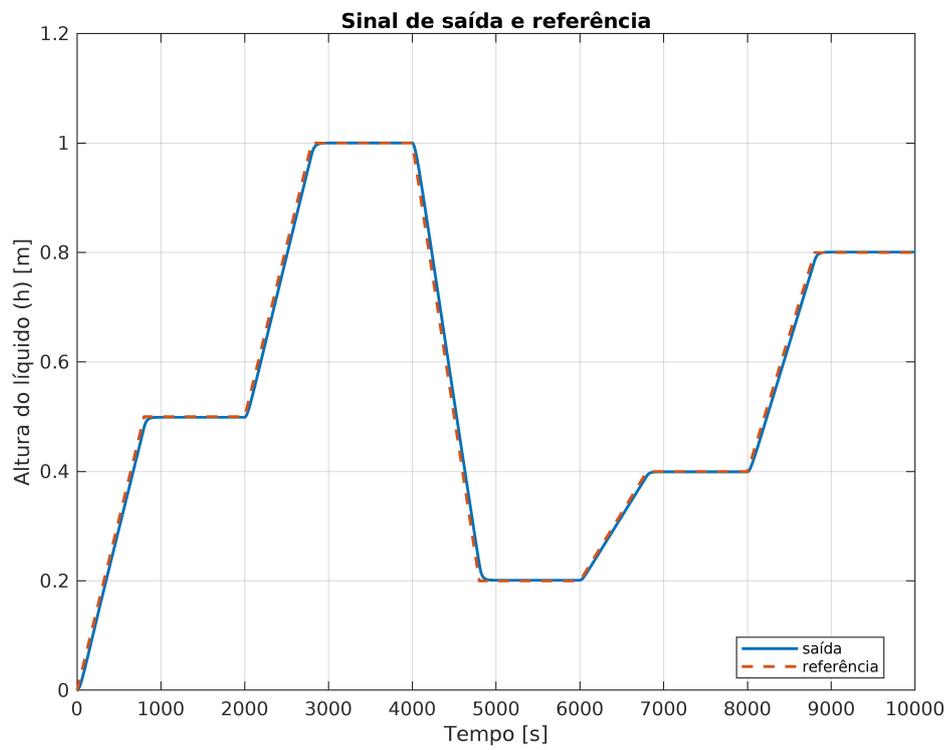
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 57 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.33)



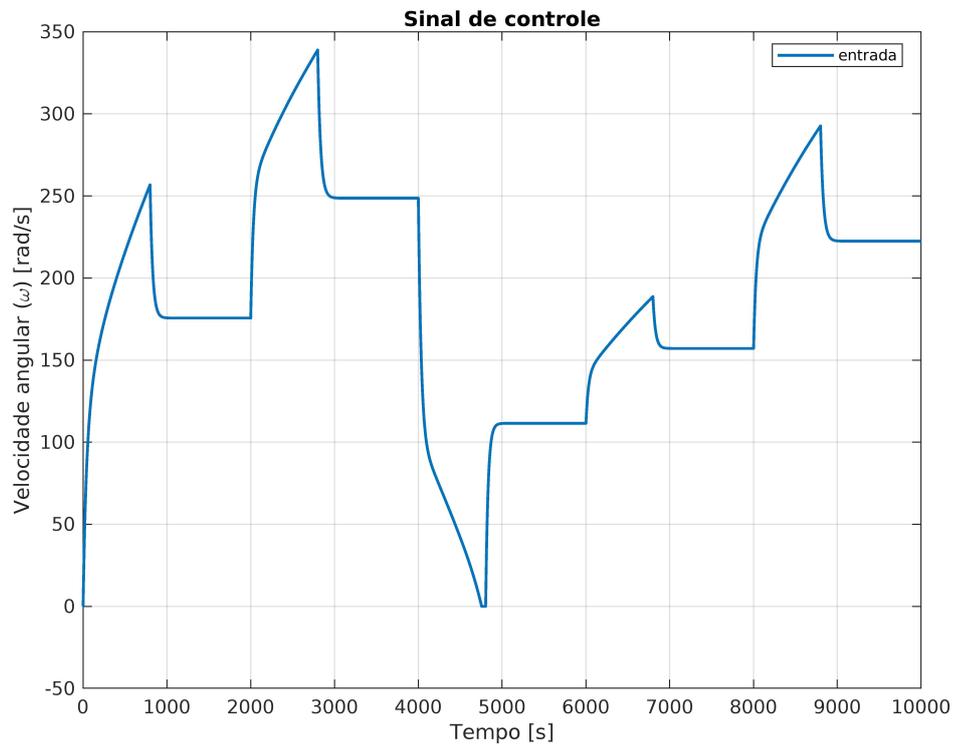
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 58 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.34)



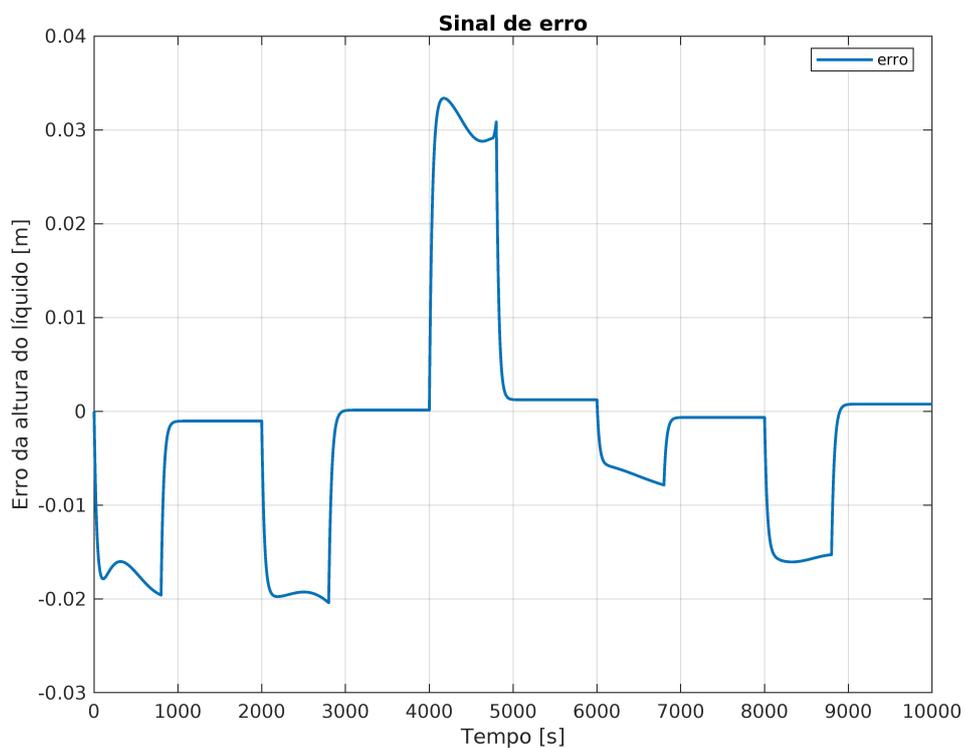
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 59 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.34)



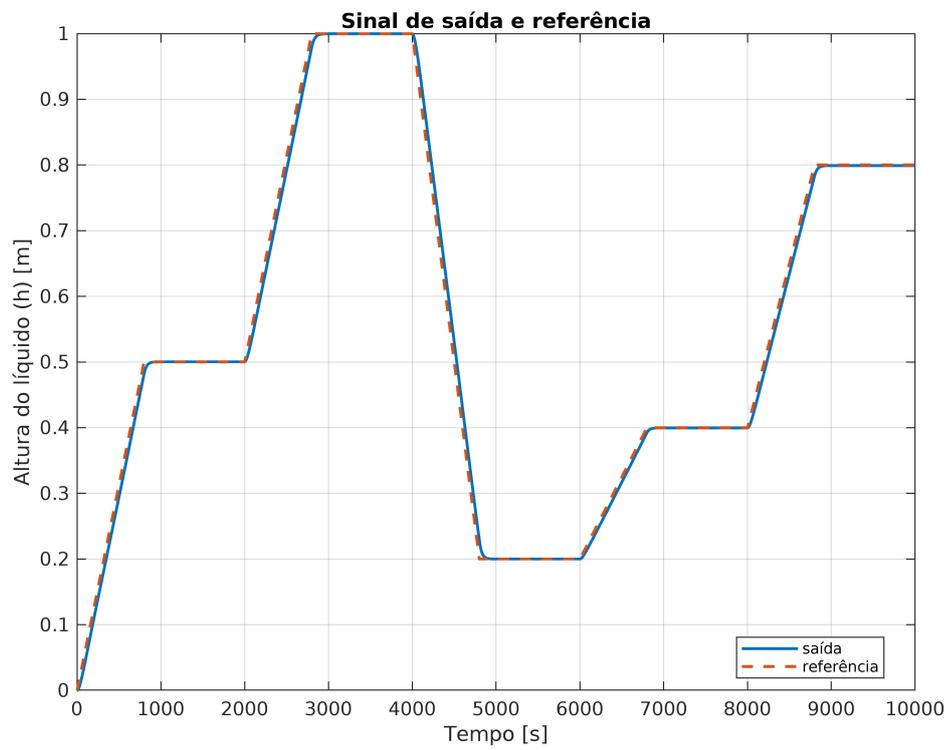
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 60 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.34)



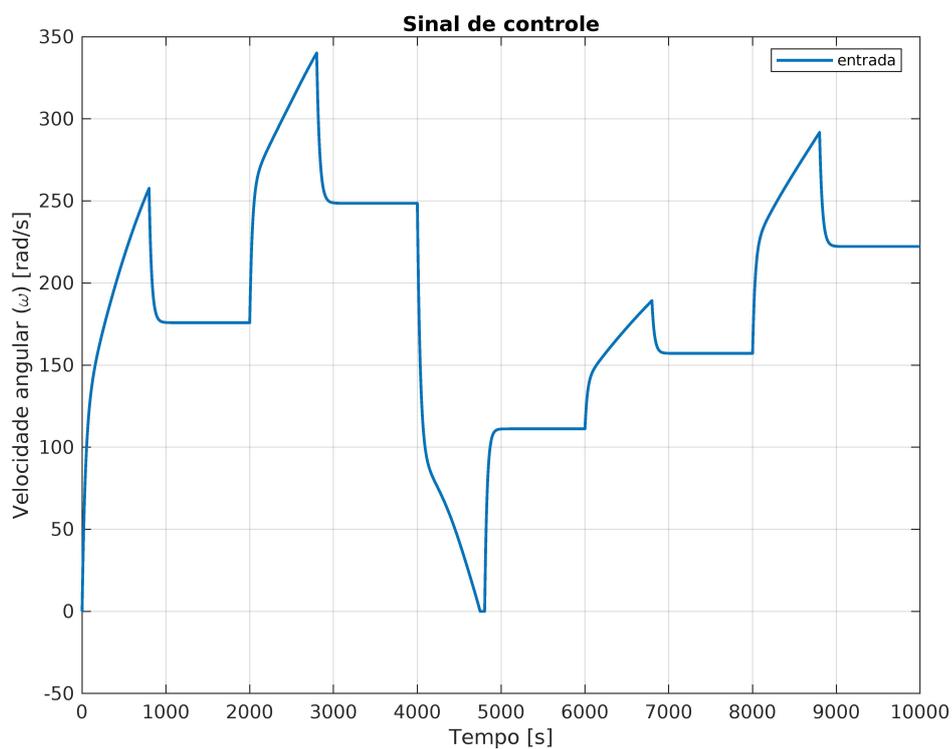
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 61 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.35)



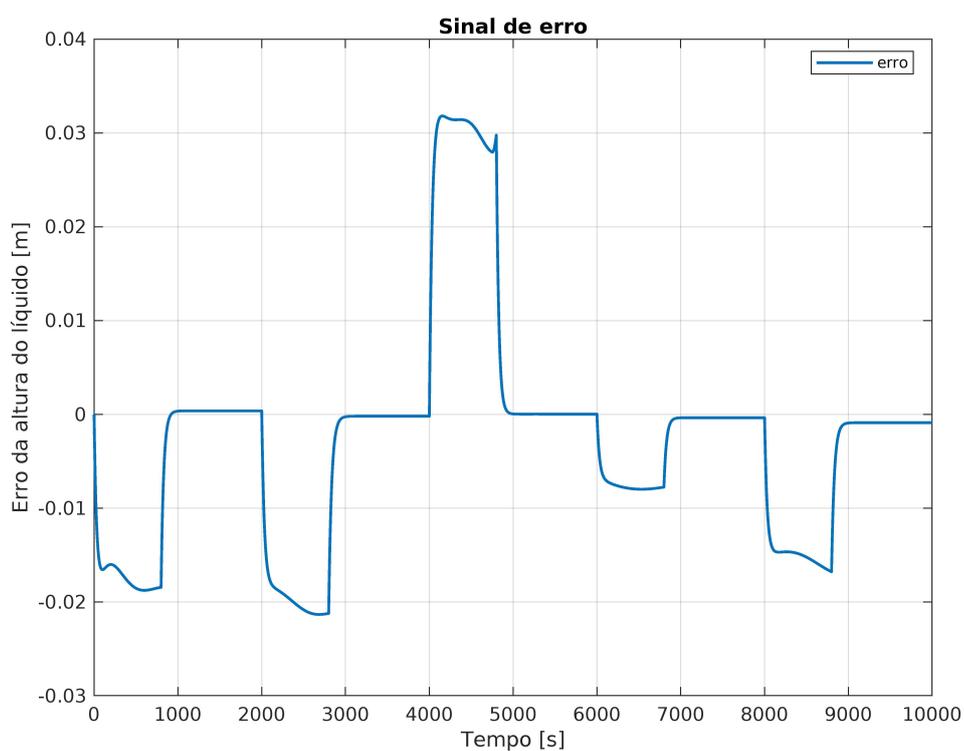
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 62 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.35)



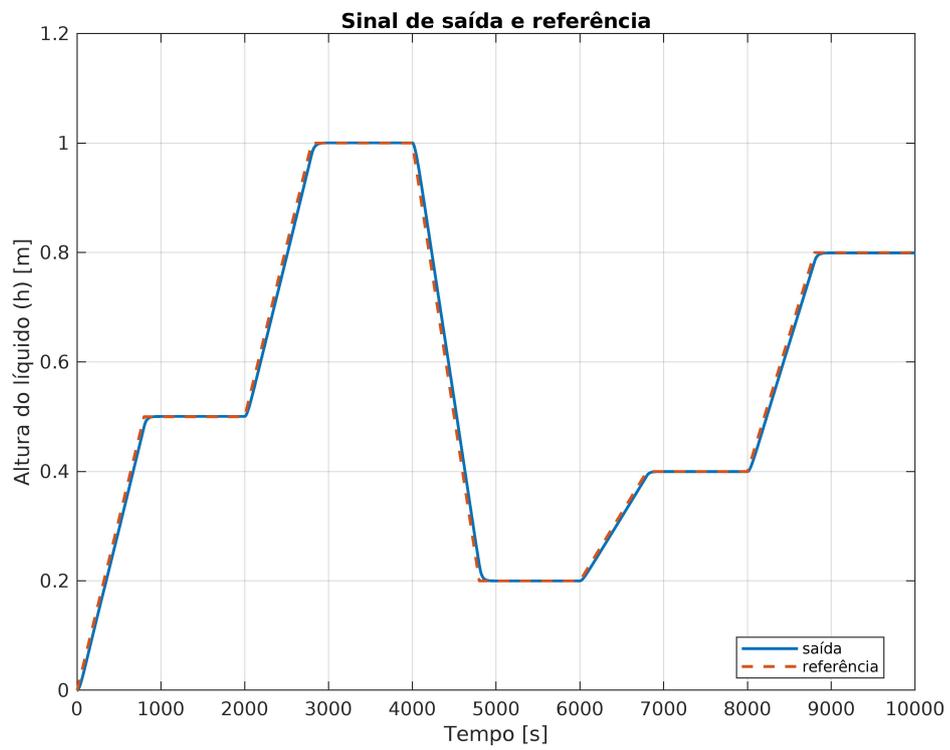
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 63 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.35)



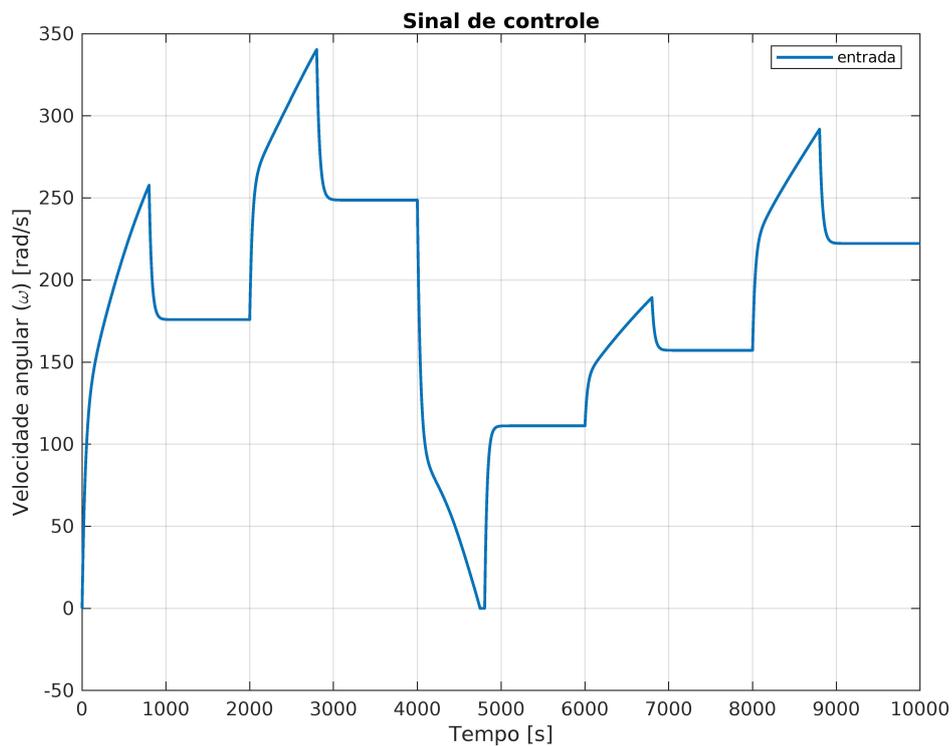
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 64 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.36)



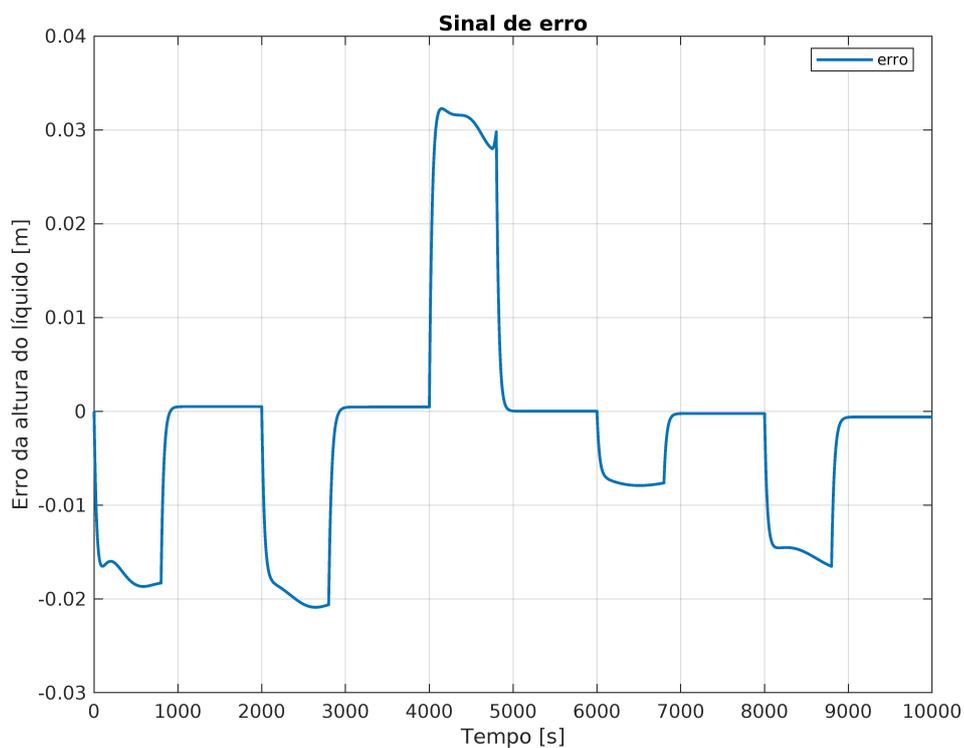
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 65 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.36)



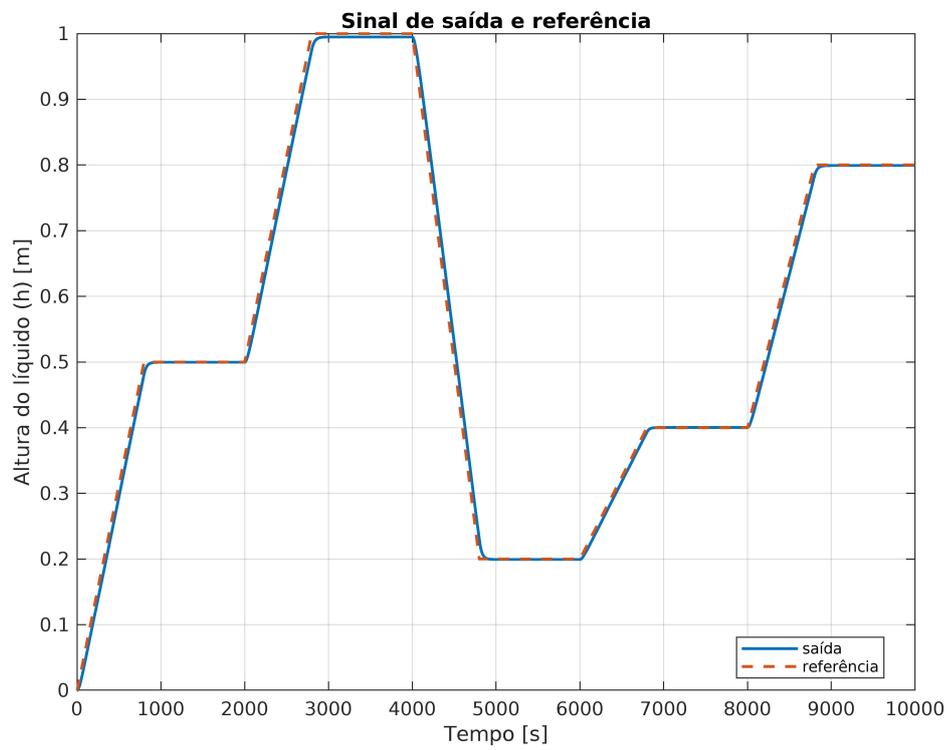
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 66 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.36)



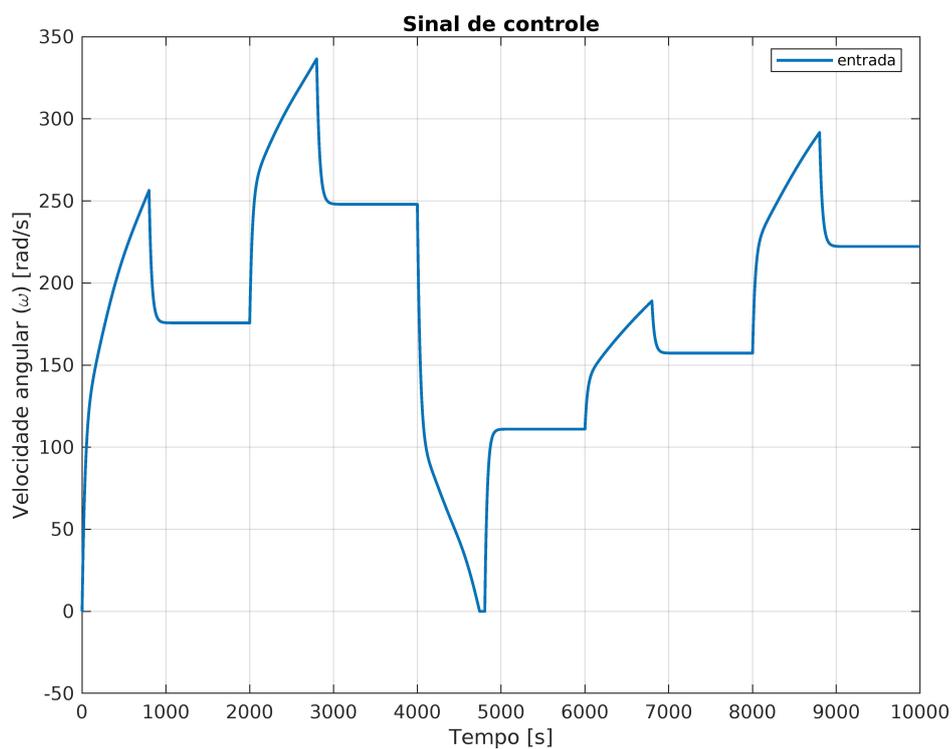
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 67 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.37)



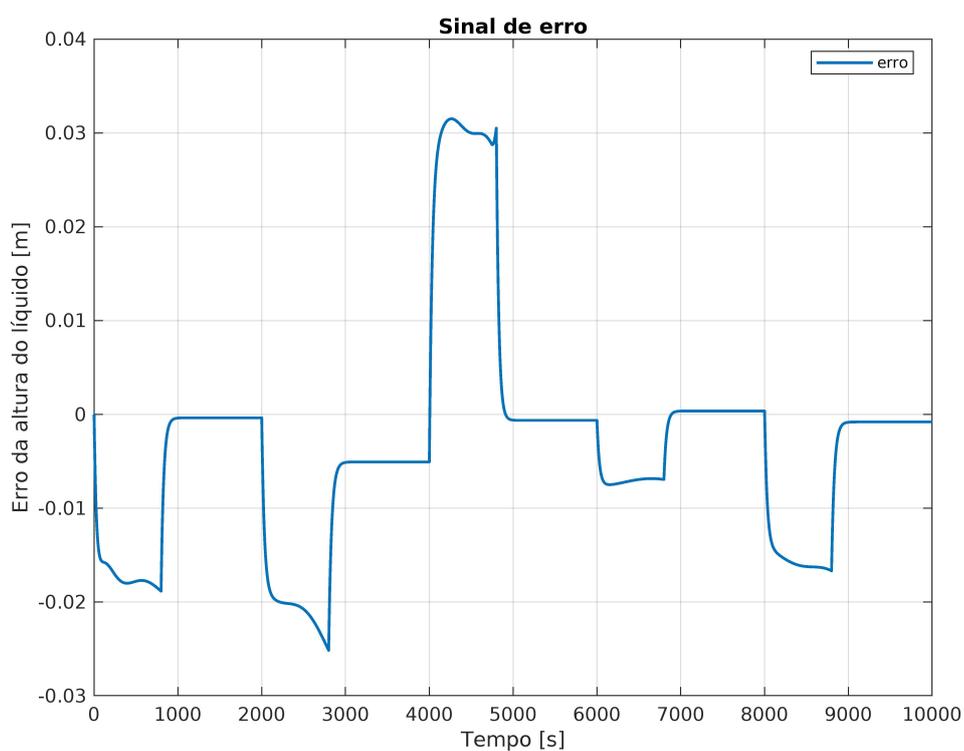
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 68 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.37)



Fonte: elaborada pelo autor.

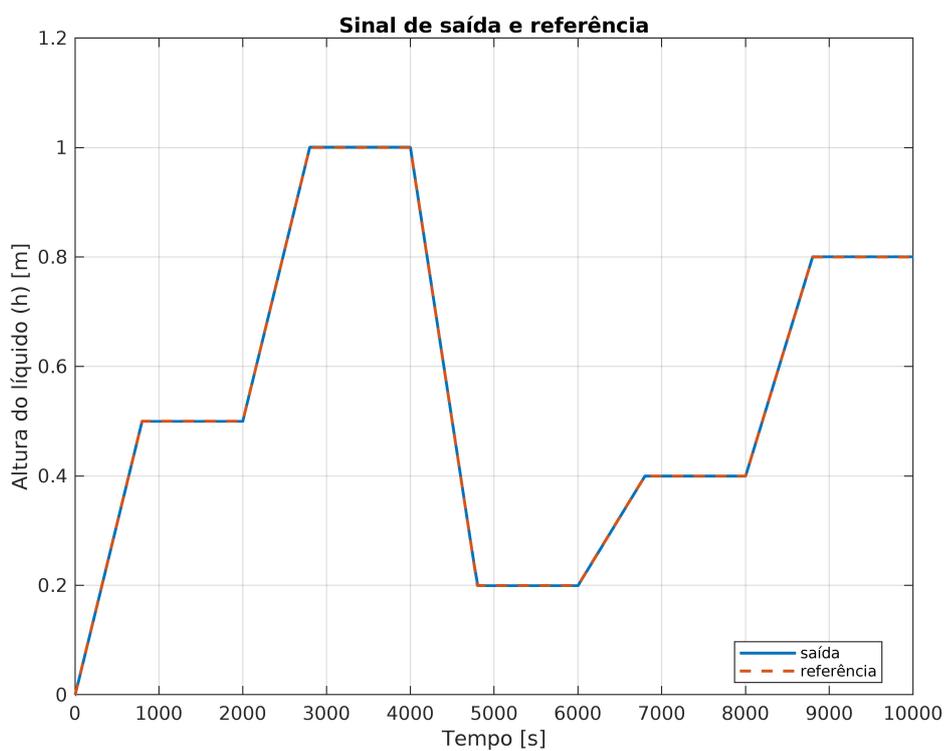
Figura 69 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.37)



Fonte: elaborada pelo autor.

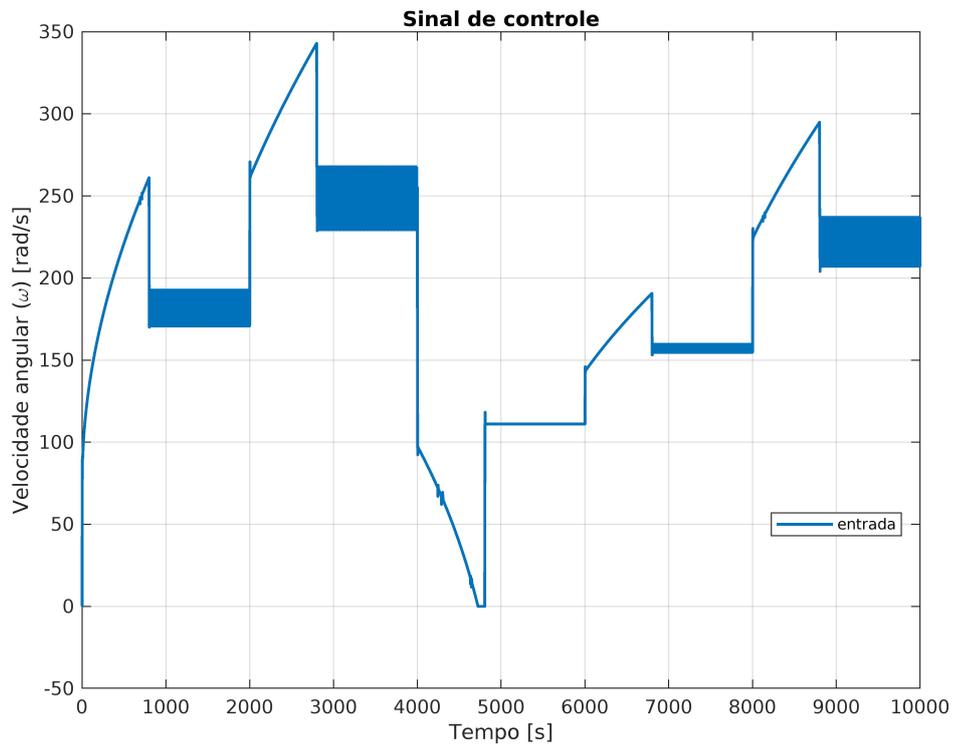
APÊNDICE C – GRÁFICOS ADICIONAIS COM OS RESULTADOS DE CONTROLE DO ESTUDO DE CASO PARA HORIZONTE DE PREDIÇÃO IGUAL A 3

Figura 70 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.30)



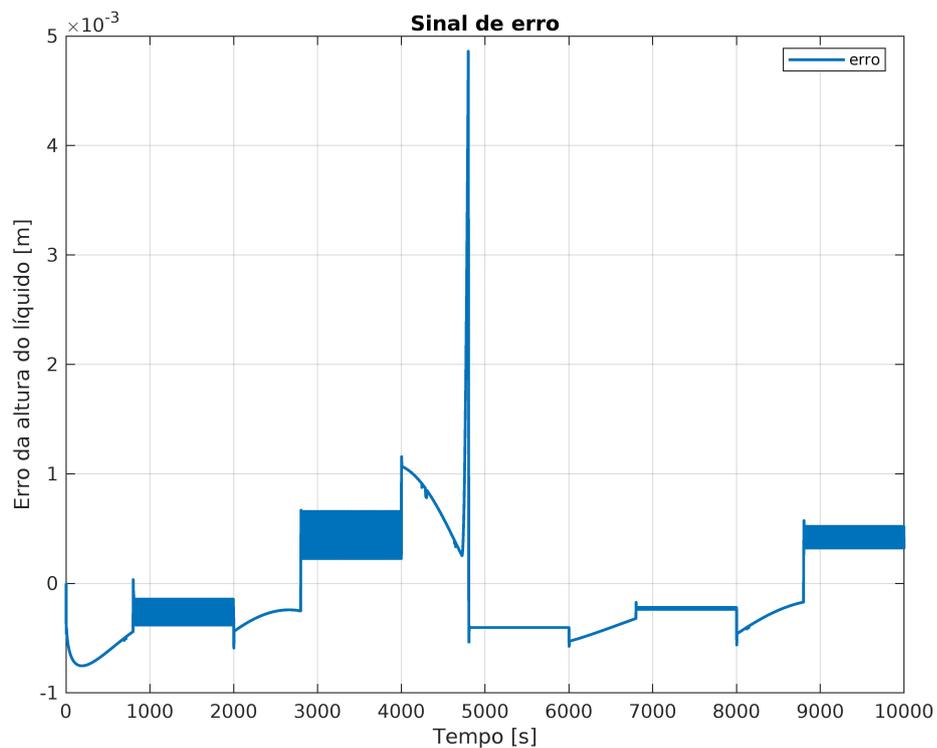
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 71 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.30)



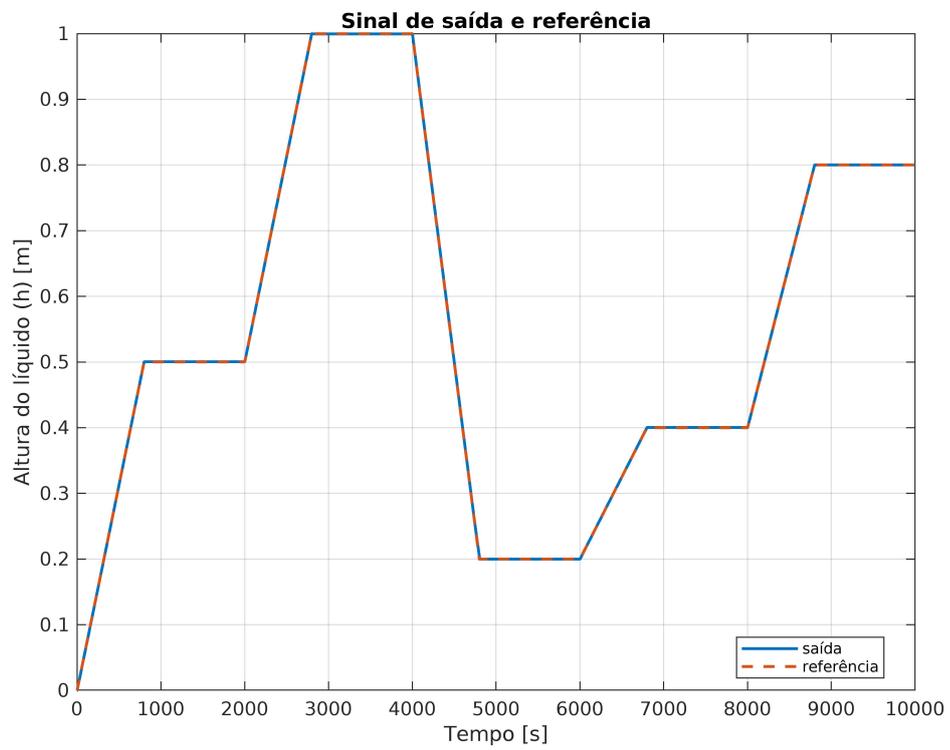
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 72 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.30)



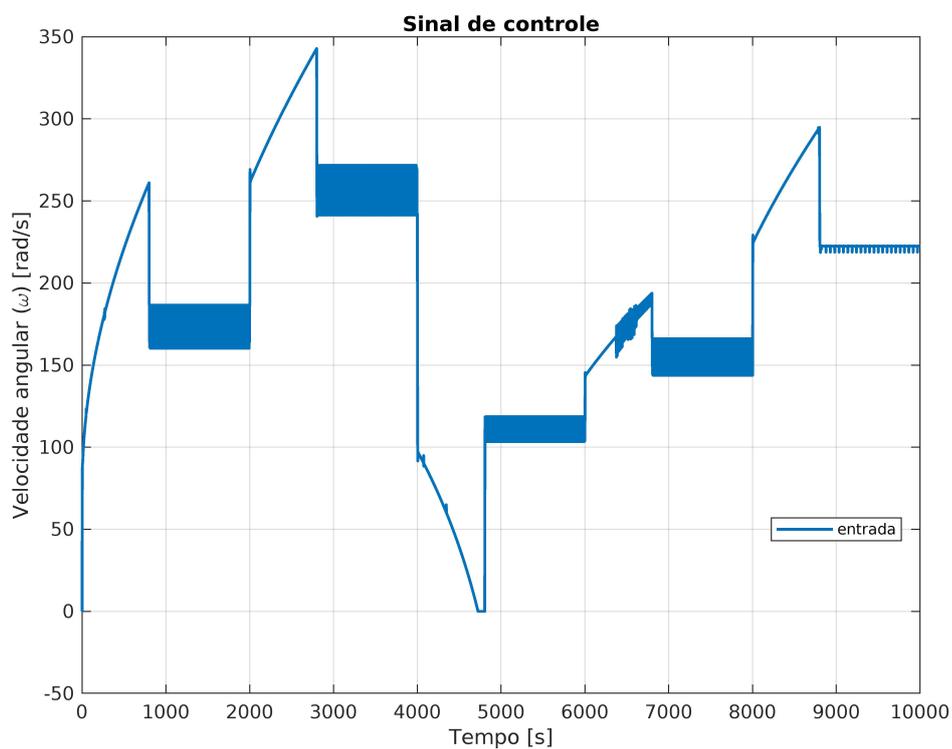
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 73 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.31)



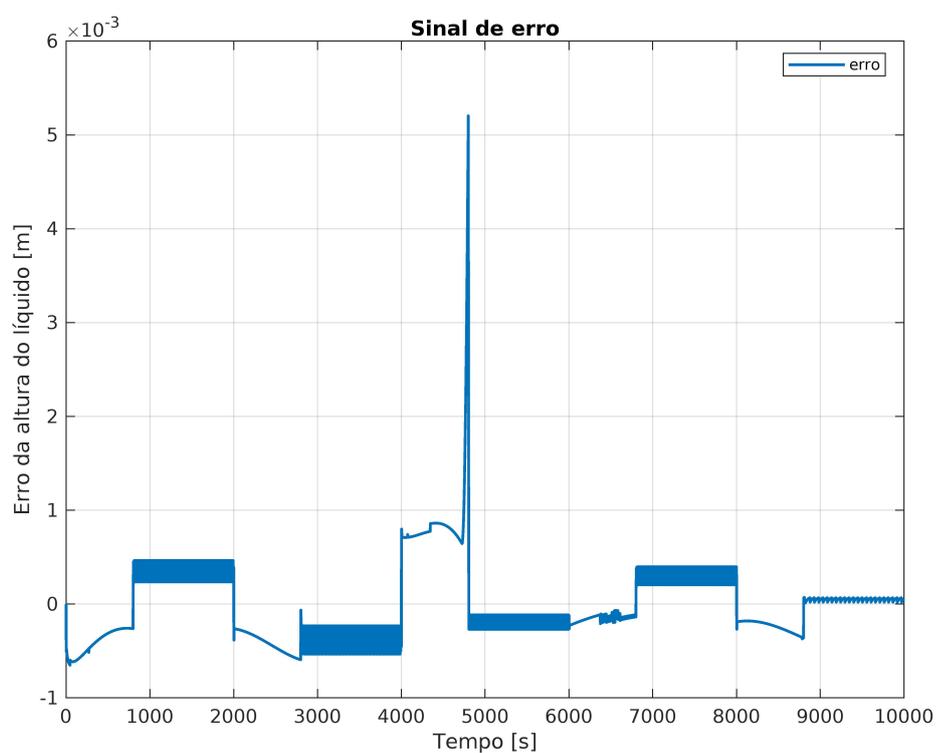
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 74 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.31)



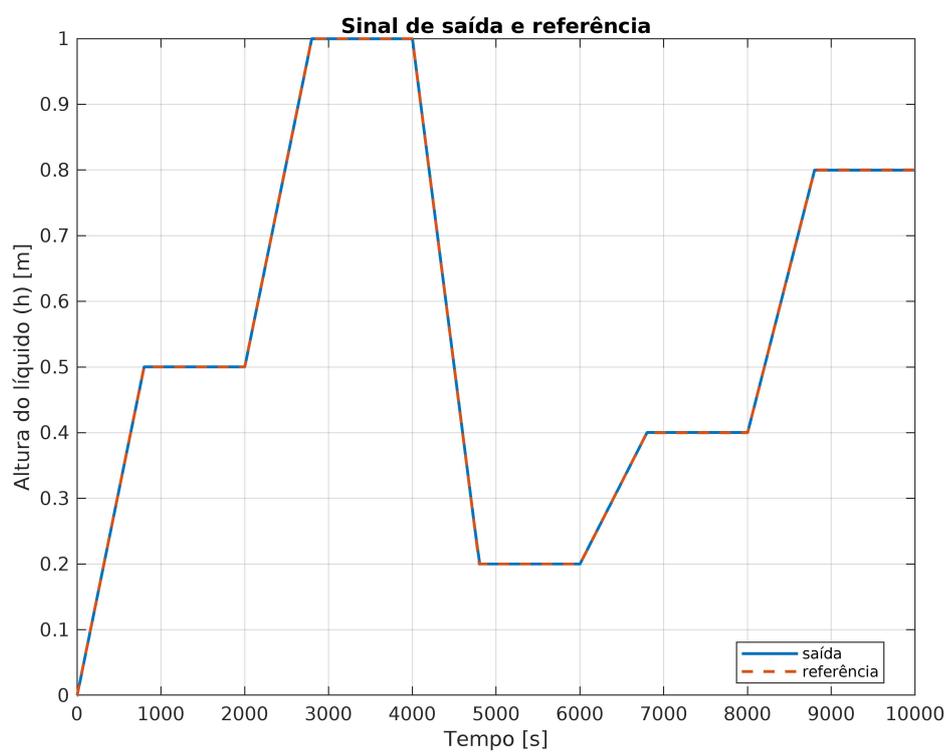
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 75 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.31)



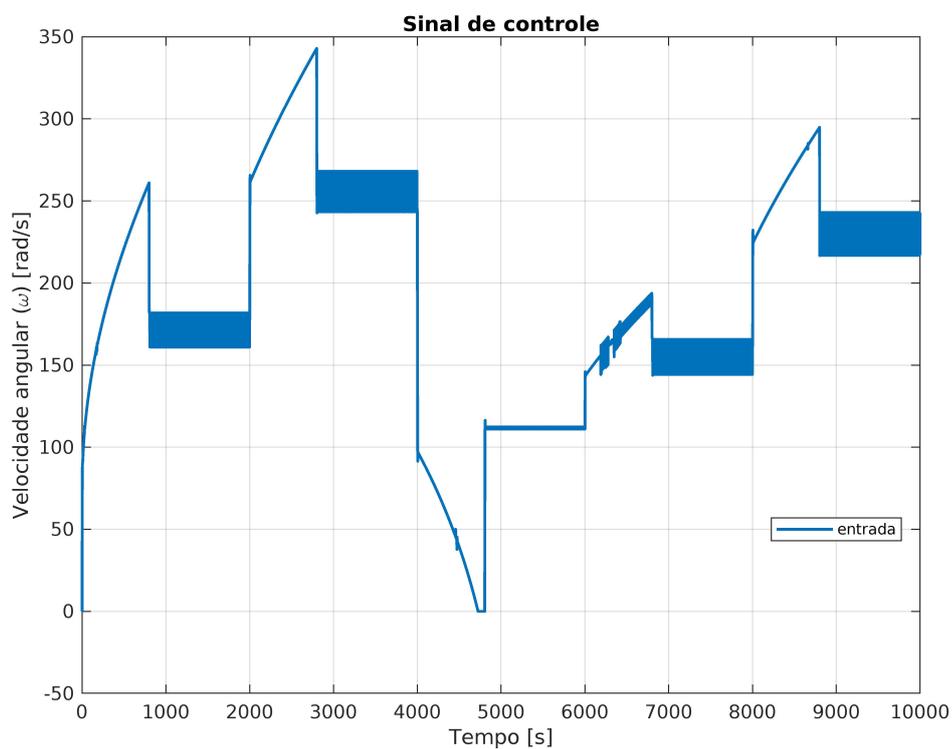
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 76 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.32)



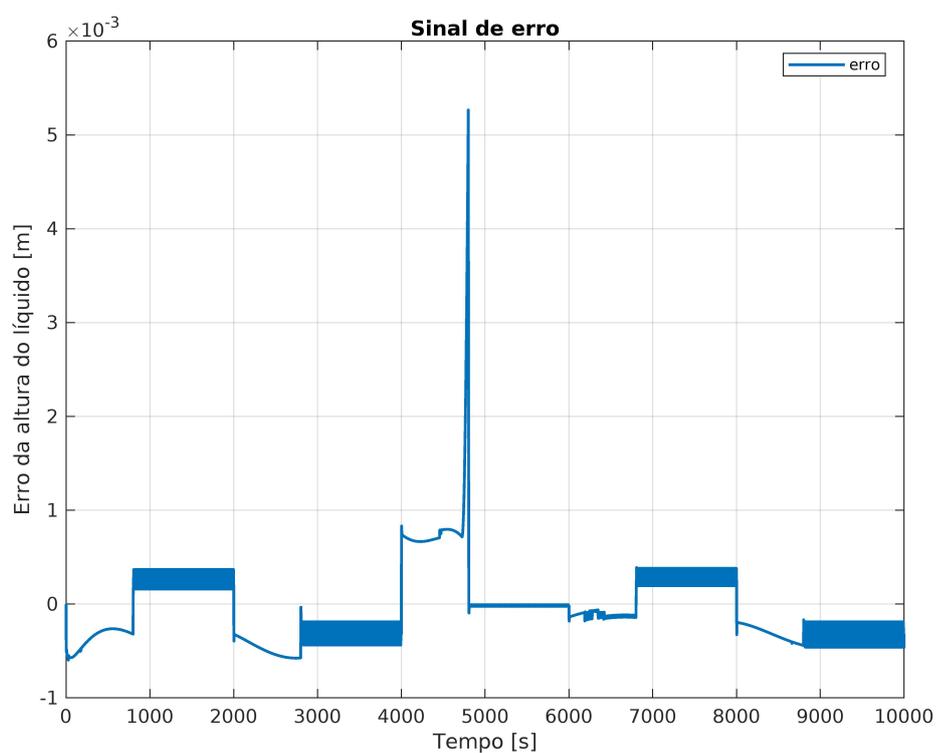
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 77 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.32)



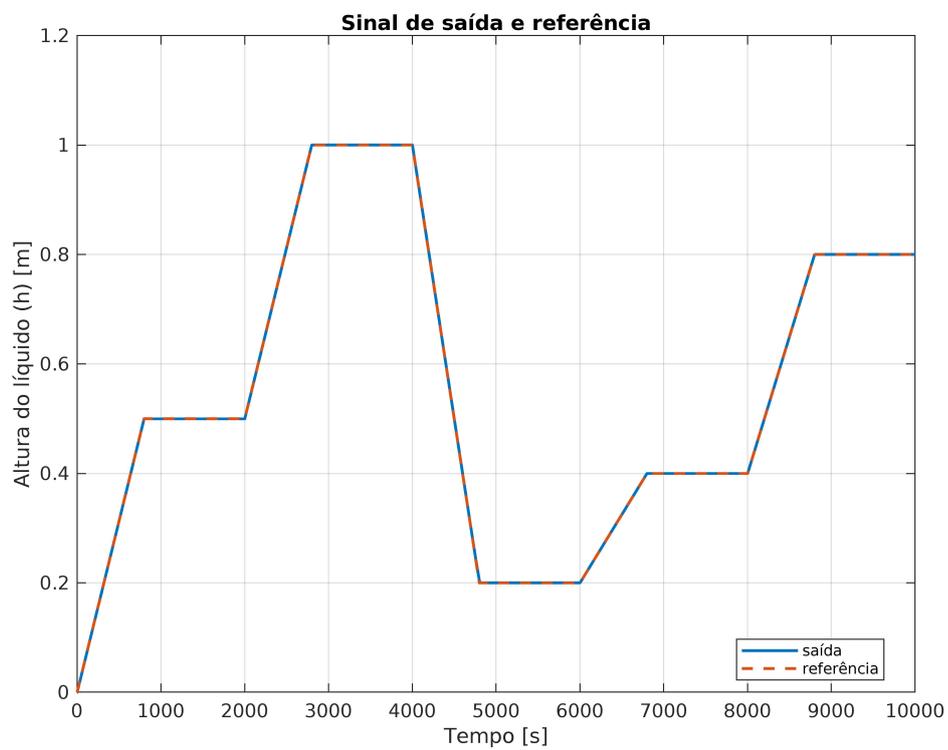
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 78 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.32)



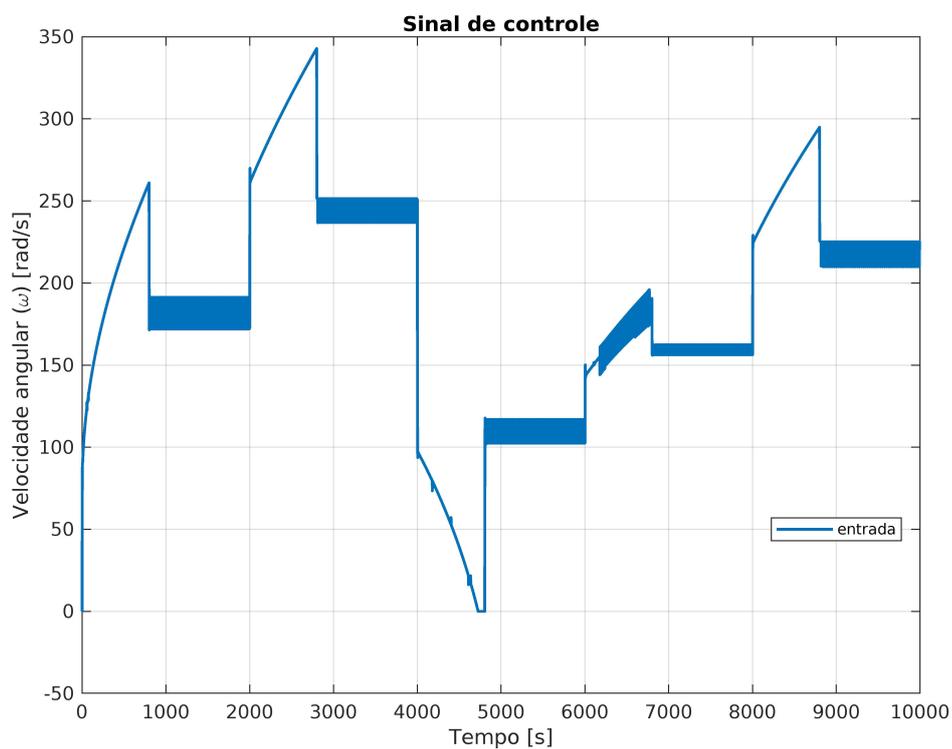
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 79 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.33)



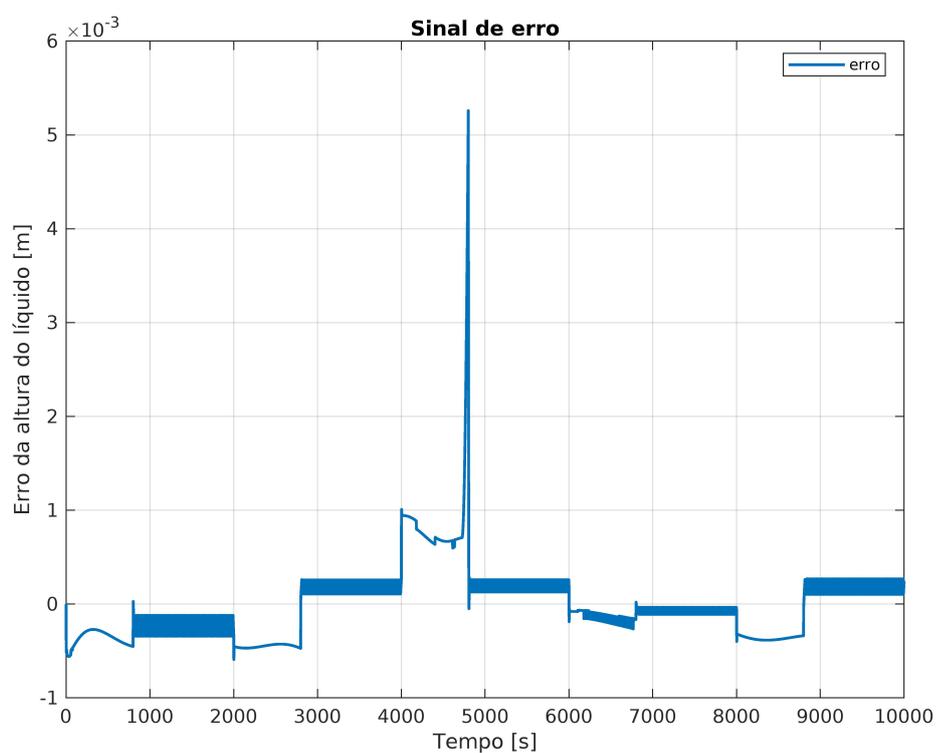
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 80 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.33)



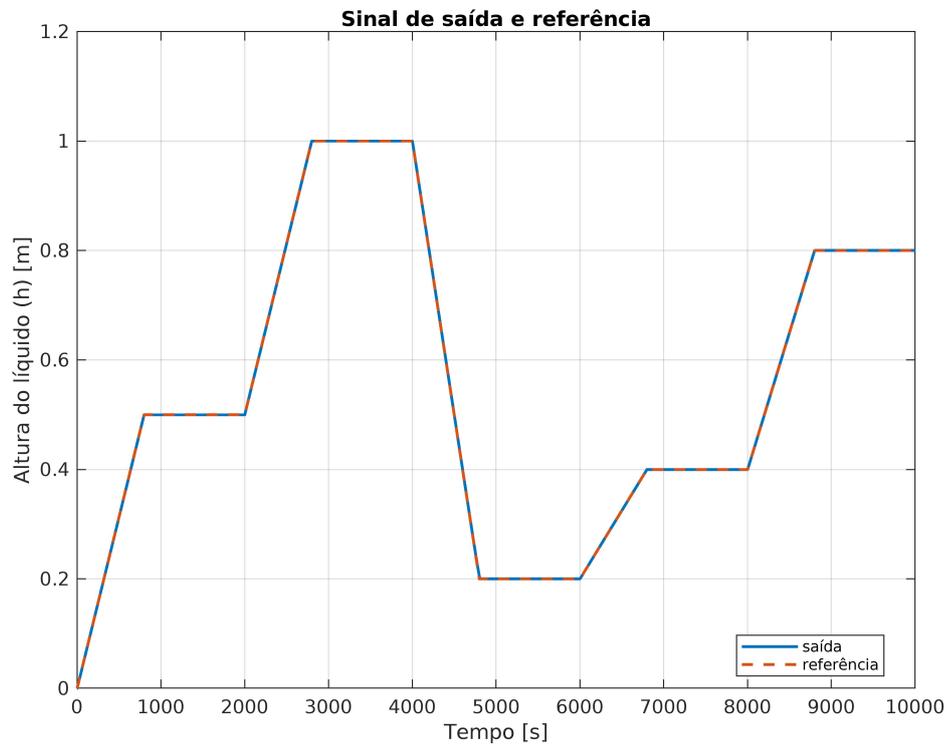
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 81 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.33)



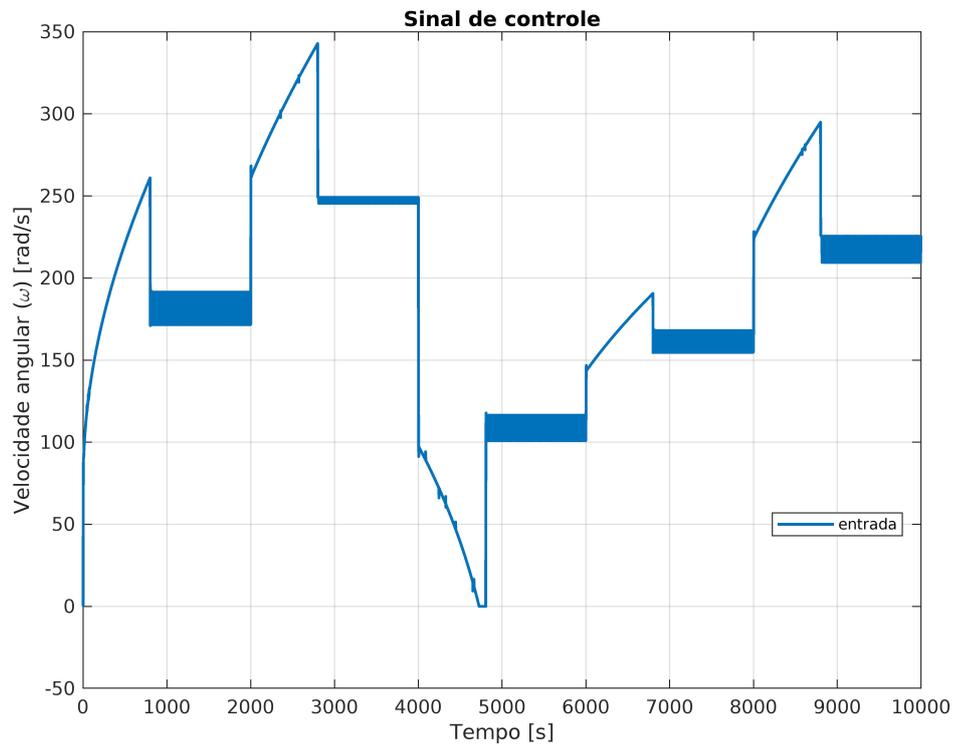
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 82 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.34)



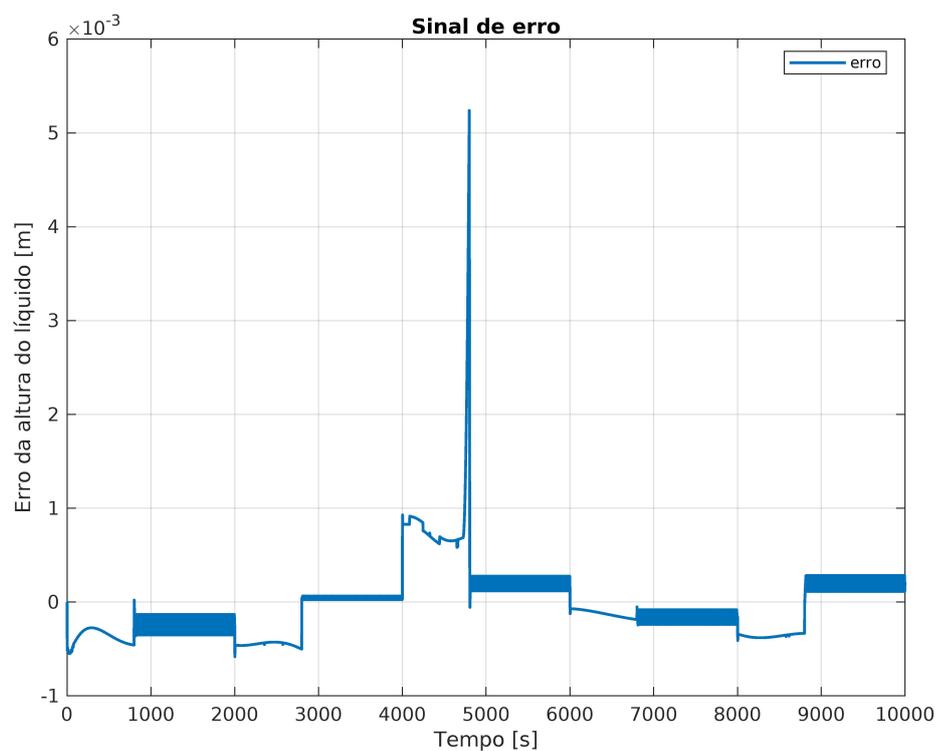
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 83 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.34)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 84 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.34)



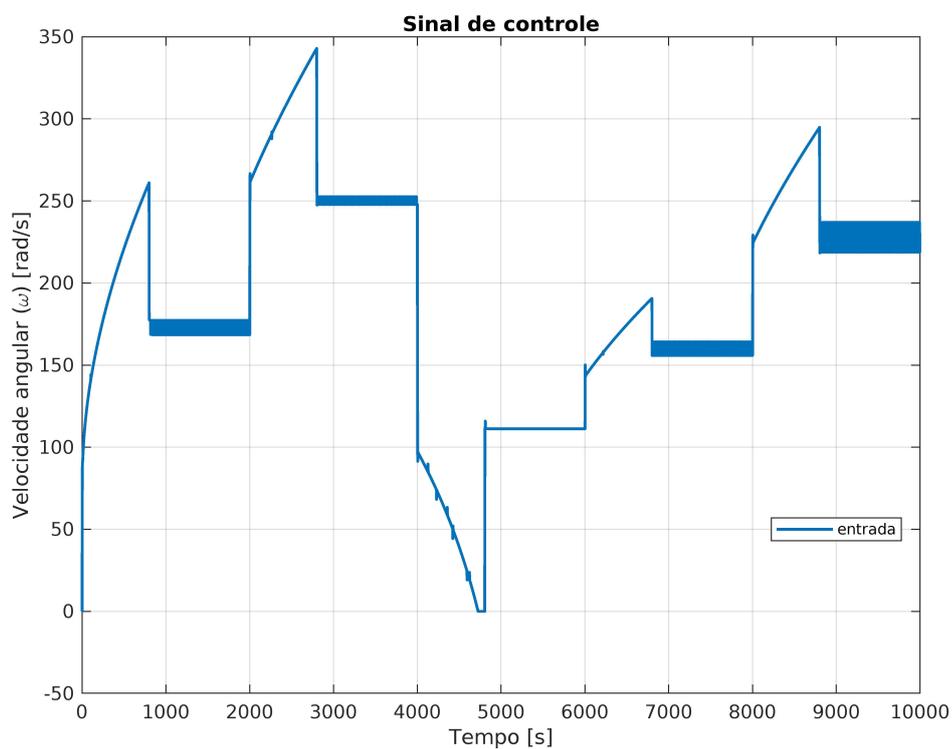
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 85 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.35)



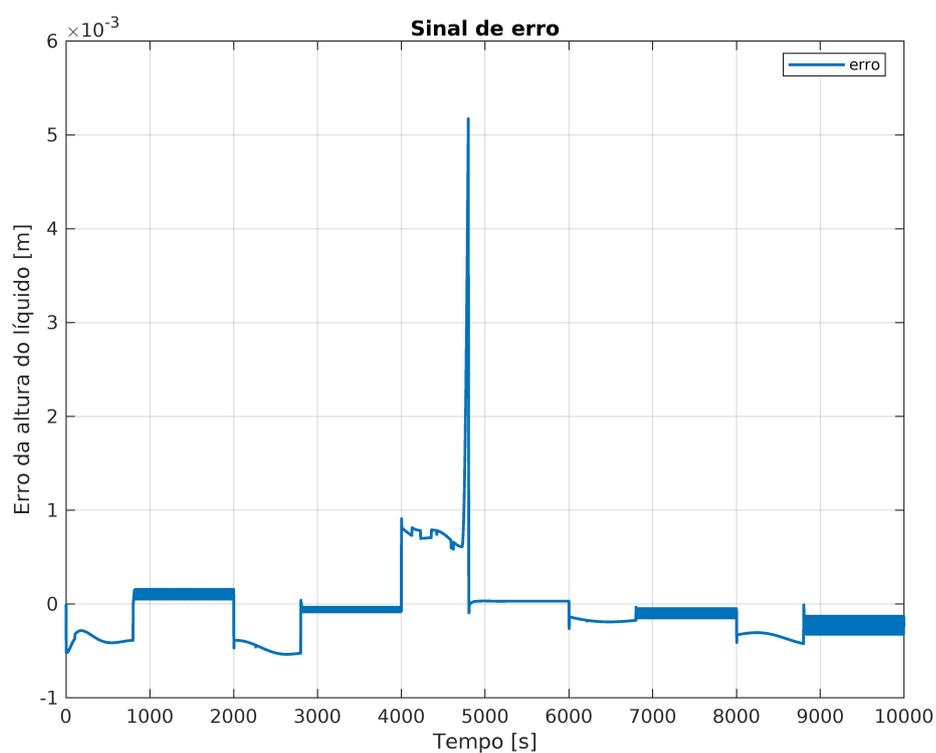
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 86 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.35)



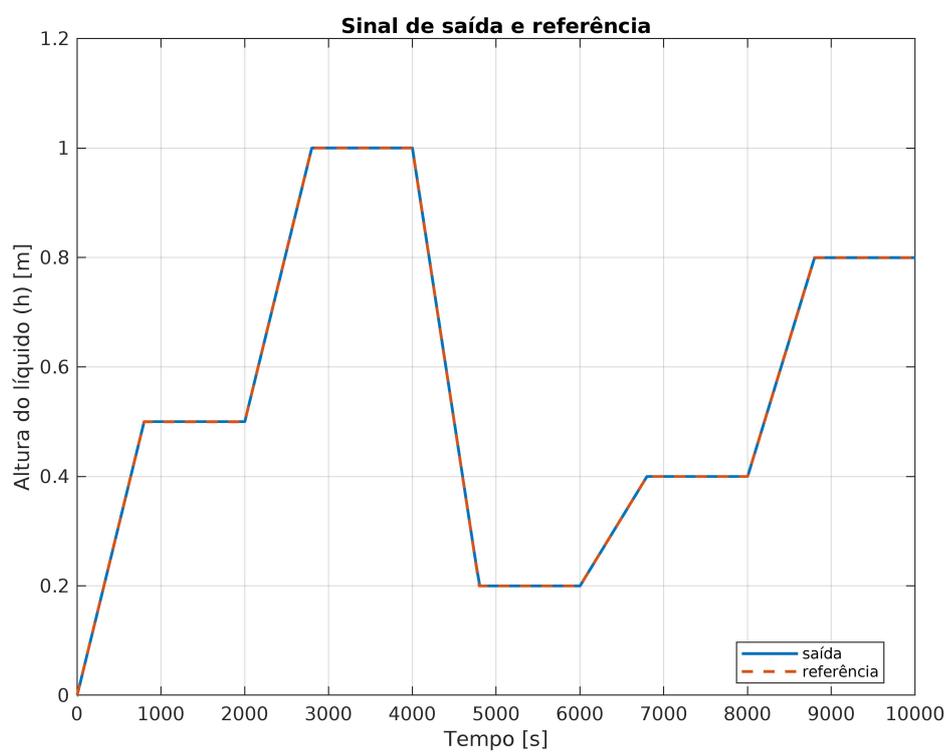
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 87 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.35)



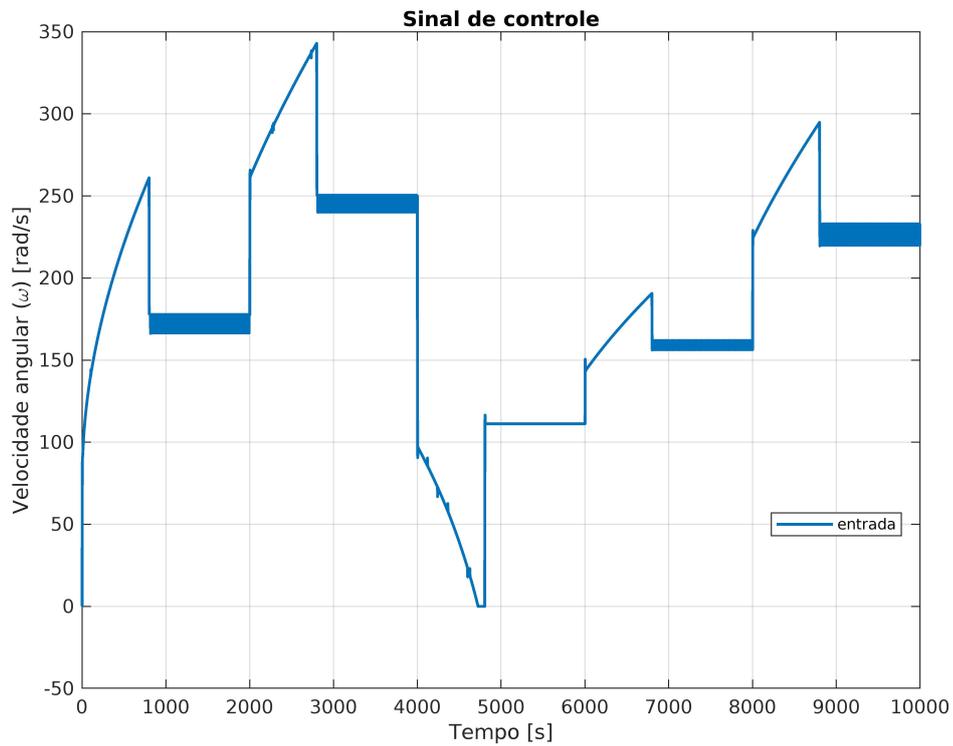
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 88 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.36)



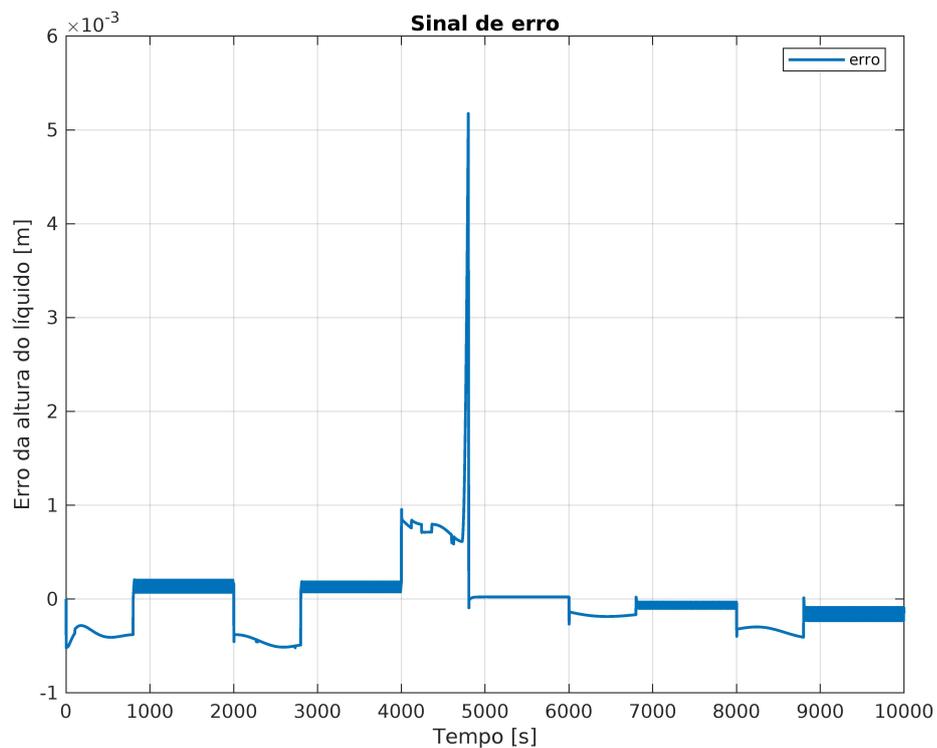
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 89 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.36)



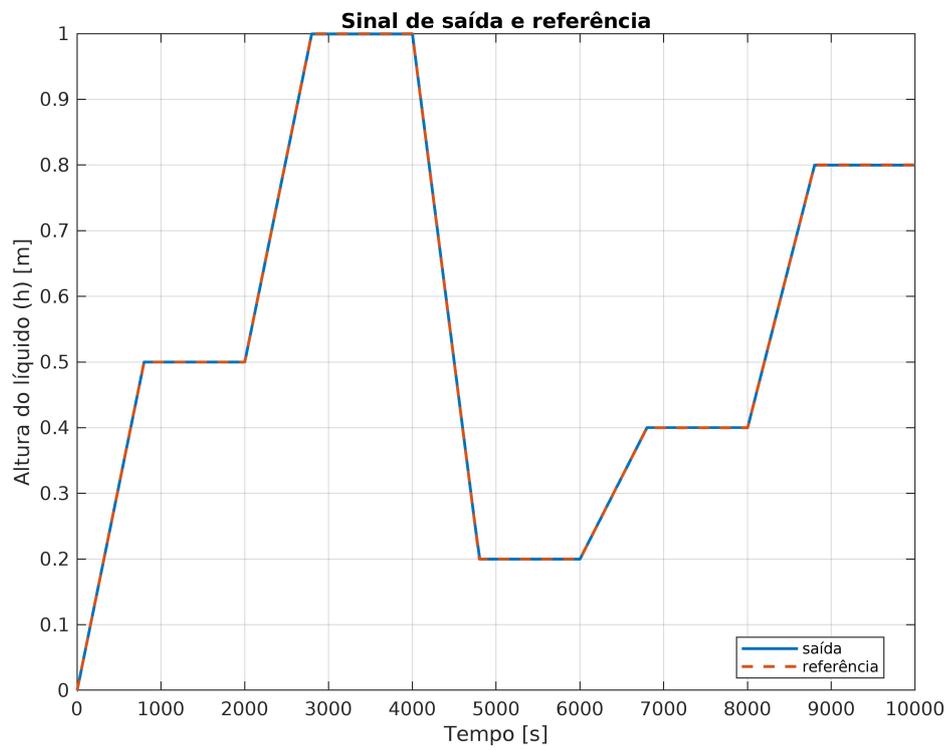
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 90 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.36)



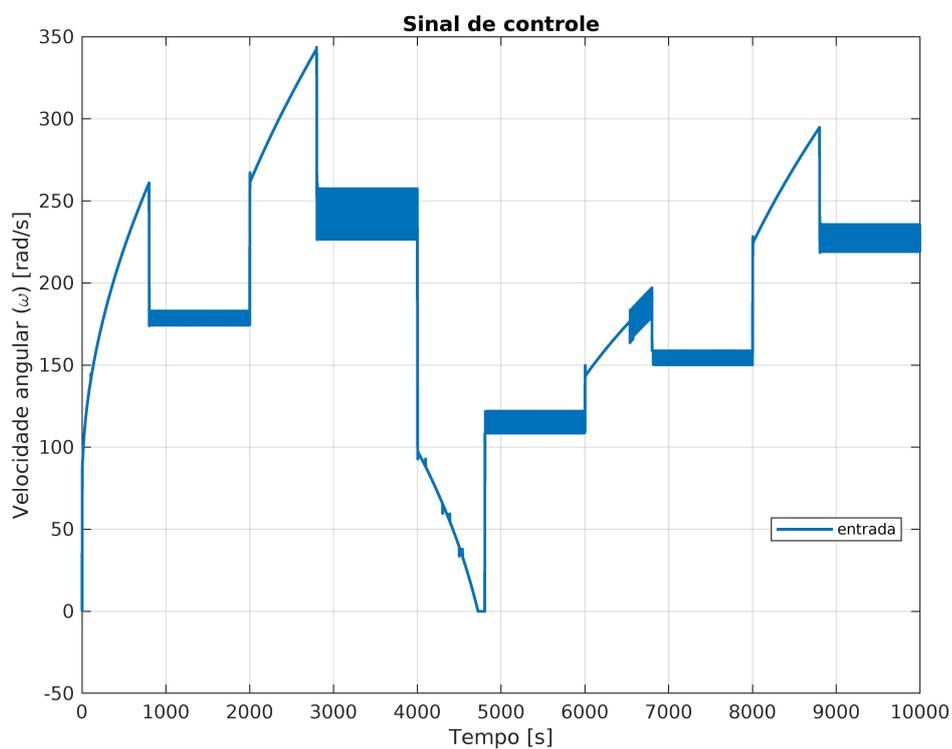
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 91 – Gráfico do sinal de saída controlada e referência do sistema com modelo de predição (5.37)



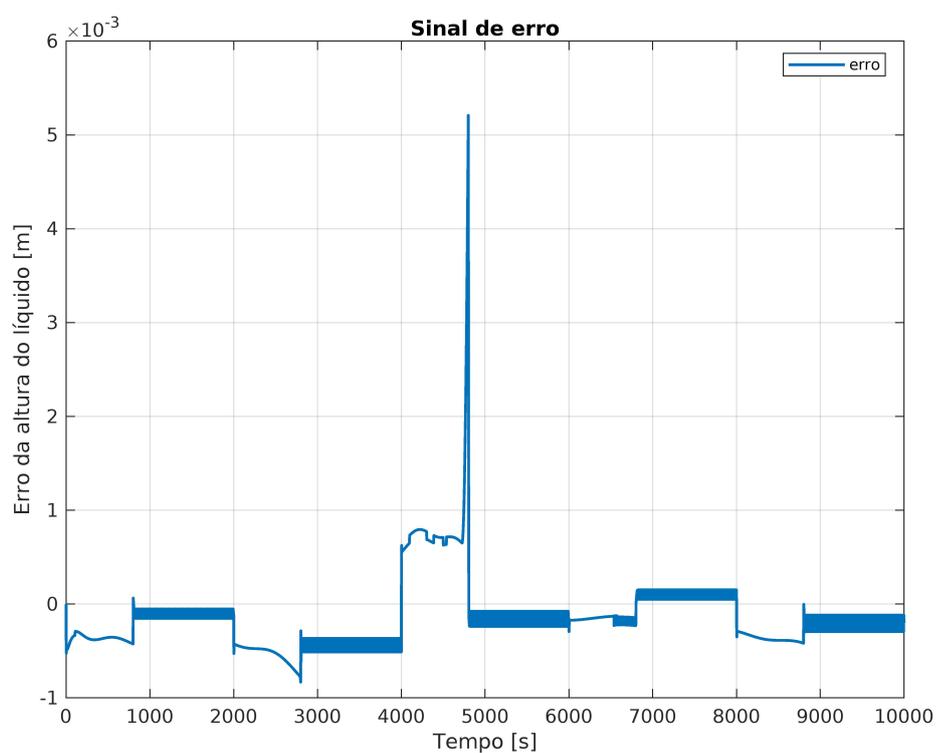
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 92 – Gráfico do sinal de controle do sistema com modelo de predição (5.37)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 93 – Gráfico do sinal de erro do sistema com modelo de predição (5.37)



Fonte: elaborada pelo autor.