



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO

O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DAS
SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM ESTUDANTES
DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA

2023

EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO

O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DAS
SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM ESTUDANTES DO
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos.

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C35e Castro, Emanuela Moura de Melo.
O ensino da proporcionalidade na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas : uma Engenharia Didática com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental / Emanuela Moura de Melo Castro. – 2023.
158 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos .
Coorientação: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.
1. Proporcionalidade. 2. Engenharia Didática. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Software Modellus.
I. Título.

CDD 370.7

EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO

O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DAS
SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA COM ESTUDANTES DO
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 11/11/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Coorientador)

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Profª. Dra. Maria José Costa dos Santos

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Alberto da Silva Nonato

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. José Ronaldo Alves Araújo

Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais (IF Sudeste MG)

A Deus.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por me possibilitar sonhar e realizar.

A meu esposo Francisco Daniel Carneiro de Castro pelo seu apoio, paciência e cuidado nos momentos difíceis deste percurso.

A minha mãe Eugênia Maria de Moura Santos e a meu pai Antônio Sérgio de Melo pelo amor e cuidado durante essa experiência de cursar uma pós-graduação.

Agradeço a minha família pelo apoio e orações.

Ao meu orientador Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos e ao meu coorientador Dr. Daniel Brandão Menezes pelos momentos de orientação, por compartilhar conhecimentos e experiências nas pesquisas. Foram muitos momentos de contribuição e dedicação disponibilizados pelos senhores, pelos quais agradeço profundamente.

Aos integrantes da comissão julgadora Dr. José Ronaldo Alves Araújo, Dra. Maria José Costa dos Santos e Dr. Carlos Alberto da Silva Nonato pela disponibilidade e por dar sugestões valiosas neste estudo.

Aos meus colegas de estudo Elza, Daniele, Kátia, Giliane e Jorge, com vocês esse percurso foi mais leve e feliz.

Agradeço aos alunos que aceitaram participar da pesquisa pelo compromisso nas atividades que fizeram parte deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos os colegas e amigos que torceram por mim nessa jornada.

“Os sentidos exultam ante coisas bem proporcionadas, já que estas se assemelham; pois também os sentidos são uma espécie de razão, assim como qualquer força cognitiva” (São Tomás de Aquino).

RESUMO

A proporcionalidade é um conceito essencial para compreender diversos temas da Matemática, fundamental também para solucionar problemas cotidianos. Entretanto, resultados recentes de avaliações externas, como as do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), em nível nacional e do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), em nível estadual, demonstram a falta de apropriação da proporcionalidade por estudantes da Educação Básica. Este trabalho objetiva investigar, na perspectiva da Engenharia Didática, situações didáticas baseadas na Teoria das Situações Didáticas, que envolvem a proporcionalidade e que utilizam o software *Modellus*, mediante aplicações com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Utiliza-se o software para tornar a aprendizagem desses conceitos mais significativa, ao possibilitar uma melhor visualização e dinamismo das situações didáticas. A ED é usada como metodologia de pesquisa. Sendo assim, este estudo está dividido em quatro etapas denominadas: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Na primeira etapa, foi realizada uma análise epistemológica, documental e didática sobre a proporcionalidade. Na segunda, construíram-se situações didáticas com a utilização do software *Modellus* e foram definidas as hipóteses de investigação da pesquisa. A terceira foi consubstanciada pela aplicação de quatro situações didáticas com estudantes do último ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Fortaleza. Por fim, na quarta etapa, fez-se um estudo dos registros da fase anterior durante as dialéticas da TSD, ação, formulação, validação e institucionalização. Além disso, realizou-se a validação das hipóteses construídas na segunda etapa da ED. Como Produto Educacional (PE), elaborou-se um *site* que disponibiliza quatro situações didáticas, além de sugestões de leitura e outros materiais que embasaram esta pesquisa. Os resultados corroboram que a utilização do software *Modellus* para o ensino da proporcionalidade promove um ambiente investigativo e criativo, colocando o aluno como sujeito ativo no processo de construção do seu conhecimento. Além disso, comprovou-se que a TSD estrutura situações didáticas, possibilitando ao docente prever ações dos estudantes, permitindo o gerenciamento destas, mas também que o discente seja ativo em seu processo de aprendizagem. Assim, vislumbra-se a utilização da proposta metodológica por outros professores e pesquisadores que desejam integrar as tecnologias digitais para o ensino da proporcionalidade, visando que estudantes tenham uma aprendizagem mais fundamentada sobre o conceito.

Palavras-chave: proporcionalidade (matemática); engenharia didática; teoria das situações didáticas; software *modellus*.

ABSTRACT

Proportionality is a concept considered essential for understanding various topics in Mathematics, and is also fundamental for solving everyday problems. This concept has been applied in external assessments, such as those of the Basic Education Assessment System (SAEB), at national level, and the Ceará Permanent Basic Education Assessment System (SPAECE), at state level, whose results demonstrate the lack of appropriation of it. The objective of this work is to evaluate, from the perspective of TSD and ED, didactic situations that involve proportionality and that use the Modellus software, through applications with students in the 9th year of Elementary School. The software is used to make learning these concepts more meaningful, by enabling better visualization and dynamism of teaching situations. Didactic Engineering (DE) is used as a research methodology. From this perspective, this study is divided into the stages proposed by ED namely: prior analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and validation. In the first stage, Preliminary analyses, an epistemological, documentary and didactic analysis on proportionality was carried out. In the second stage, didactic situations were constructed using the Modellus software and the research investigation hypotheses were defined. The experimentation stage was embodied by the application of didactic situations with students in the last year of Elementary School at a municipal public school in Fortaleza. Finally, in the a posteriori analysis and validation phase, an analysis was made of the records from the previous stage during the dialectics of TSD, action, formulation, validation and institutionalization. Furthermore, at this stage, the hypotheses constructed in the second stage of DE were validated, evaluating the reproducibility of the didactic situations. As an Educational Product (EP), a website was created that provides four teaching situations, as well as reading suggestions and other materials that supported this research. The results of this study corroborate that the use of Modellus software to teach proportionality promotes an investigative and creative environment, which places the student as an active subject in the process of building their knowledge. Furthermore, it was proven that TSD structures didactic situations, giving the teacher the possibility to predict student actions, allowing the management of these actions, however, allowing the student to be active in their learning process. This study envisions the use of this methodological proposal by other teachers and researchers who wish to integrate digital technologies to teach proportionality, aiming for students to have a more informed learning about this concept.

Keywords: proportionality (mathematics); didactic engineering; theory of didactic situations; software *modellus*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Etapas da Engenharia Didática (ED)	26
Figura 2	- Triângulo Didático.....	30
Figura 3	- Edoxo de Cnido.....	34
Figura 4	- Fragmento do Papiro de Rhind ou de Ahmes.....	35
Figura 5	- Tábua babilônica de multiplicação.....	36
Figura 6	- Tabela Plimptom 322	37
Figura 7	- Solução de um problema em um livro didático	43
Figura 8	- Relação da proporcionalidade e função apresentada em um livro didático..	44
Figura 9	- A proporcionalidade presente na probabilidade e estatística.....	46
Figura 10	- Escala de Proficiência de Matemática do SPAECE 2022.....	48
Figura 11	- Padrões de desempenho em Matemática do 5º e 9º ano.....	48
Figura 12	- Potencialidades do <i>Modellus</i> como ferramenta pedagógica	53
Figura 13	- Interface gráfica do <i>Modellus</i> 4.01.....	54
Figura 14	- SD1: Questão do SPAECE adaptada no <i>Modellus</i>	56
Figura 15	- SD1: Simulação gerada no <i>Modellus</i>	57
Figura 16	- SD1: Tabela e gráfico no <i>Modellus</i>	57
Figura 17	- SD1: Tabela gerada pelo <i>Modellus</i> durante a simulação.....	58
Figura 18	- SD1: Gráfico gerado pelo <i>Modellus</i> durante a simulação	59
Figura 19	- SD1: Solução por meio de relações do tipo aditivo.....	60
Figura 20	- SD1: Propriedade aditiva da função d.....	60
Figura 21	- SD2: Questão do SPAECE adaptada no <i>Modellus</i>	63
Figura 22	- SD2: Simulação gerada no <i>Modellus</i>	64
Figura 23	- SD2: Gráficos e tabela no <i>Modellus</i>	65
Figura 24	- SD3: Questão do SPAECE adaptada no software <i>Modellus</i>	67
Figura 25	- SD3: Simulação gerada no <i>Modellus</i>	67
Figura 26	- SD3: Ferramentas no <i>Modellus</i>	68
Figura 27	- SD3: Gráfico e tabela no <i>Modellus</i>	69
Figura 28	- SD4: Questão do SPAECE adaptada no <i>Modellus</i>	71
Figura 29	- SD4: Simulação gerada no <i>Modellus</i>	72
Figura 30	- SD4: Proporcionalidade no cálculo do volume das caixas.....	73
Figura 31	- Primeiro contato dos estudantes com a SD1.....	78

Figura 32 – Vídeo da apresentação da SD1 no <i>Modellus</i>	79
Figura 33 – Estratégia inicial da estudante E1.....	79
Figura 34 – Solução da SD1 apresentada pela dupla E5 e E6.....	81
Figura 35 – Solução da SD1 apresentada pela dupla E3 e E4.....	82
Figura 36 – Situação de institucionalização da SD1.....	83
Figura 37 – Uso do software <i>Modellus</i> na institucionalização da SD1.....	83
Figura 38 – Primeiro contato dos estudantes com a SD2.....	84
Figura 39 – Vídeo da apresentação da SD2 no <i>Modellus</i>	85
Figura 40 – Observação sobre a SD2 feita pelo estudante E5.....	86
Figura 41 – Solução apresentada pela dupla E5 e E6 para o primeiro item.....	87
Figura 42 – Solução apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item.....	87
Figura 43 – Solução apresentada pela dupla E5 e E6 para o terceiro item.....	88
Figura 44 – Momento de Validação da SD2.....	88
Figura 45 – Momento de institucionalização da SD2.....	89
Figura 46 – Primeiro contato dos estudantes com a SD3.....	90
Figura 47 – Vídeo da apresentação da SD2 no <i>Modellus</i>	90
Figura 48 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E5 e E6 para o primeiro item.....	92
Figura 49 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E1 e E2 para o primeiro item.....	92
Figura 50 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item.....	93
Figura 51 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E5 e E6 para o segundo item.....	93
Figura 52 – Momento de Institucionalização da SD3.....	94
Figura 53 – Primeiro contato dos estudantes com a SD4.....	95
Figura 54 – Vídeo da apresentação da SD4 no <i>Modellus</i>	96
Figura 55 – Estudante explicando o problema na SD4.....	97
Figura 56 – Solução da SD4 apresentada para o primeiro item.....	98
Figura 57 – Solução apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item da SD4.....	99
Figura 58 – Solução apresentada pela dupla E3 e E4 para o segundo item da SD4.....	99
Figura 59 – Momento de Validação da SD4.....	100
Figura 60 – Momento de Institucionalização da SD4.....	101
Figura 61 – <i>Site</i> ensinando proporcionalidade no <i>Modellus</i>	111
Figura 62 – Página Conhecendo o <i>Modellus</i>	112
Figura 63 – Página Situações Didáticas para o ensino da proporcionalidade.....	113
Figura 64 – Página Material de Apoio.....	114

Figura 65 – O que diz a Teoria das Situações Didáticas?	115
Figura 66 – Engenharia Didática	116
Figura 67 – Apoio para as Situações Didáticas	116
Figura 68 – Página Fale Conosco.....	117
Figura 69 – QR Code: <i>site SD Modellus</i>	118

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	- SD1: Questão retirada do Boletim Pedagógico 2013.....	56
Quadro 2	- SD2: Questão retirada do Boletim Pedagógico 2013.....	62
Quadro 3	- SD3: Questão do SPAECE.....	66
Quadro 4	- SD4: Questão retirada do Boletim Pedagógico do SPAECE.....	70
Quadro 5	- Sistematização das atividades desenvolvidas na etapa de experimentação...	77
Quadro 6	- Questões utilizadas no questionário aplicado com os estudantes.....	134
Quadro 7	- Dificuldades apontadas pelos estudante.....	135
Quadro 8	- Respostas dos estudantes sobre o que eles mais gostaram.....	135
Quadro 9	- Produções de artigos aprovados e submetidos à revistas científicas	153
Quadro 10	- Participação em cursos de extensão durante o mestrado ENCIMA.....	153

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Padrões de desempenho em Matemática	48
Tabela 2	- Matriz de Referência do SPAECE para o 9.º ano.....	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APMEP	Associação de Professores de Matemática da Educação Pública
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CIES	Centro Integrado de Educação e Saúde
CNE	Conselho Nacional de Educação
CNPq	Conselho Nacional de Pesquisa
CONEP	Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENCIMA	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
IMU	União Internacional de Matemática
IREM	Institutos de Pesquisa sobre Ensino da Matemática
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LDE	Laboratório Digital Educacional
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento da Matemática Moderna
MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PETE	Pesquisa em Ensino e Tecnologias Educacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência
PNE	Plano Nacional de Educação
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SD	Situações Didáticas
SEDUC	Secretaria da Educação do Estado do Ceará
SME	Secretaria Municipal de Educação

SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para Menores de Idade
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UFC	Universidade Federal do Ceará

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO	25
2.1	Engenharia Didática de primeira geração	25
2.2	A Teoria das Situações Didáticas	29
3	ANÁLISES PRELIMINARES	33
3.1	Análise epistemológica: o conceito de proporcionalidade na história da Matemática	33
3.2	Análise documental: a proporcionalidade em documentos que norteiam a prática pedagógica	39
3.2.1	<i>A proporcionalidade nos documentos referenciais</i>	39
3.2.2	<i>Análise de livros didáticos</i>	41
3.2.3	<i>A proporcionalidade no Sistema Permanente de Educação Básica do Ceará</i>	47
3.3	Análise didática: o ensino da proporcionalidade na Educação Básica	51
4	ANÁLISES A PRIORI E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS ..	55
4.1	Situação Didática 1	55
4.2	Situação Didática 2	61
4.3	Situação Didática 3	66
4.4	Situação Didática 4	70
5	EXPERIMENTAÇÃO	75
5.1	Locus e participantes da pesquisa	75
5.2	Procedimentos e instrumentos de coletas de dados e participantes da pesquisa	76
5.3	Experimentação da Situação Didática 1	78
5.4	Experimentação da Situação Didática 2	84
5.5	Experimentação da Situação Didática 3	89
5.6	Experimentação da Situação Didática 4	95
6	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	102
6.1	Análise a posteriori e Validação da Situação Didática 1	102
6.2	Análise a posteriori e Validação da Situação Didática 2	102
6.3	Análise a posteriori e Validação da Situação Didática 3	103

6.4	Análise <i>a posteriori</i> e Validação da Situação Didática 4	106
7	PRODUTO EDUCACIONAL	110
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE A- RESPOSTAS DOS QUESTIONÁRIOS PELOS PARTICIPANTES DA PESQUISA.....	134
	APÊNDICE B - QUESTÕES DO SPAECE NAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	136
	APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ESTUDANTES	142
	APÊNDICE D - TERMO DE ASSSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)	144
	APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)	146
	APÊNDICE F – DOCUMENTOS SUBMETIDOS NA PLATAFORMA BRASIL	148
	APÊNDICE G - PRODUÇÕES CIENTÍFICAS E PARTICIPAÇÃO EM CURSOS	153
	ANEXO A - APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA.....	154

1 INTRODUÇÃO

Dentro da componente curricular da Matemática, pode-se perceber a relação entre muitos conceitos. A proporcionalidade, por exemplo, está inserida em vários temas da Matemática, tais como: semelhança de figuras, áreas, funções e juros simples. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a proporcionalidade faz parte do conjunto de ideias fundamentais que promove a conexão entre os diferentes campos da Matemática (Brasil, 2017).

Nesse sentido, entende-se que o aluno que ainda não compreendeu a proporcionalidade acaba apresentando dificuldade para resolver problemas cotidianos, bem como aprender assuntos considerados essenciais da Matemática (Castro, 2015). O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que mede o nível de aprendizagem dos estudantes da Educação Básica por meio de avaliações externas em larga escala, constatou uma diminuição na proficiência média em Matemática dos estudantes que realizaram a avaliação no ano de 2021, em todos os níveis de ensino que se aplicou a avaliação.

As avaliações do SAEB são elaboradas a partir de matrizes de referência que contêm descritores que se alinham no ano de 2019 com as competências e habilidades da BNCC. As matrizes de referência são utilizadas para a elaboração da escala de proficiência, que é dividida em dez níveis, variando de 0 a 9. Essa escala serve como uma régua para identificar o que e o quanto o estudante consegue aplicar em um contexto de avaliação (Brasil, 2020a).

Considerando a escala de proficiência utilizada pelo SAEB e os resultados das avaliações realizadas no ano de 2021, é possível verificar que, cerca de 62,2% dos estudantes que realizaram a avaliação quando cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental, ficaram entre os níveis 0 e 3 da escala de proficiência em Matemática e são considerados pelo MEC como tendo uma aprendizagem insuficiente nessa componente curricular (Brasil, 2022).

No Ceará, o baixo rendimento em Matemática também é refletido no Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), que avalia anualmente a aprendizagem dos estudantes matriculados no 5º e 9º ano do Ensino Fundamental, no 3º ano do Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Os resultados das avaliações do SPAECE 2022 aplicadas com estudantes do 9º ano apontaram para um desempenho crítico na Matemática. Isso indica que os estudantes se encontravam em “um processo inicial de desenvolvimento de competências e habilidades correspondentes à etapa de escolaridade em que estão situados” (Ceará, 2022, p.18).

Diante do desafio de superar o déficit de aprendizagem em Matemática, é possível considerar discussões sobre os métodos e as estratégias mais frequentes, adotados pelos

professores de Matemática quando abordam, por exemplo, o conceito de proporcionalidade, que se relaciona com as temáticas trazidas pela matriz de referência do SAEB e do SPAECE.

Lamon (2020) e Menduni-Bortoloti e Barbosa (2018) afirmam a importância do docente em sugerir aos estudantes atividades que envolvam a proporcionalidade em diferentes contextos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, motivando-os a construir e a justificar estratégias, sem a obrigatoriedade de apelar a regras e fórmulas que não valorizam o raciocínio proporcional, entendido como a condição indispensável para a compreensão de situações que envolvem o conceito de proporcionalidade.

Além disso, tende-se a abordar a proporcionalidade como um assunto que pertence ao currículo de Matemática, ao invés de tratá-la como um conceito a ser assimilado (Spinillo, 1994). Spinillo (1994) afirma que a base do ensino da proporção é o algoritmo conhecido como “regra de três”, no entanto, para ela, a aplicação do algoritmo não garante a compreensão das relações que abrangem o conceito. Tais afirmações também são concebidas em trabalhos mais recentes, como Reis (2022) e Silva (2022), que estudaram a proporcionalidade na Educação Básica e Superior, respectivamente. Nesses estudos, ambas as autoras concluíram que, quando o conceito de proporcionalidade é trabalhado coletivamente e em situações que simulam a realidade, obtém-se um resultado mais satisfatório, pois se possibilita a relação de proporcionalidade com outros conceitos da Matemática, permitindo diferentes estratégias para resolver problemas sobre proporcionalidade, o que gera uma melhor compreensão do conceito.

Diante do exposto, encontram-se pesquisas que afirmam que as tecnologias digitais no ensino de Matemática levam a uma maior possibilidade de interação entre o estudante e as atividades vivenciadas em sala de aula, ajudando a tornar a aprendizagem dos conceitos matemáticos mais atrativa, auxiliando na elaboração de estratégias de forma mais autônoma pelo educando (Estevam *et al.*, 2018; Lemke; Siple; Figueiredo, 2016; Oliveira; Amancio, 2022). Além disso, as tecnologias digitais também têm se apresentado como ferramentas capazes de trazer mudanças na prática educativa e permitir a exploração de diversos contextos, tornando conceitos matemáticos mais significativos para os estudantes (Santos; Neves; Togura, 2016).

O interesse pela utilização das tecnologias digitais para o ensino de Matemática veio da participação da autora deste trabalho como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), durante o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE). O PIBID possibilitou, por meio de minicursos, o contato inicial com recursos digitais que podem ser utilizados para o ensino. Com isso, e por meio de estudos em grupo e individuais sobre o tema, pude desenvolver atividades com

estudantes de escolas públicas de Fortaleza que participavam do projeto.

Nesse sentido, o PIBID trouxe muitas contribuições para a minha formação, visto que pude suprir algumas das lacunas que possuía, já que cursando as disciplinas do curso de graduação foram poucos os momentos com discussões sobre metodologias e sobre recursos pedagógicos para o ensino de Matemática. Infelizmente, isso acaba ocorrendo na formação inicial de muitos professores da área (Oliveira, 2018).

No ano de 2016, tornei-me professora na Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza. Nessa experiência, lecionei nas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e pude notar deficiências na aprendizagem da proporcionalidade, assim como em objetos do conhecimento que envolviam esse conceito. Isso despertou o desejo de estudar uma forma alternativa para ensinar tal conceito. Foi então que pensei em fazer uso das tecnologias digitais. Nessa perspectiva, submeti o anteprojeto da seleção do mestrado e, felizmente, obtive a aprovação.

É possível encontrar pesquisas que investigaram as contribuições das tecnologias digitais para o ensino da proporcionalidade e que obtiveram resultados positivos. Santos (2019) realizou uma pesquisa com 30 estudantes do 3º ano do ensino médio. O objetivo era verificar as contribuições do software Geogebra e de mídias audiovisuais para a aprendizagem de proporcionalidade. Para isso, ele desenvolveu com a turma uma sequência de atividades que faziam uso desses recursos.

Por meio da comparação de testes realizados pelos alunos, Santos (2019) verificou que as atividades desenvolvidas contribuíram significativamente para a compreensão do conteúdo abordado. Nos resultados da pesquisa, o autor observou que o Geogebra e as mídias audiovisuais favoreceram o levantamento de questionamentos, hipóteses e debates, que proporcionou o envolvimento dos alunos, contribuindo assim para o processo de aprendizagem.

Castro e Castro Filho (2020) analisaram o potencial das tecnologias digitais para o ensino de conceitos relacionados à proporcionalidade. Nesse sentido, desenvolveram algumas atividades que utilizavam recursos digitais com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Dentre eles, o software Geogebra, o aplicativo Cacao e o recurso digital Equilibrando Proporções.

Os resultados desse estudo indicaram que o uso dos recursos digitais contribuiu para a visualização e representação, além de ajudar na construção e produção do conhecimento, sendo percebidas durante a produção de vídeos, bem como em socializações de estratégias e discussões geradas por meio de um aplicativo de mensagens. Castro e Castro Filho (2020) concluíram que as tecnologias digitais utilizadas também colaboraram para a construção do significado, já que possibilitaram a vivência de situações reais relacionadas à proporcionalidade

e permitiram a socialização e formalização do conteúdo.

Neste estudo, as tecnologias digitais foram inseridas por meio do software *Modellus*. Escolheu-se o *Modellus* por se tratar de um software livre que permite a realização de simulações e elaboração de modelos computacionais, possibilitando uma melhor visualização e dinamismo de um problema matemático. Assim, utilizou-se o software *Modellus* em situações didáticas construídas para a aprendizagem da proporcionalidade, com o uso de questões do SPAECE.

Para delinear o uso do software e o processo de aprendizagem, fez-se uso da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Desenvolvida por Guy Brousseau, a TSD propõe o estudo da relação existente na tríade professor, aluno e saber, assim como o meio (*milieu*) em que ocorre a situação didática (Sousa; Azevedo; Alves, 2021), sendo que, uma situação didática, segundo Brousseau (2008, p. 20) caracteriza-se como “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado”. Nessa perspectiva, pretende-se aqui, com a utilização do software *Modellus*, permitir que o estudante tenha uma melhor visualização dos problemas, por meio de simulações e representações construídas no software, que alinhada com os pressupostos da TSD pode tornar situações que envolvem a proporcionalidade mais compreensíveis para o estudante.

A Engenharia Didática (ED) é utilizada como metodologia de pesquisa neste estudo, por meio de suas quatro etapas: análises preliminares, análises *a priori*, experimentação e análises *a posteriori* e validação. A ED foi desenvolvida na França nos anos 80, na tendência conhecida como Didática da Matemática (DM). Artigue (1995) compara a ED ao trabalho de um engenheiro que, buscando a solução de problemas, cria uma engenharia baseada em seus conhecimentos científicos.

Optou-se, na etapa de experimentação, por aplicar as situações didáticas com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, tendo em vista que diversas habilidades propostas para esse nível de ensino estão relacionadas com a proporcionalidade como, por exemplo: demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, reconhecer as condições necessárias e suficientes para a semelhança de triângulos, resolver e elaborar problemas de aplicação das relações de proporcionalidade, assim como na unidade álgebra, ao compreender as funções e suas representações (Brasil, 2017).

Desse modo, a pergunta norteadora desta pesquisa é: como situações didáticas baseadas na Teoria das Situações Didáticas, com o uso do software *Modellus*, podem contribuir para a aprendizagem da proporcionalidade dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental? É possível encontrar pesquisas que apresentam resultados consistentes das experiências do uso desse software no ensino de conceitos matemáticos, entretanto, existem lacunas quanto ao uso

do *Modellus* para o ensino da proporcionalidade e, também, no que diz respeito às produções que expõem situações didáticas relacionadas a esse conceito matemático, baseadas nos pressupostos da TSD.

Assim, o objetivo geral deste trabalho é investigar, na perspectiva da Engenharia Didática, situações didáticas baseadas na Teoria das Situações Didáticas, que envolvem a proporcionalidade e que utilizam o software *Modellus*, mediante aplicações com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Portanto, foram definidos os seguintes objetivos específicos: i) analisar o conceito de proporcionalidade quanto às dimensões epistemológica, documental e didática; ii) compreender as contribuições da aplicação de situações didáticas que envolvem conceito de proporcionalidade, desenvolvidas com o arrimo do software *Modellus* sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática; iii) propor um Produto Educacional Tecnológico no formato de um *site* contendo quatro situações didáticas para o ensino da proporcionalidade em sala de aula.

A pesquisa está organizada em oito capítulos. O primeiro capítulo é a introdução, nela é feita uma breve contextualização da temática da pesquisa, citam-se dados sobre os níveis de aprendizagem de Matemática de estudantes brasileiros na Educação Básica e se esclarece sobre o envolvimento da autora com o tema. Nessa seção, também se apresenta a questão norteadora desta pesquisa e se descreve os objetivos da pesquisa, divididos em objetivo geral e específicos.

O segundo capítulo aborda a ED e a TSD, utilizadas neste trabalho para basear a metodologia de pesquisa e metodologia de ensino, respectivamente. No terceiro capítulo, apresentam-se as análises preliminares, primeira etapa da ED, quer dizer, uma análise epistemológica, documental e didática da proporcionalidade.

O quarto capítulo apresenta o desenvolvimento da segunda etapa da ED, análises *a priori* e concepção das situações didáticas, nas quais quatro situações didáticas são apresentadas para o ensino da proporcionalidade. O quinto capítulo descreve a etapa de experimentação da pesquisa, apresentando o *locus*, os participantes e a descrição das variáveis didáticas. O sexto capítulo apresenta as análises *a posteriori* e validação, quarta etapa da ED, de cada situação didática aplicada.

Este trabalho também apresenta, no sétimo capítulo, o Produto Educacional (PE) desenvolvido durante a vivência no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA), da Universidade Federal do Ceará (UFC). O oitavo capítulo apresenta as considerações finais deste estudo. No fim deste documento, como anexo, mostra-se a

aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) para a realização deste estudo. Nos apêndices, são encontrados os termos elaborados para a concordância dos participantes e dos seus responsáveis, além dos instrumentos utilizados para a aplicação das situações didáticas na etapa de experimentação. Ainda dentre os apêndices, encontra-se em um quadro os artigos desenvolvidos, os cursos realizados, a participação em eventos e o envolvimento em grupos de estudo durante o curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO

Este capítulo apresenta a Engenharia Didática (Artigue, 1995), metodologia de pesquisa utilizada neste estudo, assim como a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986), escolhida como base da metodologia de ensino e para o desenvolvimento das situações didáticas deste estudo.

Inicia-se com o estudo da Engenharia Didática, apresentando as suas quatro fases: análises preliminares, análises *a priori* e concepção das situações didáticas, experimentação e análises *a posteriori* e validação.

Em seguida, apresenta-se a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Brousseau (1986). São abordadas as quatro fases ou dialéticas da teoria, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização e, também, traz as definições de situações didáticas e de contrato didático, importantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

2.1 Engenharia Didática de primeira geração

A Engenharia Didática (ED) emergiu na França, na década de 80, da tendência conhecida por Didática da Matemática (DM) (Carneiro, 2005). A DM teve seu desenvolvimento nas décadas de 60 e 70, com o intuito de reestruturar o ensino da Matemática, pensada no contexto da reforma do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e pelo surgimento dos Institutos de Pesquisa sobre Ensino da Matemática (IREM¹), com o desenvolvimento de metodologias de investigações próprias (Alves, 2016; Camilo; Alves; Fontenele, 2021).

Segundo Artigue (1995), a ED pode ser comparada ao trabalho de um engenheiro que, para elaborar um projeto, se sujeita a um controle do tipo científico para solucionar problemas, com uma complexidade maior do que aqueles depurados da ciência. Em consonância com a autora, Doudy (1995) designa o termo engenharia didática como uma sequência de aulas que tem a sua concepção, organização e articulação por um “professor-engenheiro”, objetivando a aprendizagem dos estudantes.

Almouloud e Coutinho (2008, p.66) afirmam que:

A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

¹ *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - IREM*

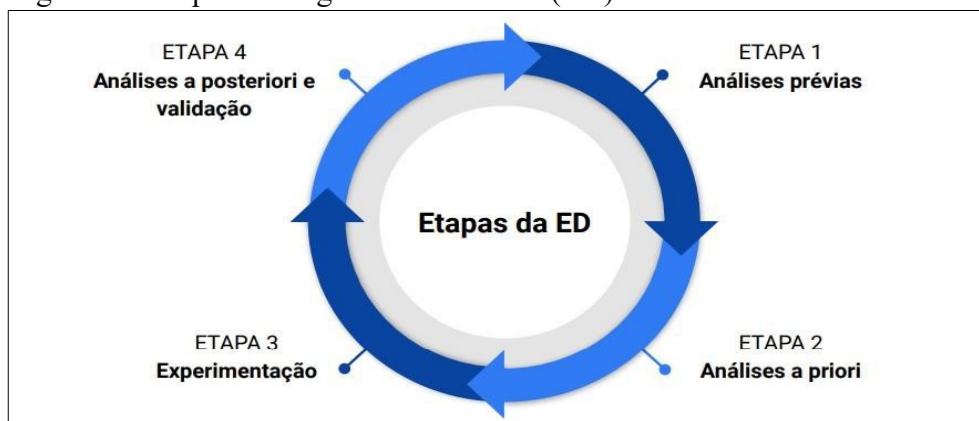
Para os autores, a ED como metodologia de pesquisa é caracterizada, principalmente, como um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula (Almouloud; Coutinho, 2008). Alves (2019) afirma que a ED pode ser entendida como uma metodologia que busca compreender os fenômenos didáticos, que possibilita um estudo conduzido dos acontecimentos em sala de aula.

A ED permite o estudo de situações gerais e também de situações específicas pelo pesquisador, já que é organizada em dois campos, da macroengenharia e da microengenharia. A macroengenharia considera situações de aspectos gerais durante todo o estudo e a microengenharia tem enfoque em eventos pontuais, que podem ser observados no desenvolvimento da pesquisa (Oliveira, 2018).

A ED pode ser caracterizada como de primeira geração ou como de segunda geração, a depender dos objetivos que se pretendem alcançar. A ED de primeira geração tem como objetivos “[...] ensinar Matemática ao estudante; e [...] produzir conhecimento que pode ser subsídio para a elaboração e publicação de artigos que se tornarão referência na área da educação Matemática” (Almouloud, 2011). Sobre outro enfoque, a ED de segunda geração visa o desenvolvimento de recursos voltados para o ensino ou para a formação de docentes (Oliveira, 2019).

A Engenharia Didática de 1ª geração, utilizada neste estudo, é dividida em quatro etapas relacionadas, denominadas de: análises prévias, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Etapas da Engenharia Didática (ED)



Fonte: Castro *et al.* (2023, p. 239).

Na etapa de **análises prévias ou preliminares**, busca-se realizar uma análise epistemológica dos conteúdos, observar o ensino tradicional e seus efeitos, estudar as concepções dos estudantes e verificar as limitações do ambiente em que se pretende efetuar as

realizações didáticas (Artigue, 1995). Almouloud (2007) diz que essa fase serve para detectar problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, delineando de forma fundamentada as perguntas, as hipóteses, a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa. Para o autor, dentre o que se pretende realizar nessa fase, está:

Estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na Matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito; analisar o ensino usual e seus efeitos; analisar as condições e fatores e que depende a construção didática efetiva das situações de ensino e considerar do conteúdo e seus efeitos; analisar as condições e fatores de que depende a construção didática e efetiva das situações de ensino; considerar os objetivos específicos da pesquisa; fazer uma análise das propostas curriculares e dos PCN; analisar livros didáticos; levantar referências bibliográficas sobre os fatores que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem do objeto em questão (Almouloud, 2007, p.172-173).

Nesta pesquisa, realiza-se na etapa de análises preliminares uma investigação sobre o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade, por meio dos registros da história da Matemática. Faz-se, também, uma análise de livros didáticos, a fim de identificar a abordagem dada à proporcionalidade que se baseou nos documentos orientadores de currículo da Educação Básica. Além disso, traz-se uma discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade na Educação Básica.

A fase de **análise *a priori* e concepção das situações didáticas** busca realizar escolhas para manipular as variáveis didáticas envolvidas e explicar os seus sentidos (Almouloud; Coutinho, 2008). Segundo Artigue (1995), as variáveis podem se distinguir em: variáveis microdidáticas, quando estão relacionadas à organização das situações didáticas; ou macrodidáticas, quando se diz respeito à organização global da engenharia.

Portanto, Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) afirmam que na etapa de análises *a priori* e concepção das situações didáticas deve-se:

Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida; analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; prever comportamentos possíveis e tenta mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Nessa etapa, elaboraram-se situações didáticas para o ensino da proporcionalidade. Essas situações seguem os pressupostos da Teoria das Situações Didática (TSD), além disso,

utilizam o software *Modellus* para auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes durante as resoluções dos problemas. As escolhas para essa fase foram definidas a partir das hipóteses e das variáveis didáticas que, segundo Artigue (1996), têm a finalidade de levar os estudantes a empregarem determinadas estratégias em detrimento de outras.

Na perspectiva da ED, a etapa de **experimentação** é consubstanciada pela aplicação do dispositivo elaborado. Nessa fase, assim como em todas as outras, pode ocorrer de retomar as etapas anteriores, a fim de reconsiderar uma escolha e corrigir um procedimento (Almouloud; Coutinho, 2008).

Nessa fase, foram aplicadas as situações didáticas envolvendo a proporcionalidade com os estudantes do último ano do Ensino Fundamental. Durante a aplicação das situações didáticas, buscou-se registrar as ações dos estudantes, por meio de fotos, vídeos, áudios e escrita. Além disso, aplicou-se um questionário com os estudantes, a fim de conhecer suas opiniões acerca das atividades desenvolvidas.

Nas **análises *a posteriori* e validação** busca-se analisar os dados obtidos na etapa anterior, um confronto com as etapas anteriores, fazendo a validação das hipóteses designadas na investigação (Almouloud; Coutinho, 2008; Artigue, 1995).

Existem dois tipos de validação para uma engenharia didática: a validação interna e a validação externa. A validação interna é apontada por Almouloud e Coutinho (2008) como uma das singularidades da ED. Nesse tipo de validação, segundo os autores, articula-se às análises preliminares e as análises *a priori* com o levantamento realizado na análise *a posteriori*, “sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste” (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 66).

A validação interna envolve “uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes” (Laborde, 1997, p. 105). A validação externa, por sua vez, ocorre quando, além da confrontação dos resultados produzidos nas sequências didáticas da validação interna, ocorre o confronto das produções de estudantes não participantes das mesmas sequências, através de questionários e/ou entrevistas (Laborde, 1975; Oliveira, 2019). Neste estudo, adotou-se a validação interna.

Nesse sentido, na etapa de análises *a posteriori* e validação, realizou-se uma análise dos registros e dados obtidos na fase de experimentação. Durante essa fase, foi feito um confronto com as análises *a priori*, no que diz respeito às hipóteses elaboradas na pesquisa com a construção das situações didáticas.

A seguir, apresenta-se a Teoria das Situações Didáticas, utilizada, nesta pesquisa, para embasar a metodologia de ensino.

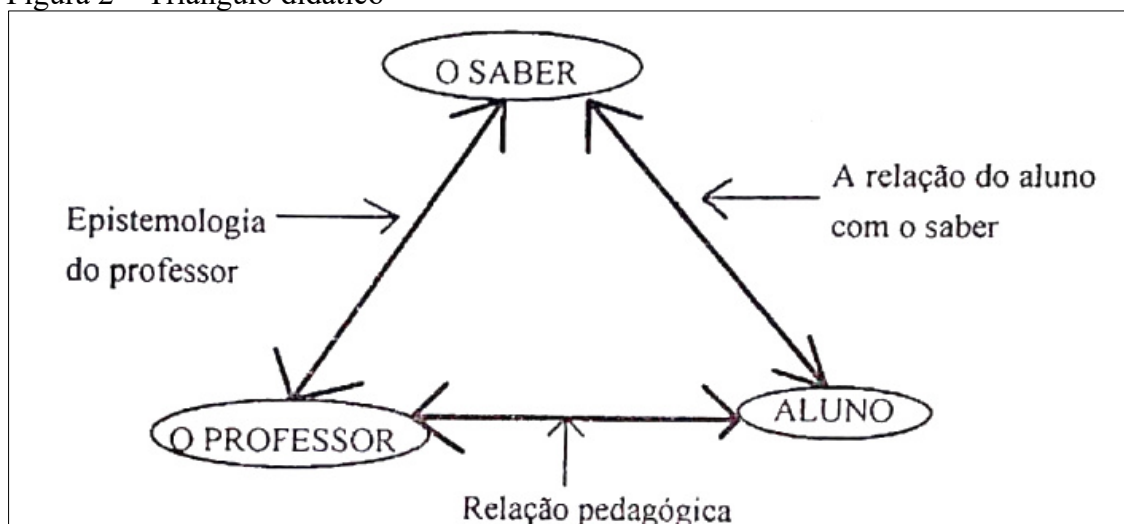
2.2 A Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo francês Guy Brousseau para orientar o processo de ensino e aprendizagem (Maia, 2021). Considerado o pai da DM, Brousseau iniciou suas pesquisas entre os anos de 1953 e 1956, período em que dedicou-se à investigação do ensino e da aprendizagem de Matemática na Educação Básica (Oliveira, 2019).

No ano de 1959, após o período que prestou serviço militar obrigatório, Brousseau retoma suas atividades como professor e pesquisador (Oliveira, 2019). No ano de 1970, na França, faz as primeiras considerações sobre a TSD na revista da Associação de Professores de Matemática da Educação Pública (APMEP) (Brousseau, 2008).

O foco do estudo da TSD é “a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (Almouloud, 2007, p.32). Associam-se alguns fenômenos às interações (Brousseau, 1986) e, a partir de um meio desenvolvido pelo professor, cria-se uma interação com o triângulo didático (Silva, 2020), representado na Figura 2.

Figura 2 – Triângulo didático



Fonte: Almouloud (2007, p. 32).

As situações didáticas são definidas como um conjunto formado pelas relações entre os estudantes, um *milieu* e o sistema educativo (professor), que tem como objetivo a apropriação de um saber pelo aluno. O *milieu* pode ser compreendido como um fator que provoca um desequilíbrio, uma dificuldade. Nesse sentido, a adaptação do aluno gera um saber novo e a aprendizagem, comprovada pelas novas respostas (Almouloud, 2007).

Sendo assim, Almouloud (2007, p. 32) baseia a TSD em três hipóteses:

- i. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* [...].
- ii. O professor deve criar e organizar um *milieu* que seja suficiente para desenvolver situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
- iii. [...] esse *milieu* e essas situações devem engajar os conhecimentos matemáticos envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem.

Nessa perspectiva, Brousseau (1996) afirma que as situações didáticas têm o intuito de tornar o estudante um pesquisador, permitindo-o elaborar conjecturas, comprovar hipóteses, construir modelos, ideias, teorias e socializar resultados. Nesse sentido, no que se diz respeito à modelagem da teoria das situações, Brousseau (2008) caracteriza e divide uma situação didática em quatro momentos dominantes: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na situação de **ação**, espera-se que os estudantes busquem adaptar-se ao meio didático, também chamado de *milieu*, ao qual foi exposto. Nessa fase, o estudante é estimulado à tomada de decisões, análise e verificação dos resultados. Contudo, essas ações ocorrem de forma interna, ou seja, não há verbalização por parte do estudante e nem mesmo uma formalização Matemática (Oliveira, 2019).

Teixeira e Passos (2013, p. 165) dizem que, no momento de ação, “o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de

adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema”.

A situação de **formulação** é a fase em que os estudantes se comunicam com uma ou mais pessoas, a fim de escolher uma estratégia. Nesse momento, eles já formulam hipóteses e consideram as relações que envolvem a situação didática (Maia, 2021). O objetivo da situação de formulação, segundo Almouloud, Manrique, Silva e Campos (2004, p. 97) é:

[...] a troca de informações, momento em que o estudante ou grupo de estudantes explicita as ferramentas utilizadas e a solução encontrada. Para que o estudante explicita seu modelo e para que essa formulação tenha sentido para ele, é necessário que outro(s) estudante(s) obtenha(m) os mesmos resultados. Essa troca de informações permitirá criar um modelo explícito, que poderá ser formulado com a ajuda de sinais e regras comuns, novas ou já conhecidas.

Na situação de **validação**, o estudante precisa validar as situações anteriores, utilizando um rigor matemático e uma exposição verbal clara. O discente, nessa fase, deve comprovar seus argumentos para seus interlocutores, que podem questioná-lo e refutar a sua resolução. Para Brousseau (2008, p. 30), na etapa de validação:

[...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio.

As situações de ação, formulação e validação, também chamadas por Brousseau (2008) de dialéticas, são caracterizadas pelo autor como situações adidáticas.

A situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar (Almouloud, 2016, p. 114).

Portanto, em uma situação adidática, o educando é responsável por agir sobre o conhecimento, sem considerar as intenções do docente (Silva; Farias; Almouloud, 2019). Entretanto, o professor é o que elabora e promove a situação adidática, a fim de produzir certo conhecimento aos estudantes (Brousseau, 2008).

A situação de **institucionalização** é a fase que o professor explicita a sua intenção de ensino, sintetizando o conhecimento, com o intuito de colocá-lo em um nível de saber (Figueroa; Almouloud, 2018). Teixeira e Passos (2013, p. 166) elucidam que, nessa fase, “o

professor retoma parte da responsabilidade cedida aos estudantes, conferindo-lhes o estatuto do saber ou descartando algumas produções dos estudantes e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização”.

O contrato didático é essencial durante a aplicação de uma situação didática. O conceito de contrato didático associa-se ao comportamento esperado dos estudantes e dos professores (Figueroa; Almouloud, 2018). Geralmente, o contrato didático traz cláusulas implícitas que adaptam as ações no processo de ensino e aprendizagem (Maia, 2021). A dinamização das regras é uma característica de um contrato didático, justamente para atingir o objetivo, que é a aprendizagem do estudante (Souza; Lima, 2014).

Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003, p. 155) afirmam que:

no cotidiano da sala de aula há um conjunto de expectativas dos participantes, definidas *a priori*, nem sempre de modo explícito, que se traduzem como cláusulas do Contrato Didático estabelecido. Desse modo, o Contrato Didático administra as relações entre professor e aluno no processo de ensino-aprendizagem de um dado saber.

Nesse sentido, o contrato didático estabelece as funções dos alunos e do professor. Por sua vez, o professor administra o contrato no sistema didático, respeitando a função do aluno no processo de ensino e aprendizagem e buscando conformidade com seu desenvolvimento cognitivo (Ricardo; Slongo; Pietrocola, 2003).

O capítulo a seguir apresenta as análises preliminares, primeira etapa da ED desenvolvida neste estudo.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da primeira etapa da ED, utilizada neste estudo como metodologia de pesquisa. Na construção das análises preliminares, consideraram-se três dimensões: epistemológica, cognitiva e didática. Contudo, neste estudo, enfatizou-se as dimensões epistemológica e didática.

Nesse sentido, realizou-se um estudo do conceito de proporcionalidade na história da Matemática, analisou-se a abordagem do conceito de proporcionalidade em livros didáticos utilizados na Educação Básica e discutiu-se sobre entraves no processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade no contexto do ensino básico.

3.1 Análise epistemológica: o conceito de proporcionalidade na história da Matemática

O estudo da história da Matemática ajuda na compreensão de conceitos matemáticos e possibilita o entendimento de esquemas, elaborados pelos indivíduos na busca de solucionar significativamente um problema (D'Ambrósio, 2007). Aqui se defende a necessidade do professor conhecer a história da Matemática quando se fala que:

Uma percepção da história da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a Matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da Matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação Matemática e educação em geral [...] (D'Ambrosio, 1996, p. 29).

No cenário histórico, a proporcionalidade foi aplicada em diferentes contextos que envolveram conhecimentos matemáticos. Além disso, esse conceito possibilitou a articulação da Matemática com outras áreas (Delatorre, 2021) e, assim, percebe-se a importância da proporcionalidade para o desenvolvimento da Matemática.

A proporcionalidade foi estudada por Eudoxo (408-305 a.C.), apontado como um dos maiores matemáticos do período helênico. Ele estudou com o pitagórico Arquitas e, possivelmente, com Platão. Além de matemático, Eudoxo foi físico e astrônomo (Gondim, 2017).

Figura 3 – Eudoxo de Cnido



Fonte: <https://sites.google.com/site/matematicosbio01/eudoxo-de-cnido>

Eudoxo ganha destaque no estudo da proporcionalidade, por meio da teoria da proporção, que se aplica às grandezas comensuráveis e às grandezas incomensuráveis. A definição de proporção eudoxiana diz que:

grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente (Eves, 2004, p.173).

Ou seja, dadas as grandezas A , B , C e D , sendo que A e B são grandezas da mesma espécie e que as grandezas C e D também são da mesma espécie, tem-se a igualdade das razões $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ se, dados dois inteiros positivos m e n , arbitrários, se $mA < nB$, então $mC < nD$; se $mA > nB$, então $mC > nD$; e, se, $mA = nB$, então $mC = nD$.

Segundo Eves (2004), a teoria de Eudoxo solucionou problemas derivados de situações que envolviam quantidades incomensuráveis e fundamentou os estudos de Dedekind e Weierstrass sobre os números reais da análise Matemática.

A superação dessa crise não foi fácil nem rápida. Foi levada a efeito por volta de 370 a.C. pelo brilhante Eudoxo, cuja revisão da teoria das grandezas e proporções é uma das grandes obras-primas matemáticas de todos os tempos. A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no quinto livro dos Elementos de

Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872 (Eves, 2004, p. 673).

Na segunda metade do século XIX, o escocês Henry Rhind fez a compra de um Papiro em Luxor, o Papiro tinha cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento. Esse Papiro encontra-se, atualmente, no *British Museum*, com exceção de alguns fragmentos que estão no *Brooklyn Museum*. O Papiro de Rhind (Figura 4), também conhecido como Papiro de Ahmes, homenageando o escriba que o copiou aproximadamente em 1650 a. C., tornou-se principal fonte de conhecimento do desenvolvimento da Matemática no Egito antigo (Boyer, 2012).

Figura 4 – Fragmento do Papiro de Rhind ou de Ahmes



Fonte: <http://matematicosdemogi.blogspot.com.br/2016/07/os-papiros-da-Matemática-egípcia-rhind.html>.

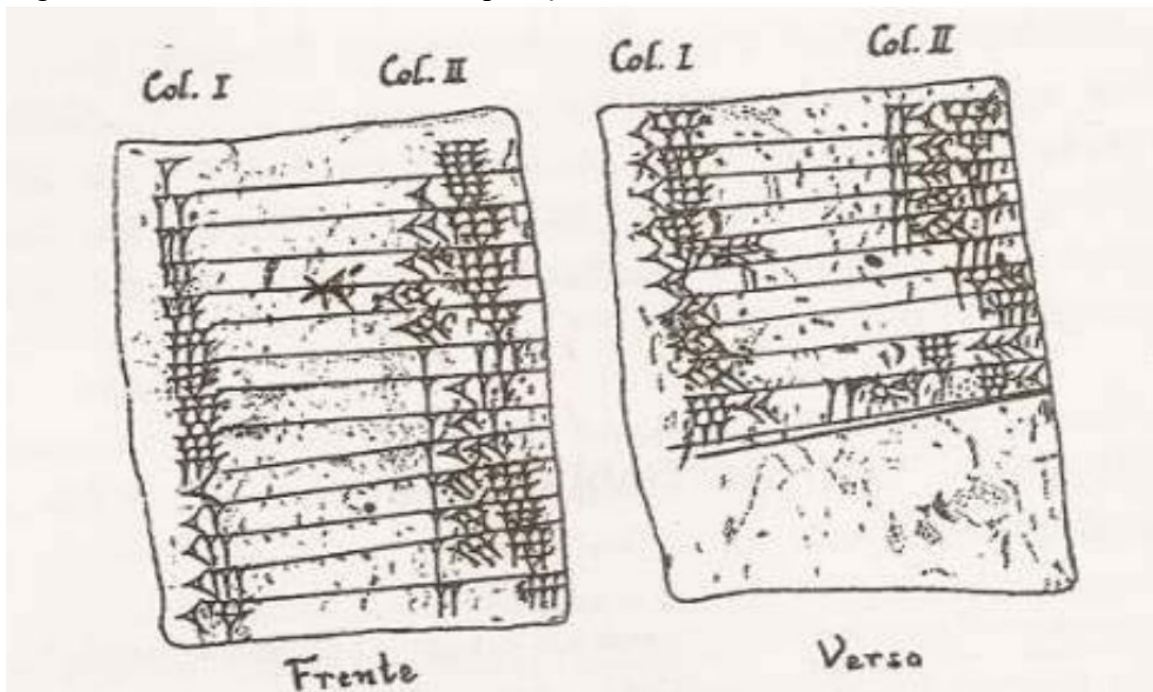
Problemas encontrados no Papiro de Rhind demonstram que manipulações equivalentes à regra de três eram utilizadas no Egito antigo, bem como a ideia de divisão em partes proporcionais, como pode ser visto no trecho abaixo retirado de Boyer (2012, p. 32).

O Problema 72 pergunta qual o número de pães de “força” 45 que são equivalentes a 100 pães de “força” 10, e a solução é apresentada como $100/10 \times 45$ ou 450 pães. Nos problemas sobre pães ou cerveja, a “força” ou pesu é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no papiro de Ahmes. O Problema 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada $2/3 : 1/2 : 1/3 : 1/4$. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção ponto. Nesse caso, o quociente de 700 por $1 \frac{3}{4}$

é encontrado multiplicando pelo recíproco do divisor, que é $1/2 + 1/14$. O resultado é 400; Calculando $2/3$ e $1/2$ e $1/3$ e $1/4$ disto, são obtidas as parcelas de pão requeridas.

Há também evidências de que os babilônios já utilizavam o raciocínio proporcional há mais de 4.000 anos. Na Figura 5 é mostrada a tábua babilônica de multiplicação, na qual se nota o raciocínio multiplicativo, também considerado como um raciocínio proporcional (Costa Júnior, 2010).

Figura 5 – Tábua babilônica de multiplicação

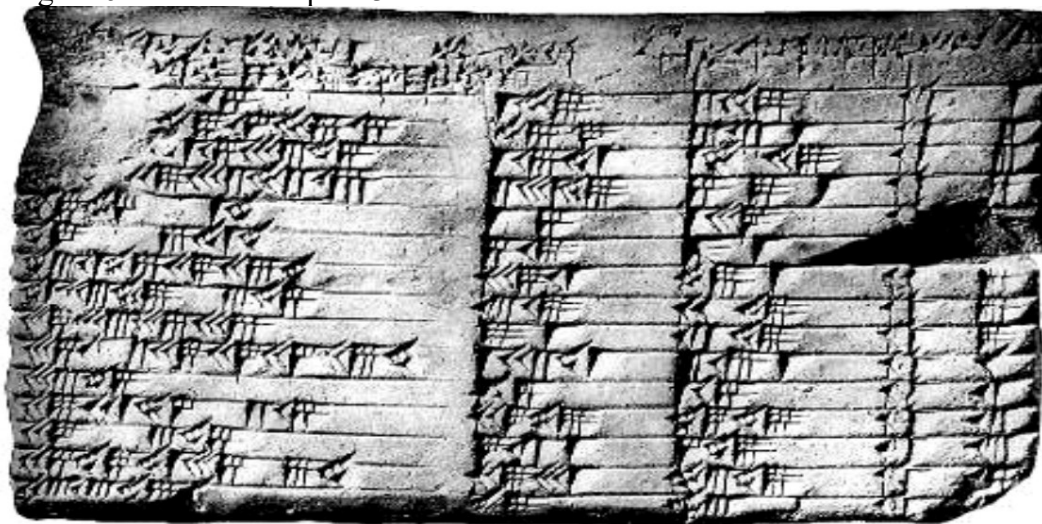


Fonte: Costa Júnior (2010, p. 48).

Nas duas colunas apresentadas na Figura 5, existe um fator de proporcionalidade que relaciona as duas colunas. Utilizando o sistema de numeração decimal, obteriam-se as seguintes razões entre a segunda e primeira coluna da figura: $\frac{9}{1} = \frac{18}{2} = \frac{27}{3} = \frac{36}{4} = \frac{45}{5} = \frac{54}{6} = \dots = 9$.

Na Geometria, Eves (2004) confirma o conhecimento dos babilônios sobre a proporcionalidade, quando diz que eles “tinham o conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais” (Eves, 2004, p. 61). A tabela Plimpton 322, mostrada na Figura 6, exhibe, em escrita cuneiforme, medidas de lados de triângulos, em que foi possível verificar, com exceções, a relação conhecida como Teorema de Pitágoras e relação de proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos (Costa Júnior, 2010; Eves, 2004).

Figura 6 – Tabela Plimpton 322



Fonte: Costa Júnior (2010, p. 51).

Na Grécia, um dos fatos que sugerem o conhecimento da proporcionalidade é o Teorema de Tales. Considerado um dos sete sábios da antiguidade, Tales de Mileto viveu por volta de 630 a.C. a 550 a.C., pouco se sabe sobre sua vida e seus feitos, contudo acredita-se que Tales levou o conhecimento egípcio sobre a geometria para os gregos (Lintz, 2007; Costa Júnior, 2010).

De acordo com Eves (2004), uma das motivações para o Teorema de Tales foi o seu feito de determinar a altura de pirâmides do Egito, a partir da observação da sombra e da altura de um bastão. O autor apresenta duas versões sobre como Tales o fez:

O relato mais antigo, dado por Hierônimo, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões erram ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide, isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (Eves, 2004, p. 115).

Na época de Tales, as propriedades dos triângulos e o teorema fundamental das proporções já era bem conhecidas, fundamentadas em um resultado bem difundido: “se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais” (Lintz, 2007, p. 108).

A história da Matemática permite compreender como o conhecimento da teoria das proporções na Grécia antiga era aplicado na aritmética ou teoria dos números, limitando-se aos números naturais. Entretanto, como esse conhecimento também aplicava-se na Geometria, inclui-se os incomensuráveis (Costa Júnior, 2010).

A proporcionalidade também foi percebida na Índia. Smith (1958) afirma que dois matemáticos indianos, Brahmagupta e Bhaskara, enunciaram semelhantemente a técnica denominada de regra de três. A forma enunciada por Brahmagupta é a seguinte: “Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e o último termo devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido pelo Argumento é o produto” (Eves, 2004, p. 263). Segundo Smith (1958), o uso da regra de três pelos comerciantes deu a ela também o nome de regra do comerciante ou solução do comerciante. Segundo o autor, nenhuma outra regra recebeu tanto destaque quanto essa no meio comercial.

Os árabes, segundo Costa Júnior (2010), contribuíram bastante para o desenvolvimento da Matemática, mas no que diz respeito à proporcionalidade, os matemáticos árabes não foram além do que já havia sido produzido. Entretanto, Boyer (2012) cita Khayyam, um poeta e cientista que viveu entre os séculos XI e XII, que apresentou em seu livro *Álgebra* uma substituição da teoria das proporções para um método numérico, aproximando-se da definição de números irracionais.

Já na idade média, a proporcionalidade ganha destaque em uma obra publicada por Leonardo Fibonacci. Trata-se do seu livro *Liber abaci*. A obra de Fibonacci apresenta o conhecimento adquirido pelo autor por meio dos estudos nas viagens pelo mundo mediterrâneo (Costa Júnior, 2010; Rocha Júnior, 2011). Grande parte dos problemas utilizados no comércio e em negociações apresentados no livro tinham envolvimento com a proporcionalidade (Sigler, 2003) e utilizavam para resolução o método da falsa posição e da falsa posição dupla, o primeiro remete aos procedimentos antigos adotados pelos egípcios (Costa Júnior, 2010).

Segundo Sigler (2003, p. 112, tradução nossa), o método da falsa posição “é usado para resolver uma equação linear da forma $ax = b$. Apresenta-se em sua forma simples com a proposição de um valor falso”. Já o método da falsa posição dupla é utilizado em problemas que podem ser solucionados por equações do tipo $ax + b = c$.

Sigler (2003) cita um problema apresentado no *Liber abaci* que também é mencionado por Eves (2004, p. 316), o problema diz o seguinte: “Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?”.

No Renascimento, observa-se a influência do estudo da proporção. O livro de Luca Pacioli *Divina Proportione* é uma obra que traz uma abordagem sobre os poliedros e uma ilustração de Leonardo da Vinci, autor do quadro Mona Lisa. Segundo Costa Júnior (2010), a obra de Pacioli é uma das mais importantes do Renascimento e influenciou o estudo das proporções no corpo humano e em produções de arte feitas nesse período.

Neste levantamento histórico, apresentou-se a proporcionalidade em diferentes cenários, considerando a compreensão Matemática do momento e a influência deste conceito para compreender e resolver problemas. A seguir, será discutida a apresentação do conceito de proporcionalidade em documentos que orientam o currículo e a prática pedagógica do professor de Matemática.

3.2 Análise documental: a proporcionalidade em documentos que norteiam a prática pedagógica

Nesta seção apresenta-se, inicialmente, a proporcionalidade na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), documentos referenciais que orientam a prática pedagógica, a construção de currículos, a elaboração de materiais e avaliações. Depois disso, analisa-se, segundo esses documentos, a apresentação do conceito de proporcionalidade em livros de 9º ano do Ensino Fundamental. Por fim, apresenta-se a proporcionalidade no contexto da avaliação do SPAECE, aplicada com estudantes da Educação Básica do Ceará.

3.2.1 A proporcionalidade nos documentos referenciais

Ao realizar a leitura dos documentos que norteiam as aprendizagens essenciais dos estudantes durante a Educação Básica, observa-se que a noção de proporcionalidade ganha destaque. Os PCN tratam a proporcionalidade como um princípio geral que permite estabelecer analogias, induções e deduções que estão presentes em diferentes blocos, como espaço e forma, números e operações, e grandezas e medidas (Brasil, 1997).

Além de afirmar a importância do raciocínio proporcional em temas matemáticos, os PCN afirmam a necessidade de desenvolver o raciocínio proporcional para a compreensão de fenômenos da natureza, apresentando a relação da ideia da proporcionalidade com o meio ambiente, um dos temas transversais trazidos pelo documento (Brasil, 1997).

Os PCN (Brasil, 1997, p. 65) afirmam que um dos objetivos do ensino de Matemática é o desenvolvimento do raciocínio proporcional através de situações de aprendizagem, que permitem o estudante “observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade”. Nesse sentido, o documento traz a importância de desenvolver atividades que se relacionam estreitamente à noção de proporcionalidade com o estudo de outros

conteúdos.

O documento ainda coloca em debate a utilização de problemas de não-proporcionalidade para compreender características da proporcionalidade e estabelecer conexões entre conceitos estudados nos blocos:

Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais, os contra exemplos. O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática) (Brasil, 1997, p.84).

A conexão entre essa ideia com outros conceitos matemáticos também é preconizada pela BNCC, quando afirma a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais que estabelece a ligação com os diferentes campos da Matemática (Brasil, 2017). Nesse sentido, nas unidades temáticas propostas pela base observa-se o conceito de proporcionalidade.

Na BNCC (Brasil, 2017), a proporcionalidade é apontada, nas unidades de Números e Álgebra, como uma ideia fundamental. Ademais, a base enfatiza a importância desse conceito para o estudo de funções, de áreas, de probabilidade, assim como de outros assuntos estudados ao longo da Educação Básica, que compõem objetos de conhecimento das demais unidades temáticas propostas pelo documento: Geometria, Probabilidade e estatística e Grandezas e medidas.

Além do mais, uma das competências específicas da Matemática para o Ensino Fundamental descritas na BNCC propõe “compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento” (Brasil, 2017, p. 267). Assim, o documento preconiza que as propostas pedagógicas evidenciem “as articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas” (Brasil, 2017, p. 275).

De acordo com a BNCC, situações que articulam aspectos de diferentes conteúdos matemáticos são essenciais para o desenvolvimento de habilidades esperadas para os anos finais do Ensino Fundamental, assim como de ideias fundamentais da Matemática, “como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência” (Brasil, 2017, p. 298).

Além dessas ideias fundamentais, a BNCC também inclui a representação como um dos elementos que compõem o conjunto de ideias fundamentais da Matemática. Também destaca a importância da representação para o letramento matemático, “definido como as

competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (Brasil, 2017, p. 266).

Perante o exposto, analisou-se três livros didáticos de forma que respondesse às seguintes perguntas:

- a) Relacionou-se o estudo da proporcionalidade com outros conceitos matemáticos?
- b) De que forma buscou-se dar visualização em problemas que envolviam o conceito de proporcionalidade?
- c) Quais foram os procedimentos adotados nas resoluções de problemas sobre grandezas direta e inversamente proporcionais?

Apresenta-se, então, na subseção seguinte, a análise dos livros didáticos realizada neste estudo.

3.2.2 Análise de livros didáticos

Esta seção descreve a análise de três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, distribuídos pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), no que se refere à abordagem do conceito de proporcionalidade. Os livros didáticos são do PNLD 2020, entregues de forma gratuita a estudantes de escolas públicas das esferas municipal, estadual e federal para serem utilizados no quadriênio 2020-2023.

Cabe dizer que a entrega das coleções dos livros didáticos ocorre de acordo com a escolha dos professores e da equipe pedagógica, durante uma avaliação realizada na escola. “O livro didático deve ser adequado ao projeto político-pedagógico da escola; ao aluno e professor; e à realidade sociocultural das instituições²”. São selecionadas duas opções, caso não consiga efetuar a compra da primeira opção, a segunda opção de livro é enviada à escola.

No decorrer da realização desta análise, recorreu-se a dois documentos brasileiros que orientam as aprendizagens durante o período da Educação Básica, a BNCC e os PCN, com o intuito de averiguar se os livros didáticos alcançam as expectativas dispostas nos documentos sobre a proporcionalidade. A escolha dos manuais se baseou na experiência da autora deste estudo como professora dos anos finais dos Ensino Fundamental, portanto, optou-se por livros que já haviam sido utilizados durante a vivência da pesquisadora como docente do 9º ano.

² Disponível em:

[http://portal.mec.gov.br/pnld/index.php?option=comcontent&id=13658#:~:text=A%20escola%20deve%20apresentar%20duas,t%C3%A3o%20criteriosa%20quanto%20a%20primeira. Acesso em: 6 jun 2023.](http://portal.mec.gov.br/pnld/index.php?option=comcontent&view=article&id=13658#:~:text=A%20escola%20deve%20apresentar%20duas,t%C3%A3o%20criteriosa%20quanto%20a%20primeira. Acesso em: 6 jun 2023.)

Considerou-se que três livros seriam suficientes para realizar esta análise.

O primeiro livro analisado faz parte da coleção “Matemática - Bianchini”, do autor Edwaldo Bianchini e é direcionado ao público de estudantes que cursam o 9º ano do Ensino Fundamental.

No livro de Bianchini (2018) percebe-se uma variedade de assuntos que se relacionam com a proporcionalidade. Exceto os capítulos 2 e 6, todos inserem de algum modo a noção de proporcionalidade. Percebeu-se, no entanto, que as unidades temáticas de Álgebra e de Geometria foram as que mais discutiram a proporcionalidade.

No capítulo 3, o livro traz a definição de grandezas direta e inversamente proporcionais. Inicialmente, neste capítulo, são apresentados alguns exemplos de razões entre grandezas diferentes, como, por exemplo, a velocidade e a densidade demográfica e seguidamente apresentam-se problemas de diferentes contextos para trabalhar o assunto.

Bianchini (2018) explica o que entende-se como grandeza e dá dois exemplos, um em que as grandezas são diretamente proporcionais e outro em que as grandezas são inversamente proporcionais. A tabela é o suporte mais utilizado para a visualização das situações propostas no terceiro capítulo.

Com relação aos procedimentos adotados nas resoluções dos problemas, o autor faz exemplos com equações, a partir da definição de grandezas direta e inversamente proporcionais e utiliza a técnica regra de três, havendo a predominância desta última no capítulo 3. A Figura 7 mostra a resolução de uma situação problema exposta neste capítulo que envolve o assunto de grandezas inversamente proporcionais.

Figura 7 - Solução de um problema em um livro didático

Situação 2

Ao viajar de automóvel, à velocidade média de 60 km/h, Vânia leva 4 horas para fazer determinado percurso. Certo dia, ela aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h. Vamos calcular o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto.

O problema envolve duas grandezas: **velocidade**, em quilômetro por hora, e **tempo**, em hora. Indicando por x o número de horas, montamos este quadro:

Velocidade média (em km/h)	60	80
Tempo (em hora)	4	x

As grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**, pois, ao se aumentar a velocidade, o tempo de percurso diminui proporcionalmente. Se, por exemplo, a velocidade for duplicada, o tempo de percurso será reduzido à metade.

Assim, os produtos dos valores de cada velocidade média e dos tempos de percurso correspondentes são iguais:


$$80x = 60 \cdot 4$$

Resolvendo a equação, obtemos o valor de x :

$$\frac{80x}{80} = \frac{240}{80}$$

$$x = 3$$

Portanto, quando Vânia aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h, o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto foi de 3 horas.



CAPÍTULO 3 | GRANDEZAS PROPORCIONAIS **81**

Fonte: Bianchini (2018, p. 81).

Na unidade temática de Geometria, Bianchini (2018) utiliza o conceito de proporcionalidade ao apresentar o Teorema de Tales e a semelhança de figuras planas e faz uso, principalmente, de ilustrações e malha quadriculada para dar visualização das situações-problemas.

A representação gráfica no plano cartesiano é utilizada no conteúdo de funções, que é apresentado pela BNCC na unidade temática de Álgebra. Entretanto, apenas um item, no final da seção que aborda o assunto de função do 1º grau, foi usado para associar as relações de proporcionalidade entre grandezas com o conteúdo de função. Na questão não foram utilizados recursos de visualização, tais como tabelas, gráficos ou ilustrações.

O segundo livro analisado é da coleção “A Conquista da Matemática”, de José Ruy Giovanni Júnior e de Benedicto Castrucci. Primeiramente, buscou-se observar os conteúdos que discutiam conceitos relacionados ao raciocínio proporcional e à proporcionalidade trazidos pelo livro.

Nesse sentido, notou-se no livro de Giovanni Júnior e Castrucci (2018) que a proporcionalidade foi bastante trabalhada na unidade temática de Geometria, sendo explorada principalmente na unidade 5 do livro didático. A respeito do objeto de conhecimento que

envolve as noções de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, observou-se uma conexão com o conteúdo de funções, na unidade 9. Ao apresentar as questões que tratam sobre segmentos proporcionais, o manual traz ilustrações, representando segmentos de retas que possuem uma relação de proporcionalidade por conta de suas medidas. A abordagem de teoremas que envolvem o raciocínio proporcional utilizada pelos autores Giovanni Júnior e Castrucci (2018), tais como o Teorema de Tales e o Teorema da Bissetriz Interna de um Triângulo, utilizou muitas figuras, trazendo visualização para as construções usadas nas demonstrações e também para os problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade.

O livro em questão possibilita através de um exemplo, apresentado na unidade 9, a relação do conteúdo de função linear com o conteúdo de grandezas diretamente proporcionais. Nessa abordagem, os autores apresentam uma função linear e utilizam uma tabela para relacionar duas variáveis (x e y) e a constante de proporcionalidade (exibida pela razão $\frac{y}{x}$). Identificou-se, contudo, na explicação da tabela (ver Figura 8) um erro quando se apresenta a constante de proporcionalidade, por meio da igualdade $\frac{1}{2} = 3$, podendo ser entendido como um erro de digitação.

Figura 8 - Relação da proporcionalidade e função linear apresentada em um livro didático

☉ Função linear

Em uma função afim dada por $y = ax + b$ (com $a \neq 0$), os valores a e b são os coeficientes da função. Quando $b = 0$, a lei da função afim é dada por $y = ax$ (com $a \neq 0$) e ela é denominada **função linear**.

Como exemplo, consideremos a função definida por $y = 3x$.

Nesse caso, os coeficientes são $a = 3$ e $b = 0$, ou seja, a função afim é uma função linear ($b = 0$).

Veja o quadro a seguir com alguns valores de x e y .

$y = 3x$		
x	y	$\frac{y}{x}$
1	3	3
2	6	3
3	9	3
4	12	3

Observando o quadro, podemos verificar que as variáveis x e y determinam grandezas que são diretamente proporcionais, já que a razão entre valores correspondentes delas é uma constante ($\frac{1}{2} = 3$). Essa constante de proporcionalidade é o próprio coeficiente a .

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 253).

Na seção “Retomando o que aprendeu”, do livro de Giovanni Júnior e Castrucci

(2018, p. 274), da unidade 9, os autores propõem que o aluno formule um problema que envolva grandezas diretamente proporcionais. Nessa unidade, gráficos no plano cartesiano são utilizados para representar diferentes situações, no entanto, pouco envolvimento com o conceito de proporcionalidade é dado na unidade. A regra de três foi o procedimento mais utilizado nos conteúdos que inseriram o raciocínio proporcional, especialmente na unidade temática de Geometria, quando apresenta demonstrações de teoremas e os exemplos por meio de problemas.

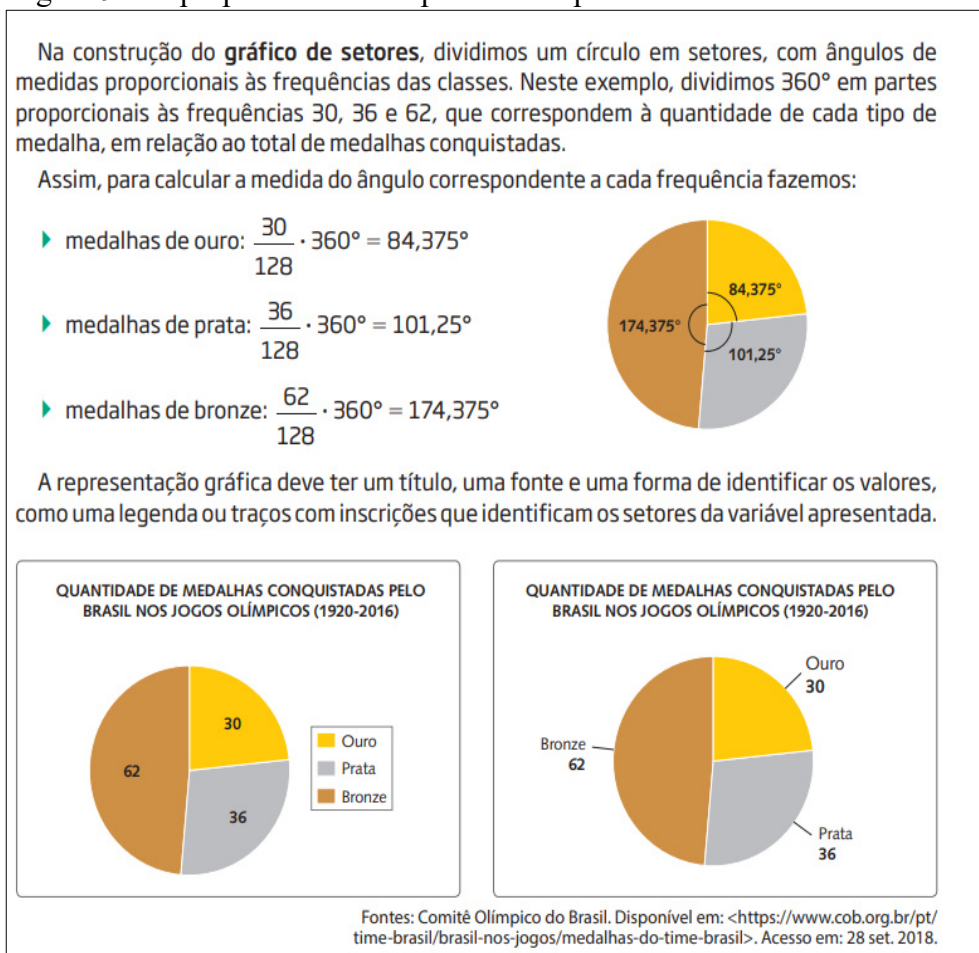
O livro de Silveira (2018), que faz parte da coleção “Matemática: Compreensão e Prática” foi o terceiro livro analisado. O livro aborda a proporcionalidade, especialmente nas unidades temáticas de Geometria e Álgebra. Na Geometria, a ideia de proporcionalidade é inserida quando o autor aborda sobre segmentos proporcionais e semelhança de figuras, no capítulo 3. Em sua abordagem, o autor utiliza a igualdade de razões como proposta de resolução de problemas que envolvem a ideia de proporção. Na unidade temática de Álgebra, a proporcionalidade é trabalhada no conteúdo de função afim, no capítulo 5. O livro didático traz representações com figuras, tabelas e malhas quadriculadas para dar visualização, além de utilizar a representação de construção com régua e compasso nas explicações.

Percebeu-se que, assim como Giovanni Júnior e Castrucci (2018), Silveira (2018) não dedica um capítulo ou seção para contemplar o objeto de conhecimento que trata das grandezas direta e inversamente proporcionais, previsto pela BNCC para ser alcançado por alunos no último ano do Ensino Fundamental, diferentemente do que é visto no livro de Bianchini (2018).

Quando trata das funções, o livro de Silveira (2018) relaciona a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais através de exemplos e problemas inseridos no capítulo 5. Neste capítulo, o autor usa, principalmente, tabelas e gráficos como meios de gerar a visualização da conexão das noções de grandezas e de função afim. Silveira (2018) traz a definição de função linear em um exemplo e, apesar de não deixar claro o envolvimento desse tipo de função com a noção de grandezas diretamente proporcionais, dá a possibilidade de conectar esse tipo de função afim com o conteúdo de grandezas diretamente proporcionais, por meio de problemas.

Na unidade temática de Probabilidade e estatística, Silveira (2018) utiliza a ideia de proporcionalidade para a construção de gráficos. Um exemplo de como isso acontece é mostrado na Figura 9.

Figura 9 – A proporcionalidade presente na probabilidade e estatística



Fonte: Silveira (2018, p. 287)

Compreende-se que a investigação realizada nesses três livros didáticos foi suficiente para comprovar que a proporcionalidade foi pouco inserida em algumas unidades temáticas, como, por exemplo, a de Grandezas e medidas. Também percebeu-se que não foram integradas diferentes tipos de representação, como tabelas, gráficos e ilustrações nas situações que exigem o raciocínio proporcional.

Além disso, constatou-se que, em geral, o conteúdo de grandezas direta e inversamente proporcionais foi pouco explorado e que adota-se, principalmente, a regra de três como estratégia de resolução de problemas que envolvem esse objeto de conhecimento. No caso da regra de três, Apha e Almouloud (2021, p. 781) falam que é um:

Método antigo usado para resolver os problemas da vida cotidiana (na proporcionalidade), mas não é um método de aprendizagem Matemática da proporcionalidade, ou seja, é apenas uma técnica, uma ferramenta para resolver um problema de proporcionalidade, mas não mostra as relações entre grandezas.

À vista disso, percebe-se a importância de recursos pedagógicos que possibilitem a

visualização, o dinamismo e a interação entre representações, o que para um livro didático, por ser um material impresso, acaba sendo enigmático. Além disso, considera-se a necessidade de associar o uso de recursos pedagógicos a novas metodologias de ensino, que tragam mais significado e que sejam mais assertivas.

3.2.3 A proporcionalidade no Sistema Permanente de Educação Básica do Ceará

O Sistema Permanente de Educação Básica (SPAECE) é uma iniciativa da Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC). A partir dessa avaliação, a SEDUC assume a responsabilidade de tomar conhecimento e de examinar a aprendizagem básica, a fim de monitorar e formular ações que possibilitem aos professores, alunos, gestores, pais e especialistas acompanhar efetivamente os resultados escolares nos níveis fundamental e médio (Magalhães; Farias, 2016).

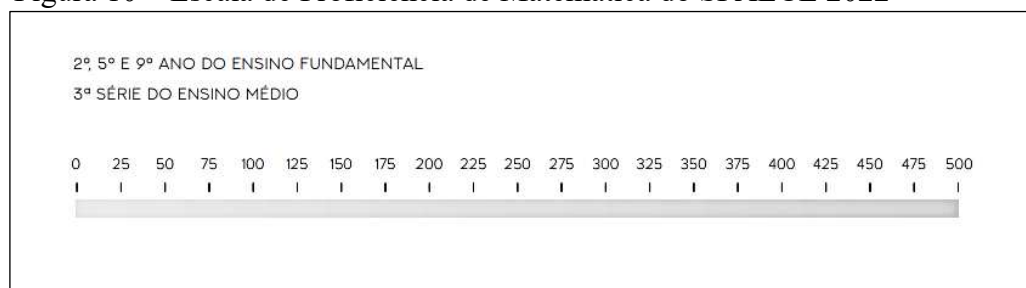
Assim como o SAEB, o SPAECE passou por várias modificações ao longo desses trinta anos, sendo institucionalizado no ano de 2000 através da Portaria nº 101, de 15 de fevereiro de 2000 (Ceará, 2000). Atualmente, o SPAECE avalia a aprendizagem de estudantes nos componentes curriculares Português e Matemática, que estão matriculados no 5º ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, no 9º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, no 3º ano do Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos (EJA) fundamental e médio. Já o SPAECE – Alfa avalia alunos matriculados regularmente no 2º ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais.

Utilizado também em planejamentos de políticas públicas, o SPAECE avalia, de forma censitária, escolas públicas dos 184 municípios do Ceará. Através da Lei nº 15.923 de 15 de dezembro de 2015, regulamentada pelo Decreto 32.079/2016, as escolas podem receber, a depender do desempenho dos estudantes na avaliação, o prêmio Escola Nota Dez (Ceará, 2015, 2016a). Já a lei nº 16.448, de 12 de dezembro de 2017, prevê que os professores e funcionários de escolas estaduais que atingirem metas propostas recebam um bônus salarial (Ceará, 2017). Além do mais, a lei nº 16.144, de 7 de dezembro de 2016, traz a previsão de premiar estudantes que realizaram o exame e que atingiram a proficiência adequada em Português e Matemática com um *notebook* ou *tablet* (Ceará, 2016b).

Os estudantes têm seu desempenho medido em uma escala, denominada escala de proficiência. A proficiência é apresentada através de um valor, sendo este calculado a partir da Teoria de Resposta ao Item (TRI) “e trata, em síntese, dos saberes (ou conhecimentos) estimados a partir das tarefas que o estudante é capaz de realizar na resolução dos itens do teste”

(Ceará, 2022). A escala de proficiência utilizada no SPAECE 2022 para o 2º, 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e para o 3º ano do Ensino Médio é apresentada na Figura 10.

Figura 10 – Escala de Proficiência de Matemática do SPAECE 2022



Fonte: Ceará (2022, p. 18).

Na escala de proficiência de Matemática, é feita uma divisão em intervalos, classificando habilidades a serem avaliadas. Esses intervalos são chamados de padrões de desempenho e colocam os estudantes em categorias de acordo com o desempenho no SPAECE, como mostra a Figura 11 e a Tabela 1.

Figura 11 – Padrões de desempenho em Matemática do 5º e 9º

Etapa	Muito Crítico	Crítico	Intermediário	Adequado
5º ano EF	Até 150	150 a 200	200 a 250	Acima de 250
9º ano EF	Até 225	225 a 275	275 a 325	Acima de 325

Fonte: Ceará (2022, p. 18).

Tabela 1 – Padrões de Desempenho em Matemática

Muito Crítico	Padrão de desempenho muito abaixo do mínimo esperado para a etapa de escolaridade e a área do conhecimento avaliadas, revelando carência de aprendizagem. Para os estudantes que se encontram neste padrão, deve ser dada atenção especial, exigindo uma ação pedagógica intensiva por parte da instituição escolar
Crítico	Padrão considerado básico para a etapa e a área de conhecimento avaliadas. Os estudantes que se encontram neste padrão caracterizam-se por um processo inicial de desenvolvimento de competências e habilidades correspondentes à etapa de escolaridade em que estão situados.
Intermediário	Padrão considerado adequado para a etapa e a área do conhecimento avaliadas. Os estudantes que alcançaram este padrão demonstram ter desenvolvido as habilidades essenciais referentes à etapa de escolaridade em que se encontram, demandando ações para aprofundar a aprendizagem.
Adequado	Padrão de desempenho desejável para a etapa e a área de conhecimento avaliadas. Os estudantes alocados neste padrão demonstram desempenho além do esperado para a etapa de escolaridade em que se encontram, necessitando de estímulos para continuar avançando no processo de aprendizagem.

Fonte: elaborada de acordo com Ceará (2022, p. 18).

A avaliação do SPAECE realizada no ano de 2022³, teve o percentual de participação de 100,5% dos alunos matriculados na rede municipal. De acordo com os dados divulgados pela SEDUC, a proficiência média dos estudantes foi igual a 261, indicando um padrão de desempenho crítico, conforme definido na Tabela 1 (Ceará, 2023).

A Matriz de Referência do SPAECE descreve descritores que expõem habilidades a serem avaliadas. A Tabela 2 mostra a Matriz de Referência do SPAECE para o 9º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Tabela 2 – Matriz de Referência do SPAECE para o 9º ano (continua)

Descritor	Habilidade
I. Interagindo com números e funções	
D07	Resolver situação problema utilizando mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum com números naturais.
D08	Ordenar ou identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D10	Resolver problema com números inteiros envolvendo suas operações
D11	Ordenar ou identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D12	Resolver problema com números racionais envolvendo suas operações.
D13	Reconhecer diferentes representações de um mesmo número racional, em situação-problema.
D15	Resolver problema utilizando a adição ou subtração com números racionais representados na forma fracionária (mesmo denominador ou denominadores diferentes) ou na forma decimal.
D17	Resolver situação problema utilizando porcentagem.
D18	Resolver situação problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
D19	Resolver problema envolvendo juros simples.
D21	Efetuar cálculos com números irracionais, utilizando suas propriedades
D24	Fatorar e simplificar expressões algébricas.
D25	Resolver situação problema que envolva equações de 1º grau.
D26	Resolver situação problema envolvendo equações de 2º grau.
D27	Resolver situação problema envolvendo sistema de equações do 1º grau.
II. Convivendo com a geometria	
D48	Identificar e classificar figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, destacando algumas de suas características (número de lados e tipo de ângulos).
D49	Resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas.
D50	Resolver situação problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
D51	Resolver problemas usando as propriedades dos polígonos (soma dos ângulos internos, número de diagonais e cálculo do ângulo interno de polígonos regulares).
D52	Identificar planificações de alguns poliedros e/ ou corpos redondos

³ No ano de 2022 foram aplicadas duas avaliações, uma no início do ano e outra no final do ano, chamadas de SPAECE Diagnóstico e SPAECE Somativo. O resultado citado diz respeito a essa última. Para uma melhor compreensão e apropriação desses resultados, indica-se que o leitor assista o vídeo disponível no link <https://vimeo.com/842529493/2287765857>.

Tabela 2 – Matriz de Referência do SPAECE para o 9º ano (conclusão)

III. Vivenciando as medidas	
D65	Calcular o perímetro de figuras planas, numa situação problema.
D67	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D69	Resolver problemas envolvendo noções de volume.
IV. Tratamento da informação	
D75	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas ou gráficos.
D77	Resolver problemas usando a média aritmética.

Fonte: elaborada de acordo com Ceará (2022, p. 48).

Ceará (2022) aponta que a recomposição de aprendizagens é um dos maiores desafios do retorno das atividades presenciais nas escolas. Nesse contexto, afirma-se que:

O currículo de Matemática prevê o desenvolvimento de uma grande quantidade de habilidades. Algumas se repetem ao longo dos anos de escolarização, diferenciando-se pelo grau de complexidade. Outras se apresentam como complementares a habilidades antecedentes. Há ainda aquelas que são elementares e estruturam o desenvolvimento de outras habilidades, em outros anos de escolaridade, seja em Matemática ou em outros componentes curriculares. Elas são tratadas, aqui, como habilidades estruturantes (Ceará, 2022, p. 27).

Sendo assim, o documento recomenda que as habilidades estruturantes sejam o foco da recomposição de aprendizagens, recomendando o uso de novas metodologias, a adaptação de materiais didáticos e maneiras de avaliar. Pela relação de descritores, exibida na Tabela 2, nota-se que diversos descritores podem ser relacionados com a proporcionalidade. Nesse sentido, considera-se, pelas discussões já trazidas nas seções anteriores, que a apropriação da proporcionalidade como conceito é essencial para o desenvolvimento das habilidades relacionadas aos descritores do SPAECE. Além disso, a proporcionalidade é percebida em todos os níveis de desempenho⁴ previstos pelo documento, para serem alcançados até o último ano do Ensino Fundamental, fortalecendo a ideia de que esse conceito fornece subsídios para o desenvolvimento das habilidades estruturantes.

Neste estudo, as situações didáticas desenvolvidas contemplaram os descritores marcados em azul na Tabela 2, relacionando-os à proporcionalidade, a partir da adaptação de problemas do SPAECE.

⁴ Os níveis de desempenho até o 9º ano do Ensino Fundamental são descritos no Boletim da Escola 2022, encontrado pelo acesso ao link: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/resources/arquivos/padroes/MT/EF_9.pdf.

3.3 Análise didática: o ensino da proporcionalidade na Educação Básica

A proporcionalidade, segundo Costa e Allevato (2015), é considerada um conceito formador de estruturas cognitivas, sendo importante para o entendimento de outros conceitos matemáticos, que envolvem os números, as grandezas e a geometria. Contudo, os autores consideram ser para o docente um desafio conduzir os estudantes ao desenvolvimento do raciocínio proporcional no período escolar.

De acordo com Oliveira *et al.* (2006), as dificuldades para compreender a proporcionalidade decorrem de dois fatores: a complexidade relativa ao conceito e a abordagem dada ao ensiná-lo em sala de aula.

No que se refere ao primeiro, Lamon (2020) afirma que o raciocínio proporcional é uma exigência para a compreensão de situações em que a proporcionalidade é envolvida. De acordo com a autora, o desenvolvimento desse raciocínio se associa com as relações de invariância (razão constante entre grandezas) e covariância (variação de grandezas, de forma que as relações entre si permaneçam).

Lamon (2020) aponta a compreensão da natureza multiplicativa de situações que envolvem a proporcionalidade como uma das maiores dificuldades dos estudantes. Para compreendê-la é necessário, segundo a autora, certa maturação para entender a diferença entre adicionar e multiplicar, e as situações em que cada uma pode ser aplicada. Com efeito, Ruiz e Carvalho (1990) apontam a concepção da proporção como uma relação aditiva, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $a - b = c - d$, em vez de $a \cdot d = b \cdot c$, como um erro frequentemente cometido pelos estudantes durante a elaboração de estratégias para resolver problemas que envolvem as relações proporcionais.

Sobre a abordagem da proporcionalidade em sala de aula, encontram-se discussões em diversos estudos, como os realizados por Tobias (2018); Santos (2018); e Soares (2016). Tobias (2018) afirma que, geralmente, o ensino da proporcionalidade na Educação Básica é baseado em regras e procedimentos mecânicos que dificultam a compreensão do conceito pelos estudantes. Para Santos (2018), a falta de recursos visuais em situações propostas pelos docentes dificulta que o estudante reconheça padrões matemáticos, o que, segundo a autora, acaba não favorecendo a construção do raciocínio proporcional.

Rivera (2011) aponta a importância da visualização para a apropriação de conceitos da Matemática. De acordo com o autor, o apoio visual pode direcionar o aluno durante a resolução de um problema, dando a possibilidade de adotar estratégias diferenciadas,

propiciando a generalização (Rivera, 2011). Outros autores, como Neide *et al.* (2019) e Frantz e Dalcin (2017), apontam a visualização como um suporte que ajuda na compreensão de fenômenos que queiram ser compreendidos matematicamente, articulando conhecimentos e estimulando o raciocínio.

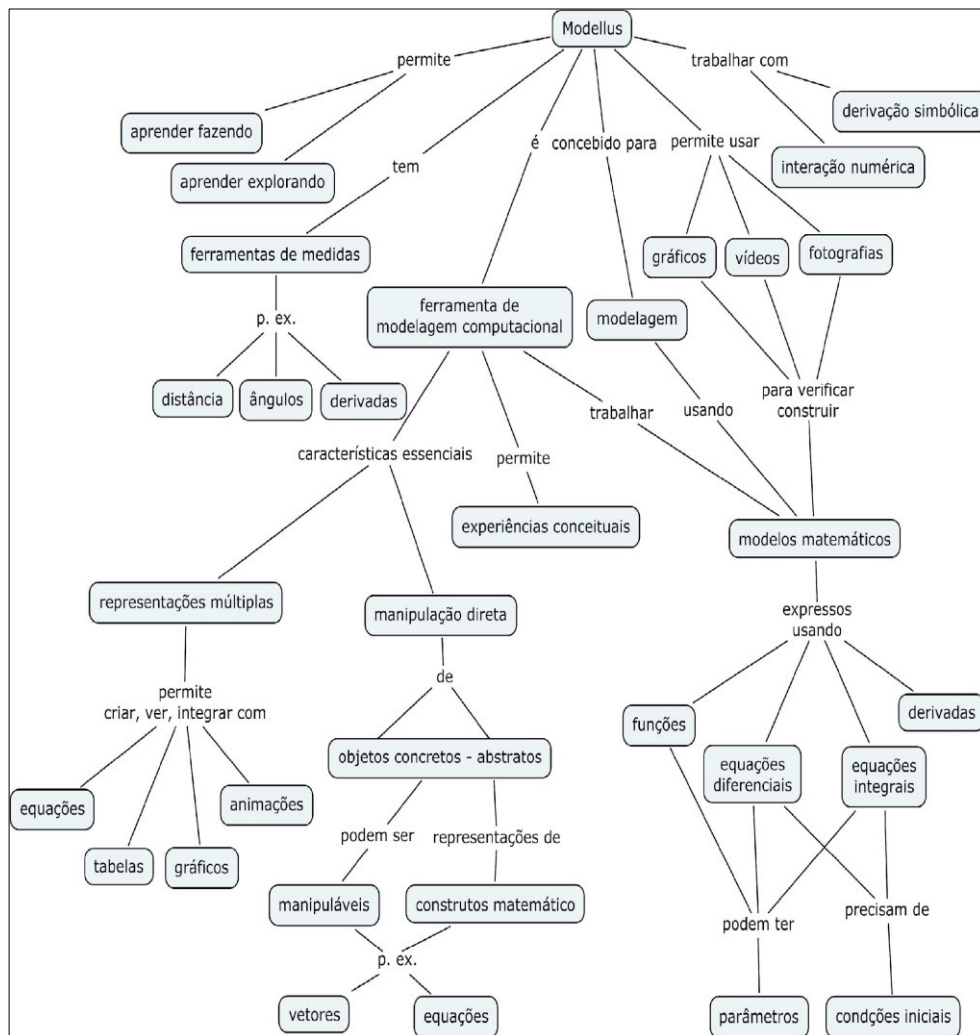
Outro fator que pode dificultar a compreensão dos estudantes sobre a proporcionalidade é a sua abordagem de forma isolada. Após analisar livros didáticos de Matemática e instrumentais de planejamentos de um grupo de professores da Educação Básica, Soares (2016) concluiu que o conceito de proporcionalidade era tratado como um assunto específico, no qual, quando abordado em sala de aula, não se relacionava com outros conteúdos matemáticos. Segundo a autora, esse tipo de abordagem “limita o entendimento da proporcionalidade como conceito unificador e formador da Matemática” (Soares, 2016, p.7).

Perante o exposto, encontram-se pesquisas que mostram que as tecnologias digitais potencializam a aprendizagem em Matemática, visto que podem ser utilizadas para integrar variados tipos de representações, favorecendo a conexão entre conceitos da Matemática, o pensamento reflexivo e um aprendizado mais significativo (Estevam *et al.*, 2018; Lemke; Siple; Figueiredo, 2016). Além disso, Oliveira e Amâncio (2022) afirmam que o uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática contribuem para mudar o modelo de ensino tradicional, pois, ao favorecer a aprendizagem ao invés do ensino, colocam o aluno como protagonista de sua aprendizagem.

Quando utilizadas como ferramenta no ensino da proporcionalidade, de acordo com a pesquisa realizada por Castro e Castro Filho (2020), as tecnologias digitais favorecem a visualização e representação, ajudam o estudante a socializar e a formalizar o conceito e colaboram na construção do significado, visto que possibilitam que o estudante vivencie situações reais.

Neste estudo, as tecnologias digitais foram inseridas por meio do software *Modellus*⁵, com o intuito de possibilitar a visualização e a representação das situações didáticas (SD) que apresentam problemas que envolvem a proporcionalidade. A Figura 12 apresenta algumas possibilidades e potencialidades do software *Modellus* como ferramenta pedagógica.

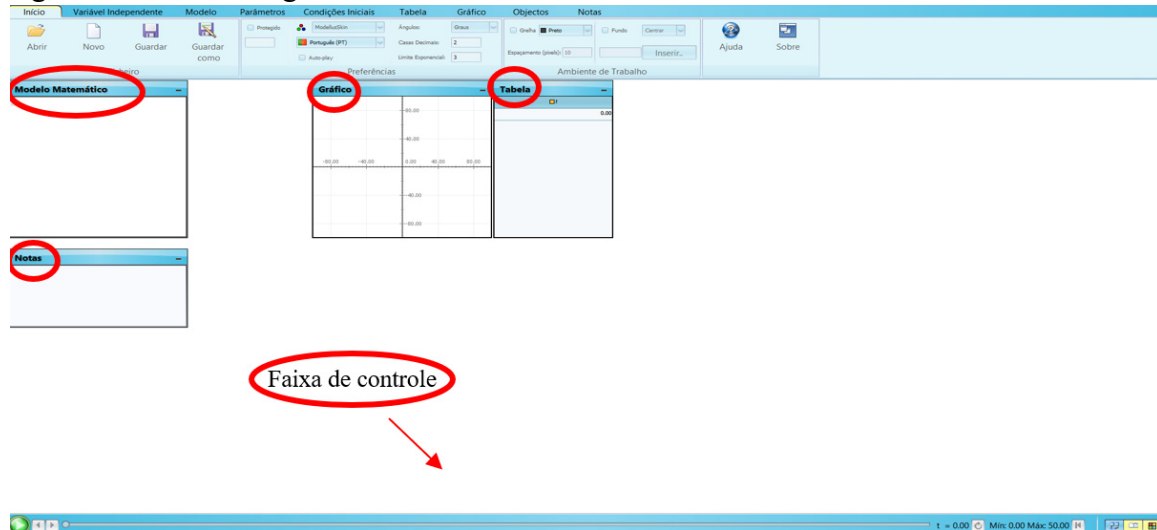
⁵ Este estudo utiliza a versão 4.01, disponibilizada de forma gratuita para download no endereço: <http://modellus.fct.unl.pt/>.

Figura 12 – Potencialidades do *Modellus* como ferramenta pedagógica

Fonte: Veit e Teodoro (2002, p. 91).

O *Modellus* foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Nova Lisboa, sob a liderança do professor Vítor Teodoro (Silva; Poty; Marques, 2015). O software permite obter modelos matemáticos e apresenta em uma mesma tela janelas de visualização, gráfica e em tabela, de cálculos numéricos baseados em equações inseridas pelo usuário, permitindo, inclusive, associar equações a animações (Feitosa, 2018). Na Figura 13, que mostra a interface gráfica do *Modellus*, observam-se as quatro janelas apresentadas no software. Essas janelas podem ser minimizadas ou terem seu tamanho alterado com um arrastar do mouse. Na parte inferior da tela principal, vê-se a faixa de controle que é utilizada nas animações.

Figura 13 – Interface gráfica do *Modellus 4.01*



Fonte: elaborada pela autora (2023).

As situações didáticas que utilizam o software para o ensino da proporcionalidade serão descritas no capítulo seguinte. As situações apresentadas visam a superação dos entraves identificados na primeira etapa da ED, análises preliminares, abordadas neste capítulo.

4 ANÁLISES *A PRIORI* E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Este capítulo descreve situações didáticas sobre a proporcionalidade, que visa facilitar a aquisição desse conceito pelos estudantes. Seguindo os pressupostos da TSD, que baseia a metodologia de ensino adotada neste estudo, descreve-se o que é esperado nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização.

O software *Modellus* foi inserido no planejamento das situações didáticas, a fim de possibilitar a visualização e a representação dos problemas selecionados. Os problemas foram retirados de boletins pedagógicos do SPAECE, documentos direcionados para docentes, que divulgam os resultados e apresentam alguns itens da avaliação.

Nesta etapa, também foram elaboradas as seguintes hipóteses:

- a) O software *Modellus* propicia, com a visualização e a representação através de animações, gráficos e tabelas, a exploração do conceito de proporcionalidade, possibilitando, inclusive, a percepção dos estudantes sobre a relação desse conceito com outros conceitos da Matemática.
- b) Uma organização didática baseada na TSD permite que o professor conduza o comportamento dos estudantes, contudo, com a mínima intervenção, favorecendo a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento.

A validação ou refutação dessas duas hipóteses será feita na última etapa da ED, análise *a posteriori* e validação, etapa em que se realiza a análise dos dados da experimentação das situações didáticas e em que se avalia a reprodutividade da experiência didática (Carneiro, 2009).

As subseções seguintes descrevem as quatro situações didáticas sobre a proporcionalidade construídas neste estudo.

4.1 Situação Didática 1

O objetivo da Situação Didática 1 (SD1) é explorar o conceito de proporcionalidade por meio de uma modelagem construída no software *Modellus*.

A SD1 utilizou um problema do Boletim Pedagógico do SPAECE. Segundo o documento, o problema teve apenas 18,9% de acerto pelos estudantes.

Quadro 1 - Questão retirada do Boletim Pedagógico 2013

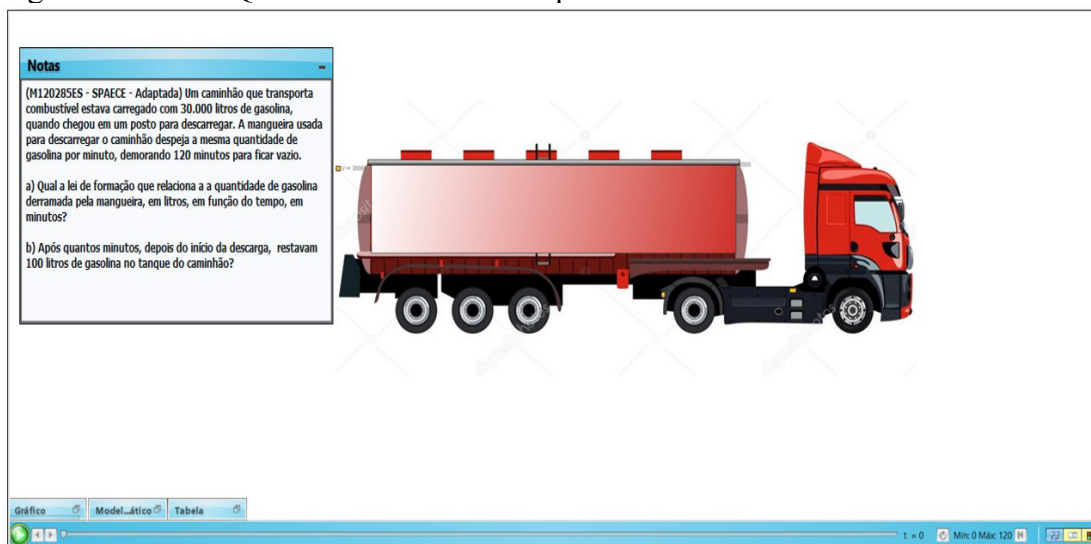
(M120285ES) Um caminhão que transporta combustível estava carregado com 30 000 litros de gasolina. Quando chegou em um posto para descarregar. A mangueira usada para descarregar o caminhão despeja uma mesma quantidade de combustível por minuto. A quantidade y , em litros de combustível que resta no caminhão x minutos após o início da descarga pode ser calculada pela equação $y = 30\,000 - 250x$. Após quantos minutos, depois do início da descarga restavam 100 litros de gasolina no tanque do caminhão?

- a) 119,6 minutos
- b) 120,4 minutos
- c) 200,0 minutos
- d) 220,0 minutos
- e) 297,5 minutos

Fonte: Ceará (2013).

A partir da adaptação da questão mostrada acima (Quadro 1) e de sua modelagem realizada no software *Modellus* (Figura 14), pretende-se que os estudantes elaborem diferentes estratégias de resolução, explorando o conceito de proporcionalidade.

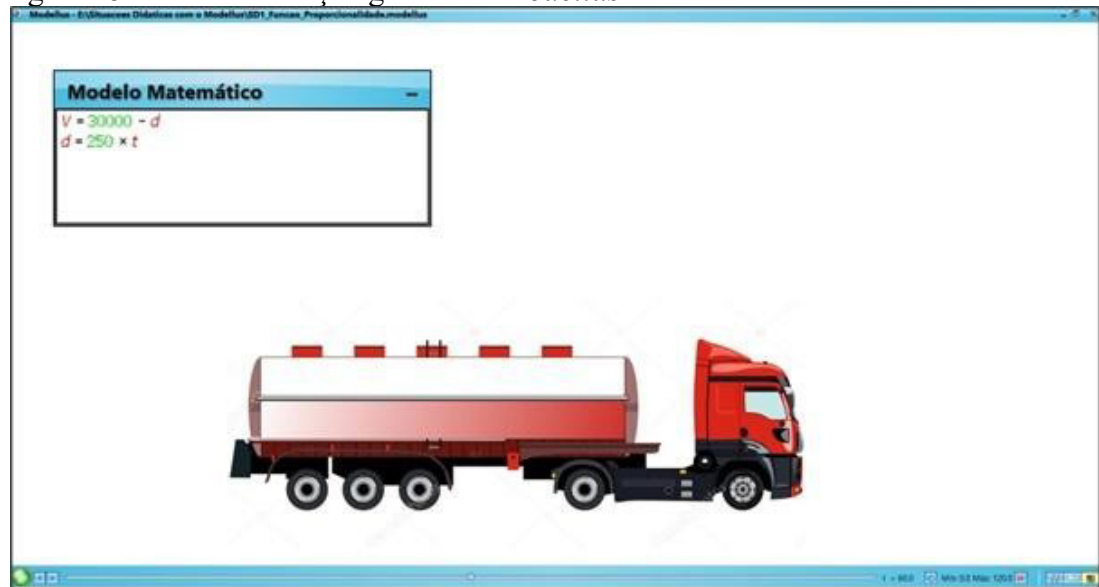
Figura 14 – SD1: Questão do SPAECE adaptada no *Modellus*.



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Para criar a simulação da situação-problema no software *Modellus*, o docente deve inserir equações na janela “Modelo Matemático”, a partir de informações do problema, conforme mostra a Figura 15. Nesta proposta, a janela “Modelo Matemático” deve ser ocultada pelo professor durante a vivência da situação adidática pelo estudante.

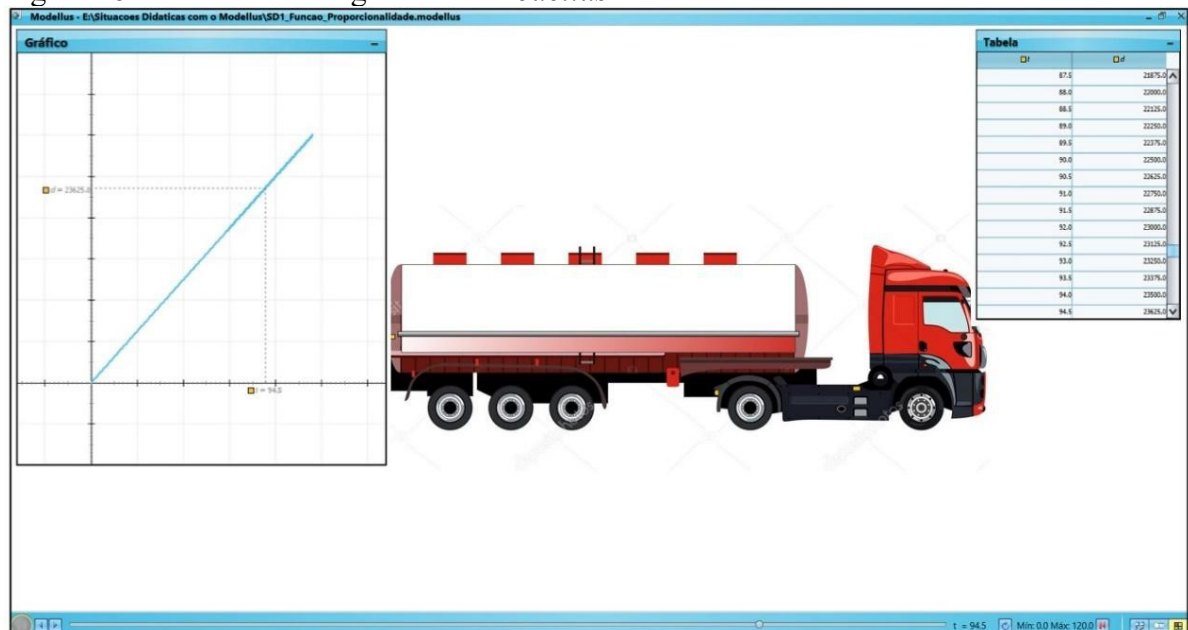
Figura 15 - SD1: Simulação gerada no *Modellus*



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Por meio da simulação, o professor permite que o estudante visualize a diminuição do nível de combustível no tanque do caminhão. Juntamente com a simulação, o docente permite, com a inserção das equações no software, que os educandos visualizem um gráfico e uma tabela, como exibe a Figura 16.

Figura 16 – SD1: Tabela e gráfico no *Modellus*



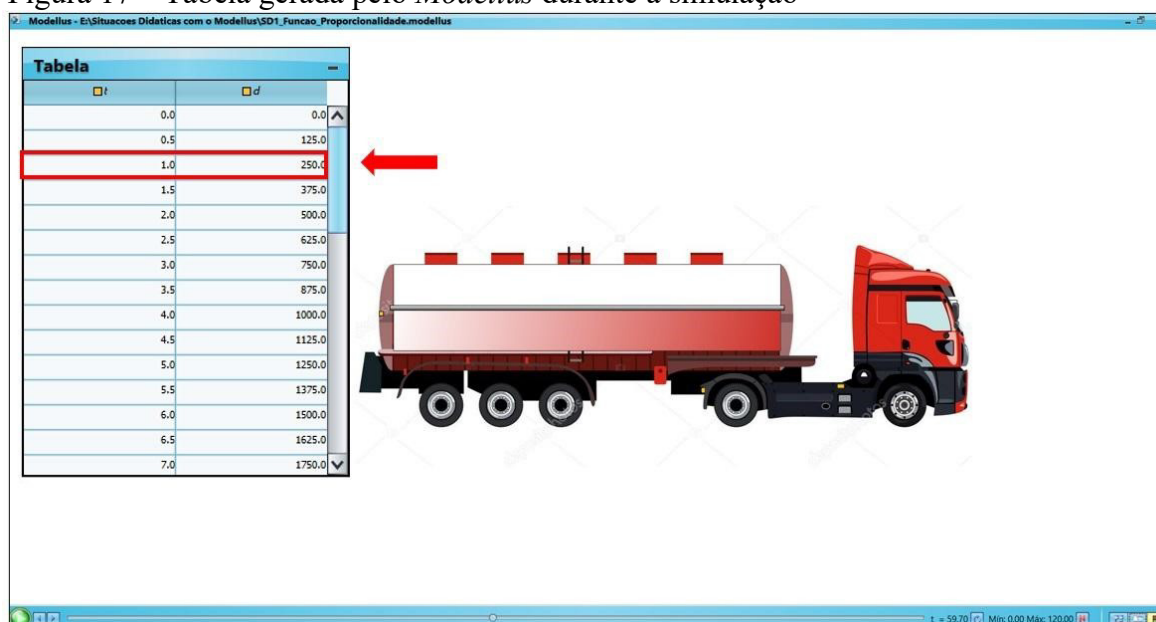
Fonte: elaborada pela autora (2023).

No momento inicial, os estudantes devem realizar a leitura do problema, buscando identificar dados que o ajudem a resolvê-lo. Nessa etapa, chamada de ação pela TSD, é

importante que os discentes levantem hipóteses a partir da compreensão do problema, construindo subsídios para as etapas de formulação e validação (Silva *et al.*, 2022).

O docente deve incentivar que os estudantes observem a simulação apresentada no *Modellus*, que mostra redução do volume de combustível no tanque do caminhão. Ademais, o professor pode estimular que os estudantes observem a tabela gerada no software que relaciona a quantidade de combustível despejado pela mangueira do caminhão no final de cada 0,5 segundo, como mostra a Figura 17.

Figura 17 – Tabela gerada pelo *Modellus* durante a simulação



Fonte: elaborada pela autora (2023).

A segunda etapa proposta pela TSD é a formulação que, segundo Almouloud (2007, p. 38), consiste no “momento em que o aluno ou o grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada”.

Após entender a questão, o aluno poderá perceber, através da observação da simulação e da tabela, que a quantidade de combustível despejado por minuto é igual a 250 litros. Outra estratégia para determinar a vazão da mangueira consiste em dividir 30.000, volume, em litros, de combustível transportado, por 120, tempo em minutos, necessário para esvaziar o tanque do caminhão.

A observação dos elementos apresentados no software pode direcionar o estudante à conclusão de que, para restar 100 litros de combustível no tanque do caminhão, seria necessário a mangueira despejar 29.900 litros. Sendo assim, para chegar ao resultado do problema, o estudante poderia efetuar a divisão de 29.900, quantidade de combustível a ser

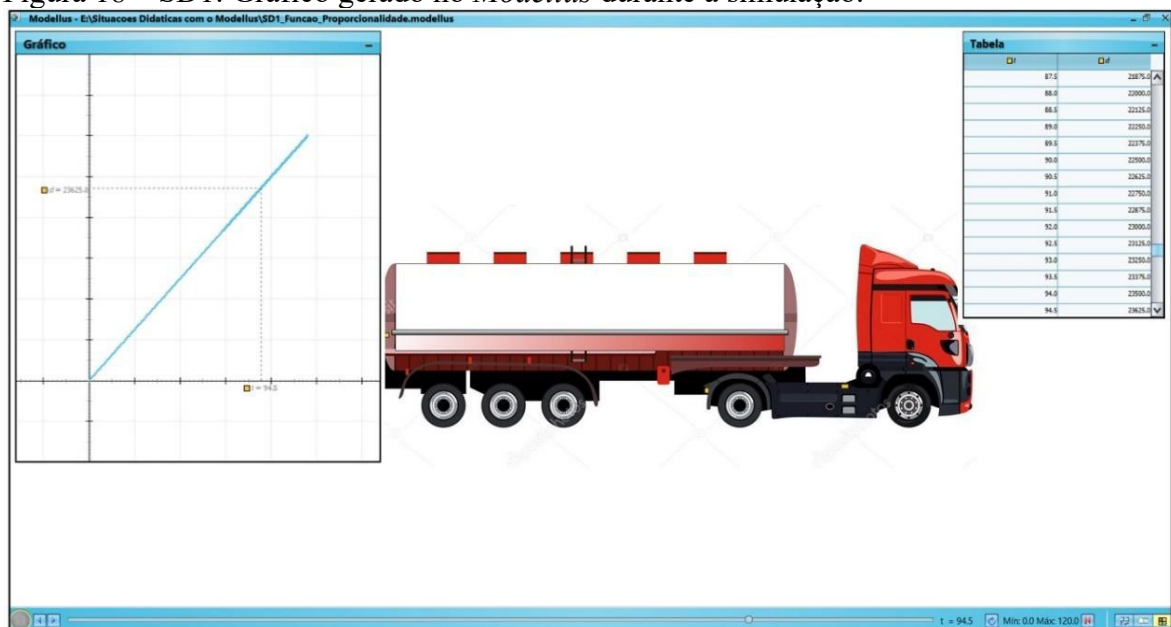
despejado (em litros) por 250, a vazão da mangueira (em litros por minuto), obtendo 119,6 minutos, que é a resposta do problema. Além disso, nessa etapa, o estudante poderá obter a relação

$$d(t) = 250.t,$$

sendo “d” a quantidade de combustível despejado, em litros, e “t” o tempo, em minutos, expressando uma relação de proporcionalidade entre essas duas grandezas.

O gráfico apresentado pelo software (ver Figura 18) traz a possibilidade do estudante estabelecer uma relação entre o conceito de grandezas diretamente proporcionais e o conceito de função linear. Essa percepção pode trazer ao estudante novas estratégias de resolução do problema.

Figura 18 – SD1: Gráfico gerado no *Modellus* durante a simulação.



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Para determinar o tempo necessário para despejar 29.900, o estudante pode utilizar a relação $d(t)$. Ao perceber que a relação trata-se de uma função linear, o estudante tem também a possibilidade de utilizar a propriedade aditiva de d,

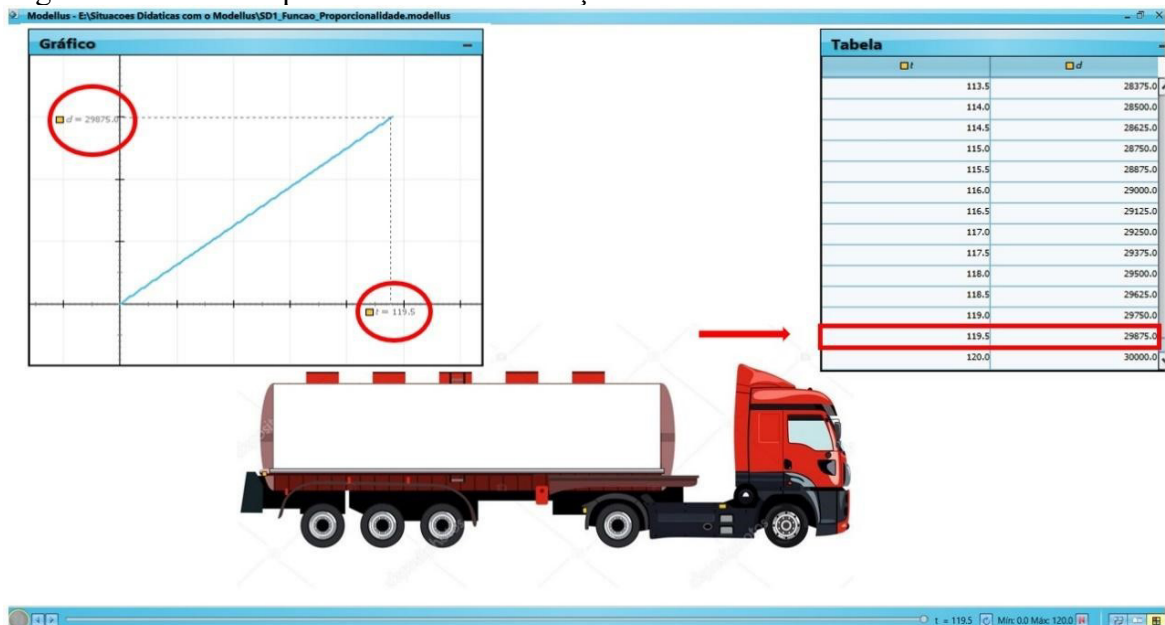
$$d(a + b) = d(a) + d(b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Figura 19 – SD1: Solução por meio de relações de tipo aditivo.



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 20 – SD1: Propriedade aditiva da função d.



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Identifica-se no gráfico e na tabela, mostrados na Figura 19, que a quantidade de combustível despejado ao fim de 0,5 minuto é 125 litros, ou seja, $d(0,5) = 125$. Já na Figura 20, nota-se que ao fim de 119,5 minutos a mangueira despeja um total de 29.875 litros, em outros termos, $d(119,5) = 29.875$. A partir dos conhecimentos de função linear e de proporcionalidade, relacionados pela fórmula $d(t) = 250 \cdot t$, o estudante pode concluir que $d(119,5 + 0,1) = 29.900$ e, então, chegar à conclusão de que 119,6 minutos é a resposta do problema.

Na etapa de validação, os estudantes deverão apresentar suas soluções. De acordo

com Santos e Alves (2017, p. 453), validação é a “fase de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade, ou não, dos argumentos apresentados à solução do problema, Neste ponto, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova”. Ao explicarem as estratégias utilizadas, os estudantes poderão utilizar os elementos apresentados no software, expondo seus conhecimentos.

No momento de institucionalização, o professor toma parte da responsabilidade cedida aos estudantes. O docente expõe suas intenções de ensino e sintetiza o conhecimento, no intuito de colocá-lo em um nível mais elevado (Figueroa; Almouloud, 2018).

Nesse sentido, partindo da questão adaptada que envolve a proporcionalidade, o professor pode explorar as propriedades das proporções, relacionar o conceito de proporcionalidade com os conceitos de função linear e de equação, generalizando estratégias adotadas pelos estudantes. Além disso, o docente pode dizer como foi feita a simulação no software, podendo, nesse momento, utilizar os elementos do software, como gráficos, tabelas e objetos utilizados para construir uma simulação, para explorar na situação proposta e possibilitar a aparição de novos questionamentos sobre grandezas proporcionais.

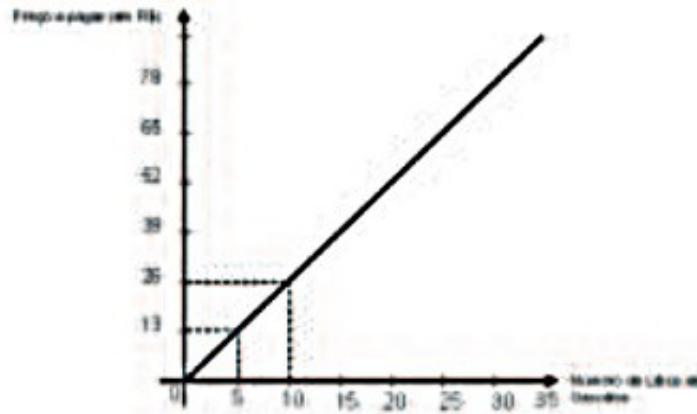
4.2 Situação Didática 2

A Situação Didática 2 (SD2) objetiva, através de uma construção no software *Modellus*, a relação dos conceitos de proporcionalidade e de um tipo específico de função do primeiro grau, a função linear.

A SD2 utilizou uma questão do SPAECE que, segundo o Boletim Pedagógico 2013, tinha o objetivo de avaliar a capacidade do estudante de solucionar problemas que envolvem informações compreendidas em um gráfico. De acordo com o documento, 39,5% dos estudantes não responderam corretamente o problema. O item em questão pode ser visualizado no Quadro 2.

Quadro 2 – SD2: Questão retirada do Boletim Pedagógico 2013

(M08D13I01FWM) Renato foi abastecer o seu carro no posto TELES. Observando os números que giravam no mostrador da bomba, ele construiu em sua agenda o gráfico abaixo.



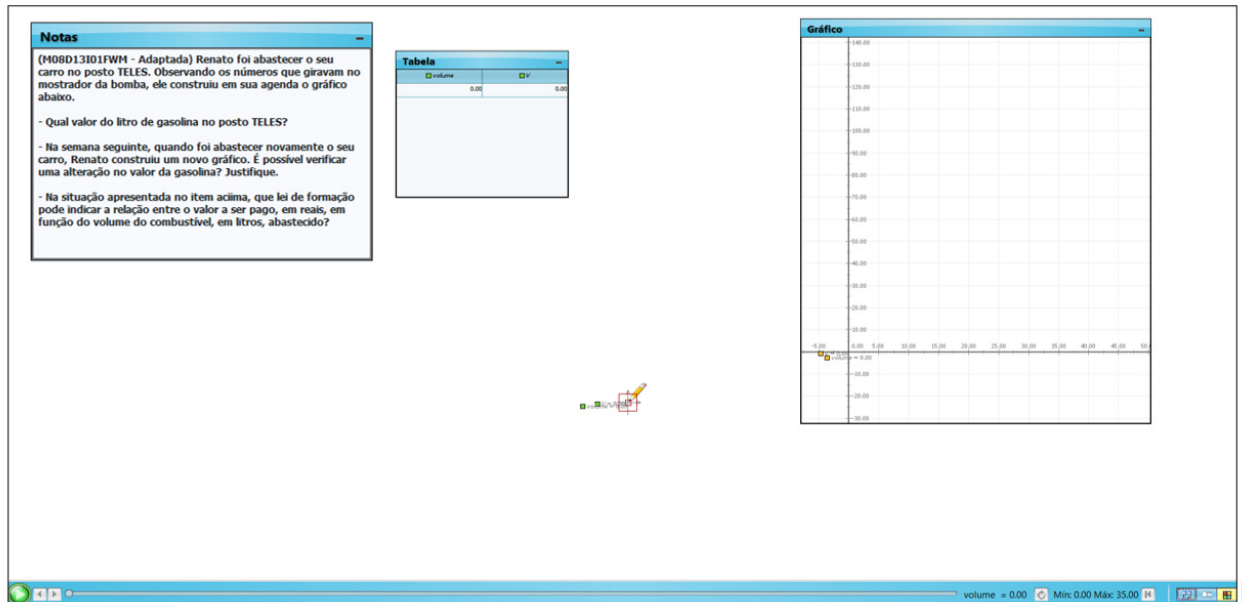
O valor do litro de gasolina no posto TELES é de

- A) R\$ 1,30
- B) R\$ 2,00
- C) R\$ 2,60
- D) R\$ 3,90

Fonte: Ceará (2013).

Com a adaptação do item mostrado no quadro acima e tendo feito a modelagem no software *Modellus*, cogita-se que o estudante perceberá a proporcionalidade direta entre as grandezas envolvidas e a relação do fator de proporcionalidade, na lei de formação de uma função linear. A apresentação do item adaptado e sua exibição no *Modellus* é mostrado na Figura 21.

Figura 21 – SD2: Questão do SPAECE adaptada no *Modellus*

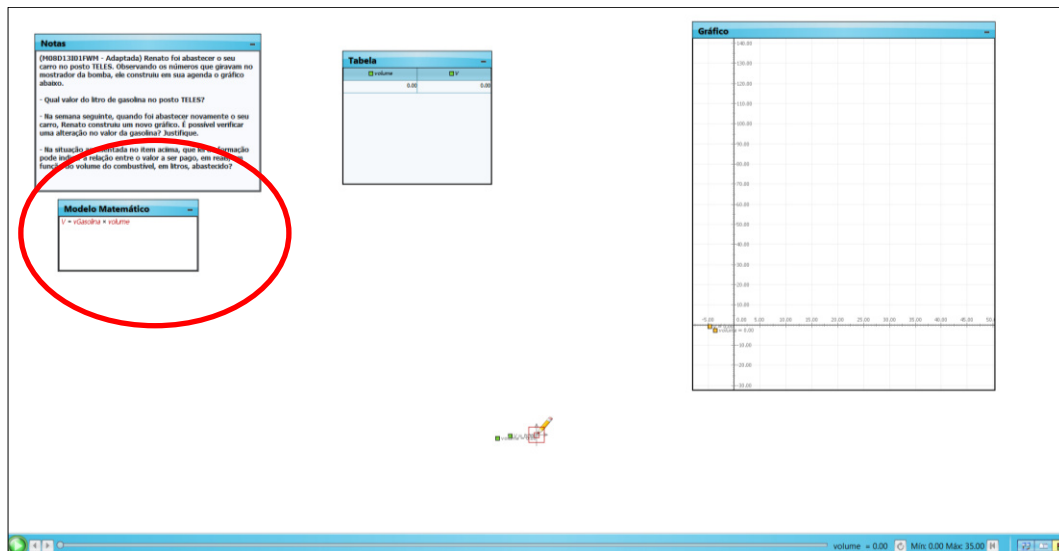


Fonte: elaborada pela autora (2023).

A partir da inserção de equações, conforme os dados do problema, na janela “Modelo Matemático”, o professor possibilita a visualização gráficos e tabelas, que são gerados com a reprodução da simulação. Utilizou-se, na SD2, a caneta, um objeto de animação disponibilizado pelo software *Modellus*, para trazer a visualização da construção de um gráfico para representar a situação apresentada no início do problema.

Observando os gráficos e a tabela no software, se busca dos discentes a percepção da relação dos conceitos de proporcionalidade e função linear. A janela “Modelo Matemático”, mostrada na Figura 22, deve ser minimizada e omitida pelo docente nos momentos em que o estudante estiver manipulando o software.

Figura 22 – SD2: Simulação gerada no *Modellus*



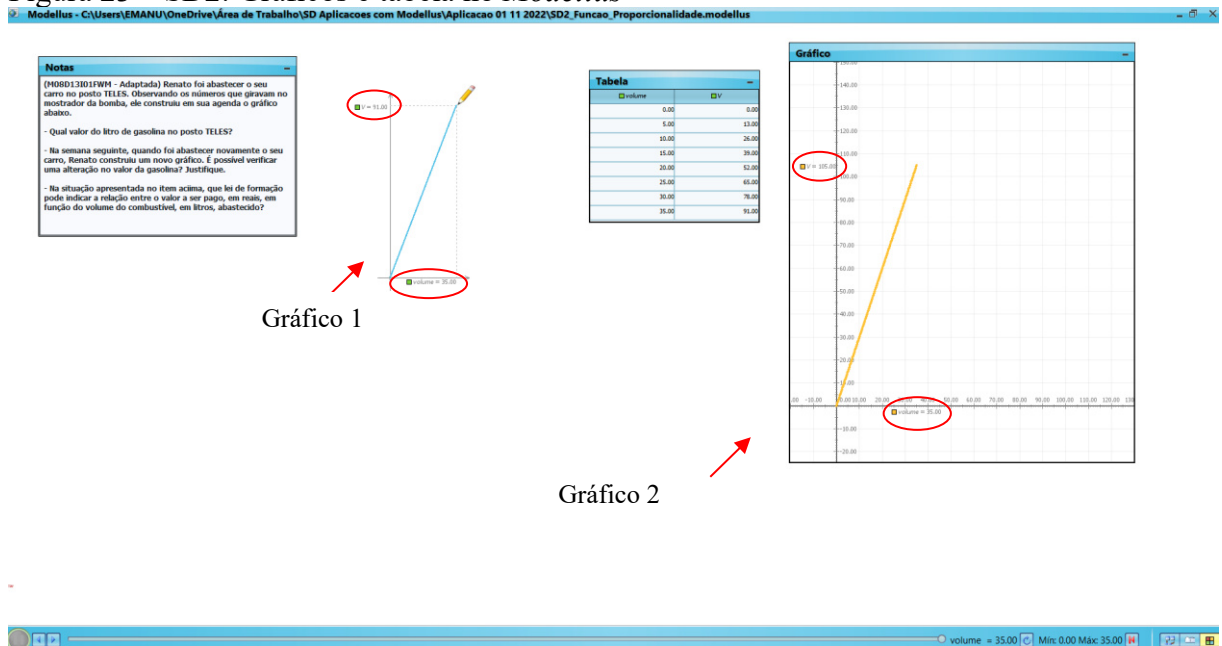
Fonte: elaborada pela autora (2023).

O estudante deve, inicialmente, realizar a leitura do problema, buscando encontrar uma solução conforme explora com o ambiente proposto através do software. Essa conduta faz parte da primeira etapa proposta pela TSD, a etapa de ação (Almouloud, 2007). É importante que o professor chame a atenção dos estudantes para os gráficos e a tabela gerada pelo software.

A etapa de formulação “é a fase em que o aluno troca informações com um ou mais colegas, com o objetivo de explicitar sua solução por meio da língua materna e de Matemática, seja escrita ou oral, de modo a promover debates em busca de validar suas conjecturas” (Gomes; Silva, 2018, p. 24).

A partir da animação gerada pelo software *Modellus* e com a leitura da tabela, o estudante poderá compreender a relação de proporcionalidade entre o preço a se pagar pelo combustível, que chamaremos de V , e o volume de gasolina abastecida, chamada aqui de v . O estudante também poderá perceber que a razão $\frac{V}{v} = p$ corresponde ao valor a ser pago por um litro de combustível, que corresponde ao coeficiente linear da fórmula que expressa o preço a se pagar, em função do volume de combustível abastecido, ou seja, $V(v) = p \cdot v$.

Além disso, o estudante pode concluir o aumento do preço da gasolina a partir de uma comparação nos dois gráficos, observando o valor a ser pago pelo mesmo volume de gasolina comprado ou calculando o preço de um litro de gasolina pela função encontrada anteriormente, ou seja, descobrindo o valor de p , em reais, para $V(1)$ nas duas situações apresentadas através dos gráficos no software. Fazendo esse último, o estudante iria obter $p_1 = 2,60$ no gráfico 1 e $p_2 = 3,00$ no gráfico 2. Os gráficos e a tabela gerados pelo software, após a reprodução, podem ser vistos na figura abaixo.

Figura 23 – SD2: Gráficos e tabela no *Modellus*

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Com o auxílio dos gráficos e da tabela visualizados no software *Modellus*, os estudantes poderão concluir que o valor a ser pago V_2 , em reais, mostrado no segundo gráfico, pode ser expresso matematicamente em função do volume de gasolina abastecido, em litros, pela lei de formação $V_2(v) = 3v$.

Na situação de validação, os alunos irão defender as soluções encontradas, através da linguagem Matemática, validando as suposições feitas nas etapas de ação e formulação (Gomes; Silva, 2018). Nessa etapa, o estudante deve expor sua estratégia de resolução para os demais estudantes e para o docente, argumentando apoiado em raciocínio e, dessa forma, validando as suas conjecturas (Sousa; Ferreira ; Alves, 2021).

Por fim, na dialética de institucionalização, o docente “retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização” (Teixeira; Passos, 2013, p. 166). Nessa etapa, segundo os autores, a intenção do professor é manifestada e o objeto exposto de forma clara aos estudantes.

Dessa forma, o docente pode na etapa de institucionalização esclarecer, a partir da questão, uma relação do fator de proporcionalidade com o coeficiente linear de uma função linear, explicando que as funções do tipo $f(x) = ax$ modelam as situações que envolvem a proporcionalidade e que $a = f(1)$ corresponde ao fator de proporcionalidade.

4.3 Situação Didática 3

A proposta da Situação Didática 3 (SD3) é possibilitar, através da modelagem de uma questão no software *Modellus*, a percepção dos estudantes acerca de problemas que envolvem a proporcionalidade direta e inversa.

A SD3 utilizou um problema do SPAECE que avaliava a habilidade dos estudantes de solucionar problemas envolvendo variações proporcionais, diretas e inversas, entre grandezas. O item pode ser visto no Quadro 3.

Quadro 3 – SD3: Questão do SPAECE

Para dar aula em uma cidade, um professor abastece seu carro, semanalmente, com 45 litros de combustível. Sabendo que a quilometragem percorrida pelo professor no decorrer da semana é de 405 km, podemos afirmar que, a cada litro de combustível colocado no carro, é possível percorrer, em média,

- A) 7 km
- B) 8 km
- C) 9 km
- D) 10 km

Fonte: <https://profwarles.blogspot.com/2013/05/questoes-por-descritor.html>

A partir da questão adaptada e modelada no *Modellus*, entende-se que os estudantes podem perceber a relação inversamente proporcional entre as grandezas tempo e velocidade, assim como a relação de proporcionalidade direta entre o consumo da gasolina e a distância percorrida por um automóvel, chegando à resposta do problema. A questão adaptada e sua disposição no software podem ser vistas na Figura 24.

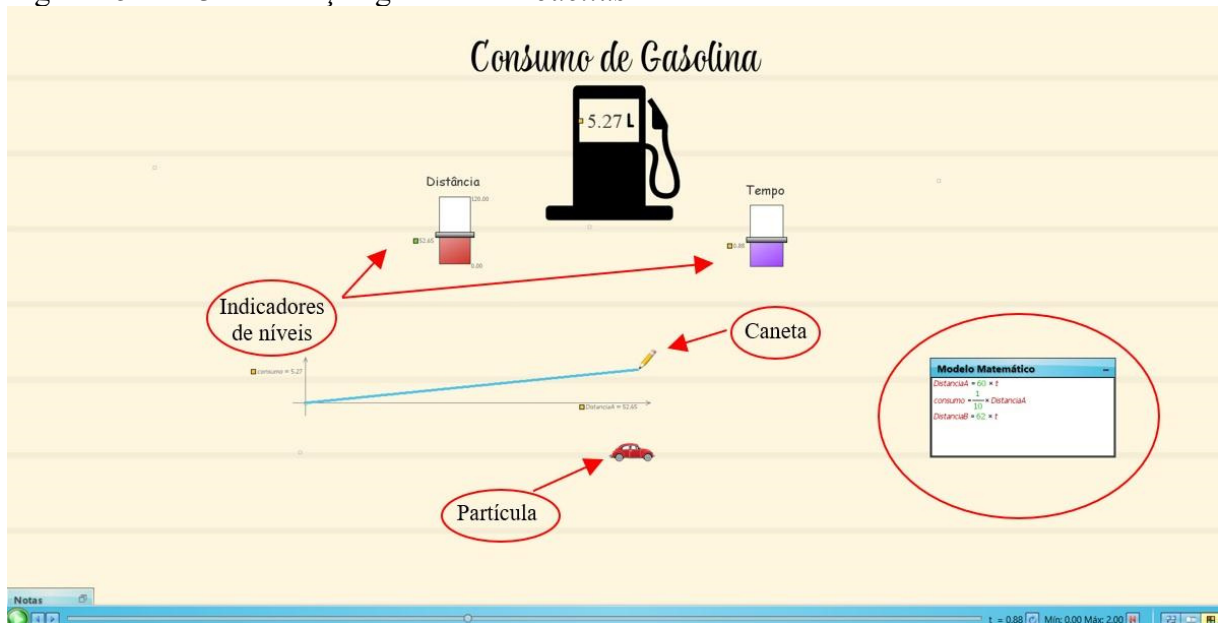
Figura 24 - SD3: Questão adaptada e modelada no software *Modellus*



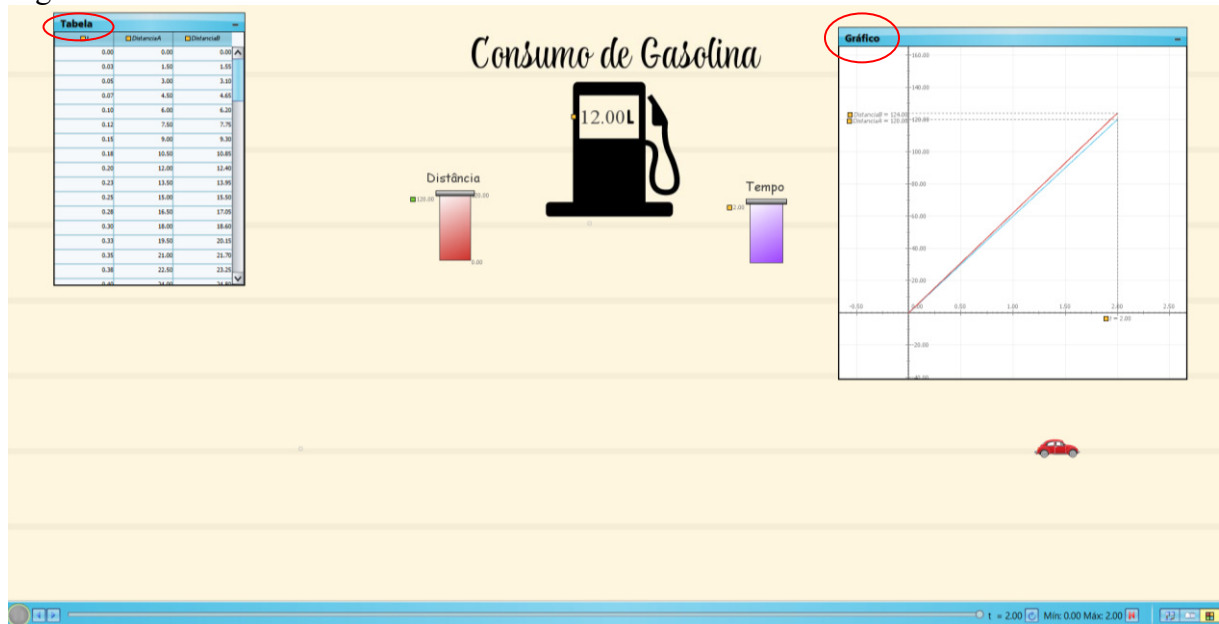
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Para a modelagem do problema no software *Modellus*, o professor deve inserir as equações na janela “Modelo Matemático”, de acordo com as informações da questão (observar Figura 25). Além do gráfico e tabela, disponíveis pelo software, a SD3 também utilizou a caneta, partícula (carro) e dois indicadores de níveis, como objetos de visualização e representação para a situação-problema.

Figura 25 - SD3: Simulação gerada no *Modellus*



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 26 - SD3: Ferramentas no *Modellus*

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Através dos recursos de simulação e por meio da tabela e gráfico gerados no software *Modellus*, foi entendido que os estudantes perceberiam a relação de proporcionalidade direta e inversa entre as grandezas envolvidas no problema e utilizariam o conceito de proporcionalidade como razão para resolver o problema.

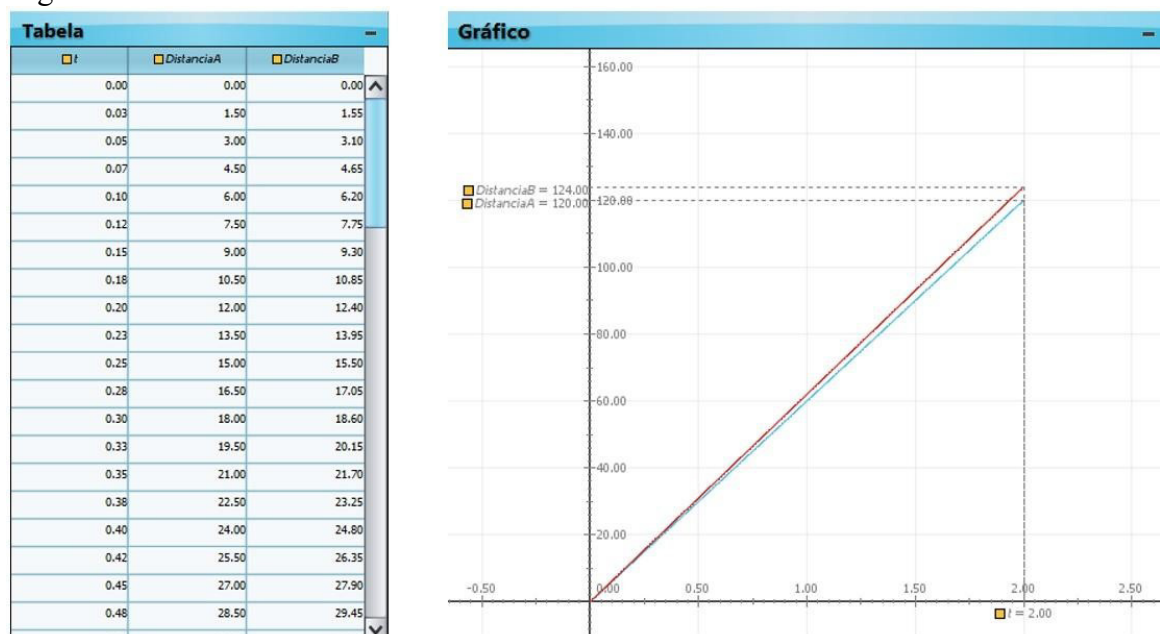
No primeiro momento, o estudante lê o problema, buscando identificar dados importantes para solucioná-lo. Dessa maneira, ao interpretar a questão, o discente deve se apropriar de informações que o leve à formulação de hipóteses que irão possibilitar discussões e validações nas etapas seguintes. O docente deve estimular o estudante a observar a simulação e sua relação com o gráfico construído pela caneta e com os indicadores de nível, buscando contribuir para a compreensão da proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.

A partir disso, inicia-se a troca de informações. Os estudantes devem discutir sobre a relação de proporcionalidade direta entre o consumo de gasolina e a distância percorrida pelo automóvel apresentado no problema. Espera-se que os estudantes percebam que a razão $\frac{1}{10}$ que relaciona a distância percorrida pelo carro e o consumo de gasolina é equivalente à razão $\frac{3}{30}$. Fazendo isso, o estudante pode concluir que o professor percorreu uma distância de 30 km no seu veículo.

Após, o discente deve utilizar a razão $\frac{60\text{km}}{1\text{h}}$ que se expressa pela velocidade do veículo, para chegar à conclusão de que o carro demorou meia hora, isto é, 30 minutos, para percorrer uma distância de 30km, solucionando o primeiro item.

Com a observação do gráfico e da tabela no *Modellus*, mostrado na Figura 27, é provável que os estudantes percebam a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas velocidade e tempo, já que, por meio dessas representações é possível comparar as situações propostas no primeiro e no segundo item da questão. Nesse sentido, o discente deve observar que para percorrer um caminho 1km mais distante, ou seja, 31km, e chegar no mesmo tempo que leva para percorrer 30km, é necessário que a razão entre a distância e o tempo, ou seja, a velocidade média do veículo, seja igual a 62km/h.

Figura 27 - SD3: Gráfico e tabela no *Modellus*



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Feito isso, o educando parte para o momento de validação, que busca confirmar as hipóteses construídas nas etapas anteriores. Destarte, o discente realizará a demonstração ou prova das estratégias utilizadas para os demais estudantes e para o professor com a intenção de validá-las. Nesse momento, o público presente poderá interagir, julgando as estratégias adotadas e emitindo suas opiniões (Silva, 2020).

Na dialética de institucionalização, o professor retoma a sua ação e revela com clareza a sua intenção de ensino. O docente deve relacionar as ações dessa etapa com as que se antecederam, tirando dúvidas e levantando outros questionamentos, buscando a formulação do saber produzido pelos discentes (Lima, 2019).

No caso da SD3, cabe ao professor expor que a razão que associa a distância percorrida e o tempo do percurso expressa uma taxa de variação que é denominada de velocidade média. Além disso, o professor deve recordar a definição de grandezas direta e

inversamente proporcionais, citando exemplos por meio do problema, inclusive, mostrando como alterações nas equações da janela “Modelo Matemático” modificam as simulações geradas no *Modellus*.

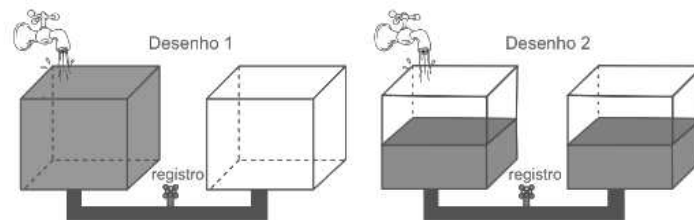
4.4 Situação Didática 4

A Situação Didática 4 (SD4) tem como objetivo, a partir de uma modelagem no software *Modellus*, possibilitar a relação da proporcionalidade com a noção de volume, mais especificamente com o volume de um prisma quadrangular regular.

A SD4 utilizou um problema do Boletim Pedagógico do SPAECE 2013. Segundo o documento, o item avalia a habilidade dos estudantes de resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de um cubo. O item, que pode ser visto no Quadro 4, obteve apenas 19% de acerto pelos estudantes.

Quadro 4 – SD4: Questão do Boletim Pedagógico do SPAECE

(M120179ES) Duas caixas d'água iguais e cúbicas, cujas dimensões medem 4 dm, foram instaladas no sistema de vasos comunicantes, ligadas por canos no fundo. Esse sistema iguala o nível de água das duas caixas. Entre as caixas existe um registro que permite a passagem de água quando aberto. Com esse registro fechado a primeira caixa d'água foi completamente cheia (Desenho 1). Depois o registro foi aberto e o nível da água nas duas caixas equilibrou (Desenho 2), conforme ilustração abaixo.



Desprezando a quantidade de água nos canos, o volume de água em cada uma das caixas após o equilíbrio no nível da água ilustrado no desenho 2 é

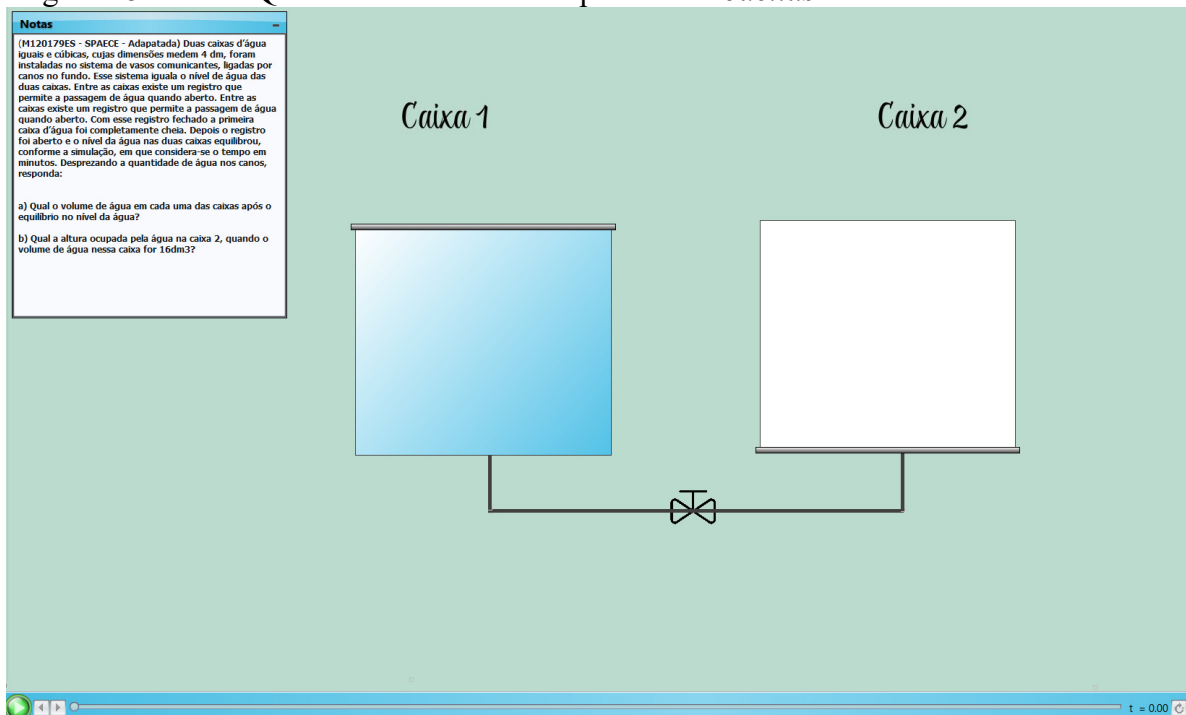
- a) 8 dm^3
- b) 16 dm^3
- c) 32 dm^3
- d) 64 dm^3
- e) 128 dm^3

Fonte: Ceará (2013).

Através do item mostrado acima, adaptado e modelado no software *Modellus*, tem-se como hipótese que os estudantes conseguirão utilizar a noção de proporcionalidade para resolver um problema que envolve o cálculo do volume de um cubo. O item adaptado e sua

visualização no *Modellus* podem ser visualizados na figura abaixo.

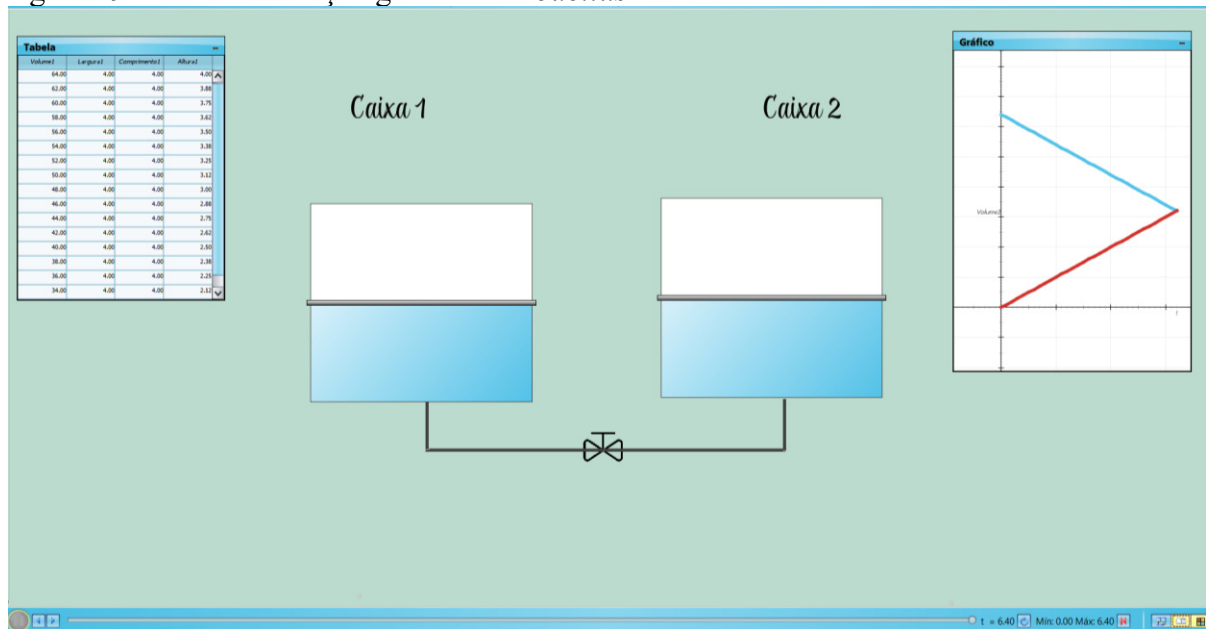
Figura 28 – SD4 - Questão do SPAECE adaptada no *Modellus*



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Para modelar a questão no software *Modellus*, o docente deve inserir na janela “Modelo Matemático” as equações de acordo com as informações do problema. O professor contribui, através da simulação, com a visualização do equilíbrio do volume de água nas caixas. Também será proporcionado aos estudantes, através do software, a representação visual dos dados do problema por meio de um gráfico e de uma tabela. A janela “Modelo Matemático” deve ser minimizada durante as três primeiras etapas da TSD, conhecidas como situações adidáticas (Almouloud, 2007).

Com a visualização da simulação, da tabela e do gráfico no software *Modellus*, observada na Figura 29, entende-se que os estudantes podem perceber a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas e usar esse conhecimento para solucionar um problema que envolve a noção de volume.

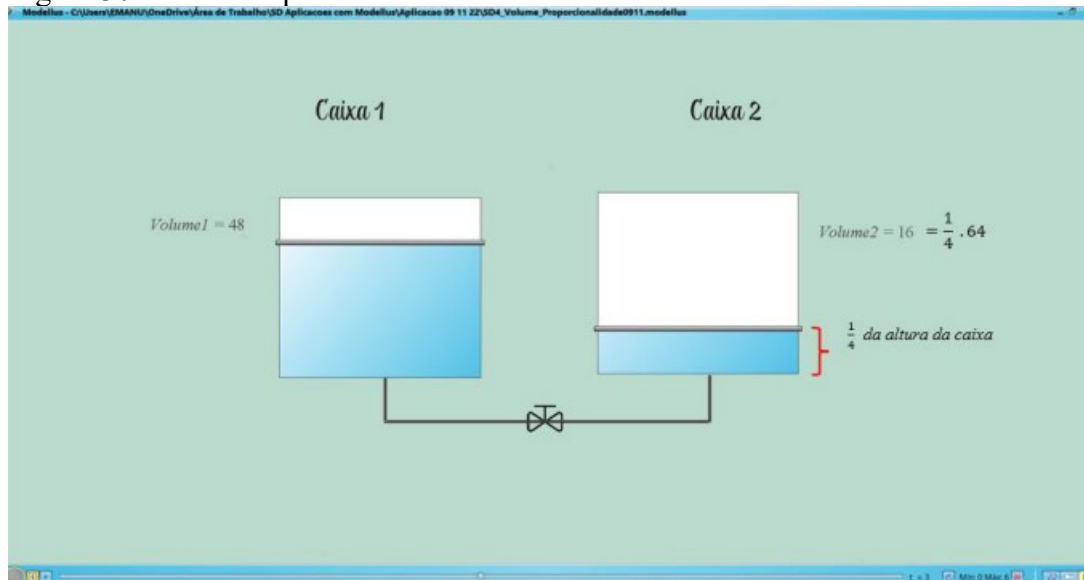
Figura 29 – SD4: Simulação gerada no *Modellus*

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Na etapa de ação, o estudante inicialmente realiza a leitura do problema e busca compreendê-lo. Nesta fase da SD, o estudante deve ser responsável por solucionar cada item proposto depois de ler o enunciado e de visualizar a simulação, o gráfico e a tabela no software *Modellus*.

Na SD3 espera-se que os estudantes verifiquem a proporcionalidade entre o volume e as medidas da caixa d'água, chegando à conclusão de que para encontrar o equilíbrio do nível da água nas caixas 1 e 2, basta calcular o volume de água nas caixas, quando o nível de água na caixa equivale à metade da altura da caixa d'água. Somando-se a isso, espera-se que os estudantes percebam que, como o volume da água na caixa é diretamente proporcional à altura ocupada pela água nas caixas, logo, se o volume da água corresponde a $\frac{1}{4}$ do total da capacidade da caixa, então a altura ocupada pela água também corresponde a $\frac{1}{4}$ da altura da caixa, conforme mostra a Figura 30.

Figura 30 – SD4: Proporcionalidade no cálculo do volume das caixas



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Na situação de formulação, o estudante poderá perceber que o gráfico construído no *Modellus* descreve os volumes de água nas duas caixas até entrarem em equilíbrio, igualando-se. Sendo assim, poderão utilizar a fórmula do volume (V) de um prisma quadrangular, $V = l \cdot c \cdot a$, em que l , c e a são, respectivamente, a largura, comprimento e altura da caixa d'água para calcular o volume de água nas caixas no equilíbrio. Como o volume de água nas caixas dependem apenas da altura da água na caixa, neste caso, $V = 16 \cdot a$, já que $l = c = 4$.

Observando a proporcionalidade entre as grandezas volume e altura da água, os estudantes poderão concluir que, quando o volume de água na caixa é de $32dm^3$, ou seja, metade da capacidade da caixa, a altura da água na caixa é $2dm$, ou seja, a metade da altura da caixa d'água. Ainda usando a proporcionalidade, os estudantes poderiam concluir que, se o volume da caixa, em decímetros cúbicos, for igual a 16, ou seja, $\frac{1}{4} \cdot 64$, então a altura de água na caixa seria 1, isto é, $\frac{1}{4} \cdot 4$.

Na dialética de validação, espera-se que os estudantes consigam validar o percurso que utilizaram para chegar à solução do problema. Nesse sentido, o estudante deverá convencer os colegas e o professor, utilizando a linguagem Matemática, que o procedimento adotado para resolver o item está correto (Lima, 2019).

A etapa de institucionalização “é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores” (Santos, Alves, 2017, p. 463). Nesse caso, o professor poderá recordar aos estudantes a definição de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas.

Ao utilizar a definição de proporcionalidade para solucionar o problema, o professor contribui para com as diversas formas de comunicação do conceito de proporcionalidade, ajudando os estudantes a adotarem novas estratégias para resolver problemas que o envolvem (Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2017).

O docente pode utilizar a fórmula para o cálculo do volume de um prisma quadrangular regular para explorar o conceito de proporcionalidade. Pode também associar a equação $V = l \cdot a$, em que V é o volume ocupado pela água e a é a altura da água na caixa, estabelecendo, a partir da fórmula para o cálculo do volume de um prisma retangular regular, uma relação do conceito de proporcionalidade com a noção de volume. Nesse sentido, também se pode falar da diferença entre a capacidade e o volume, explicando como é feita a relação entre esses dois conceitos, evidenciando a conexão da proporcionalidade com outros conceitos estudados na Matemática.

5 EXPERIMENTAÇÃO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da terceira etapa da ED, a experimentação. Inicialmente, são apresentados os participantes e o *locus* da pesquisa, juntamente com a descrição das condições de realização da pesquisa, o cronograma das atividades e os procedimentos para a coleta de dados. Ademais, este capítulo descreve o comportamento dos estudantes com base na TSD e nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização.

5.1 *Locus* e participantes da pesquisa

O *locus* da pesquisa foi a Escola Municipal Francisco Domingos da Silva, vinculada à Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza. A autorização para a realização da pesquisa na escola ocorreu mediante a assinatura do Termo de Autorização da Escola (APÊNDICE F). Inicialmente, a escola exerceu a função de Centro Integrado de Educação e Saúde (CIES); no entanto, em 26 de setembro de 1994, suas atividades voltaram exclusivamente para atividades educacionais. Oficialmente ganhou a denominação de escola pelo Decreto nº 9629, de 19 de abril de 1995, e Ato de criação sob o nº 10593. Atualmente, oferta vagas nos turnos da manhã e tarde para o ensino regular, e à noite, direcionadas à Educação de Jovens e Adultos (EJA) para o Ensino Fundamental.

Com relação à educação digital, a escola recebeu recentemente equipamentos novos, como Chromebooks, para compor a Sala de Inovação. Esse espaço, fruto da parceria entre a prefeitura municipal de Fortaleza e a Google for Education, visa dispor de uma estrutura que permita a realização de ações pedagógicas com o uso das novas tecnologias. Nesse sentido, gradualmente, o contato dos estudantes com computadores ou notebooks tem aumentado na escola, por meio de ações dos professores em projetos próprios da escola ou daqueles direcionados pela secretaria de educação do município. A escola também disponibiliza três notebooks para uso dos professores em atividades escolares, geralmente aquelas que não necessitam de conectividade com a internet, e que foram utilizados na etapa de experimentação da pesquisa.

Participaram desta pesquisa 6 (seis) estudantes com idade entre 13 (treze) e 14 (quatorze) anos que estavam cursando o 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Francisco Domingos da Silva. Na experimentação foram considerados estudantes dessa etapa escolar devido ao fato de que as situações didáticas elaboradas se basearam em descritores do

9º ano utilizados pela avaliação do SPAECE. Quanto à quantidade de participantes, foi definida a partir da contagem de *notebooks* disponíveis pela escola.

Os critérios para escolha dos alunos foram: frequentar assiduamente as aulas; ter disponibilidade para vir à escola no contraturno, no caso, no horário diurno em que não estivessem participando das aulas regulares; aceitar participar da pesquisa e estar autorizado pelo responsável através da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (APÊNDICE E), conforme propõe a Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde, vinculada ao Ministério da Saúde, por meio da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Assim, participaram da pesquisa dois estudantes do sexo masculino e quatro estudantes do sexo feminino. Dentre eles, apenas um estudante afirmou possuir um computador e utilizá-lo para pesquisas e estudos. Nenhum dos estudantes conheciam o software *Modellus*, nem haviam experienciado a utilização de outro software na aprendizagem de Matemática. Contudo, a maioria dos estudantes confirmou que utiliza *smartphones* para momentos de estudos, fazendo pesquisas e assistindo vídeos sobre os conteúdos vistos em sala de aula.

Considera-se, nesse sentido, que a participação dos estudantes nesta pesquisa pode contribuir para aprimorar os processos de aprendizagem com trabalhos em equipe, a partir de situações didáticas baseadas na TSD, que utilizam um software de modelagem para auxiliar na resolução de problemas sobre a proporcionalidade. Além disso, entende-se que a experiência com instrumentos e técnicas de coletas de dados pode beneficiar o desenvolvimento acadêmico dos estudantes.

5.2 Procedimentos e instrumentos de coletas de dados

Os procedimentos adotados na etapa de experimentação da pesquisa podem ser divididos em três momentos: divulgação da pesquisa aos participantes, aplicação das situações didáticas e aplicação de um questionário. No primeiro momento, a pesquisa foi apresentada aos participantes, destacando a temática do estudo e os objetivos. Também foram esclarecidas as condições de participação na pesquisa, apresentando os benefícios e os riscos de fazer parte dela. Nesse sentido, ocorreu, no primeiro encontro, a entrega dos termos de assentimento e consentimento, explicando que os estudantes deveriam confirmar o desejo de participar da pesquisa por meio da assinatura do termo de assentimento (APÊNDICE D) e que deveriam comprovar a permissão dos pais ou representantes legais por meio da assinatura do termo de consentimento (APÊNDICE E). Sendo assim foram estabelecidas as considerações:

- a) As atividades seriam desenvolvidas em duplas;
- b) As duplas receberiam as atividades impressas, com espaço suficiente para registrar as soluções dos problemas (ver APÊNDICE D);
- c) A pesquisadora não forneceria informações adicionais sobre os problemas propostos aos participantes, ou seja, eles deveriam utilizar apenas o enunciado da questão para coletar os dados do problema;
- d) Os participantes deveriam realizar o registro de modo que fosse possível compreender as estratégias discutidas e as escolhidas para solucionar o problema;
- e) Os estudantes poderiam utilizar o software *Modellus* na busca pela solução dos problemas propostos;
- f) As duplas poderiam trocar informações durante a resolução dos problemas.

No segundo momento, as quatro situações didáticas que envolviam o conceito de proporcionalidade, desenvolvidas na etapa de análise a priori e concepção das situações didáticas, apresentadas no capítulo anterior, foram aplicadas com a utilização do software *Modellus* como suporte para visualização e representação dos problemas por meio de simulações, gráficos e tabelas.

No terceiro momento, foi aplicado um questionário de avaliação dos encontros (APÊNDICE C). Por meio desse questionário, pretendia-se conhecer a opinião dos estudantes sobre as situações didáticas aplicadas com o uso do *Modellus*, compreendendo a visão deles sobre as dificuldades, aprendizados e metodologias de ensino. O quadro abaixo mostra a sistematização das atividades desenvolvidas na etapa de experimentação e as datas de realização de cada atividade.

Quadro 5 – Sistematização das atividades desenvolvidas na etapa de experimentação

Encontro/ Data	Descrição da atividade
1º Encontro - 28/10/22	- Apresentação da pesquisa e dos critérios de participação; - Entrega do termo de consentimento (TCLE) e assinatura do termo de assentimento (TACE); - Estabelecimento do Contrato Pedagógico.
2º Encontro - 04/11/22	Aplicação da SD1 e SD2
3º Encontro - 08/11/22	Aplicação da SD3
4º Encontro - 11/11/ 22	Aplicação da SD4 e do questionário de engajamento

Fonte: elaborado pela autora (2023).

As situações didáticas foram construídas a partir de problemas adaptados do SPAECE, dessa forma, foram escolhidos problemas que envolviam o conceito

proporcionalidade com a possibilidade da visualização e representação no software *Modellus*, objetivando-se em cumprir o objetivo das situações didáticas propostas.

Além das atividades impressas e dos questionários de avaliação, os encontros foram registrados por meio de fotografias, filmagens e gravações de áudios, para checagem de coleta de dados no caso da pesquisadora não ter tomado nota de alguma situação relevante para a pesquisa. O propósito desses instrumentos era acarretar na pesquisadora a descrição e análise do comportamento dos estudantes diante das situações didáticas conforme a TSD e suas quatro etapas, denominadas: ação, formulação, validação e institucionalização.

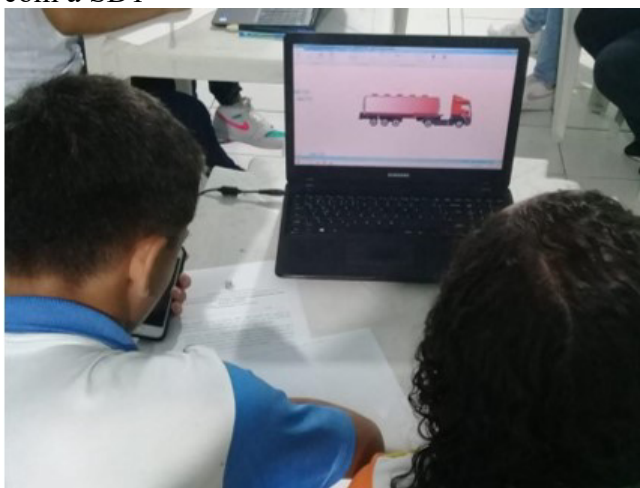
Ao discorrer sobre a fase de experimentação, os dados considerados mais relevantes foram selecionados por meio das ações dos participantes da pesquisa, doravante denominados E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

Depois de descrever as variáveis globais utilizadas para fundamentar a organização didática desenvolvida, descreve-se, a seguir, o comportamento dos estudantes durante a experimentação das situações didáticas.

5.3 Experimentação da Situação Didática 1

A Situação Didática 1 (SD1) tem como objetivo relacionar o conceito de proporcionalidade com o conceito de equação. O software *Modellus* deu suporte na resolução da situação problema. Na experimentação da SD1, os estudantes tiveram o contato com o problema tanto de maneira impressa como por meio da modelagem feita no software *Modellus*, conforme a figura 31.

Figura 31 - Primeiro contato dos estudantes com a SD1



Fonte: arquivo pessoal.

A modelagem do problema no software *Modellus* trouxe a situação problema a visualização e variados tipos de representações, por meio da simulação, do gráfico e da tabela, como pode ser visto por meio do acesso ao vídeo pelo QR Code mostrado na Figura 32.

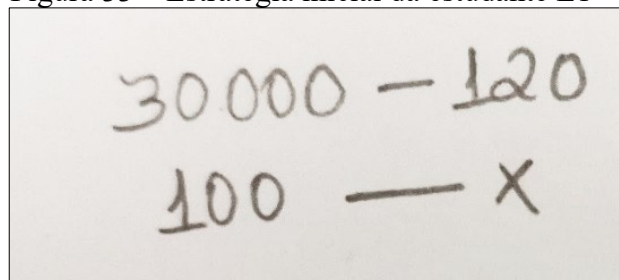
Figura 32 – Vídeo da apresentação da SD1 no *Modellus*



Fonte: arquivo pessoal.

Chamado de situação de devolução por Teixeira e Passos (2013), o momento inicial é caracterizado pela responsabilidade cedida pelo professor ao estudante, que, por sua vez, recebe o problema apresentado como um desafio e se vê como protagonista de sua aprendizagem. Nesse contexto, percebeu-se que, após a leitura do problema na folha impressa, a estudante E1 fez o seguinte registro:

Figura 33 – Estratégia inicial da estudante E1



Fonte: arquivo pessoal.

A partir desse registro, realizou-se o seguinte diálogo:

[Professora] E1, você poderia explicar o seu raciocínio?

[E1] Eu só fiz montar de acordo com a questão.

[Professora] Como você pretende prosseguir na sua resolução?

[E1] Não sei.

[Professora] O que esses números representam? Como eles se relacionam?

O diálogo foi interrompido por outros estudantes que fizeram as seguintes observações:

[E3] Em 1 minuto o caminhão despeja 250 litros de gasolina.

[E1] Como você viu isso?

[Professora] E3, você pode explicar para os seus colegas?

[E3] Quando aperta pra reproduzir (referindo-se a reprodução da simulação no Modellus), quando o tempo chega em 1, o caminhão fica com 29750 litros de gasolina.

[E4] Sim, na tabela também, quanto é 1 (apontando para a coluna que indicava o tempo) fica 250 (referindo-se a quantidade de gasolina despejada pelo caminhão).

A partir desse momento, uma observação mais atenciosa é iniciada em relação aos demais estudantes no tocante aos elementos de visualização e representação apresentados no software. Esse momento, denominado de ação, é marcado pela exploração do estudante com a atividade, com o objetivo de formular hipóteses e formular estratégias de resolução (Lablém; Bittar, 2018).

A fim de estimular os estudantes a prosseguir com a investigação iniciada pelos participantes E1, E3 e E4, a professora perguntou se os demais alunos tinham alguma observação a acrescentar a partir da observação da simulação e da tabela construídas no *Modellus*.

[Professora] Alguém tem algo a acrescentar nas observações feitas pelos estudantes E1, E3 e E4?

[E6] Se em 0,5 minutos despeja 125 de gasolina, então em 0,1 despeja 25 litros.

[Professora] Como você pode explicar esse raciocínio aos colegas? Como essa informação pode ajudar?

[E6] Ele gasta 0,4 minutos para despejar 100 litros (referindo-se ao tempo que o caminhão gasta para despejar 100 litros de combustível).

[E2] É, porque a cada 0,1 é 25 litros.

Professora: Porque isso ocorre?

[E5] Porque $25+25+25+25 = 100$ e $0,1+0,1+0,1+0,1 = 0,4$.

Professora: O que garante que esse raciocínio está correto? Qual conceito matemático está associado a ele?

[E3] É porque o caminhão sempre despeja a mesma quantidade (referindo-se a quantidade de gasolina despejada pelo caminhão).

A estudante E6 complementou a afirmação do estudante E3 ao afirmar que 250,

quociente da divisão de 30.000, que representava o volume inicial de gasolina no tanque do caminhão, por 120, o tempo, dado em minutos, era equivalente à quantidade de combustível despejada pelo caminhão ao fim de cada minuto.

As características desses diálogos marcam a etapa de formulação, uma vez que esse momento “consiste na realização de escolhas com utilização de linguagem não Matemática, ocorrendo trocas de informações e a busca por novas, sendo a comunicação necessária para a ação sobre o meio com vistas à resolução do problema em questão” (Contijo; Silva; Carvalho, 2012, p. 36).

Como resultado da etapa de formulação, a dupla de estudantes E5 e E6 apresentou a solução apresentada na Figura 34.

Figura 34 – Solução da SD1 apresentada pela dupla E5 e E6

The image shows two columns of handwritten mathematical work. The left column contains a multiplication problem: $149,6 \times 250 = 29.900,0$. The right column contains a series of calculations: $30.000 \div 120 = 250$, $0,5 = 125 \text{ LITROS}$, $0,4 = 100 \text{ LITROS}$, and $120 - 0,4 = 119,6$. The final result, 119,6, is circled in red.

Fonte: arquivo pessoal.

A dupla E1 e E2 apresentou a mesma solução da dupla E5 e E6. Verifica-se que os estudantes utilizaram as informações disponibilizadas na tabela, na simulação e no gráfico, para perceber uma das propriedades aditiva da relação que associa a quantidade de gasolina derramada e o tempo, como previu-se na análise *a priori*. A dupla de estudantes E3 e E4 apresentou a solução apresentada na Figura 35.

Figura 35 - Solução da SD1 apresentada pela dupla E3 e E4

$$\begin{array}{r}
 29900 \div 250 \\
 \underline{-250} \\
 0490 \\
 \underline{-250} \\
 2400 \\
 \underline{-2250} \\
 150
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1500 \\
 \underline{-1500} \\
 0
 \end{array}$$

Fonte: arquivo pessoal.

Percebeu-se que os estudantes E3 e E4 utilizaram o método de redução à unidade para resolver o problema. Nesse sentido, calculou-se o volume de combustível despejado a cada minuto, relacionando-os proporcionalmente às grandezas tempo e volume. Obtendo-se o quociente da divisão $29\,900:250$, foi determinado o tempo em que restariam 100 litros de combustível no caminhão, ou seja, o tempo em que haviam sido despejados 29 900 litros de combustível.

Ao apresentar suas soluções, os estudantes foram estimulados a defender as suas hipóteses e explicar suas estratégias de resolução, marcando a etapa de validação, que é a fase de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade, ou não, dos argumentos apresentados à solução do problema, Neste ponto, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova” (Santos; Alves, 2017, p. 453).

Sendo assim, nessa etapa, os estudantes que apresentaram a solução mostrada na (Figura 34) expuseram que se a cada 0,1 minutos eram despejados 25 litros de combustível, então em 0,4 minutos seriam despejados 100 litros e que a diferença entre 120 e 0,4 daria o tempo necessário para que a mangueira do caminhão despejasse 29.900 litros de combustível, uma vez que em 120 minutos o caminhão estava cheio, ou seja, com 30.000 litros. Além disso, comprovaram o resultado através do produto de 119,6 e 250, pois o caminhão despejava 250 litros de combustível por minuto, como havia sido discutido nas etapas anteriores.

Para a outra solução apresentada (Figura 35), os estudantes expuseram que, através da animação, o caminhão havia despejado 250 litros de combustível em 1 minuto. Isso foi comprovado pelos estudantes por meio do quociente de 30.000 por 120. Portanto, eles explicaram que a conclusão de que após 119,6 minutos restavam 29.900 litros de combustível no caminhão veio após realizar a divisão $29.900:250$.

Feito isso, a professora iniciou a etapa de institucionalização. Esse momento é

aquele em que o docente revela suas intenções de ensino por meio da situação apresentada (Santos; Alves, 2017). Nesse sentido, utilizou-se uma equação para representar a quantidade de combustível despejado (d), em litros, em função do tempo (t), em minutos. Ou seja,

$$d = 250 \cdot t$$

Fazendo $d = 29900$ na equação, obtém-se que $t = 119,6$. A Figura 36 apresenta a solução completa apresentada aos estudantes na etapa de institucionalização da SD1.

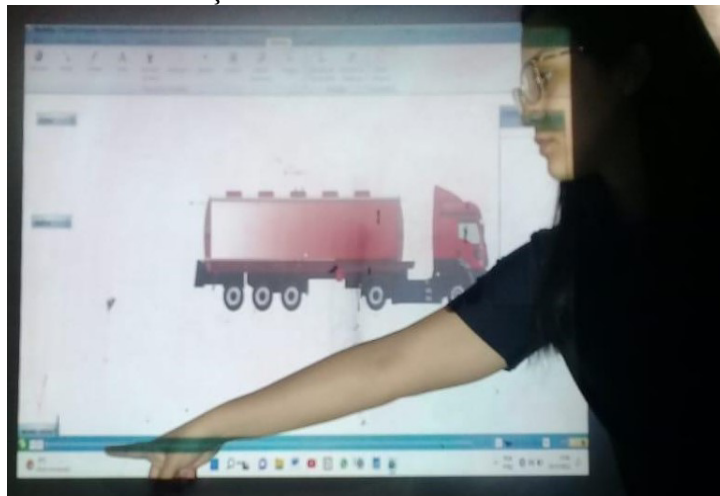
Figura 36 – Situação de Institucionalização da SD1

$30.000 \div 120 = 250 \text{ l/m}$
 $d = 250 \cdot t$
 $29.900 = 250 \cdot t$
 $t = \frac{29.900}{250}$
 $t = 119,6 \text{ minutos}$

d - quantidade de gasolina despejada
 t - tempo em minutos

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 37 - Uso do software *Modellus* na Institucionalização da SD1



Fonte: arquivo pessoal.

O uso do *Modellus* na etapa de institucionalização (Figura 37) objetivou-se em mostrar para os estudantes a construção da simulação, verificando as suposições feitas por eles durante as etapas anteriores com a formalização do conhecimento. Além disso, foi esclarecida

a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas, por meio da equação que associa a quantidade de combustível despejado e o tempo decorrido (Figura 36). Por meio do gráfico gerado pelo software concluiu-se a não proporcionalidade entre o volume de combustível no caminhão e o tempo, explicando o erro na possível estratégia apresentada inicialmente pela estudante E1, apresentada pela igualdade seguinte:

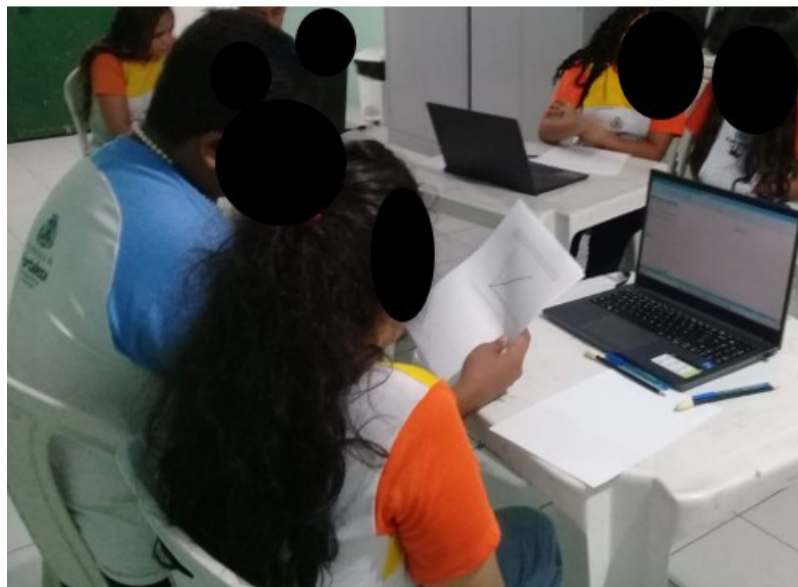
$$\frac{30000}{100} = \frac{120}{x}$$

Uma vez que esse foi o primeiro contato com os estudantes com o software *Modellus*, não foi estipulado um tempo de aplicação para a SD1. A seguir, descreve-se a experimentação da segunda situação didática, a Situação Didática 2 (SD2).

5.4 Experimentação da Situação Didática 2

O objetivo da SD2 é relacionar os conceitos de proporcionalidade e de funções lineares. Portanto, realizou-se a modelagem de um item do SPAECE no *Modellus*, que deu suporte aos estudantes na resolução do problema. Além de sua apresentação no *Modellus*, o problema foi impresso aos estudantes que é mostrado na seguinte figura:

Figura 38 - Primeiro contato dos estudantes com a SD2



Fonte: arquivo pessoal.

A esquematização do problema no software *Modellus* possibilitou a visualização de

dois gráficos e uma tabela. O vídeo que mostra a reprodução da simulação no software pode ser visto através do acesso do link pelo QR Code exibido na Figura 39.

Figura 39 - Vídeo da apresentação da SD2 no *Modellus*



Fonte: arquivo pessoal.

No momento inicial, segundo Lablém e Bittar (2018, p. 208), o problema deve ser aceito “de tal maneira que o aluno seja instigado pela atividade considerando-a como um desafio pessoal e não como uma obrigação imposta ao professor”. Esse momento é denominado por Brousseau (2008) como o componente de devolução.

Após a devolução dos participantes, uma das estudantes, a E2 inicia a observação do gráfico construído pela caneta no software *Modellus*. Ela observa também a tabela composta pelo software e, por meio da barra de progresso, associa os elementos da tabela com as coordenadas do gráfico da caneta.

[Professora] O que você observou E2?

[E2] O gráfico tem as mesmas coisas da tabela.

Professora: Que grandezas se relacionam no gráfico e na tabela?

[E1] O preço que vai pagar e a quantidade de gasolina. Tipo, quando o volume é igual a cinco, o preço é treze reais.

Professora: Você pode descobrir o valor de um litro de gasolina a partir da tabela e do gráfico?

[E6] Ah...é só colocar o volume igual a 1 e ver quanto dá o preço.

Esse diálogo, que permite verificar envolvimento com a atividade e a elaboração das primeiras estratégias, é característico da situação de ação. Segundo Almouloud *et al.* (2004, p. 97), nessa etapa, “um verdadeiro diálogo deve instaurar-se entre a criança que age e a situação que lhe dá informações para sua ação”.

O estudante E5 afirmou ter encontrado algo interessante. Ele percebeu que o

resultado da divisão entre os elementos da segunda coluna e os da primeira, tomados linha a linha, era sempre o mesmo, 2,6. Essa observação foi registrada e pode ser vista na imagem apresentada na figura a seguir:

Figura 40 – Observação sobre a SD2 feita pelo estudante E5

The image shows a list of seven division problems written by hand, all resulting in the same quotient, 2.6:

$$\begin{array}{l} 13 \div 5 = 2,6 \\ 26 \div 10 = 2,6 \\ 39 \div 15 = 2,6 \\ 52 \div 20 = 2,6 \\ 65 \div 25 = 2,6 \\ 78 \div 30 = 2,6 \end{array}$$

Fonte: arquivo pessoal.

Quando o estudante E5 foi questionado pela professora sobre o motivo dessa razão ser sempre a mesma, ele expressa como causa a proporcionalidade. Iniciou-se, portanto, o seguinte diálogo:

[Professora] Quais grandezas do problema são proporcionais?

[E5] O valor do combustível e volume de gasolina que a pessoa quer abastecer.

[Professora] OK. Você descobriu o valor de 1 litro de gasolina?

[E5] Sim, é dois e sessenta. É só dividir.

[E6] É, quando no gráfico o volume é 1, o valor fica 2,60.

[Professora] Todos concordam com o E5 e E6?

Em concordância com os estudantes E5 e E6, as demais duplas registraram a solução exibida na Figura 41 para o primeiro item do problema.

Figura 41 – Solução apresentada pela dupla E5 e E6 para o primeiro item

Handwritten solution for the first item:

Valor a pagar = Valor da Gasolina

13 = 5

Resultado = 2,6 valor da gasolina

Long division: $13 \overline{) 30}$

10

 030
 30

 00

Fonte: arquivo pessoal.

Como solução do segundo item da questão que perguntava sobre o aumento do valor do combustível, percebeu-se que as duplas de estudantes utilizaram o mesmo método do primeiro item, conhecido como redução à unidade (Jaconiano *et al.*, 2019). A figura abaixo mostra a resolução apresentada pela dupla E1 e E2.

Figura 42 - Solução apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item

Handwritten solution for the second item:

sim, é possível. Aumentou 0,40 centavos

Long division: $15 \overline{) 19}$

15

 04

Fonte: arquivo pessoal.

O terceiro item da questão perguntava sobre a lei de formação que relacionava o preço a se pagar em função do volume de gasolina comprado, em litros. Em diálogo, os estudantes que discutiam o que era lei de formação, afirmaram que a lei de formação seria uma fórmula com associação ao valor pago e o volume de gasolina abastecida. A resposta das três duplas foi a mesma e é apresentada na Figura 43.

Figura 43 - Solução apresentada pela dupla E5 e E6 para o terceiro item

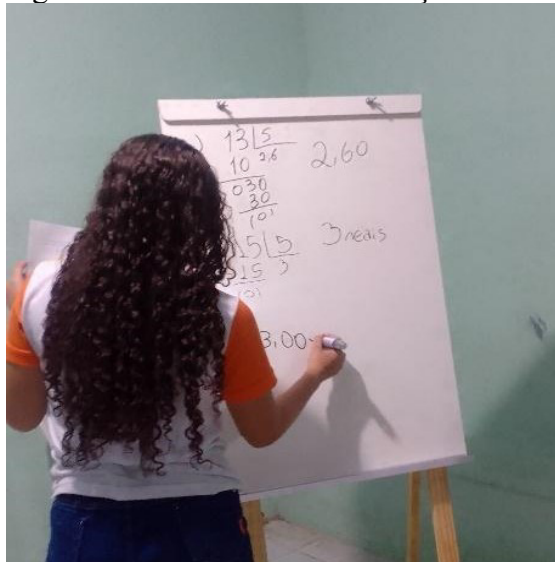
$$v = 3,00 \times h$$

o "v" que é o valor e modificado de acordo com
o "h" que é o livro.

Fonte: arquivo pessoal.

Os estudantes foram ao quadro, conforme mostra a Figura 44, a fim de defender as suas resoluções e explicar as suas estratégias, essa validação, “é caracterizado pelo uso da linguagem Matemática pelo aluno para validar suas ideias, podendo haver interação entre os alunos para julgar a veracidade e a adequação das informações” (Contijo; Silva; Carvalho, p. 36, 2012).

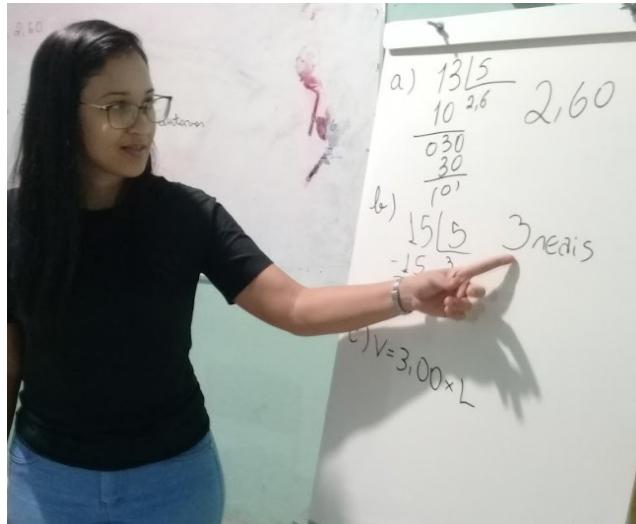
Figura 44 – Momento de Validação da SD2



Fonte: arquivo pessoal.

Evidenciou-se, que as duplas de estudantes utilizaram a mesma estratégia para resolver o problema apresentado na SD2. No momento da institucionalização, a professora/pesquisadora apresentou as suas considerações sobre a solução apresentada pelas duplas (Figura 45), que associou o conceito de proporcionalidade com o conceito de função linear, tal qual o esperado nas análises *a priori*.

Figura 45 – Momento de Institucionalização da SD2



Fonte: arquivo pessoal.

A relação entre os dois conceitos foi reforçada por meio da observação da tabela e dos gráficos apresentados no software, associando o fator de proporcionalidade e coeficiente linear da função. Ademais, colocou-se que a função linear é utilizada para representar situações que envolvem a proporcionalidade, sendo o problema apresentado na SD2 um exemplo disso. Sendo assim, descreve-se a seguir a experimentação da terceira situação didática, denominada de Situação Didática 3 (SD3).

5.5 Experimentação da Situação Didática 3

A SD3 enfatiza as relações de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas por meio de uma questão adaptada do SPAECE e modelada no *Modellus*. O software foi utilizado como suporte para resolução do problema. Os estudantes obtiveram acesso ao problema por meio do software e também por meio de uma folha impressa, na qual deveria ser utilizada para registrar as suas soluções, como mostra a Figura 46.

Figura 46 – Primeiro contato dos estudantes com a SD3



Fonte: arquivo pessoal.

Através do *Modellus* uma animação foi disponibilizada na SD3, feita a partir da inserção de um modelo matemático no software, bem como, a visualização de um gráfico e de uma tabela, como pode ser visto no vídeo apresentado por meio do acesso do link pelo QR Code mostrado na Figura 47.

Figura 47 - Vídeo da apresentação da SD2 no *Modellus*



Fonte: arquivo pessoal.

Após o primeiro contato dos estudantes, por meio da leitura do problema, houve a interação dos estudantes com as representações trazidas no software *Modellus*. De acordo com Alves e Dias (2018, p. 107) “os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperte o interesse dos mesmos”. Portanto, na

SD3, isso foi percebido desde o primeiro diálogo, que mostra que os estudantes tentavam compreender melhor a situação, observando os elementos do software e propondo uma estratégia.

[E4] O carro para em 30 quilômetros (afirmando sobre a simulação).

[Professora] Porquê você acha que isso ocorre?

[E3] A distância?

[E4] É. Quando chega em 3 quilômetros o consumo de gasolina é 3 litros. Na questão ele diz 3 litros (referindo-se ao primeiro item do problema).

[E1] Quando marca 30 quilômetros na distância, o tempo marca 0,5, mas não sei se é em minutos ou em segundos.

[E6] Acho que é hora, porque 60 quilômetros em uma hora, então em meia hora o carro anda 30 quilômetros. Então 0,5 horas são 30 minutos.

Esse momento dialógico iniciou-se a partir da reprodução da simulação no *Modellus*. Nesse momento, a pesquisadora estimulou os estudantes a observarem a tabela apresentada no software. Através dessa sugestão e por meio da interação das duplas, percebeu-se que os demais estudantes puderam compreender o raciocínio do estudante E6.

[E2] Entendi. Com a tabela é mais fácil.

[E6] Se eu dividir a distância pelo tempo vou ter a velocidade, eu acho.

[E1] Então vai ter que aumentar a velocidade (referindo-se ao item b da questão).

[E2] Se ele aumentar a distância tem que aumentar a velocidade pra chegar no mesmo tempo.

[Professora] Tem que aumentar pra quanto?

[E6] Tem que ser o dobro da distância.

[Professora] Porquê?

[E6] É porque a velocidade é medida por hora, mas ele quer a metade do tempo.

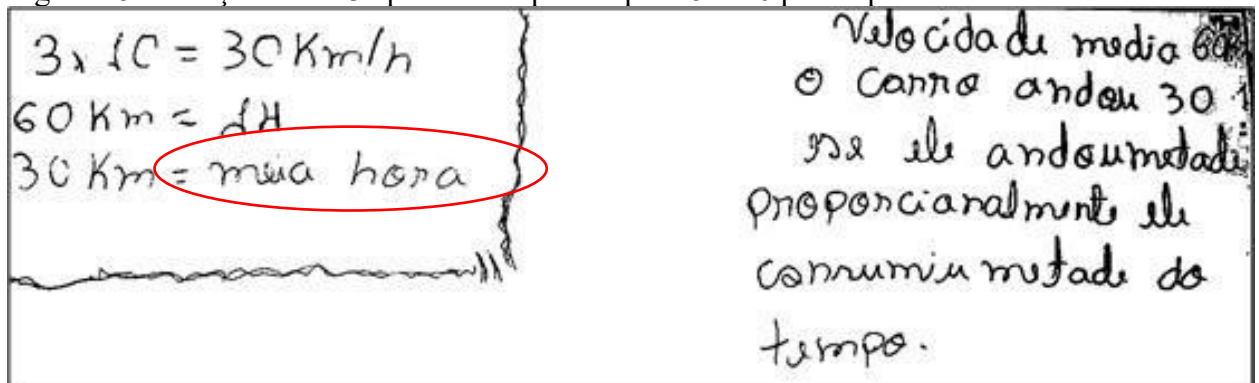
[Professora] Quais grandezas vocês estão relacionando?

[E5] O tempo e a distância da tabela.

As discussões realizadas permitiram às duplas a compreensão das grandezas envolvidas no problema, permitindo uma interpretação correta do problema e a elaboração de uma solução, mesmo não obtendo uma conclusão formal, utilizando o rigor matemático ou a linguagem matemática. O momento descrito caracteriza o momento de formulação, já que essa etapa da TSD tem o objetivo de trocar conhecimentos, explicitando estratégias e ferramentas utilizadas, por meio da interação entre os estudantes (Almouloud *et al.*, 2004).

Após esse momento, a dupla de estudantes E5 e E6 apresentou sua solução para o problema envolvido na SD3. A resposta dada pela dupla pode ser vista na Figura 48.

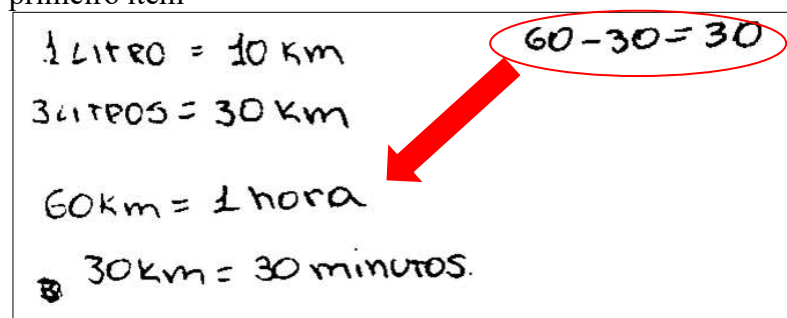
Figura 48 - Solução da SD3 apresentada pela dupla E5 e E6 para o primeiro item



Fonte: arquivo pessoal.

Diante do diálogo e da solução apresentada no papel pela dupla E5 e E6 percebeu-se a utilização do *Modellus* como ferramenta de visualização. Dessa forma, os estudantes elaboraram a solução do problema, com a validação das hipóteses a partir da compreensão da proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. Sendo assim, a solução (dupla E1 e E2) utilizou uma das propriedades da proporção, tal qual da dupla E5 e E6 no problema envolvido na SD1.

Figura 49 - Solução da SD3 apresentada pela dupla E1 e E2 para o primeiro item



Fonte: arquivo pessoal.

Quando questionados sobre a solução, os estudantes explicaram a razão $\frac{1}{10}$ como uma taxa que relaciona o consumo do carro por quilômetros rodados e afirmaram que a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo e que com isso chegaram à conclusão que o professor demorou meia hora, ou seja, 30 minutos, para chegar até a escola.

Para o segundo item da questão, as duplas formadas pelos estudantes E3 e E4 e pelos estudantes E5 e E6 apresentaram a mesma solução. No entanto, percebeu-se que as estudantes E1 e E2 apresentaram uma solução diferente. As figuras seguintes mostram as soluções apresentadas pelas duplas para o item.

Figura 50 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item

$$30 \text{ km} + 1 \text{ km} = 31 \text{ km}$$

$$60 \text{ km} = 1 \text{ hora}$$

$$30 \text{ km} = \del{30 \text{ minutos}} 30 \text{ minutos}$$

$$62 \text{ km} - 31 \text{ km} = 31 \text{ km} = 30 \text{ minutos}$$

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 51 – Solução da SD3 apresentada pela dupla E5 e E6 para o segundo item

a distância aumentou 1 km passou de 30 km para 31 km.
 a velocidade aumentou de 60 km/h para 62 km/h
 a ~~distância~~ ^{tempo} continua a mesma, o aumento foi só na
 velocidade

Fonte: arquivo pessoal.

Quando questionados sobre as soluções apresentadas os estudantes explicaram da seguinte forma:

[E1] Fazendo 62-31 eu tenho 31, que é a distância em meia hora. Que é pra ser.

[Professora] E o que representam 62 e 31 na sua subtração?

[E1] A distância. 62 quilômetros menos 31 quilômetros.

[Professora] Como você concluiu que a velocidade teria que aumentar?

[E1] Porque o tempo tem que ser o mesmo, sendo que a distância aumentou.

[Professora] E qual deve ser a nova velocidade?

[E1] 62.

[Professora] Porque? Você poderia explicar melhor?

[E1] 62 é o dobro de 31. Tem que ser um número que seja o dobro.

[Professora] Porque?

[E1] Se o carro anda 60 quilômetros em uma hora, ele anda 30 quilômetros em 30 minutos. Se ele aumentar pra 31 quilômetros em 30 minutos, ele tem que ir com 62 km/h.

[Professora] Vocês teriam alguma contribuição para dar as observações feitas pela aluna E1?

[E5] Tem que aumentar pra 62 pra ter a proporcionalidade, porque é o dobro.

[Professora] Você se refere a quais grandezas? Velocidade, tempo, distância percorrida, consumo de gasolina?

[E5] A velocidade e a distância.

[Professora] Então a velocidade teria que ser o dobro da distância? Porque?

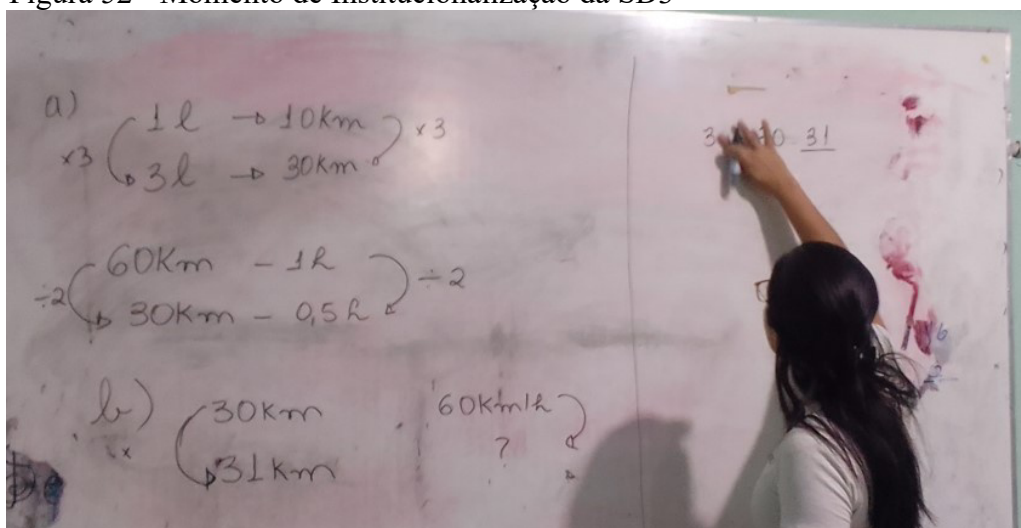
[E5] É. Porque ele quer que seja em meia hora. Então tem que ser o dobro.

A apresentação das soluções e a explicação dos estudantes, que responderam os

questionamentos feitos pela pesquisadora marcou o momento de validação. Já que a etapa de validação busca que o estudante justifique suas estratégias, tentando convencer os demais estudantes e o professor de que a sua solução é válida (Oliveira, 2019).

Na etapa de institucionalização a professora apresentou uma solução diferente da apresentada pelos estudantes, chamando atenção para as relações direta e inversamente proporcionais entre as grandezas citadas no problema. A solução dada no momento de institucionalização pode ser vista na Figura 52.

Figura 52 - Momento de Institucionalização da SD3



Fonte: arquivo pessoal.

A professora utilizou a definição de grandezas diretamente e inversamente proporcionais na solução dos itens da questão. Nesse sentido, o aumento de um quilômetro no percurso foi explicado com o produto da seguinte expressão:

$$30 \cdot \frac{31}{30} = 31$$

Pois uma vez que a velocidade e a distância percorrida são grandezas diretamente proporcionais, então a velocidade é também multiplicada por trinta e um trinta avos, obtendo assim, a velocidade de 62km/h.

Na etapa institucionalização, o software *Modellus* auxiliou na amostragem de gráficos e na tabela os pares ordenados que associavam a distância percorrida e o tempo, além de consumo de combustível e a distância percorrida, com a associação entre os conceitos trazidos pelos estudantes durante a resolução e a noção de função linear. O software também foi utilizado para exemplificar as mudanças na simulação a partir da alteração da velocidade do

carro, reforçando a ideia de proporcionalidade inversa das grandezas velocidade e tempo. A subseção a seguir descreve a experimentação da última situação didática aplicada, a Situação Didática 4 (SD4).

5.6 Experimentação da Situação Didática 4

A SD4 pretende relacionar o volume de um poliedro regular com a noção de proporcionalidade. Nesse sentido, se utilizou uma questão do SPAECE que foi adaptada e teve sua modelagem feita no software *Modellus*.

Além da visualização do problema no software, os estudantes receberam a versão impressa do problema. O primeiro contato dos estudantes com o problema foi registrado por meio de uma fotografia e pode ser observado na Figura 53.

Figura 53 – Primeiro contato dos estudantes com a SD3



Fonte: arquivo pessoal.

O *Modellus* apoiou os alunos na resolução do problema, permitindo a modelagem do problema com animação, gráfico e tabela. Os resultados podem ser vistos no vídeo acessível por meio do QR code na Figura 54.

Figura 54 - Vídeo da apresentação da SD2 no *Modellus*



Fonte: arquivo pessoal.

No início, os estudantes tiveram dificuldade na compreensão do problema matemático, limitando-se a lê-lo. Posteriormente, fizeram perguntas como "o que é equilíbrio?" e "como determinar o volume das caixas?". No entanto, demonstraram envolvimento, refletindo seu comprometimento em relação ao problema apresentado pelo professor para aprendizado (Pommer, 2013).

Os estudantes foram estimulados a observarem, simultaneamente, a tabela e a animação apresentadas no *Modellus*. Após esse momento, os estudantes foram estimulados a observarem também o gráfico no software. Iniciou-se, nesse momento, o seguinte diálogo:

[Professora] O que vocês puderam observar no software?

[E3] A água nas caixas vão se igualando.

[E1] A água sai da caixa 1 e vai pra caixa 2, até ficarem iguais.

[Professora] Qual o volume inicial de água na caixa 1?

[E6] 64.

[Professora] Isso, 64 decímetros cúbicos. E da caixa 2?

[E3] Zero, porque estava seca.

[Professora] E na tabela vocês observaram algo interessante que queiram compartilhar?

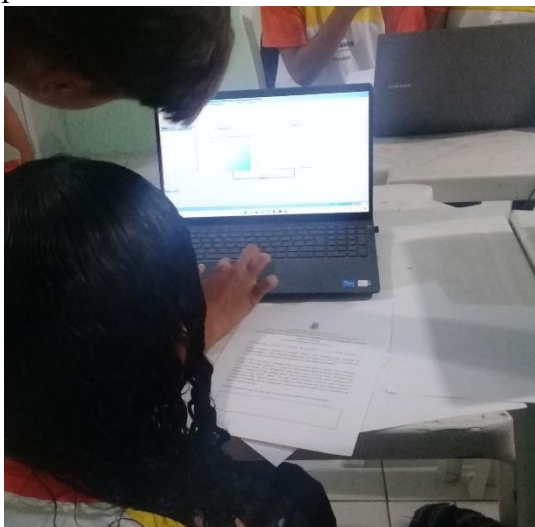
[E2] Na tabela tem a largura, o comprimento, a altura e volume da caixa 1.

Professora: Porque a altura da caixa varia? Isso é mostrado na animação?

[E4] Não é a altura da caixa, é o nível da água que varia.

No diálogo, a pesquisadora notou que o estudante E4 entendeu a variável: o nível da água na caixa d'água. Alguns colegas confundiam o nível com a altura das caixas, mas E4 ajudou a esclarecer com o auxílio de uma tabela no software.

Figura 55 – Estudante explicando o problema na SD4



Fonte: arquivo pessoal.

A Figura 55 mostra o momento em que o estudante E4 explicou a diferença entre a altura da caixa e o nível da água na caixa. O estudante explicou, por meio da tabela, que a altura da caixa permanece a mesma, 4 decímetros, “já o nível da água na caixa muda”, disse o estudante E4 ao dar a sua explicação para a dupla E1 e E2.

Após esse momento, os estudantes iniciaram outro diálogo que os fizeram chegar a uma estratégia.

[E2] Como se calcula o volume?

[E4] Multiplicando quatro vezes quatro vezes quatro, que é a altura, largura e comprimento da caixa.

[E5] A caixa 1 começa com 64 de volume, no final fica com 32, porque divide por 2.

[Professora] Porque divide por 2?

[E5] Porque fica em equilíbrio, o mesmo tanto pra cada caixa.

As três duplas apresentaram a mesma solução para o primeiro item do problema. Observou-se, a partir do diálogo, que os estudantes deduziram a fórmula do volume de um prisma quadrangular regular a partir da observação da tabela. O gráfico apresentado no *Modellus* foi usado pelos estudantes para explicar o equilíbrio de água nas caixas. Na parte superior da Figura 56 é mostrado um registro feito pelos estudantes E5 e E6, logo abaixo é apresentada a solução da dupla formada pelos estudantes E3 e E4.

Figura 56 – Solução da SD4 apresentada para o primeiro item

$$64 = 4 \times 4 \times 4$$

$64 \div 2 = 32$

$32 \quad 32$

4.00
 4.00
 $8.00 =$

largura x comprimento x altura = que do 64
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ o volume de equilibrio em cada
 Caixa seria 32 dm^3 .

Fonte: arquivo pessoal.

O segundo item do problema perguntava a altura do nível da água quando a quantidade de água na caixa 2 era igual a 16 dm^3 . A estudante E3 foi a primeira a apresentar uma resposta.

[E3] A altura é 1dm.

[Professora] Como você concluiu? Pode explicar para seus colegas?

[E3] Na caixa cheia a altura da água é 4dm. Quando a caixa tá pela metade a altura é 2dm, dividido por dois. Então quando o volume é 16 a altura divide por dois de novo, aí fica 1dm.

[E4] Pra cada 16 aumenta 1 na altura, né?

[Professora] E5, você poderia explicar seu raciocínio?

[E4] É porque $16 + 16 + 16 + 16$ é igual a 64.

[E3] O volume foi dividido por 4, então a altura também divide por 4.

[Professora] Porque isso acontece? Saberiam explicar?

[E6] Porque são proporcionais.

[Professora] Quem são proporcionais?

[E3] A altura e o volume.

A estratégia de solução da dupla E5 e E6 foi a mesma da dupla E3 e E4. A dupla E1 e E2 deduziu pela fórmula do volume de um prisma quadrangular regular que a altura teria que ser igual a 1dm para que o volume de água na caixa fosse igual a 16 dm^3 . A Figura 57 e a Figura 58 mostram duas soluções, a primeira apresentada pela dupla E1 e E2 e a outra apresentada pela dupla E3 e E4.

Figura 57 – Solução apresentada pela dupla E1 e E2 para o segundo item da SD4

$32 - 2$
 $16 - 1$
 $L = 4$
 $C = 4$
 $A = 1$
 $4 \times 4 \times 1 = 16 \text{ m}^3$
 SÓ A ALTURA MUDA PORQUE É O TANTO DE VOLUME DA CAIXA.

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 58 – Solução apresentada pela dupla E3 e E4 para o segundo item da SD4

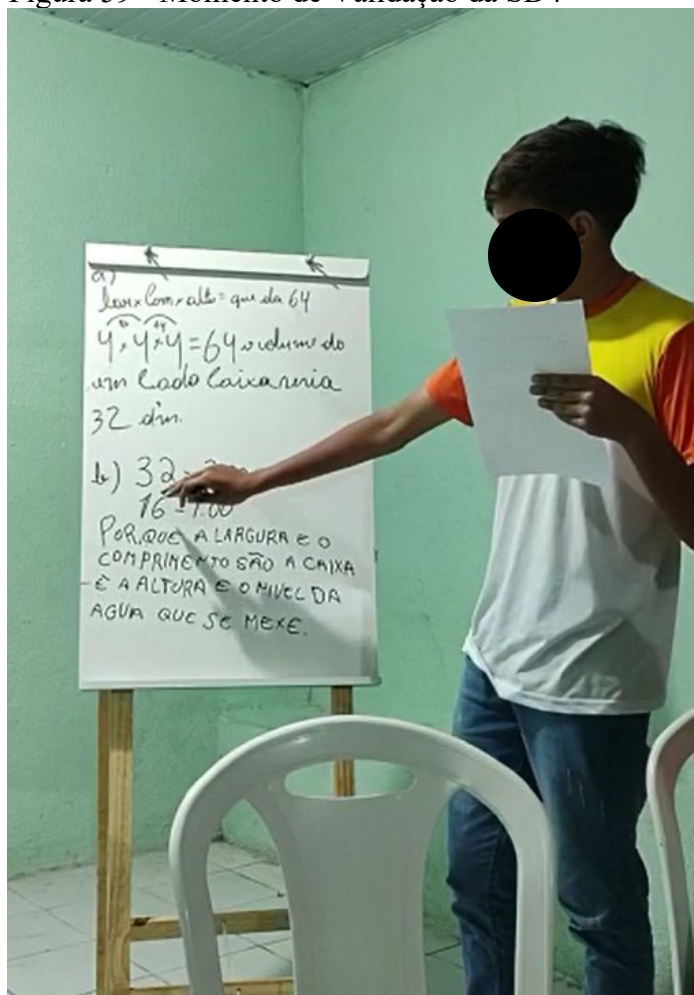
$64 - 4$
 $32 - 2$
 $16 - 1$

A largura e comprimento não se modificam porque é o tamanho da caixa.
 a Altura e o nível da água.

Fonte: arquivo pessoal.

O estudante E4 aceitou apresentar sua solução no quadro para os demais estudantes. Ele explicou a proporcionalidade entre o volume e a altura da água na caixa. Nesse sentido, E4 falou que a cada 16 dm^3 de água que entrava na caixa 2 subia o nível da água em 1 dm . O estudante também explicou que o volume da caixa era de 64 dm^3 , não mudava, e que no problema a variável envolvida era a altura do nível da água. Esse momento, denominado validação, foi registrado e é mostrado na Figura 59.

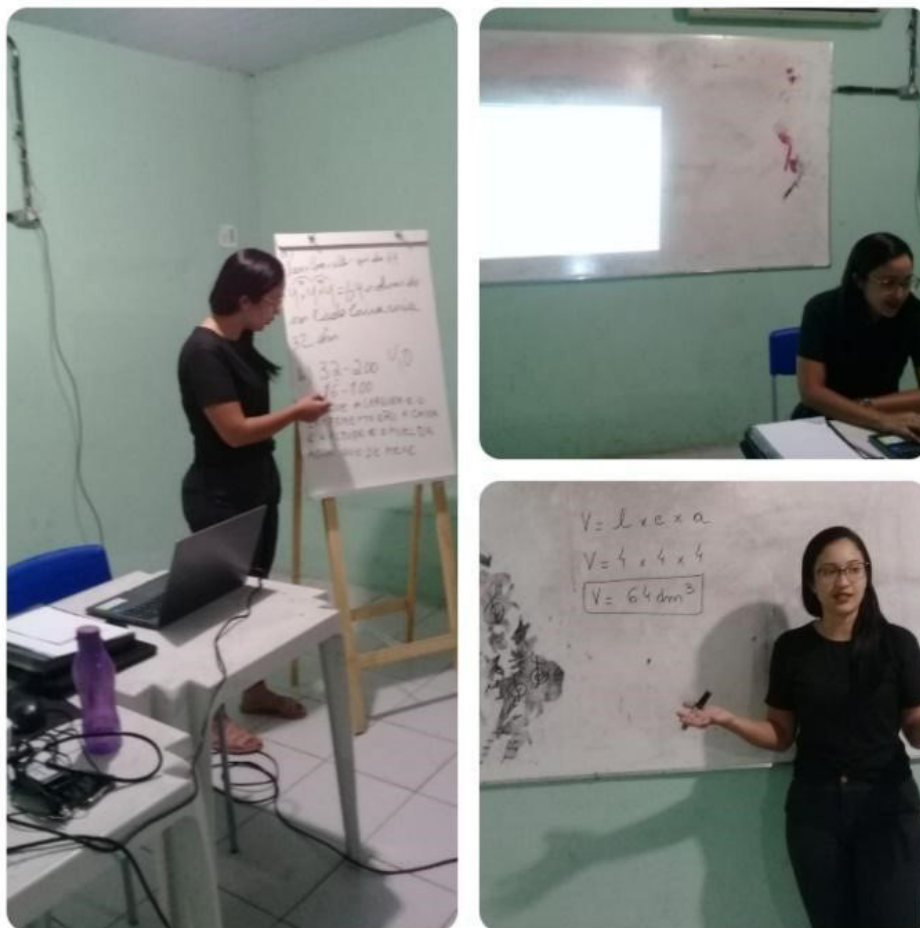
Figura 59 - Momento de Validação da SD4



Fonte: arquivo pessoal.

Na última etapa, denominada de institucionalização (Almouloud, 2007), a docente organizou as informações trazidas pelos estudantes e definiu os conceitos de volume e de grandezas diretamente proporcionais, relacionando-os por meio da fórmula do volume de um prisma quadrangular regular (Figura 60). A professora também apresentou a construção da simulação no software *Modellus* através da inserção de equações na janela modelo matemático, discutindo as ideias de proporcionalidade e variável, trazidas pelas estudantes no momento da resolução da questão.

Figura 60 - Momento de Institucionalização da SD4



Fonte: arquivo pessoal.

No último encontro aplicou-se um questionário com os estudantes. Esse instrumento foi utilizado para conhecer a opinião dos estudantes sobre as atividades desenvolvidas e sobre o software utilizado nos encontros. As respostas dos estudantes no questionário encontram-se no final deste escrito, no APÊNDICE A. Apresenta-se, no capítulo a seguir, a análise *a posteriori* e validação, última etapa da ED, utilizada como metodologia de pesquisa neste estudo.

6 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Esse capítulo apresenta uma análise *a posteriori* e validação, construída a partir dos dados obtidos na etapa de experimentação desta pesquisa. Almouloud e Queiroz (2018, p. 68) dizem que essa etapa “ é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo”.

A validação da engenharia, segundo Santos e Alves (2017), ocorre por meio da confrontação da análise *a priori* com o que observou-se na etapa de experimentação, o que permite considerar a reprodutividade da engenharia proposta. Adotou-se, neste estudo, a validação interna, que, segundo Laborde (2017, p. 173), realiza-se “comparando os processos de solução esperados dos alunos na análise *a priori* e os processos observados nas salas de aula”.

Nesse sentido, durante o desenvolvimento da última etapa da ED, análise *a posteriori* e validação, buscou-se relacionar as etapas anteriores, em cada uma das SD aplicadas, a fundamentação teórica e os objetivos desta pesquisa, buscando a comprovação ou refutação das hipóteses levantadas neste estudo, com o intuito de avaliar a reprodutividade das situações didáticas elaboradas.

Na etapa de análise *a priori* levantou-se duas hipóteses em relação às situações didáticas propostas, são elas:

- a) O software *Modellus* propicia, com a visualização e a representação através de animações, gráficos e tabelas, a exploração do conceito de proporcionalidade, possibilitando, inclusive, a percepção dos estudantes sobre a relação desse conceito com outros conceitos da Matemática.
- b) Uma organização didática baseada na TSD permite que o professor conduza o comportamento dos estudantes, contudo, com a mínima intervenção, favorecendo a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento.

6.1 Análise *a posteriori* e validação da Situação Didática 1

Esperava-se, na SD1, que os estudantes elaborassem diferentes estratégias através de visualização e representação com modelagem de uma questão do SPAECE no software *Modellus*. O objetivo dessa situação didática era explorar o conceito de proporcionalidade.

Com os dados obtidos na etapa de experimentação constatou-se que a utilização das ferramentas disponibilizadas pelo software resultou em duas estratégias diferentes. Em uma das

estratégias notou-se que os estudantes utilizaram a tabela para concluir uma das propriedades da proporção, chamada por Almouloud (2020) de relações de tipo aditivo. Conforme o autor

Este procedimento leva em conta as relações entre as medidas de uma mesma grandeza. Favorece as relações do tipo aditivo. Na Educação Básica, este procedimento permite o reinvestimento das ‘decomposições aditivas’ de números inteiros (número c dado, trata-se de encontrar pares (a, b) de números tais que $c = a + b$) e introduzir o conceito de função f que verifica a seguinte propriedade: para todos os números a e b , $f(a + b) = f(a) + f(b)$ é dita aditiva (Almouloud, 2020, p. 779).

Na outra solução apresentada pelos estudantes para a questão utilizada na SD1 recorreu-se a redução à unidade, esse tipo de procedimento é apontado por Jaconiano *et al.* (2019, p. 105) como um método que “proporciona um novo olhar sobre a busca da solução de problemas que envolvem proporcionalidade, uma vez que, com uma simples maneira de pensar, o aluno se torna capaz de resolver uma infinidade de problemas de Matemática”.

Conforme previsto na análise *a priori* os estudantes utilizaram a animação e a tabela apresentadas no software, que apresentava a redução do volume do combustível no tanque do caminhão, para perceber que a mangueira utilizada para despejar o combustível tinha uma vazão de 250 litros por minuto. Além disso, as ferramentas apresentadas no *Modellus* e utilizadas pelos estudantes possibilitaram que eles concluíssem que a cada 0,1 minuto o caminhão despejava 25 litros de combustível e, portanto, em 0,4 minutos despejava 100 litros. Nesse sentido, concluíram que, se em 120 minutos o tanque ficaria vazio, então 0,4 minutos antes disso, ou seja, em 119,6 minutos o caminhão haveria despejado 29 900 litros de combustível, resultado que foi comprovado através produto de 250 por 119,6, que representa a quantidade de combustível despejado em 119,6 minutos.

Na situação de institucionalização associou-se, por meio de uma equação, o volume de combustível despejado pelo caminhão, em litros, e o tempo, em minutos. Através da equação possibilitou-se a explicação da construção da animação e dos outros elementos, como o gráfico e a tabela, gerados no software. Além disso, na institucionalização explorou-se sobre a relação de proporcionalidade ou não entre as grandezas envolvidas no problema, questionando e descartando a regra de três $\frac{30000}{100} = \frac{120}{x}$ para determinar o tempo que restavam 100 litros de combustível no caminhão. À vista disso, concluiu-se que o *Modellus* contribuiu satisfatoriamente na resolução da SD1.

6.2 Análise *a posteriori* e validação da Situação Didática 2

Na SD2 pretendia-se, com a modelagem da questão no software *Modellus*, que os

estudantes identificassem as grandezas diretamente proporcionais, no caso, o preço a se pagar pelo combustível e o volume de combustível comprado, permitindo-os associar a noção de proporcionalidade direta com a de função linear.

Percebeu-se que os estudantes utilizaram o gráfico apresentado no software, que relacionava o valor a ser pago e o volume de combustível abastecido, para concluir que o preço de um litro de gasolina na primeira situação era R\$2,60. Além disso, eles observaram por meio da tabela, que a razão entre essas duas grandezas, na ordem citada, era sempre 2,6, que despertou-os para a ideia de linearidade.

Nesse sentido, observaram que para saber o preço de um litro de gasolina na situação apresentada no segundo item, bastava escolher um par ordenado qualquer no gráfico e efetuar a divisão entre segundo e primeiro elemento deste par ordenado, onde o segundo referia-se ao valor a ser pago pela gasolina e o primeiro ao volume de gasolina abastecido. Apresentando o resultado da divisão 15:5, os estudantes concluíram que a gasolina havia aumentado R\$0,40.

Por fim, os estudantes escreveram uma equação para relacionar as grandezas proporcionais, valor a ser pago pela gasolina e o volume de gasolina abastecido. Nesse momento, percebeu-se a percepção dos estudantes sobre a ideia de variável, o fator de proporcionalidade e a linearidade. Na institucionalização reforçou-se a relação dos conceitos de função linear e de proporcionalidade. Verificou-se, por meio das estratégias utilizadas pelos estudantes, que em uma função f do tipo linear o valor $k = f(1)$ corresponde ao fator de proporcionalidade.

Segundo o Boletim Pedagógico do SPAECE, a utilização de tabelas e gráficos, associados à esquemas, auxilia na visualização da solução de problemas, deduzindo, por exemplo, contextos nos quais a proporcionalidade é direta ou inversa (Ceará, 2013). De fato, comprovou-se, por meio dos dados obtidos durante a experimentação da SD2, que a visualização dos gráficos e da tabela no *Modellus* foram utilizados como ferramentas para compreender uma situação que envolvia o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Ruiz e Carvalho (1990) afirmam que identificar a proporcionalidade como uma relação de razão constante e incluir dois pares de termos em uma proporção, que satisfazem a relação de proporcionalidade, são aspectos fundamentais para a construção da ideia de proporcionalidade. Observou-se, nessa perspectiva, que a SD2 contribuiu para a compreensão da proporcionalidade e trouxe a percepção dos estudantes para a relação dos conceitos de proporcionalidade e função linear, como desejava-se.

6.3 Análise *a posteriori* e validação da Situação Didática 3

Na SD3 utilizou-se os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. O objetivo era trazer a atenção dos estudantes para esses conceitos, por meio da observação da animação, do gráfico, tabela e controles de níveis que, por sua vez, possibilitaram a visualização e a representação do problema proposto na situação didática.

Notou-se, pela solução apresentada na SD3, que os estudantes identificaram as grandezas envolvidas no problema, como velocidade e consumo de combustível de um automóvel, como taxas, permitindo a associação da proporcionalidade com o conceito de frações e a interpretação do coeficiente angular como uma taxa de variação.

Os estudantes concluíram que, como se consumia 1 litro de gasolina a cada 10 quilômetros, logo, o consumo de 3 litros de gasolina mostrava que o carro havia percorrido 30 quilômetros. Além disso, eles observaram que para dirigir essa distância o motorista demorou meia hora, ou seja, 30 minutos, já que dirigia a uma velocidade constante de 60km/h. Nesse mesmo contexto, os estudantes concluíram que se o motorista quisesse chegar no mesmo intervalo de tempo, 30 minutos, percorrendo 31 quilômetros seria necessário aumentar a velocidade para 62km/h.

Conforme Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008, p.135)

Atividades sobre taxa enfatizam a criação de novas unidades pela comparação de magnitudes de diferentes quantidades que sejam interessantes, como “quilômetros por litro”, “pessoas por quilômetro quadrado”, “quilos por metro cúbico” ou “preço unitário”. Todas essas atividades estão relacionadas a situações cotidianas autênticas, e possibilitam estabelecer ricas relações do ponto de vista matemático. Por exemplo, uma das atividades sobre taxa apresenta várias opções de compras e deve-se decidir qual seria a melhor.

Assim, na perspectiva do autor, concluiu-se, com a análise das soluções apresentadas pelos estudantes, que a SD3 permitiu uma vivência relacionada às situações cotidianas, trazendo a possibilidade de relação com diferentes tipos de problemas.

No momento de institucionalização, o gráfico apresentado no software possibilitou que os estudantes identificassem os pares ordenados associados aos seus resultados e visualizassem, por meio da alteração do valor da velocidade na equação inserida na janela modelo matemático, as alterações na simulação e no gráfico gerados pelo software. Nesse sentido, além do envolvimento com a noção de taxa, razão e fração, a SD3, através do *Modellus*, permitiu a conexão da proporcionalidade com os conceitos de constante de proporcionalidade, coeficiente linear e função linear na última etapa da TSD.

6.4 Análise *a posteriori* e validação da Situação Didática 4

A SD4, por sua vez, utilizou os conceitos de proporcionalidade e de volume, mais precisamente de um prisma quadrangular regular. Pretendeu-se relacionar esses dois conceitos por meio da modelagem de uma questão do SPAECE no software *Modellus*.

Constatou-se, com as soluções apresentadas e com as interações dos estudantes durante a resolução do problema, que a animação trazida no software *Modellus*, a qual apresentou a ação de equilíbrio das caixas, permitiu que os alunos identificassem a altura do nível da água nas caixas como variável. Isso permitiu que os estudantes verificassem que o volume de água nas caixas era diretamente proporcional à altura do nível de água nas caixas.

A solução apresentada pelos estudantes utilizou a fórmula do cálculo do volume de um cubo $V = a^3$, em que a é a medida do lado do cubo, como foi previsto nas análises *a priori*. Além disso, verificou-se a utilização da noção de grandezas diretamente proporcionais sem apelo às regras e procedimentos mecanizados, contestados na etapa de análises preliminares. Ao invés disso, ao perceberem a proporcionalidade entre as grandezas volume e altura do nível de água na caixa, os estudantes utilizaram a multiplicação e a divisão para resolver o problema.

Observou-se o uso da tabela apresentada no software para recordar a fórmula do volume de um prisma quadrangular. Em outros momentos, também foi possível verificar a contribuição do *Modellus*, como quando os estudantes interpretaram o equilíbrio das caixas como a igualdade entre o volume de água nas caixas, por meio do gráfico, e quando perceberam a altura do nível da água como a variável e o produto da medida do comprimento e da largura da caixa como uma constante, através da reprodução da animação.

Durante a resolução dos problemas pelos estudantes, percebeu-se a dificuldade destes em utilizar as unidades de medidas e de interpretar os símbolos matemáticos, fazendo a tradução correta do problema para a linguagem Matemática. Lorensatti (2009, p. 90) diz que “a linguagem Matemática pode ser definida como um sistema simbólico, com símbolos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. Esse conjunto de símbolos e regras deve ser entendido pela comunidade que o utiliza”.

Desse modo, buscou-se remediar a dificuldade enfatizando a importância da linguagem Matemática e o uso correto das unidades de medidas nas resoluções dos problemas, principalmente nos momentos de validação e institucionalização da SD3 e SD4, aproveitando-se, inclusive, da visualização trazida pelas animações, tabelas e gráficos do software para ajudar na representação de situações usando a linguagem Matemática.

Na aplicação das situações didáticas, se notou a mudança na estratégia de resolução

de alguns estudantes sem a intervenção da professora, construindo novas estratégias e, conseqüentemente, novos conhecimentos a partir da interação com o software. Esse tipo de aprendizagem é chamado de aprendizagem por adaptação, em que o estudante modifica ou abandona o seu modelo para elaborar outro, o que qualifica uma situação de ação (Almouloud, 2007).

Constatou-se que, no decorrer das atividades, houve a diminuição das argumentações empíricas para validação das estratégias utilizadas. Na validação da SD3, por exemplo, os estudantes justificaram a variação do tempo por meio da relação de proporcionalidade entre as grandezas relacionadas no problema, o que não ocorreu na SD1. Além disso, percebeu-se que os estudantes buscaram por estratégias alternativas à técnica regra de três para justificar suas construções.

Diante do que foi exposto da experiência vivenciada pelos estudantes com a aplicação das situações didáticas, corrobora-se que o software *Modellus* permitiu a exploração da proporcionalidade, bem como a conexão desse conceito com outros da Matemática.

Nesse contexto, conclui-se também que escolha dos problemas possibilitou a vivência da situação adidática, já que atendeu aos seguintes pontos:

- o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas.
- o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos, a partir da(s) atividade(s) propostas (Almouloud, 2007, p. 33).

O planejamento das situações didáticas com o software *Modellus* evitou o que é chamado por Almouloud (2007) de deslize metacognitivo, definido pelo autor como um efeito que prioriza uma técnica ao invés do saber a ser desenvolvido. Nesse contexto, considera-se que TSD, utilizada nesta pesquisa como base para a metodologia de ensino, proporcionou à docente conduzir o discente ao conhecimento pretendido, contudo, permitindo o protagonismo e a ação dos estudantes diante das situações-problemas.

A escolha das variáveis didáticas e seus valores, descritas na análise *a priori*, contribuíram para a construção e socialização de diferentes estratégias, permitindo a utilização dos conhecimentos prévios dos estudantes e a associação com diferentes conceitos matemáticos que estão relacionados com a proporcionalidade. Ademais, as escolhas realizadas ocasionaram a institucionalização do conceito de proporcionalidade e de outros objetos de conhecimento relacionados a ele.

Quanto ao papel da docente, verificou-se que atendeu às atribuições, segundo a DM, nos seguintes aspectos:

- (a) procurar situações de aprendizagem onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pela ação do próprio aluno;
- (b) ajudar os alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, de modo análogo como fazem os matemáticos, o que conduz a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis em outras situações e contextos (Pommer, 2013, p. 13).

No início, notou-se certa dificuldade de interação entre os estudantes, que pensaram nas atividades como um tipo de competição. Nesse sentido, durante a resolução dos problemas, a docente estimulou a troca de informações e conhecimentos, significativamente considerada para uma boa avaliação das situações, desmistificando a intencionalidade de rivalidade. Além disso, a professora diminuiu a distância entre as mesas dos discentes, buscando facilitar o diálogo entre eles.

Considerou-se, dessa maneira, o contrato didático, definido por Almouloud (2016) como o conjunto das relações que se constroem entre os professores e seus alunos a desígnio do saber. Segundo o autor:

Durante o ensino, as regras de comunicação entre os alunos e o professor sobre os objetos do saber se estabelecem, mudam, são quebradas progressivamente durante as aquisições dos conhecimentos e de sua evolução. Estas regras não se apresentam em um momento único e não são congeladas no tempo, mas são o resultado de uma negociação sempre renovada. As interações entre o professor e os alunos são baseadas em regras localmente estáveis que não são imutáveis (Almouloud, 2016, p. 130).

Nesse contexto, com o estímulo trazido pela docente, observou-se uma mudança no comportamento dos estudantes no decorrer do desenvolvimento das atividades, que passaram a compartilhar suas estratégias, por meio do diálogo com os estudantes e com a docente, à medida que solucionavam o problema. Inclusive, na avaliação dos encontros, uma estudante citou a interação com os colegas durante a resolução dos problemas como ponto positivo. Com isso e com a descrição da experimentação das situações, conclui-se que a ação da professora enriqueceu a conduta dos estudantes nas etapas de ação, formulação e validação.

Sobre a duração das situações didáticas, acrescenta-se que no primeiro encontro não foi estipulado um tempo, pois os estudantes estavam tendo o primeiro contato com o software *Modellus* e, alguns deles, o primeiro contato com um computador. Portanto, no primeiro momento, considerou-se a importância do estudante explorar o software e perceber o computador como uma ferramenta a ser utilizada na construção do conhecimento matemático. O primeiro encontro, no qual se desenvolveram as SD1 e SD2, teve a duração de três horas.

Nos outros dois encontros, em que se desenvolveram as SD3 e SD4, estipulou-se a duração de uma hora e vinte minutos. Julga-se que o tempo estabelecido foi suficiente para experimentar as quatro etapas propostas pela TSD.

Segundo Brousseau (2008, p. 33), as consecutivas fases de ação, formulação e validação podem aguçar o processo de aprendizagem e, relacionadas à institucionalização, “parecem constituir uma ordem razoável para a construção dos saberes”. Ao que parece, segundo o autor, essa ordem diverge daquela em que os saberes são primeiramente sistematizados em um discurso e somente depois usados em situações e assimilados em decisões.

Nesse sentido, através da descrição da experiência vivenciada com os estudantes do Ensino Fundamental, comprovou-se que situações baseadas na TSD favorecem a construção do conhecimento pretendido de forma autônoma pelo estudante, à medida que vivencia as etapas de ação, formulação e validação. Além disso, verificou-se que as quatro etapas da TSD guiam as ações do docente e permitem avaliar o aprendizado dos discentes com mais objetividade, visto que organizam o processo de ensino e aprendizagem.

Destarte, o confronto dos dados obtidos na etapa de experimentação com a análise *a priori* permite afirmar que as situações didáticas apresentadas neste estudo são reprodutíveis em sala de aula.

7 PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional (PE) desenvolvido a partir deste estudo pretende contribuir com o ensino e aprendizagem da proporcionalidade, por meio de situações didáticas, estruturadas pela TSD e com o arrimo do software *Modellus* para dar visualização e integrar diferentes representações, como gráficos, tabelas e animações, em questões retiradas de boletins pedagógicos do SPAECE.

As situações didáticas estão disponíveis em um *site* que também disponibiliza artigos e textos, a fim de ajudar os que desejam realizar a aplicação das situações didáticas em sala de aula. Optou-se por utilizar a plataforma *Google Sites*, que “é uma ferramenta que permite a criação de *sites*, jornais estudantis ou projetos de pesquisa online” (Reges *et al.*, 2020). A escolha deu-se por se tratar de uma plataforma gratuita, que vem ganhando espaço nas escolas, por meio do serviço *Google for Education* (Vasconcelos; Ferrete; Lima, 2020).

A página inicial contém a descrição do *site* (Figura 61), apresentando a sua funcionalidade e a pesquisa. Também disponibilizou-se uma página sobre o *Modellus* (Figura 62), descrevendo o software e dando orientações sobre sua instalação.

Figura 61 - Site Proporcionalidade com o software *Modellus*

PROPORCIONALIDADE COM O SOFTWARE MODELLUS

Este site é resultado de uma pesquisa realizada durante o curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará (UFC). Ele hospeda situações didáticas elaboradas para o ensino da proporcionalidade com a utilização do software *Modellus*, na perspectiva da Teoria das Situações Didática (TSD). O projeto foi desenvolvido na linha de pesquisa Tecnologias digitais no ensino de Ciências e Matemática.



As situações didáticas são definidas como um conjunto formado pelas relações entre os estudantes, um *milieu* e o sistema educativo (professor), que tem como objetivo a apropriação de um saber pelo aluno. O *milieu* pode ser compreendido como um fator que provoca um desequilíbrio, uma dificuldade, nesse sentido, a adaptação do aluno gera um saber novo e a aprendizagem, comprovada pelas novas respostas (ALMOLOUD, 2007).

Considerado o pai da Didática da Matemática (DM), Guy Brousseau é um matemático francês que iniciou suas pesquisas entre os anos de 1953 e 1956. Nesse período, dedicou-se a investigação do ensino e da aprendizagem de Matemática na Educação Básica (OLIVEIRA, 2010). Ele desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, utilizada como metodologia de ensino nesta pesquisa.

A DM é uma tendência que teve seu desenvolvimento nas décadas de 60 e 70, com o intuito de reestruturar o ensino da Matemática, pensada no contexto da reforma do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e pelo surgimento dos Institutos de Pesquisa sobre Ensino da Matemática (IREM), com o desenvolvimento de metodologias de investigações próprias (ALVES, 2016; CAMILO; ALVES; FONTENELE, 2021).

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 62 - Página Conhecendo o *Modellus*



Os textos aqui apresentados são recorte da dissertação de mestrado. O objetivo é apresentar o texto num modo alternativo, ficando disponível para os que consultarem esse site.

O *Modellus* é um recurso de uso computacional que foi desenvolvido e atualizado por uma equipe de pesquisadores da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Nova Lisboa, liderada pelo professor Vítor Teodoro (SILVA; POTY, 2015). É um software disponibilizado gratuitamente e que pode ter a versão 4.01 baixada no endereço <http://modellus.fct.unl.pt/>.

O software, que é utilizado para obter modelos matemáticos, permite em uma mesma tela: efetuar cálculos numéricos com base em equações e de acordo com dados inseridos pelo usuário, visualizar os resultados graficamente e em tabelas, inserir animações, medir distâncias e ângulos disponíveis em uma imagem (FETOSA, 2019).

Um dos diferenciais do software *Modellus* é que ele traz a possibilidade de desenvolver animações na tela principal, associando-as a outras janelas disponíveis no software. Ele também permite realizar a análise fotos e vídeos armazenados no computador (FETOSA, 2019; SILVA; POTY, 2015). A imagem abaixo traz um mapa conceitual com as potencialidades do software *Modellus* como recurso pedagógico.

A utilização do *Modellus* para o ensino de matemática possibilita inúmeras aplicações tanto de conceitos matemáticos quanto de conceitos de outras áreas de conhecimento. Nessa perspectiva, o uso do software contribui para a formação integral do estudante, já que permite a interlocução com as dimensões físicas, afetivas, sócio emocional, social e cultural, como preconiza a BNCC (BRASIL, 2017).

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 14 abr. 2022.

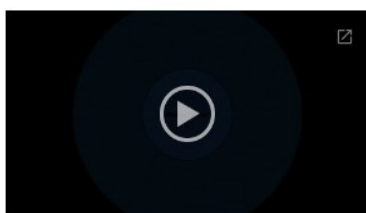
Fonte: elaborada pela autora (2023).

Na página “Situações Didáticas para o ensino da proporcionalidade” (Figura 63) são disponibilizados quatro vídeos, referentes às quatro situações didáticas elaboradas. Os vídeos mostram os problemas modelados no *Modellus*. Assim, é possível ver recursos como simulações, gráficos e tabelas, gerados pelo software em cada situação didática.

Figura 63 – Página Situações Didáticas para o ensino da proporcionalidade



Disponibilizamos quatro situações didáticas com o uso do software *Modellus* para o ensino da proporcionalidade.



SD1

Situação Didática 1

O objetivo da Situação Didática 1 (SD1) é explorar o conceito de proporcionalidade por meio de uma modelagem construída no software *Modellus*. Para ter acesso a descrição desta situação didática clique no botão SD1, logo abaixo do vídeo.



SD2

Situação Didática 2

A Situação Didática 2 (SD2) objetiva, através de uma construção no software *Modellus*, a relação dos conceitos de proporcionalidade e de um tipo específico de função do primeiro grau, a função linear. Para ter acesso a descrição desta situação didática clique no botão SD2, logo abaixo do vídeo.



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Situação Didática 3

A proposta da Situação Didática 3 (SD3) é possibilitar, através da modelagem de uma

Na página “Material de apoio” (Figura 64, Figura 65 e Figura 66) são disponibilizados textos explicativos, que são recortes deste documento de dissertação, sobre a TSD e ED. Ademais, coloca à disposição de docentes e pesquisadores a modelagem dos problemas do SPAECE (Figura 67), escolhidos para compor as situações didáticas propostas no software *Modellus*. É importante dizer que, para ter acesso aos arquivos que apresentam os problemas, é necessário antes realizar o download de uma das versões do *Modellus*.

Figura 64 – Página Material de Apoio



The image shows a screenshot of a website page with a dark teal background. At the top right, there are navigation links: "Início" and "Conhecendo o Modelus". In the center, a white-bordered box contains the text "Material de Apoio". Below this, there are three menu items, each with a small icon and a dropdown arrow:

-  O que é a Teoria das Situações Didáticas?
-  Engenharia Didática
-  Apoio para as Situações Didáticas

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 65 – O que diz a Teoria das Situações Didáticas?



A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo francês Guy Brousseau para orientar o processo de ensino e aprendizagem (MALA, 2021). Considerado o pai da DM, Brousseau iniciou suas pesquisas entre os anos de 1953 e 1956, período em que dedicou-se a investigação do ensino e da aprendizagem de Matemática na Educação Básica (OLIVEIRA, 2019). O foco de estudo da TSD é "a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber." (ALMOULOU, 2007, p.32). Associam-se alguns fenômenos às interações (BROUSSEAU, 1986) e a partir de um meio desenvolvido pelo professor cria-se uma interação com o triângulo didático (SILVA, 2020). No que se diz respeito a modelagem da teoria das situações, Brousseau (2008) caracteriza e divide uma situação didática em quatro momentos dominantes, são eles: ação, formulação, validação e institucionalização.

Para ler mais acesse:

Referências

- MALA, Beatriz Maria Pereira. O ensino de polígonos de Brahmagupta com o amparo do software geogebra: um contributo da engenharia didática. 2021. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.
- BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
- ALMOULOU, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. 170 Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.
- OLIVEIRA, Meirivani Meneses de. Ensino de funções por meio da videoanálise: um contributo da engenharia didática. 2019. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pósgraduação em Ensino de Ciências e Matemática (Encima), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

Fonte: elaborada pela autora (2023)

Figura 66 – Engenharia Didática



A Engenharia Didática (ED) emergiu da Didática da Matemática, na França, na década de 80 (CARNEIRO, 2005). A ED pode ser caracterizada de duas maneiras distintas. Uma delas é como uma metodologia de pesquisa, que tem como base as vivências em sala de aula, a outra, é como uma metodologia de ensino cujos procedimentos são subsidiados por resultados de pesquisas realizadas (FERNANDES; ALVES; SOUZA, 2021).

A ED é constituída por quatro etapas distintas que estão intrinsecamente envolvidas, são elas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Na etapa de análises preliminares, após definir o problema e o objeto de estudo, busca-se realizar um levantamento bibliográfico, "construindo assim o campo epistêmico-matemático por meio de definições matemáticas que pretende se explorar nas situações didáticas de ensino" (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2021, p. 4). Nessa etapa, realiza-se uma análise epistemológica dos conteúdos, estuda-se sobre o ensino tradicional e seus efeitos, observa-se as concepções dos estudantes e verifica-se as dificuldades no ambiente em que se planeja desenvolver as realizações didáticas (ARTIGUE, 1995).

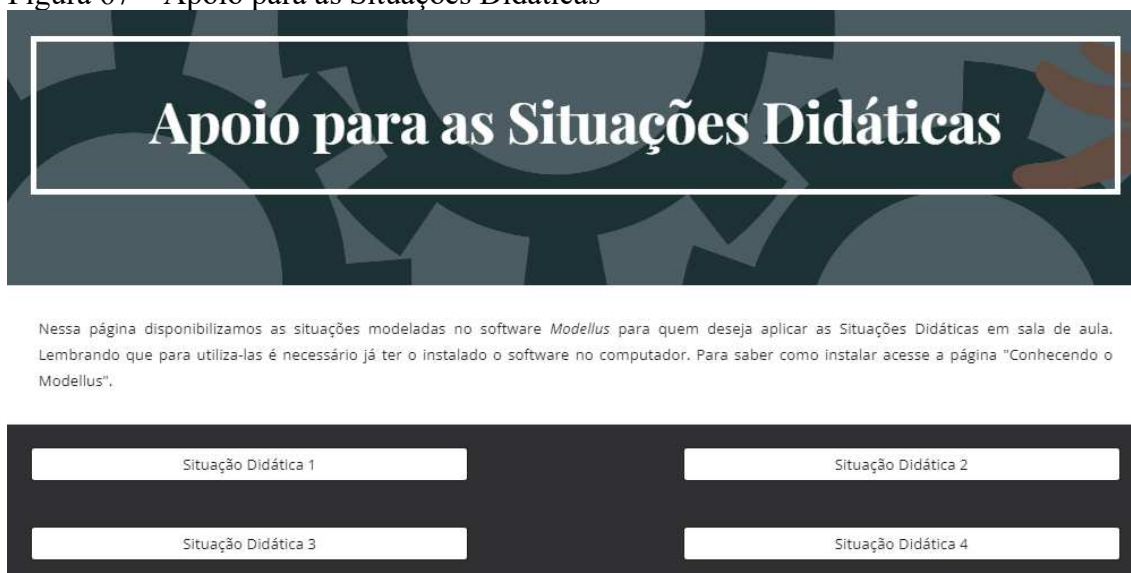
Na fase de concepção e análise *a priori*, são elaboradas as situações didáticas, nas quais "devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (ALMOULOU, 2007 *apud* SANTIAGO; ALVES; MALA, 2021). Nesse sentido, delimita-se as variáveis didáticas que pretendem ser aplicadas. Artigue (1995) distingue as variáveis em dois tipos: as variáveis microdidáticas, relacionadas à organização das situações didáticas; e as variáveis macrodidáticas, quando se refere à organização global da engenharia.

Na experimentação realiza-se a aplicação do dispositivo elaborado. Nessa fase, bem como nas outras fases, pode-se retomar a etapas anteriores a fim de repensar uma escolha ou ajustar algum procedimento. Busca-se nessa etapa registrar as produções dos alunos e as situações didáticas promovidas (ALMOULOU; COUTINHO, 2008).

Na etapa de análises *a posteriori* e validação, busca-se realizar uma análise dos dados obtidos na etapa de experimentação. Realiza-se, então, o confronto desta etapa com a primeira, análise *a priori*, validando as hipóteses levantadas na investigação (ALMOULOU; COUTINHO, 2008; ARTIGUE, 1995).

Fonte: elaborada pela autora (2023).

Figura 67 – Apoio para as Situações Didáticas



Fonte: elaborada pela autora (2023).

Disponibilizou-se um espaço para trocas de experiências por meio de um fórum em que a professora/pesquisadora e o público geral poderão comunicar-se, servindo para trazer esclarecimentos e apresentar experiências da aplicação das situações didáticas. Esse espaço é mostrado na Figura 68.

Figura 68 - Página Fale Conosco

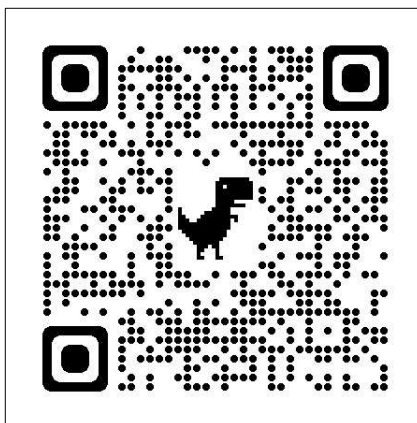
Fonte: elaborada pela autora (2023).

No rodapé, são apresentados canais de comunicação através das redes sociais e-mail, instagram, youtube e blog. Esses três últimos são do grupo de estudo do Laboratório Educacional Digital (LDE), da Universidade Federal do Ceará, que promove cursos, palestras e oficinas para professores em convênio com a Secretaria Municipal de Educação de Sobral. O grupo de estudo é coordenado pelos professores Dr. Herbert Lima e Dr. Daniel Brandão, orientador e coorientador, respectivamente, da presente pesquisa. Por esses canais é possível conhecer mais sobre o grupo de estudos e acompanhar as publicações referentes às pesquisas desenvolvidas por seus integrantes.

Desse modo, apresenta-se a URL do site, <https://sites.google.com/view/sdmodellus/in%C3%ADcio>, que se caracterizou como PE, construído no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) pela Universidade Federal do Ceará, sendo o produto final contido na dissertação da pesquisadora.

O *site* também tem sua versão para smartphone, podendo ser acessado através do QR Code, mostrado na Figura 69.

Figura 69 – QR Code: *site* SD
Modellus



Fonte: produzida pela autora (2023).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste estudo, foram investigadas as contribuições de situações didáticas baseadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD), as quais envolvem o conceito de proporcionalidade, a partir de questões adaptadas do SPAECE, modeladas com o software *Modellus*, mediante a aplicação com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Fortaleza. Nesse sentido, foram avaliados os registros do desenvolvimento dessas situações didáticas com os estudantes da etapa escolar descrita.

Este trabalho foi baseado na Engenharia Didática de primeira geração, o que permitiu organizar a pesquisa em quatro etapas: análises preliminares, análises *a priori* e concepção das situações didáticas, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Essa metodologia possibilitou a elaboração de situações didáticas aliadas ao uso do software *Modellus*, com a finalidade de explorar o conceito de proporcionalidade.

Na etapa de análises preliminares, construiu-se uma base teórica do objeto de estudo, considerando principalmente as dimensões epistemológica e didática. Na análise epistemológica, percebeu-se, por meio da história da Matemática, o conhecimento da proporcionalidade nas civilizações, a sua importância para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, a relação do raciocínio proporcional com decisões cotidianas e o seu uso para compreender os fenômenos da natureza.

Na dimensão didática, foram examinados três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. Para a construção dessa análise tomou-se como fundamento dois documentos utilizados para nortear práticas pedagógicas e currículos brasileiros, a Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais. Além disso, discutiu-se sobre a proporcionalidade no SPAECE, avaliação aplicada com estudantes cearenses da Educação Básica.

Com a análise, concluiu-se que o conteúdo de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais foi pouco explorado e que, para os problemas que envolviam esse assunto, a regra de três foi a estratégia mais adotada. A proporcionalidade deixou de ser trabalhada ou foi pouco inserida em unidades temáticas, como a de Grandezas e Medidas. Também se notou pouca relação com os demais conteúdos, a exemplo do de funções, em que a relação de proporcionalidade entre grandezas é presente. Além disso, a integração de representações em forma de tabela, gráficos e ilustrações foi pouco vista nos livros analisados.

Considerou-se ainda, na etapa de análises preliminares, que a compreensão do conceito de proporcionalidade é importante para a apropriação de habilidades estruturantes,

definidas como aquelas que servem de base para o desenvolvimento de outras.

Na análise didática, buscou-se identificar entraves no processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade na Educação Básica. Nesse sentido, apontaram-se estudos os quais afirmam que a proporcionalidade é geralmente abordada por meio de regras e procedimentos mecanizados, sem o apoio de recursos visuais e como um assunto isolado, ou seja, desconectado de outros conteúdos da Matemática. Feito isso, foram apresentadas pesquisas que mostram que as tecnologias digitais podem contribuir para dar significado aos conceitos matemáticos, favorecendo a visualização e representação, além de facilitar a construção do conhecimento pelo próprio aluno, melhorando, inclusive, a prática pedagógica do professor de Matemática.

Após realizar esses estudos, partiu-se para a etapa de análise *a priori* e concepção das situações didáticas. Nessa segunda etapa proposta pela ED, foram elaboradas quatro situações didáticas para explorar a proporcionalidade. Para isso, foram escolhidos problemas do SPAECE, optando-se pelo software *Modellus* para dar suporte à visualização e representação, por meio de simulações, gráficos e tabelas. A construção das situações didáticas embasou-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD), utilizada como suporte para a metodologia de ensino adotada neste estudo.

Dessarte, foi descrito o que se esperava dos estudantes nas etapas de ação, formulação, validação considerando as variáveis didáticas envolvidas. Ainda na etapa de análise *a priori* e concepção das situações didáticas, elaborou-se duas hipóteses, a fim de validá-las ou de refutá-las na última etapa da ED.

Posteriormente, desenvolveu-se a terceira etapa da ED, a experimentação, consubstanciada pela aplicação das situações didáticas com o público de estudantes escolhido. A descrição desta etapa é iniciada pela apresentação dos participantes da pesquisa, das condições para fazer parte do trabalho, dos instrumentos de coleta de dados e das variáveis macrodidáticas. Após isso, descreveu-se o comportamento dos alunos nas etapas sugeridas pela TSD, apresentando fotografias e áudios transcritos para uma melhor compreensão da etapa de experimentação da pesquisa.

Os dados coletados na experimentação foram considerados na análise *a posteriori* e validação, quarta etapa da ED. Esta pesquisa optou pela validação interna, assim, nessa última etapa realizou-se um confronto com as etapas anteriores. Foram avaliadas as ações dos estudantes diante dos problemas, de acordo com autores trazidos no referencial teórico deste estudo. O papel do professor e suas escolhas didáticas, bem como o contrato didático, também foram considerados na análise *a posteriori*.

Nesse contexto, constatou-se que o software *Modellus*, por meio da visualização e representação trazidas pelas simulações, gráficos e tabelas, permitiu que o estudante explorasse a proporcionalidade e relacionasse esse conceito com outros conceitos da Matemática, comprovando uma das hipóteses construídas na etapa de análise *a priori*.

Concluiu-se, portanto, que uma organização didática baseada na TSD possibilita que o professor realize um planejamento de aula, de modo que traga a autonomia do estudante na construção do conhecimento pretendido. Além disso, apontou-se que a classificação da aprendizagem em quatro etapas, propostas pela TSD, permite que o professor perceba mais claramente a compreensão dos estudantes sobre o objeto de conhecimento, mediando suas ações, no entanto, deixando que o aluno seja autônomo e se perceba como protagonista de seu aprendizado. Logo, comprovou-se a segunda hipótese elaborada neste estudo no desenvolvimento da segunda etapa da ED.

Diante do que foi exposto na análise *a posteriori* e validação, considera-se que as situações didáticas elaboradas com o suporte do software *Modellus* são reprodutíveis em sala de aula e podem ser utilizadas para ajudar na compreensão da proporcionalidade e na associação de conceitos matemáticos, como preconizado pela BNCC.

Assim, têm-se como perspectivas futuras a submissão dos resultados deste estudo em revistas científicas, a fim de divulgar as situações didáticas para o ensino da proporcionalidade entre professores que desejam inserir as tecnologias digitais, por meio do software *Modellus*, utilizando uma metodologia de ensino que promove o protagonismo do estudante durante a construção de um conhecimento matemático. Além disso, pretende-se dar continuidade a esta pesquisa, aprofundando as investigações sob outras perspectivas, gerando contribuições originais, com o intuito de preencher lacunas da literatura que envolvam a temática aqui abordada.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Chrystian Bastos de. Sequência didática interdisciplinar usando o software modellus para determinação da qualidade de vida de uma população. **Ensino da matemática em debate**, [s.l.], v. 6, n. 2, p. 96–111, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/42134>. Acesso em: 9 jun. 2022.
- ALMEIDA, Isaura Aparecida Torse de. Tales em movimento: aplicação do teorema de Tales nos triângulos. **Com a palavra, o professor**, [s. l.], v. 5, n. 13, p. 50-58, 2020. Disponível em: <http://revista.geem.mat.br/index.php/PPP/article/view/268>. Acesso em: 03 jun. 2022.
- ALMEIDA, Patrícia Rodrigues de; LUZ, Charlene Bitencourt Soster; HUNG, Hildegard Susana; FOSSATTI, Paulo. Relações no ambiente escolar pós-pandemia: enfrentamentos na volta às aulas presenciais. **Actualidades investigativas en educación**, [s.l.], v. 21, n. 3, p. 1-27, 1 set. 2021. Disponível em: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/46287>. Acesso em: 13 mai. 2022.
- ALMEIDA, Ricardo Guimarães de. **Razão e proporção para além da sala de aula**. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/168/1/ricardoguimaraesdealmeida.pdf>. Acesso em: 02 jul. 2022.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. São Paulo: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revista eletrônica de educação matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/26729/1/Almouloud2016Modelo.pdf>. Acesso em: 23 set. 2022.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat**, [s.l.], v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/24781/1/Almouloud2008Engenharia.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2022.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista brasileira de educação**, [s. l.], n. 27, p. 94-108, dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/xzRGKxDRJ6XS4ZXxLnBTkFL/>. Acesso em: 22 ago. 2022.
- ALPHA, Ousmane; ALMOULOUD, Saddo Ag. Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três. **Educação matemática pesquisa**: revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 769-809, 11 abr. 2021. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/25619/1/Alpha2020Das.pdf>. Acesso em: 21 out. 2022.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da educação**, [s.l.], v. 7, n. 21, p. 131-150, 21 dez. 2016. Disponível em: <https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/article/view/1259>. Acesso em: 24 set. 2022.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Visualizing the Olympic Didactical Situation (ODS): teaching mathematics with support of geogebra software. **Acta didactica napocensia**, [s. l.], v. 12, n. 2, p. 97-116, 27 dez. 2019. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1238609.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2023.

ALVES, Francisco Regis Vieira; ALVES, Marlene Dias. Engenharia Didática para o teorema de Binet, ou Lamé, ou de De Moivre: análises preliminares e *a priori*. **Revista de ensino, educação e ciências humanas**, [s.l.], v. 19, n. 2, p. 103, 23 mai. 2018. Disponível em: <https://revistaensinoeducacao.pgsskroton.com.br/article/view/6064>. Acesso em: 13 mai. 2022.

ARTIGUE, Michèle. Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis; GOMEZ, Pedro. (org.). **Ingeniería didáctica en educación matemática**: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial iberoamericano, 1995. p. 33-61.

BEN-CHAIM, David; ILANY, Bat-Sheva; KERET, Yaffa. Atividades investigativas autênticas para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 129-159, 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221883008>. Acesso em: 15 jun. 2023.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. São Paulo: Moderna, 2018

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Escalas de proficiência do SAEB**. Brasília, DF: INEP, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em: 01 mai. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: educação é base. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resultados do SAEB**. Brasília: DF: MEC, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>. Acesso em: 20 set. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, DF: SEB, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches em didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAMILO, Aline Maria da Silva; ALVES, Francisco Régis Vieira; FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. Uma abordagem acerca das principais teorias presentes na didática da matemática. **Contraponto**: discussões científicas e pedagógicas em ciências, matemática e educação, Blumenau, v. 2, n. 2, p. 6-23, 24 jun. 2021. Disponível em: <https://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/contraponto/article/view/2075>. Acesso em: 01 out. 2022.

CARDOSO NETO, Manoel de Sousa; CHEROTI, Aparecida do Carmo Fernandes. Tecnologias digitais na sala de aula: um olhar sobre o ensino de matemática no Centro de ensino Professora Isabel Castro Viana, na cidade de Bacabal/MA. **O ensino de matemática na atualidade**: percepções, contextos e desafios, [s.l.], p. 28-47, 26 fev. 2022. Disponível em: <https://ayaeditora.com.br/wp-content/uploads/2022/02/L123.pdf>. Acesso em: 03 ago. 2022.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, v. 13, n. 1, p. 87–120, 2009. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882>. Acesso em: 14 abr. 2022.

CASTRO, Emanuela Moura de Melo; SILVA, José Gleison Alves da; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima; MENEZES, Daniel Brandrão Menezes. Engenharia didática para a relação entre grandezas diretamente proporcionais e funções lineares: uma análise preliminar e uma análise a priori. **Indagatio didactica**, v. 15, n. 3, p. 235-256, 31 jul. 2023. Disponível em: <https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/31104>. Acesso em: 02 ago. 2023.

CASTRO, Fabrício Almeida de. **A relação da proporcionalidade com outros temas matemáticos**. 2015. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/8416/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2023.

CASTRO, Juscileide Braga de; CASTRO FILHO, José Aires. Desempenho de estudantes do 5º ano na construção de gráficos de setores: dificuldades e possibilidades pedagógicas. **Revista de ensino de ciências e matemática**, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 12-31, 2018. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1642>. Acesso em: 13 fev. 2022.

CASTRO, Juscileide Braga de; CASTRO FILHO, José Aires. Projeto pensar, conectar e fazer: o uso das tecnologias digitais para a aprendizagem da proporcionalidade. **Interfaces científicas-educação**, [s. l.], v. 9, n. 2, p. 95-109, 2020. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/educacao/article/view/6937/4061>. Acesso em: 13 fev. 2023.

CEARÁ, Decreto nº 32.079, de novembro de 2016. Regulamenta a lei Nº 15.923, de 15 de dezembro de 2015, que cria o prêmio escola nota dez, destinado a premiar as escolas públicas com melhores resultados de aprendizagem no segundo, quinto e nono ano do ensino

fundamental e dá outras providências. **Diário oficial do estado do Ceará**, Fortaleza, 2016a. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/diarios/130303916/doi-ce-09-11-2016-pg-1>. Acesso em: 09 de jun. 2023.

CEARÁ, Lei n. 16.144, de 07 de dezembro de 2016. Altera a Lei Nº. 14.483, de 8 de outubro de 2009. **Diário oficial do estado do Ceará**, Fortaleza, 2016b. Disponível em: <https://belt.al.ce.gov.br/index.php/legislacao-do-ceara/organizacao-tematica/educacao/item/4664-lei-n-16-144-de-07-12-16-d-o-08-12-16>. Acesso em: 12 de jun. 2023.

CEARÁ, Lei nº 15.923, de 15 de dezembro de 2015. Altera a redação do inciso II do art. 1º da Lei Nº.12.612 de 7 de agosto de 1996. **Diário oficial do estado do Ceará**, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://imagens.seplag.ce.gov.br/PDF/20151215/do20151215p01.pdf>. Acesso em: 09 de jun. 2023.

CEARÁ, Lei nº 16.448, de 12 de dezembro de 2017. Institui o prêmio foco na aprendizagem, destinado ao quadro funcional das escolas da rede estadual de ensino. **Diário oficial do estado do Ceará**, Fortaleza, 2017. Disponível em: <https://belt.al.ce.gov.br/index.php/legislacao-do-ceara/organizacao-tematica/educacao/item/6057-lei-n-16-448-de-12-12-17-d-o-12-12-17>. Acesso em: 02 de jun. 2023.

CEARÁ. Portaria Nº. 101/00 – GAB de 17 de fevereiro de 2000 (2000). Dispõe sobre a Instituição do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará - SPAECE. **Diário oficial do estado do Ceará**, Fortaleza, 2000. Disponível em: <http://imagens.seplag.ce.gov.br/PDF/20000217/do20000217p01.pdf>. Acesso em: 03 jun. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2013**: boletim pedagógico – Matemática , Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, v. 1, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: [https://file:///C:/Users/EMANU/AppData/Local/Temp/Rar\\$DIa12884.41164/SPAECE%202013%20RP%20MT%20EM%20WEB.pdf](https://file:///C:/Users/EMANU/AppData/Local/Temp/Rar$DIa12884.41164/SPAECE%202013%20RP%20MT%20EM%20WEB.pdf). Acesso em: 09 de jul. 2023.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2022**: boletim da escola – Matemática – ensino fundamental, Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, v. 1, Juiz de Fora, 2022. Disponível em: [https://file:///C:/Users/EMANU/AppData/Local/Temp/Rar\\$DIa5188.42760/SPAECE%202022%20-%20BE%20MT%20EF%20-%20Web.pdf](https://file:///C:/Users/EMANU/AppData/Local/Temp/Rar$DIa5188.42760/SPAECE%202022%20-%20BE%20MT%20EF%20-%20Web.pdf). Acesso em: 09 de jul. 2023.

COSTA JÚNIOR, José Roberto. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade**: contribuições da história da Matemática. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16063>. Acesso em: 12 set. 2022.

COSTA, Manoel dos Santos; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Proporcionalidade: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos. **Em teia**: Revista de educação matemática e tecnológica iberoamericana, [s.l.], v. 6, n. 1, p. 1-26, 2015. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/31978/1/Costa2015Proporcionalidade.pdf>. Acesso em: 01 mar.

2022.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. Reflexões sobre a história da matemática na formação de professores. **Revista brasileira de história da matemática**, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 399-406, 2007. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312>. Acesso em: 23 mai. 2023.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. 16 ed. Campinas: Papyrus, 1996.

DELATORRE, Priscilla. **Razão e proporção: uma proposta de ensino explorando problemas do cotidiano**. 2021. 80 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3773>. Acesso em: 05 mai. 2023.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. *In: ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis (org.). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 1-148.

ESTEVAM, Everton José Goldoni; BASNIAK, Maria Ivete; PAULEK, Celine Maria; SCALDELAI, Dirceu; FELIPE, Natali Angela. Ensino exploratório de matemática e tecnologias digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software geogebra. **Acta scientiae: Revista de ensino de ciências e matemática**, [s. l.], v. 20, n. 3, p. 342-358, 31 jul. 2018. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/28442/1/Estevam2018Ensino.pdf>. Acesso em 01 abr. 2023.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FEITOSA, Francisco José Barroso. **O uso do software modellus no ensino de cinemática na 1ª série do ensino médio com a abordagem da aprendizagem significativa**. 2018. 189 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/39443>. Acesso em: 14 set. 2022.

FIGUEROA, Teodora Pinheiro; ALMOULOU, Saddo Ag. O milieu e o contrato didático: análise de uma aula demonstrativa do círculo da matemática do Brasil. **Acta scientiae**, Canoas, v. 20, n. 4, 13 set. 2018. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/4620/pdf>. Acesso em: 02 fev. 2022.

FRANTZ, Fontoura da Silva; DALCIN, Andréia. Fotografia e Matemática em uma escola do campo: ampliando olhares, construindo saberes. **Rematec**, [s. l.], v. 12, n. 25, 2017. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/249>. Acesso em: 23 jul. 2023.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2018.

GOMES, Marcelo Santos; SILVA, Maria José Ferreira da. Gamificação: uma estratégia didática fundamentada pela perspectiva da teoria das situações didáticas. **Horizontes: Revista de educação**, [s. l.], v. 6, n. 11, p. 18–30, 2018. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/horizontes/article/view/8398>. Acesso em: 9 maio. 2023.

GONDIM, Diego de Matos. Modos outros de expressão dos cálculos diferencial e integral nos rastros de Eudoxo e Arquimedes. **Hipátia**, Campos do Jordão, v. 2, n. 1, p. 26-39, jun. 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/460>. Acesso em: 25 fev. 2023.

GONTIJO, Cleyton Hércules; SILVA, Erondina Barbosa da; CARVALHO, Rosália Policarpo Fagundes de. A criatividade e as situações didáticas no ensino e aprendizagem da Matemática. **Linhas críticas**, Brasília, v.18 , n.35, p. 29-46, jan./abr. 2012. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/lc/v18n35/v18n35a04.pdf>. Acesso em: 01 jan. 2023.

JACONIANO, Emanuel Arcanjo; BARBOSA, Augusto Cesar de Castro; CONCORDIDO, Cláudia Ferreira Reis; COSTA, Marcus Vinicius Tovar. Resolução de problemas de proporcionalidade por meio da redução à unidade. **Educação matemática em revista**, Brasília, v. 24, n. 61, p. 98-113, jan./mar. 2019. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/24252/1/Tovar2019Resolu%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2023.

LABLÉM, Regina Litz; BITTAR, Marilena. Reflexões sobre a teoria das situações didáticas por duas pesquisadoras em diferentes estágios da vida acadêmica. **Educação matemática em pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 202-221, 2018. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/27355/1/Labl%C3%A9m2018Reflex%C3%B5es.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2022.

LABORDE, Colette. Affronter la complexité des situations didactiques d apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, [s. l.], n.10, p. 97 -112, 1997. Disponível em: https://www.persee.fr/doc/didas_1250-0739_1997_num_10_1_1021. Acesso em 22 de mai. 2023.

LABORDE, Colette. Teaching learning projects and didactical engineering. **La matemática e la sua didattica**, [s. l.], v.25, n. 2, p. 163–179, 2017. Disponível em: <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2016/07/Laborde-MD-25-2-2017.pdf>. Acesso em 12 de jun. 2023.

LAMON, Susan. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 4. ed. New York: Routledge, 2020.

LEMKE, Raiane; SIPLE, Ivanete Zuchi; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. OAs para o ensino de Cálculo: potencialidades de tecnologias 3D. **Revista novas tecnologias na educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, 2016. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/67355>. Acesso em: 14 fev. 2022.

LIMA, Elon Lages. Sobre a divisão em partes proporcionais. *In*: LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2007. p. 69-72.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, Maria Luziana Oliveira. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas**: um contributo da engenharia didática. 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/44173>. Acesso em: 15 fev. 2023.

LIMA, Taíza Paula de Oliveira; SANTARÉM, Luiz Carlos Assunção; REBOUÇAS, Ozane Batista. o uso de jogo digital educacional como instrumento didático no processo de ensino-aprendizagem da língua portuguesa e matemática. **Brazilian journal of development**, [s.l.], v. 7, n. 3, p. 24517-24530, 2021. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/26123/20718>. Acesso em: 13 jan. 2022.

LINTZ, Rubens Gouvêa. **História da matemática**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2007.

LORENSATTI, Edi Jussara Candido. Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Conjectura**, Caxias do Sul, v. 14, n. 2, p. 89-99, mai./ago. 2009. Disponível em: <https://fundacao.ucs.br/site/midia/arquivos/linguagem.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2023.

MAGALHÃES JUNIOR, Antônio Germano; FARIAS, Maria Adalgiza de. SPAECE: uma história em sintonia com avaliação educacional do governo federal. **Revista humanidades**, Fortaleza, v. 31, n. 2, p. 532-547, 2016. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6168780>. Acesso em: 14 mai. 2023.

MAIA, Beatriz Maria Pereira. **O ensino de polígonos de Brahmagupta com o amparo do software geogebra**: um contributo da engenharia didática. 2021. 82 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/63972>. Acesso em: 02 mai. 2023.

MENDUNI-BORTOLOTTI, Roberra D'Angela; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito. **Educação matemática pesquisa**: Revista do programa de estudos pós-graduados em educação matemática, [s.l.], v. 20, n. 1, p. 269-293, 1 mai. 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/27322>. Acesso em: 15 abr. 2022.

MENDUNI-BORTOLOTTI, Roberta D'Angela; BARBOSA, Jonei Cerqueira. A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema**: boletim de educação matemática, [s.l.], v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/xGHxYjVBQb3Zs7JnqkSQyqb/?lang=pt>. Acesso em: 13 ago. 2023.

NEIDE, Italo Gabriel *et al.* Percepções dos professores sobre o uso do software modellus em uma experiência de modelagem. **Caderno brasileiro de ensino de física**, [s.l.], v. 36, n. 2, p. 567-588, 2019. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7035720>.

Acesso em: 13 jan. 2023.

OLIVEIRA, Caloney Alves de; AMANCIO, Joenneyres Raio de Souza. Experiências formativas potencializadas pelas tecnologias digitais nas aulas de matemática. **Revista docência e cibercultura**, [s. l.], v. 6, n. 3, p. 165-179, 13 ago. 2022. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/re-doc/article/view/63254>. Acesso em: 29 ago. 2023.

OLIVEIRA, Eliane Moreira; SALES, Gilvandenys Leite; CASTRO FILHO, José Aires; MACÊDO, Laécio Nobre; FREIRE, Raquel Santiago. Gangorra Interativa: um objeto de aprendizagem para os conceitos de grandezas inversamente proporcionais. *In*: CONGRESSO DA SBC, 26., 2006, Campo Grande. **Anais [...]**. Campo Grande: Wie, 2006. p. 365-368. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/LaecioMacedo/publication/277126718_Gangorra_Interativa_um_objeto_de_aprendizagem_para_os_conceitos_de_grandezas_inversamente_proporcionais/links/55ea3ac808ae3e1218450b6f/Gangorra-Interativa-um-objeto-de-aprendizagem-para-os-conceitos-de-grandezas-inversamenteproporcionais.pdf. Acesso em: 14 jul. 2023.

OLIVEIRA, Gisele Pereira. **A percepção dos professores de matemática sobre o uso pedagógico de objetos de aprendizagem na formação inicial e continuada**. 2018. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/40614>. Acesso em: 01 ago. 2022.

OLIVEIRA, Meirivâni Meneses de. **Ensino de funções por meio da videoanálise: um contributo da engenharia didática**. 2019. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pósgraduação em Ensino de Ciências e Matemática (Encima), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/49494>. Acesso em: 05 mai. 2023.

PISANO, Leonardo. **Fibonacci's liber abaci: a translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation**. Translated by Laurence Sigler. New York: Springer-Verlag, 2003.

POMMER, Wagner Marcelo. **A engenharia didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares**, São Paulo, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Wagner-Pommer/publication/296486970_A_Engenharia_Didatica_em_sala_de_aula_Elementos_basicos_e_uma_ilustracao_envolvendo_as_Equacoes_Diofantinas_Lineares/links/56edfb6c08ae59dd41c6387b/A-Engenharia-Didatica-em-sala-de-aula-Elementos-basicos-e-uma-ilustracao-envolvendo-as-Equacoes-Diofantinas-Lineares.pdf. Acesso em: 13 mar. 2022.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a ideia de situação didática**. Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP, 2008. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2023.

REGES, Luiz Carlos Moura; PEREIRA, Thiago de Oliveira; FREITAS, Joyce Claine Pereira; LIMA, Rommel Wladimir de; MORAIS, Ceres Germanna Braga. **Ferramentas google de apoio educacional**. Mossoró: Eduern, 2020. 80 p. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Ceres-Morais->

2/publication/344015978_Ferramentas_Google_de_Apoio_Educacional/links/5f4e24c5458515a88ba78d59/Ferramentas-Google-de-Apoio-Educacional.pdf. Acesso em: 15 out. 2022.

REIS, Camila dos. **Matemática e educação ambiental no ensino fundamental: a construção de cisternas e as relações de proporcionalidade**. 2022. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/24542>. Acesso em: 03 dez. 2022.

RICARDO, Elio; SLONGO, Ione; PIETROCOLA, Maurício. A perturbação do contrato didático e o gerenciamento dos paradoxos. **Investigações em ensino de ciências**, [s. l.], v. 8, n. 2, p. 153–163, 2003. Disponível em: <https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/545>. Acesso em: 13 jan. 2023.

RIVERA, Fernando. **Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: research, theory, practice, and issues**. San Jose: Springer, 2011.

ROCHA JÚNIOR, Antônio Martins. **Divina proporção: aspectos filosóficos, geométricos e sagrados da seção áurea**. Fortaleza: Expressão Gráfica, 2011.

RUIZ, Adriano Rodrigues; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. O conceito de proporcionalidade. **Revista da faculdade de educação**, São Paulo, v. 16, n. 1-2, p. 97-131, jan./dez. 1990. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/rfe/v16n1-2/v16n1-2a05.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2023.

SANTOS, Amarildo Aparecido dos. Aula não presencial para alunos da escola pública com recurso do geogebra em tempo de pandemia. **Brazilian journal of development**, Curitiba, v. 7, n. 9, 21 set. 2021. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/36261>. Acesso em: 03 nov. 2022.

SANTOS, Arlem Atanzio dos; ALVES, Francisco Régis Vieira. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. **Acta scientiae**, Canoas, v. 19, n. 3, p. 447-465, maio/jun. 2017. Disponível em: <http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/2739>. Acesso em: 17 mai. 2023.

SANTOS, Cintia Melo dos; NEVES, Tatiani Garcia; TOGURA, Tiaki Cintia Faoro. As tecnologias digitais no ensino de matemática: uma análise das práticas pedagógicas e dos objetos educacionais digitais. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-10. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5245_2978_ID.pdf. Acesso em: 21 fev. 2022.

SANTOS, Frankson dos Santos e. **Proporcionalidade e regra de três através de uma abordagem significativa**. 2019. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/7027>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SANTOS, Lisandra Mayara dos. **Razão áurea: abordagem histórica, aplicações e sua relação**

com Fibonacci. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/62464>. Acesso em: 15 mai. 2023.

SANTOS, Mayra Taís Albuquerque. **Os desdobramentos teóricos da proporcionalidade na escola de educação básica**. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/3433>. Acesso em: 03 jan. 2023.

SANTOS, Roberta Alvarenga dos; GRIPP, Luiza Ressiguiier; BARRETO, Tatiana Corrêa Campos. O ensino de proporcionalidade com uma abordagem lúdica por meio da robótica educacional. **Educação matemática em revista**, Brasília, v. 26, n. 73, p. 170-181, 2021. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/24019/1/Alvarenga2021O.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2022.

SILVA, Cândido dos Santos; POTY, João Alves; MARQUES, Altyvir Lopes. Modelagem matemática e computacional no conteúdo de função. **Revista de gestão, sustentabilidade e negócios**, Porto Alegre, v. 3, n. 2, p. 97-107, out. 2015. Disponível em: <https://www.saofranciscocodeassis.edu.br/rgsn/arquivos/RGSN06/Modelagem%20matematica%20e%20computacional.%20SILVA.%20POTY.%20MARQUES.p.97-117.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2022.

SILVA, José Gleison Alves da. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO): uma Engenharia Didática de Formação (EDF) no curso de licenciatura em matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) para o ensino de geometria plana**. 2020. 176 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <http://biblioteca.ifce.edu.br/index.html>. Acesso em: 13 ago. 2022.

SILVA, Jose Gleison Alves da; VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Régis Vieira; MENEZES, Daniel Brandão. Engenharia Didática (ED): o uso de situações didáticas olímpicas para o ensino do teorema da base média do triângulo a partir de problemas da obmep. **Revista iberoamericana de tecnología en educación y educación en tecnología**, [s.l.], v. 31, n. 31, p. 88-100, 24 mar. 2022. Disponível em: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/134215/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 23 jul. 2023

SILVA, Juliano Pedro; LIMA, Alan Soares de; MOURA, Anderson Augusto de Oliveira; REIS, Maria Luiza Vieira; SANTOS, Sidicley Borba dos. Aplicação de métodos numéricos com o excel para a análise e modelagem Matemática da curva de contaminação da covid-19 nos estados do Brasil. **Caderno de graduação - ciências exatas e tecnológicas**, Alagoas, v. 6, n. 3, p. 57, 2021. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/fitsexatas/article/view/9523>. Acesso em: 8 jun. 2022.

SILVA, Rayara Barroca. **Conceito de proporcionalidade em geometria: um debate na formação inicial de professores com base na teoria histórico-cultural**. 2022. 225 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vila Velha, 2022. Disponível em:

<https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/2976>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SILVA, Silvana Costa; SILVA, Flaviana dos Santos; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Software modélus e modelagem matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática. **Revista thema**, [s. l.], v. 16, n. 4, p. 795–809, 2020. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1232>. Acesso em: 5 maio. 2022.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2018.

SMITH, David. **History of mathematics**: special topics of elementary mathematics. Vol. II. New York: Dover Publications, 1958.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática**: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica. 2016. 250 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016. Disponível em: <https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/server/api/core/bitstreams/3ddd00a6-cf74-4052-8e7f-3fade89c9da6/content>. Acesso em: 03 mar. 2022.

SOUSA, Renata Teófilo de; ALVES, Francisco Régis Vieira. O ensino de função quadrática com arrimo do simulador phet: uma prática analisada com base na teoria dos conceitos figurais. **Investigação e práticas em educação em ciências, matemática e tecnologia**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 81-101, 2022. Disponível em: <https://apeduc revista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/252>. Acesso em: 12 set. 2022.

SOUSA, Renata Teófilo de; AZEVEDO, Italcândia Ferreira de; ALVES, Francisco Régis Vieira. O geogebra 3D no estudo de projeções ortogonais amparado pela teoria das situações didáticas. **Jornal internacional de estudos em educação matemática**, [s. l.], v. 14, n. 1, p. 92–98, 30 abr. 2021. Disponível em: <https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/8941>. Acesso em: 13 jan. 2023.

SOUSA, Rosalide Carvalho de; SILVA, José Gleison Alves da; ALVES, Francisco Régis Vieira; FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes; MENEZES, Daniel Brandão. Teoria das situações didáticas e o ensino remoto em tempos de pandemia: uma proposta para o ensino do conceito de volume por meio da plataforma google meet e o software geogebra. **Revista iberoamericana de tecnología en educación y educación en tecnología**, [s. l.], n. 28, p. 174-183, 1 abr. 2021. Disponível em: <https://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/TEyET/article/view/1522>. Acesso em: 15 fev. 2022.

SOUZA JÚNIOR, Airton Wagner de. **Uso do goftware geogebra e modelagem matemática no ensino de funções**. 2018. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2018. Disponível em: <http://bdtd.ufj.edu.br:8080/handle/tede/9200>. Acesso em: 12 out. 2022.

SOUZA, Carla Maria Pinto; LIMA, Anna Paula de Avellar Brito. O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino de progressão aritmética. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 22, n. 2, p. 31–61, 2014. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646566>. Acesso em: 15 mar. 2022.

SPINILLO, Alina Galvão. Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. **Proposições**, [s. l.], v. 5, n. 1, p. 109-114, mar. 1994. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1803/13_artigo_spinilloag.pdf. Acesso em: 19 jan. 2022.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, [s. l.], v. 21, n. 39, p. 155-168, jan./jun. 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/28793/1/Teixeira2013Um.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2022.

TOBIAS, Petrina Rúbria Nogueira Avelar. **Sala de aula invertida na educação Matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade**. 2018. 168 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação e Docência, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-B2ZNH5>. Acesso em: 15 abr. 2022.

VASCONCELOS, Alana Danielly; FERRETE, Anne Alilma Silva Souza; LIMA, Ivonaldo Pereira de. Formação docente para o uso dos aplicativos do *google for education* em sala de aula. **Revista ibero-americana de estudos em educação**, Araraquara, v. 15, n. 4, p. 1877-1887, 2020. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/12741>. Acesso em: 23 out. 2023.

VEIT, Eliane A.; TEODORO, Vitor Duarte. Modelagem no ensino: aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. **Revista brasileira de ensino de física**, [s. l.], v. 24, p. 87-96, 2002. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NjZPGDLdySCDR5zMnYDp9Wh/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 02 mar. 2022.

ZANELLA, Liane Carly Hermes. **Metodologia da pesquisa**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006. 134 p.

APÊNDICE A – RESPOSTAS DOS QUESTIONÁRIOS PELOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Apresenta-se, a seguir, as respostas dos estudantes ao questionário aplicado no último encontro. O questionário continha seis perguntas, sendo que quatro delas utilizavam a escala *likert* de cinco pontos (1- Discordo totalmente, 2- Discordo parcialmente, 3- Não concordo nem discordo, 4- Concordo parcialmente e 5- Concordo totalmente) e as outras duas pediam que os estudantes descrevessem sobre dificuldades e sobre o que mais gostaram na experiência de participar da pesquisa. O instrumento completo pode ser visto no APÊNDICE C.

O Quadro 6 mostra as questões utilizadas para avaliar a vivência com as situações didáticas com a utilização do *Modellus* na perspectiva do estudante.

Quadro 6 – Questões utilizadas no questionário aplicado com os estudantes

1. Esta experiência me proporcionou novos aprendizados sobre os conceitos de Razão e Proporção.
2. A simulação e a modelagem computacionais me permitiram um aprendizado mais dinâmico e atrativos de conceitos matemáticos.
3. O professor deveria utilizar recursos desse tipo mais frequentemente para ensinar Matemática.
4. As situações apresentadas são melhores do que aquelas que só usam papel e caneta.

Fonte: elaborado pela autora (2023).

Para essas quatro perguntas todos os participantes marcaram 5, concordando plenamente com as afirmações. Os estudantes mostraram entusiasmo ao falar sobre a experiência vivenciada e demonstraram engajamento e interesse na pesquisa. Nesse momento perguntaram sobre novas pesquisas na escola e sobre a publicação desta. Então, foi explicado que os estudantes seriam informados sobre outras pesquisas, sobre a possível publicação desta e que, caso publicada, seriam informados.

A questão que perguntava sobre as dificuldades enfrentadas durante a aplicação das situações didáticas obteve as respostas indicadas no Quadro 7.

Quadro 7 – Dificuldades apontadas pelos estudantes

Achei algumas questões difíceis, mas nada que com a ajuda do computador não desse pra resolver.
Eu sabia resolver o problema, dar a resposta, mas os cálculos que tinha que deixar na folha senti dificuldade.
Não sei dizer o que achei difícil. Achei muito legal ter participado e gostaria que tivesse mais.
Não sei responder. Não tive tantas dificuldades.
Eu tive um pouco de dificuldade no começo, pois tenho muita dificuldade de aprender, demoro um pouco.
Não tive tantas, as que tive consegui resolver.

Fonte: arquivo pessoal.

O Quadro 8 descreve a resposta dos estudantes sobre o que eles mais gostaram nos encontros.

Quadro 8 – Respostas dos estudantes sobre o que eles mais gostaram

Gostei de tudo. Do aprendizado e da diversão resolvendo as questões.
Gostei que consegui entender o que é proporção.
Gostei da forma que se passou o aprendizado.
A forma de ensinar usando simulação e modelagem computacionais, o que tornou tudo mais fácil.
Aprender proporção enquanto conversava com os colegas. Gostei que ficamos todos juntos, unidos etc.
Tudo. Os encontros foram ótimos.

Fonte: arquivo pessoal.

APÊNDICE B – QUESTÕES DO SPAECE NAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

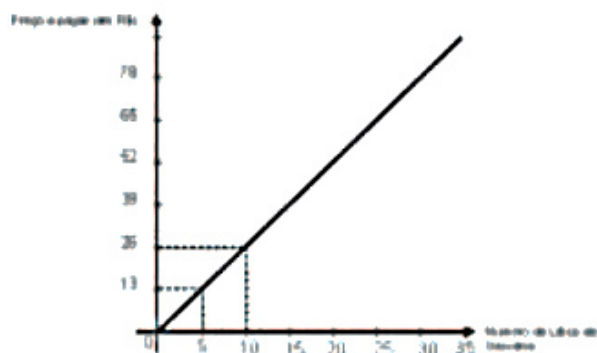
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
**Situações didáticas com o uso da Simulação e Modelagem computacionais para o ensino
de Razão e Proporção**
Professora/Pesquisadora: Emanuela Moura

Nome: _____ Turma: _____

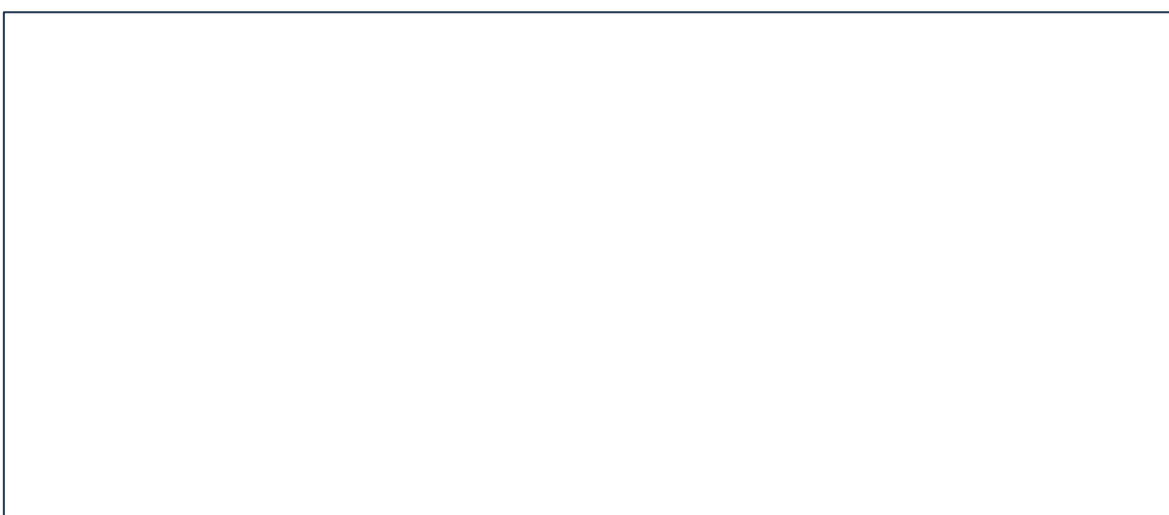
Prezado estudante, responda as questões abaixo. Suas respostas serão mantidas em confidencialidade e serão utilizadas apenas para fins científicos. Por favor, explique seu raciocínio sempre que for possível. Agradecemos sua colaboração neste estudo!

1. (M120285ES - SPAECE - Adaptada) Um caminhão que transportava combustível estava carregado com 30.000 litros de gasolina, quando chegou em um posto para descarregar. A mangueira usada para descarregar o caminhão despeja a mesma quantidade de gasolina por minuto, demorando 120 minutos para ficar vazio. Após quantos minutos, depois do início da descarga, restavam 100 litros de gasolina no tanque do caminhão?

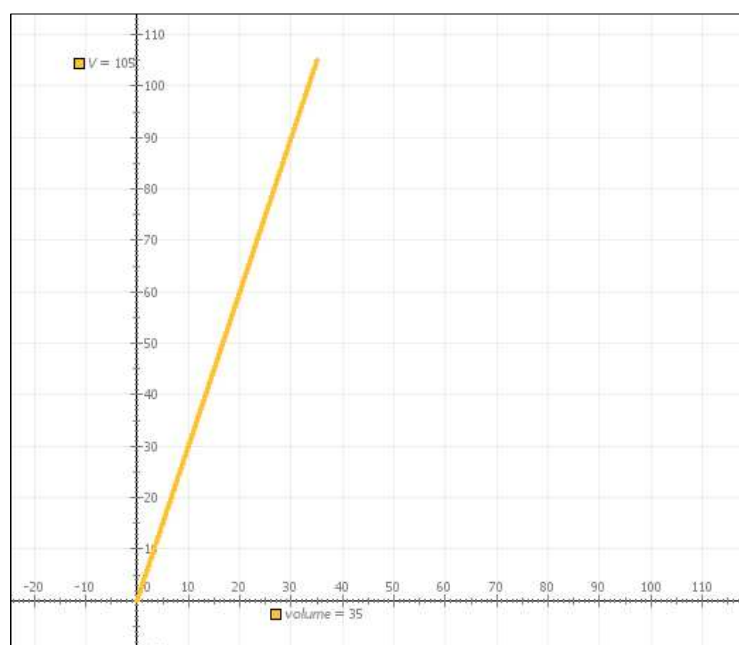
0. (M08D13I01FWM - SPAECE - Adaptada) Renato foi abastecer o seu carro no posto TELES. Observando os números que giravam no mostrador da bomba, ele construiu em sua agenda o gráfico abaixo.

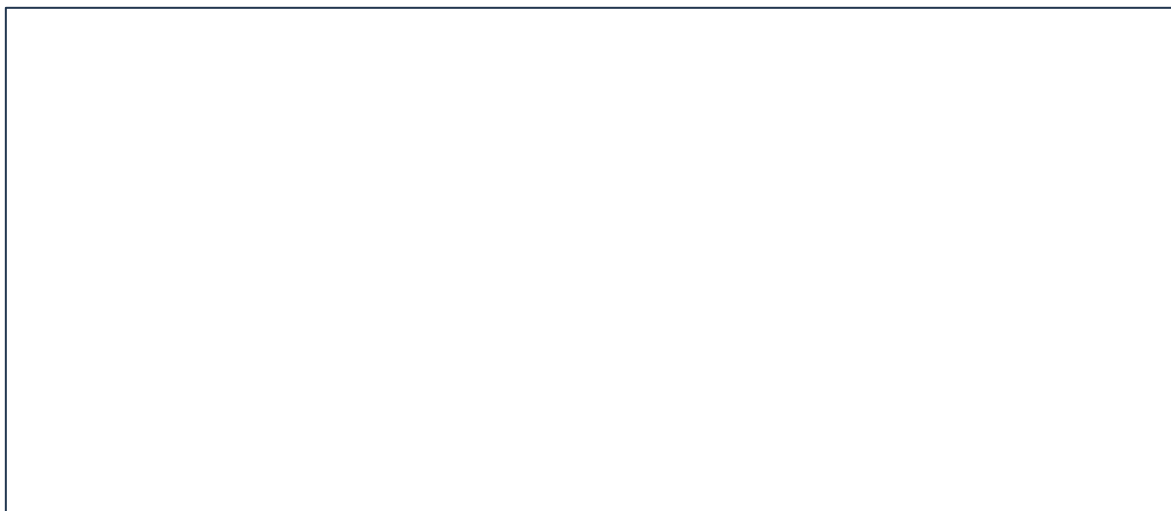


a) Qual valor do litro de gasolina no posto TELES? Justifique.

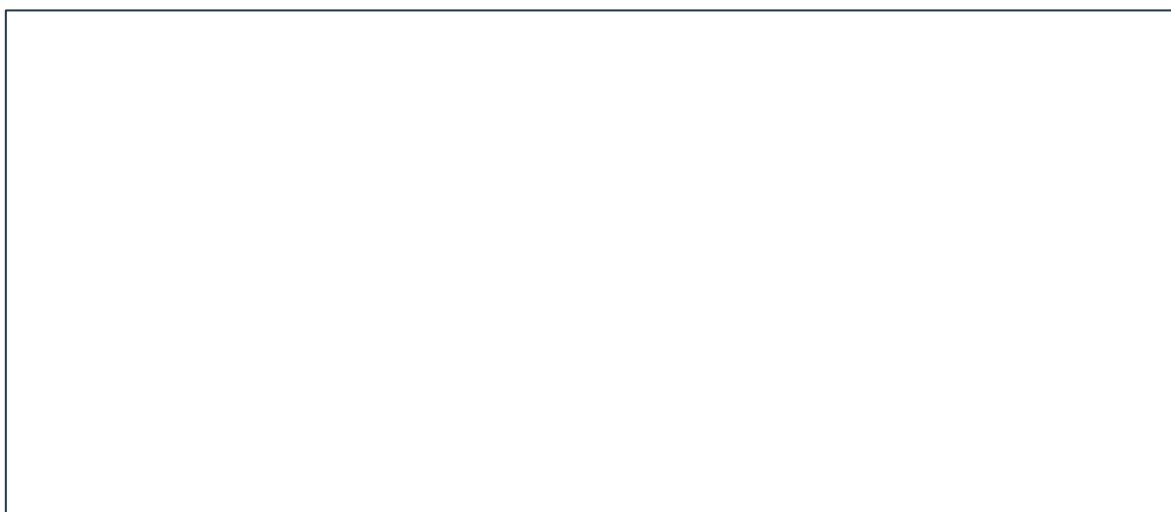


b) Na semana seguinte, quando foi abastecer novamente o seu carro, Renato construiu um novo gráfico. É possível verificar uma alteração no valor do combustível? Justifique.





c) Na situação apresentada no item b, que lei de formação pode indicar a relação entre o valor a ser pago, em reais, em função do volume de combustível, em litros, abastecido?





UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
**Situações didáticas com o uso da Simulação e Modelagem computacionais para o ensino
de Razão e Proporção**
Professora/Pesquisadora: Emanuela Moura

Nome: _____ Turma: _____

Prezado estudante, responda as questões abaixo. Suas respostas serão mantidas em confidencialidade e serão utilizadas apenas para fins científicos. Por favor, explique seu raciocínio sempre que for possível. Agradecemos sua colaboração neste estudo!

(AMCF6M13_SPAECE_Adaptada) Para dar aula em uma escola, um professor dirige com uma velocidade média de 60km/h. Ele percebe que, em média, seu carro consome 1 litro a cada 10 km.

a) Se durante o seu trajeto para o trabalho ele gastou 3 litros de gasolina, quanto tempo ele demorou para chegar até a escola?

b) Se ocorreu um imprevisto e o professor tem que ir por um caminho 1km mais distante. Qual terá que ser a velocidade média do carro para que o tempo necessário para deslocar-se até a escola seja o mesmo?



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
**Situações didáticas com o uso da Simulação e Modelagem computacionais para o ensino
de Razão e Proporção**
Professora/Pesquisadora: Emanuela Moura

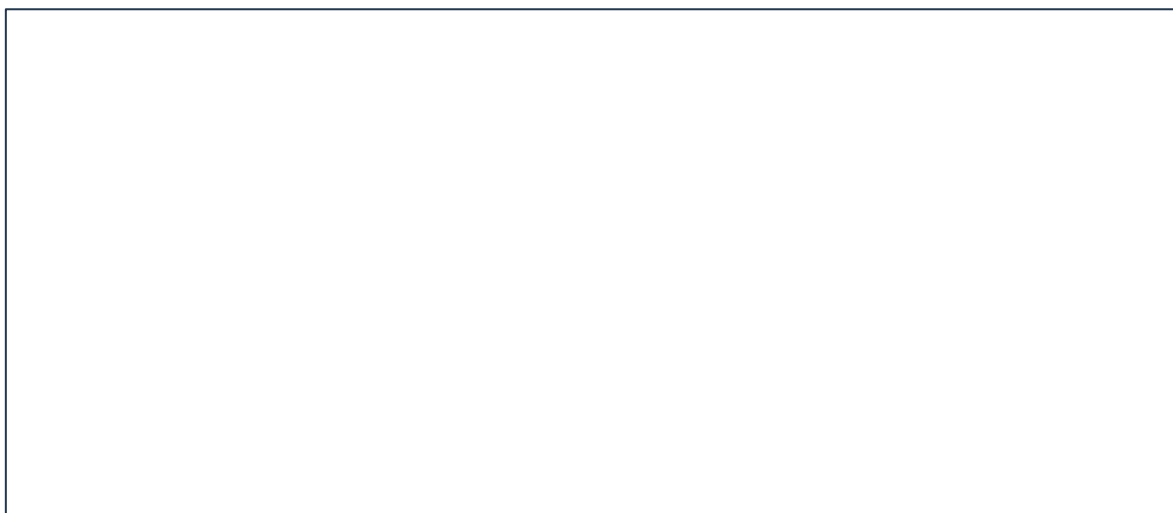
Nome: _____ Turma: _____

Prezado estudante, responda as questões abaixo. Suas respostas serão mantidas em confidencialidade e serão utilizadas apenas para fins científicos. Por favor, explique seu raciocínio sempre que for possível. Agradecemos sua colaboração neste estudo!

(M120179ES - SPAECE - Adaptada) Duas caixas d'água iguais e cúbicas, cujas dimensões medem 4 dm, foram instaladas no sistema de vasos comunicantes, ligadas por canos no fundo. Esse sistema iguala o nível de água das duas caixas. Entre as caixas existe um registro que permite a passagem de água quando aberto. Entre as caixas existe um registro que permite a passagem de água quando aberto. Com esse registro fechado a primeira caixa d'água foi completamente cheia. Depois o registro foi aberto e o nível da água nas duas caixas equilibrou, conforme a simulação, em que considera-se o tempo em minutos. Desprezando a quantidade de água nos canos, responda:

a) Qual o volume de água em cada uma das caixas após o equilíbrio no nível da água?

b) Qual a altura ocupada pela água na caixa 2, quando o volume ocupado nessa caixa for $16dm^3$?



APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ESTUDANTES



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Prezado estudante, solicito que responda o questionário a seguir seguindo as orientações abaixo. Não é necessário que você se identifique. Desde já, agradecemos a sua colaboração nesse estudo.

Orientações:

Em uma escala de 5 pontos, sendo 1 para discordo totalmente e 5 para concordo totalmente, selecione a opção segundo com a numeração abaixo:

- 1- Discordo totalmente
- 2- Discordo parcialmente
- 3- Não concordo nem discordo
- 4- Concordo parcialmente
- 5- Concordo totalmente

- 1) Esta experiência lhe proporcionou novos aprendizados sobre os conceitos de Razão e Proporção.

Discordo totalmente	1 <input type="radio"/>	2 <input type="radio"/>	3 <input type="radio"/>	4 <input type="radio"/>	5 <input type="radio"/>	Concordo totalmente
---------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------

- 2) A simulação e modelagem computacionais permitem um aprendizado mais dinâmico e atrativo de conceitos matemáticos.

Discordo totalmente	1 <input type="radio"/>	2 <input type="radio"/>	3 <input type="radio"/>	4 <input type="radio"/>	5 <input type="radio"/>	Concordo totalmente
---------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------

- 3) O professor deveria utilizar recursos desse tipo mais frequentemente para ensinar Matemática.

Discordo totalmente	1 <input type="radio"/>	2 <input type="radio"/>	3 <input type="radio"/>	4 <input type="radio"/>	5 <input type="radio"/>	Concordo totalmente
---------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------

- 4) As situações apresentadas são melhores do que aquelas que só usam papel e caneta.

Discordo totalmente	1 <input type="radio"/>	2 <input type="radio"/>	3 <input type="radio"/>	4 <input type="radio"/>	5 <input type="radio"/>	Concordo totalmente
------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	------------------------

5) Quais dificuldades você enfrentou para realizar as atividades propostas?

6) O que você mais gostou nessa experiência?

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (no caso do menor)

Você está sendo convidado(a) como participante da pesquisa: **SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO.**

Nesse estudo pretendemos descrever como os alunos do último ano do Ensino Fundamental aprendem os conceitos de Razão e Proporção diante de uma abordagem pautada no Construcionismo desenvolvendo simulações e modelos computacionais.

A motivação desse estudo parte da atual dinâmica vivenciada na sociedade que exige que os indivíduos possuam conhecimentos que venham a contribuir para suas práticas cotidianas e para um pensamento crítico e reflexivo de situações. Considerando esses conhecimentos, tem-se que a Matemática possibilita o desenvolvimento das habilidades de criar, raciocinar, representar, simular, modelar e comunicar. Dentre os conceitos matemáticos, destacam-se os conceitos de Razão e Proporção que ajudam a compreender assuntos considerados essenciais da Matemática e das ciências. Nesta perspectiva, a pesquisa tem por finalidade, a realização de um estudo sobre o processo de aprendizagem dos conceitos de Razão e Proporção na última etapa do Ensino Fundamental, através da aplicabilidade do *Software Modellus* como instrumento metodológico, embasado na Teoria do Construcionismo.

Para este estudo serão adotados o(s) seguinte(s) procedimento(s): A estratégia metodológica dessa pesquisa é a Engenharia Didática, que possui uma abordagem qualitativa. Para a coleta dos dados, os participantes serão divididos em duplas. Na etapa de experimentação, serão realizados 5 encontros, com a finalidade de:

Encontro 1 - Aplicação do pré-teste, com 7 questões, para sondagem das aprendizagens;

Encontro 2 - Aplicação das Situações Didáticas 1 e 2;

Encontro 3 - Aplicação das Situações Didáticas 3 e 4;

Encontro 4 - Aplicação do pós-teste, com 7 questões, a fim de conhecer as contribuições das situações didáticas para a aprendizagem dos conceitos de Razão e Proporção;

Encontro 5 - Aplicação do questionário de engajamento, com 4 questões e discussão sobre o processo vivenciado, junto aos participantes.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta riscos mínimos relacionados à sua escrita e à sua fala. Você pode ficar exposto em relação a suas ideias, pensamentos e ações. No entanto, como os dados coletados serão escritos e não no formato de imagens, você não será exposto publicamente por meio de fotos e filmagens. Além disso, seu nome de estudante não será revelado, uma vez que serão utilizados pseudônimos para o processo de análise de dados. A divulgação das informações será realizada entre os profissionais estudiosos do assunto. Pode haver riscos de ordem psicológica podendo causar constrangimento, vergonha, cansaço e desinteresse. Entretanto os procedimentos metodológicos foram planejados para amenizar esses desconfortos. Caso sinta algum desconforto poderá interromper a participação e, se houver

interesse, poderá conversar com a pesquisadora sobre o assunto. Você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos e, após esse tempo, serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma via será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____, portador(a) do documento de Identidade _____, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar, se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma via deste Termo de Assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Fortaleza, ____ de _____ de _____.

Assinatura do(a) menor

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Endereço d(os, as) responsável(is) pela pesquisa:

Nome: Emanuela Moura de Melo Castro Instituição: Universidade Federal do Ceará Endereço: Av. Humberto Monte, s/n – Campus do Pici Telefones para contato: 85 992246280

<p>ATENÇÃO: Se você tiver alguma consideração ou dúvida, sobre a sua participação na pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFC/PROPESQ – Rua Coronel Nunes de Melo, 1000 - Rodolfo Teófilo, fone: 3366-8344/46. (Horário: 08:00-12:00 horas de segunda a sexta-feira).</p>

<p>O CEP/UFC/PROPESQ é a instância da Universidade Federal do Ceará responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos.</p>

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Solicito a sua autorização como responsável pelo menor, convidado pela Mestranda Emanuela Moura de Melo Castro, a participar da pesquisa intitulada “**SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO**”. O convidado pelo qual você é responsável, só deverá participar da pesquisa, com a sua autorização. Leia atentamente as informações abaixo e faça qualquer pergunta que desejar, para que todos os procedimentos desta pesquisa sejam esclarecidos.

A pesquisa será realizada no ano de 2022 no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Durante o período da pesquisa serão realizados cinco encontros, para coleta dos dados deste estudo, conforme a descrição abaixo:

Encontro 1 - Aplicação do pré-teste, com 7 questões, para sondagem das aprendizagens;

Encontro 2 - Aplicação das Situações Didáticas 1 e 2;

Encontro 3 - Aplicação das Situações Didáticas 3 e 4;

Encontro 4 - Aplicação do pós-teste, com 7 questões, a fim de conhecer as contribuições das situações didáticas para a aprendizagem dos conceitos de Razão e Proporção;

Encontro 5 - Aplicação do questionário de engajamento, com 4 questões e discussão sobre o processo vivenciado, junto aos participantes.

A análise de dados é realizada mediante a comparação dos resultados obtidos, observando-se o que foi estritamente escrito e/ou falado pelo seu(sua) filho(a). Com o objetivo de aprimorar os estudos sobre aprendizagem na Educação Básica mediante o uso das tecnologias digitais, um dos benefícios que a pesquisa pode trazer para seu(sua) filho(a) vincula-se ao desenvolvimento de reflexões sobre processos diferenciados de aprendizagem, com trabalhos em grupo e desenvolvidos a partir do protagonismo dos(as) estudantes que constroem materiais autorais digitais educacionais ao mesmo tempo que constroem conhecimentos. Outro benefício está relacionado diretamente ao processo de desenvolvimento acadêmico de alunos e alunas da Educação Básica, por meio da vivência com instrumentos e métodos de coleta de dados.

Os riscos de participação em pesquisa desse gênero são mínimos, vinculam-se à escrita e à fala dos participantes. Podem ficar expostos em relação a suas ideias, pensamentos e ações. No entanto, como os dados coletados serão escritos e não no formato de imagens, nenhum participante será exposto publicamente por meio de fotos e filmagens. Além disso, nenhum nome de estudante será revelado, uma vez que serão utilizados pseudônimos para o processo de análise de dados. A divulgação das informações será realizada entre os profissionais estudiosos do assunto. Pode acontecer, talvez, algum desconforto causado pelo cansaço e/ou desinteresse, minimizado por meio do diálogo com a pesquisadora, que o deixará livre a se envolver nos trabalhos ou não.

Os resultados obtidos serão utilizados somente para esta pesquisa e não haverá pagamento por participação na investigação acadêmica. Seus(Suas) filhos(as) participam de forma voluntária.

A qualquer momento seu(sua) filho(a) poderá recusar a continuar participando da pesquisa, podendo retirar o seu consentimento como responsável, sem que isso lhe traga qualquer prejuízo. Endereço d(os, as) responsável(is) pela pesquisa:

Nome: Emanuela Moura de Melo Castro
 Instituição: Universidade Federal do Ceará
 Endereço: Av. Humberto Monte, s/n – Campus do Pici
 Telefones para contato: 85 992246280

ATENÇÃO: Se você tiver alguma consideração ou dúvida, sobre a participação do estudante, pelo qual você é responsável, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFC/PROPESQ – Rua Coronel Nunes de Melo, 1000 - Rodolfo Teófilo, fone: 3366-8344/46. (Horário: 08:00-12:00 horas de segunda a sexta-feira).
 O CEP/UFC/PROPESQ é a instância da Universidade Federal do Ceará responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos.

O abaixo assinado _____, _____ anos, RG: _____, declara que é de livre e espontânea vontade que permite que seu(sua) filho(a) participe da pesquisa. Eu declaro que li cuidadosamente este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e que, após sua leitura, tive a oportunidade de fazer perguntas sobre o seu conteúdo, como também sobre a pesquisa, e recebi explicações que responderam por completo minhas dúvidas. E declaro, ainda, estar recebendo uma via assinada deste termo.

Fortaleza, ____ / ____ / ____

 Nome do responsável pelo(a) menor
 participante da pesquisa

 Assinatura do responsável pelo(a) menor
 participante da pesquisa

 Nome do responsável pelo(a)
 menor participante da pesquisa

Data

Assinatura

 Nome do pesquisador

Data

Assinatura

 Nome do profissional que
 aplicou o TCLE

Data

Assinatura

**APÊNDICE F – DOCUMENTOS SUBMETIDOS NA PLATAFORMA BRASIL
ESCOLA DE ENSINO FUNDAMENTAL FRANCISCO DOMINGOS DA SILVA**

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL À REALIZAÇÃO DE PROJETO DE PESQUISA

Declaro, para fins de comprovação junto ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Ceará-CEP/UFC/PROPESQ, que a **ESCOLA DE ENSINO FUNDAMENTAL FRANCISCO DOMINGOS DA SILVA** contém toda infraestrutura necessária em suas instalações para realização da pesquisa **“SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA”**. a ser realizada pela pesquisadora Emanuela Moura de Melo Castro.

Fortaleza, 22 de agosto de 2022.

Marco Vinícius Mota Maciel
Diretor Escolar



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

**CARTA DE SOLICITAÇÃO DE APRECIÇÃO DE PROJETO AO COMITÊ
DE ÉTICA EM PESQUISA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ –
CEP/UFC/PROPESQ**

Ao: Dr. Fernando Antônio Frota Bezerra

Em: 22/08/2022

Coordenador do CEP/UFC/PROPESQ

Solicitamos a V.Sa. apreciação e análise, junto ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Ceará-CEP/UFC/PROPESQ, do projeto intitulado **“SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA”**.

Os pesquisadores possuem inteira responsabilidade sobre os procedimentos para realização dessa pesquisa, bem como estão cientes e obedecerão aos preceitos éticos de pesquisa, pautados na Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde.

Atenciosamente,

Emanuela Moura de Melo Castro
Pesquisador Principal

Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos
Orientador



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

DECLARAÇÃO DE ORÇAMENTO

Declaro, para os devidos fins, que os custos detalhados abaixo, referentes à execução da pesquisa intitulada “**SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA**”, serão custeados pelo próprio pesquisador:

ITEM	VALOR R\$
Manutenção de notebooks	200,00
Tinta para impressora	200,00
Resmas de papel A4	100,00
Total	500,00

Fortaleza, 22 de agosto de 2022.

Emanuela Moura de Melo Castro
Pesquisador Principal



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

DECLARAÇÃO DE CONCORDÂNCIA

Declaramos, para os devidos fins, que concordamos em participar do projeto de pesquisa intitulado “**SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA**” que tem como pesquisador principal, Emanuela Moura de Melo Castro, e que desenvolveremos o projeto supracitado de acordo com preceitos éticos de pesquisa, pautados na Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde.

Fortaleza, 22 de agosto de 2022.

Emanuela Moura de Melo Castro

Pesquisador Principal

Prof. Dr. Francisco Herbert Lima Vasconcelos

Orientador

TERMO DE COMPROMISSO PARA UTILIZAÇÃO DE DADOS

Os pesquisadores do projeto de pesquisa intitulado **“SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA”** comprometem-se a preservar a privacidade dos dados nos questionários de sondagem e de avaliação, bem como os dados coletados no desenvolvimento do projeto científico, realizado junto aos sujeitos participantes deste estudo. Concordam e assumem a responsabilidade de que estas informações serão utilizadas única e exclusivamente para execução do presente projeto. Comprometem-se, ainda, a fazer a divulgação das informações coletadas somente de forma anônima e que a coleta de dados da pesquisa somente será iniciada após aprovação do sistema CEP/CONEP.

Salientamos, outrossim, estarmos cientes dos preceitos éticos da pesquisa, pautados na Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde.

Fortaleza, 22 de agosto de 2022.

Emanuela Moura de Melo Castro
Pesquisador Principal

APÊNDICE G – PRODUÇÕES CIENTÍFICAS E PARTICIPAÇÃO EM CURSOS DE FORMAÇÃO

Quadro 9 - Produções de artigos aprovados e submetidos à revistas científicas

TÍTULO DO ARTIGO	REVISTA	QUALIS 2016-2020
O uso de tecnologias digitais no ensino da proporcionalidade: uma revisão sistemática.	RSD Journal	C
Engenharia didática para a relação entre grandezas diretamente proporcionais e funções lineares: uma análise preliminar e uma análise a priori	Indagatio Didactica	A3
Cultura maker no Ensino de Ciências na Educação Básica: uma revisão sistemática da literatura	Revista Educar Mais	B3
O uso das tecnologias digitais no ensino de Matemática numa perspectiva construcionista	Revista Educação Pública	B1
Uma proposta baseada na Teoria das Situações Didáticas para o ensino da proporcionalidade a partir de um problema do SPAECE	Revista Cocar	A2
Interdisciplinaridade no ensino de Matemática: uma revisão sistemática da literatura	Revista Docentes	A4

Fonte: elaborado pela autora (2023).

Quadro 10 – Participação em cursos de extensão durante o mestrado ENCIMA

Curso de Introdução à Pesquisa e à Pós-Graduação	Curso de formação continuada do LDE
Tecnologia na Educação, Ensino Híbrido e Inovação Pedagógica	Curso de formação continuada do LDE
Pensamento Computacional para Todos	Universidade Federal Fulminense (UFF)
Aprendizagem Integral, Gestão Escolar e Avaliação Educacional	Curso de formação continuada do LDE
Tecnologias Educacionais, Aprendizagem e Inovação Pedagógicas	Curso de formação continuada do LDE

Fonte: elaborado pela autora (2023).

ANEXO A – APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA

UFC - UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ /



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: SIMULAÇÃO E MODELAGEM COMPUTACIONAIS COMO RECURSOS PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONSTRUCIONISTA

Pesquisador: EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 63473722.9.0000.5054

Instituição Proponente: Universidade Federal do Ceará/ PROPESQ

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.726.936

Apresentação do Projeto:

A Razão e a Proporção são conceitos considerados essenciais para compreender diversos temas da Matemática e das Ciências, são também fundamentais para solucionar problemas cotidianos. Esses conceitos vêm sendo aplicados em avaliações externas, como as do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), cujos resultados demonstram a falta de apropriação deles. O ensino da Razão e Proporção pelo uso de regras e de repetições é apontado como um fator que dificulta a aplicação correta desses conceitos pelos estudantes.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

-Analisar como ocorre a aprendizagem dos conceitos de Razão e Proporção de estudantes do 9º ano do ensino fundamental mediante a aplicação de situações didáticas com a utilização do software Modellus numa perspectiva construcionista.

Objetivo Secundário:

-Conhecer aspectos históricos e características de ensino dos conceitos de Razão e Proporção;Elaborar situações didáticas que utilizem o software Modellus para o ensino de Razão e Proporção que estejam pautadas no Construcionismo;

-Identificar as contribuições das situações didáticas para a compreensão dos conceitos de Razão e Proporção através da comparação dos resultados obtidos antes e depois da aplicação

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000

Bairro: Rodolfo Teófilo

CEP: 60.430-275

UF: CE **Município:** FORTALEZA

Telefone: (85)3366-8344

E-mail: comepe@ufc.br

Continuação do Parecer: 5.726.936

metodológica.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos

Mínimos

BENEFÍCIOS

Aprimoramento dos processos de aprendizagem com trabalhos em equipe, desenvolvidos a partir da elaboração de materiais com o uso de um software de modelagem e simulações computacionais. Além disso, apresenta-se como benefício o desenvolvimento acadêmico de estudantes da Educação Básica através da experiência com instrumentos e técnicas de coletas de dados.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto em questão está com a escrita razoável, de boa leitura e entendimento. Está incluído desenho do estudo, introdução, revisão, objetivos, metodologia, cronograma de atividades, orçamento e outros. A documentação exigida pela RESOLUÇÃO 466/2012/CNS/MS que regulamenta os estudos aplicados aos seres humanos está incluída.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos de apresentação do trabalho estão coerentes com o tema abordado e o rigor da ética em pesquisa

Recomendações:

O projeto de pesquisa está devidamente instruído para que o mesmo seja executado. Portanto o parecer é favorável à sua APROVAÇÃO.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2007518.pdf	06/09/2022 16:58:03		Aceito
Outros	CartadeSolicitacao.pdf	06/09/2022 16:53:53	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Outros	TERMO_DE_CONSENTIMENTO_02_0	06/09/2022	EMANUELA MOURA	Aceito

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000

Bairro: Rodolfo Teófilo

CEP: 60.430-275

UF: CE

Município: FORTALEZA

Telefone: (85)3366-8344

E-mail: comepe@ufc.br

Continuação do Parecer: 5.726.936

Outros	pdf	15:52:07	DE MELO CASTRO	Aceito
Outros	TermodeCompromisso.pdf	02/09/2022 12:20:33	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Outros	Curriculo.pdf	02/09/2022 12:19:59	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TERMO_DE_ASSENTIMENTO_0209.pdf	02/09/2022 12:03:47	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_PARA_O_CEP_Emanuela_0209.pdf	02/09/2022 12:00:10	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Folha de Rosto	FolhadeRostoComCarimbo.pdf	02/09/2022 11:58:11	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	31/08/2022 20:35:16	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Declaração de concordância	DeclaracaoConcordancia.pdf	31/08/2022 20:34:53	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	DeclaracaodaInstituicao.pdf	31/08/2022 20:32:08	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	31/08/2022 20:30:48	EMANUELA MOURA DE MELO CASTRO	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FORTALEZA, 27 de Outubro de 2022

Assinado por:
FERNANDO ANTONIO FROTA BEZERRA
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Cel. Nunes de Melo, 1000

Bairro: Rodolfo Teófilo

CEP: 60.430-275

UF: CE **Município:** FORTALEZA

Telefone: (85)3366-8344

E-mail: comepe@ufc.br