



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALESSANDRO PEIXOTO MAGALHÃES

ESTUDO DE CRITICALIDADE AUTO ORGANIZADA

FORTALEZA

2023

ALESSANDRO PEIXOTO MAGALHÃES

ESTUDO DE CRITICALIDADE AUTO ORGANIZADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M164e Magalhães, Alessandro Peixoto.

Estudo de Criticalidade Auto Organizada / Alessandro Peixoto Magalhães. – 2023.

41 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

1. Sistemas Complexos. 2. Ponto Crítico. 3. Criticalidade Auto Organizada. 4. Lei de Potência. I. Título.

CDD 530

ALESSANDRO PEIXOTO MAGALHÃES

ESTUDO DE CRITICALIDADE AUTO ORGANIZADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 11/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de
Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dra Rosemayre Souza Freire
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todos que me prestaram suporte durante o período acadêmico e a quem, de alguma forma, esta leitura possa servir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e meu irmão, que foram exemplo, apoio e sustento de tantas formas, sendo sempre uma base firme no meu percurso acadêmico, como em qualquer outra situação.

Agradeço a minha namorada, que sempre acreditou em meu potencial e me estimulou a dar meu melhor.

Aos meus amigos dentro da universidade, novos e velhos, com quem partilhei dificuldades, alívios e risadas. Agradeço pelo companheirismo na leveza e no zelo, nas críticas e sugestões.

Ao meu orientador, por toda a instrução e paciência durante esse trabalho, pelos valiosos conselhos e por ter sido para mim modelo da profissão.

Aos professores cujos conhecimento e virtudes me inspiraram, pelo bom exercício de mentoria nesse curso desafiador. Agradeço em particular aos participantes da banca examinadora.

Aos demais colegas e funcionários do departamento aos quais me afeiçoei durante a rotina comum, pelas conversas amigáveis e pelos serviços prestados.

Por fim, agradeço a Deus, que permeou todas as realidades citadas, e a minha Mãe, que comigo esteve fielmente em todas as situações.

"Levantai os olhos para o alto e vede:
Quem criou estas coisas?"
(Isaías 40,26)

RESUMO

Neste trabalho, exploramos o conceito de Criticalidade Auto Organizada (CAO), um fenômeno pelo qual sistemas complexos evoluem naturalmente para um estado de transição de fase. Essa teoria propõe uma ligação interessante entre eventos cotidianos simples e desastres de grande escala, ambos resultantes de processos de auto organização. Para exemplificar a CAO, usamos a metáfora de uma pilha de areia que, ao receber grãos continuamente, mantém um ângulo específico de inclinação, simbolizando um estado perene de iminência de colapso, ou estado crítico. Neste trabalho, nós implementamos três modelos computacionais, conhecidos como Autômatos Celulares (AC), onde pixels em uma grade interagem e mudam de estado seguindo regras específicas. O primeiro modelo, chamado de "Pilha de Areia", foi proposto por Per Bak. O segundo é uma modificação do modelo de pilha de areia tradicional onde consideramos dissipação de energia. No terceiro, o modelo tradicional é modificado para considerar uma inclinação global fixa da pilha de areia. Observamos que, nesses sistemas auto organizados, ocorrem reestruturações abruptas, denominadas "avalanches", em todas as escalas espaciais possíveis dentro das limitações do tamanho do sistema. Essas avalanches seguem uma distribuição de frequência que adere a uma lei de potência com um expoente próximo a -1 , sugerindo uma consistência nas ocorrências críticas independentemente de sua magnitude. Finalmente, discutimos os parâmetros que podem induzir a emergência do estado crítico em cada modelo, bem como as condições necessárias para que um sistema desenvolva a característica de CAO. Este estudo não só esclarece aspectos da complexidade em sistemas, mas também oferece insights sobre a natureza interconectada de fenômenos aparentemente isolados, proporcionando uma compreensão mais profunda de como padrões simples podem levar a comportamentos complexos e imprevisíveis.

Palavras-chave: Sistemas Complexos; Ponto Crítico; Criticalidade Auto Organizada; Lei de Potência.

ABSTRACT

In this study, we investigate the Self-Organized Criticality (SOC), an intriguing phenomenon where complex systems spontaneously evolve towards a phase transition state. This concept unveils a compelling connection between ordinary daily occurrences and large-scale catastrophic events, both arising from the underlying principles of self-organization. To illustrate SOC, we employ the analogy of a continuously growing sandpile, which maintains a specific inclination angle, emblematic of a constant state of near-collapse, or a critical state. In this work, we implement three computational models, known as Cellular Automata (CA), where pixels in a grid interact and change state following specific rules. The first model, called "Sandpile Model", was proposed by Per Bak. The second is a modification of the traditional sand pile model where energy dissipation is taken into account. In the third, the traditional model is modified to consider a fixed global slope of the sandpile. In these self-organizing environments, we observed the occurrence of abrupt structural changes, termed "avalanches", spanning all feasible spatial dimensions within the confines of the system's size. Intriguingly, these avalanches exhibit a frequency distribution that aligns with a power law, marked by an exponent close to -1 . This pattern indicates a remarkable consistency in the manifestation of critical events, irrespective of their scale. Furthermore, we engage in a detailed discussion on the specific parameters that may trigger the onset of the critical state in each CA model, as well as the essential conditions conducive to the development of SOC characteristics in a system. This research not only sheds light on the complexities inherent in various systems but also provides valuable insights into the interconnected nature of phenomena that, at first glance, appear to be isolated. It enhances our understanding of the intricate ways simple patterns can evolve into complex and unpredictable dynamics.

Keywords: Complex Systems; Critical State; Self-Organized Criticality; Power-Law.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Falésias e nuvens na Praia da Pipa - CE	11
Figura 2 – Ilustração de uma célula com suas diferentes organelas	14
Figura 3 – Representação gráfica do Conjunto de Mandelbrot (BROOKS; MATELSKI, 1981)	15
Figura 4 – Lago Nasser, no Egito, exibindo fractalidade	16
Figura 5 – Ilustração de uma pilha de areia	17
Figura 6 – Tendência de crescimento da pilha de areia	18
Figura 7 – Avalanche resultante de uma perturbação no centro do sistema	19
Figura 8 – Estimativa das porcentagens para rede infinita 2D (à esquerda) e 3D (à direita)	22
Figura 9 – Porcentagens das células em rede infinita	23
Figura 10 – Comparação de algumas redes 200×200 com o estado crítico	23
Figura 11 – Estimativa da altura média das rede de tamanho infinito	24
Figura 12 – Distribuição dos parâmetros das avalanches para as redes bidimensionais.	25
Figura 13 – Distribuição dos parâmetros das avalanches para as redes tridimensionais.	25
Figura 14 – Leis de Potência para energia em redes tradicionais 2D	26
Figura 15 – Leis de Potência para energia em redes tradicionais 3D	26
Figura 16 – Fractal formado ao iniciar a simulação com 1.048.576 grãos na célula central	27
Figura 17 – Distribuição dos parâmetros para redes 100×100	28
Figura 18 – Leis de Potência para energia numa rede dissipativas 100×100	28
Figura 19 – Curvas sobrepostas para $\alpha = 0.10$	29
Figura 20 – Comparação entre os ângulos do estado crítico assistido e o auto organizado	30
Figura 21 – Relação linear entre ϕ_{cao} e ϕ_c	30
Figura 22 – Relação aparentemente linear entre ϕ_{cao} e $\log L$	31
Figura 23 – Relação complexa entre ϕ_{cao} e ε	31
Figura 24 – Histograma da distribuição de probabilidade no modelo de inclinação global fixa	32
Figura 25 – Monocamada de células de fibroblastos em cultura com ferimento	33

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Densidade de células para cada valor de n	22
Tabela 2 – Alturas médias $\langle z_L \rangle$ para cada L	24
Tabela 3 – Coeficientes das leis de potência das Figura 17 e 18 segundo a Equação 4.4 .	28
Tabela 4 – Densidade de células para cada valor de L nas redes 2D	39
Tabela 5 – Densidade de células para cada valor de L nas redes 3D	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO DA LITERATURA	13
2.1	Sistemas Complexos	13
2.2	Criticalidade	14
2.2.1	<i>Fractais</i>	15
3	CRITICALIDADE AUTO ORGANIZADA	17
3.1	Paradigma da Pilha de Areia	17
3.2	Modelo da Pilha de Areia	18
3.3	Modelo de Pilha de Areia Dissipativo	20
3.4	Modelo de Pilha de Areia com inclinação global fixa	20
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	22
4.1	Modelo de Pilha de Areia Tradicional	22
4.2	Modelo de Pilha de Areia Dissipativo	27
4.3	Modelo de Pilha de Areia com inclinação global fixa	29
4.4	Universalidade	32
4.5	Criticalidade e contingência	34
5	CONCLUSÕES	35
	REFERÊNCIAS	37
	APÊNDICE A –TABELAS DAS PORCENTAGENS DE CÉLULAS NO BTW	39

1 INTRODUÇÃO

Ao refletirmos sobre fenômenos e processos naturais, a noção de que mudanças ocorrem de maneira lenta e progressiva muitas vezes prevalece. Exemplos marcantes, como o Grand Canyon ou as falésias do litoral brasileiro, nos levam a contemplar o extenso período de erosão e sedimentação responsável por suas formações geológicas deslumbrantes. Similarmente, a Evolução Natural das espécies, que se desdobra ao longo de milhões de anos, resulta na rica diversidade biológica que observamos hoje.

Essa percepção de transformações graduais na natureza é também evidente em fenômenos diários. A formação de nuvens, um processo lento de condensação de vapor d'água, e o crescimento de plantas, com seus ciclos de germinação e florescimento ao longo das estações, exemplificam a natureza operando em uma escala temporal muitas vezes imperceptível, marcada por mudanças sutis e constantes.

Figura 1 – Falésias e nuvens na Praia da Pipa - CE



Fonte: Fotografia de Carlos Macapuna

De forma similar, associamos comumente as mudanças abruptas e intensas a situações singulares. Extinções em massa, conflitos globais significativos e a perda repentina de inúmeras células da pele em incidentes cotidianos são geralmente relacionados a circunstâncias específicas, como impactos de meteoros, instabilidades geopolíticas ou acidentes domésticos.

Contrariando essa visão, alguns sistemas exibem frequentemente alterações rápidas e, por vezes, dramáticas. Estes parecem estar perpetuamente à beira de uma mudança súbita, sensíveis a qualquer perturbação mínima. Nesse contexto, em 1987, Per Bak propôs a teoria da Criticalidade Auto Organizada – *Self-Organized Criticality* (SOC) – para descrever sistemas complexos que se encaminham espontaneamente para um estado crítico.

No Capítulo 2, exploraremos os conceitos de Complexidade e Criticalidade, fundamentais para entender o fenômeno estudado. No Capítulo 3, discutiremos o Paradigma da Pilha de Areia, utilizado para exemplificar a SOC, onde mudanças abruptas se manifestam como avalanches. Abordaremos como um sistema atinge esse ponto crítico espontâneo e o que se pode esperar dele nesse estado. Utilizaremos o modelo computacional *Sandpile Model* para analisar a geometria de um sistema com SOC e quantificar as "avalanches" que ocorrem. Além disso, investigaremos, ainda que brevemente, variações desse modelo que tentam simular com mais precisão um monte de areia real e sua dinâmica dissipativa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, oferecemos uma visão concisa de conceitos fundamentais que estabelecem as bases para uma compreensão mais profunda da Criticalidade Auto Organizada.

2.1 Sistemas Complexos

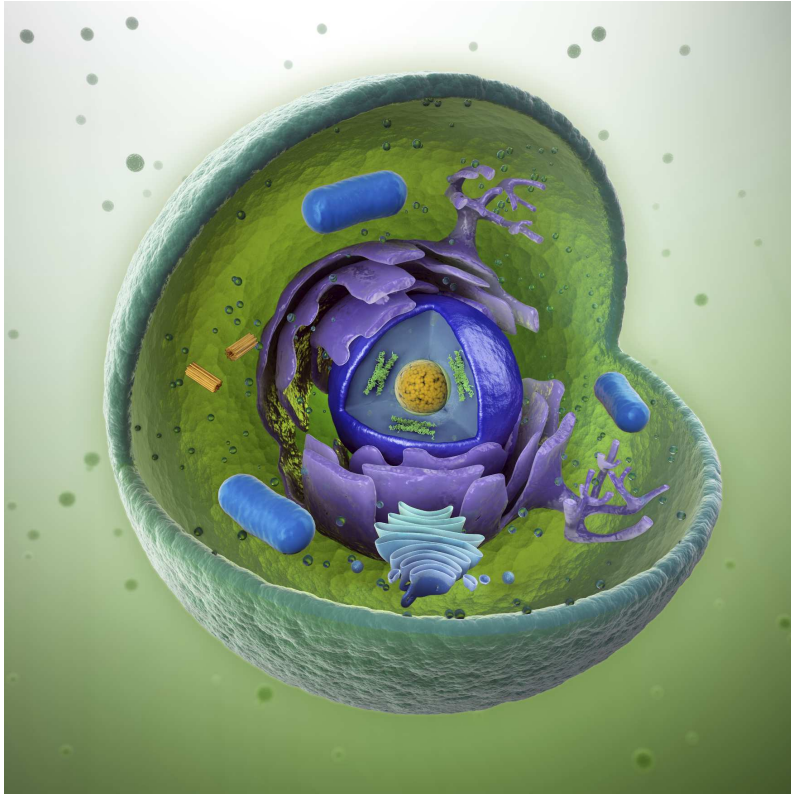
A ideia de complexidade surgiu organicamente na literatura científica (WEAVER, 1948) à medida que a Física expandiu sua aplicação para além da busca por leis universais, abordando situações que desafiam soluções simplistas. Sistemas complexos são distintos por apresentarem propriedades novas e inesperadas, oriundas da interação de numerosas partículas. Frequentemente, esses sistemas exibem comportamentos emergentes que não são diretamente dedutíveis das dinâmicas individuais de seus componentes. Um exemplo clássico é o Problema de Três Corpos (GOWERS *et al.*, 2010), que, apesar de basear-se meramente na Mecânica Newtoniana, revela uma natureza caótica onde pequenas variações nas condições iniciais das massas resultam em alterações drásticas em suas trajetórias.

Sistemas complexos frequentemente cruzam fronteiras disciplinares. Seus componentes podem ser estudados em um campo científico, enquanto suas propriedades emergentes despertam interesse em outro. Por exemplo, moléculas que provocam reações de oxidação ou redução são estudadas na Química, embora suas estruturas atômicas sigam leis da Física.

Diversos sistemas complexos, especialmente aqueles abertos à entrada de energia ou matéria, demonstram uma capacidade de se organizar espontaneamente. Uma célula, com sua intrincada rede de elementos funcionais, é um exemplo de organização notável (EIGEN, 1971). O mesmo princípio se aplica a organismos e comunidades, onde elementos distintos coexistem com uma ordem e coerência impressionantes.

Quer achemos espantoso ou plausível que um pequeno, mas altamente organizado grupo de átomos seja capaz de agir dessa forma, a situação não tem precedentes, sendo desconhecida em qualquer outro lugar além da matéria viva. (SCHRODINGER, 2012)

Figura 2 – Ilustração de uma célula com suas diferentes organelas



Fonte: Ervin Garcia

2.2 Criticalidade

Já na educação básica, somos introduzidos aos estados da matéria e seus pontos de fusão e ebulição. Esses conceitos formam a base para o entendimento da diversidade de sistemas na natureza que exibem diferentes fases de funcionamento em termos de organização, magnetização, solubilidade, entre outras.

Esses sistemas possuem um ponto crítico no qual ocorre uma transição significativa entre duas fases quaisquer, sendo uma delas mais ordenada que a outra. Geralmente, essa transição requer o ajuste deliberado de parâmetros, como se faz com a temperatura no processo da evaporação da água ou da perda das propriedades magnéticas de um ímã.

No ponto crítico, algumas propriedades tendem a divergir, sendo o comprimento de correlação o mais relevante para este estudo. Sua tendência ao infinito indica uma maior sensibilidade a perturbações locais, pois existe a possibilidade de que elas afetem o sistema como um todo, caracterizando um fenômeno independente de escala.

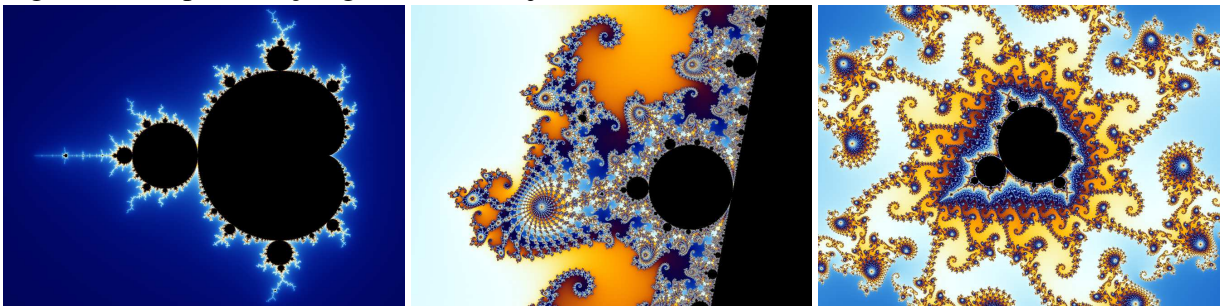
Com base nessa perspectiva, é pertinente abordar brevemente estruturas geométricas

frequentemente encontradas na natureza que compartilham essa característica.

2.2.1 *Fractais*

Fractais são estruturas geométricas complexas caracterizadas por sua autossimilaridade: ao observarmos qualquer parte de sua figura, independentemente do tamanho, identificamos um padrão global repetido. Essa singularidade lhes confere uma infinidade de detalhes em sua composição, revelando a interconexão entre o micro e o macro.

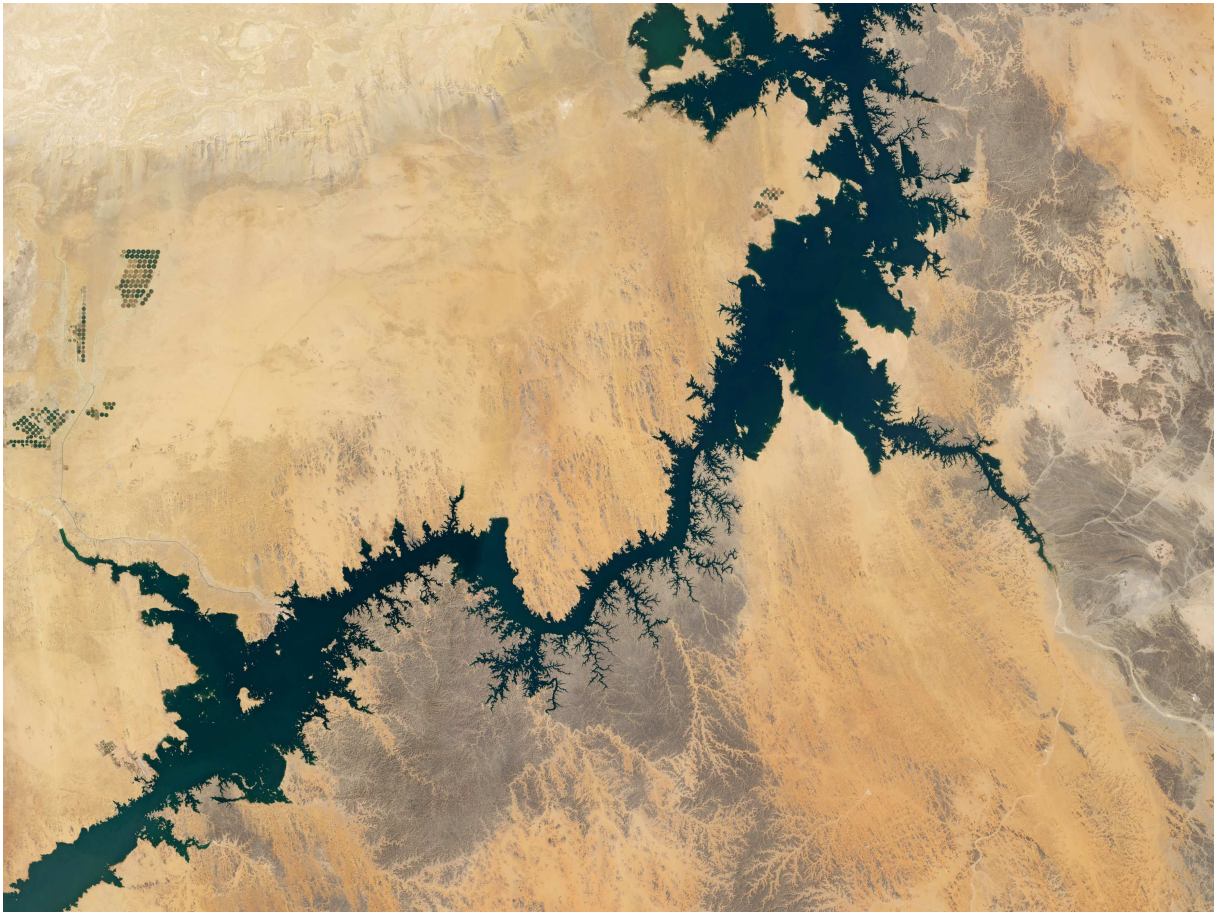
Figura 3 – Representação gráfica do Conjunto de Mandelbrot (BROOKS; MATELSKI, 1981)



Fonte: Gerado pelo físico Wolfgang Beyer (<https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Wolfgangbeyer/Templates>)
Nota: Ao darmos zoom suficiente na imagem original, observamos que ela torna a ser reconhecida

Essas estruturas fractais, que refletem um padrão geral em múltiplas escalas, têm uma presença marcante e fascinante na natureza, sendo observadas desde as curvas sinuosas das margens dos rios até as complexas morfologias de espécies vivas, como as intrincadas ramificações de árvores e a estrutura dos bronquíolos pulmonares. A ocorrência frequente desse fenômeno em diferentes contextos naturais sugere que possa existir uma propriedade intrínseca a esses sistemas que favorece a formação de fractais. Esta observação tem implicações significativas, indicando que a repetição de padrões em escalas variadas pode ser uma característica fundamental dos processos naturais (MANDELBROT, 1982).

Figura 4 – Lago Nasser, no Egito, exibindo fractalidade



Fonte: *NASA Earth Observatory* por Joshua Stevens (<https://earthobservatory.nasa.gov/images/146932/fueled-by-the-nile>)

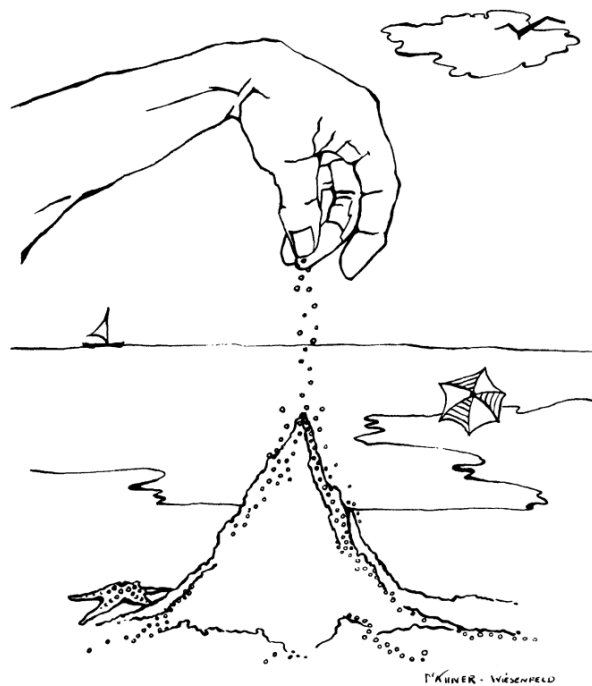
3 CRITICALIDADE AUTO ORGANIZADA

Neste segmento, avançamos na compreensão teórica, visualizando um sistema complexo que, por sua própria dinâmica, evolui para um ponto crítico de transição de fase, sem a necessidade de intervenção externa para regular seus parâmetros. Este processo é exemplificado pelo modelo originalmente proposto no artigo pioneiro em SOC (BAK *et al.*, 1987).

3.1 Paradigma da Pilha de Areia

Imagine um monte de areia ao qual grãos são continuamente adicionados. Este monte cresce com uma simetria radial aproximada, exibindo duas tendências temporais opostas que se equilibram:

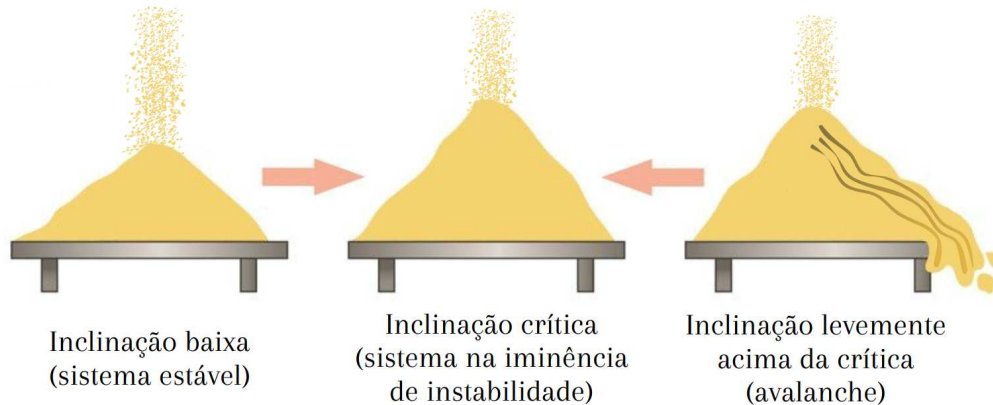
Figura 5 – Ilustração de uma pilha de areia



Fonte: Bak (2013).

- a) Quando o monte é estável, com um ângulo de inclinação ϕ baixo, a adição de grãos faz com que esse ângulo aumente;
- b) Se a inclinação supera um valor específico, o monte se torna instável, desencadeando uma avalanche que redistribui os grãos, diminuindo o ângulo ϕ e a energia potencial do sistema.

Figura 6 – Tendência de crescimento da pilha de areia



Fonte: Feito pelo autor

O parâmetro crucial aqui é o ângulo de inclinação ϕ , que naturalmente se aproxima do valor crítico ϕ_c , seja pela adição de grãos ou pelas avalanches.

Para que haja essas duas tendências, esse modelo faz presumir que sistemas com SOC necessitam de perturbações (adições de massa) e de limites espaciais abertos, permitindo a dissipação do excesso de massa, como exemplificado na Figura 6.

Duas maneiras de alcançar o estado crítico são identificadas:

- a) **Por crescimento:** partindo de uma plataforma sem areia, a adição contínua de grãos eventualmente leva ao estado crítico;
- b) **Por desmoronamento:** começando com uma situação completamente instável, onde uma grande avalanche inicial resulta no estado crítico.

Com base nesse entendimento, passaremos a explorar um modelo computacional que emula este comportamento.

3.2 Modelo da Pilha de Areia

Desenvolvido por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld, o BTW é um modelo que exemplifica a SOC através de um autômato celular em uma grade n-dimensional com regras específicas de evolução temporal. Para um sistema bidimensional simples, o procedimento é:

- a) Cada célula contém um número natural "z", representando a quantidade de partículas de areia empilhadas naquela posição do sistema;
- b) Células com valores de "n" entre 0 e 3 são estáveis. Valores iguais ou superiores a 4 indicam instabilidade;

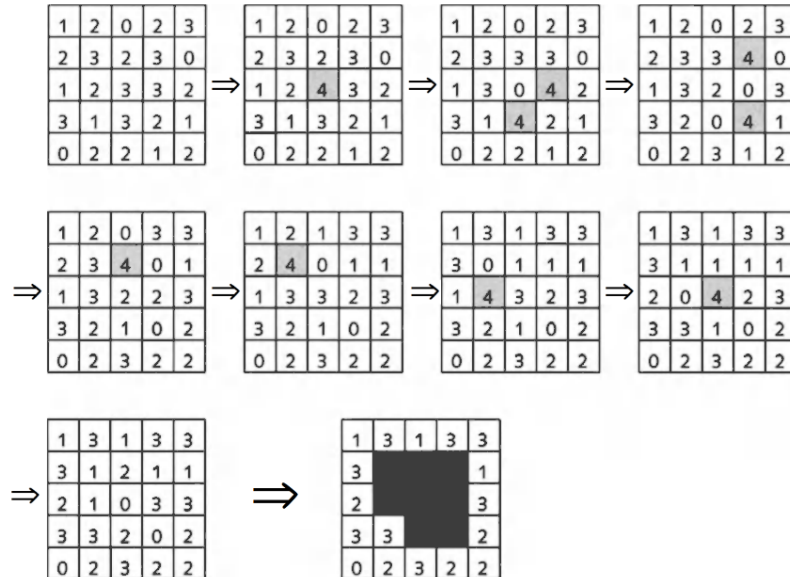
- c) Com cada incremento temporal, células instáveis perdem 4 partículas, distribuídas entre células vizinhas (acima, abaixo, à direita e à esquerda: cada vizinho ganha 1 partícula). Partículas nas bordas do sistema são removidas;

A dinâmica é regida pelas seguintes equações

$$z(x,y) \geq 4 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} z(x,y) \rightarrow z(x,y) - 4 \\ z(x \pm 1, y) \rightarrow z(x \pm 1, y) + 1 \\ z(x, y \pm 1) \rightarrow z(x, y \pm 1) + 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Este modelo visa alcançar um ponto crítico, análogo à inclinação limite ϕ_c de uma pilha de areia real. Inicialmente, todas as células são colocadas em estado instável, ao atribuir números maiores ou iguais a 4 para cada uma, evoluindo segundo as regras estabelecidas até que o sistema atinja o estado crítico. Perturbações são então introduzidas aleatoriamente, gerando eventualmente avalanches cujas características – duração (t), tamanho (s) e energia (E) – serão analisadas.

Figura 7 – Avalanche resultante de uma perturbação no centro do sistema



Fonte: Bak (2013)

Na literatura, as definições de tamanho e energia as vezes se confundem e mudam dependendo de cada trabalho. Neste estudo, chamamos tamanho a área afetada pela avalanche em pixels, e a quantidade total de decaimentos designamos energia. Para ilustrar, na Figura 7 temos $s = 8$ e $E = 9$.

Para variantes tridimensionais, a lógica do modelo se mantém, adaptando-se apenas o valor crítico de cada célula para 6, em vez de 4.

Realizamos simulações para diferentes valores de L (variando de 5 a 100), gerando redes $L \times L$ (e $L \times L \times L$ para dimensões tridimensionais) em estado crítico. O procedimento envolve perturbar o equilíbrio pontual dessas redes e analisar as avalanches resultantes, registrando sua duração, tamanho e energia, além de calcular a distribuição de células ocupadas por cada número n para identificar as condições do estado crítico.

3.3 Modelo de Pilha de Areia Dissipativo

Esta variante do modelo original introduz algumas modificações:

- a) Uso de valores decimais para as células;
- b) Dissipação de uma fração α da energia redistribuída a cada decaimento de célula instável;
- c) Condições de contorno periódicas.

Aqui, consideramos os número como uma energia potencial em cada ponto da rede, com a dissipação ocorrendo a cada interação entre componentes do sistema. Investigaremos se este cenário ainda apresenta SOC.

Simulamos redes bidimensionais de $L = 100$, variando o valor de α de 0.05 a 0.20. Em seguida, mantemos $\alpha = 0.10$ constante e mudamos o tamanho da grade com valores de L entre 25 e 200.

3.4 Modelo de Pilha de Areia com inclinação global fixa

Neste algoritmo unidimensional (CHARBONNEAU, 2017), a transferência de areia entre células adjacentes é determinada pela diferença de altura entre elas. O sistema é aberto em um extremo e fechado no outro. Os parâmetros incluem a largura L , a diferença de altura crítica h_c (ou inclinação ϕ_c) e a magnitude das perturbações ε .

Os valores z são decimais, e as avalanches ocorrem conforme a seguinte equação

$$z(x+1) - z(x) \geq h_c \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{z} = \frac{1}{2}[z(x+1) - z(x)] \\ z(x) \rightarrow z(x) + \frac{1}{2}[\bar{z} - z(x)] \\ z(x+1) \rightarrow z(x+1) + \frac{1}{2}[\bar{z} - z(x+1)] \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde \bar{z} é a diferença de altura entre duas posições consecutivas. A fração de 1/4 dela é transferida para a célula mais baixa quando ocorre deslizamento.

Perturbações aleatórias são aplicadas, e o sistema é observado até atingir uma inclinação constante no estado crítico auto-organizado ϕ_{cao} , com o registro de tamanho e duração das avalanches, antes de ser novamente perturbado.

O foco principal desta simulação é o estudo da inclinação do monte no estado crítico para diferentes valores dos parâmetros do sistema. Variamos a largura L de 50 a 2000, ϵ de 0.01 a 15 e ϕ_c de 2 a 7.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

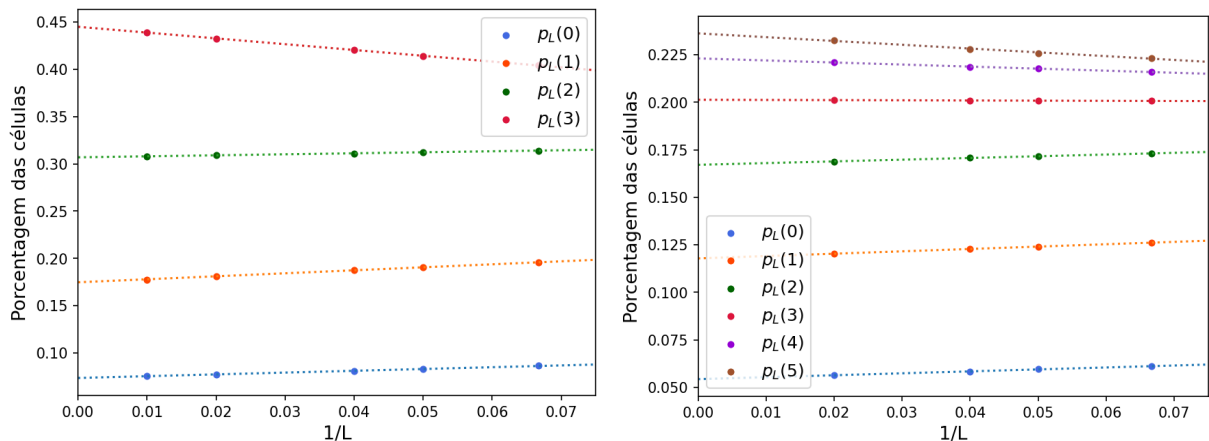
4.1 Modelo de Pilha de Areia Tradicional

Em primeiro lugar, pode-se afirmar que o ponto crítico difere de uma simples escolha aleatória dos valores n para cada célula da rede. Para quantificar esse enunciado, fazemos uso da densidade percentual $p_L(n)$ das células de número n na rede para cada largura L . Ver Tabelas do Apêndice A.

Montando gráficos dessas porcentagens em função do inverso de L (Figura 8), podemos estimar seus valores em uma rede de tamanho infinito calculando o coeficiente linear das retas ao utilizar a seguinte aproximação

$$p_L(n) = p_\infty(n) + c \frac{1}{L}. \quad (4.1)$$

Figura 8 – Estimativa das porcentagens para rede infinita 2D (à esquerda) e 3D (à direita)



Fonte: Feito pelo autor

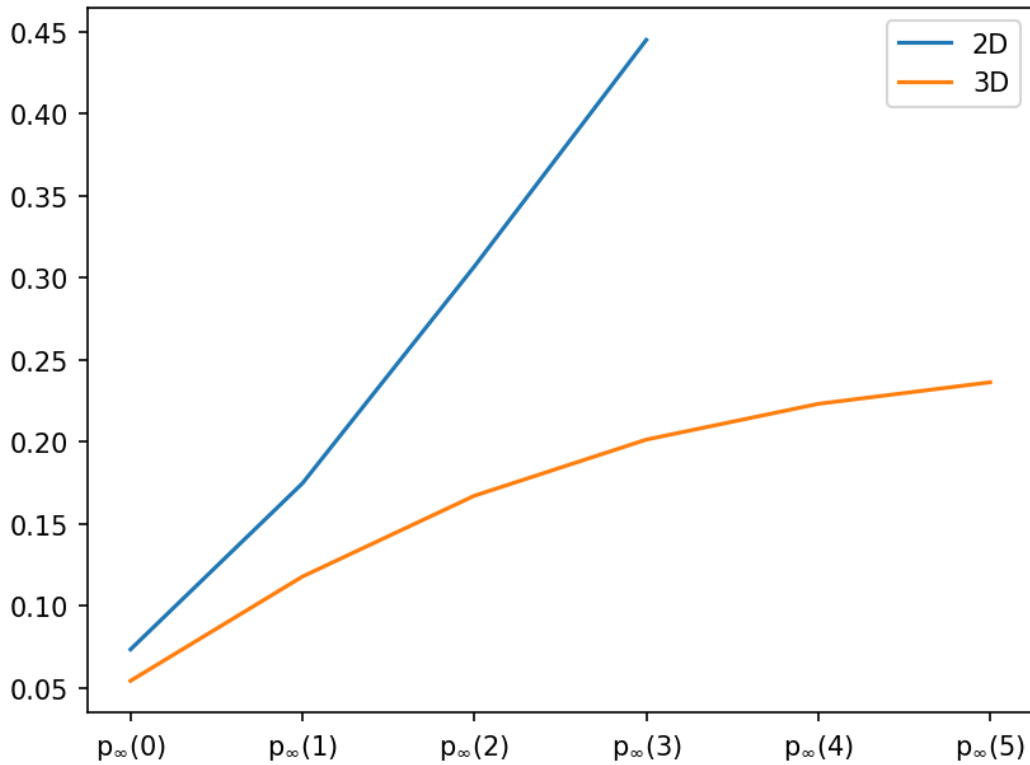
Tabela 1 – Densidade de células para cada valor de n

D	$p_\infty(0)$	$p_\infty(1)$	$p_\infty(2)$	$p_\infty(3)$	$p_\infty(4)$	$p_\infty(5)$
2	0.0734	0.1747	0.3069	0.4450	—	—
3	0.0543	0.1179	0.1671	0.2013	0.2231	0.2363

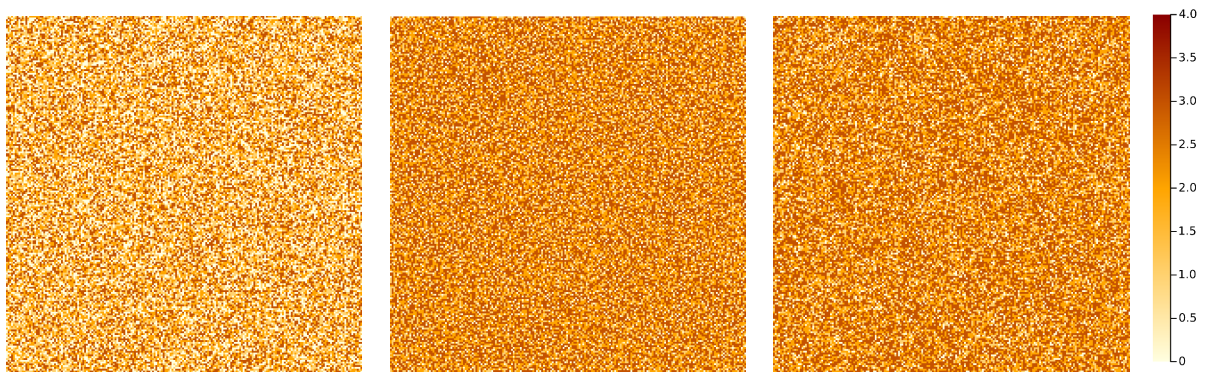
Fonte: Elaborada pelo autor.

Encontramos que, quanto maior n , mais vezes encontramos as células com esse número na rede. A relação não é linear, apesar de aparentar (Figura 9). Ela é um dos parâmetro desse sistema em específico que indicam o ponto crítico, mas há mais a ser considerado. Se montarmos aleatoriamente uma rede utilizando essas proporções da Tabela 2, percebemos visualmente uma diferença se comparada à uma rede no estado crítico (Figura 10).

Figura 9 – Porcentagens das células em rede infinita



Fonte: Feito pelo autor

Figura 10 – Comparação de algumas redes 200×200 com o estado crítico

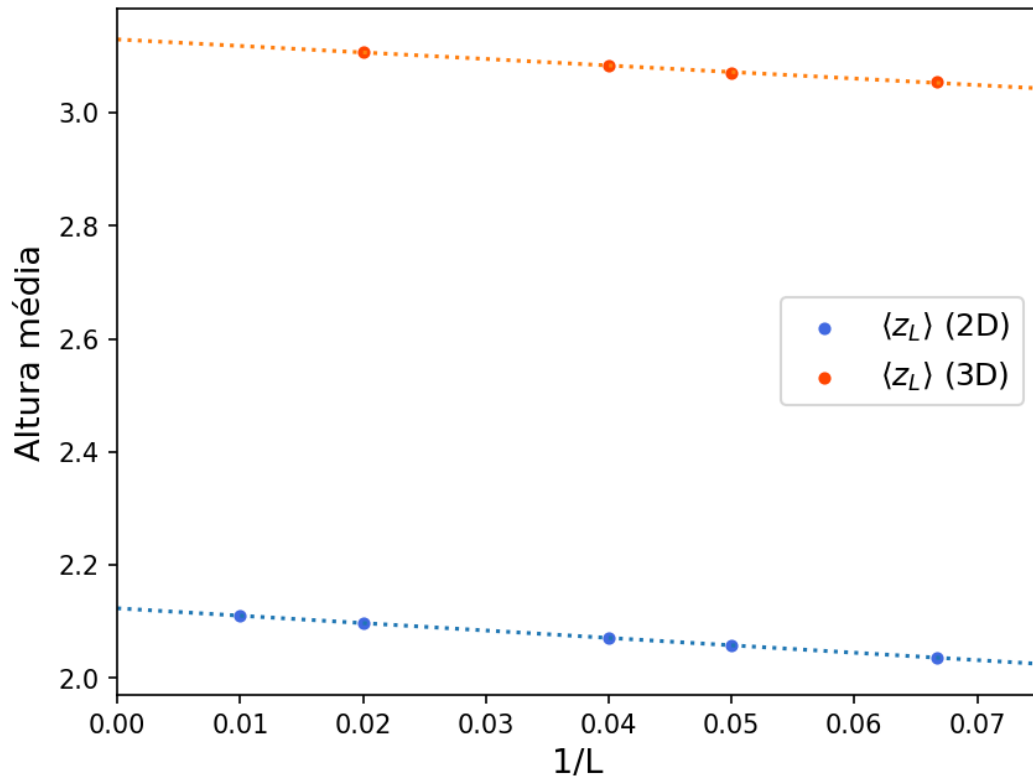
Fonte: Feito pelo autor

Nota: À esquerda, temos uma distribuição aleatória de números entre 0 e 3; ao centro, o ponto crítico que foi atingido naturalmente pelo sistema; à direita, uma distribuição aleatória, porém com as proporções iguais às do ponto crítico para $L = 200$

Outro valor que costuma também ser calculado, porém que apenas deriva das tabelas do Apêndice A, é a altura média da pilha, que pode da mesma forma ser estimada em uma rede infinita pela Equação 4.1, substituindo $\langle p_L(n) \rangle$ por $\langle z_L \rangle$ e $\langle p_\infty(n) \rangle$ por $\langle z_\infty \rangle$.

Essa é a característica mais notável de sistemas que apresentam SOC. A frequência percentual com a qual observamos avalanches de cada tamanho segue uma lei de potência de expoente negativo. Quanto maior a magnitude de uma avalanche, menos vezes ela ocorrerá no

Figura 11 – Estimativa da altura média das rede de tamanho infinito



Fonte: Feito pelo autor

Tabela 2 – Alturas médias $\langle z_L \rangle$ para cada L

L	2D	3D
15	2.0362	3.0544
20	2.0581	3.0708
25	2.0706	3.0827
50	2.0968	3.1080
100	2.1108	—
⋮		
∞	2.1234	3.1299

Fonte: Elaborada pelo autor.

sistema.

Normalmente, os expoentes são definidos na literatura da seguinte forma (BAK *et al.*, 1987; MANNA, 1990)

$$\begin{cases} D(s) \approx s^{1-\tau} \\ D(t) \approx t^{-b} \end{cases} \quad (4.2)$$

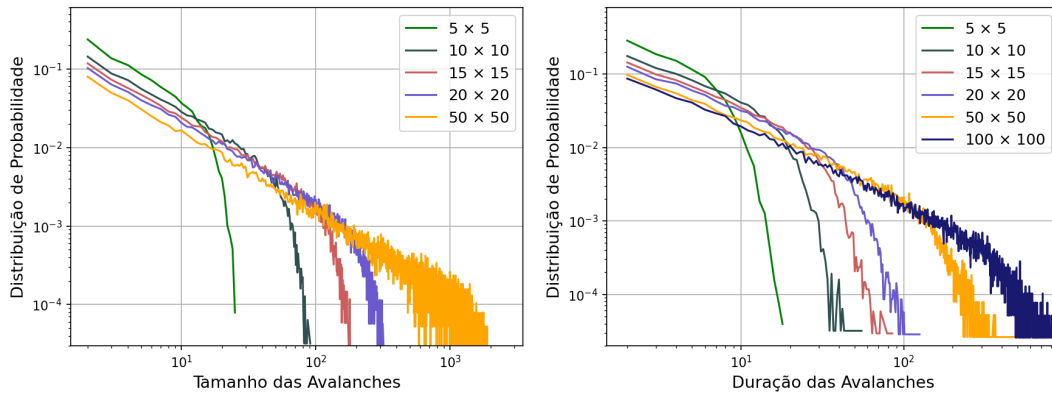
Em um gráfico de escalas logarítmicas, essas relações se traduzem em uma linha reta, cujos coeficientes angulares permitem calcular τ e b . Observamos que as curvas de fato apresentam um regime linear antes de decaírem cada uma a seu modo por conta das bordas do

sistema impedirem o crescimento das avalanches (Figuras 12 e 13),

$$\begin{cases} D(s) = N(s)/N_{tot} \approx s^{1-\tau} \Rightarrow \log(N(s)/N_{tot}) = (1-\tau) \times \log(s) \\ D(t) = N(t)/N_{tot} \approx t^{-b} \Rightarrow \log(N(t)/N_{tot}) = -b \times \log(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Apesar do expoente τ encontrado estar coerente com os primeiros trabalhos em SOC (BAK *et al.*, 1987; BAK *et al.*, 1988; TANG; BAK, 1988), alguns resultados posteriores mostraram que os valores crescem para perto de 2.20 em redes 2D para grandes larguras L (MANNA, 1990). O valor de b , no entanto, se assemelha ao encontrado nesses últimos resultados.

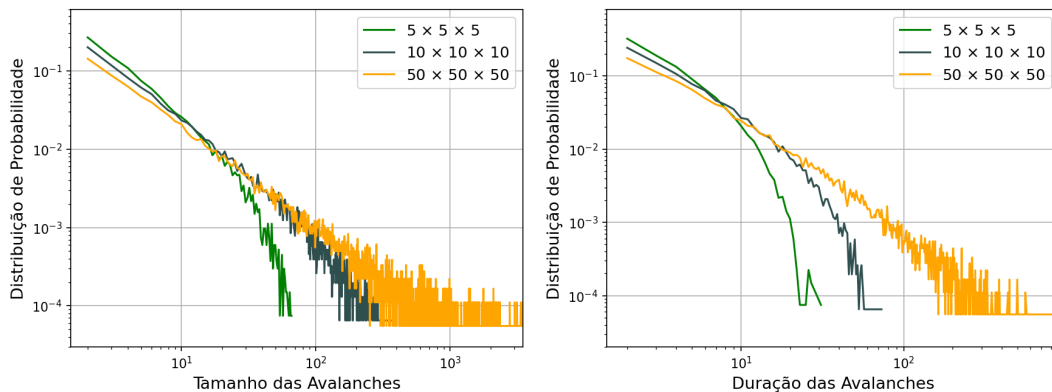
Figura 12 – Distribuição dos parâmetros das avalanches para as redes bidimensionais.



Fonte: Feito pelo autor

Nota: Encontramos por regressão linear os valores médios para os expoentes como sendo $\tau = 1.98 \pm 0.07$ e $b = 0.87 \pm 0.07$

Figura 13 – Distribuição dos parâmetros das avalanches para as redes tridimensionais.



Fonte: Feito pelo autor

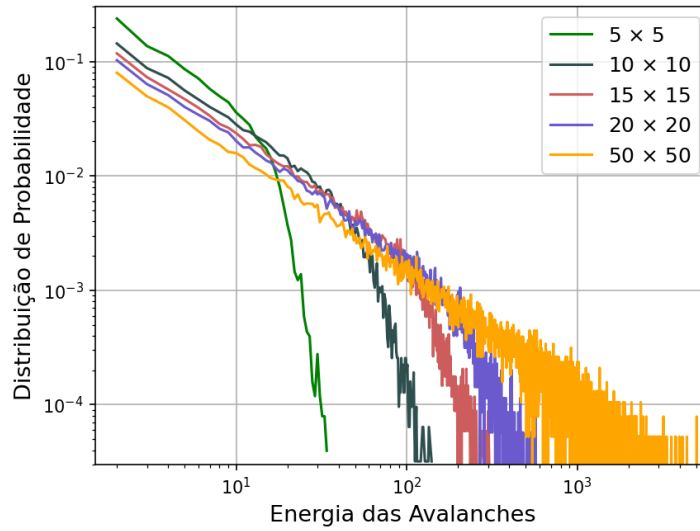
Nota: $\tau = 2.27 \pm 0.07$ e $b = 1.14 \pm 0.12$

Similarmente as outras grandezas características de cada avalanche, podemos encontrar uma lei de potência para a energia, tomando a equação

$$D(E) \approx E^{1-\sigma}, \quad (4.4)$$

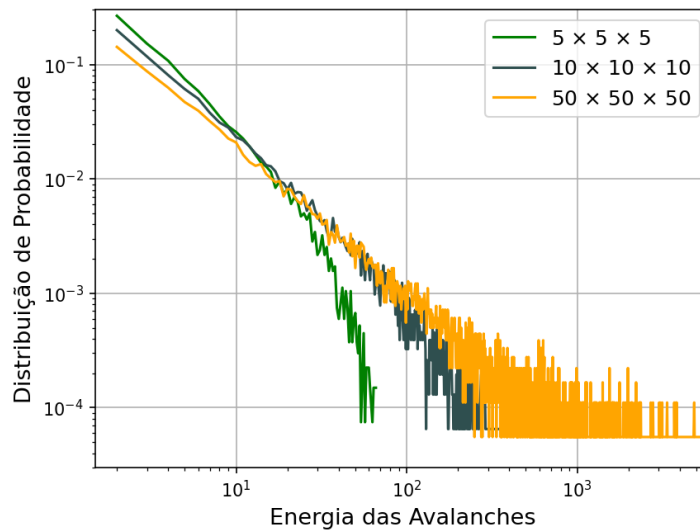
onde σ , apesar de não ser definido assim na literatura, será o equivalente ao expoente τ para os tamanhos s .

Figura 14 – Leis de Potência para energia em redes tradicionais 2D



Fonte: Feito pelo autor
Nota: $\sigma_{2d} = 2.00 \pm 0.06$

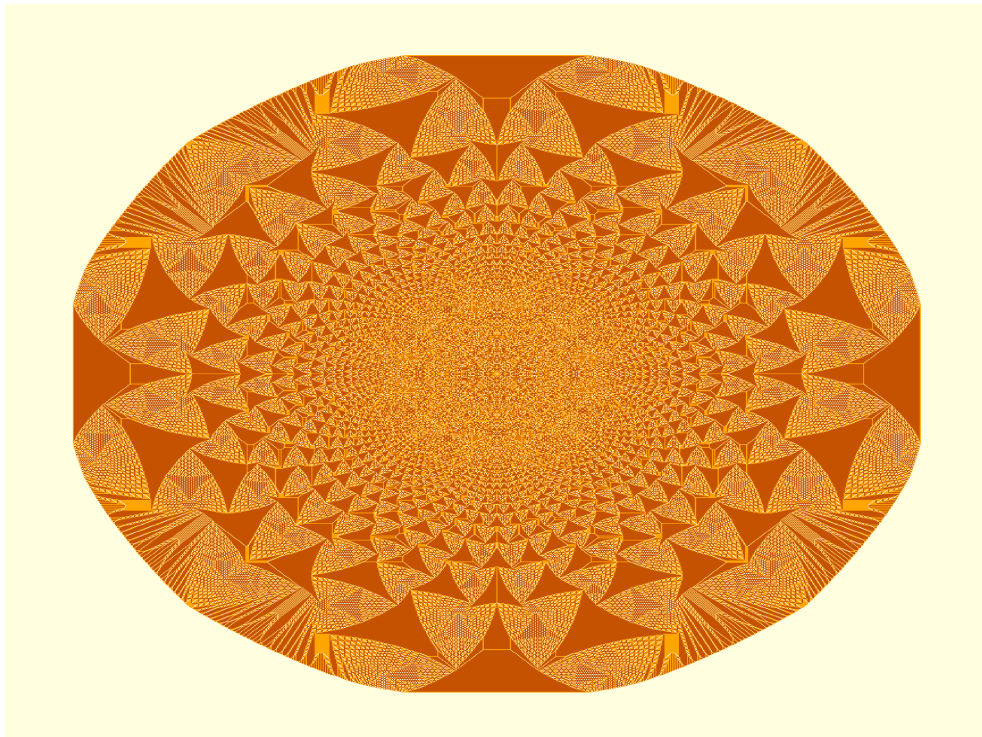
Figura 15 – Leis de Potência para energia em redes tradicionais 3D



Fonte: Feito pelo autor
Nota: $\sigma_{3d} = 2.18 \pm 0.13$

Visto a independência de escala desse fenômeno, que permite avalanches de todos os tamanhos permitidos dentro das limitações de suas bordas, pode-se dizer que ele apresenta uma característica fractal. Podemos enxergar espacialmente esse fato se escolhermos a condição inicial para simulação como uma pilha muito alta na célula central da rede, observaremos uma bela figura autossimilar já conhecida na literatura (LEVINE *et al.*, 2016).

Figura 16 – Fractal formado ao iniciar a simulação com 1.048.576 grãos na célula central

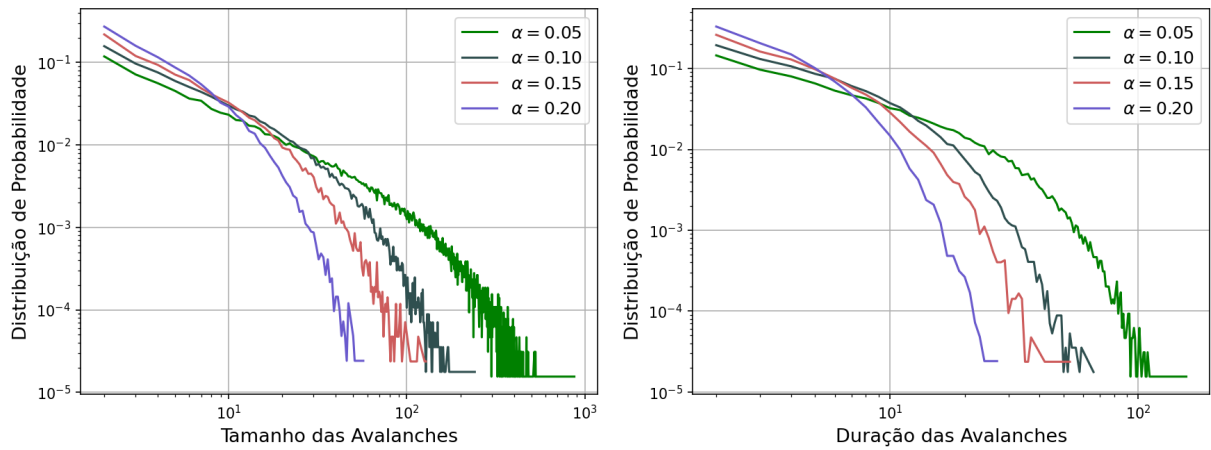


Fonte: Feito pelo autor

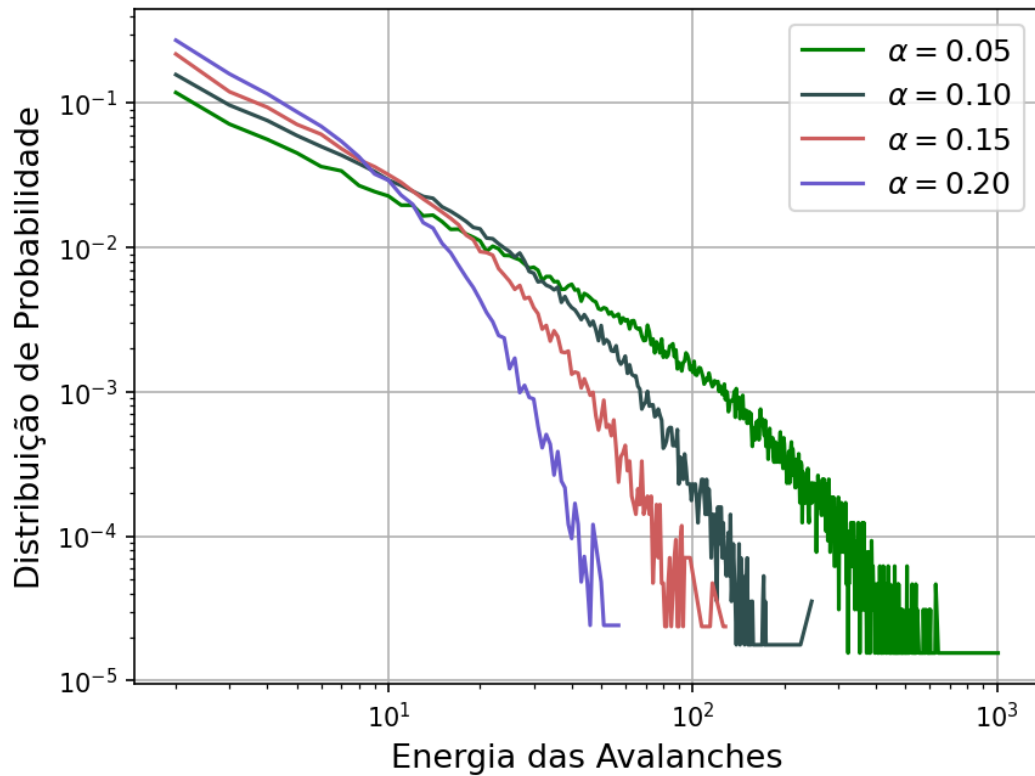
4.2 Modelo de Pilha de Areia Dissipativo

O modelo dissipativo também aparenta possuir Criticalidade Auto Organizada, visto que, apesar de suas curvas decaírem rapidamente, podemos enxergar a lei de potência no regime linear do gráfico da distribuição de probabilidades nas Figuras 17 e 18 e calcular seus coeficientes, que estão dispostos na Tabela 3.

O efeito do parâmetro dissipativo α nesse caso se mostrou bastante similar ao efeito das bordas no modelo BTW. Quanto maior seu valor, ou seja, quanto maior a fração de energia retiradas do sistema em cada interação, mais restrito são os tamanhos das avalanches. Como α substitui a função de L de ser um “fator limitante”, é interessante observar que as curvas pouco se alteram se escolhermos simular redes de larguras diferentes (Figura 19).

Figura 17 – Distribuição dos parâmetros para redes 100×100 

Fonte: Feito pelo autor

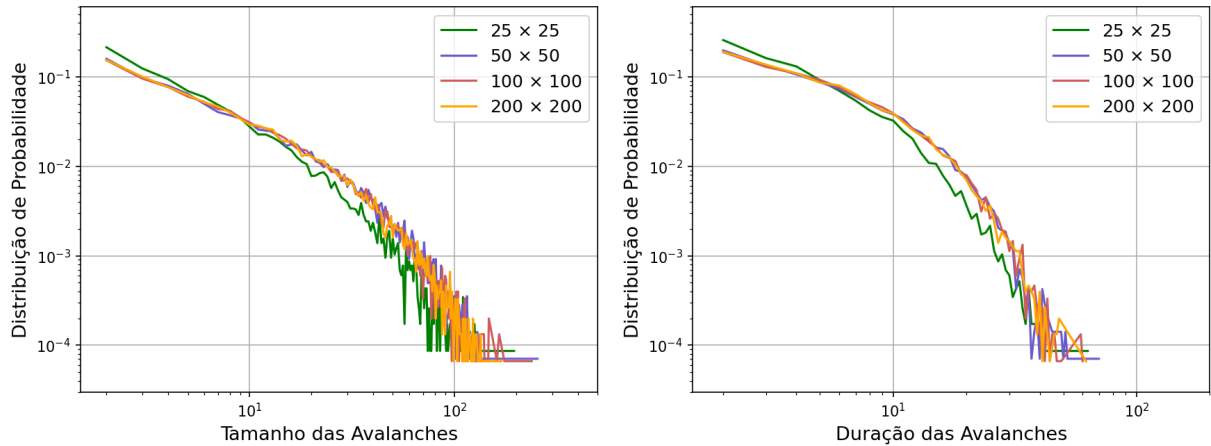
Figura 18 – Leis de Potência para energia numa rede dissipativas 100×100 

Fonte: Feito pelo autor

Tabela 3 – Coeficientes das leis de potência da Figura 17 e 18 segundo a Equação 4.4

α	τ	b	σ
0.05	2.009	0.956	2.037
0.10	2.011	0.866	2.018
0.15	2.158	1.022	2.167
0.20	2.242	1.142	2.238

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 – Curvas sobrepostas para $\alpha = 0.10$ 

Fonte: Feito pelo autor

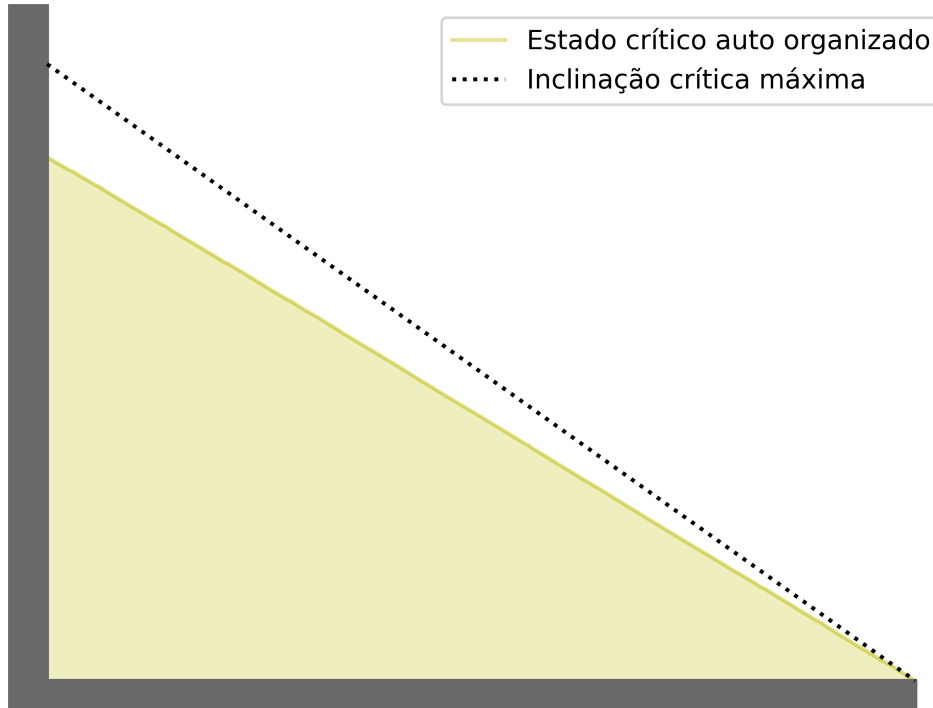
Existem alguns outros modelos não conservativos em suas interações que apresentam SOC. O *Olami-Feder-Christensen Model* (OFC), por exemplo, foi desenvolvido para simular abalos sísmicos (OLAMI *et al.*, 1992), pois a Lei de Gutenberg-Richter, deduzida empiricamente, mostra que os terremotos sentidos durante um longo período de observação em determinada região seguem uma Lei de Potência em função de suas magnitudes (SCHREINER, 1950). É também sabido que o expoente depende da profundidade do epicentro do tremor (MORI; ABERCROMBIE, 1997). No OFC, o parâmetro análogo à proximidade da superfície da crosta terrestre seria algo similar ao α , uma porcentagem de perda de energia por interação.

4.3 Modelo de Pilha de Areia com inclinação global fixa

Normalmente quando falamos em estado crítico, podemos pensar na situação em que todos os pontos do sistema estão conjuntamente na condição mais extrema admissível. Essa situação é, no entanto, virtualmente impossível de se alcançar espontaneamente, pois necessitaria de uma excessiva mediação externa. Esta simulação de uma pilha com inclinação mostra que o estado crítico auto organizado não é esse, pois ele não requer que todas as células estejam homoganeamente com inclinação ϕ_c , nem precisa de muito controle externo para ser atingido.

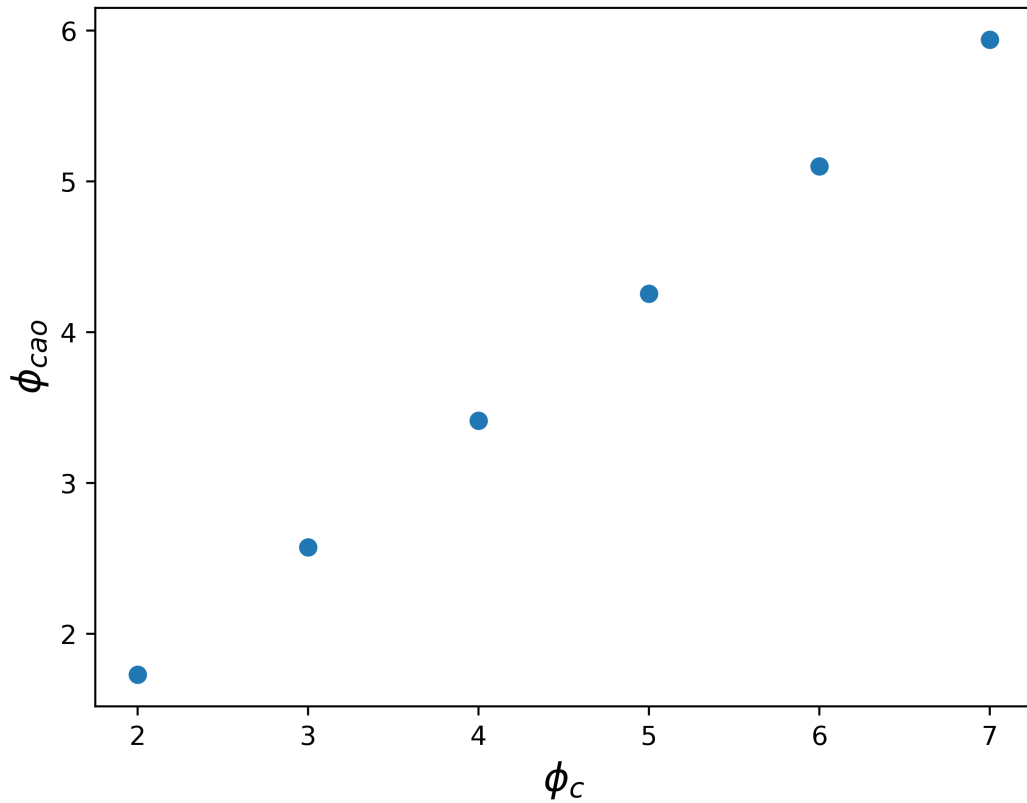
Como os valores de cada célula são contínuos, cada par de pontos tem uma inclinação ϕ levemente diferentes entre si, todas abaixo de ϕ_c . O ângulo médio da pilha é ϕ_{cao} , um valor que depende das variáveis do sistema, como sua largura, a taxa de ganho de massa (quantidade de grãos soltos em uma perturbação) e do ângulo máximo ϕ_c (que nesse caso diz respeito às propriedades mecânicas dos grãos de areia, como ao atrito). Essas relações estão expressas nas Figuras 21, 22 e 23.

Figura 20 – Comparação entre os ângulos do estado crítico assistido e o auto organizado



Fonte: Feito pelo autor

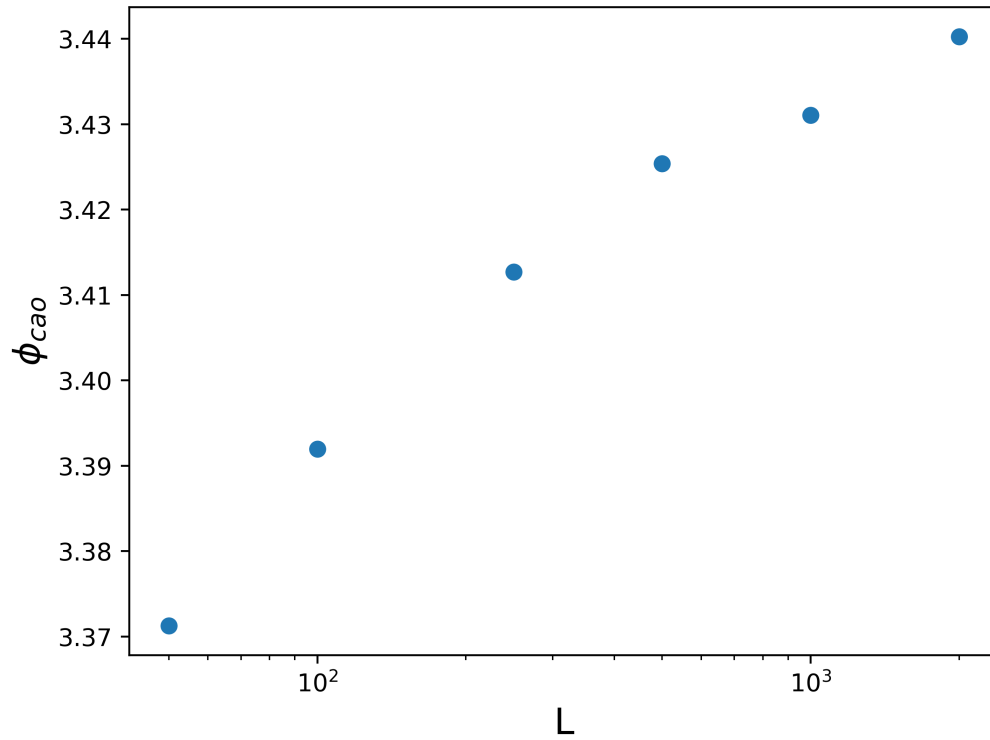
Figura 21 – Relação linear entre ϕ_{cao} e ϕ_c



Fonte: Feito pelo autor

Nota: $L = 250$ e $\varepsilon = 1$. Encontramos $\phi_{cao} = 0.0448 + 0.8425 \phi_c$

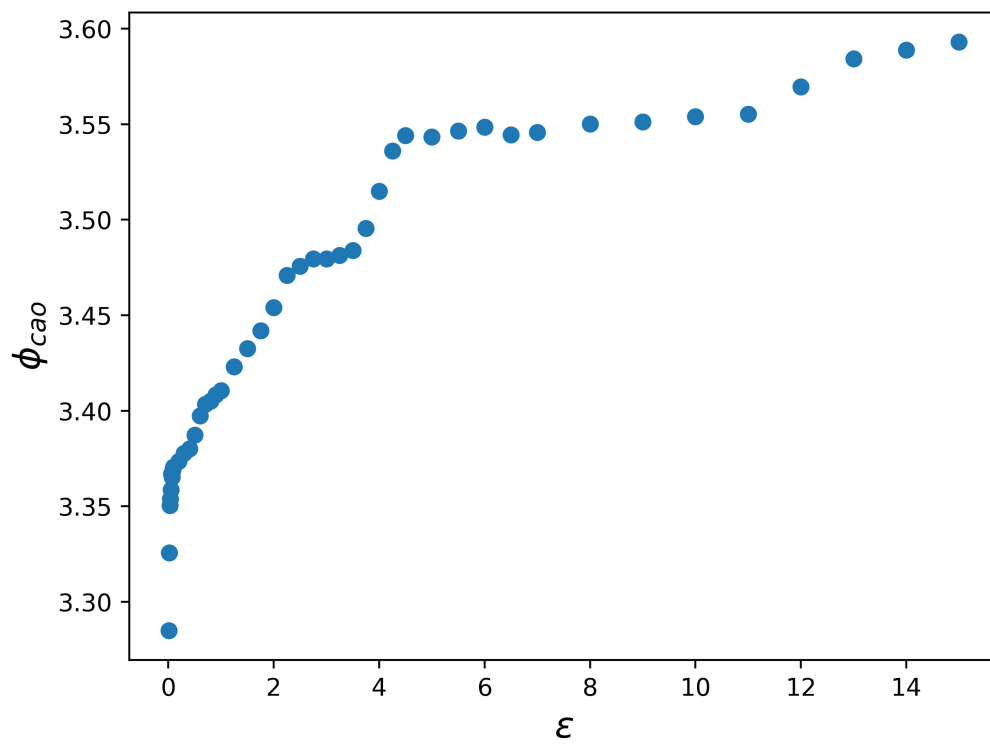
Figura 22 – Relação aparentemente linear entre ϕ_{cao} e $\log L$



Fonte: Feito pelo autor

Nota: $\phi_c = 4$ e $\varepsilon = 1$

Figura 23 – Relação complexa entre ϕ_{cao} e ε

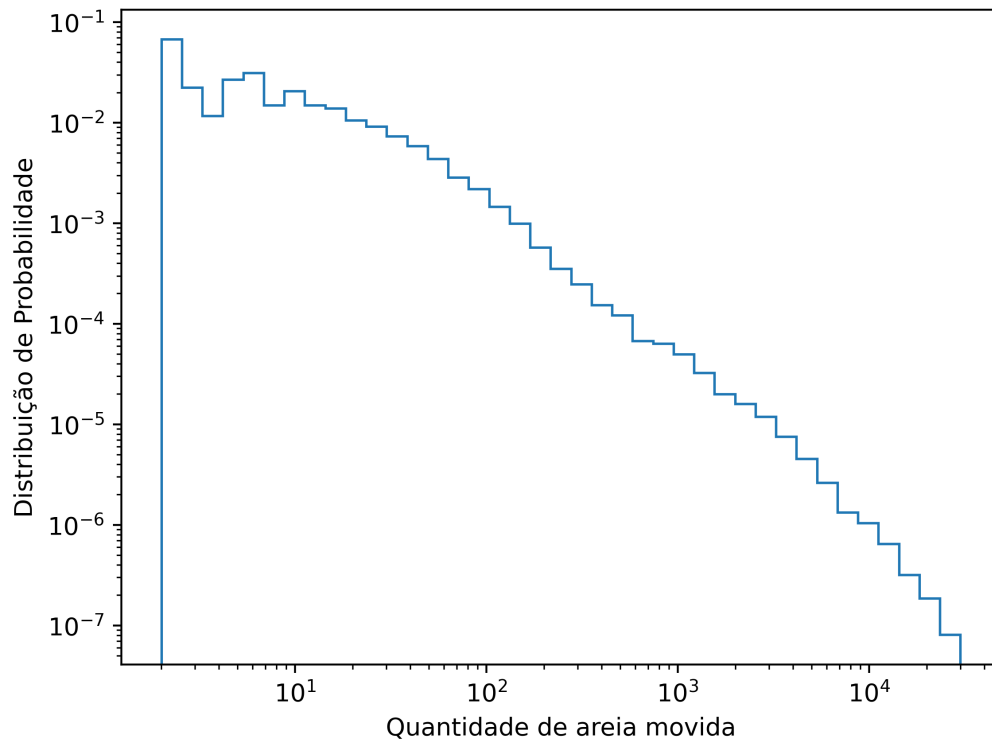


Fonte: Feito pelo autor

Nota: $L = 250$ e $\phi_c = 4$

Finalmente, identificamos uma lei de potência na distribuição de probabilidade das avalanches nesse modelo. Escolhemos definir magnitude, nesse caso, como sendo a quantidade total de areia movida em um deslizamento, somando as frações que se deslocam a cada passo temporal.

Figura 24 – Histograma da distribuição de probabilidade no modelo de inclinação global fixa



Fonte: Feito pelo autor

Nota: $L = 250$, $\phi_c = 4$ e $\varepsilon = 0.5$

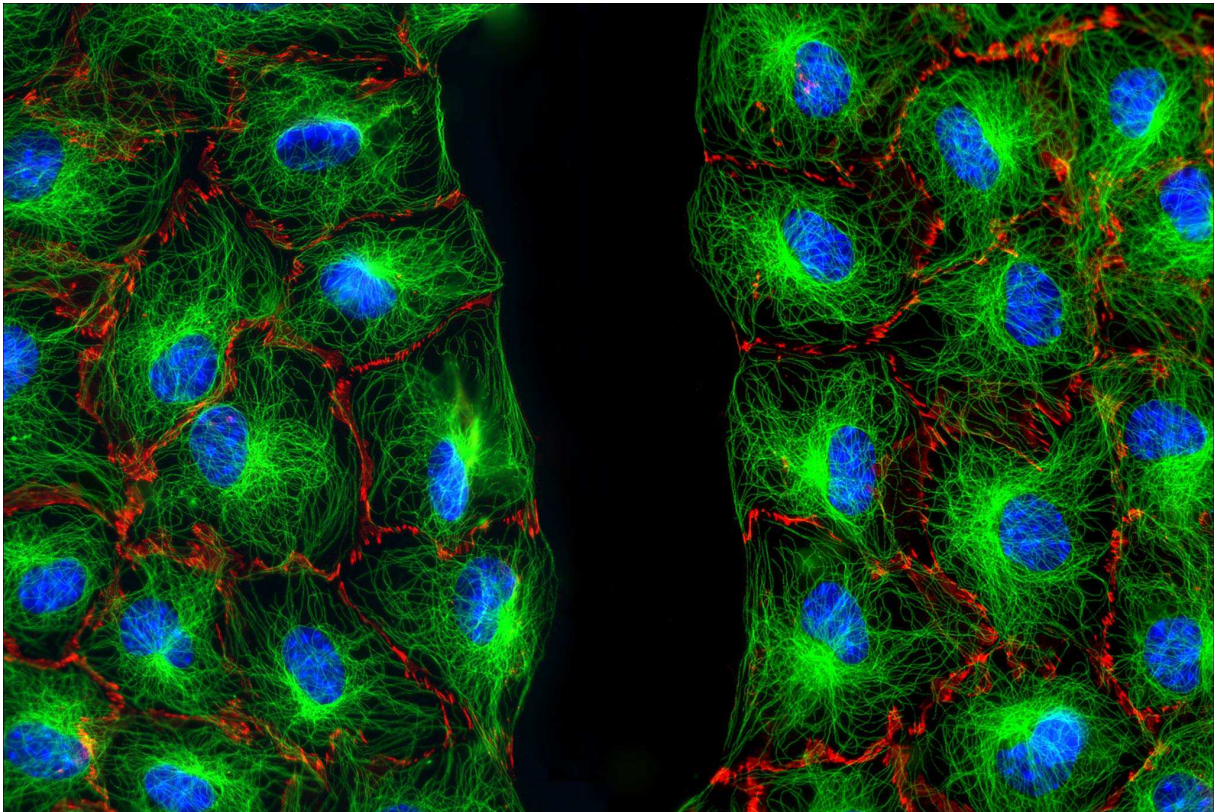
4.4 Universalidade

Na natureza, sistemas bastante distintos podem exibir uma mesma propriedade estatística. Seria um comportamento que não dependeria de especificidades microscópicas para surgir, mas somente de propriedades gerais do sistema. Desde que foi proposta, a Criticalidade Auto Organizada buscou ser um aspecto universal, buscando explicar características comuns entre vários sistemas naturais. Ao estudarmos esse modelo simples, procuramos encontrar padrões e entender os requisitos da auto organização crítica. A ideia é que as leis que governam a dinâmica dos grãos de areia possam ser análogas às que regem fenômenos em sistemas biológicos, econômicos ou mesmo sociais.

Essa universalidade em sistemas críticos tem sido observada em várias áreas, como transições de fase em materiais, propagação de incêndios em florestas, ocorrência de abalos sísmicos em determinada região, comportamento de sistemas neurais e até mesmo eventos econômicos, como quedas de mercado. A presença de leis de potência em distribuições de tamanho de eventos é uma característica comum que sugere a ocorrência de Criticalidade Auto Organizada.

Para exemplificar, recentemente tem-se estudado um fenômeno das células no qual as fibras do citoesqueleto sofrem rápidas reorganizações, causadas por perturbações externas ou por dinâmicas internas. A esse evento, damos o nome de *citoquake*, como um análogo aos terremotos da crosta terrestre. Mostrou-se que a magnitude dessas reestruturações segue uma lei de potência, de forma que podem se propagar por longas distâncias relativas ao tamanho celular (ALENCAR *et al.*, 2016). Ao analisarmos visualmente essas estruturas em um microscópio de fluorescência (Figura 25), observamos um padrão aparentemente fractal. Esses fatos todos sugerem a Criticalidade Auto Organizada nesse sistema, que pode tornar-se um aspecto sobre o qual estudar o funcionamento saudável das células.

Figura 25 – Monocamada de células de fibroblastos em cultura com ferimento



Fonte: Dr. Jan Schmoranzler, da Universidade de Columbia

4.5 Criticalidade e contingência

Retomando o que foi discutido no Capítulo 2, ao analisarmos eventos de magnitudes de impacto significativamente distintas, é comum distinguir suas causas entre aquelas que podem ser previstas e as de caráter mais accidental. Se procuramos um padrão, por exemplo, de extinção de espécies, é necessário fazer a distinção entre aquelas provocadas por alterações graduais no clima do planeta e as resultantes de circunstâncias imprevisíveis, como a queda de um meteoro. Em uma distribuição de probabilidade de extinções, provavelmente não incluiríamos aquelas cuja causa é contingente. Em uma situação bastante hipotética, se a humanidade coletivamente escolhesse caçar uma espécie para extingui-la, não considerariamos isso no modelo.

No entanto, em contextos nos quais é mais difícil distinguir as causas contingentes de fenômenos mais dramáticos, é possível que acabemos retirando dados indevidamente para a criação de nossa teoria. Alguém poderia argumentar no passado que grandes terremotos seriam gerados por um mecanismo totalmente diferente daquele que geraria minúsculos tremores de terra, como quando um caminhão passa numa rodovia. No entanto, sabe-se atualmente que esses dois fenômenos seguem a mesma distribuição de probabilidade.

Dizer que um sistema tende para o estado crítico implica que “avalanches” de qualquer tamanho podem ocasionalmente ocorrer. Isso significa que, independentemente do estrago que essa “avalanche” possa gerar, todas têm a mesma causa, que é a auto organização crítica. Substitui-se o que era julgado contingencial por algo que o modelo abrange.

Ao observarmos modelos biológicos, políticos ou econômicos, nos quais “catástrofes” de diferentes magnitudes seguem uma Lei de Potência, temos duas possibilidades: ou consideramos que o modelo geralmente está relativamente estável, de forma que perturbações pequenas não repercutem globalmente, e devemos sempre buscar causas contingentes separadas para eventos mais drásticos, ou consideramos que o modelo costuma ficar no estado crítico, em um equilíbrio apenas pontual, semelhante à nossa pilha de areia, e que cada perturbação pode ter consequências imprevisíveis, afetando localmente ou globalmente o sistema (BAK; PACZUSKI, 1995).

5 CONCLUSÕES

A CAO foi inicialmente proposta como um conceito ambicioso, visando explicar a ubiquidade de fenômenos regidos por leis de potência com expoentes próximos a -1 e a recorrência de padrões fractais na natureza. Embora a aspiração de Per Bak de formular uma "teoria de tudo" (BAK, 2013) não tenha sido plenamente realizada, a CAO vem se estabelecendo como uma teoria influente e eficaz em diversos domínios, com promessas ainda mais significativas conforme sugerido em pesquisas recentes. Tem-se mostrado que diversos modelos computacionais, incluindo o "Forest Fire" (DROSSEL; SCHWABL, 1992), o modelo de OFC e os modelos de cadeias alimentares evolutivas (DROSSEL; GUILL, 2008), exibem características de CAO. Interessantemente, todas as simulações implementadas nesse estudo introduzem aleatoriedade na escolha do ponto de adição do próximo grão de areia, e a Seção 3.4 até permite escolhas arbitrárias no tamanho da perturbação, porém modelos determinísticos que apresentam CAO também foram explorados na literatura (WIESENFELD *et al.*, 1990).

O modelo BTW, examinado neste trabalho, ilustra eficazmente a Criticalidade Auto Organizada (CAO). No estado crítico, o sistema revela uma instabilidade evidente, longe de um equilíbrio estável, mas mantendo um equilíbrio pontual e dinâmico. Observamos uma sensibilidade a perturbações que desencadeiam reestruturações súbitas, as "avalanches". A divergência do comprimento de correlação no ponto crítico permite a propagação das avalanches por diversas escalas de distância e tempo. Identificamos que a remoção de excessos de massa é crucial para a auto-organização crítica da pilha, seja pelas bordas do sistema ou por interações entre células. Curiosamente, o estado crítico difere de um sistema com todas as células em um estado extremo, indicando que a auto-organização não ocorre nesse cenário.

No contexto de sistemas naturais, as avalanches em pilhas de areia reais não seguem exatamente a lei de potência proposta, devido à inércia dos grãos. No entanto, com materiais mais leves, como certos tipos de arroz (FRETTE *et al.*, 1996), avalanches de todos os tamanhos podem ser observadas conforme a lei de potência. Entre os fenômenos naturais que exibem características de CAO, destacam-se os terremotos, descritos pela Lei de Gutenberg-Richter, uma lei de potência empírica para a frequência de terremotos de diferentes magnitudes. Pesquisas recentes apontam para a presença de CAO em sistemas biológicos, como nas reestruturações repentinas dos microtúbulos no citoesqueleto (ALENCAR *et al.*, 2016) e nas dinâmicas de impulsos nervosos em células neurais (BEGGS; PLENZ, 2003; HESSE; GROSS, 2014). Embora a existência de leis de potência não confirme diretamente um comportamento crítico, ela pode

sugerir fortemente essa possibilidade, especialmente considerando as potenciais vantagens na eficiência da transmissão de informações no cérebro quando operando em um estado crítico (BEGGS, 2008).

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, A. M.; FERRAZ, M. S. A.; PARK, C. Y.; MILLET, E. J.; TREPAT, X.; FREDBERG, J. J.; BUTLER, J. P. Non-equilibrium cytoquake dynamics in cytoskeletal remodeling and stabilization. **Soft matter**, v. 12 41, p. 8506–8511, 2016. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:20264211>.
- BAK, P. **How Nature Works: the science of self-organized criticality**. [S. l.]: Springer New York, 2013. ISBN 9781475754261.
- BAK, P.; PACZUSKI, M. Complexity, contingency, and criticality. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 92, n. 15, p. 6689–6696, jul. 1995. ISSN 1091-6490. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.92.15.6689>.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 59, p. 381–384, Jul 1987. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.381>.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 38, p. 364–374, Jul 1988. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.38.364>.
- BEGGS, J. M. The criticality hypothesis: how local cortical networks might optimize information processing. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 366, p. 329 – 343, 2008. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:9790287>.
- BEGGS, J. M.; PLENZ, D. Neuronal avalanches in neocortical circuits. **The Journal of Neuroscience**, Society for Neuroscience, v. 23, n. 35, p. 11167–11177, dez. 2003. ISSN 1529-2401. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1523/JNEUROSCI.23-35-11167.2003>.
- BROOKS, R.; MATELSKI, J. P. The dynamics of 2-generator subgroups of $psl(2, c)$. In: PRINCETON UNIVERSITY PRESS PRINCETON, NEW JERSEY. **Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference**. [S. l.], 1981. v. 1.
- CHARBONNEAU, P. **Natural Complexity: A Modeling Handbook - Primers in Complex Systems**. [S. l.]: Princeton University Press, 2017. ISBN 9780691170350.
- DROSSEL, B.; GUILL, C. Emergence of complexity in evolving niche-model food webs. **Journal of theoretical biology**, American Physical Society, p. 108–120, Mar 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1629>.
- DROSSEL, B.; SCHWABL, F. Self-organized critical forest-fire model. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 69, p. 1629–1632, Sep 1992. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1629>.
- EIGEN, M. Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. **Die Naturwissenschaften**, Springer Science and Business Media LLC, v. 58, n. 10, p. 465–523, out. 1971. ISSN 1432-1904. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/bf00623322>.

- FRETTE, V.; CHRISTENSEN, K.; MALTHER-SØRENSEN, A.; FEDER, J.; JØSSANG, T.; MEAKIN, P. Avalanche dynamics in a pile of rice. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 379, n. 6560, p. 49–52, jan. 1996. ISSN 1476-4687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/379049a0>.
- In: GOWERS, T.; BARROW-GREEN, J.; LEADER, I. (Ed.). **The Princeton Companion to Mathematics**. Princeton University Press, 2010. p. 726–728. ISBN 9781400830398. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1515/9781400830398.726>.
- HESSE, J.; GROSS, T. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. **Frontiers in Systems Neuroscience**, Frontiers Media SA, v. 8, set. 2014. ISSN 1662-5137. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3389/fnsys.2014.00166>.
- LEVINE, L.; PEGDEN, W.; SMART, C. K. Apollonian structure in the abelian sandpile. **Geometric and Functional Analysis**, Springer Science and Business Media LLC, v. 26, n. 1, p. 306–336, fev. 2016. ISSN 1420-8970. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00039-016-0358-7>.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. [S. l.]: W. H. Freeman and Company, 1982. ISBN 0-7167-1186-9.
- MANNA, S. S. Large-scale simulation of avalanche cluster distribution in sand pile model. **Journal of Statistical Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 59, n. 1–2, p. 509–521, abr. 1990. ISSN 1572-9613. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01015580>.
- MORI, J.; ABERCROMBIE, R. Depth dependence of earthquake frequency-magnitude distributions in california: Implication for rupture initiation. **Journal of Geophysical Research**, v. 1021, p. 15081–15090, 07 1997.
- OLAMI, Z.; FEDER, H. J. S.; CHRISTENSEN, K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 68, n. 8, p. 1244–1247, fev. 1992. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1244>.
- SCHREINER, G. Seismicity of the earth and associated phenomena. **Bulletin of the Seismological Society of America**, Seismological Society of America (SSA), v. 40, n. 1, p. 76–76, jan. 1950. ISSN 0037-1106. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1785/BSSA0400010076>.
- SCHRODINGER, E. **What is Life?: With Mind and Matter and Autobiographical Sketches**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2012. (Cambridge paperbacks). ISBN 9781107604667.
- TANG, C.; BAK, P. Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 60, n. 23, p. 2347–2350, jun. 1988. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.60.2347>.
- WEAVER, W. Science and complexity. **American Scientist**, Sigma Xi, The Scientific Research Society, v. 36, n. 4, p. 536–544, 1948. ISSN 00030996. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/27826254>.
- WIESENFELD, K.; THEILER, J.; MCNAMARA, B. Self-organized criticality in a deterministic automaton. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 65, p. 949–952, Aug 1990. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.949>.

APÊNDICE A – TABELAS DAS PORCENTAGENS DE CÉLULAS NO BTW

Tabela 4 – Densidade de células para cada valor de L nas redes 2D

L	$p_L(0)$	$p_L(1)$	$p_L(2)$	$p_L(3)$
15	0.0863	0.1955	0.3139	0.4043
20	0.0828	0.1905	0.3125	0.4142
25	0.0810	0.1878	0.3108	0.4204
50	0.0772	0.1812	0.3093	0.4323
100	0.0755	0.1775	0.3078	0.4392
⋮				
∞	0.0734	0.1747	0.3069	0.4450

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Densidade de células para cada valor de L nas redes 3D

L	$p_L(0)$	$p_L(1)$	$p_L(2)$	$p_L(3)$	$p_L(4)$	$p_L(5)$
15	0.0610	0.1261	0.1729	0.2007	0.2160	0.2233
20	0.0597	0.1240	0.1717	0.2009	0.2178	0.2259
25	0.0583	0.1230	0.1710	0.2010	0.2186	0.2281
50	0.0563	0.1203	0.1687	0.2011	0.2210	0.2326
⋮						
∞	0.0543	0.1179	0.1671	0.2013	0.2231	0.2363

Fonte: Elaborada pelo autor.