UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO - FACED
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

A SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR: O CASO DA NOÇÃO DE BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

FORTALEZA
2013

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

A SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR: O CASO DA NOÇÃO DE BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título do Mestre em Educação. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.
Coorientadora: Prof. Drª. Maria José Costa dos Santos.

FORTALEZA
2013

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

A SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR: O CASO DA NOÇÃO DE BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ____ /____ /______.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Profª. Drª. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Francisco Gêvane Muniz Cunha
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Aos meus pais, Francisco e Antônia.
Ao meu irmão Eone.
Aos meus avós, Dorinha, Francisco e Adelina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e oportunidades. A Jesus, minha eterna fonte de inspiração.

À minha família, em especial meus pais, pelo apoio condicionado que se tornou incondicional.

Ao meu orientador, professor Hermínio Borges Neto, pelo apoio, paciência e mediação na construção deste trabalho.

À professora Maria José Santos, pelas intervenções e contribuições. Ao Professor Gêvane Cunha pela colaboração dada para seu aperfeiçoamento.

À Fundação Cearence de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico – FUNCAP, pelo apoio acadêmico e financeiro prestado ao longo dos dois anos de curso.

Ao Prof. Régis Alves pelas contribuições acadêmicas que me auxiliaram desde a seleção do mestrado à qualificação do projeto de pesquisa.

Ao amigo Edisom Eugênio por compartilhar saberes, ideias e experiências contribuindo significativamente para minha formação acadêmica.

À Katiúscia pela amizade e constante troca de ideias sobre a Sequência Fedathi e a Álgebra Linear.

À equipe que compõe o Laboratório de Pesquisa Multimeios, em especial: Ana Cláudia, Janete, Lis, Mirley, Monalisa e Ângela.

Aos integrantes do Grupo de Educação Matemática do Multimeios - GEM² pela constante troca de ideias e experiências relacionadas à Educação Matemática.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação da FACED/UFC, de modo especial: Juraci Cavalcante, Ribamar Furtado, Fátima Vasconcelos, Paulo Barguil e Ana Iório.

À Thais, pela amizade, acolhida em Fortaleza, partilha de ideias e figurinhas.

Ao meu tio/padrinho Joaquim e sua esposa Maria José, pelo incentivo e apoio durante o processo de seleção do mestrado.

Aos amigos Rawlison e Romério pelas oportunidades de aprendizado.

Ao Prof. Márcio Nascimento pela amizade, leituras e dicas.

Ao Prof. Praciano Pereira pelo incentivo a cursar uma pós-graduação *strictu sensu* e ao amigo FN por me lembrar *Quem Sou*.

"Se se considera que o objetivo da educação intelectual é o de formar a inteligência mais do que mobilizar a memória, e de formar pesquisadores e não apenas eruditos, nesse caso pode-se constatar a existência de uma carência manifesta do ensino tradicional".

(Jean Piaget)

RESUMO

Esta pesquisa analisou o ensino da noção de base de um espaço vetorial mediado segundo os pressupostos da Sequência Fedathi durante a disciplina de Introdução à Álgebra do curso de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará. Objetivou-se verificar se o uso da Sequência Fedathi, especificamente, nas aulas sobre o conceito de base, proporciona recursos passíveis de se tornarem Alavanca Meta, permitindo aos alunos um ensino baseado na reflexão sobre os conteúdos trabalhados. Nesse sentido, a investigação foi conduzida na forma de estudo de caso, tendo como sujeito o professor da disciplina, que permitiu a observação durante suas aulas e planejamentos, além de ter concedido uma entrevista. Os resultados encontrados apontaram que a Sequência Fedathi favoreceu o uso de recursos passíveis de se tornarem Alavancas Meta para os alunos, sendo determinante na mediação do professor, de modo que a postura docente ao utilizá-la em sala de aula motivava os alunos à reflexão. Consideramos que as teorias AM e SF, nessa pesquisa, se complementaram, e, portanto, indicamos que o professor conheça tais ferramentas e seu potencial de uso no ensino de base, despertando no professor uma consciência do papel da mediação preconizada pela Sequência Fedathi.

Palavras-chave: Sequência Fedathi. Álgebra Linear. Alavanca Meta. Conceito de Base.

ABSTRACT

This research examined the teaching of concept of base of a vector space according to the premises mediated by Fedathi Sequence during the discipline “Introduction to Algebra” in the course of Engineering of Teleinformatic at Federal University of Ceará. The objective was to determine whether the use of Fedathi Sequence specifically in classes about the concept of base provides resources capable of becoming Meta Lever, allowing students an education based on the reflection on the worked contents. In this sense, the investigation was conducted in the form of case study, having as subject the teacher of discipline, which allowed the observation during his classes and planning, as well as having granted an interview. The results indicated that the Fedathi Sequence favored the use of resources that could become Meta Lever for students, being decisive in mediating the teacher, once the teacher behavior to use it in the classroom motivates students to reflection. We consider theories ML and FS, in this research, are complementary, and therefore we indicate that the teacher know such tools and their potential for use in teaching of concept of base, awakening the teacher an awareness of the role of mediation suggested by Fedathi Sequence.

Keywords: Fedathi Sequence. Linear Algebra. Meta lever. Concept of Base.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> "Hoje a Álgebra Linear tem mais valor em potencial para alunos, em muitas áreas científicas e de negócios, do que qualquer outro assunto em matemática em nível de graduação!"
>
> (DAVID LAY)

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que cada vez mais se destaca no âmbito acadêmico, devido às diversas possibilidades de aplicações em diferentes áreas do conhecimento científico, inclusive dentro da própria matemática, sendo uma disciplina comum na grade curricular da maioria dos cursos da área das Ciências Exatas e afins. Na Universidade Federal do Ceará (UFC), por exemplo, é disciplina obrigatória nos cursos de Agronomia, Administração, Ciências Atuariais, Ciências Econômicas, Computação, Física, Matemática, Estatística, Matemática Industrial, Zootecnia, Engenharia Civil, Engenharia de Teleinformática, Engenharia Mecânica, entre outros.

Resumidamente, podemos dizer que se trata de uma ramificação da Álgebra que estuda os espaços vetoriais e suas transformações lineares, lidando com vetores, matrizes e formas quadráticas. No entanto, seus conceitos e definições possuem um caráter complexo e abstrato que aliados a outros fatores, contribuem para o surgimento de problemas no ensino que comprometem a aprendizagem dos estudantes e consequente uso em seus respectivos campos de atuação profissional.

Tais problemas foram inicialmente detectados e estudados na década de 1980 por Jean-Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet, pesquisadores franceses que possuem um vasto acervo de trabalhos sobre o tema, que nos serviram de aporte teórico ao longo deste trabalho, aos quais chamaremos de "grupo francês".

Além desse grupo, surge em 1990 nos Estados Unidos, o LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group) também desenvolvendo estudos voltados para a melhoria do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, sendo este fundado por David Carlson, Charles Johnson, David Lay e Duane Porter.

A obra desses grupos trouxe muitas contribuições para compreensão dos problemas e busca por possíveis soluções, sendo referência para pesquisas desenvolvidas em diferentes países, inclusive no Brasil. Das pesquisas brasileiras destacamos os trabalhos de

Silva (1997), Celestino (1999), Araújo (2002), Padredi (2003), Silva (2005), Oliveira (2005), Grande (2006) e Nomura (2008), cujas análises e reflexões recaem sobre o uso de ferramentas de ensino e teorias para compreensão dos processos de aprendizagem.

No entanto, consideramos que além dos problemas detectados, tais como obstáculos históricos, didáticos e epistemológicos, as dificuldades se agravam ainda mais, diante de posturas tradicionalistas de ensino que norteiam as ações docentes em sala de aula. Sentimos falta de um olhar voltado para a postura do professor: seus métodos, suas estratégias, forma de interagir com a turma e com o saber ensinado. Acreditamos que essa ausência caracteriza lacunas que precisam ser discutidas interligando as contribuições teóricas ao fazer docente.

Quando nos referimos à postura docente, reportamo-nos ao desenvolvimento de ações capazes de romper com paradigmas educacionais que restringem o ensino da matemática à mera repetição de técnicas que limitam a exploração de conceitos e significados e tende a estimular a ocorrência do que D'Amore (2007) chamou de fraude epistemológica, quando o aluno encontra a solução correta para um problema, simplesmente por reproduzir algo já feito pelo professor, mas não necessariamente por "ter entendido a sua necessidade matemática ou lógica a partir do enunciado, não porque tenha 'compreendido e resolvido o problema', não porque tenha aprendido um objeto matemático" (p. 10).

Partindo dessa concepção, delimitamos nosso objeto de estudo à Sequência Fedathi (SOUSA *et al.*, 2013), que defende essa perspectiva de ensino através da elaboração de sessões didáticas[1] que motivem os estudantes a agirem como matemáticos, trabalhando por descobertas e construção de conceitos sob as devidas mediação e assistência docente.

Para isso, apoiamo-nos nas pesquisas do grupo francês trazendo a ferramenta de ensino denominada Alavanca Meta (DORIER *et al.*, 2000), com a qual investigamos sua presença em aulas mediadas segundo a Sequência Fedathi. Justificamos esta escolha devido ao fato de que teoricamente seus objetivos de uso no ensino se aproximam desse ideal preconizado pela Sequência Fedathi, pois apesar de diferentes, suas semelhanças podem ser aproveitadas em sala de aula com o intuito de promover maiores oportunidades de ação e reflexão dos alunos frente aos conhecimentos trabalhados.

As Alavancas Meta são as informações sobre o conhecimento matemático que o professor pode transmitir aos alunos através de estratégias de ensino, de questionamentos, atividades, ou do seu próprio discurso, de modo que fiquem explícitos elementos que possam

[1] Sessão didática: termo que na proposta da Sequência Fedathi é usado para designar a aula.

gerar nos estudantes reflexões sobre o objeto matemático estudado. Dessa forma, as atividades passam a ser conduzidas rumo a tomadas de consciência, mediante essa reflexão. Segundo Dorier *et al*. (2000)

> Essas informações podem levar os estudantes a refletir, conscientes ou não, tanto sobre seu próprio aprendizado na atividade matemática, quanto sobre a própria natureza da matemática. É possível que tal reflexão os ajude a aprender. (DORIER *et al*., 2000, p. 151, tradução nossa)[2]

Assim, compreendemos que a noção de Alavanca Meta abrange o conhecimento dos alunos sobre seus próprios conhecimentos em matemática e sua maneira de aprender, bem como sobre a matemática, seu funcionamento e como esta precisa ser ensinada. Portanto, está relacionada aos aspectos metacognitivos da aprendizagem.

No entanto, quanto a seu uso em sala de aula, os aspectos relacionados à forma como o professor introduzirá tais elementos e conduzirá as aulas é pouco esclarecido na bibliografia que trata do tema. Compreendemos que durante a aula os momentos em que o aprendiz é levado a pensar, raciocinar e refletir acerca do que está sendo estudado serão mais frutíferos dependendo da forma como o professor conduz esse momento, dependendo, portanto, da postura docente.

Do ponto de vista metodológico, o modelo proposto por Rogalski (1991, 1994, 2000) aponta formas de se abordar os conteúdos da Álgebra Linear, no qual utiliza as Alavancas Meta. No entanto, apesar de ser uma proposta capaz de gerar resultados positivos, conforme avaliado pelo autor, esta não evidencia em particular como seria a postura do professor durante esse processo. A ênfase maior recai sobre a abordagem dos conteúdos em si.

Consideramos que diante das semelhanças entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta, a junção de ambas poderia ajudar na escolha e utilização de recursos e estratégias didáticas a serem adotadas pelo professor, bem como na própria mediação e interação docente e discente em sala de aula.

As contribuições que a Sequência Fedathi pode trazer ao ensino de matemática estão evidenciadas nas dissertações e teses de Sousa (2005), Santana (2006), Santos (2007), Rocha (2006; 2008), Souza (2010), Andrade (2011), Jucá (2011) e Alves (2002; 2011). No entanto, não encontramos pesquisas abordando-a no ensino da Álgebra Linear.

[2] This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and on the very nature of mathematics. It is possible that such reflection helps learning.

Para melhor compreensão dos aspectos que nortearam este estudo, vejamos a problemática do ensino da Álgebra Linear que conduzem às questões de pesquisa e objetivos do trabalho, esclarecendo melhor esta investigação.

Os principais problemas que envolvem o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, delineados segundo as investigações do grupo francês, estão relacionados ao seu caráter abstrato e formal, bem como a aspectos didáticos e epistemológicos. Contudo, consideramos que estes problemas estão inseridos em um contexto maior, que concerne aos problemas oriundos dos métodos tradicionais de ensino da Matemática e que refletem na prática docente. Desse modo, após discorrermos sobre os problemas do ensino da Álgebra Linear faremos uma relação com os aspectos metodológicos que movem este estudo.

As pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear realizadas na França foram conduzidas seguindo três vertentes: diagnóstico dos principais erros e dificuldades dos estudantes, análise epistemológica e didática, bem como, a aplicação de sessões experimentais de ensino.

Desse modo, resumimos no Quadro 1, os resultados centrais desses estudos sobre o tema, com base em Dorier *et al.* (1999, 2000) e Rogalski (1994, 2000), no qual destacamos as principais dificuldades vivenciadas pelos estudantes, os resultados da reflexão epistemológica (concebida com apoio numa dialética entre a história e a didática do ensino da Álgebra Linear) e algumas ações dos docentes que possivelmente contribuem para agravar as dificuldades mencionadas.

Quadro 1 – Resumo das principais dificuldades no ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

Dificuldades dos Estudantes	**Reflexão Epistemológica**	**Situações Didáticas que Possivelmente Colaboram com o Agravamento do Quadro**
• Dificuldades ao lidar com exercícios muito formais; • Impossibilidade de representar as novas noções; • Não conseguem relacionar a Álgebra Linear aos conhecimentos que já possuem de matemática.	• Obstáculo do formalismo; • Caráter unificador, simplificador e generalizador. • Outros obstáculos epistemológicos; • Obstáculos didáticos;	• Maior ênfase às atividades algoritmicas em detrimento à parte conceitual; • Ausência de problemas para introduzir as noções elementares. • Atividades nas quais o professor não justifica o propósito de sua realização.

Fonte: Pesquisa direta.

De acordo com o Quadro 1, as principais dificuldades vivenciadas pelos estudantes residem nos contratempos que estes enfrentam ao lidar com o excesso de formalismo presente nos exercícios, pois ao sair do Ensino Médio e entrar num curso universitário o estudante se depara com uma matemática bem mais complexa e formal, com teoremas e demonstrações rigorosas que causam estranheza e dificuldades de compreensão de seus significados. Assim, "muitos estudantes têm a sensação de aterrissarem em um novo planeta e não estarem aptos a encontrar seu caminho nesse novo mundo". (DORIER *et al.*, 1999, tradução nossa)[3].

Essas dificuldades se devem ao que o grupo francês chamou de *obstáculo do formalismo*, e é muitas vezes agravada diante das deficiências em lógica e linguagem de conjuntos, que os alunos já trazem da educação básica. Consequentemente, surge a impossibilidade de representar as novas noções, naturalmente abstratas, de modo que muitos alunos acabam com a sensação de estarem submersos em uma avalanche de novas palavras, símbolos, definições e teoremas (ROGALSKI, 1994).

Além disso,

> [...] as dificuldades com o aspecto formal da teoria dos espaços vetoriais não é apenas um problema geral com o uso do formalismo, mas principalmente uma dificuldade de compreensão do uso específico do formalismo na teoria dos espaços vetoriais, e a interpretação dos conceitos formais em relação aos contextos mais intuitivos, como geometria ou sistemas de equações lineares em que historicamente eles surgiram. (DORIER *et al*. 2000, p. 86, tradução nossa)[4]

Esse fato caracteriza um obstáculo epistemológico que precisa ser superado, pois a não superação resulta na *perte du sens*, ou seja, perda de sentido diante da não compreensão de seus significados, que é apontada por Rogalski (1994, p.1) como um dos problemas mais preocupantes do ensino da Álgebra Linear.

Outro obstáculo epistemológico que merece atenção do professor se refere ao caráter unificador, simplificador e generalizador da Álgebra Linear. Em uma análise histórica da gênese da teoria dos espaços vetoriais, Dorier (2000) constata que esta é o resultado final do vasto emprego da formalização, que culminou na unificação, simplificação e generalização de todos os problemas decorrentes da linearidade.

Portanto, a Álgebra Linear é naturalmente unificadora e generalizadora, pois reúne diferentes conteúdos matemáticos numa mesma estrutura e os generaliza numa teoria

[3] […] many students have the feeling of landing on a new planet and are not able to find their way in this new world.

[4] [...] difficulties with the formal aspect of the theory of vector space are not just a general problem with formalism, but mostly a difficulty of understanding the specific use of formalism in the theory of vector spaces, and the interpretation of the formal concepts in relation with more intuitive contexts like geometry or systems of linear equations in which they historically emerged.

mais geral. É também simplificadora, pois muitos problemas lineares podem ter um processo de resolução mais "econômico" se forem resolvidos usando a Álgebra Linear.

No entanto, essas características não são facilmente percebidas pelos estudantes em um primeiro curso de Álgebra Linear, pois para o aluno não é tão simples perceber que a Álgebra Linear unifica, numa estrutura mais geral, conteúdos vistos no ensino médio, tais como: polinômios, números complexos, matrizes, funções.

Sobre esse assunto, Sierpinska (1996 *apud* BORGES, 2007) considera que esse é um dos mais sérios obstáculos a serem superados, pois caracteriza o "trans-nível" da Álgebra Linear, que diz respeito ao nível de pensamento necessário para sua tematização, ou seja, estando nesse nível o aluno pode perceber a necessidade teórica dos conceitos da Álgebra Linear. Segundo Borges (2007), a autora também considera como obstáculo epistemológico a passagem da geometria plana e espacial para a geometria do R_n

> Mesmo concordando que R_n seja uma teoria geral de todos os espaços aritméticos, o aluno evita pensar sobre esse assunto, ele entende cada passo dado, mas não a teoria como um todo, esse aluno vai permanecer ainda com as suas crenças, por um bom tempo, entendendo ***n*** como número de dimensão infinita. [...] (BORGES, 2007, p. 8)

Além dos obstáculos epistemológicos, também aparecem os obstáculos didáticos, que são uma consequência da forma como os professores lidam com essas dificuldades. Ou seja, determinados obstáculos podem se constituir num obstáculo de ordem didática, se o entrave para sua superação encontrar resistência por conta de escolhas equivocadas feitas pelo docente.

Na Álgebra Linear, por exemplo, diante das dificuldades epistemológicas a atitude, em geral, tomada pelos professores é a de dar menos atenção à parte conceitual do ensino e maior ênfase às tarefas algorítmicas. Isso ocorre quando os conflitos existentes entre os saberes antigos dos alunos e os novos conceitos que lhes são apresentados, resistem em chegar a um equilíbrio. Desse modo,

> A algoritmização é, então, um meio de negociar a redução do conflito, permitindo diminuir o aspecto de novidade (e evitar, ao mesmo tempo, a dificuldade conceitual). Os professores se ligam, via algoritmo, a um quadro conhecido: a resolução de sistemas de equações lineares, no caso dos espaços vetoriais. (DORIER, 2008, p. 33, tradução nossa)[5].

[5] L'algorithmisation est alors un moyen de négocier à la baisse le conflit en permettant de diminuer l'aspect de nouveauté (et d'éviter du même coup la difficulté conceptuelle). Les enseignants se rattachent, via l'algorithme, à un cadre connu : la résolution de systèmes d'équations linéaires dans le cas des espaces vectoriels.

No entanto, tal atitude não supera o obstáculo, apenas o omite. Como possível consequência, o autor descreve um exemplo desse ensino focado nas manipulações algorítmicas, no qual é identificada a seguinte contradição no ensino da Álgebra Linear:

> [...] muitos estudantes revelam poder encontrar a forma reduzida de um operador linear, mas guardam incompreensões profundas sobre as noções, tais como a soma (direta) de subespaços, ou a noção de geradores ou mesmo de independência linear, apesar de serem conceitos chave nos fundamentos teóricos das técnicas de redução de endomorfismos. (DORIER, 2008, p. 33, tradução nossa)[6]

Segundo os autores, este fato constitui uma contradição que não conseguem aceitar, uma vez que é preciso compreender as noções citadas para poder encontrar a forma reduzida de um operador. Nesse caso, há indícios de que esses alunos conseguem encontrar a solução de modo meramente mecânico, via algoritmo, sem necessariamente compreender seu sentido e significado.

Segundo Rogalski (1994), outro obstáculo didático é identificado na tese de J-L. Dorier ao analisar a história e a epistemologia da Álgebra Linear. A investigação aponta o fato de que muitos professores propõem atividades sem justificá-las, nas quais o aluno as realiza por realizar sem compreender seu propósito. Isso contribui para gerar as perdas de significado decorrentes das incompreensões do que estão a realizar. Segundo a análise do autor as práticas pedagógicas não favorecem o acesso ao significado da Álgebra Linear, o que reforça nossa premissa de que parte dos problemas está atrelada a aspectos metodológicos que perpassam pela postura e mediação docente.

Também é considerado um problema para o ensino da Álgebra Linear a introdução das noções consideradas elementares (subespaço, combinação linear, independência linear, geradores, base, dimensão e transformação linear) que são essenciais para a construção das demais noções trabalhadas na disciplina. Segundo as constatações do grupo francês, sua abordagem não pode se dar através de bons problemas que possibilitem ao estudante oportunidades de construção dos conceitos a partir de ferramentas já conhecidas por eles.

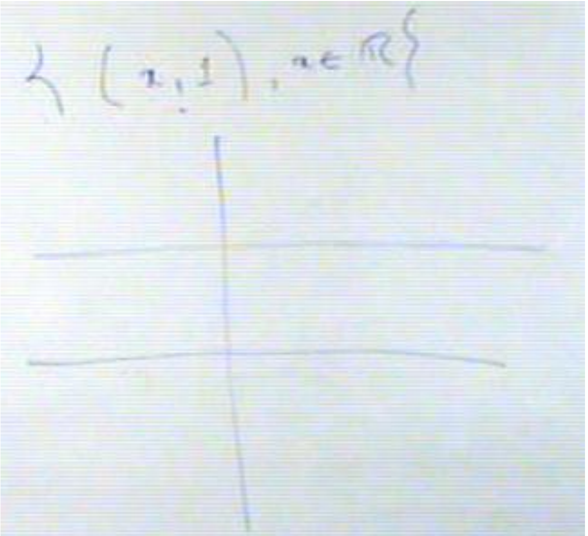
Segundo o grupo, isso não é possível, pois os problemas que poderiam ser propostos aos estudantes são simples demais, a ponto de poderem ser resolvidos sem o uso da

[6] [...] nombreux étudiants s'avèrent pouvoir trouver la forme réduite d'un opérateur linéaire, mais gardent des incompréhensions profondes sur des notions telles que la somme (directe) de sous-espaces, voire la notion de générateurs ou même d'indépendance linéaire, qui sont pourtant des concepts clés dans les fondements théoriques des techniques de réduction des endomorphismes.

Álgebra Linear, ou são demasiados complexos a ponto do estudante não ter ainda conhecimento suficiente para encontrar uma solução.

Tal constatação corrobora com o que aconteceu nas aulas observadas, em que mesmo não conseguindo introduzir a noção de espaço vetorial através de um problema, o professor usou como alternativa, aprofundar a compreensão dos estudantes acerca de suas propriedades. Por exemplo, após explicitá-las, apresentou um contraexemplo que remetia a verificação dessas propriedades, fazendo isso através de gráfico, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – Representação de uma reta no plano cartesiano ilustrando uma situação em que conjunto dado não é espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar.

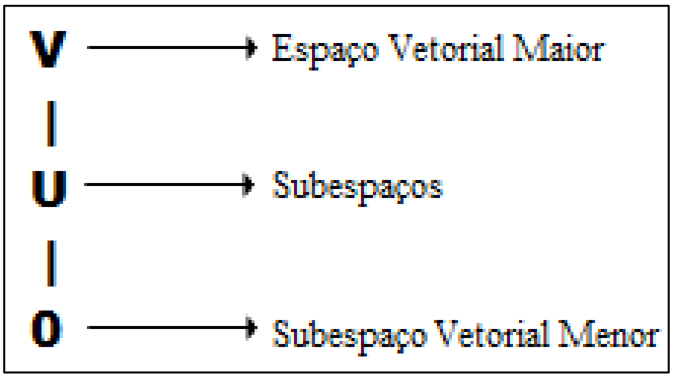


Fonte: Pesquisa direta.

Nessa situação, os alunos deveriam perceber, observando o gráfico, que as características do conjunto divergem das propriedades de um espaço vetorial, pois não é fechado para a soma e não possui o vetor nulo. Nesse caso, observamos que o professor partiu de algo concreto para a turma: uma reta no plano cartesiano.

Em outro momento, o professor, ao abordar as propriedades dos subespaços vetoriais, fez uso do esquema da Figura 2 como forma de ajudar os alunos a construí-los. Nesse caso, argumentou para a turma que este esquema seria usado para construir subespaços vetoriais, sendo que nas extremidades ficariam o espaço vetorial maior e o menor subespaço de um espaço vetorial, respectivamente. Nesse exemplo, temos V como espaço vetorial maior e {0} como o menor, pois o vetor nulo é o menor subespaço de um espaço vetorial. Entre estes extremos deveria haver muitos subespaços que poderiam ser construídos usando as propriedades.

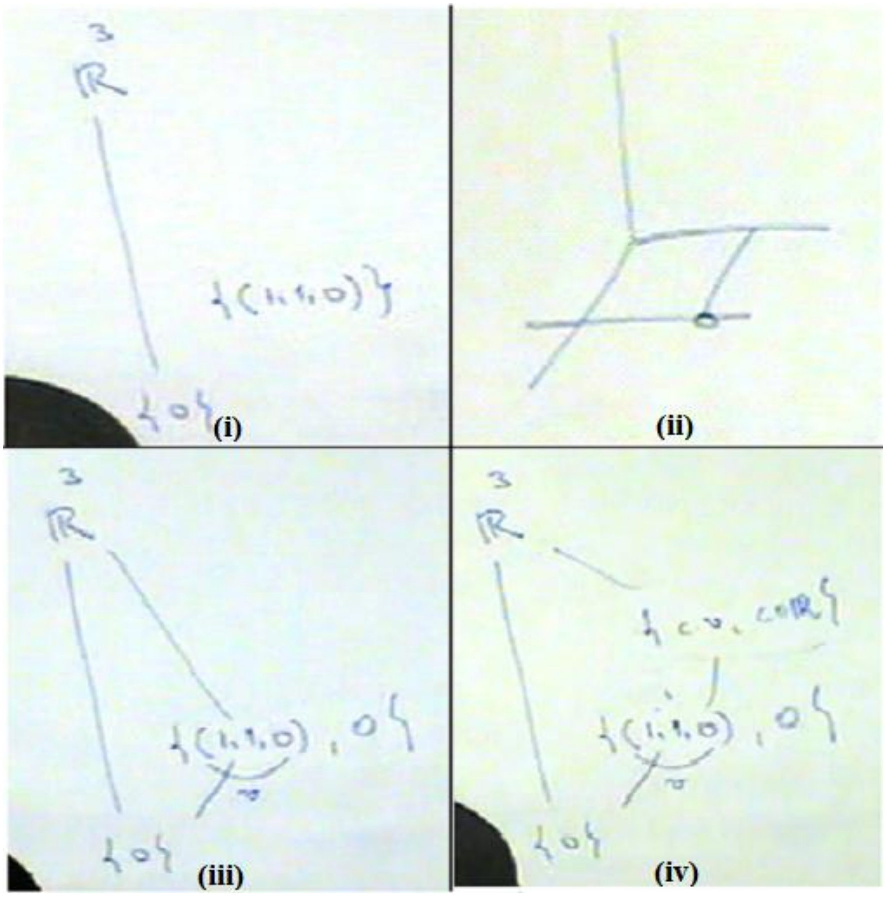
Figura 2 – Modelo do esquema usado pelo docente para construção de subespaços vetoriais.



Fonte: Pesquisa direta.

Em seguida, o professor o utilizou construindo subespaços entre os extremos (Figura 3), no qual partiu do seguinte questionamento: “ – Como encontrar os subespaços que estão no meio?”

Figura 3 – Exemplo prático de uso do esquema de construção de subespaços utilizado pelo professor.



Fonte: Pesquisa direta.

Na Figura 3, temos que: em (i) o professor perguntou se o conjunto dado era subespaço vetorial, fazendo o gráfico para ajudar na visualização, conforme exibido em (ii). Um aluno respondeu que não. Então o professor acrescentou o vetor nulo ao conjunto conforme mostrado em (iii) e novamente perguntou se era um subespaço. Outro aluno respondeu que não, pois não era fechado para a soma. Em seguida, o professor acrescentou um novo conjunto, maior que o anterior, conforme mostra (iv), no qual explicou que para ser subespaço deveria estar inserido em um conjunto maior, que fosse fechado para a soma e multiplicação por escalar. Em seguida, verificou algebricamente que o conjunto possuía essas propriedades. Assim, concluiu que $\{cv, c \in R\}$ era um subespaço vetorial.

Estes exemplos ilustram a forma como o docente, usando a Sequência Fedathi, abordou tais conteúdos, diante da impossibilidade de serem introduzidos por problemas. O grupo francês, ao constatar esse obstáculo e em face à necessidade de superação das dificuldades identificadas, passou a indicar a Alavanca Meta como forma de amenizar essas adversidades.

Assim, como as Alavancas Meta, a Sequência Fedathi também tem foco na promoção da reflexão do aluno sobre o objeto matemático estudado. No entanto, abrange todos os momentos inerentes à aula, desde a preparação até a realização da sessão didática, incluindo as formas de mediação e interação com a turma. A Alavanca Meta tem um direcionamento mais local, com foco em momentos bem determinados e cuidadosamente elaborados, dentro dos conteúdos, com intuito de provocar um efeito *start* na reflexão do estudante sobre o que é estudado.

Nesse contexto, esta é uma investigação que se consolida com o intuito de verificar o ensino da noção de base de um espaço vetorial à luz da Sequência Fedathi, observando a postura do professor na abordagem dos conteúdos e gestão das sessões didáticas, tendo como categorias de análise os elementos passíveis de se tornarem Alavancas Meta para os estudantes e as fases desse processo metodológico.

Compreendemos que investigar as possíveis relações entre ambas poderia trazer contribuições no sentido de orientar os professores dessa disciplina na escolha de estratégias e recursos de ensino que contemplassem oportunidades de reflexão sobre os conceitos trabalhados, bem como na forma de mediação das aulas e interação docente e discente.

Desse modo, nosso objetivo geral foi verificar se a Sequência Fedathi favorece o uso de recursos passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos. Ou seja, por meio das observações das aulas, identificar se ambas podem se complementar no sentido da promoção de reflexões em sala de aula, e com isso compreender os processos que envolvem teoria e prática docente vivenciadas nesse contexto. Partimos então das seguintes indagações:

- Como é abordado o conteúdo de base de um espaço vetorial em aulas mediadas segundo a Sequência Fedathi?
- Como nessas aulas surgem e funcionam os recursos e estratégias de ensino que visam motivar a reflexão do estudante?
- Esses recursos e estratégias são passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos?

Delimitamos a pesquisa ao conteúdo “base de um espaço vetorial”, para que pudéssemos ter, a partir desse recorte, uma melhor compreensão de como seria a interação entre a Sequência Fedathi e a tentativa de promover a reflexão dos estudantes, bem como, por ser um conceito cuja compreensão é necessária para um bom acompanhamento do curso e por abranger parte das noções elementares e abstratas da Álgebra Linear.

Especificamente, buscamos descrever o que aconteceu nas aulas, ou seja, como se deram as abordagens dos conteúdos relacionados à noção de base, bem como a identificação da presença de recursos meta[7].

Esperamos poder contribuir para a melhoria do ensino, de modo que professores dessa e de outras disciplinas possam refletir sobre sua prática relacionando-a à discussão teórica presente neste trabalho, uma vez que muitos aspectos deste estudo não se limitam ao ensino da Álgebra Linear.

Desse modo, os elementos que compõem os objetivos desta pesquisa caracterizam uma investigação de natureza qualitativa que foi abordada na forma de estudo de caso. Escolhemos essa abordagem devido às características do local em que os fenômenos ocorreram e às nossas questões de pesquisa, que coadunam com a descrição de Yin (2010, p.23) sobre os estudos de caso: “são métodos preferidos quando: (a) as questões 'como' ou 'por que' são propostas; (b) o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos; (c) o enfoque está sobre um fenômeno contemporâneo no contexto da vida real”.

Além disso, o estudo de caso apresentou-se ideal como abordagem metodológica nessa pesquisa, pois possibilitou que o caso fosse estudado em profundidade, dando-se ênfase

[7] Termo usado em Oliveira (2005) para denominar os recursos e estratégias de ensino que podem se tornar Alavanca Meta. A nomenclatura desses recursos foi evoluindo de acordo com o desenvolvimento de pesquisas sobre o tema, sendo também denominado como “metamatemática” em Araújo (2002) ou “metaconhecimento matemático” em Padredi (2003). Recurso meta é a denominação mais recente.

ao contexto em que os fenômenos ocorreram (sala de aula), permitindo a flexibilidade na condução da investigação, bem como a sua exploração pelo “lado de dentro”, favorecendo o entendimento do processo e, ainda, podendo ser aplicado sob diferentes enfoques teóricos e metodológicos, conforme apontado por Gil (2009).

Foram observadas e analisadas aulas de um professor que utiliza a Sequência Fedathi como metodologia de ensino em aulas de Álgebra Linear e que possui mais de 20 anos de experiência com uso da mesma. A coleta dos dados se deu através de observação direta das aulas e planejamentos, bem como de entrevista semi-estruturada. As aulas aconteciam duas vezes por semana, no período da tarde, tendo duas horas de duração cada uma.

O Capítulo 2 traz a fundamentação teórica da pesquisa. Aqui abordamos a Sequência Fedathi, trazendo uma discussão acerca de suas principais características, o planejamento das sessões, a postura que se espera do professor, e também tecendo uma breve análise de seus pressupostos na perspectiva da abstração reflexionante. Também tratamos das Alavancas Meta, trazendo definição, exemplos e suas semelhanças e diferenças com relação à Sequência Fedathi.

O Capítulo 3 é destinado à apresentação dos instrumentos e procedimentos de pesquisa, incluindo a descrição e análise de cada sessão didática, na qual identificamos a presença de possíveis Alavancas Meta dentro de cada fase da Sequência Fedathi. Ao final do capítulo, fazemos reflexões sobre os resultados e categorias de análise.

O Capítulo 4 traz as considerações finais da pesquisa, no qual relatamos as principais contribuições, sugerimos pesquisas futuras e tecemos algumas reflexões sobre os resultados obtidos.

Vejamos a seguir maiores esclarecimentos acerca da Sequência Fedathi e seu uso em sala de aula, bem como a caracterização da Alavanca Meta e convergências teóricas entre ambas, na qual damos ênfase aos processos que envolvem a reflexão do aluno, com base na teoria piagetiana da abstração reflexionante.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capitulo, abordamos os dois temas principais de nosso trabalho: a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta, nos quais nos embasamos principalmente nos autores brasileiros: Sousa (2013) e Santos (2007); e nos franceses: Dorier *et al.* (2000) e Robert e Robinet (1993). Trazemos uma descrição das principais características de ambas as teorias ressaltando suas semelhanças e diferenças, bem como alguns aspectos relacionados à questão da reflexão no processo de aprendizagem, com base em Piaget (1995) e Becker (2012). Além disso, destacamos algumas concepções do professor sujeito da pesquisa acerca da Sequência Fedathi, que julgamos pertinente introduzir nesse momento, diante de suas relações com os temas abordados.

2.1. A Sequência Fedathi no ensino de Matemática

A Sequência Fedathi em sua essência visa oportunizar a ação do estudante em sala de aula mediante a exploração de situações de ensino desafiadoras que possam desencadear discussões, descobertas e reflexões que visam chegar a um delineamento do saber em questão, que mais tarde, conforme for sendo trabalhado em novos contextos, poderá assumir o *status* de conhecimento.

Para tanto, uma aula de matemática, ao ser elaborada segundo seus pressupostos, sempre abordará quatro momentos: *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova* que poderão aparecer uma única vez, ou várias vezes, dependendo do seu planejamento. Essas fases visam tornar o ambiente da aula propício para que as ações discentes sejam direcionadas à construção do conhecimento sob a devida mediação do professor.

A abordagem adequada dessas fases trazem mudanças em sala de aula, tanto no que se refere à postura do professor quanto à postura do aluno, de modo que este último deverá ser um participante ativo durante toda a aula, seja resolvendo as atividades, discutindo as soluções encontradas ou verificando a formalização do conteúdo realizada pelo professor.

Quanto à postura do professor, listamos no Quadro 2, o que se espera dele em cada fase da Sequência Fedathi, com base em Sousa *et al*. (2013):

Quadro 2 – Postura docente segundo a Sequência Fedathi.

Postura Docente Esperada em Cada Fase da Sequência Fedathi			
Tomada de Posição	**Maturação**	**Solução**	**Prova**
• Apresenta uma situação desafiadora que esteja no nível dos alunos.	• Deixa os alunos pensarem sobre o problema/atividade proposto; • Observa o desempenho dos alunos (postura mão no bolso); • Se questionado responde com perguntas que estimulem a curiosidade e o instinto investigativo do aluno; • Não fornece a resposta pronta; • Intervém quando necessário, caso o aluno não consiga avançar.	• Chama os alunos para apresentarem suas respostas; • Faz questionamentos que suscitem discussões com a turma; • Aponta e discute os possíveis erros de modo a favorecer a aprendizagem; • Compara os resultados apresentados.	• Formaliza os resultados matematicamente; • Faz generalizações; • Expõe as definições formais ou teoremas.

Fonte: Pesquisa direta.

O Quadro 2 delineia o que se espera do professor durante a sessão didática. No entanto, ao elaborar a aula é imprescindível que o professor tenha consciência do nível de conhecimento dos alunos (*plateau*)[8], ou seja, se têm condições de assimilar o conteúdo a ser apresentado. Também é importante que o professor elabore a aula tendo em vista quais são os possíveis questionamentos, dúvidas e pontos de dificuldades que poderão surgir. Para isso, é necessário conhecer a história e a epistemologia do conteúdo a ser abordado.

Sousa (2013) faz uma análise entre um plano de aula convencional e o plano de uma aula segundo os pressupostos da Sequência Fedathi e conclui que a mudança de postura do professor deve acontecer inicialmente no plano conceptual para depois ocorrer no plano organizacional. Segundo o autor

> [...] para organizar uma aula segundo o roteiro metodológico da Sequência Fedathi, a mudança de concepção deve preceder a mudança na forma de planejar. [...] compreendemos que as ideias do professor, sua forma de pensar, é que fazem o diferencial no momento da execução do plano, quando este é posto em prática e pode, efetivamente, ser chamado de currículo, no sentido de caminho a ser percorrido. (SOUSA, 2013, p. 77)

Nesse caso, a epistemologia do professor se torna essencial para o êxito no uso da Sequência Fedathi, pois consciente ou não de suas concepções de ensino e aprendizagem, a elaboração e execução de suas aulas tenderão a se sustentar nessas bases.

[8] *Plateau* = segundo a Sequência Fedathi, é o nível cognitivo do sujeito em relação ao domínio do conteúdo.

Sobre as concepções de ensino do professor sujeito desta pesquisa, identificamos através da análise de suas falas acerca da Sequência Fedathi, que sua visão de como deve ser a ação docente em sala de aula coaduna com concepções construtivistas de aprendizagem, conforme verificamos na seguinte fala:

> [...] você trabalha sempre em cima da construção do conhecimento, fazendo com que o aluno participe. Então, você está o tempo todo trabalhando. Mesmo nas aulas teóricas, você está trabalhando com os alunos, não os está fazendo repetir, você os está fazendo serem reflexivos sobre as ações que estão sendo colocadas.

O construtivismo presente nos pressupostos da Sequência Fedathi também se reflete na postura que se espera do professor ao lidar com o tempo despendido para a abordagem dos conteúdos, pois, nesse caso, é determinado pelo desempenho dos alunos na realização das atividades, conforme eles demonstram avanço na aquisição dos saberes, não unicamente pelo cronograma de conteúdos programáticos a serem seguidos.

Essa forma de gerenciamento do tempo ficou evidente na sessão didática 2, na qual uma abordagem, que tradicionalmente duraria cerca de 20 minutos, com a mediação preconizada pela Sequência Fedathi, durou em torno de 60 minutos, devido à postura adotada pelo docente ao explorar o conceito de geradores. Não se tratou apenas de reproduzir e solucionar exercícios e problemas, mas motivar discussões sobre o objeto de estudo com vistas à reflexão e à compreensão dos significados envolvidos.

Outra característica relevante da Sequência Fedathi diz respeito ao uso de algumas estratégias que podem auxiliar o professor nesse desafio de mediar a aprendizagem do aluno considerando suas próprias dúvidas e avanços. Tais estratégias são o uso da pergunta e o uso do contraexemplo.

A viabilidade de aplicação da Sequência Fedathi, tendo a pergunta como estratégia de mediação pedagógica foi constatada por Sousa (2005) que defende que

> [...] ao organizar a engenharia didática e a Seqüência Fedathi, é importante que ele [professor] pense, diante das hipóteses elaboradas, sobre quais perguntas deve fazer como forma de investimento ou reinvestimento, como meio de suscitar nos alunos o hábito de formular hipóteses, buscar soluções, fazer a prova, rever o problema para confirmar ou negar a resposta encontrada. (SOUSA, 2005, p. 54)

A pergunta, sob essa ótica, pode ser entendida como um recurso que poderá ser usado para estimular reflexões nos alunos acerca do conteúdo estudado. No entanto, deve ser usada em momentos oportunos que possam de fato desencadear raciocínios e reflexões pertinentes.

Nas aulas observadas, verificamos que o professor fez uso de perguntas o tempo todo numa tentativa de estimular o raciocínio da turma e extrair reflexões que viabilizem a compreensão dos significados conceituais que estavam sendo trabalhados. Sempre que necessário, reformulava suas perguntas ou mudava sua estratégia usando o recurso que fosse mais conveniente no momento para ajudar o aluno a repensar suas ações.

No que tange ao uso de contraexemplos, estes são indicados como um importante recurso que deve ser usado sempre que este existir dentro do conteúdo abordado e quando seu uso trouxer alguma contribuição para a aprendizagem esperada em dado momento.

Em conversa com o professor sujeito desta pesquisa, ele defende o uso de contraexemplos em sala de aula:

> [...] Você, quando for trabalhar com os alunos, coloque, por exemplo, uma atividade que não é explorada tradicionalmente. Mandar os alunos darem exemplos, dar exemplos do que "não é". Os livros são cheios de situações em que são fornecidos exemplos que "são". Dá-se uma definição, você faz, faz... Mas, o livro dá pouca ênfase a "isso não é". Então devemos explorar muito fortemente o "não é". O que "não é"? Por que isso "não é"? Às vezes, é mais rico explorar isso, do que explorar "por que é que 'é'".

Nas aulas observadas, o professor explorou o uso de contraexemplos, demonstrando que seu discurso está em acordo com sua prática. Ressaltamos que a pergunta e o contraexemplo não são as únicas ferramentas que podem ser usadas na Sequência Fedathi, no entanto destacamo-nas por serem recursos promissores na mobilização de reflexões significativas.

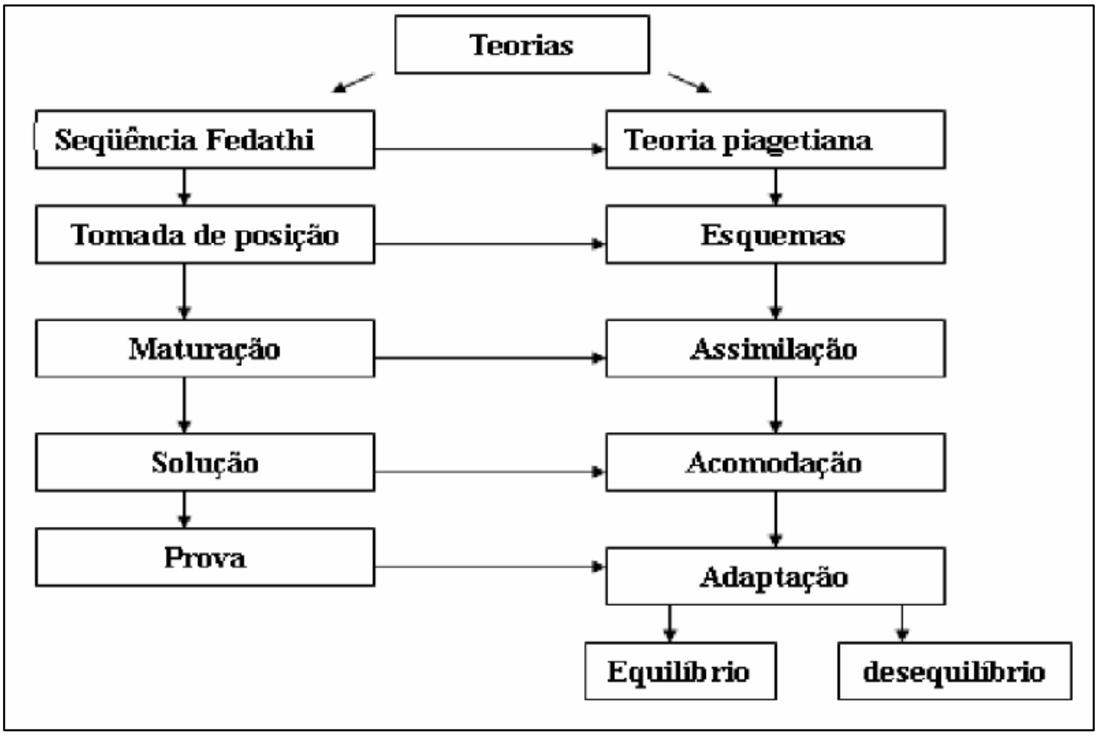
2.2. Sequência Fedathi: mediação e reflexão

Nossa problemática de pesquisa nos remete a tentar compreender os aspectos cognitivos discentes trabalhados durante uma sessão de ensino, no sentido da reflexão pela qual o estudante pode ser conduzido. Reflexão esta, que está atrelada à compreensão conceitual, ao significado matemático dos objetos trabalhados, portanto, sobre a matemática e o conhecimento matemático.

Desse modo, é pertinente abordar a Sequência Fedathi relacionando-a às ideias piagetianas que explicam como acontece o processo de aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, levando em conta as estruturas cognitivas do aprendiz, cujas contribuições para o cenário educacional podem ser estendidas ao plano da matemática de nível superior, conforme observado por Dubinski (2002) ao estudar o pensamento matemático avançado.

Segundo análise de Santos (2007), o conjunto das etapas da Sequência Fedathi trazem implicitamente os pressupostos teóricos do construtivismo de Jean Piaget. A autora verificou que as ações dos alunos podem resultar em aprendizado mediante as sucessivas assimilações e acomodações que uma atividade/problema cuidadosamente preparada e aplicada pelo professor pode proporcionar. A Figura 4 ilustra essa análise:

Figura 4 – Sistematização das relações entre a Sequência Fedathi e a teoria piagetiana.



Fonte: Santos (2007, p. 56)

A autora analisou cada etapa com base na aplicação da Sequência Fedathi junto a uma turma de graduandos em Pedagogia. Segundo suas apreciações, na *tomada de posição* os alunos eram estimulados a usar constantemente seus esquemas (que podemos considerar como estruturas cognitivas que resguardam os conhecimentos prévios), na *maturação* ocorreu a assimilação (captação e compreensão dos dados/variáveis do problema segundo seus esquemas), a *solução* é o momento em que pode ocorrer a acomodação, caso na busca pelas soluções tenha ocorrido a modificação ou criação de um novo esquema para dar conta do conteúdo abordado. Na fase da *prova*, em que o professor apresenta formalmente o conteúdo para a turma, este pode presenciar a assimilação e a acomodação resultando na adaptação, na ampliação dos esquemas e, consequentemente, em aprendizagem.

Essa comparação descreve o quanto a Sequência Fedathi pode contribuir para a aprendizagem do aluno, enquanto norteadora das ações do professor durante a mediação do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que visa motivar o aluno a agir e a coordenar suas ações sobre o objeto em estudo.

Apesar de a Figura 4 trazer a proposta de um acontecimento de fases linear que corresponde biunivocamente a cada fase da Sequência Fedathi, esse processo de assimilação, acomodação e adaptação que geram equilíbrio e desequilíbrio cognitivo, pode estar acontecendo nas demais fases.

No entanto, somente a assimilação e acomodação, por si só, não explicam como se dá o avanço do conhecimento na mente humana. Piaget (1995) aborda o conceito de *abstração reflexionante* com o qual descreve como o aprendiz consegue chegar a novas aprendizagens e a construir novos conceitos. Segundo o autor, o surgimento dos conceitos, essenciais para o nosso pensar, só é possível mediante tomadas de consciência que sucedem uma abstração reflexionante, que por sua vez deriva da coordenação das ações. Piaget a descreve do seguinte modo

> [...] ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo “reflexionamento” [...]. Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por “reflexão”. (PIAGET, 1995, p. 6)

Compreender o processo de abstração reflexionante pode ajudar o professor a entender como se dá a aprendizagem de novos conceitos nas estruturas mentais dos alunos e, com isso, melhor lidar com as dificuldades que os alunos, por vezes, enfrentam em relação ao aprendizado conceitual em matemática.

Na Sequência Fedathi, a abstração reflexionante não necessariamente ocorrerá em uma única aula, mas seu sucesso dependerá das assimilações e acomodações que o aluno for realizando à medida que se debruça a estudar determinado assunto ou conforme vai tendo seu raciocínio (esquemas) estimulado pelas perguntas ou estratégias de ensino trazidas pelo professor.

> Para Piaget, o ensino só logrará êxito se puder contar com uma lógica, previamente construída. Essa lógica provém das coordenações das ações do sujeito, mediante processos de reflexionamentos e reflexões ou de abstração reflexionante. Para conseguir êxito nessa construção, o sujeito tem que se apropriar de suas ações; primeiramente de seus esquemas, depois, das coordenações de seus esquemas ou coordenação de suas ações; mais adiante, dos subsistemas de esquemas,

> assimilando-os uns aos outros. É esse o caminho da formação de estruturas lógico-matemáticas com as quais poderá apropriar-se dos conhecimentos da ciência da lógica e da ciência da matemática e, mais tarde, fazer lógica, matemática ou qualquer outra ciência. Sem essa apropriação, esses mundos serão inacessíveis, mesmo para quem puder contar com o ensino. (BECKER, 2012, p. 37)

Diante dessa descrição do papel da abstração reflexionante na construção do conhecimento, podemos compreender que é esse tipo de abstração que transforma o que sabemos em novo objeto de pensamento e que nos conduz à generalização do saber em jogo.

O mesmo autor fornece exemplos da ocorrência da abstração reflexionante em Matemática: "refletir sobre a adição depois de se ter servido dela transforma o processo aditivo em novo objeto de pensamento. [...] a invenção da álgebra exigiu dos matemáticos a tematização da aritmética em conteúdo do qual retiraram nova(s) forma(s)". (p. 37).

Em Álgebra Linear, por exemplo, a compreensão do caráter unificador e generalizador da teoria dos espaços vetoriais requer a ocorrência da abstração reflexionante, uma vez que abrange uma generalização de conceitos matemáticos que o aluno já estudou e que agora passam a ser abordados numa estrutura mais geral, que os unifica. No entanto, não é fácil para o aluno assimilar essa estrutura.

A Sequência Fedathi, nesse processo, tem o papel de orientar a ação do docente, que conduzirá a ação discente como um intermediário e não apenas como emissor de respostas prontas e de uma matemática acabada que não garantem (dificultam) a ocorrência da abstração reflexionante nas estruturas internas dos alunos. Segundo Becker (2012, p. 39), essa transformação de forma em conteúdo é algo que não se ensina. Ou o estudante faz esse reflexionamento e transforma suas estruturas através da reflexão ou ela não ocorre. Cabe ao professor propiciar um ambiente favorável à reflexão.

Na Álgebra Linear, por exemplo, para começar a compreender a ideia de espaço vetorial, os alunos fazem uso de seus conhecimentos prévios acerca das propriedades de soma e multiplicação por escalar, o que inclui noções de vetores, linguagem dos conjuntos e de lógica. No entanto, é preciso que haja um reflexionamento desse saber a um patamar superior, no qual o aluno deverá refletir sobre as relações entre estas propriedades e outros domínios da matemática, tais como: o conjunto dos números reais, números complexos, matrizes, polinômios, ou seja, conjuntos com estruturas semelhantes, mas que formam espaços vetoriais distintos. Ao chegar a essa compreensão, o aluno passa a ter uma visão geral do que sejam os espaços vetoriais, o que significa que houve a abstração reflexionante.

O mesmo acontece com o conteúdo de *base*, cujo entendimento decorrerá da compreensão das ideias de conjunto gerador e independência linear, de modo que havendo o reflexionamento a um patamar superior, a reflexão do aluno culminará na formação do conceito: um conjunto de vetores geradores linearmente independentes[9]. Essa ideia foi trabalhada nas aulas observadas a partir da construção de subespaços vetoriais.

A abstração reflexionante descreve os processos envolvidos na construção do conhecimento, na compreensão e generalização de um conceito. A Sequência Fedathi proporciona um ambiente favorável a essa construção, cabendo ao professor mediar esse processo. As Alavancas Meta constituem uma importante ferramenta para propiciar a ocorrência da abstração reflexionante à medida em que atua diretamente sobre o conteúdo matemático revelando pontos estratégicos que possam desencadear a reflexão do aluno sobre o objeto estudado. É nesse ponto que a Sequência Fedathi e a Alavanca Meta poderão se complementar.

Desse modo, o que está em jogo nessa pesquisa é como a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta podem interagir para mediar esse processo de reflexão. Para isso, é importante compreender melhor o que são as Alavancas Meta para então relacioná-las à Sequência Fedathi.

2.3. Compreendendo a Alavanca Meta

Inserida no ensino da Álgebra Linear por ocasião da impossibilidade de se introduzir as noções elementares através de bons problemas, as Alavancas Meta determinam a presença de certos elementos no ensino, capazes de desencadear reflexões nos estudantes sobre o conteúdo estudado.

Segundo Dorier (2008), a noção de Alavanca Meta foi inserida por Aline Robert e Jacqueline Robinet, tendo como ideia central a introdução, num momento apropriado da aula, de um elemento capaz de conduzir o estudante à reflexão acerca do objeto matemático estudado. Em Dorier *et al.* (2000), encontramos a seguinte definição:

> A expressão alavanca meta designa o uso, no ensino, de informação ou conhecimento SOBRE matemática. Isso pode envolver o funcionamento da matemática, seu uso, sua aprendizagem, podendo seus elementos ser gerais ou particulares. [...] Essas informações podem levar os estudantes a refletir, conscientes ou não, tanto sobre seu próprio aprendizado na atividade matemática quanto sobre a

[9] A descrição de base exemplificada nessa frase não é única, pois há outras maneiras de concebê-la, conforme explica Silva (1997) ao investigar os diferentes significados para o conceito de base.

> própria natureza da matemática. É possível que tal reflexão os ajude a aprender. (DORIER *et al*., 2000, p. 151, grifo do autor, tradução nossa)[10]

Desse modo, a oportunidade de *reflexão* é o que constitui o principal objetivo de seu uso no ensino da matemática, a partir da qual decorrem as tomadas de consciência sobre o conhecimento em questão, responsável pela significação dos conceitos, propriedades, relações e procedimentos presentes nesse campo. No entanto, não pode ser confundida com informações comuns, mas somente aquelas que foram essenciais para provocar a reflexão sobre o objeto matemático em questão.

Consideramos que, para compreender melhor o significado do termo, é pertinente abordarmos a influência da metacognição e dos metaconhecimentos no contexto do ensino e da aprendizagem em matemática, pois foi a partir desses temas que a "meta" passou a ser introduzida na didática da matemática.

No artigo intitulado "*Prise en compte du meta en didactique des mathematiques*", Robert e Robinet (1993) analisaram a inclusão da "meta" (no sentido da metacognição) no ensino de matemática, partindo do fato de que durante uma aula o professor faz uso de certos elementos que acompanham seu discurso matemático, mas sem ser necessariamente, informações estritamente matemáticas.

> [...] o professor pode falar de maneira qualitativa dos conhecimentos que estão sendo descontextualizados, pode explicar para que servem, como utilizá-los, e pode citar os erros que frequentemente eles ocasionam... Há todo *um discurso sobre a matemática*, portanto, mais ou menos importante, mais ou menos divulgado, mais ou menos explicitado como tal, que nós classificamos como discurso meta enquanto discurso sobre a matemática precisamente. (ROBERT; ROBINET, 1993, p. 1, grifo das autoras, tradução nossa)[11]

Esse tipo de discurso, segundo as referidas autoras, é essencial para a aquisição de conceitos particulares, como por exemplo, o de espaço vetorial, em que não há possibilidade de exploração através de bons problemas, sendo necessário suprir essa carência por uma *reflexão sobre estes conceitos*.

Tal reflexão remete à metacognição definida por Flavell, fundador do conceito, como "[...] conhecimentos do sujeito relativo aos próprios processos e produtos cognitivos"

---

[10] The expression 'meta lever' designates the use, in teaching, of information or knowledge ABOUT mathematics. This can involve the operation of mathematics, its use, the learning of mathematics, and it can be its general or particular elements. […] This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and on the very nature of mathematics. It is possible that such reflection helps learning.

[11] L'enseignant peut parler de manière qualitative des connaissances qu'il est en train de décontextualiser, Il peut expliquer à quoi elles servent, comment lês utiliser, Il peut citer lês erreus frequentes qu'elles occasionnent... Il y a là tout un discours sur des mathematics donc, plus ou moins important, plus ou moins diffuse, plus ou moins explicité comme tel, que nous classons comme discours méta en tant que discours sur les mathématiques précisément.

os quais remetem ainda para “o controlo activo, a regulação e a orquestração desses processos.” (1976 *apud* DOLY, 1999, p. 22).

Esse conhecimento sobre a cognição e os produtos cognitivos é caracterizado pelas informações armazenadas na memória que são evocadas quando o sujeito está diante de uma atividade cognitiva, as quais têm a função de controlar e guiar a realização da atividade.

Essas informações são os chamados metaconhecimentos e incidem sobre os *processos cognitivos*, que dizem respeito ao funcionamento do pensamento e das funções mentais durante a resolução de um problema, bem como sobre os *produtos cognitivos*, que têm a ver com a consciência que o sujeito tem daquilo que ele sabe que sabe.

As pesquisas sobre o tema têm seguido dois caminhos: pesquisas sobre a inclusão consciente de metaconhecimentos nas aulas e pesquisas sobre o controle da metacognição. A noção de Alavanca Meta está relacionada à primeira linha de estudo, no entanto, trata de metaconhecimento referindo-se à matemática, ou seja, ao conhecimento sobre matemática.

Enfatizamos a importância dos metaconhecimentos para o ensino e aprendizagem com base em Otte (1992, p. 106 *apud* ARAÚJO, 2002, p. 13) que afirma que “[…] não existe conhecimento sem metaconhecimento e não se pode aprender um conceito teórico sem aprender algo sobre conceitos, com o objetivo de compreender que espécie de entidades eles são...”

Isso significa que, conscientemente ou não, estamos sempre interagindo com os conhecimentos e os metaconhecimentos subjacentes ao ato de conhecer e quanto mais próxima for essa interação, maiores serão as oportunidades de aquisição e controle do aprendizado.

Nas pesquisas francesas, esses metaconhecimentos caracterizam os elementos que podem se tornar Alavanca Meta para o estudante e assumem um caráter bem mais voltado para as especificidades da matemática. Padredi (2003), ao investigar o discurso de professores de Álgebra Linear, adota como denominação o termo metaconhecimento matemático, cuja principal função é conduzir/facilitar a integração entre conhecimentos antigos e novos conhecimentos.

Robert e Robinet (1993) reforçam essa compreensão da função dos metaconhecimentos no ensino de matemática

> Os elementos do tipo “meta” poderiam ser considerados de certa forma como uma interface explícita entre os alunos, da maneira como estão, e a matemática, como corpo de conhecimento a adquirir: os alunos têm suas representações, seus conhecimentos e seus automatismos. É necessário que eles integrem os novos conhecimentos aos precedentes, os metaconhecimentos poderiam participar desta

> integração, em momentos precisos, de maneira limitada e verdadeiramente diferenciada segundo as individualidades e sob certas condições. (ROBERT; ROBINET, 1993, p.21, tradução nossa)[12]

Desse modo, é no sentido dessa integração entre antigos e novos conhecimentos que os metaconhecimentos matemáticos poderão se tornar Alavancas Meta para o aluno. No entanto, o efeito de "alavanca" não é uniforme para todos os estudantes. Determinado metaconhecimento matemático pode se tornar alavanca meta para um aluno e não se tornar para outro. Isso dependerá dos conhecimentos que possui e da forma como lida com as informações recebidas.

Especificamente, Dorier *et al.* (2000, p. 151) explicam que a Alavanca Meta traz informações que constituem o conhecimento matemático e informações que constituem o funcionamento matemático.

As informações constitutivas do *conhecimento matemático* se referem aos métodos, as estruturas e as (re)organizações. Podem ser encontradas no discurso do professor, o qual associado às atividades pode gerar reflexões nos alunos sobre os procedimentos aplicáveis a um problema, sobre qual o melhor método e sobre o que é comum à resolução de um conjunto de problemas semelhantes.

As informações constitutivas do *funcionamento matemático* dizem respeito a informações sobre o papel da interação entre definições na resolução de um problema, sobre o emprego de questionamentos, exemplos e contraexemplos, bem como as mudanças de quadro.

Dessa forma, as Alavancas Meta podem ser encontradas no discurso do professor, nas atividades propostas, nos livros didáticos. Como exemplo desse tipo de atividade, Robert e Robinet (1993) apresentam duas atividades, propostas por J. L. Dorier para o ensino da Álgebra Linear.

O primeiro exemplo se refere a uma atividade elaborada de modo que o estudante seja conduzido a se interrogar sobre a estrutura de operação interna e de grupo, de um ponto de vista axiomático. Perguntas do tipo: Quais são as propriedades mínimas a serem introduzidas para garantir a resolução habitual e automática de equações lineares?

Neste exemplo, o autor chama atenção para a natureza inabitual da atividade, pois é um problema de reflexão sobre objetos familiares e que permite a mudança de ponto de

---

[12] En fait, les elements de type "méta" pourraient être consideres d'une certaine maniére comme un interface explicite entre les eleves, tels qu'ils sont, et les mathématiques, comme corps de connaissances à acquérir: les eleves ont des représentations, des connaissances et des automatismes, Il faut qu'ils intégrent les nouvelles connaissances aux precedentes, les métaconnaissances peuvent participer à cette intégration, à certains moments précis, de manière limitée et vraisemblablement différentiée selon les individus, et sous certaines conditions.

vista, de modo que os alunos possam melhor acompanhar o desenvolvimento da disciplina, pois o professor pode fazer uso de analogias para introduzir outros axiomas algébricos.

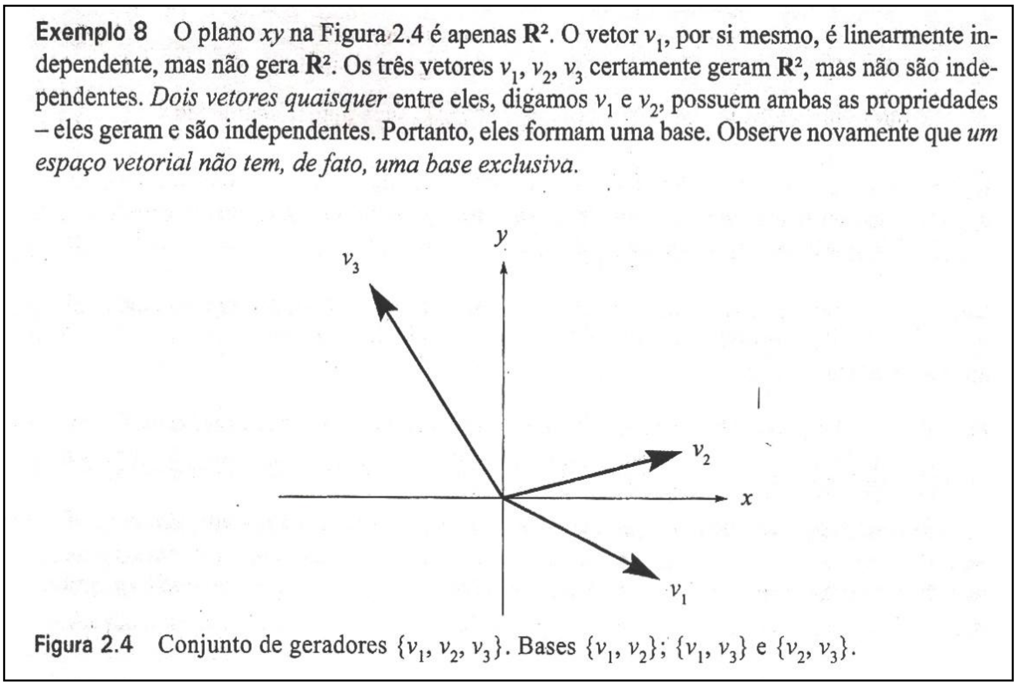
No segundo exemplo, é proposta a resolução de um problema (interpolação de Gregory) de modo que os estudantes sejam conduzidos a descobrir a economia que eles teriam se utilizassem o formalismo algébrico no lugar de um cálculo direto.

Para ilustrar a presença de possíveis alavancas meta no discurso do professor temos o seguinte trecho extraído das aulas que observamos no qual o professor diz:

> O *grande lance* do subespaço é o seguinte: se você tem o espaço vetorial e você tem o subespaço, é chamado subespaço quando as propriedades dele de soma e multiplicação por escalar são as mesmas do *espaço grande*. [...] Tem que ficar bem claro pra vocês que se é um subespaço ele *herda* as propriedades do espaço, no entanto você pode pegar um conjunto, que é subconjunto do espaço vetorial, ele é um espaço vetorial, mas não necessariamente ele é um subespaço daquele espaço vetorial.

Nesta fala, o professor usa os termos “grande lance”, “espaço grande” e “herda as propriedades” para chamar a atenção dos alunos para a definição de subespaço vetorial, como forma de facilitar sua compreensão. Tais termos poderiam fazê-los passar a enxergar as propriedades dos subespaços de modo mais simples, associando o tamanho do espaço e a herança de propriedades à ideia de conjunto e subconjunto com as mesmas propriedades.

Figura 5 – Exemplo de possível Alavanca Meta encontrada em livro didático.



Exemplo 8 O plano *xy* na Figura 2.4 é apenas $\mathbf{R}^2$. O vetor v_1, por si mesmo, é linearmente independente, mas não gera $\mathbf{R}^2$. Os três vetores v_1, v_2, v_3 certamente geram $\mathbf{R}^2$, mas não são independentes. *Dois vetores quaisquer* entre eles, digamos v_1 e v_2, possuem ambas as propriedades – eles geram e são independentes. Portanto, eles formam uma base. Observe novamente que *um espaço vetorial não tem, de fato, uma base exclusiva.*

Figura 2.4 Conjunto de geradores $\{v_1, v_2, v_3\}$. Bases $\{v_1, v_2\}$; $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$.

Fonte: Strang (2009, p. 96).

Como exemplo de possível Alavanca Meta em livros didáticos de Álgebra Linear, encontramos em Fontenele e Alves (2013) uma análise que descreve esse tipo de recurso. Nesse caso, temos o fato da base de um espaço vetorial não ser única, ilustrado através da representação geométrica de três vetores no plano xy (Figura 5), no qual se pode observar a dependência entre os três, o conjunto gerador e as diferentes bases formadas por eles.

Segundo os autores, nessa abordagem os conceitos ganharam uma visualização (concreta) que pode ajudar o aluno a reforçar sua compreensão sobre a combinação das propriedades de geração do espaço e independência de vetores. Foi utilizado o Princípio da Concretização (HAREL, 2000) e a mudança do quadro algébrico para o geométrico.

As dissertações de Araújo (2002), Padredi (2003) e Oliveira (2005) tratam especificamente dos recursos meta que podem se tornar Alavancas Meta para os estudantes, e, embora os autores tenham se referido a este termo com denominações diferentes, tais como, metamatemática, metaconhecimento matemático e recurso meta, respectivamente, todas trazem contribuições acerca de como funcionam esses metaconhecimentos e suas potencialidades no ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

Nestes trabalhos, os recursos meta passíveis de se tornarem alavanca meta, mais encontrados em atividades ou no discurso do professor foram o uso de jogos de quadro, mudanças de pontos de vista e os Princípios de Harel (HAREL, 2000).

Os *jeux des cadres* ou jogos de quadros, no contexto da educação matemática, dizem respeito aos diversos domínios em que a maioria dos conceitos ocorre, por exemplo: quadro geométrico, quadro numérico, quadro algébrico, entre outros. Segundo Maranhão (1999, p. 130), trata-se de "idas e vindas entre domínios estabelecendo relações matematicamente relevantes entre as noções estudadas".

Em Álgebra Linear, as interações entre domínios ocorrem, por exemplo, na abordagem de vetores: há momentos em que se usa o quadro vetorial (notação u, v, w...) e em outro se muda para o quadro numérico ($u = (1, 0, 1)$), e ainda, pode-se mudar para o quadro geométrico (até três dimensões).

Segundo Douady (1984, p. 128), em cada quadro um conceito se traduz em termos de objetos e relações que se pode chamar significado de um conceito no quadro. Assim, a autora explica que um quadro é:

> [...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os

> mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (DOUADY, 1984, p. 128 *apud* NOBRE BARROS, 2011, p.3).

Podemos considerar que é uma forma interativa de explorar os diferentes domínios matemáticos, constituindo uma ferramenta poderosa para promover o acesso à compreensão dos conceitos.

As mudanças de ponto de vista no contexto da educação matemática se referem a diferentes formas de ver um mesmo objeto matemático, de fazê-los funcionar. Segundo Rogalski:

> Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas, podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro (ROGALSKI, 1995 *apud* NOBRE BARROS, 2011, p. 2).

Assim, em Álgebra Linear é exemplo de mudança de pontos de vista sobre uma noção a seguinte situação: “[...] Identificar a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ com o vetor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, afim de passar do uso de combinações lineares de equações à noção de posto de uma família de vetores”. (ROGALSKI, 1994, p. 151, tradução nossa).

Harel (2000) apresenta três princípios pedagógicos voltados para a criação e implementação de currículos de Matemática, no qual os aborda no ensino da Álgebra Linear. São eles: Princípio da Concretização, Princípio da Necessidade e Princípio da Generalização.

O Princípio da Concretização é assim explicitado:

> Para os estudantes abstraírem uma estrutura matemática de um dado modelo desta estrutura, os elementos deste modelo devem ser entidades conceituais aos olhos dos estudantes; isto é, o estudante tem procedimentos mentais que podem tomar esses objetos como novos itens a serem aprendidos. (HAREL, 2000, p. 180, tradução nossa)[13].

Esse princípio parte da premissa de que os estudantes constroem sua compreensão conceitual com base em um contexto concreto para eles. Como exemplo, o autor cita o fato de que geralmente os alunos resolvem corretamente problemas de independência linear para vetores do R^n, mas têm dificuldades em verificar se um conjunto de funções são linearmente independentes. Segundo Harel (2000, p. 181, grifo do autor, tradução nossa),[14] isso “pode ser explicado pelo fato de que eles não podem aplicar o conceito de independência linear para

[13] For students to abstract a mathematical structure from a given model of that structure the elements of that model must be conceptual entities in the student’s eyes; that is to say the student has mental procedures that can take these objects as inputs.

[14] [...] can be explained by fact that they cannot apply the concept of linear independence to polynomials as functions because the concept of function as a vector is not *concrete* to them.

polinômios como funções, pois o conceito de função como um vetor não é concreto para eles".

Sobre o Princípio da Necessidade, Harel (2000, p. 185, tradução nossa)[15] explica que: "Para os estudantes aprenderem, eles precisam enxergar uma necessidade por aquilo que se pretende ensinar. Por 'necessidade', entende-se uma necessidade intelectual, como oposição à necessidade social ou econômica". Nesse sentido, o que está por trás desse princípio é a criação de situações didáticas, cujo ambiente possibilite o desenvolvimento de atividades que possam promover a reflexão sobre os conceitos matemáticos, mas que sejam realistas e apreciadas por ele.

O terceiro princípio, da Generalização, é explicado pelo autor da seguinte forma: "Quando o ensino é preocupado com o modelo 'concreto', isto é, um modelo que satisfaz o Princípio da Concretude, as atividades didáticas deste modelo devem permitir e encorajar a generalização dos conceitos". (HAREL, 2000, p. 187, tradução nossa)[16]. Assim, este princípio complementa os anteriores, cujo objetivo é permitir que os estudantes possam abstrair os conceitos que eles aprenderam em um modelo específico.

2.4. Sequência Fedathi x Alavanca Meta: semelhanças e diferenças

A Sequência Fedathi e as Alavancas Meta embora tratem de uma metodologia e uma ferramenta de ensino, respectivamente, possuem certas semelhanças e diferenças que analisaremos a seguir, buscando verificar teoricamente as vantagens no uso simultâneo de ambas para o ensino da Álgebra Linear.

O principal ponto de convergência entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta são seus objetivos no ensino, pois ambas buscam fazer com que o aprendizado matemático possa ser adquirido pelo maior número de alunos, através de estratégias de ensino que lhes permitam o exercício constante da reflexão. Ambas primam por motivar o aluno a pensar, raciocinar sobre um objeto ou problema matemático procurando compreender seus significados ou formas de resolução. No entanto, cada uma atua dentro de suas expertices.

---

[15] For students to learn, they must see a need for what they are intended to be taught. By 'need' it is meant an intellectual need, as opposed to a social or economic need.

[16] When instruction is concerned with a 'concrete' model, that is, a model that satisfies the Concreteness Principle, the instructional activities within this model should allow and encourage the generalizibility of concepts.

A Sequência Fedathi abrange um campo mais global dos acontecimentos em sala de aula, pois se preocupa com a postura do professor, como a aula deve ser conduzida de modo a levar o aluno a pensar por si mesmo, quais os cuidados a serem tomados para evitar a dispersão da turma, qual a melhor forma de intervenção e interação com os estudantes, qual o momento certo de falar ou silenciar e deixar o aluno agir por si mesmo, quando e como questionar, como esclarecer as dúvidas, como propiciar um ambiente de investigação, enfim engloba todo um conjunto de interações entre o professor, o aluno e o saber.

A Alavanca Meta, por sua vez, tem um foco mais local, mais específico, diretamente relacionado ao conteúdo matemático, a um ponto estratégico desse conteúdo no qual o professor poderá fazer uso de metaconhecimentos matemáticos para desencadear a reflexão do estudante. Desse modo, podemos considerar que esta noção constitui um conveniente subsidio à mediação do professor. Essa característica as diferencia, no entanto, voltam a convergir em seus fundamentos construtivistas e sociointeracionistas.

O construtivismo na Sequência Fedathi, conforme já mencionado, aparece em suas fases por meio das oportunidades para ocorrência de assimilações e acomodações geradas pelas ações do próprio aluno. O sociointeracionismo se revela à medida que esta metodologia proporciona momentos de interação entre os alunos, bem como, quando ao elaborar as aulas o professor fica atento aos conhecimentos prévios dos alunos de modo a trabalhar com eles respeitando a sua Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP (VIGOTSKI, 2007).

As Alavancas Meta na perspectiva interacionista, segundo Dorier *et al.* (2000, p. 153) podem proporcionar uma maior comunicação entre os alunos dando-lhes maiores oportunidades de se envolverem em suas atividades, motivada a partir de suas reflexões que passarão a ser assunto de discussão entre eles. A presença do construtivismo é observada na seguinte fala do autor:

> De uma perspectiva construtivista (no sentido amplo do termo), perguntamo-nos se estas intervenções não contribuem para certo desequilíbrio. Um desequilíbrio dinâmico entre metaconhecimento e conhecimento. Se o desequilíbrio é muito grande nada acontece, mas se pequeno o suficiente, os alunos são ajudados a dar o primeiro passo para o desconhecido. (Dorier *et al.*, 2000, p. 153, tradução nossa)[17]

[17] From a constructivist perspective (in the broad sense of the term) we wonder whether these interventions do not contribute to a certain imbalance, a dynamic imbalance between metaknowledge and knowledge. If the imbalance is too great, nothing happens, but if it is small enough, students are aided in taking the first step into the unknown.

Outra semelhança entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta reside na questão do tempo despendido pelo aluno para maturação das situações propostas. Na Sequência Fedathi o professor deve saber respeitar esse tempo, ao qual chamamos de “tempo do aluno”[18]. É nesse momento que os discentes têm a oportunidade de vivenciar os equilíbrios e desequilíbrios de seus esquemas mentais que buscam dar conta do que estão a realizar. Ao gerenciar adequadamente esse processo, o docente está criando um ambiente favorável à aprendizagem, conforme apontam os estudos piagetianos. O uso das Alavancas Meta requer também essa consciência do professor, pois os resultados se efetivam em longo prazo e requer mudança nos hábitos dos alunos.

Em ambas, a ação do aluno é valorizada e oportunizada, de modo que a recorrência às tarefas algorítmicas passa a ser empregada não mais como forma de burlar a etapa da compreensão conceitual, conforme apontado por Dorier *et al.* (1999, p. 103), quando afirma que geralmente os professores recorrem a essas tarefas para fugir das incompreensões conceituais dos alunos.

Outro ponto de convergência entre ambas é o uso de perguntas e contraexemplos durante a aula. Na Sequência Fedathi, tais recursos são importantes para favorecer a mediação e envolver o aluno no tema trabalhado, instigando-o a pensar e fazer suas próprias deduções, bem como a validar suas hipóteses. De modo semelhante, na perspectiva das Alavancas Meta, dependendo da forma como são elaborados e utilizados, têm grandes chances de desencadear reflexões nos alunos sendo classificados, portanto, como recursos-meta.

Ambas também proporcionam intervenções que requerem troca entre o professor e aluno, que pedem mudança na postura e hábitos discentes, trazendo também um ponto crucial: as lições parecem ser mais difíceis do que as que tradicionalmente são trabalhadas no ensino da matemática. Segundo Dorier *et al*. (2000), p. 154)

> Há certo paradoxo aqui: professores que colocam em prática o conceito de alavanca meta ensinam com questões que podem parecer mais difíceis que o usual, requerendo reflexões incomuns, mas cujo objetivo é permitir que mais estudantes tenham sucesso. (DORIER *et al*., 2000, p. 154, tradução nossa)[19]

---

[18] Na Sequência Fedathi o “tempo do aluno” quer dizer seu tempo didático, ou seja, o professor respeita a necessidade do aluno em maturar o conhecimento. Não sendo, portanto, pré-determinado pelo docente, mas gerenciado por ele, que deverá esperar o *feedback* dos discentes, mas também deve saber quando intervir auxiliando a turma conforme necessário, sem precisamente fornecer respostas prontas ou mostrar-lhes diretamente o caminho.

[19] There is, moreover, a certain paradox here: teachers who put into practice the metalever concept teach lessons that may seem difficult than usual, requiring unusual reflection, but whose aim is to allow more students to succeed.

Nas aulas observadas, os alunos apresentaram certa resistência em se adaptar à nova forma de ensino proposta pela Sequência Fedathi, pois estavam acostumados ao modelo tradicional de ensino em que bastava receber explicações sobre os conteúdos de forma pronta, sem ter que pensar sobre as relações conceituais durante a aula. Apresentar soluções na lousa ou serem indagados o tempo todo trouxe inicialmente certo desconforto, mas aos poucos estas barreiras iam sendo superadas.

As diferenças entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta podem se complementar à medida que uma ferramenta de ensino serve de suporte ao professor ao utilizar determinada metodologia. Enquanto a Sequência Fedathi tem foco na postura docente e na mediação do ensino, as Alavancas Meta têm foco na aprendizagem, ou seja, em pontos estratégicos do conteúdo que podem ser abordados de modo a motivar a reflexão do aluno gerando um consequente aprendizado.

Nessa diferença, reside a principal possível vantagem do uso concomitante de ambas, pois assim sendo o professor estaria dualmente amparado: em termos da mediação e em termos do conteúdo, reforçando as estratégias de ensino e localizando os pontos específicos dos quais emergirão as possíveis reflexões dos alunos. As Alavancas Meta serviriam então como um subsídio à Sequência Fedathi.

Além disso, a Sequência Fedathi é trabalhada durante toda a aula, enquanto as Alavancas Meta devem aparecer em momentos apropriados, sendo para isso, bem elaboradas e utilizadas corretamente. Nesse caso, aparecerão dentro das fases da Sequência Fedathi. A forma como poderão aparecer e as relações com as fases serão verificadas e analisadas na pesquisa.

No próximo capítulo, trazemos a descrição dos procedimentos metodológicos, das aulas observadas e dos resultados da interação entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta na prática de sala de aula.

3 ABORDAGEM EMPÍRICA: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos nossas escolhas metodológicas, o lócus, o sujeito da pesquisa, as formas de coleta e registro dos dados empíricos, bem como retratamos sucintamente os assuntos abordados durante as aulas, destacando a Sequência Fedathi e os recursos passíveis de se tornarem Alavancas Meta utilizados pelo professor.

3.1 Caracterização da Pesquisa: escolha da instituição e do sujeito

Este estudo se caracteriza como uma investigação de natureza qualitativa na qual nos embasamos metodologicamente nas concepções de Bogdan e Biklen (1994), Triviños (1987) e Laville e Dionne (1999). Considerando os diferentes enfoques que a pesquisa qualitativa pode tomar e as nossas perguntas de pesquisa, delimitamos esta abordagem ao estudo de caso, fundamentado em Yin (2010) e Gil (2009), no qual tivemos como fonte de dados: observações de campo e uma entrevista semiestruturada com o professor sujeito da pesquisa.

Para escolha do sujeito, adotamos como principal requisito a utilização da Sequência Fedathi como metodologia de ensino em aulas de Álgebra Linear. Um professor que se adequava a este requisito era docente na Universidade Federal do Ceará e ministrava aulas no curso de Engenharia de Teleinformática, possuindo mais de vinte anos de experiência com o uso dessa metodologia.

A disciplina observada era intitulada “Introdução à Álgebra”, sendo pré-requisito para outras disciplinas do curso. Isso exigia, portanto, que as noções elementares da Álgebra Linear fossem bastante exploradas. As aulas aconteciam duas vezes por semana, no período da tarde, tendo duas horas de duração cada uma.

Ressaltamos que como não era nosso propósito comparar a Sequência Fedathi ao ensino tradicional, mas em vez disso, investigar sua utilização para a promoção da reflexão sobre os conteúdos (alavanca meta), não houve a necessidade de observar aulas de outro professor.

3.2 Instrumentos de coleta dos dados e categorias de análise

Os procedimentos utilizados para coleta dos dados foram escolhidos levando-se em conta três princípios apresentados por Yin (2010, p. 141) que abrangem em detalhes: o uso de múltiplas fontes de evidência; a criação de uma base de dados; e a preservação do encadeamento de evidências. Dessa forma, fazemos uso de múltiplas fontes de evidência, através de observação e entrevista semiestruturada, de modo a favorecer o desenvolvimento de linhas convergentes de investigação, relacionando a prática docente e a concepção de ensino do professor.

A observação das aulas visou coletar dados acerca das ações do professor em sala de aula: sua postura, seu discurso, questionamentos realizados, atividades propostas, recursos didáticos utilizados e sua metodologia, de modo que fossem registrados em seu ambiente natural.

Observamos também alguns momentos de elaboração/planejamento das sessões didáticas. O intuito dessas observações era obter mais dados acerca das formas de execução das aulas de modo que pudéssemos ter uma noção mais abrangente do cenário investigado. Essas observações foram registradas em áudio.

A entrevista semiestruturada visou coletar informações acerca da visão do professor sobre o ensino da Álgebra Linear e sua experiência com a Sequência Fedathi, como forma de compreender melhor suas atitudes em sala de aula, bem como verificar uma possível presença de recursos de ordem meta. Foi realizada no Laboratório de Pesquisa Multimeios da FACED/UFC, sendo organizada, conduzida e analisada conforme as orientações de Szymianski, Almeida e Prandini (2002) e Bardin (2004). Compreendemos que conhecer as concepções de ensino do sujeito da pesquisa nos permite compará-la às aulas observadas examinando suas congruências e/ou discrepâncias e verificando se suas falas também são vivenciadas na prática.

Optamos pela modalidade de entrevista semiestruturada devido à sua flexibilidade e às oportunidades de se colocar outros questionamentos além dos que foram estabelecidos previamente. Além disso, permitiria que o entrevistado tivesse maior liberdade ao desenvolver suas respostas podendo, com isso, explorar à vontade os pontos que considerasse mais relevantes. Então, poderíamos explorar de modo mais aprofundado seus pontos de vista, esclarecendo eventuais dúvidas no momento de sua realização.

Foram elaboradas 07 perguntas (apêndice A) sobre o tema Sequência Fedathi no qual abordamos as concepções, planejamento, recursos e estratégias didáticas utilizadas pelo docente. As perguntas são descritas a seguir, mas por ser uma entrevista semiestruturada, na prática, foram feitos outros questionamentos, que não fugiram aos temas pré-estabelecidos. Consideramos que foram suficientes para alcançarmos nossos objetivos.

As análises e resultados da entrevista e das conversas que tivemos durante os planejamentos são apresentados ao longo da descrição das aulas observadas como forma de relacionar e analisar simultaneamente prática e discurso docente.

Sobre a análise dos dados, no estudo de caso, não há, a rigor, métodos e técnicas específicos para este fim. Segundo Gil (2009, p.92) “praticamente todas as estratégias utilizadas em pesquisa qualitativa – e algumas adotadas em pesquisas quantitativas - aplicam-se aos estudos de caso”. Dessa forma, o que geralmente se segue é a adoção dos métodos de análise da pesquisa qualitativa, tais como, a análise fundamentada teoricamente, a análise etnográfica, a análise fenomenológica, a análise de conteúdo, etc.

Desse modo, abordamos como estratégia analítica geral a análise fundamentada teoricamente (GIL, 2009) tendo como técnica a análise de conteúdo (BARDIN, 2004), como forma de fortalecer a validade interna do estudo, no qual fizemos uma comparação entre os dados obtidos e o referencial teórico abordado, ou seja, entre os pressupostos da Sequência Fedathi e os conceitos que caracterizam as Alavancas Meta.

Diante das teorias abordadas, descrevemos no Quadro 3 as categorias de análise eleitas para realização da investigação, que se divide nas categorias referentes às Alavancas Meta e à Sequência Fedathi. Nos Quadros 3 e 4, a seguir, elencamos suas descrições, respectivamente.

Quadro 3 – Descrição das categorias eleitas para condução das análises referentes às Alavancas Meta.

ALAVANCAS META		
Categorias de Análise	**Subcategorias de Análise**	**Significados da Análise**
Informações Constitutivas do Funcionamento Matemático	Uso de linguagem coloquial	Uso dessa linguagem para simplificar a apresentação dos conceitos.
	Uso de contraexemplos	Uso de exemplos que divergem do conceito abordado, mas que aparentemente são semelhantes.
	Uso de metáforas	Recorrência a metáforas para melhor explicar os conceitos explorados.
	Uso de perguntas	Perguntas que possam desencadear reflexões no aluno sobre o conteúdo abordado.

	Uso de representação geométrica	Exploração de propriedades e comportamento geométrico dos conteúdos estudados.
	Jogos de quadro	Mostrar os diferentes quadros em que um conceito pode aparecer.
	Mudança de pontos de vista	Mostrar as diferentes formas de visualizar e interpretar um conceito.
	Princípios de Harel	Explicitação da *necessidade* de se trabalhar com um conceito; Explicitação de um conceito de modo que este seja *concreto* para o aluno; Uso de *generalização* dos conceitos.
Informações Constitutivas do Conhecimento Matemático	Métodos, estruturas e (re)organizações	Procedimentos aplicáveis a um problema.
Informações de Natureza Epistemológica	Informações sobre a natureza dos conceitos	Esclarecimentos sobre a natureza dos conceitos.

Fonte: Pesquisa direta.

No Quadro 3, descrevemos as categorias, subcategorias e o significado da análise como forma de explicitar os critérios usados na identificação das possíveis Alavancas Meta nas fases da Sequência Fedathi, cujos recursos eleitos foram: linguagem coloquial, contraexemplos, metáforas, representações geométricas, questionamentos, atividades ou situações que fizessem uso de jogos de quadro, mudança de pontos de vista ou dos princípios de Harel (2000). Listamos no Quadro 4 as categorias eleitas para descrição da ação docente na Sequência Fedathi:

Quadro 4 – Categorias eleitas para descrição do uso da Sequência Fedathi.

SEQUÊNCIA FEDATHI (SF)		
Categorias de Análise	**Subcategorias de Análise**	**Significados da Análise**
Tomada de posição Maturação Solução Prova	Postura Discurso Questionamentos Recursos/estratégias didáticas Situações/atividades propostas	Elementos presentes no processo de ensino que descrevem as características principais de como acontece cada fase da SF.

Fonte: Pesquisa direta.

Nesse caso, temos como categorias as fases da sequência e como subcategorias a postura, discursos, questionamentos, recursos, estratégias de ensino e situações/atividades propostas, que nos ajudarão a descrever a ação docente em sala de aula e como aconteceu cada fase. Nessa descrição poderemos identificar as possíveis Alavancas Meta.

3.3. A observação das aulas: descrição e análises

Inicialmente, foi acordado com o professor que as aulas a serem filmadas seriam as que tratassem da noção de base de um espaço vetorial. No entanto, foram acompanhadas algumas aulas desde o início da disciplina, ainda no semestre 2012.1, com o intuito de adaptação tanto da pesquisadora ao ambiente de pesquisa, quanto dos alunos, que puderam se acostumar à presença de alguém estranho à turma. Além disso, era uma forma de se ter noções prévias da forma como as aulas aconteciam, facilitando as observações posteriores.

Os temas abordados nas aulas anteriores à noção de base (não registradas em vídeo) foram: lógica e linguagem de conjuntos, vetores, espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss e Gauss-Jordan. As aulas foram observadas do fundo da sala e registradas em anotações de campo, que ajudaram na compreensão do método, sempre se tendo o devido cuidado para não interferir no seu andamento natural.

Durante as aulas todas as ações didáticas do professor foram observadas, inclusive, gestos, expressões, metáforas, analogias, tudo o que pudesse trazer alguma informação ou conhecimento matemático passível de se tornar alavanca meta para os alunos. Ao todo, foram 8 aulas observadas na pré-análise de campo e 8 observadas e registradas em vídeo, das quais foram selecionadas 4 para serem analisadas, visto que eram as que tratavam da noção de base e forneceriam dados suficientes para atingirmos a contento nossos objetivos de pesquisa.

As observações descritas nesse trabalho se deram nos meses de outubro e novembro de 2012, período em que se iniciou o 2º semestre letivo da UFC (2012.2). Expomos a seguir algumas partes das aulas observadas em que foram identificados os recursos passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos nas etapas da Sequência Fedathi. Ao analisar cada trecho destacado, consideramos o contexto no qual a informação foi inserida, verificando como se deu a interação professor/aluno/saber e as possíveis consequências que os métodos/estratégias abordados poderiam trazer para os estudantes em termos de compreensão do assunto estudado.

Ressaltamos que após a descrição e análise de cada sessão didática, sempre que pertinente, tecemos comentários relacionando as observações das aulas às informações obtidas na entrevista e planejamentos.

3.3.1. Sessão Didática 1 – Revisão sobre espaço e subespaço vetorial - 25/10/12

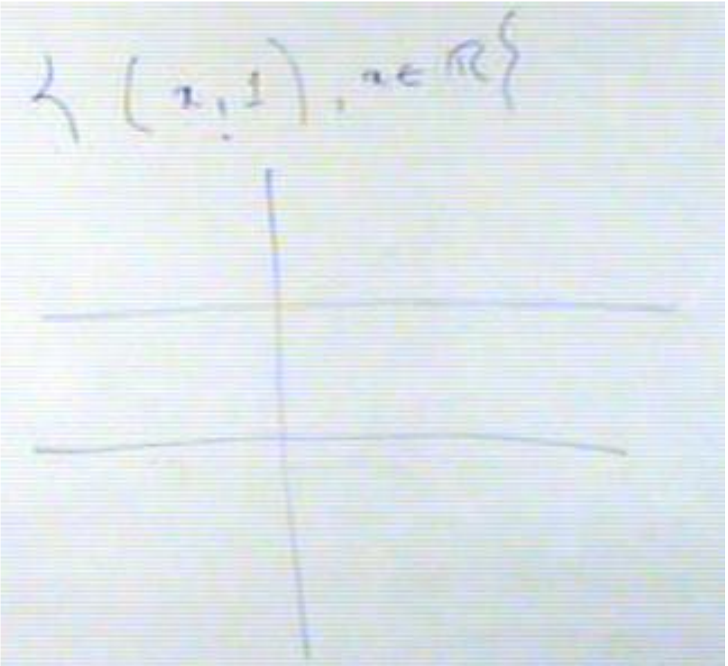
Nessa aula foram revisadas as noções de espaço vetorial, subespaço e combinação linear. Embora não versasse ainda sobre o conteúdo foco da pesquisa (base de um espaço vetorial), foi possível perceber algumas situações nas quais o professor fazia uso de metaconhecimento matemático, principalmente ao abordar os significados das noções de espaço e subespaço vetorial. Para isso, o professor sempre usava as representações algébricas e geométricas, cujas explicações eram conduzidas principalmente através de perguntas.

Na *tomada de posição*, ao recordar o conceito de espaço vetorial, o professor apresentou o contraexemplo que ilustramos ainda na problemática deste trabalho (Figura 1, p. 18), no qual foi apresentado o conjunto $\{(x, 1), x \in R\} \subset R^2$ em que os alunos deveriam verificar se era um espaço vetorial, de modo que fossem exploradas suas propriedades nos quadros algébrico e geométrico, simultaneamente. Com ele o professor explorou a noção de espaço vetorial através da abordagem de situações que remetiam constantemente o aluno a pensar e repensar sobre suas propriedades.

Nessa situação foram utilizados: o Princípio da Concretização, pois o gráfico constitui um modelo concreto para os alunos; jogos de quadro, explorando os quadros algébrico e geométrico; e contraexemplo, pois se tratava de um exemplo que não correspondia a um espaço vetorial. Com essas estratégias, os alunos eram suscitados a refletir e tentar compreender o significado geométrico do vetor nulo dentro da teoria dos espaços vetoriais.

Portanto, o gráfico ilustrado na Figura 6 constituiu uma possível Alavanca Meta, pois, ao esboçar o gráfico, o professor ilustrou para a turma a ausência do vetor nulo no conjunto, uma vez que a reta não passa pela origem. Ele chamou a atenção da turma para este fato e fez a verificação algébrica das propriedades dos espaços vetoriais constatando não se tratar de um espaço vetorial, caracterizando assim a fase de *prova* da Sequência Fedathi. A partir desse contraexemplo passou a explorar as propriedades dos subespaços vetoriais.

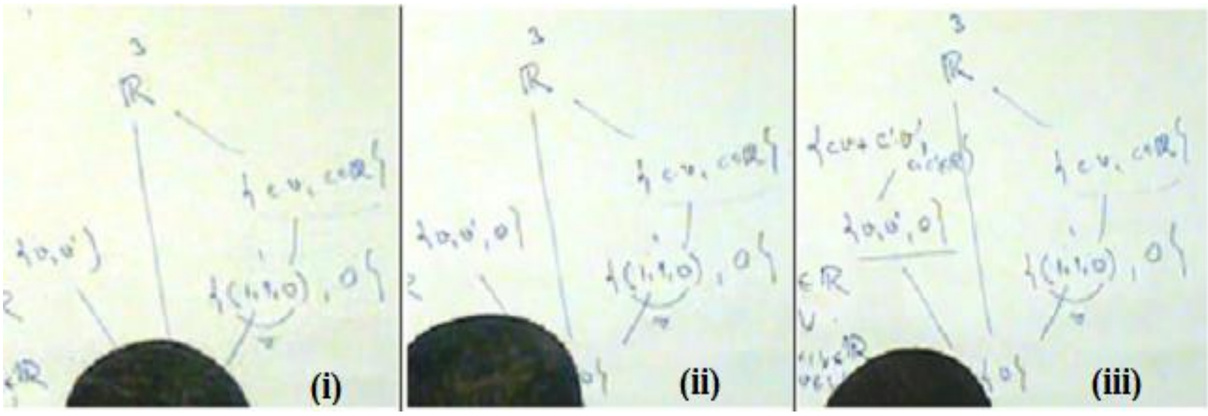
Figura 6 – Primeira possível Alavanca Meta identificada.



Fonte: Pesquisa direta.

Em seguida, o professor fez uma nova *tomada de posição* usando o esquema também mostrado na problemática deste trabalho (Figura 3, p. 21), em que foi construindo junto com os alunos subespaços vetoriais. Na Figura 7, temos a continuação desse processo.

Figura 7 – Esquema usado pelo docente para construção de subespaços vetoriais.



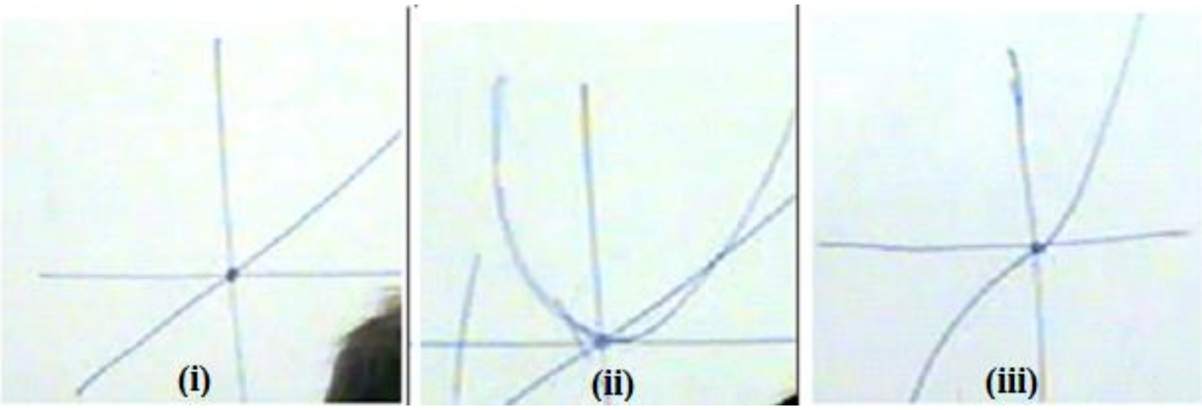
Fonte: Pesquisa direta.

Semelhante ao processo anterior, conforme mostra a Figura 7, o professor acrescentou (dessa vez no lado esquerdo) um conjunto de vetores e questionou a turma se esse conjunto seria um subespaço vetorial (i). Um aluno respondeu que não, pois não possui o vetor nulo. O professor aumentou o conjunto conforme (ii), questionou novamente a turma, e em seguida acrescentou um novo conjunto, conforme mostrado em (iii) no qual fez a verificação algébrica das propriedades de soma e multiplicação por escalar.

Este esquema explora as propriedades dos subespaços e requer constantemente que estas sejam revistas e verificadas partindo-se de um conjunto bem pequeno inserido em um conjunto maior. Através das perguntas: “ – Como encontrar os subespaços que estão no meio?” e “ – O conjunto dado é um subespaço vetorial?”, o professor seguiu instigando os alunos a refletirem sobre as propriedades dos subespaços. Não se está apenas verificando as propriedades, está-se construindo um subespaço com base nas propriedades. Desse modo, é um recurso que é passível de se tornar alavanca meta para os alunos, pois traz informações constitutivas do conhecimento matemático.

Em seguida, o professor enfatizou que em um espaço vetorial, qualquer subespaço tem que passar pela origem, mas nem todo gráfico que passa pela origem é um subespaço vetorial. Para explicar isso, fez uso de exemplos representados geometricamente, conforme mostra a Figura 8:

Figura 8 – Exemplos usados pelo docente para ilustrar que nem todo gráfico que passa pela origem representa um subespaços vetorial.



Fonte: Pesquisa direta.

> Por exemplo, essa reta aqui (i) é um subespaço vetorial do R². Isso daqui é uma parábola passando pela origem (ii). Tá certo? Essa parábola passando pela origem não é um subespaço vetorial. A palavra linear é porque está associado a coisas de grau 1. Essa parábola é infinita e é uma curva de grau 2, não é? A equação dela não é de grau 2? Então ela não é linear, não pode ser aproximada linearmente de coisas de 1º grau. Embora passando pela origem não é. Da mesma forma, que isso aqui (iii) também não é subespaço vetorial embora passe pela origem.

Com este exemplo, o professor esclareceu um ponto que pode confundir os estudantes, que diz respeito à propriedade do vetor nulo pertencer ao subespaço. Através do contraexemplo, mostrou à turma exemplos de gráficos que passam pela origem (ii e iii), mas que não representam subespaços vetoriais. Dessa forma, pôde suscitar reflexões nos alunos sobre o significado do vetor nulo na teoria dos espaços vetoriais, por meio da rejeição de situações “parecidas” com a propriedade abordada. Portanto, podemos considerar que se trata de um recurso passível de se tornar Alavanca Meta para os discentes.

Apesar de ser uma aula teórica, o incentivo à participação dos alunos era constante, principalmente através do uso de perguntas que constitui uma das principais características da postura do professor que usa a Sequência Fedathi, conforme apontado por Sousa (2005).

Observamos que as estratégias e recursos usados pelo professor nessa aula coadunam com as impressões que extraímos de seu discurso durante a entrevista semiestruturada e conversas sobre o planejamento e elaboração das sessões didáticas, cujas falas mantiveram sempre um encadeamento de ideias com ênfase na ação docente voltada para perspectivas da descoberta, construção, reflexão e participação do aluno.

A harmonia e segurança mantidas durante toda a conversa expressaram o quanto ele acredita nessa forma de ensino. Em suas falas, sempre enfatizava a questão da construção dos conceitos. Foi essa construção que observamos nessa aula, na qual usou diferentes recursos para atingir esse objetivo.

3.3.2. Sessão Didática 2 - Conjunto Gerador - 30/10/12

Esta aula abordou o conceito de conjunto gerador. O professor iniciou relembrando conceitos e exemplos vistos na aula anterior, tais como espaço vetorial, subespaço e combinação linear. Essa revisão inicial caracterizou o diagnóstico do *plateau* da turma. Observamos que as quatro fases da Sequência Fedathi ocorreram seguidas vezes nas quais identificamos metaconhecimentos matemáticos passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos.

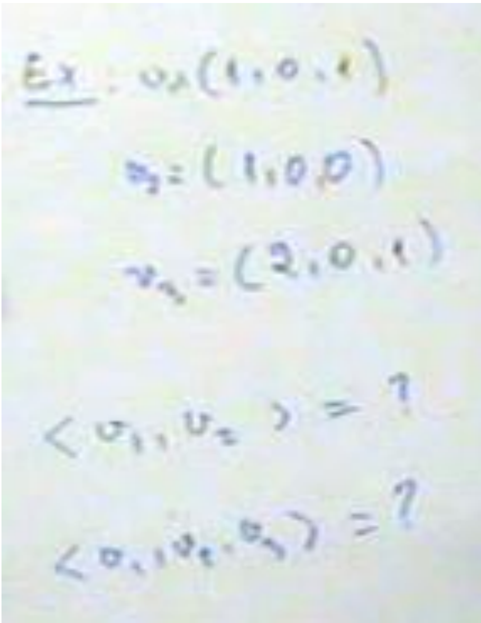
Ao recordar a ideia de subespaço, destacamos no discurso docente a seguinte fala:

> O *grande lance* do subespaço é o seguinte: se você tem o espaço vetorial e você tem o subespaço, é chamado subespaço quando as propriedades dele, de soma e multiplicação por escalar, são as mesmas do *espaço grande*. [...] Tem que ficar bem claro para vocês, que se é um subespaço ele *herda* as propriedades do espaço, no entanto, você pode pegar um conjunto, que é subconjunto do espaço vetorial. Ele é um espaço vetorial, mas não necessariamente ele é um subespaço daquele espaço vetorial. [...] Isso é parecido com as *heranças genéticas*, não é? Que todo filho ele tem herança genética dos pais, dos avós, bisavós, não é assim? (Grifo nosso)

Nesta fala, o professor chamou a atenção dos alunos para a definição de subespaço vetorial na qual faz uso de linguagem coloquial através dos termos “grande lance” e “espaço grande” e da analogia das “heranças genéticas”, como forma de deixar claras as propriedades do subespaço que são as mesmas do espaço vetorial. Tais termos poderiam fazê-los passar a enxergar as propriedades dos subespaços de modo mais simples ao associar as ideias de “espaço grande” e “espaço menor” a conjunto e subconjunto com as mesmas propriedades. Consideramos essa linguagem como passível de se tornar alavanca meta.

Após esta breve revisão dos conteúdos abordados na aula anterior o professor apresentou a situação ilustrada na Figura 9. Buscava com esse exemplo saber o que daria o subespaço gerado por $< v_1, v_2 >$ e por $< v_1, v_2, v_3 >$ [20], pensando no espaço V como o próprio R³.

Figura 9 – Exemplo apresentado pelo docente para exploração do conceito de gerador.



Fonte: Pesquisa direta.

Ao abordar essa situação, o professor explorou a noção de geradores sem usar inicialmente esta palavra. Os alunos ficaram pensativos, até que um percebeu a relação entre os conjuntos e afirmou que $v_3 = v_1 + v_2$. Diante disso, o professor explicitou

> Isso daqui $< v_1, v_2 >$ é um conjunto gerado por dois vetores e esse daqui $< v_1, v_2, v_3 >$ é gerado por três, mas o conjunto é o mesmo. Então, determinado subespaço vetorial ou determinado espaço vetorial, pode ser gerado por um número distinto de vetores.

[20] O professor da disciplina usava “< >” para representar subespaços gerados, ao invés da notação usual “[ ]”.

Nesse caso, o professor esperou até que alguém percebesse a relação entre os vetores, para só então explicar que embora dois conjuntos gerassem o mesmo espaço, podiam ser formados por um número distinto de vetores. Assim, introduziu a ideia de conjunto gerador. No entanto, a turma não conseguiu responder completamente o que foi pedido, então o professor prosseguiu fazendo novas perguntas acerca de $< v_1, v_2 >$:

Professor: O que é $< v_1, v_2 >$? O que vocês acham que vai dar $< v_1, v_2 >$? Fazendo conta ou sem fazer as contas.

Aluno: Um plano.

Professor: Um plano. Por que dá um plano?

Nesse momento os alunos ficaram pensativos, mas não esboçaram tentativas de respostas. Ao perceber que apesar do aluno ter respondido que se tratava de um plano, mas nem ele, nem nenhum outro discente conseguiram justificar essa resposta, o professor teve que redirecionar o diálogo para as condições de geração de planos. Através de novas perguntas e da recorrência ao uso de gestos, conforme mostra a Figura 10, buscou ajudá-los a pensar um pouco mais.

Professor: Assim gera o plano? [ver (i) na Figura 10]

Aluno A: Gera.

Professor: Qual é o plano?

Aluno B: xz?

Aluno C: uma reta.

Professor: É isso que você disse, aqui é uma reta e aqui é outra.

[explica utilizando as mãos].

Professor: Isso dá um plano? Isso aqui é uma reta. Conseguem ver? Vocês conseguem visualizar, mas enxergar não. Isso aqui não é uma reta? Aqui é outra? Isso aqui não dá um plano? É só fazer assim, não é?

[o professor coloca as retas imaginárias de modo paralelo, conforme mostra a Figura 10 em (ii), e mostra que ambas estão no mesmo plano. Em seguida, coloca as retas imaginárias em posições não paralelas, como em (i) e segue perguntando].

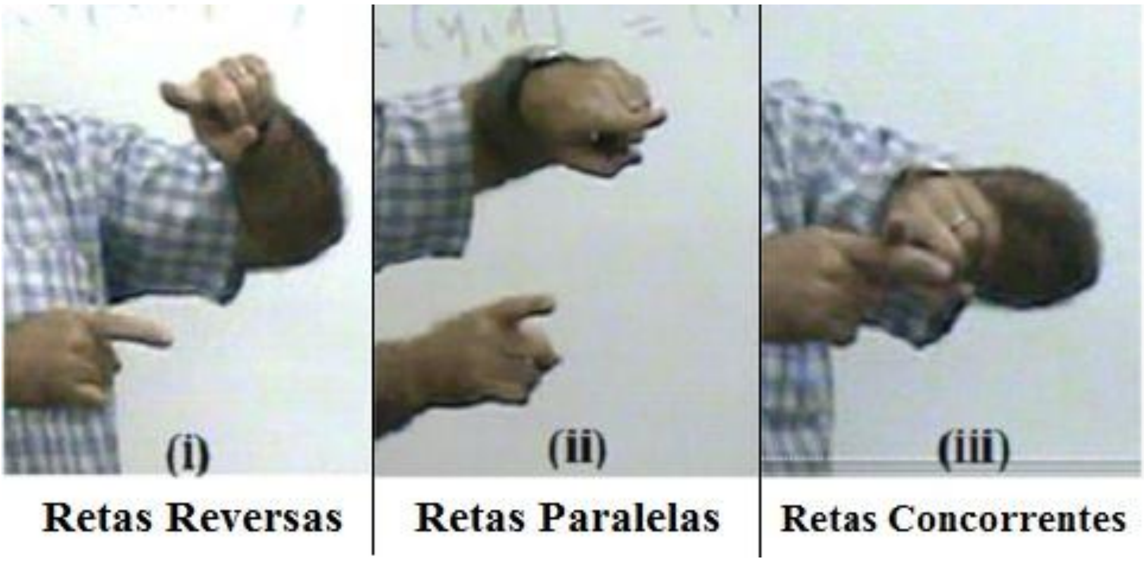
Professor: E assim?

[Apesar dos incentivos do professor, os alunos ainda não dão a resposta correta].

Professor: Qual o plano que passa por essas duas retas aqui? Aqui é um conjunto de retas, um plano passando por essas retas. O que vai fazer essa daqui? Vai cortar.

[o professor mostra que os planos se intersectam, conforme mostrado em (iii) na Figura 10].

Figura 10 – Expressões gestuais usadas para visualização das condições de geração de planos.



Fonte: Pesquisa direta.

Com esse exemplo, o professor tentou mostrar intuitivamente a representação geométrica do subespaço gerado por $< v_1, v_2 >$ para que os alunos o compreendessem como um plano gerado por retas, que devem ser concorrentes e se encontrar na origem. Esse diálogo aconteceu na fase de *maturação*, em que diante das dificuldades dos alunos em resolver a situação proposta, o professor os auxiliava através de perguntas que eram reformuladas conforme a necessidade.

Destacamos, nesse momento, a postura do professor diante das dificuldades da turma. Ao invés de dizer diretamente que se tratava de um plano que para ser gerado precisava ter duas retas concorrentes cruzando-se na origem (como aconteceria se fosse numa aula tradicional), preferiu fazer com que os alunos enxergassem isso por suas próprias reflexões, suas próprias ações mentais sobre o objeto abstrato apresentado.

Após essa abordagem, o professor explicou que era preciso encontrar a representação desse plano; no caso, encontrar sua equação paramétrica. No entanto, nenhum aluno se sentiu à vontade para apresentar sua solução na lousa e, dessa forma, o próprio professor, com base nas orientações da turma chegou ao conjunto $\{(x+y,0,x); x,y \in R\}$, a partir do qual pôde realizar a fase de *prova* da Sequência Fedathi, formalizando o resultado obtido. Um dos obstáculos no momento da fase de solução é ainda o paradigma da educação tradicional em que o aluno vai para a sala de aula não para construir conhecimento, mas para ser receptor.

Diante das nossas categorias de análise, podemos considerar que, ao utilizar perguntas e gestos, o professor está trazendo metaconhecimentos matemáticos à turma, de modo a trilhar um caminho para a compreensão da geração de planos. Diante disso, consideramos que essa estratégia pode se tornar Alavanca Meta para o aluno, pois buscou suscitar reflexões acerca dos significados e representações dos vetores, sejam isolados, sejam em conjunto com outros, formando espaços e subespaços vetoriais, e também dando a ideia de geração de retas e planos representando os subespaços de R^2 e R^3 [21].

Após ser encontrada a equação do plano, o professor faz outra *tomada de posição* ao lançar mais um problema: " – Será que dado um subespaço, eu consigo encontrar vetores que gerem esse subespaço?" Este problema é o processo inverso do que foi feito anteriormente. Antes se tinha vetores a partir dos quais se buscava encontrar um subespaço gerado por eles. Agora, tem-se um subespaço no qual se busca encontrar vetores que o gerem.

Um aluno se propõe a resolver o problema na lousa, cuja solução é apresentada atribuindo-se valores arbitrários às variáveis *x* e *y* ficando $v_1 = (5,0,2)$. O professor explica para o restante da turma o que o aluno fez. Na realidade o aluno não conseguiu encontrar o que foi pedido, apenas encontrou um vetor que pertencia ao subespaço. Para ilustrar como o professor tentou esclarecer o que deveria ser feito, sem dizer diretamente como o aluno poderia fazer, destacamos o seguinte diálogo entre o aluno e o professor, mediado mais uma vez através de perguntas:

Professor: Esse vetor $v_1 = (5,0,2)$ gera o subespaço?

Aluno: Gera.

Professor: Por quê?

Aluno: Porque está dentro de $(x+y,0,x)$... Posso escrever naquela fórmula $\{(x+y,0,x); x,y \in R\}$.

---

[21] Além de espaços de R^n, foram explorados outros espaços vetoriais, em sessões didáticas não eleitas para análise.

Professor: Sem fazer conta, o (Aluno) disse que o subespaço gerado por $< v_1, v_2 >$ vai ser $< v_1, v_2 > = < (5, 0, 2) >$.

Aluno: Você pediu para encontrar um vetor, não foi?

Professor: Não. Eu pedi para encontrar um conjunto de geradores. Você encontrou vetores, isso está certo, mas a pergunta é: esse vetor que você encontrou gera o subespaço vetorial? Está claro o que eu estou querendo?

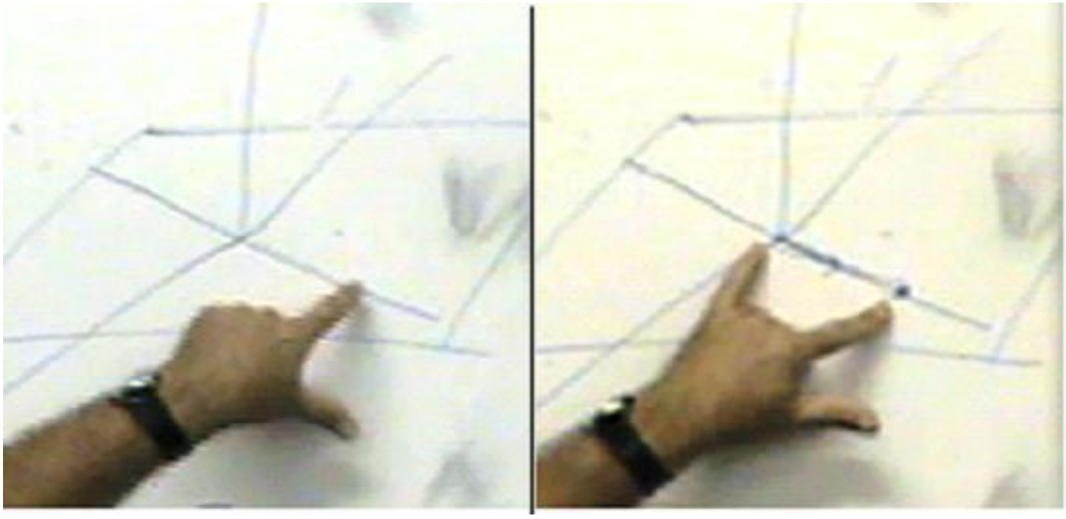
Aluno: Dois vetores que somando dá esse espaço?

Professor: Dois vetores cujo espaço vetorial gerado vai dar esse $\{(x + y, 0, x); x, y \in R\}$. Pode ser um? Um não serve. Por quê? O que o (aluno) fez foi encontrar $v_1 = (5, 0, 2)$. O que é esse espaço vetorial gerado por $v_1 = (5, 0, 2)$? Não é uma reta passando pela origem? Isso aqui é um plano $\{(x + y, 0, x); x, y \in R\}$. Então uma reta passando pela origem nunca vai ser um plano. Então ele não é suficiente, é preciso arranjar mais coisa. Ou seja, eu tenho um plano aqui e ele botou uma reta no plano que é a reta gerada por $v_1 = (5, 0, 2)$. Essa reta não é suficiente para determinar o plano, é necessário outra. Tem que arranjar outra. Como é que ele faz a outra?

Nesse diálogo, o professor usou perguntas para fazer o aluno encontrar seu próprio erro, bem como usou esta falha para redirecioná-lo ao que de fato estava sendo pedido. É importante ressaltar que a todo momento o professor demonstrava respeito ao raciocínio e à solução do aluno, buscando esclarecer o que faltou em sua solução. Essa atitude foi essencial, pois a forma como o professor gere e valoriza as situações de erro dos alunos é determinante para a adaptação do aluno à rotina de ir à lousa expor suas soluções.

Ao abordar a insuficiência de vetores, o termo “não é suficiente” poderia alavancar a reflexão do aluno para o que faltou em sua solução, ou seja, fazê-lo compreender que faltavam vetores para que o plano fosse gerado. Para reforçar o significado dessa insuficiência de vetores, o professor recorreu ao gráfico mostrado na Figura 11. Com essa representação geométrica, chamou a atenção da turma para que ficasse atenta à escolha dos vetores. Se estiverem na mesma reta, nunca poderão determinar um plano, uma vez que para isso são necessárias retas concorrentes. Consideramos que essa recorrência ao gráfico também constituiu um recurso passível de se tornar Alavanca Meta, pois trouxe informações e conhecimento sobre o assunto estudado, favorecendo sua compreensão.

Figura 11 – Representação geométrica auxiliando na escolha de vetores que geram o plano.



Fonte: Pesquisa direta.

Após essa explicação, o mesmo aluno se propôs a refazer sua solução, pegando dessa vez $x = 2$ e $y = 2$, ficando $v_2 = (4, 0, 2)$. O professor complementou a solução observando que $< v_2 > = (4, 0, 2)$ é igual a $< v_2 >= (2, 0, 1)$ e que, portanto, são múltiplos.

> Quanto mais inteiros melhor. Então, para ele trabalhar com esse aqui (2, 0, 1) é melhor do que com esse (4, 0, 2), concordam? Porque o espaço é o mesmo. Então agora, ele tem dois subespaços. Tem o espaço gerado por v_1 e tem o espaço gerado por v_2: $< v_1, v_2 >$. É uma reta e outra reta. São retas concorrentes, determinam um plano. O problema é saber se esse plano vai dar aquele plano lá. O trabalho, agora, é o trabalho que vocês aprenderam em Geometria Analítica.

Encontrados os vetores, outro aluno se levantou e pediu para mostrar a sua solução na qual usou um procedimento diferente da solução do colega. Ele explicou passo a passo o que estava fazendo, mas seu resultado foi parecido com o anterior: encontrou vetores contidos no subespaço. Os alunos se esforçavam para encontrar a solução, no entanto, pareciam não compreender o que, de fato, estava sendo pedido ou que caminho seguir para encontrar a solução. Apesar de seus cálculos estarem corretos, não conseguiram ir direto ao ponto que foi pedido pelo professor: verificar se os vetores encontrados geravam o subespaço.

Diante desse impasse, de acordo com os pressupostos da Sequência Fedathi, era preciso que o professor reformulasse suas perguntas. O docente seguiu questionando a turma, cujas indagações foram reelaboradas aproveitando o que os alunos já haviam feito e direcionadas a refletir sobre o que estava sendo pedido, ou seja, sobre quais procedimentos deveriam ser levados em consideração. Um trecho das explicações do professor é descrito a seguir:

> Você tem que mostrar que o espaço gerado por esses vetores é o mesmo plano que está aqui $\{(x + y, 0, x); x, y \in R\}$. Vocês mostraram que o B está contido em A, ou seja, o espaço vetorial gerado por isso aqui $< v_1, v_2 >$ está contido em A. É preciso agora mostrar que o A está contido em B, ou seja, que o plano está contido no conjunto B. [...] Você tem que mostrar que cada vetor no plano é combinação linear desses dois vetores, ou seja, cada ponto no plano é combinação linear desses vetores. [...] Então o que está faltando mostrar é que o subespaço v_1 e v_2 é um subespaço contido no plano. Como é que a gente poderia fazer?

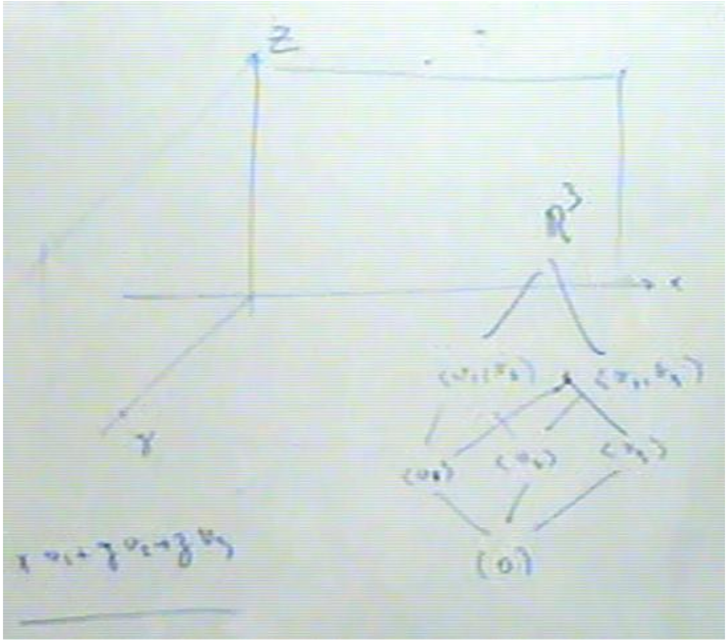
Essas explicações e questionamentos continuam até que um aluno chega onde o professor deseja, ao afirmar que para encontrar o que se pede, deve-se montar um sistema de equações. O professor confirmou que era isso mesmo que deveria ser feito e seguiu explicando como seria esse processo no qual foi utilizada a técnica do escalonamento. A resolução foi feita pela turma que ia dando as orientações ao professor sobre como proceder, descrevendo passo a passo a montagem e resolução do sistema. Na fase de *prova*, o professor pôde formalizar o resultado e novamente explicou como se deu todo o processo de resolução. Nessa fase o professor escreveu R³ na lousa e perguntou:

> **Professor:** O R³ não é um espaço vetorial? Como é que a gente encontra vetores que gerem esse espaço? Como é você encontra vetores que gerem o R³?
>
> **Aluno:** Um plano que passa pela origem (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).
>
> **Professor:** Pronto! Então o que o (Aluno) está dizendo é que pega esses vetores: $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Esse dá o R³. Por quê? Vai dar porque $(x, y, z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$.

Ao abordar esse espaço vetorial e verificar alguns vetores que o geram, o professor chamou atenção para o fato de nem sempre ser fácil identificar quais vetores geram um subespaço vetorial. Desse modo, mostrou para a turma um esquema que poderia ajudá-los a verificar vetores geradores, conforme mostra a Figura 12.

Neste esquema, o professor relacionou os vetores v_1, v_2 e v_3 de modo que a ideia do significado geométrico de R³ e sua relação com os vetores geradores pudessem ficar mais claras para o aluno. Para isso, iniciando com o vetor nulo, que é o menor subespaço vetorial e que obrigatoriamente deve estar contido no espaço, dispõe $< v_1 >, < v_2 >$ e $< v_3 >$ de modo a fazer combinações entre eles, nas quais $< v_1, v_2 >$ resultaram no plano xy, $< v_2, v_3 >$ no plano yz e $< v_1, v_3 >$ no plano xz. Consequentemente, os três planos juntos formaram o espaço maior R^3. Ao mesmo tempo em que fazia as combinações, relacionava-as ao esboço do gráfico em três dimensões.

Figura 12 – Esquema usado pelo docente para auxiliar na verificação de vetores geradores.



Fonte: Pesquisa direta.

Este modelo reforçou a ideia da geração de espaços e subespaços vetoriais ao situá-los no plano, podendo novamente suscitar a reflexão do aluno para o significado de conjunto gerador. Isso o torna um recurso passível de se tornar Alavanca Meta.

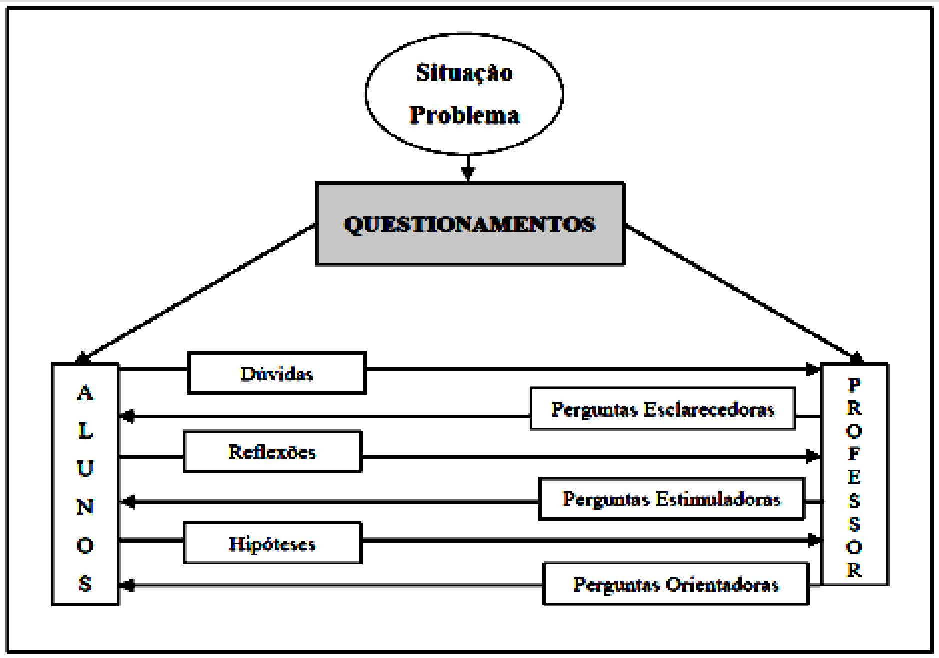
Ressaltamos que nessa aula cada fase da Sequência Fedathi apareceu duas vezes, nas quais a postura do professor sempre foi de ensinar motivando os estudantes a construírem os conceitos. Por exemplo, no primeiro momento o professor apresentou um problema, explicou o que queria, mas em nenhum momento o resolveu diretamente.

Essa abordagem durou cerca de 60 minutos, confirmando que na Sequência Fedathi o que determina o tempo da exploração de um conteúdo é o desempenho do aluno. O professor sempre respeitou esse tempo. Numa aula tradicional esse problema teria sido resolvido em cerca de 15 minutos, uma vez que nesse caso o professor forneceria logo no início o “passo a passo” para a resolução da questão proposta. Os alunos apenas observariam sem serem instigados a maiores reflexões, pois apenas aceitariam as explicações dadas.

Em determinado momento, o objetivo do professor era que os alunos chegassem à representação do plano, mas não falou isso diretamente. Seguiu fazendo perguntas, nas quais utilizou possíveis Alavancas Meta (embora de forma não intencional) na tentativa de extrair reflexões, respostas, raciocínios da turma. As respostas eram sempre aproveitadas (independentemente de estarem ou não corretas) e redirecionadas para a linha de raciocínio que estava sendo explorada.

As perguntas utilizadas pelo docente coadunam com o tipo de questionamento trabalhado na fase da *maturação*, apontado por Souza (2013, p. 24). No entanto, as perguntas que emergiram nesta sessão didática ocorreram nas diferentes fases. A Figura 13 ilustra os tipos de questionamentos que podem aparecer na Sequência Fedathi.

Figura 13 – Tipos de Questionamento em Relação à Situação-Problema.



Fonte: Souza (2013, p. 24)

Com base na classificação delineada pela autora, podemos dizer que as perguntas utilizadas pelo docente eram do tipo: esclarecedoras, com intuito de verificar como os alunos estavam entendendo o que era proposto; estimuladoras, visando motivar o aluno a fazer descobertas; e orientadoras, com objetivo de estabelecer relações entre o problema proposto e suas formas de resolução.

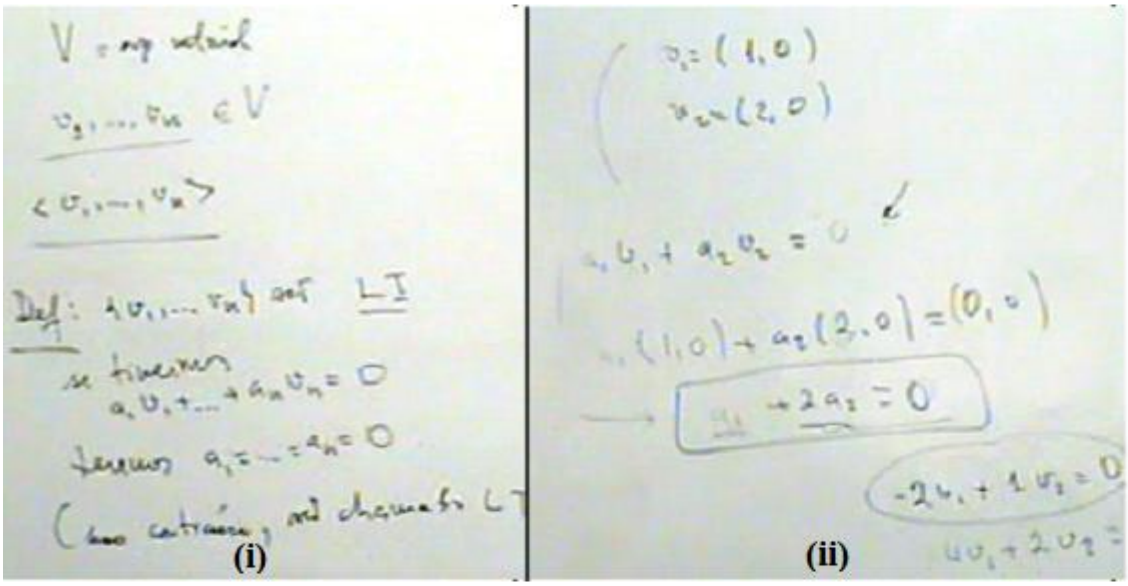
Muitas vezes, o próprio professor respondia de imediato às perguntas, uma vez que, por se tratar de um assunto novo, os alunos ainda não poderiam responder. Nesse caso, essas perguntas tinham o propósito de avançar, mantendo o aluno atento ao desenvolvimento da abordagem do conteúdo. Eram perguntas do tipo estimuladoras, de acordo com a Figura 13, elaborada por Souza (2013).

No segundo momento, a atuação docente se deu modo similar: dado um subespaço, queria encontrar vetores que o gerassem, mas ao invés de explicitar diretamente que para isso seria necessário escolher vetores e montar um sistema de equações, preferiu deixar a turma pensar em suas próprias estratégias, orientando-os através de questionamentos. O resultado foi positivo, pois os alunos chegaram a essa conclusão. Também foram utilizadas possíveis Alavancas Meta na forma de linguagem coloquial, perguntas, jogos de quadro e Princípio da Concretização através de representações geométricas.

3.3.3. Sessão Didática 3 – Independência Linear e Base – 06/11/12.

O professor iniciou a sessão relembrando os assuntos abordados na aula anterior como forma de diagnosticar e trabalhar o *plateau* necessário para o acompanhamento dos novos conteúdos a serem abordados, conforme preconiza a Sequência Fedathi. Para tanto, após a revisão dos conteúdos, introduziu a definição de independência linear e explorou alguns exemplos, mostrando como verificar se um conjunto de vetores é linearmente independente. Na Figura 14, ilustramos esse momento, no qual o docente explorou as relações entre a definição formal de independência linear e um exemplo prático de como verificar esta independência.

Figura 14 – Exploração da definição de independência linear.

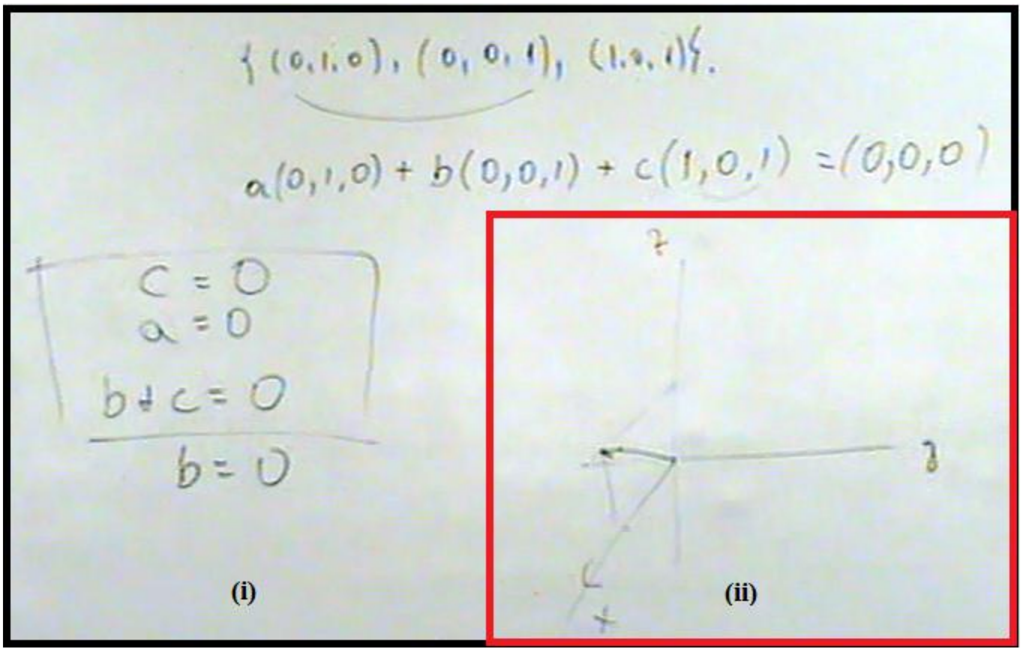


Fonte: Pesquisa direta.

Na Figura 14, temos em (i) a definição formal de independência linear e em (ii) um exemplo prático de como verificar a independência, com o qual o docente abordava as relações entre ambos. Após ter trabalhado a definição de vetores LI o professor fez uma *tomada de posição* na qual apresentou os vetores $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$ para que os alunos verificassem se eram dependentes ou independentes. Os alunos se debruçaram em busca da resposta (*maturação*).

Ilustramos na Figura 15 a fase da *solução* e da *prova*, onde em (i) temos a solução feita por um aluno e em (ii) a representação geométrica dessa solução, esboçada pelo professor no momento da *prova*.

Figura 15 – Comportamento geométrico da independência linear dos vetores dados.



Fonte: Pesquisa direta.

A partir do gráfico da Figura 15 (ii) o docente explica:

> [...] Geometricamente, o que o (aluno) mostrou foi que você tem esses dois vetores gerando o plano *yz* e um terceiro vetor que *está fora* desse plano, portanto ele é independente dos outros dois. Nesse caso os três vetores vão ser linearmente independentes. Mas, algebricamente significa que a solução do sistema encontrada é a solução trivial. Então, todos esses problemas vão recair sempre sobre sistemas de equações. (grifo nosso)

Nesse trecho, verificamos a presença dos quadros algébrico e geométrico como forma de facilitar a compreensão da ideia de vetores linearmente independentes, buscando motivar a reflexão dos alunos ao comparar e analisar as características dos dois quadros. Portanto, é um recurso passível de se tornar Alavanca Meta.

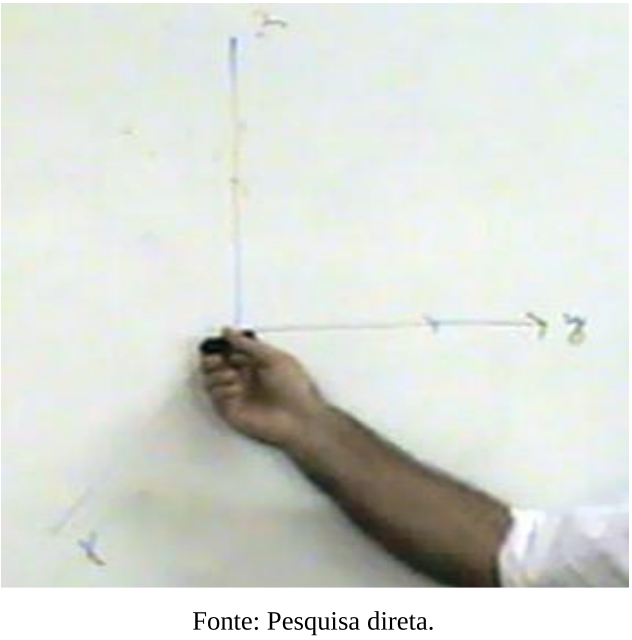
Em seguida, o professor abordou a noção de base de um espaço vetorial apresentando sua definição formal decorrente dos conceitos de geradores (que já vinha sendo trabalhado em aulas anteriores) e de independência linear, a qual foi trabalhada como um conjunto de geradores minimais. Essa exploração da definição caracterizou novamente o *plateau*, pois nesse caso o docente precisou, antes de uma nova *tomada de posição*, trabalhar esse conceito, esclarecendo suas relações com o conjunto gerador e a independência dos vetores, para que pudesse avançar.

Esse momento foi trabalhado através de exemplos e conduzido por meio de perguntas. Primeiramente, o professor observou que o conjunto abordado anteriormente, dado por $\{(1,0),(2,0)\}$, não era base, pois se tratavam de vetores linearmente dependentes. Em seguida, questionou o que daria o subespaço gerado por $< v_1, v_2, v_3 >$, sendo $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ e $v_3 = (1,0,1)$, trabalhado na discussão sobre independência linear. O seguinte trecho do discurso docente ilustra a abordagem do assunto por meio de perguntas do tipo estimuladoras:

> Esses vetores que estão aqui, eles geram um subespaço vetorial do R^3. Não estão no R^3? Então, o que é $< v_1, v_2, v_3 >$? O que é que dá esse espaço? Primeiro, é o seguinte: esse conjunto é gerado por v_1, v_2 e v_3, não é? Qualquer elemento daqui é combinação linear de v_1, v_2 e v_3, além disso, eles são linearmente independentes, como o [aluno] mostrou. Então, esse conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é base do espaço $< v_1, v_2, v_3 >$. Ou seja, esse espaço vetorial gerado tem por base esses três vetores.

O professor também recorreu à representação geométrica, com a qual explicou o comportamento geométrico dos vetores no espaço R^3, explicitando os geradores e a independência linear, conforme mostra a Figura 16:

Figura 16 – O docente ilustra o fato de que em R^3 há sempre um eixo que está fora do plano.



Fonte: Pesquisa direta.

Nessa figura, o professor está explicando a independência de vetores no plano R^3, no qual esclarece que há um vetor que não pertence ao plano yz e que, portanto, é independente dos demais. Além disso, estes vetores geram todo o espaço R^3. Nesse caso, temos mais uma vez o uso de metaconhecimentos passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos na forma de representação geométrica e do Princípio da Concretização, uma vez que o gráfico pode se traduzir como o concreto nessa situação. Mais uma vez foi estimulada a visão espacial dos alunos.

Durante a abordagem do gráfico da Figura 16, os alunos participaram respondendo as perguntas do professor e esclarecendo dúvidas:

> **Aluno:** O espaço gerado por *yz* é todo o plano?
>
> **Professor:** É, porque qualquer ponto do plano que você pegar não está no plano? Ele é um múltiplo desse [eixo y] mais um múltiplo desse [eixo z]. E o que gera o outro eixo que não está nele? Deve gerar o espaço todo.
>
> **Aluno:** Todo o nosso espaço?
>
> **Professor**: Todo o nosso espaço. Por que vai gerar todo o nosso espaço? O que é $< v_1, v_2, v_3 >$? É o espaço das combinações lineares de $\{v_1, v_2, v_3\}$. O que vai dar essa combinação linear?
>
> **Aluno:** Vai dar o R^3.
>
> **Professor**: Sim, vai dar o R^3, mas porque vai dar o R^3? Para verificar se vai dar o R^3 você pega o vetor do R^3, com três coordenadas. Será que esse vetor pode ser inserido no espaço gerado? Será que o vetor do R^3 é escrito assim:
>
> $$(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$$
>
> Se puder escrever desse jeito, então o espaço vai gerar o R^3. Ou seja, será que dado x, y e z existe a, b e c que resolva esse problema? Agora você precisa fazer as contas e ver no que vai dar. Você terá que montar um sistema de equações.

Em seguida, o professor montou o sistema e o mesmo foi resolvido com base nas orientações dos alunos. Com isso, finalizou-se o nivelamento do *plateau* necessário ao avanço dos conteúdos. Com estas explicações e esclarecimentos acerca da noção de base, o docente tentou mostrar que é preciso "fazer as contas" para poder verificar se os vetores dados formam uma base. O que destacamos nessa situação é que ao invés de falar isso diretamente, o professor tentou constantemente fazê-los compreender o porquê que deveria ser feito isso.

Em seguida, o professor destacou: “ – Tem uns resultados de base que nós precisamos discutir para podermos fazer contas. Uma das coisas é: como é que eu encontro uma base?”. Nessa frase, encontramos um metaconhecimento matemático passível de se tornar Alavanca Meta, pois o professor tentou despertar a atenção do aluno para a necessidade de saber como encontrar uma base, que é o tema do exemplo que sucede seu discurso. Temos nesse caso, o Princípio da Necessidade.

Em seguida, para mostrar como encontrar uma base, o professor apresentou o conjunto $V = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$, com o qual questionava a turma o que seria esse conjunto. Diante da dificuldade dos alunos em responder, o professor optou por diminuir o conjunto, ficando $V = \{(x, y) \in R^2;\ x + y = 0\}$.

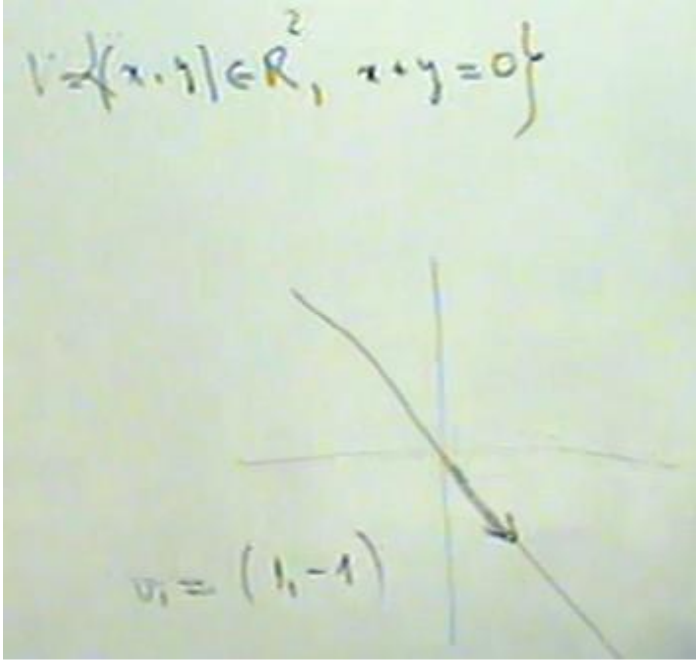
Essa mudança não estava prevista (conforme observamos no planejamento dessa sessão), pois o professor considerava adequado começar com uma questão geral e, a partir desta, dar exemplos mais específicos. No entanto, essa mudança de estratégia foi necessária para facilitar a visualização do aluno, evitando apelar por fornecer respostas prontas, bem como pelo fato de os alunos serem ainda acostumados com o sistema tradicional de ensino que geralmente faz o processo inverso partindo do particular para o geral, o que se apresenta como um obstáculo didático a ser superado.

Na *maturação* o professor tentou esclarecer o que estava sendo pedido através de perguntas e do gráfico da Figura 17. Vejamos a seguinte fala do docente:

> Essa equação $x + y = 0$, o que vai dar? Não é uma reta? Que reta é essa? A reta é $y = -x$, não é? Não é essa daqui [desenha a reta conforme mostra a Figura 17]? Então essa reta é um subespaço vetorial do R². Então, ela deve ter bases. Deve ter conjuntos de geradores LI. Então, como encontro geradores LI para essa reta? Primeiro eu preciso encontrar o que é mais fácil... Encontrar um conjunto de geradores. Depois, desse conjunto de geradores tirar um conjunto que seja LI. Isso é um bom caminho andado.

Nesse discurso o professor está explicando como encontrar vetores nesse conjunto que geram o R², no qual faz $v_1 = (1, -1)$ que está na reta. Em seguida, questiona: “O que é que vai dar o espaço gerado por esse vetor? Será que o espaço gerado por ele vai dar a reta toda? Se der a reta toda, você encontrou um conjunto de geradores, se não der, você tem que acrescentar outro que esteja fora”. Através da visualização proporcionada pela representação geométrica do conjunto dado, chamou atenção para a identificação de geradores e seu comportamento no gráfico. Ao usar o termo “a reta toda”, direcionou a atenção da turma para a escolha do vetor, suscitando reflexões sobre a relação entre o vetor e o espaço considerado. Portanto, é um discurso que pode se tornar Alavanca Meta para os alunos, bem como o gráfico utilizado que também auxiliou nessa abordagem, favorecendo a reflexão dos alunos.

Figura 17 – Vetor na reta representando um subespaço vetorial do R^2.



Fonte: Pesquisa direta.

Em seguida, o professor volta para o conjunto de três coordenadas $V = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$, apresentado inicialmente, e pede para que encontrem suas bases, sugerindo que façam a mesma coisa: pegar um vetor e verificar o que dá o espaço gerado por esse vetor. Nesse momento, um aluno questiona se pode pegar o vetor $(1, 0, 0)$, o professor responde que não, pois a soma das coordenadas, com esse vetor, não vai dar zero. Sugere um vetor que esteja em V, nesse caso, um cujas coordenadas se anulem, como por exemplo, $(1, 0, -1)$. Enfatiza

> Você precisa verificar o que é que vai dar o espaço gerado por esse vetor $(1, 0, -1)$. Vai dar o conjunto todo? Não. Vai dar uma reta. Mas $V = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$ não é um plano? Então, tem coisa que está fora. O que é que está fora? Você vai calcular o que é que está fora.

Nesse discurso, ao usar o termo “está fora”, o professor também busca chamar atenção para as propriedades dos vetores geradores, pois o “estar fora” é condição para a geração do plano. Mais uma vez tem-se o uso da linguagem coloquial como forma de facilitar a compreensão do que é estudado.

Os alunos tiveram certa dificuldade para resolver essa questão. A atitude docente diante desse impasse foi a de tentar fazê-los compreender através de suas próprias reflexões. Não forneceu a resposta prontamente, ia fazendo perguntas, mostrando representações geométricas, posições das retas geradas pelos vetores no plano, recursos que pudesse remetê-los a assimilar, acomodar, refletir sobre os conceitos abordados. Vejamos a seguir alguns trechos desse diálogo:

> **Aluno:** Acho que só um vetor já gera...
>
> **Professor:** Não... Você precisa verificar o que é que vai dar o espaço gerado por esse vetor $v_1 = (1, 0, -1)$. Vai dar o conjunto todo? Não. Vai dar uma reta. Mas esse conjunto $V = \{(x, y, z) \in R^3; x + y + z = 0\}$ não é um plano? Então, tem coisa que está fora. O que é que está fora? Você vai calcular o que é que está fora. Esse espaço gerado por v_1 é isso aqui: $< v_1 > = \{t(1, 0, -1);\ t \in R\}$.
>
> **Aluno:** Professor! Fiquei só com uma duvida... Como a gente está trabalhando nesse plano R^3... Na reta, o eixo z também estaria no plano, não é?
>
> **Professor:** Uma parte do z sim. Vai cortar o z.
>
> **Aluno:** Então o eixo z todo não está no plano?
>
> **Professor:** O eixo z todo não está no plano. Ele está cortando o eixo do z na origem. Porque se ele tiver outro ponto, o eixo z está contido nele. Ele só vai cortar o eixo do z assim (indica a posição do eixo z fora do plano da lousa). É mais ou menos assim que ele fica. [...] Se eu chamar v2 = (0, 1, -1), qual seria o espaço gerado por $< v_1, v_2 >$?
>
> **Aluno:** V.
>
> **Professor:** mas por que V? Você precisa mostrar que é um conjunto de geradores. Por que é o V?
>
> **Aluno:** Porque vão gerar um plano.
>
> **Professor:** Porque vão gerar um plano, mas por que vai dar V?
>
> **Aluno:** Porque v_1 e v_2 passam pela origem.
>
> **Professor:** Mas por que vai dar o V? Você tem que verificar que dá o V, não é isso? Como é que é o V? São vetores dessa forma $x + y + z = 0$. Então o que você tem que fazer é verificar isso aqui: $< v_1, v_2 > = V$. Por que isso dá V?

Observamos que estes questionamentos tinham o intuito de fazê-los compreender a razão pela qual deveriam montar um sistema de equações para verificar se geram e são LI. Consideramos que tais perguntas poderiam gerar desequilíbrios nas estruturas mentais dos alunos, remetendo-os a reorganizar seu pensamento, a restabelecer relações através de novas assimilações e acomodações resultando num reequilíbrio.

Nesse caso, esse desequilíbrio os motivaria a rever os conceitos trabalhados anteriormente, enveredando na direção de um possível reflexionamento. Está-se então percorrendo os caminhos necessários para a ocorrência da abstração reflexionante, que, nesse caso, culminaria na compreensão geral da noção de base de um espaço vetorial e dos procedimentos essenciais à sua manipulação dentro da Álgebra Linear. Para tanto, o docente tentava fazer os alunos refletirem sobre os conceitos e procedimentos, sem permitir que apenas repetissem as técnicas mecanicamente, com fins em si mesmas.

A *solução* foi feita pelo docente mediante as orientações da turma. Na fase de *prova*, o professor finalizou com uma síntese do processo utilizado para encontrar bases, trabalhado durante a sessão. Conforme sua fala:

> Para encontrar um conjunto de geradores, você parte assim: pega um vetor não nulo e vê o espaço que ele gera. Então, você pergunta se esse conjunto, esse espaço gerado por esse vetor gera o espaço todo. Se a resposta for sim, ok. Se a resposta for não, você pega esse espaço que você apresentou e bota outro vetor fora dele. Novamente pergunta: v_1 e v_2 geram o espaço? Se a resposta for sim, você encerrou. Se a resposta for não, você volta e pega um terceiro vetor que esteja fora desse espaço... v_1, v_2 e v_3 geram o espaço todo? Se sim, acabou. Não, acrescenta um quarto e vai assim recursivamente até esgotar o espaço todo. A outra pergunta é: esse processo está gerando vetores linearmente independentes? Porque se eu pego um espaço gerado pelo vetor v_1, não é uma reta? Se pego um vetor fora da reta esse segundo vetor já é independente deste. Então, na realidade, esse processo é a forma que você tem de encontrar bases.

Esse discurso trouxe um método para escolha de vetores que geram subespaços, (abordada na aula sobre subespaços gerados) com a diferença de que agora está generalizada a como encontrar bases. Este método proporciona a recorrência constante às propriedades dos subespaços que são analisadas também sob o ponto de vista geométrico. Desse modo, há nessa fala informações constitutivas do conhecimento matemático, portanto é passível de se tornar Alavanca Meta para os alunos.

Os conceitos subjacentes à noção de base de um espaço vetorial foram constantemente rebuscados. Motivo pelo qual o professor precisava sempre respeitar o tempo dos alunos, para então avançar. Trabalhava o tempo todo tentando fazer com que os discentes internalizassem os conceitos de geradores e de independência linear, compreendendo seus significados e relações.

3.3.4. Sessão de Didática 4 – Exercícios sobre Base – 27/11/12

Esta aula foi dedicada à resolução de exercícios e foi conduzida pelo professor da disciplina e por uma aluna de doutorado que participava como ouvinte. A *tomada de posição* se deu com a apresentação da seguinte questão:

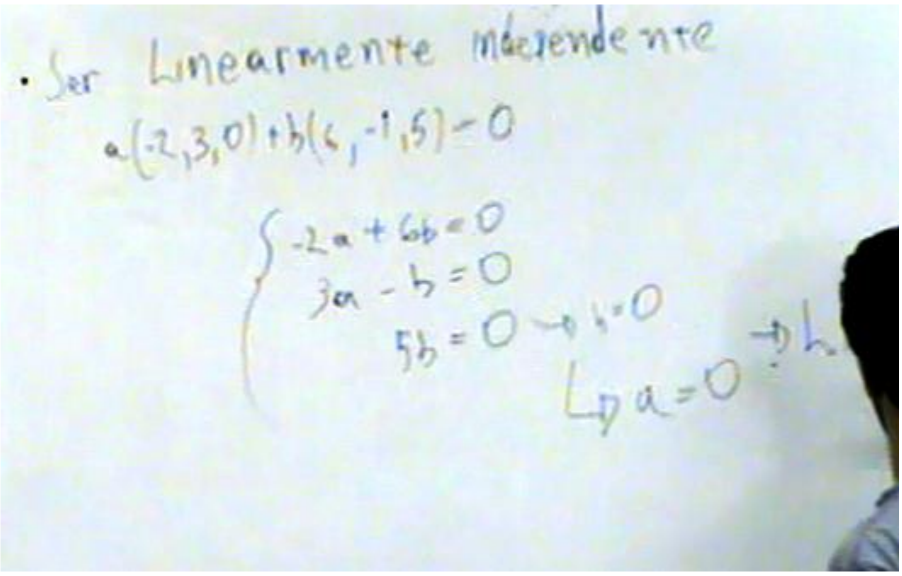
1- Em cada caso, determine se S é uma base de V. Justifique.
a) $V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(-2,3,0),(6,-1,5)\}$.
b) $V = \wp_2 = \{ax^2 + bx + c;\ a,b,c \in \mathbb{R}\},\ S = \{x, 1+x, x-x^2\}$.

O objetivo do item (a) foi introduzir o teorema (completar base): “Qualquer conjunto de vetores LI em V é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base”. No item (b), o intuito era apresentar o teorema da base, as definições de dimensão e isomorfismo e o teorema das matrizes invertíveis.

Os alunos foram divididos em duplas e podiam consultar seus livros para a resolução. Durante a fase de *maturação*, o professor ficava o tempo todo atento às dúvidas dos alunos e passava de dupla em dupla verificando como estavam se saindo. A maioria das duplas tirou dúvidas com o professor que sempre tinha o cuidado de não fornecer as respostas prontas aos alunos. Os alunos tentaram responder essa questão por cerca de 40 minutos.

Na *solução*, um aluno se dispôs a ir à lousa e verificou que os vetores do item (a) eram linearmente independentes. Conforme mostra a Figura 18.

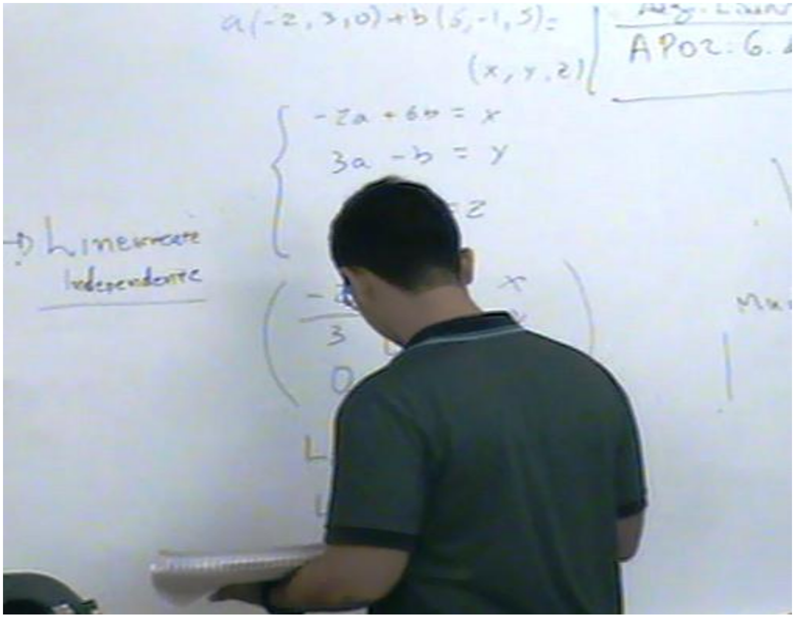
Figura 18 – Aluno apresentando sua solução na lousa.



Fonte: Pesquisa direta.

O professor interveio durante as explicações do aluno apenas para esclarecer à turma o que estava sendo feito e destacar pontos importantes. Em seguida, outro aluno foi à lousa, dessa vez para verificar se os vetores dados geravam o espaço R³, conforme ilustrado na Figura 19.

Figura 19 – Outro aluno apresentando sua solução na lousa.



Fonte: Pesquisa direta.

O resultado da solução do aluno foi que os vetores não geram o subespaço dado, pois o sistema era impossível. O professor explicou o procedimento realizado e passou, então, para a fase de *prova*, em que formalizou o que foi feito, destacando a impossibilidade do sistema e a única possibilidade de existir solução.

Para atingir o objetivo da questão, o professor esclareceu que o conjunto dado no item (a) podia ser completado até formar uma base. Partindo disso, questionou: “ – Que vetor se acrescenta a S para formar uma base?”. O docente sugeriu que deveriam encontrar um vetor que estivesse fora do plano dado.

Essa fase também foi caracterizada por perguntas que remetiam o aluno à reflexão sobre o que estava sendo feito, mais especificamente às condições de geração de planos. Vejamos o seguinte trecho:

> Tem uma coisa que vocês podem tentar me ajudar a responder... É o seguinte: $a(-2,3,0)+b(6,-1,5)=0$ gera um plano, não é? O espaço gerado por esse vetor $(-2,3,0)$ não é uma reta? O espaço gerado por esse outro vetor $(6,-1,5)$ não é uma reta? Essas duas retas não são concorrentes? Porque todas elas passam pela origem. Então esses dois vetores geram um plano, por isso que não dá o R³. Dá o R². Então, você precisa colocar outro vetor fora para poder gerar a dimensão 3. Qual seria esse vetor? Outro vetor fora para poder gerar o R³ é esse aqui (1, 0, 0). Não está fora do espaço gerado?

Mais uma vez, temos o uso de linguagem coloquial para ajudar o aluno a refletir sobre o assunto estudado. Nesse caso, o professor usou o termo “vetor fora”, reforçando a ideia das condições de geração de planos que já vinha sendo trabalhada. Estender o conjunto a uma base recaiu também no método trabalhado nas sessões anteriores que auxiliava na escolha de vetores que geram um subespaço.

Em seguida o professor chegou a uma solução com ajuda de orientações dos alunos. A partir disso, pôde finalizar sistematizando todo o processo realizado ao longo da sessão didática.

De todas as sessões observadas, esta foi a que trouxe as fases da Sequência Fedathi de modo mais visível, pois por ser destinada a exercícios, cada fase ia transcorrendo sucessivamente sem que houvesse necessidade de novas tomadas de posições, como acontecia nas aulas teóricas.

Observamos que o “tempo do aluno” foi respeitado o tempo todo, pois, segundo os pressupostos da Sequência Fedathi, o tempo de maturação é fundamental para que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados, uma vez que o conhecimento só poderá ser adquirido mediante as ações e coordenação das ações realizadas pelo próprio aluno, cabendo ao docente mediar esse processo esperando e auxiliando, conforme a necessidade. Utilizando, é claro, todo um aparato de estratégias e recursos que possam viabilizar esse processo.

3.4. Reflexões acerca dos resultados e categorias de análise

A partir dos dados descritos e analisados acima, foi-nos possível fazer a triangulação das informações obtidas em diferentes momentos. Com o resultado, pudemos traçar o perfil do professor sujeito da pesquisa, verificar como aconteciam e eram elaboradas as sessões didáticas, mantendo um olhar voltado para a postura docente. Desse modo, retratamos o campo de onde poderiam aparecer as possíveis Alavancas Meta.

Um dos aspectos que mais se destacaram foi a postura do professor, sempre acompanhada de recursos e estratégias que visavam motivar a ação dos alunos. Não observamos situações de transmissão de conhecimento com base única e exclusiva na repetição de técnicas. Desse modo, listamos as seguintes características relacionadas a essa postura, observadas ao longo das sessões didáticas observadas:

a) cuidado em proporcionar situações que motivassem o “pensar” constante sobre o conteúdo abordado;

b) paciência e bom senso para esperar/respeitar o “tempo de maturação do aluno”;
c) gerenciamento de quando prosseguir e quando reorganizar as estratégias de ensino conforme a necessidade;
d) estímulo ao aprendizado por descobertas;
e) mobilização de reflexões sobre os assuntos abordados;
f) não fornecimento do “passo a passo” para resolução das atividades propostas;
g) valorização das soluções apresentadas pelos alunos – aproveitamento das soluções certas/erradas/incompletas para prosseguir fazendo-os pensar;
h) ênfase na participação e reflexão do aluno;
i) foco no ensino para a construção do conhecimento.

Podemos dizer que essa postura rompe com os paradigmas tradicionais do ensino de matemática à medida que proporciona oportunidade de ação do estudante motivada por situações desafiadoras que convidam o aluno a estabelecer com o professor um acordo didático que requer a interação de ambos.

O discurso do professor foi marcado pelo uso de perguntas, como forma de realizar a mediação do conteúdo mantendo a atenção dos alunos e estimulando reflexões sobre os assuntos abordados. O porquê dos procedimentos e relações conceituais era sempre questionado. As perguntas utilizadas estavam de acordo com classificação feita por Souza (2013, p. 26) sendo, portanto, perguntas do tipo esclarecedoras, estimuladoras e orientadoras.

Além disso, o docente sempre recorria a estratégias e recursos didáticos que traziam metaconhecimentos matemáticos, tais como: jogos de quadro, contraexemplos, linguagem coloquial, etc. Todos com o intuito de auxiliar a mediação docente e a compreensão discente.

Os aspectos conceituais dos conteúdos foram valorizados, pois mesmo ao abordar conteúdos que tradicionalmente são tratados quase que exclusivamente via algoritmo, nesse caso, foram explorados com ênfase nos significados envolvidos. Propriedades e definições eram constantemente rebuscadas, exercitando sempre a prática do estabelecimento de relações entre conceito e manipulações, de modo que o lado “mecânico” dos conteúdos fosse suavizado. Talvez esta seja uma forma de evitar a “perda de sentido” apontada por Rogalski (1994) como um dos principais problemas do ensino da Álgebra Linear.

Salientamos que tal postura coaduna com as concepções do professor sujeito da pesquisa acerca da Sequência Fedathi, delineada conforme sua fala durante a entrevista. No Quadro 5, temos uma síntese de suas percepções:

Quadro 5 – Síntese das principais concepções do entrevistado acerca da Sequência Fedathi

Sequência Fedathi	**Preparação da sessão didática**	**Ferramentas Matemáticas**
Trabalho do Matemático	Pensar sob a perspectiva de que o aluno será reflexivo	
Ação	Partir de um ponto que os alunos dominem	
Descoberta	Evitar excesso de formalismo ao iniciar um conteúdo	Jogos de quadro
	Partir de um problema, situação, questão.	Contraexemplos
Construção do Conhecimento	Levar em conta a participação do aluno	
Aluno reflexivo	Levar em conta a historia e epistemologia do conteúdo.	

Fonte: Pesquisa direta.

Com essas características obtemos uma “imagem” de como o professor concebe a Sequência Fedathi, que se traduz em perspectivas positivas, idealizadas com base no fazer do matemático profissional que deriva num aprendizado por ação, descoberta, construção e reflexão - palavras que apareceram repetidas vezes ao longo da fala do entrevistado.

Sobre o planejamento das aulas, o professor manteve consonância entre o planejado e o executado, conforme verificamos ao analisar as falas obtidas durante os momentos de elaboração das sessões didáticas. Segundo ele, ao elaborar uma aula, devemos ter sempre a perspectiva de que devemos motivar o aluno a agir de modo reflexivo sobre as atividades propostas. No Quadro 5, também listamos os principais fatores que o docente mencionou levar em conta ao elaborar as sessões didáticas.

Nesse contexto, destacamos o seguinte trecho da entrevista em que o professor descreve como concebe o planejamento segundo a Sequência Fedathi:

> [...] Quando você vai fazer qualquer atividade que você quer que o aluno seja reflexivo, ou as pessoas que você vai trabalhar reflitam sobre a questão que é dada, que construa um conhecimento (isso é bem piagetiano), o que você faz? Você precisa primeiro apresentar um problema, apresentar uma situação, apresentar uma questão, depois você precisa fazer com que as pessoas reflitam sobre aquele problema, para depois apresentar uma possível resposta àquela questão que foi dada. Por fim, você precisa sistematizar essas coisas para apresentar as coisas de uma forma mais simples, mais elegante. Então, essa é a Sequência, isso é uma coisa natural de quem trabalha com o problema. A questão toda é como você vai fazer isso. [...] Essa parte é a parte difícil de você fazer, porque você precisa ter um conhecimento bem mais amplo do conteúdo que você quer trabalhar e como você vai fazer esse olhar, esse jogo de quadro, de modo que leve para o caminho que você quer. Então para isso você tem que fazer um bom trabalho de mediação com os alunos.

Os depoimentos indicaram total concordância com os pressupostos da Sequência Fedathi, descritos em nosso referencial teórico, evidenciando o nível de conhecimento e domínio que o entrevistado aparentava possuir acerca desse método. Verificamos que a ação docente voltada para a ação discente (que deve dar um retorno ao docente) é pensada numa perspectiva de que o aluno possa ser reflexivo, utilizando para isso subsídios didáticos que permitam a realização de uma mediação adequada à concretização dos objetivos de ensino e aprendizagem.

Compreender como o sujeito da pesquisa concebe e trabalha com a Sequência Fedathi nos permitiu compreender a dinâmica das sessões didáticas observadas, as quais puderam ser analisadas considerando aspectos internos, não visíveis nas filmagens. Desse modo, os recursos e estratégias de ensino passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos puderam ser identificados levando-se em conta o contexto, o objetivo e as fases dos quais surgiram. No Quadro 6, trazemos uma listagem dessas estratégias e recursos.

Quadro 6 – Resultados obtidos na identificação de metaconhecimentos na SF passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos.

Possíveis Alavancas Meta Identificadas					
	Subcategoria	**Estratégia/ Recurso**	**Localização**	**Fase**	**Objetivo**
1	Jogo de quadro; Contraexemplo; Princípio da Concretização.	Gráfico	Sessão 1	Tomada de Posição (*Plateau*)	Explorar as propriedades do espaço vetorial.
2	Método	Esquema	Sessão 1	Tomada de Posição	Construir subespaços vetoriais.
3	Jogo de quadro; Contraexemplo; Princípio da Concretização.	Gráficos	Sessão 1	Prova	Mostrar que nem todo gráfico que passa pela origem é um subespaço.
4	Linguagem coloquial; Analogia	Discurso	Sessão 2	Tomada de Posição (*Plateau*)	Facilitar a compreensão da relação entre espaço e subespaço vetorial.
5	Perguntas; Representação Geométrica.	Discurso; Expressão gestual.	Sessão 2	Maturação	Visualizar as condições de geração de planos.
6	Linguagem Coloquial	Discurso	Sessão 2	Solução	Mostrar a insuficiência de vetores na solução do aluno.
7	Jogo de quadro; Princípio da Concretização.	Gráfico	Sessão 2	Solução	Mostrar que os vetores a serem encontrados não podem estar na mesma reta.
8	Jogo de quadro;	Esquema;	Sessão 2	Prova	Reforçar a ideia da

	Princípio da Concretização.	Gráfico.			geração de subespaços.
9	Representação geométrica; Princípio da Concretização.	Gráfico	Sessão 3	Prova	Ilustrar geometricamente a solução encontrada pelo aluno (vetores LI)
10	Jogo de quadro; Princípio da Concretização.	Gráfico	Sessão 3	Tomada de Posição (*Plateau*)	Visualizar geometricamente a independência e a geração de vetores (base).
11	Princípio da Necessidade.	Discurso	Sessão 3	Tomada de Posição	Esclarecer sobre a necessidade de se saber encontrar bases.
12	Jogo de quadro; Princípio da Concretização.	Gráfico	Sessão 3	Maturação	Visualização do subespaço.
13	Linguagem Coloquial	Discurso	Sessão 3	Maturação	Destacar que o vetor encontrado deve gerar todo o subespaço R^2.
14	Linguagem Coloquial.	Discurso	Sessão 3	Tomada de Posição	Destacar que se deve procurar vetores fora da reta para que possa gerar um plano.
15	Método	Discurso	Sessão 3	Prova	Descrever um processo que ajuda a encontrar bases.
16	Linguagem Coloquial	Discurso	Sessão 4	Maturação	Auxiliar a compreender como estender um conjunto a uma base.

Fonte: Pesquisa direta.

Evidenciamos no Quadro 6 as subcategorias referentes às Alavancas Meta, os tipos de estratégias, a sessão em que ocorreram, sua localização dentro da Sequência Fedathi e o seu objetivo no momento em que foi utilizado. Identificamos a presença de recursos passíveis de se tornarem alavancas meta para os alunos em 16 momentos: 03 na sessão 1; 05 na sessão 2; 07 na sessão 3; e 01 na sessão 4.

O primeiro recurso passível de se tornar Alavanca Meta para os alunos ocorreu através do uso de gráfico que implicitamente trouxe ao professor oportunidades de utilizar jogos de quadro e trabalhar com contraexemplo, partindo de algo "concreto" para os alunos (reta no plano cartesiano), caracterizando o Princípio da Concretização. Ocorreu na sessão 1, na fase da *tomada de posição*, ainda no momento inicial, caracterizado como *plateau*. Seu objetivo foi explorar as propriedades dos espaços vetoriais.

As subcategorias que mais ocorreram foram o uso de jogos de quadro (6), o Princípio da Concretização (7) e a linguagem coloquial (4) encontrados nos gráficos e no discurso do professor. Esse fato ilustra a preocupação do professor em explorar a visualização dos espaços e subespaços vetoriais como forma de trabalhar a intuição, a percepção e a representação, essenciais para que o aluno pudesse ter uma visão mais ampla desses conceitos, de modo que também pudesse desenvolver o pensamento espacial e ter seu raciocínio ativado por essas visualizações. Encontramos em Fischbein (1994, p. 104)[22] argumentos que destacam a importância da visualização:

> [...] representações visuais, por um lado, contribuem para a organização de informação em representações sinópticas, constituindo um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretização das imagens visuais é um fator essencial para criar o sentimento de auto-evidência e imediatismo. Uma imagem visual não só organiza os dados disponíveis em estruturas significativas, mas também é um fator importante na orientação do desenvolvimento analítico de uma solução; representações visuais são dispositivos antecipatórios essenciais.

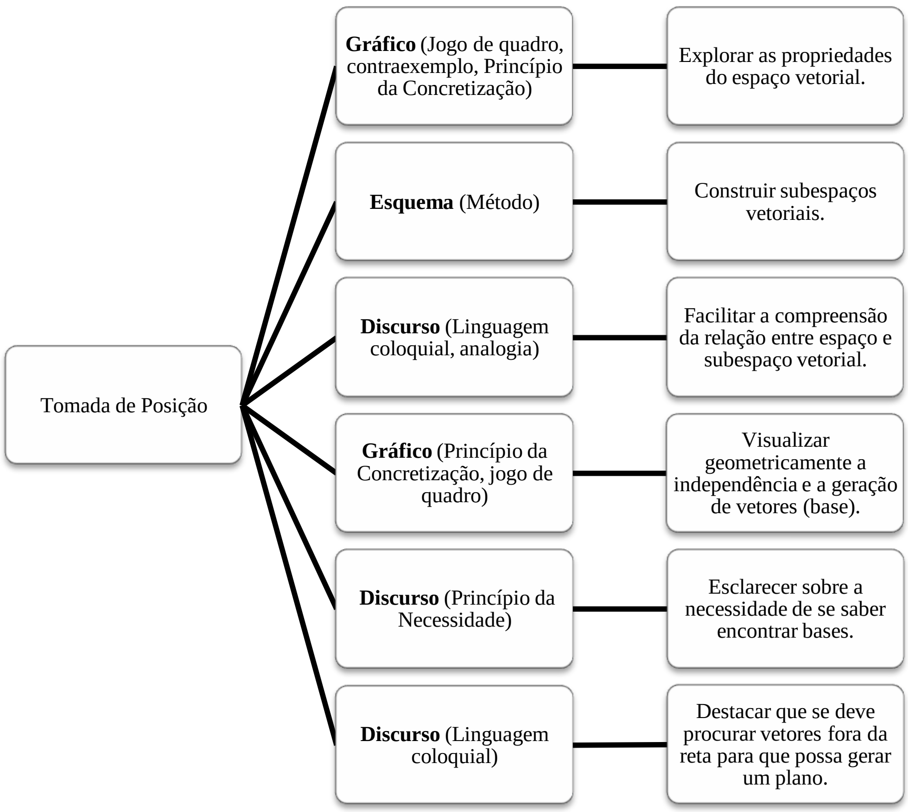
Os metaconhecimentos matemáticos passíveis de se tornarem Alavanca Meta apareceram em todas as fases da Sequência Fedathi, sendo 06 na *tomada de posição*, 04 na *maturação*, 02 na *solução* e 04 na *prova*. Nas figuras que seguem ilustramos as possíveis Alavancas Meta que foram identificadas em cada fase, seguidas de seu respectivo objetivo no contexto em que foram utilizadas.

A Figura 20 proporciona uma visão geral dos metaconhecimentos passíveis de se tornarem Alavancas Meta para os alunos identificados na fase da *tomada de posição* ao longo das sessões didáticas descritas. Observamos que nessa fase se deu o maior número de ocorrências das possíveis Alavancas Meta. Isso é compreensível, uma vez que nessa fase o professor tentava preparar o ambiente da sala de aula (através de diagnóstico e nivelamento do *plateau*) para poder dar início ao lançamento de situações desafiadoras aos alunos.

---

[22] […] visual representations contribute to the organization of information in synoptic representations and thus constitute an important factor of globalization. On the other hand, the concreteness of visual images is an essential factor for creating the feeling of self-evidence and immediacy. A visual image not only organizes the data at hand in meaningful structures but it is also an important factor guiding the *analytical* development of a solution; visual representations are an essential anticipatory device.

Figura 20 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da *Tomada de Posição*.



Fonte: Pesquisa direta.

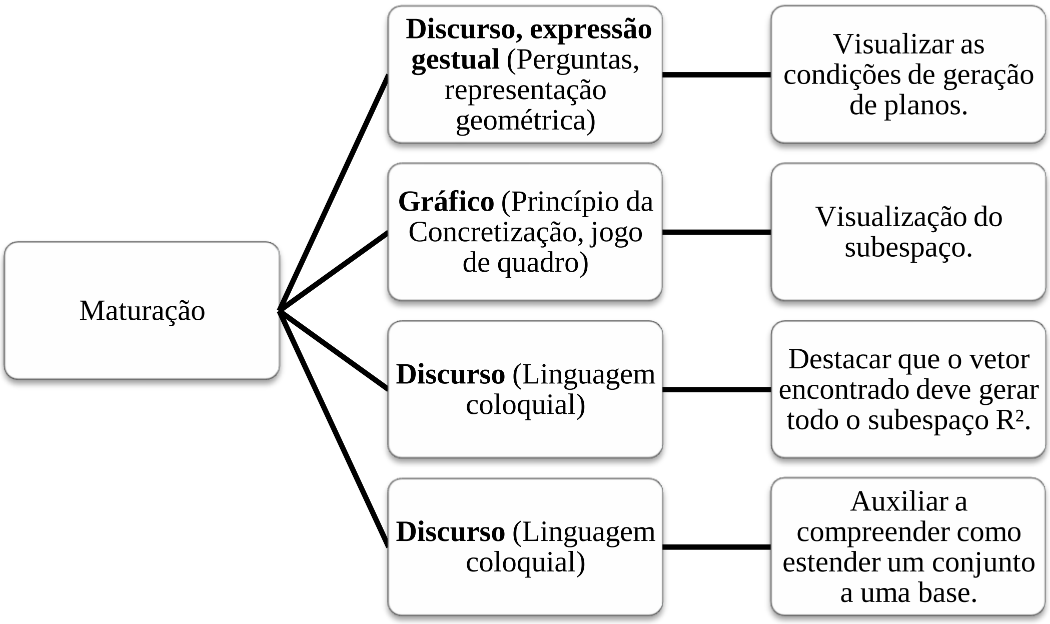
Nesse caso, o caráter expositivo que caracterizou estes momentos não diverge do modelo construtivista piagetiano, pois nesse contexto “a exposição é vista como útil, necessária e perfeitamente compatível com uma epistemologia crítica, desde que não seja entendida como condição suficiente de aprendizagem, mas como momentos importantes de um processo pedagógico ativo”. (BECKER, 2012, p. 195).

A presença dos metaconhecimentos passíveis de tornarem Alavancas Meta foram essenciais nessa fase, pois a motivação e o interesse proporcionado pelas reflexões dos alunos, promovidas por tais ferramentas, poderiam resultar num melhor aproveitamento da fase de *maturação*. Quando falamos em interesse e motivação, devemos ter em conta que na perspectiva piagetiana, estes são fatores importantes, porém oriundos do prazer proporcionado pela construção de esquemas ou estruturas, mediante a ação e coordenação das ações do próprio aluno, não simplesmente algo imposto por influência externa (professor, por exemplo), conforme esclarece Becker (2012, p. 191).

Nesse sentido, as possíveis Alavancas Meta associadas à uma postura docente que explora os conteúdos na perspectiva da ação discente voltada ao pensamento reflexivo estarão mais próximas de proporcionar essa motivação e interesse preconizados por Piaget.

Na figura 21, temos a fase de *maturação* e os metaconhecimentos passíveis de se tornarem Alavanca Meta nela identificados, que nesse caso, foram usados para auxiliar nas dificuldades que os alunos apresentaram ao agir sobre os conteúdos trabalhados. Foram recursos que emergiram basicamente da necessidade que o professor sentiu de reorganizar suas estratégias para dar conta das dificuldades de compreensão dos estudantes. Tanto, que a maioria estava no discurso do docente, seja por meio de perguntas, linguagem coloquial ou mesmo gestos.

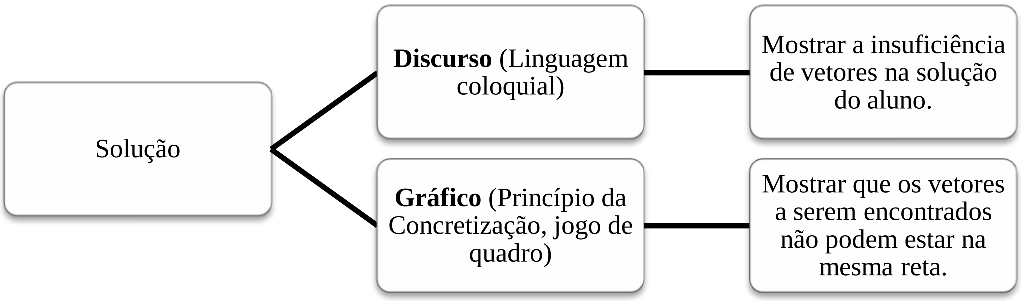
Figura 21 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase de Maturação.



Fonte: Pesquisa direta.

Na Figura 22, temos a fase da *solução* que teve a presença de duas possíveis Alavancas Meta no momento em que o professor explicava para a turma as soluções feitas por alunos que se dispuseram a ir à lousa resolver situações propostas. Nesse caso, o professor complementou o que havia sido feito trazendo esses recursos que ajudariam na compreensão da turma.

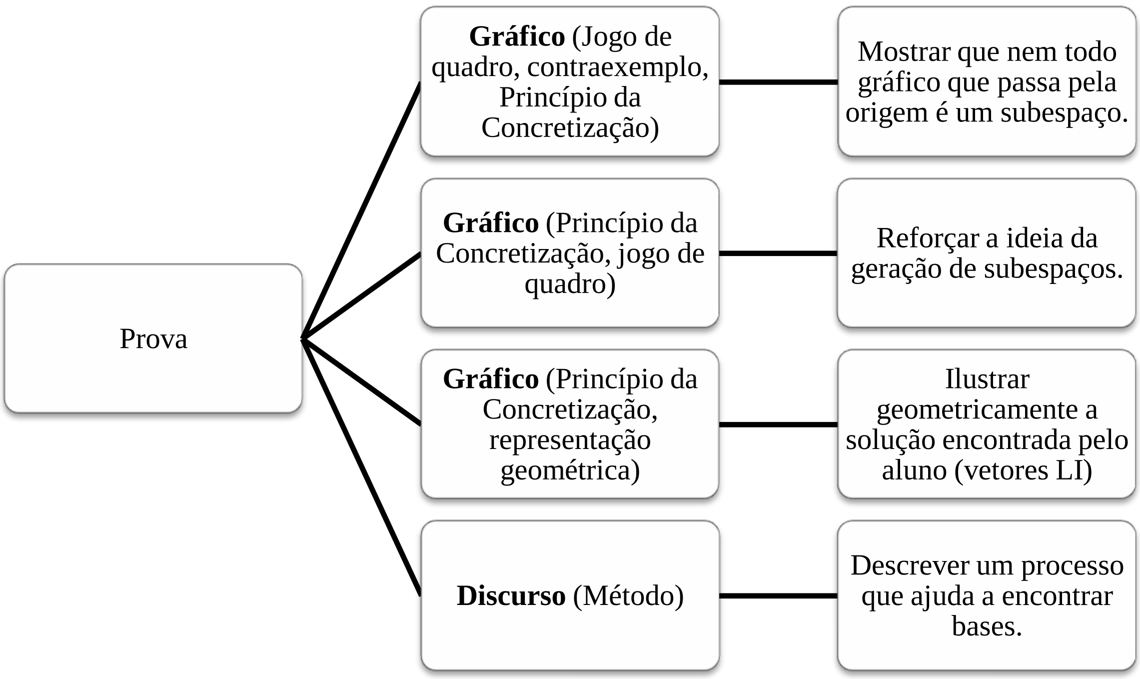
Figura 22 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da Solução.



Fonte: Pesquisa direta.

Na Figura 23, temos a fase da *prova* na qual ocorreram 04 momentos em que houve a presença de possíveis Alavancas Meta. Verificamos que aqui a maior incidência foi o uso de gráficos com o qual o docente trabalhou com o Princípio da Concretização e utilizou jogos de quadro. Nesse caso, ao sistematizar e formalizar os conteúdos abordados, o professor sempre tinha o cuidado de trabalhar com a visualização dos espaços e subespaços vetoriais como forma de fazer os alunos refletirem sobre os conceitos e propriedades.

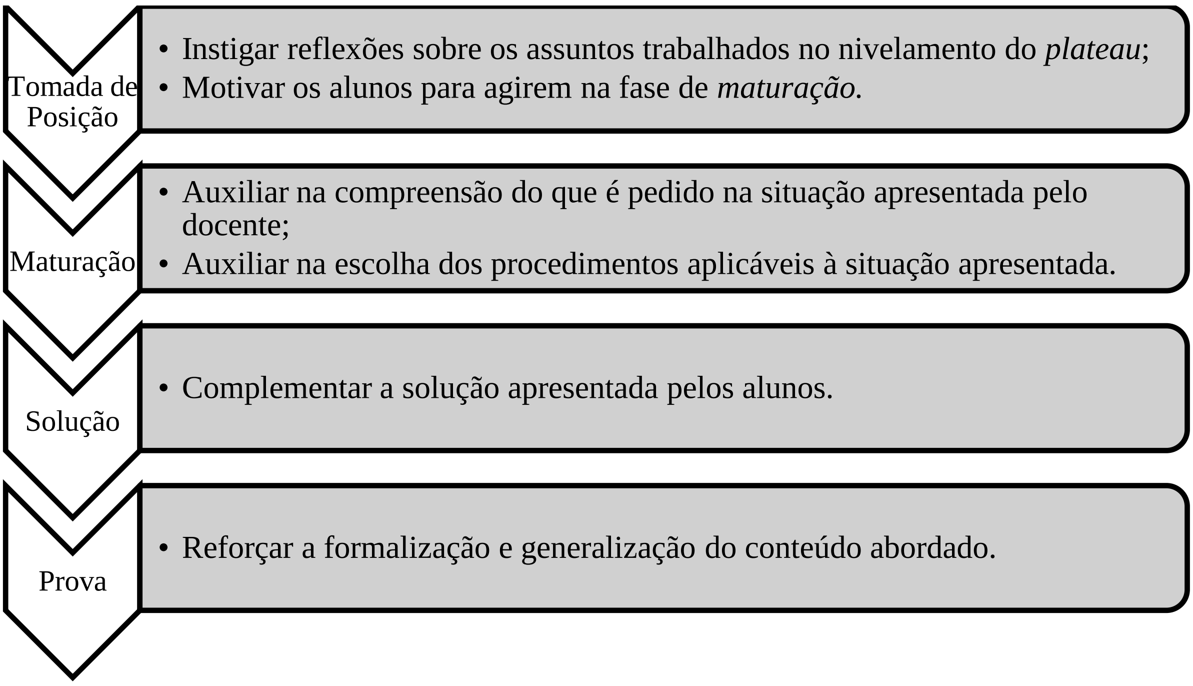
Figura 23 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da Prova.



Fonte: Pesquisa direta.

De modo geral, diante dos resultados encontrados, pudemos observar que cada ferramenta foi utilizada de acordo com a dificuldade implícita a cada conteúdo, bem como, com o objetivo e necessidade de cada fase da Sequência Fedathi. Resumimos essas percepções através da Figura 24, que ilustra a função dos recursos meta em cada fase da Sequência Fedathi.

Figura 24 – Síntese das relações entre os recursos meta identificados e cada fase da SF.



Fonte: Pesquisa direta.

Com os resultados obtidos, verificamos que a Sequência Fedathi favorece o uso de recursos-meta passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos, de modo que foram utilizadas pelo professor em todas as fases da sequência como subsídio à sua mediação, mas com objetivos distintos, de acordo com o propósito de cada fase.

Na *tomada de posição*, a função das possíveis Alavancas Meta identificadas foi a de auxiliar no esclarecimento ou revisão de tópicos importantes de conteúdos trabalhados nas sessões anteriores (diagnóstico e nivelamento do *plateau*); auxiliar na proposição de situações desafiadoras; favorecer a ocorrência de reflexões nos alunos gerando motivação e interesse para atuar na fase de maturação.

Na *maturação*, tiveram o papel de auxiliar nas reflexões sobre as situações propostas e procedimentos a serem realizados pelos alunos. Na *solução*, ajudaram o professor a complementar ou redirecionar as soluções apresentadas pelos alunos, conforme a necessidade. Na *prova*, auxiliaram o docente a reforçar e sistematizar os conceitos trabalhados, de modo a novamente tentar desencadear reflexões sobre o assunto estudado, dessa vez relacionando à formalização dos conteúdos.

Estas análises foram importantes para a compreensão das relações que na prática se estabeleceram entre a Sequência Fedathi e as Alavancas Meta, em que conteúdo e mediação docente interagiam com vistas à reflexão sobre os assuntos estudados. Além disso, ao comparar os resultados obtidos com as categorias eleitas, verificamos que todas foram contempladas plenamente.

A presença dos metaconhecimentos passíveis de se tornarem Alavanca Meta em cada fase da Sequência Fedathi, revela a importância do professor conhecer tais estratégias, pois estas foram essenciais para a condução das sessões didáticas à medida que se dava ênfase aos significados e relações conceituais, explorados com base na construção do conhecimento.

Identificamos que a postura do professor ao utilizar a Sequência Fedathi foi imprescindível para a utilização dos recursos diagnosticados como passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos, pois os momentos apropriados para utilização de tais recursos eram determinados tanto pelos objetivos do docente ao propor as situações de ensino, quanto pelo desempenho da turma no decorrer da aula, ocorrendo conforme as dificuldades esboçadas pelos discentes.

A noção de base foi abordada, partindo da construção do conceito de geradores e posteriormente de independência linear, sendo que durante as sessões didáticas ficou evidente o interesse do professor em trabalhar com geradores que fossem o menor possível, pois esse seria o elo entre geração e independência, constituindo a noção de base. Desse modo, foi trabalhada como um conjunto gerador minimal (SILVA, 1997) e como um sistema de coordenadas, pois ao utilizar com frequência os gráficos para explorar a geração de planos estava lidando com a seguinte interpretação:

> [...] pensar em base como sistema de coordenadas se baseia no fato de que se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial F^n, esses vetores básicos formam um **sistema de coordenadas de** $\boldsymbol{F^n}$ e os subespaços de F^n gerados por cada um dos v_i são os **eixos coordenados** do dado sistema de coordenadas. (SILVA, 1997, p. 67, grifo do autor).

Observamos esse fato quando o professor tentava mostrar as condições de geração de planos e o acréscimo de vetores que estavam fora do espaço dado, os quais representam os eixos coordenados e o sistema de coordenadas, respectivamente.

Nas sessões didáticas observadas, chamou-nos atenção a postura docente, que se destacou em todas as sessões, por não explicitar diretamente as respostas, nem fornecer o “passo a passo” para a resolução das situações propostas, mas em vez disso proporcionou ao aluno oportunidades de agir na busca por essas respostas, para só então esclarecer os caminhos que poderiam ser percorridos para encontrar a solução, já na fase da *prova*.

Nesse sentido e diante da experiência, domínio e concepções do sujeito da pesquisa acerca da Sequência Fedathi, identificamos uma forte influência do construtivismo piagetiano na elaboração e condução das sessões didáticas, que podemos resumir na seguinte citação, extraída do livro “Epistemologia do professor de matemática”, cujo conteúdo coaduna com os diferentes momentos vivenciados nas observações e análises desta pesquisa:

> Aproxima-se de um construtivista quando se concebe como alguém que, em interação com o aluno, cria ações ou situações que possibilitem ao aluno, mediante a própria atividade, realizar abstrações reflexionantes; quando se esforça para “chegar onde o aluno está”; quando propõe desafios, constrói um processo de trocas verbais, investe na construção de um “clima” de aproximação que desafia o aluno a perguntar e a compreender a própria situação; quando organiza situações de aprendizagem, de reflexão sistemática dos erros que, frequentemente, cometem alunos e professores; [...] não perde a oportunidade de fazer sistematicamente perguntas, cuidar para não dar a matéria pronta, ajudar o aluno a exercer sua curiosidade e construir sua autonomia. (BECKER, 2012, p. 199).

Desse modo, diante dos resultados obtidos, podemos considerar que juntas, Sequência Fedathi e Alavanca Meta, favorecem a promoção de um ensino que objetiva a aprendizagem como consequência da reflexão do estudante sobre os conteúdos matemáticos a partir de suas próprias ações, e com isso, traçamos a imagem de uma aula concebida sobre fundamentações construtivistas, aplicada numa disciplina de nível superior. O que para nós é entendido como avanço, pois nesse nível de ensino o tradicionalismo costuma prevalecer.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho investigou a presença de possíveis Alavancas Meta em aulas de Álgebra Linear mediadas segundo os pressupostos da Sequência Fedathi. A partir das fases *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*, identificamos e avaliamos os recursos e estratégias de ensino que poderiam se tornar Alavanca Meta para os alunos. Desse modo, tecemos algumas considerações acerca dos resultados obtidos, respondendo as perguntas de pesquisa, destacando sua relevância e contribuições para a área, bem como sugestões para futuras pesquisas.

Ao longo das sessões didáticas, observamos que a noção de base de um espaço vetorial foi trabalhada matematicamente como um conjunto gerador minimal, de modo que os alunos eram motivados a refletir sobre a vantagem de se trabalhar com o número mínimo de vetores para gerar o espaço, bem como a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes. Essas ideias de geração e independência linear foram sendo construídas ao longo das aulas, cuja mediação dessa construção envolveu um conjunto de fatores que caracterizam cada fase da Sequência Fedathi e dependeu essencialmente da postura docente ao abordar os conteúdos e interagir com a turma.

Para trabalhar os conceitos de espaço e subespaço vetorial, conjunto gerador, independência linear e base, as situações propostas foram mediadas de modo que os alunos fossem instigados a pensar sobre seus significados, utilizando para isso perguntas, contraexemplos, gráficos, recursos diversos que em sua maioria foram classificados como passíveis de se tornarem Alavancas Meta.

Desse modo, o professor auxiliava a turma a compreender as ideias de geração e independência partindo da construção de subespaços, de modo que os alunos deveriam conseguir construí-los usando as propriedades e trabalhando com o menor número de vetores possível, para com isso ser explorada a ideia de geradores através da escolha de vetores convenientes à formação de todo o espaço vetorial dado. Com este método trabalhou a geração e independência linear, constituindo o conceito de base.

Destacamos nessa mediação o cuidado que o professor teve em não fornecer o passo a passo para a resolução das situações propostas, mas em vez disso propiciar ao aluno a oportunidade de construir seu conhecimento, partindo de sua própria ação sobre o objeto estudado.

O uso dos recursos e estratégias passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos identificados nas diferentes fases da Sequência Fedathi dependeu do objetivo e necessidade de cada fase, sendo que algumas eram usadas de acordo com o desempenho da turma, para auxiliar o docente a redirecionar os raciocínios dos alunos conforme fosse necessário, ou seja, a mediação foi subsidiada por estas ferramentas e foram essenciais para que o professor pudesse atingir seus objetivos.

O recurso passível de se tornar Alavanca Meta que ocorreu com mais frequência foi a representação geométrica de espaços e subespaços vetoriais em duas e três dimensões, com a qual o professor explorava suas propriedades através de jogos de quadro, trabalhava a visualização espacial da turma e abordava conceitos por meio de um recurso concreto (Princípio da Concretização) para os alunos, no caso, gráficos de vetores na reta e no plano.

Desse modo, verificamos que neste estudo de caso os resultados encontrados apontaram que a Sequência Fedathi favoreceu o uso de recursos passíveis de se tornarem Alavancas Meta para os alunos, sendo determinante na mediação do professor, de modo que a postura docente ao utilizá-la em sala de aula motivava os alunos à reflexão.

Consideramos que as teorias Alavanca Meta e Sequência Fedathi, nessa pesquisa, se complementaram, e, portanto, indicamos que o professor conheça tais ferramentas e seu potencial de uso no ensino da noção de base, despertando no professor uma consciência do papel da mediação preconizada pela Sequência Fedathi.

Essa complementaridade pode ser entendida como um resultado promissor para o ensino da Álgebra Linear, pois o detalhamento da mediação e postura docente adotada durante as aulas pode ajudar a esclarecer aspectos relacionados à elaboração e à condução de aulas que primam pelo aprendizado por reflexão e construção do conhecimento. Desse modo, um professor que busque alternativas de ensino para essa disciplina poderá buscar apoio na Sequência Fedathi para elaborar as aulas, bem como utilizar e escolher as possíveis Alavancas Meta, pois assim estará dualmente amparado no sentido de propiciar um ensino que objetive a aprendizagem a partir destes moldes.

Além disso, consideramos que é na postura e mediação docente descrita que reside a principal contribuição deste trabalho para a academia e para a sociedade, pois estas demonstraram romper com os paradigmas tradicionais do ensino da matemática, sobretudo de nível superior. Permitindo a valorização da ação discente em sala de aula, que pode ser mais bem direcionada ao fazer cientifico à medida que oportuniza e instiga a curiosidade, a descoberta, a reflexão, o levantamento de hipóteses, as validações, advindas da ação do próprio aluno, não apenas imposta ou transmitida por meio externo (professor).

Diante disso, o que prevaleceu nesse caso foi a busca pela qualidade do ensino, que não se limitou apenas à transmissão sucessiva de definições e provas. Respeitou o ritmo de aprendizagem discente e oportunizou ao aluno vivenciar a construção dos saberes, explorando os significados e relações entre os conteúdos trabalhados, sendo dessa forma estimulados a pensar em sala de aula, a ter autonomia sem medo de errar, questionar ou recomeçar.

Adotar essa postura em sala de aula requer, sobretudo, a internalização da Sequência Fedathi pelo professor que se dispuser a utilizá-la, bem como a consciência do próprio docente acerca de suas concepções de aprendizagem.

Podemos dizer que as lacunas mencionadas na introdução deste trabalho foram discutidas, à medida que relacionamos a teoria presente na Alavanca Meta e a prática docente recomendada pela Sequência Fedathi. No entanto, diante do tempo que se dispõe para realização de uma pesquisa de mestrado, analisamos apenas o ensino, deixando em aberto a necessidade de investigações acerca da aprendizagem discente decorrente do uso concomitante de ambas, seja com estes ou outros conteúdos da Álgebra Linear.

Ressaltamos que apesar desta pesquisa ter enfoque no ensino da disciplina de Álgebra Linear, as discussões referentes à Sequência Fedathi, incluindo postura e mediação docente, elaboração e execução das sessões didáticas, importância do uso de recursos e estratégias de ensino como subsídio ao professor, podem ser apreciadas por professores de qualquer outra disciplina ou nível de ensino da matemática. O que faz com que as contribuições deste estudo possam se estender a outras salas de aula.

Esperamos, portanto, despertar diferentes percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de reelaborar a forma de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos, por meio da Sequência Fedathi e das Alavancas Meta, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre as noções abstratas da Álgebra Linear, buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo e evitar a chamada fraude epistemológica.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. **Análise do desenvolvimento conceitual do cálculo diferencial e integral** - continuidade de funções. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002.

ALVES, F. R. V. **Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis.** 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6860 > Acesso em: 26 Ago. 2012.

ANDRADE, V. S. **A sequência Fedathi e o ambiente virtual de ensino telemeios na determinação da equação de uma reta**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7178 > Acesso em: 26 Ago. 2012.

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, [2004?].

BECKER, F. **A epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORGES. M. F. **Obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem da Álgebra Linear**. 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC06360883830T.doc> Acesso em: 06 Ago. 2012.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:** as pesquisas brasileiras da década de 90. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_roberto_celestino.pdf> Acesso em: 06 Ago. 2012.

D’AMORE, B. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, 2007. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871010> Acesso em: 22 Abr. 2013.

DOLY, A.-M. Metacognição e mediação na escola. *In*: GRANGEAT, M. (Coord.). **A metacognição, um apoio ao trabalho dos alunos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1999.

DORIER, J. L. (Ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J. L. *et al*. The Meta Lever. *In*: DORIER, J. L. (Ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

________________. Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University. **European Research in Mathematics Education I**: group 1. 1999. p. 103-112. Disponível em:< http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf> Acesso em: 12 mar. 2012.

DORIER, J. L. Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algebre Linéaire – perspequitives théorique sur leurs interations. **Les Cahiers Du Laboratoire Leibniz**. Nº 12. Grenoble, France. 2008. Disponível em: <http://www-leibniz.imag.rf/LesCahiers> Acesso em: 10 Mar. 2012.

DUBINSKI, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics**: an educational approach. 2 ed. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1994.

FONTENELE, F. C. F.; ALVES, F. R. V. A alavanca meta em livros didáticos de Álgebra Linear. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba – PR. **Anais do XI ENEM (Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas)**, 2013. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/2647_1408_ID.pdf> Acesso em: 12 Set. 2013.

GIL, A. C. **Estudo de caso**. São Paulo: Atlas, 2009.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/processaPesquisa.php?pesqExecutada=1&id=3502 > Acesso em: 26 Ago. 2012.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. *In*: DORIER, J. L. *et al*. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 177-189.

JUCÁ, A. M. **Construções geométricas no ambiente virtual de ensino TeleMeios com mediação na Sequência Fedathi.** 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6759 > Acesso em: 26 Ago. 2012.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. São Paulo, SP: Artmed Editora, 1997.

MARANHÃO, M. C. S. A. Dialética-ferramenta-objeto. *In*: MACHADO, S. D. A. *et al*. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

NOBRE BARROS, L. H. As relações pessoais esperadas dos estudantes no processo de aprendizagem da noção de derivada de uma função. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife. **Anais...** Recife: XIII CIAEM, 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2186/161> Acesso em: 26 Ago. 2012.

NOMURA, J. I. **Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de engenharia elétrica e nas instituições**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joelma_nomura.pdf> Acesso em: 26 Ago. 2012.

OLIVEIRA, L. C. B. **Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontificia Universidade Católica, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luis_carlos_barbosa.pdf> Acesso em: 06 Ago. 2012.

PADREDI, Z. L. N. **As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/zoraide_lucia_padredi.pdf > Acesso em: 06 Ago. 2012.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ROBERT, A.; ROBINET, J. Prise en compte du meta en didactique des mathematiques. **Cahier de DIDIREM**, Université Paris, v. 21, september 1993. Disponível em: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDD_21_-_A.Robert_et_J_.Robinet_-_Prise_en_compte_du_meta_en_didactique_des_math%c3%a9matiques_.pdf> Acesso em: 05 Dez. 2012.

ROCHA, E. M. **Tecnologias digitais e ensino de matemática**: compreender para realizar. 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1547> Acesso em: 26 Ago. 2012.

ROCHA, E. M. **Uso de instrumentos de medição no estudo da grandeza comprimento a partir de sessões didáticas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006. Disponível em: < http://www.repositorio.ufc.br/ri/handle/riufc/3139> Acesso em: 26 Ago. 2012.

ROGALSKI, M. Un enseignement de l'algebre lineaire en DEUG A primiere annee. **Cahiers de DIDIREM** - Didactique des Mathematiques, Universite Paris VII. 1991.
ROGALSKI, M. L'enseignement de l'algebre lineaire en primiere annee de DEUG A. **Gazette Des Mathématiciens**, nº 60, avril 1994.

ROGALSKI, M. The teaching experimented in Lille. *In.* DORIER, J. L. (Ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

SANTANA, J. R. **Educação Matemática**: Favorecendo investigações matemáticas através do computador. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=228> Acesso em: 26 Ago. 2012.

SANTOS, M. J. C. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas**: desafio para a formação inicial. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

SILVA, C. E. **A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como "ferramenta explícita" para os assuntos de ciência da computação?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_eduardo_silva.pdf> Acesso em: 06 Ago. 2012.

SOUSA, F. E. E. Aplicação da Sequência Fedathi e a exigência de um novo contrato didático. *In*: SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

SOUSA, F. E. E. **Formação contínua e mediação pedagógica no ensino de matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

SOUZA, M. J. A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediada por tecnologias digitais.** 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6521 > Acesso em: 26 Ago. 2012.

SOUZA, M. J. A. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. *In*: SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo, SP: Cengage Learning, 2009.

SZYMIANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRANDINI, R. C. A. R. **A entrevista na pesquisa em Educação**: a prática reflexiva. Brasília, DF: Plano Editora, 2002.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

APÊNDICE E ANEXOS

APÊNDICE A – ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA APLICADA AO PROFESSOR SUJEITO DA PESQUISA

01. Como você descreve a Sequência Fedathi?

02. Que elementos de ordem cognitiva do pensamento matemático ela permite mobilizar?

03. A Sequência Fedathi foi utilizada em todas as aulas de Álgebra Linear ou existem fatores que podem determinar quando ou não usá-la?

04. Como você elabora as aulas? Existe uma espécie de “modelo padrão” que se adapta a qualquer tema ou a maneira de elaborar varia de acordo com o tema? Exemplo...

05. Como você escolhe as estratégias de ensino a serem usadas na aula?

06. Qual foi a participação dos livros de didáticos de Álgebra Linear no momento de elaboração das aulas?

07. Como você descreve o ensino da Álgebra Linear?

ANEXO A – PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA OBSERVADA

PLANO DE ENSINO DE DISCIPLINA

Ano/Semestre
2012

1 – Identificação						
1.1. Centro: Ciências						
1.2. Departamento: Matemática						
1.3. Disciplina:	1.4. Código: (PROGRAD)	1.5. Caráter:				1.6. Carga Horária
		Sem.	Anual	Obrig.	Opt.	Teórica: 128
Introdução à Álgebra	CB9606		X	X		Prática:
1.7. Professor (es):						
1.8. Curso(s): Engenharia de Teleinformática						

2. Justificativa
Muitos problemas de engenharia podem ser resolvidos quando os elementos que o compõem são percebidos como pertencentes a certos conjuntos matemáticos nos quais se visualizam suas soluções. Destacam-se, dentre estes conjuntos, aqueles munidos de operações algébricas com propriedades de grupos, de anéis ou de espaços vetoriais. Logo no segundo ano, o aluno do CGETI se depara com problemas que podem ser modelados em espaços com propriedades algébricas. Justifica-se, com isso, o ensino da disciplina Introdução à Álgebra no primeiro ano.
3. Ementa
Álgebra linear, Introdução à Lógica, Introdução às Estruturas Algébricas, Aplicações em engenharia.
4. Objetivos - Gerais e Específicos
a) Fornecer ao estudante de primeiro ano do CGETI noções básicas das teorias dos grupos e dos anéis, com objetivos não apenas conteudistas, mas visando também ao desenvolvimento de seu raciocínio abstrato, lógico-matemático. b) Antecipar para o primeiro ano o ensino de Álgebra Linear, explorando seus aspectos teóricos, definições, teoremas, etc, cujos conteúdos são bastante aplicados em disciplinas específicas da engenharia a partir do segundo ano.

5. Descrição do Conteúdo/Unidades	5.1. Carga Horária
As quatro primeiras aulas da disciplina são reservadas para atividades recepção e integração do curso de graduação e do centro de tecnologia, bem como motivação, orientações e teste de conhecimento sobre o conteúdo de álgebra do ensino médio para ser usado como referência na organização dos estudos dos alunos para a disciplina.	12h
I - INTRODUÇÃO À LÓGICA Lógica dos conectivos e dos quantificadores.	16h
II - ÁLGEBRA LINEAR:	
a) Vetores: segmentos orientados, vetores no R^n; equações da reta e plano; produto interno; norma euclidiana.	6h
b) Espaços Vetoriais: subespaços; dependência e independência linear; base e dimensão; produto escalar; espaços ortogonais.	8h
c) Sistemas Lineares e Matrizes: Álgebra das matrizes; determinantes; operações elementares e a forma escalonada, transposta de uma matriz;	8h

inversão de matrizes; solução de um sistema de equações lineares. **d) Transformações Lineares:** imagem e núcleo; transformações injetoras/sobre e inversas; transformações e matrizes; mudança de base; posto de uma matriz; auto-valores e auto-vetores; polinômio característico; diagonalização de matrizes; processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. **II - MÉTODOS NUMÉRICOS:** **a) Resolução de sistemas lineares:** . Métodos diretos: conceito; eliminação de Gauss; fatoração LU; fatoração de Choleski; Fatorização QR - Householder - Givens (definição e exemplos); . Métodos iterativos: conceito; Gauss-Jacobi; Gauss-Seidel. **b) Soluções numéricas de equações:** . Equações algébricas e transcendentes: conceito; isolamento de raízes; refinamento da solução. . Métodos iterativos: bi-secção; Newton-Raphson; comparação dos métodos. **IV - INTRODUÇÃO ÀS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS:** **a) Conjuntos**, funções, indução e seqüências, introdução à divisibilidade; **b) Introdução à teoria dos grupos**: relações, números inteiros, números primos, fatoração de números inteiros em primos, operações, definição de grupos, propriedades, exemplos, subgrupos, classes de equivalência, grupos abelianos. **c) Anéis de polinômios:** Definição, igualdade de polinômios, operações, grau de um polinômio, divisão euclidiana, máximo divisor comum (mdc), algoritmo para cálculo de mdc, grafos.	 14h 14h 8h 6h 6h 6h 12h 12h

6. Metodologia de Ensino
Aulas expositivas sobre teoria e exemplos de aplicação. Questionamentos em sala de aula durante a aula e com atendimento em gabinete do professor. Complemento de aprendizagem através de lista de exercícios propostos. Utilização de quadro branco, recursos computacionais e ambiente virtual de ensino (TelEduc: http://virtual.multimeios.ufc.br/). Distribuição de roteiro de estudo para as aulas. Recomendado ao estudante para estudar, ou ao menos ler, o conteúdo de aulas seguintes antes da aula.
7. Atividades Discentes
Assistência às aulas, realização de exercícios individuais e de exames, estudos cooperativos.

8. Avaliação
Serão realizados dois exames por semestre, e a média da avaliação no ano será composta pela média aritmética dos quatro resultados numéricos, representados em escala de zero a dez, obtidos nos exames. O aluno que atingir um total de 20 pontos nas quatro provas estará automaticamente aprovado na disciplina.
9. Bibliografia
9.0 Livros Adotados . Discrete Mathematics in Computer Science, Donald F. Stanat- Capítulos:0 e 1 . Álgebra Linear, David Poole
9.1. Básica . Álgebra Linear, Hoffman-Kunze . Linear Algebra, G. Strang . Introdução à Álgebra, Adilson Gonçalves
9.2. Complementar . Álgebra Linear, Coleção Schaum . Álgebra Linear, Steinbruch-Winterle . Álgebra Linear, Boldrini/Costa/Figueiredo/Wetzler . Introdução à Teoria dos Números, Vitor Nenês (apostila), Universidade de Aveiro, Pt.

10. Pareceres

PARECER

Fortaleza, _____/_____/_____

____
Titular da Unidade Curricular

Aprovado em Reunião do Conselho Departamental em:

Fortaleza, _____/_____/_____

____
Chefe(a) do Departamento

Aprovado em Reunião do Colegiado da Coordenação em:

Fortaleza, _____/_____/_____

____
Coordenador(a) do Curso

Aprovado em Reunião do Conselho de Centro ou Faculdade ou Campus em:

Fortaleza, _____/_____/_____

____
Diretor(a) do Centro ou Faculdade ou Campus