



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO**

**EFEITO CASIMIR, ESPALHAMENTO DE MÉSONS E CORREÇÕES  
RADIOATIVAS EM UMA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA: ASPECTOS  
DE TEMPERATURA FINITA**

**FORTALEZA  
2023**

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

EFEITO CASIMIR, ESPALHAMENTO DE MÉSONS E CORREÇÕES RADIOATIVAS EM  
UMA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA: ASPECTOS DE TEMPERATURA  
FINITA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

FORTALEZA  
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- A69e Araújo, Michelângelo Camões Frost Sousa Costa.  
Efeito Casimir, espalhamento de mésons e correções radioativas em uma eletrodinâmica escalar estendida : aspectos de temperatura finita / Michelângelo Camões Frost Sousa Costa Araújo. – 2023.  
123 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.  
Coorientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.
1. Eletrodinâmica escalar. 2. Violação de Lorentz. 3. Efeito Casimir. 4. Temperatura finita. I. Título.  
CDD 530
-

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

EFEITO CASIMIR, ESPALHAMENTO DE MÉSONS E CORREÇÕES RADIOATIVAS EM  
UMA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA: ASPECTOS DE TEMPERATURA  
FINITA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 22/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Coorientador)  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

---

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento  
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Aos Meus Pais.

## **AGRADECIMENTOS**

Serei eternamente grato à minha família, em especial ao meu pai, minha mãe, minha tia Amparo e minha noiva, por todo o amor, confiança e apoio dedicados a mim.

Uma agradecimento especial ao meu orientador Roberto V. M. Cavalcante por sempre me motivar e me dar toda assistência necessária para seguir com a pesquisa, mesmo em momentos difíceis como os de pandemia.

Uma agradecimento também especial ao meu coorientador Job Saraiva Furtado Neto por todas as discussões e colaborações.

Quero agradecer também ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida, por todos os conselhos e conversas motivadoras.

Agradeço a esta universidade, todo o corpo docente, direção e administração, em especial aos professores Ricardo Renan Landim de Carvalho, Ilde Guedes da Silva, Jose Ramos Goncalves e Carlos William de Araujo Paschoal por todos os ensinamentos que me conduziram até aqui.

Agradeço também aos meu amigos queridos Carol, Leandro, Emília e Lucas por todos os momentos de descontração e desabafo que acabam energizando nossas forças.

Ao professor José Euclides Gomes da Silva por sempre estar disponível para todos os tipos de discussões.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Agradeço especialmente a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) pelos recursos em mim investidos.

## RESUMO

Nesta tese, investigamos efeitos de temperatura zero e finita em uma Eletrodinâmica escalar do Modelo Padrão Estendido que viola a simetria de Lorentz. Em um primeiro momento, calculamos a seção de choque termal para o espalhamento de mésons distintos à temperatura finita através do formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, onde mostramos que as correções de temperatura induzidas são extremamente grandes. Em especial, mostramos ainda que a seção de choque é afetada somente pela componente dos coeficientes de violação na direção de propagação dos mésons iniciais. Em seguida, calculamos as correções a um *loop* para a auto-energia do campo de *gauge* em temperatura finita através do formalismo de Matsubara. Focamos tanto na contribuição CPT-par como CPT-ímpar e usamos a técnica de regularização dimensional. Em especial, mostramos que as partes dependentes da temperatura não possuem singularidades e discutimos sobre como o teorema de Furry é quebrado com a presença de temperatura não nula. Posteriormente, investigamos como a energia de Casimir em temperatura zero é modificada pelo setor CPT-par da eletrodinâmica escalar estendida, onde, através de uma parametrização tensorial, fomos capazes de investigar diferentes configurações do modelo: isotrópica, anisotrópica de paridade par e anisotrópica de paridade ímpar. Mostramos que embora o efeito líquido de violação da simetria de Lorentz seja muito pequeno, eles tendem a diminuir ou a aumentar a energia de Casimir dependendo da configuração na qual o sistema se encontra.

**Palavras-chave:** eletrodinâmica escalar; violação de Lorentz; efeito Casimir; temperatura finita.

## ABSTRACT

In this thesis we investigate zero and finite temperature effects on a Lorentz-violating scalar electrodynamics of the Standard-Model Extension. At first, we calculate the thermal cross section for the scattering of distinct mesons at finite temperature through the Thermal Field Dynamics formalism, where we show that the induced temperature corrections are extremely large. In particular, we also show that the cross section appears to be only affected by the component of the violation coefficient in the propagation direction of the initial mesons. Next, we compute the one-loop corrections to the self-energy of the gauge field at finite temperature by using the Matsubara formalism. We focus on both CPT-even and CPT-odd contributions and we use the dimensional regularization technique. Specially, we show that the temperature-dependent parts do not have singularities and discuss how Furry's theorem is broken with the presence of non-zero temperature. Subsequently, we investigate how the Casimir energy at zero temperature is modified by the CPT-even sector of extended scalar electrodynamics, where through a tensor parameterization we were able to investigate different configurations of the model: isotropic, anisotropic parity-even and anisotropic parity-odd. We show that although the net effect of Lorentz symmetry violation is very small, they tend to decrease or increase the Casimir energy depending on the configuration in which the system is found.

**Keywords:** scalar electrodynamics; Lorentz violation; Casimir effect; finite temperature.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama para correção de massa a um <i>loop</i> da teoria $\lambda\phi^4$ . . . . .	63
Figura 2 – Diagramas de Feynman possíveis para mésons e antimésons do tipo <i>a</i> se espalhando em mésons e antimésons do tipo <i>b</i> . . . . .	77
Figura 3 – Gráfico da função $\mathcal{B}$ em relação a $\beta$ (curva amarela). . . . .	79
Figura 4 – Comportamento da seção de choque em temperatura zero com a energia do centro de massa para o espalhamento de mésons em uma eletrodinâmica escalar violando a simetria de Lorentz: Caso padrão (linha preta), $\hat{k}_c^{33} = 0$ e $\hat{k}_a^3 = 1/2$ (linha azul), $\hat{k}_c^{33} = 1/10$ e $\hat{k}_a^3 = 0$ (linha verde). . . . .	80
Figura 5 – Diagramas de Feynman a 1- <i>loop</i> correspondentes ao setor CPT-par da eletrodinâmica estendida. . . . .	82
Figura 6 – Gráficos de $G_1$ (linha lilás), $G_2$ (linha amarela) e $G_3$ (linha vermelha tracejada) como função de $\xi$ . . . . .	87
Figura 7 – Diagramas de Feynman a 1- <i>loop</i> correspondentes ao setor CPT-ímpar da eletrodinâmica estendida. . . . .	89
Figura 8 – Duas placas paralelas de área $L^2$ separadas por uma pequena distância $a$ ( $a \ll L$ ). . . . .	93
Figura 9 – Energia de Casimir no setor isotrópico para alguns valores de $u_0v_0$ . Temos assumido $L = 1$ e $m = 1$ . (Limite $ma \ll \sqrt{1 - u_0v_0/4}$ ) . . . . .	98
Figura 10 – Energia de Casimir no setor isotrópico para alguns valores de $u_0v_0$ . Temos assumido $L = 1$ e $m = 1$ . (Limite $ma \gg \sqrt{1 - u_0v_0/4}$ ) . . . . .	99
Figura 11 – Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade par para alguns valores de $ \mathbf{u} $ e $ \mathbf{v} $ . Temos assumido $L = 1$ e $m = 1$ . (Limite $ma \ll 1$ ) . . . . .	102
Figura 12 – Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade par para alguns valores de $ \mathbf{u} $ e $ \mathbf{v} $ . Temos assumido $L = 1$ e $m = 1$ . (Limite $ma \gg 1$ ) . . . . .	103
Figura 13 – Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade ímpar para alguns valores de $ \mathbf{u} $ e $ \mathbf{v} $ . Temos assumido $L = 1$ e $m = 1$ . (Lado esquerdo: $ma \ll 1$ )(Lado direito: $ma \gg 1$ ) . . . . .	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sinais adquiridos pelos campos, potenciais e derivadas sob transformações C, P, T e CPT. . . . .	69
Tabela 2 – Dimensão de massa dos diversos tensores que violam a simetria de Lorentz no setor fermiônico do MPE. . . . .	70
Tabela 3 – Sinais adquiridos sob transformações CPT por alguns termos envolvendo o produto de campos fermiônicos. Aqui, $(-1)^\mu \equiv 1$ para $\mu = 0$ e $(-1)^\mu \equiv 1$ para $\mu = 1, 2, 3$ . . . . .	70
Tabela 4 – Sinais adquiridos pelos termos proporcionais a cada uma das componentes dos tensores $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$ e $(\hat{K}_a)^\mu$ sob C, P, T e CPT. . . . .	72

## LISTA DE SIGLAS

MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
TQC	Teoria Quântica de Campos
CPT	Carga-Paridade-Reversão temporal
DCT	Dinâmica de Campos Térmicos
RCT	Regras de Conjugação Til
CM	Centro de Massa
EDQ	Eletrodinâmica Quântica
KMS	Kubo-Martin-Schwinger
CFJ	Carroll-Field-Jackiw
BCE	Condesado de Bose-Einstein

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA . . . . .	17
2.1	O formalismo DCT . . . . .	17
2.1.1	<i>Estado de vácuo termal e as Regras de Conjugação Til</i> . . . . .	17
2.1.2	<i>O campo escalar na DCT</i> . . . . .	18
2.1.3	<i>O campo de férmions na DCT</i> . . . . .	20
2.1.4	<i>O campo de fótons na DCT</i> . . . . .	22
2.1.5	<i>Espalhamentos de partículas na DCT</i> . . . . .	23
2.1.6	<i>O propagador termal do campo escalar real no formalismo DCT</i> . . . . .	32
2.1.7	<i>O propagador termal do campo de Dirac no formalismo DCT</i> . . . . .	36
2.1.8	<i>O propagador termal do fóton no formalismo DCT</i> . . . . .	40
2.1.9	<i>A QED no formalismo DCT</i> . . . . .	42
2.1.10	<i>A QED escalar no formalismo DCT</i> . . . . .	45
2.2	O formalismo de Matsubara . . . . .	50
2.2.1	<i>As frequências de Matsubara</i> . . . . .	57
2.2.2	<i>Regras de Feynman</i> . . . . .	60
2.2.3	<i>Correção de massa a um loop para o campo escalar real</i> . . . . .	62
3	O MODELO PADRÃO ESTENDIDO . . . . .	66
3.1	Extensão mínima da eletrodinâmica quântica . . . . .	67
3.1.1	<i>Setor de fótons CPT-par</i> . . . . .	68
3.1.2	<i>Setor de fótons CPT-ímpar</i> . . . . .	69
3.1.3	<i>O setor de férmions</i> . . . . .	69
3.2	Eletrodinâmica escalar estendida . . . . .	71
4	ESPALHAMENTO DE MÉSONS NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA À TEMPERATURA FINITA . . . . .	75
4.1	Eletrodinâmica escalar estendida no formalismo DCT . . . . .	75
4.2	Seção de choque diferencial para o espalhamento de mésons . . . . .	76
5	CORREÇÕES RADIOATIVAS NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA À TEMPERATURA FINITA . . . . .	81
5.1	Tensor de polarização do fóton a 1-loop . . . . .	81
5.1.1	<i>Contribuições CPT-par</i> . . . . .	81
5.1.1.1	<i>Regime de temperatura finita</i> . . . . .	84
5.1.2	<i>Contribuições CPT-ímpar</i> . . . . .	88
6	ENERGIA DE CASIMIR NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA . . . . .	91

<b>6.1</b>	<b>Equações de campo parametrizadas . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>6.2</b>	<b>O setor isotrópico . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>6.3</b>	<b>O setor anisotrópico de paridade par . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>6.4</b>	<b>O setor anisotrópico de paridade ímpar . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>106</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>110</b>
	<b>APÊNDICE A - EXPRESSÃO PARA O RESULTADO FINITO DO TEN-</b>	
	<b>SOR DE POLARIZAÇÃO CPT-PAR À TEMPERATURA ZERO . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>APÊNDICE B - INTEGRAL ANGULAR DO SETOR ANISOTRÓPICO</b>	
	<b>DE PARIDADE ÍMPAR . . . . .</b>	<b>122</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O Modelo Padrão (MP) da física de partículas, em linhas gerais, pode ser entendido como uma coleção de teorias que permitem descrever, de forma bastante elegante, as partículas elementares e as interações fundamentais existentes na natureza [1]. Ele consegue explicar, com grande precisão com os dados experimentais, três das quatro interações fundamentais conhecidas [2]: eletromagnética, fraca e forte. A interação gravitacional, por sua vez, não faz parte do MP, talvez por ser a mais fraca dentre as quatro, e isto constitui ainda um problema em aberto na física [2].

Uma das características mais interessantes do MP é que sua estrutura é toda desenvolvida com base em simetrias. De fato, a invariância sob alguma simetria de calibre local leva ao surgimento de novos campos, associados a partículas denominadas como bósons de gauge, que desempenham o papel de mediadores das interações fundamentais da Natureza [3]. As interações eletromagnéticas, por exemplo, estão associadas ao grupo de simetria local  $U(1)$  de modo que a invariância da teoria sob transformações  $U(1)$  leva a existência dos fótons, partículas mediadoras das interações eletromagnéticas [4]. Para a interação fraca, o grupo de simetria associado é o  $SU(2)$  e as partículas mediadoras são os Bósons massivos  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z$  [4]. Para a interação forte, os bósons são os glúons e o grupo de simetria responsável pelo setor é o  $SU(3)$  [4].

A linguagem utilizada pelo MP para descrever a física das partículas elementares é aquela estabelecida pela teoria quântica de campos (TQC), que aborda de forma unificada fenômenos quânticos e relativísticos. Como consequência de tal unificação, resultados que nenhuma dessas teorias sozinha poderia oferecer passam a vir à tona: como a prova do princípio da exclusão de Pauli, o teorema CPT (carga, paridade e reversão temporal) e a existência de antipartículas [1]. Em especial, assim como a simetria de Lorentz, que é um dos pilares da relatividade restrita, o teorema CPT parece ser uma simetria fundamental da natureza. Embora as simetrias de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T) possam ser violadas separadamente, todas as observações indicam que a simetria CPT é sempre preservada [5]. Especificamente falando, as interações gravitacionais, eletromagnéticas e fortes são simétricas em relação a C, P e T, enquanto que a interação fraca viola C e P separadamente, mas preserva CP e T.

Embora experimentalmente bem sucedido, o MP ainda deixa algumas questões em aberto, tais como as oscilações de neutrino [6], o problema da hierarquia [7] e a falta de uma descrição quântica da gravidade, de modo que a procura por uma física além do MP torne-se um caminho bem natural. Nestes novos cenários, violações da simetria de Lorentz e CPT podem surgir em teorias fundamentais que combinam a gravidade com a mecânica quântica, tais como a teoria das cordas [8, 9], ou a gravidade quântica em laços [10, 11]. Violações da simetria de Lorentz e CPT também podem ser encontradas em modelos de gravidade do tipo Horava–Lifshitz [12, 13], ou mesmo em espaço-tempo não comutativo [14]. O problema é que

todas essas teorias residem na escala de energia de Planck ( $\sim 10^{19} GeV$ ), que é muito maior que a escala de energia associada a teoria eletrofraca do MP ( $\sim 246 GeV$ ), fazendo com que a verificação experimental direta torne-se uma tarefa muito difícil, se não impossível, para os dias atuais.

A principal alternativa, que visa investigar sinais de violação de Lorentz e CPT, mesuráveis em baixas energias, é descrita pelo Modelo Padrão Estendido (MPE). Esta teoria, proposta por Colladay e Kostelecký [15, 16], tem como conceito fundamental a extensão da densidade Lagrangiana do MP a uma teoria de campos efetiva que inclui todos os termos que violam a simetria de Lorentz, mas que preservam as simetrias de gauge já existentes [17–19]. Ademais, desde que qualquer coeficiente que viola CPT também viola Lorentz, o MPE fornece uma estrutura abrangente para se investigar a quebra da simetria CPT [8, 15, 16].

Com uma vasta e compreensível estrutura para investigar violações CPT no nível de uma teoria de campos efetiva, o MPE tem levado a várias investigações experimentais [20–25], além de ter sido estudado em inúmeros contextos, tais como oscilações de neutrinos [26–29], correções radioativas [30–33], modelos supersimétricos [34–37] e teoria quântica de campos não comutativa [38].

Mais recentemente, Edwards e Kostelecký propuseram uma extensão do setor escalar do MP de modo que pequenos desvios da simetria CPT em oscilações de mésons neutros pudessem ser avaliadas [39]. Estruturalmente, a ideia era tratar um sistema de méson-antiméson através de uma teoria escalar de campos efetiva que contém operadores de dimensão de massa arbitrária, independentemente do spin, que violam a simetria de Lorentz [40]. Note que a independência em relação ao spin traz um caráter muito especial à teoria, uma vez que a grande maioria das partículas elementares do MP possui spin não nulo, sendo o bóson de Higgs a única exceção [2, 3].

Nesta tese de doutorado, partindo de uma uma extensão da eletrodinâmica escalar do MP, proposta por Edwards e Kostelecký na Ref. [40], investigaremos possíveis correções que violam as simetrias de Lorentz e CPT para a energia de Casimir, para a seção de choque termal de espalhamento de mésons e para auto-energia do campo de gauge, a um *loop*, em temperatura finita. A implementação de temperatura se dará através do formalismo de Matsubara, para as correções radioativas, e por meio do formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT) no tratamento de espalhamento de partículas escalares (mésons).

O formalismo de Matsubara, proposto por Takeo Matsubara no ano de 1955 [41], foi a primeira abordagem sistemática para o tratamento de sistemas quânticos e relativísticos, descritos pela TQC, em equilíbrio termodinâmico. Também conhecido como o formalismo do tempo imaginário, uma vez que o tempo  $t$  é negociado em função da temperatura  $T$  por meio da correspondência  $t \rightarrow -\frac{i}{T}$ , ele vem ainda hoje sendo amplamente aplicado nas mais diversas áreas da física, especialmente no estudo de correções radioativas a *loop* no cenário de violação de Lorentz e CPT [42–49].

Já no formalismo DCT, proposto por Takahashi e Umezawa [50], o tempo é tra-

tado como um parâmetro real e independente da temperatura [51]. Como veremos, através da construção de um estado vácuo termal  $|0(\beta)\rangle$ , onde a média estatística de um observável  $\mathcal{O}$  possa ser obtida por meio do valor esperado  $\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle$ , será permitida uma análise perturbativa completamente análoga àquela em temperatura zero. De fato, toda a estrutura das teorias de interação da TQC pode ser facilmente estendida, inclusive no contexto de integrais de caminho, facilitando bastante a derivação das regras de Feynman à temperatura finita e fazendo do formalismo DCT uma teoria bastante atraente para ser aplicada em cálculo de taxas de decaimento e seções de choque dependentes da temperatura [52]. No cenário de violação de Lorentz e CPT, por exemplo, veja Refs [53–57].

A análise de efeitos termais em modelos que violam a simetria de Lorentz e CPT é de fundamental importância uma vez que ela pode nos ajudar a melhorar os *bounds* para os diversos parâmetros da teoria. Em adição, efeitos de violação através de processos astrofísicos que investigam sinais de birrefringência do vácuo em fontes astronômicas com alto desvio para o vermelho, vêm sendo recentemente investigados [58].

Esta tese está organizada como se segue. No capítulo (2), apresentamos uma breve revisão da teoria quântica de campos à temperatura finita. Iniciamos discutindo o formalismo DCT, apresentando suas principais características. Levamos em consideração tanto campos bosônicos como campos fermiônicos e calculamos a seção de choque para o processo da eletrodinâmica quântica espinorial (usual) envolvendo um elétron e um pósitron se espalhando em um múon e um antimúon. Ainda no formalismo DCT, dedicamos algumas seções para discutir sobre propagadores e vértices e derivamos as regras de Feynman para a eletrodinâmica usual e escalar em temperatura finita. No final do capítulo, introduzimos o formalismo de Matsubara e o aplicamos no cálculo da correção de massa a um *loop* de uma teoria escalar real com interação do tipo  $\lambda\phi^4$ . No capítulo (3), discutimos brevemente sobre o MPE. Também, considerando uma extensão mínima da eletrodinâmica quântica, abordamos como se comportam os mais diversos termos que violam a simetria de Lorentz, tanto no setor fotônico como no setor fermiônico, sob transformações C, P, T e CPT. Uma análise semelhante será feita, na seção seguinte, para a eletrodinâmica escalar estendida proposta na referência [40], que é de especial interesse para os objetivos dessa tese. Para este modelo, derivamos ainda as regras de Feynman em temperatura zero, finalizando assim o capítulo. No capítulo (4), a seção de choque para o espalhamento de mésons em uma eletrodinâmica escalar estendida é calculada em temperatura finita através do formalismo DCT. É mostrado que no regime de altas temperaturas as correções termais tornam-se extremamente relevantes. Também, o comportamento da seção de choque com os coeficiente que violam a simetria de Lorentz parece estar relacionado com a direção de propagação dos mésons no início do processo. Os resultados do capítulo (4) foram publicados na Ref. [59]. No capítulo (5), calculamos as correções radioativas a um *loop* para propagador do fóton no modelo de eletrodinâmica escalar estendida da Ref. [40]. Tratamos as contribuições CPT-par e CPT-ímpar de forma isolada e usamos a técnica de regularização dimensional. A implementação de temperatura no sistema ocorreu através do formalismo de

Matsubara. Em nossa análise, conseguimos separar as contribuições de temperatura zero e finita e, em especial, os tensores de polarização dependentes da temperatura não apresentaram problemas com singularidades. O resultado devido a contribuição CPT-ímpar, sugere ainda que o teorema de Furry generalizado é quebrado devido à presença de um tensor de polarização não nulo dependente da temperatura. Entretanto, no limite de altas temperatura, este teorema tende a ser restaurado. Os resultados do capítulo (5) foram publicados na Ref. [60]. No capítulo (6), calculamos as correções para a energia de Casimir devido à violação de Lorentz no modelo de eletrodinâmica escalar estendida da Ref. [40]. Consideramos o campo escalar complexo satisfazendo condições de contorno de Dirichlet entre duas grandes placas paralelas separadas por uma pequena distância. Fizemos também uso de uma parametrização tensorial que nos permitiu investigar diferentes configurações do sistema. Particularmente, nossos resultados mostram que a energia de Casimir pode diminuir ou aumentar devido aos efeitos de violação dependendo do tipo de configuração na qual o sistema se encontra. Nossos resultados sugerem ainda que a energia de Casimir é afetada pela paridade da configuração. Os resultados do capítulo (6) foram submetidos para publicação e estão sob análise de *referee*, mas podem ser encontrados na Ref. [61].

No decorrer desta tese, recorreremos ao *software* MATHEMATICA, assim como aos pacotes FeynCalc [62, 63] e o FeynHelpers [64], para realização de alguns cálculos. Utilizamos também as unidades naturais, onde  $\hbar = c = k_B = 1$ , sendo  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $c$  a velocidade da Luz e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Além disso, adotamos a métrica de Minkowski com assinatura  $(1, -1, -1, -1)$ .

## 2 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA

Neste capítulo, discutiremos brevemente os formalismos de Matsubara e o da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), que permitem investigar como a presença de temperatura não nula afeta sistemas descritos por uma teoria quântica e relativística. Como veremos nas seções que se seguem, os dois formalismos traçam um completo paralelo com a TQC usual, estabelecida em temperatura zero. Iniciaremos este capítulo abordando primeiramente o formalismo DCT e, por fim, discutiremos o formalismo de Matsubara<sup>1</sup>.

### 2.1 O formalismo DCT

#### 2.1.1 Estado de vácuo termal e as Regras de Conjugação Til

A Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) é um formalismo que permite explorar os conceitos abordados em uma teoria quântica de campos no contexto de uma temperatura diferente de zero. Sua principal característica é a construção de um estado de vácuo termal,  $|0(\beta)\rangle$ , de modo que a média estatística de um observável<sup>2</sup>  $\mathcal{O}$ ,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} \mathcal{O}), \quad (2.1)$$

possa ser calculada através do valor esperado

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle, \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H})$  é a função de partição do sistema,  $H$  a Hamiltoniana e  $\beta = 1/T$ , onde  $T$  é a temperatura<sup>3</sup> [50]. Para uma adequada definição do estado de vácuo termal, uma duplicação dos graus de liberdade do sistema é requerida. De fato, pode ser mostrado que

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)}} \sum e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (2.3)$$

onde  $E_n$  são as auto-energias do Hamiltoniano  $H$  e  $|n, \tilde{n}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$ . O sistema til deve ser uma cópia do original e está relacionado, em termos físicos, ao reservatório de calor. Ou seja, ele representa o banho térmico.

Devido a duplicação dos graus de liberdade do sistema, para cada operador  $\mathcal{O}$  existente no espaço ordinário (não til), existe um operador  $\tilde{\mathcal{O}}$  no espaço til e estes estão relacionados

<sup>1</sup>As ideias apresentadas neste capítulo de revisão foram desenvolvidas com base em duas referências principais. Para o formalismo DCT, utilizamos a Ref. [52] e para o formalismo de Matsubara, a Ref. [51]. O leitor interessado em uma descrição mais detalhada sobre o assunto pode recorrer a essas duas referências.

<sup>2</sup>Válido tanto para o ensemble Canônico como para o Grande Canônico.

<sup>3</sup>Na realidade,  $\beta = 1/K_B T$ . Estaremos assumindo neste trabalho que a constante de Boltzmann é igual a um.

segundo a definição

$$\hat{\mathcal{O}} \equiv \mathcal{O} - \tilde{\mathcal{O}} \quad (2.4)$$

e as Regras de Conjugação Til (RCT)

$$(\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j)^\sim = \tilde{\mathcal{O}}_i \tilde{\mathcal{O}}_j \quad (2.5)$$

$$(a\mathcal{O}_i + b\mathcal{O}_j)^\sim = a^* \tilde{\mathcal{O}}_i + b^* \tilde{\mathcal{O}}_j \quad (2.6)$$

$$(\tilde{\mathcal{O}}_i)^\dagger = (\mathcal{O}_i^\dagger)^\sim \quad (2.7)$$

$$(\tilde{\mathcal{O}}_i)^\sim = \kappa \mathcal{O}_i \quad (2.8)$$

onde  $\kappa = 1$  para bósons e  $\kappa = -1$  para férmions.

### 2.1.2 O campo escalar na DCT

Para levar em consideração campos escalares no formalismo DCT, pode ser mostrado que o estado de vácuo termal (2.3) está relacionado ao estado de vácuo à temperatura zero<sup>4</sup>  $|0, \tilde{0}\rangle$  através da relação

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.9)$$

onde

$$U(\beta) = \prod_k e^{\theta_k(\beta)[a^\dagger(\mathbf{k})\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}) - a(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k})]} \quad (2.10)$$

é chamado operador transformação de Bogoliubov e leva em consideração todos os modos  $k$ . A função  $\theta_k(\beta)$  é definida através das relações

$$u_B(\mathbf{k}, \beta) = \frac{e^{\beta E_k/2}}{\sqrt{e^{\beta E_k} - 1}} \equiv \cosh \theta_k(\beta); \quad (2.11)$$

$$v_B(\mathbf{k}, \beta) = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta E_k} - 1}} \equiv \sinh \theta_k(\beta), \quad (2.12)$$

onde  $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  é a energia relacionada ao modo  $k$ . Os operadores  $a(\mathbf{k})^\dagger$  e  $a(\mathbf{k})$  criam e aniquilam, respectivamente, partículas no espaço ordinário, enquanto que  $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})$  e  $\tilde{a}(\mathbf{k})$  criariam e aniquilariam partículas fictícias no espaço til<sup>5</sup>.

Através do operador transformação de Bogoliubov, Eq. (2.10), é possível definir operadores termais nos dois espaços. De modo geral, um operador  $A$  qualquer possui sua

<sup>4</sup>Devemos lembrar que estamos dentro do contexto da DCT, onde há a duplicação dos graus de liberdade do sistema.

<sup>5</sup>A palavra fictícia foi utilizada aqui para lembrar do fato que as variáveis físicas de interesse são descritas apenas no espaço ordinário.

representação termal definida como<sup>6</sup>

$$A(\beta) = U(\beta)AU^{-1}(\beta). \quad (2.13)$$

A motivação para tal definição pode ser justificada analisando como o operador de aniquilação termal  $a(\beta)$  atua no estado de vácuo (2.9):

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, \beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)a(\mathbf{k})U^{-1}(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a(\mathbf{k})|0, \tilde{0}\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Veja que a relação (2.14) está em total coerência com os resultados já conhecidos da teoria de campos à temperatura zero.

Aplicando o lema de Baker-Hausdorff,

$$e^{iB\lambda}Ae^{-iB\lambda} = A + i\lambda[G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[B, [G, A]] + \dots, \quad (2.15)$$

para cada modo bosônico  $k$  na expressão (2.13), podemos mostrar que operadores termiais e não termiais se relacionam através das equações

$$a(\mathbf{k}, \beta) = u_B(\mathbf{k}, \beta)a(\mathbf{k}) - v_B(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}); \quad (2.16)$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}, \beta) = u_B(\mathbf{k}, \beta)a^\dagger(\mathbf{k}) - v_B(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}(\mathbf{k}); \quad (2.17)$$

$$\tilde{a}(\mathbf{k}, \beta) = u_B(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}(\mathbf{k}) - v_B(\mathbf{k}, \beta)a^\dagger(\mathbf{k}); \quad (2.18)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) = u_B(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}) - v_B(\mathbf{k}, \beta)a(\mathbf{k}). \quad (2.19)$$

Veja que partindo de qualquer uma das equações acima é possível encontrar as todas as outras através das RCT.

Uma outra característica fundamental do formalismo DCT é que ele preserva as relações de comutação obedecidas pelos operadores bosônicos<sup>7</sup>:

$$\left[ a(\mathbf{k}, \beta), a^\dagger(\mathbf{k}', \beta) \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.20)$$

$$\left[ \tilde{a}(\mathbf{k}, \beta), \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}', \beta) \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.21)$$

Isto pode ser facilmente mostrado através da definição de operadores termiais (2.13).

Sabemos da teoria em temperatura zero que o campo escalar pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação como

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} \right], \quad (2.22)$$

<sup>6</sup>Como veremos, esta é uma definição geral, independente se estamos tratando com bósons ou férmions.

<sup>7</sup>Todas as outras relações de comutação entre operadores termiais são iguais a zero.

onde  $x \equiv x^\mu = (t, \mathbf{x})$  é o quadrvetor posição. Devido a estrutura dobrada do espaço, em DCT devemos ter também

$$\tilde{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ \tilde{a}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} \right]. \quad (2.23)$$

Agora, invertendo as relações (2.16)-(2.19) e substituindo o resultado em (2.22) e (2.23), podemos mostrar que os campos se transformam sob transformação de Bogoliubov como os operadores, ou seja:

$$\phi(x, \beta) = u_B(\beta)\phi(x) - v_B(\beta)\tilde{\phi}^\dagger(x); \quad (2.24)$$

$$\tilde{\phi}(x, \beta) = u_B(\beta)\tilde{\phi}(x) - v_B(\beta)\phi^\dagger(x), \quad (2.25)$$

onde  $u_B(\beta)$  e  $v_B(\beta)$  atuam em cada modo  $k$  do campo como  $u_B(\mathbf{k}, \beta)$  e  $v_B(\mathbf{k}, \beta)$ , respectivamente. As expressões (2.24) e (2.25) podem ser escritas em uma notação dubleto que se mostrará bastante útil quanto ao cálculo dos propagadores:

$$\begin{pmatrix} \phi(x, \beta) \\ \tilde{\phi}(x, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B(\beta) & -v_B(\beta) \\ -v_B(\beta) & u_B(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Em notação indicial, a relação acima toma a forma

$$\Phi_a(x, \beta) = \mathbf{C}_{ab}^B(\beta)\Phi_b(x), \quad (2.27)$$

onde  $\Phi_1 = \phi$  e  $\Phi_2 = \tilde{\phi}$  e

$$\mathbf{C}_B(\beta) = \begin{pmatrix} u_B(\beta) & -v_B(\beta) \\ -v_B(\beta) & u_B(\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

### 2.1.3 O campo de férmions na DCT

Diferentemente do caso escalar real, onde não há distinção entre partícula e antipartícula, o operador transformação de Bogoliubov para o caso de férmions deve permitir em sua definição a existência de tal distinção. De fato, pode ser mostrado que

$$U(\beta) = \prod_k e^{\theta_{a,k}(\beta)[a^{\dagger s}(\mathbf{k})\tilde{a}^{\dagger s}(\mathbf{k}) + a^s(\mathbf{k})\tilde{a}^s(\mathbf{k})]} e^{\theta_{b,k}(\beta)[b^{\dagger s}(\mathbf{k})\tilde{b}^{\dagger s}(\mathbf{k}) + b^s(\mathbf{k})\tilde{b}^s(\mathbf{k})]}, \quad (2.29)$$

com

$$u_F(\mathbf{k}, \beta) = \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}/2}}{\sqrt{1 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}} \equiv \cos \theta_{i,k}; \quad (2.30)$$

$$v_F(\mathbf{k}, \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}} \equiv \sin \theta_{i,k}, \quad (2.31)$$

onde os operadores escritos com a letra  $b$  são responsáveis por criar ou aniquilar antipartículas e o sobrescrito  $s$ , em cada operador, é para levar em conta o índice de spin.

Da definição geral de operadores termais, Eq. (2.13), e do lema de Baker-Hausdorff, podemos mostrar que

$$a^s(\mathbf{k}, \beta) = u_F(\mathbf{k}, \beta)a^s(\mathbf{k}) - v_F(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^{s\dagger}(\mathbf{k}); \quad (2.32)$$

$$a^{s\dagger}(\mathbf{k}, \beta) = u_F(\mathbf{k}, \beta)a^{s\dagger}(\mathbf{k}) - v_F(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^s(\mathbf{k}); \quad (2.33)$$

$$\tilde{a}^s(\mathbf{k}, \beta) = u_F(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^s(\mathbf{k}) + v_F(\mathbf{k}, \beta)a^{s\dagger}(\mathbf{k}); \quad (2.34)$$

$$\tilde{a}^{s\dagger}(\mathbf{k}, \beta) = u_F(\mathbf{k}, \beta)\tilde{a}^{s\dagger}(\mathbf{k}) + v_F(\mathbf{k}, \beta)a^s(\mathbf{k}), \quad (2.35)$$

com expressões análogas para os operadores das antipartículas. Veja que as relações (2.32)-(2.35) também são coerentes com as RCT. Além disso, as relações de anticomutação satisfeitas pelos operadores termais são preservadas<sup>8</sup>:

$$\left\{ a^s(\mathbf{k}, \beta), a^{r\dagger}(\mathbf{k}', \beta) \right\} = \left\{ b^s(\mathbf{k}, \beta), b^{r\dagger}(\mathbf{k}', \beta) \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta^{sr}; \quad (2.36)$$

$$\left\{ \tilde{a}^s(\mathbf{k}, \beta), \tilde{a}^{r\dagger}(\mathbf{k}', \beta) \right\} = \left\{ \tilde{b}^s(\mathbf{k}, \beta), \tilde{b}^{r\dagger}(\mathbf{k}', \beta) \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta^{sr}. \quad (2.37)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da subseção anterior, podemos mostrar que os campos fermiônicos não se transformam como os operadores sob transformação de Bogoliubov:

$$\psi(x, \beta) = u_F(\beta)\psi(x) - v_F(\beta)\tilde{\psi}^\dagger(x)^T; \quad (2.38)$$

$$\tilde{\psi}(x, \beta) = u_F(\beta)\tilde{\psi}(x) - v_F(\beta)\tilde{\tilde{\psi}}^\dagger(x)^T; \quad (2.39)$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}(x, \beta) = u_F(\beta)\tilde{\tilde{\psi}}(x) + v_F(\beta)\psi^\dagger(x)^T; \quad (2.40)$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}(x, \beta) = u_F(\beta)\tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}(x) - v_F(\beta)\tilde{\psi}^\dagger(x)^T, \quad (2.41)$$

onde

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ a^s(\mathbf{k}) \mathbf{u}^s(k) e^{-ik \cdot x} + b^{s\dagger}(\mathbf{k}) \mathbf{v}^s(k) e^{ik \cdot x} \right]; \quad (2.42)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ b^s(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{v}}^s(k) e^{-ik \cdot x} + a^{s\dagger}(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{u}}^s(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (2.43)$$

As RCT podem ser usadas para encontrarmos tanto  $\tilde{\psi}$  como  $\tilde{\tilde{\psi}}$  e o sobrescrito  $T$ , na extremidade direita das equações (2.38)-(2.41), indica que os espinores que compõem os campos devem ser transpostos. Por exemplo:

$$\psi(x)^T = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ a^s(\mathbf{k}) \mathbf{u}^{sT}(k) e^{-ik \cdot x} + b^{s\dagger}(\mathbf{k}) \mathbf{v}^{sT}(k) e^{ik \cdot x} \right], \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{u}^s$  e  $\mathbf{v}^s$  foram substituídos por  $\mathbf{u}^{sT}$  e  $\mathbf{v}^{sT}$ , respectivamente. Na notação dubleto, as relações

<sup>8</sup>Todas as outras relações de anticomutação são iguais a zero.

(2.38)-(2.41) passam a ser escritas como

$$\begin{pmatrix} \psi(x, \beta) \\ \tilde{\psi}^\dagger(x, \beta)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_F(\beta) & -v_F(\beta) \\ v_F(\beta) & u_F(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \tilde{\psi}^\dagger(x)^T \end{pmatrix}; \quad (2.45)$$

$$\left( \bar{\psi}(x, \beta), \tilde{\bar{\psi}}^\dagger(x, \beta)^T \right) = \left( \bar{\psi}(x), \tilde{\bar{\psi}}^\dagger(x)^T \right) \begin{pmatrix} u_F(\beta) & v_F(\beta) \\ -v_F(\beta) & u_F(\beta) \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

onde, em notação indicial, assumem a forma

$$\Psi_a(x, \beta) = \mathbf{C}_{ab}^F(\beta) \Psi_b(x); \quad (2.47)$$

$$\bar{\Psi}_a(x, \beta) = \bar{\Psi}_b(x, \beta) \mathbf{C}_{ba}^{F(-1)}(\beta), \quad (2.48)$$

com  $\Psi_1 = \psi$ ,  $\Psi_2 = \tilde{\psi}^{\dagger T}$ ,  $\bar{\Psi}_1 = \bar{\psi}$  e  $\bar{\Psi}_2 = \tilde{\bar{\psi}}^{\dagger T}$ ,

$$\mathbf{C}_F(\beta) = \begin{pmatrix} u_F(\beta) & -v_F(\beta) \\ v_F(\beta) & u_F(\beta) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

e  $\mathbf{C}_F^{-1}(\beta)$  sendo a inversa de  $\mathbf{C}_F(\beta)$ .

#### 2.1.4 O campo de fótons na DCT

Sabemos da teoria em temperatura zero que cada componente do campo de fótons, dado por

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{m=0}^3 \left[ a^r(\mathbf{k}) \varepsilon_\mu^m(k) e^{-ik \cdot x} + a^{m\dagger}(\mathbf{k}) \varepsilon_\mu^{*m}(k) e^{ik \cdot x} \right], \quad (2.50)$$

no *gauge* de Lorentz, onde  $\varepsilon_\mu^m(k)$  é o vetor polarização do campo, satisfaz uma equação do tipo Klein-Gordon sem massa<sup>9</sup>,

$$\square A_\mu(x) = 0. \quad (2.51)$$

Isto sugere que todos os conceitos desenvolvidos na subseção (2.1.2), para o campo escalar, podem ser estendido para o campo de fótons. De fato, os operadores de criação e aniquilação em (2.50) são operadores bosônicos e satisfazem as relações (2.16)-(2.19), sob transformação de Bogoliubov. Também, é bastante direto mostrar que campos de fótons termais e não termais estão relacionados por

$$\begin{pmatrix} A_\mu(x, \beta) \\ \tilde{A}_\mu(x, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B(\beta) & -v_B(\beta) \\ -v_B(\beta) & u_B(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu(x) \\ \tilde{A}_\mu(x) \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

<sup>9</sup>Para o campo escalar  $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ .

que, em notação indicial, assume a forma

$$\mathcal{A}_\mu^a(x, \beta) = \mathbf{C}_B^{ab}(\beta) \mathcal{A}_\mu^b(x), \quad (2.53)$$

com  $\mathcal{A}_\mu^1 = A_\mu$ ,  $\mathcal{A}_\mu^2 = \tilde{A}_\mu$  e  $\mathbf{C}_B(\beta)$  dada por (2.28).

### 2.1.5 Espalhamentos de partículas na DCT

A quantidade fundamental que estaremos interessados em calcular é a seção de choque à temperatura finita. No formalismo DCT, a seção de choque diferencial, avaliada no referencial do centro de massa para duas partículas, uma com momento<sup>10</sup>  $p_1$  e outra com momento  $p_2$ , espalhando-se em outras duas partículas com momentos  $k_1$  e  $k_2$ , é definida como

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta, CM} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2} |v_1 - v_2|} \frac{|\mathbf{k}_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2, \quad (2.54)$$

onde  $|v_1 - v_2|$  é a velocidade relativa entre as partículas iniciais e  $\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)$  é a matriz

$$\hat{\mathcal{M}}(\beta) = \mathcal{M}(\beta) - \tilde{\mathcal{M}}(\beta) \quad (2.55)$$

quando tomada no referencial do centro de massa (CM). Note que a estrutura dobrada, característica do formalismos DCT, assim como a dependência com a temperatura, está embutida na matriz  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  que corresponde a parte não trivial da matriz de espalhamento

$$\hat{S}(\beta) \equiv {}_\beta \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle_\beta, \quad (2.56)$$

onde

$$\hat{U} = U - \tilde{U} \quad (2.57)$$

com

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n \mathcal{T} [\mathcal{H}_I(z_1) \cdots \mathcal{H}_I(z_n)] \quad (2.58)$$

sendo o operador evolução temporal no espaço ordinário. O símbolo  $\mathcal{T}$  indica que as densidades Hamiltonianas  $\mathcal{H}_I$  estão sob ordenamento temporal e o subscrito  $I$  indica que estamos tratando de operadores na representação de interação, onde

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t') \quad (2.59)$$

com

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t')} H_{int} e^{-iH_0(t-t')}, \quad (2.60)$$

---

<sup>10</sup>Aqui devemos entender momento como sendo o quadrimomento  $p^\mu$ .

sendo que  $H_0$  e  $H_{int}$  são, respectivamente, a Hamiltoniana livre e de interação. Além disso, os estados de partículas estão escritos em sua versão termal sob transformação de Bogoliubov:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{k}\rangle_\beta &= U(\beta)|\mathbf{k}\rangle \\
&= U(\beta) \left[ \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k}) |0, \tilde{0}\rangle \right] \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} U(\beta) U^{-1}(\beta) a^\dagger(\mathbf{k}, \beta) U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k}, \beta) |0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Na equação acima,

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k}) |0, \tilde{0}\rangle \tag{2.62}$$

é o estado de uma partícula com momento  $k$  criada no espaço ordinário onde o experimento real acontece. As partículas fictícias criadas no espaço til não são consideradas na definição (2.56) e portanto não contribuem para o espalhamento físico.

Sendo (2.58) uma série, devemos calcular (2.56) perturbativamente para um determinado Hamiltoniano específico. De modo geral, o que encontraremos é uma relação do tipo

$$\hat{S}(\beta) = \mathbf{1} + i\hat{T}(\beta), \tag{2.63}$$

onde  $\mathbf{1}$  é o operador identidade contendo toda a parte que não contribui para o espalhamento e

$$i\hat{T}(\beta) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) i\hat{\mathcal{M}}(\beta). \tag{2.64}$$

Veja que a delta de Dirac está garantindo a conservação da energia e do momento das partículas envolvidas no processo. Uma consequência fundamental desta abordagem é a possibilidade da matriz  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  ser determinada diretamente através de um conjunto de regras associadas a diagramas de Feynman, assim como na teoria em temperatura zero. Uma vez encontrado  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$ , basta substituímos o resultado do módulo quadrado, escrito no referencial do centro de massa, na equação (2.54) e teremos assim calculado a seção de choque diferencial dependente da temperatura no formalismo DCT.

A título de ilustração, vamos considerar o espalhamento  $e^-(p) + e^+(p') \rightarrow \mu^-(k) + \mu^+(k')$  na QED usual<sup>11</sup>, onde

$$\mathcal{H}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{2.65}$$

com  $A^\mu$  sendo o campo de fótons e  $\gamma^\mu$  as matrizes de Dirac<sup>12</sup>. O primeiro termo que pode contribuir de forma não trivial para a matriz  $\hat{S}(\beta)$  é o de segunda ordem na constante de acoplamento

<sup>11</sup>Elétron-pósitron se espalhando em múon-antimúon. As letras  $p, p', k$  e  $k'$  especificam os momentos de cada partícula.

<sup>12</sup>Estaremos considerando as matrizes de Dirac na representação quiral.

e. Analisando somente este termo, teremos:

$$\hat{S}(\beta) = S(\beta) - \tilde{S}(\beta), \quad (2.66)$$

onde

$$S(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \mathcal{T} [\bar{\psi}(z_1) \gamma^\mu \psi(z_1) A_\mu(z_1) \bar{\psi}(z_2) \gamma^\nu \psi(z_2) A_\nu(z_2)] | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle_\beta \quad (2.67)$$

e

$$\tilde{S}(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \mathcal{T} [\tilde{\bar{\psi}}(z_1) \gamma^\mu \tilde{\psi}(z_1) \tilde{A}_\mu(z_1) \tilde{\bar{\psi}}(z_2) \gamma^\nu \tilde{\psi}(z_2) \tilde{A}_\nu(z_2)] | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle_\beta. \quad (2.68)$$

Temos definido

$$\int \mathbf{D} \equiv \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2. \quad (2.69)$$

Para lidar com o produto temporalmente ordenado dos campos, devemos fazer uso do teorema de Wick. No formalismo DCT, ele nos diz que<sup>13</sup>

$$\mathcal{T} [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n] = \mathbf{N}_\beta [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n + \text{Todas as contrações possíveis entre campos}], \quad (2.70)$$

onde  $\mathbf{N}_\beta$  indica que todos os operadores termais estão sob ordenamento normal, ou seja, todos os operadores de criação devem estar à esquerda dos de aniquilação. O produto temporalmente ordenado de dois campos escalares reais, por exemplo, é dado por

$$\mathcal{T} [\phi(x_1) \phi(x_2)] = \mathbf{N}_\beta [\phi(x_1) \phi(x_2)] + \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}. \quad (2.71)$$

Tomando o valor esperado no vácuo termal da quantidade acima, encontraremos que

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0(\beta) \rangle = \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}. \quad (2.72)$$

Esta quantidade é definida como o propagador escalar termal e será calculada explicitamente na próxima subseção. Observe que o valor esperado no vácuo do termo sob ordenamento normal se anula devido a Eq. (2.14). Para três e quatro campos, respectivamente, teremos que

$$\mathcal{T} \{\phi_1 \phi_2 \phi_3\} = \mathbf{N}_\beta \left[ \phi_1 \phi_2 \phi_3 + \overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3 + \overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2 + \overline{\phi_2 \phi_3} \phi_1 \right] \quad (2.73)$$

<sup>13</sup>O campo  $\phi_i$  pode ser de qualquer natureza: bosônico, fermiônico, ou mesmo campos no espaço til.

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} &= \mathbf{N}_\beta \left[ \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \right. \\
&+ \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \\
&\left. + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right]. \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Também, uma vez que os propagadores não são mais operadores e sim  $c$ -números<sup>14</sup>, eles podem ser colocados para fora do ordenamento normal termal, assim como fizemos em (2.71).

Aplicando o teorema de Wick nas equações (2.67) e (2.68), teremos que os únicos termos que contribuem não trivialmente para a matriz  $\hat{S}(\beta)$  são dados por

$$iT(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \mathbf{N}_\beta [\bar{\psi}(z_1) \gamma^\mu \psi(z_1) \bar{\psi}(z_2) \gamma^\nu \psi(z_2)] | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle_\beta \overbrace{A_\mu(z_1) A_\nu(z_2)} \tag{2.75}$$

e

$$i\tilde{T}(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \mathbf{N}_\beta [\tilde{\psi}(z_1) \gamma^{*\mu} \tilde{\psi}(z_1) \tilde{\psi}(z_2) \gamma^{*\nu} \tilde{\psi}(z_2)] | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle_\beta \overbrace{\tilde{A}_\mu(z_1) \tilde{A}_\nu(z_2)}. \tag{2.76}$$

Para calcular (2.75) e (2.76), precisamos entender como os campos sob ordenamento normal atuam nos estados de partículas termiais. Para isso, devemos escrever a Eq. (2.42) como

$$\psi(z) = \psi_\beta^+(z) + \psi_\beta^-(z), \tag{2.77}$$

onde

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ u_F(\mathbf{k}, \beta) a^s(\mathbf{k}, \beta) \mathbf{u}^s(k) e^{-ik \cdot x} + v_F(\mathbf{k}, \beta) \tilde{b}^s(\mathbf{k}, \beta) \mathbf{v}^s(k) e^{ik \cdot x} \right] \tag{2.78}$$

contém somente operadores de aniquilação e

$$\psi^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ u_F(\mathbf{k}, \beta) b^{s\dagger}(\mathbf{k}, \beta) \mathbf{v}^s(k) e^{ik \cdot x} + v_F(\mathbf{k}, \beta) \tilde{a}^{s\dagger}(\mathbf{k}, \beta) \mathbf{u}^s(k) e^{-ik \cdot x} \right] \tag{2.79}$$

somente operadores de criação. Temos usado as relações (2.32)-(2.35). Devido ao ordenamento normal, onde todos os operadores termiais de  $\psi^-$  devem estar à esquerda dos de  $\psi^+$ , concluímos que o primeiro só atua em estado final de antiférmion e o segundo em estado inicial de férmion,

<sup>14</sup>Funções reais ou complexas.

ou seja:

$$\beta \langle \mathbf{k}', r' | \psi^-(z) \rangle = u(\mathbf{k}', \beta) \mathbf{v}^{r'}(k') e^{ik' \cdot z} \langle 0(\beta) |; \quad (2.80)$$

$$\psi^+(z) | \mathbf{p}, s \rangle_\beta = u_F(\mathbf{p}, \beta) \mathbf{u}^s(p) e^{-ip \cdot z} | 0(\beta) \rangle. \quad (2.81)$$

Das equações (2.80) e (2.81), definimos as contrações entre campos e estados:

$$\overline{\psi(z) | \mathbf{p}, s \rangle}_\beta = u_F(\mathbf{p}, \beta) \mathbf{u}^s(p) e^{-ip \cdot z}; \quad (2.82)$$

$$\beta \overline{\langle \mathbf{k}', r' | \psi(z) \rangle} = u_F(\mathbf{k}', \beta) \mathbf{v}^{r'}(k') e^{ik' \cdot z}. \quad (2.83)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos mostrar que as únicas contrações possíveis entre campos e estados termais são dadas por

$$\overline{\psi(z) | \mathbf{p}, s \rangle}_\beta = u_F(\mathbf{p}, \beta) \mathbf{u}^s(p) e^{-ip \cdot z}; \quad (2.84)$$

$$\beta \overline{\langle \mathbf{k}', r' | \psi(z) \rangle} = u_F(\mathbf{k}', \beta) \mathbf{v}^{r'}(k') e^{ik' \cdot z}; \quad (2.85)$$

$$\overline{\bar{\psi}(z) | \mathbf{p}', s' \rangle}_\beta = u_F(\mathbf{p}', \beta) \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') e^{-ip' \cdot z}; \quad (2.86)$$

$$\beta \overline{\langle \mathbf{k}, r | \bar{\psi}(z) \rangle} = u_F(\mathbf{k}, \beta) \bar{\mathbf{v}}^r(k) e^{ik \cdot z}, \quad (2.87)$$

no espaço ordinário, e

$$\overline{\bar{\psi}(z) | \mathbf{p}', s' \rangle}_\beta = -v_F(\mathbf{p}', \beta) \bar{\mathbf{v}}^{*s'}(p') e^{-ip' \cdot z}; \quad (2.88)$$

$$\beta \overline{\langle \mathbf{k}, r | \bar{\psi}(z) \rangle} = -v_F(\mathbf{k}, \beta) \bar{\mathbf{u}}^{*r}(k) e^{ik \cdot z}; \quad (2.89)$$

$$\overline{\tilde{\psi}(z) | \mathbf{p}, s \rangle}_\beta = -v_F(\mathbf{p}, \beta) \tilde{\mathbf{u}}^{*s}(p) e^{-ip \cdot z}; \quad (2.90)$$

$$\beta \overline{\langle \mathbf{k}', r' | \tilde{\psi}(z) \rangle} = -v_F(\mathbf{k}', \beta) \tilde{\mathbf{v}}^{*r'}(k') e^{ik' \cdot z}, \quad (2.91)$$

no espaço til. Com isso, as expressões (2.75) e (2.76) passam a ser escritas como

$$iT(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \overline{\langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \bar{\psi}(z_1) \gamma^\mu \psi(z_1) \bar{\psi}(z_2) \gamma^\nu \psi(z_2) | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle}_\beta \overline{A_\mu(z_1) A_\nu(z_2)} \times (2!) \quad (2.92)$$

e

$$i\tilde{T}(\beta) = \int \mathbf{D}_\beta \langle \mathbf{k}, r; \mathbf{k}', r' | \overbrace{\tilde{\Psi}(z_1) \gamma^{*\mu} \tilde{\Psi}(z_1)} \overbrace{\tilde{\Psi}(z_2) \gamma^{*\nu} \tilde{\Psi}(z_2)} | \mathbf{p}, s; \mathbf{p}', s' \rangle_\beta \overbrace{\tilde{A}_\mu(z_1)} \overbrace{\tilde{A}_\nu(z_2)} \times (2!). \quad (2.93)$$

O fator de 2! extra em cada expressão é devido a possibilidade de troca de vértice em relação as contrações entre campos e estados.

Como veremos nas próximas subseções,

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{T} [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu} v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2) \right] e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (2.94)$$

enquanto que

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\tilde{A}_\mu(x) \tilde{A}_\nu(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu} v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2) \right] e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (2.95)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica no espaço de Minkowski cuja diagonal é  $(1, -1, -1, -1)$ . Ao substituir os propagadores e as contrações entre campos e estados nas expressões (2.92) e (2.93), encontramos que

$$i\hat{T}(\beta) = (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - p - p') i\hat{\mathcal{M}}(\beta) \quad (2.96)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}(\beta) &= \frac{e^2}{q^2} \mathbf{u}^r(k) \gamma^\mu \mathbf{v}^{r'}(k') \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \gamma_\mu \mathbf{u}^s(p) v_F(\mathbf{k}, \beta) v_F(\mathbf{k}', \beta) v_F(\mathbf{p}, \beta) v_F(\mathbf{p}', \beta) \\ &\times \left\{ \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})} + 1 \right] - 2\pi i q^2 v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Tomando o módulo quadrado desta expressão, encontraremos que

$$|\hat{\mathcal{M}}(\beta)|^2 = W(\beta) |\mathcal{M}_0|^2, \quad (2.98)$$

onde

$$\begin{aligned} W(\beta) &= v_F^2(\mathbf{k}, \beta) v_F^2(\mathbf{k}', \beta) v_F^2(\mathbf{p}, \beta) v_F^2(\mathbf{p}', \beta) \\ &\times \left\{ \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})} + 1 \right]^2 + 4\pi^2 q^4 v_B^4(\mathbf{q}, \beta) [\delta(q^2)]^2 \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.99)$$

é a função que concentra toda a dependência com a temperatura e

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left[ \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \gamma_\mu \mathbf{u}^s(p) \bar{\mathbf{u}}^s(p) \gamma_\nu \mathbf{v}^{s'}(p') \right] \left[ \bar{\mathbf{u}}^r(k) \gamma^\mu \mathbf{v}^{r'}(k') \bar{\mathbf{v}}^{r'}(k') \gamma^\nu \mathbf{u}^r(k) \right] \quad (2.100)$$

é o módulo quadrado da matriz de espalhamento  $\mathcal{M}_0$  da teoria à temperatura zero.

Como estamos levando em consideração partículas com spin, a seção de choque diferencial termal no referencial do centro de massa, onde

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, E\hat{z}); & p'^\mu &= (E, -E\hat{z}); \\ k^\mu &= (E, \mathbf{k}); & k'^\mu &= (E, -\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.101)$$

e

$$\mathbf{k} \cdot \hat{z} = |\mathbf{k}| \cos \theta, \quad (2.102)$$

passa a ser escrita como

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta, CM} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{cm}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2, \quad (2.103)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2 &= W_{CM}(\beta) \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{0,CM}|^2 \\ &= W_{CM}(\beta) \left\{ e^4 \left[ \left( 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.104)$$

e

$$W_{CM}(\beta) = \frac{(1 + e^{2\beta E})^2}{(1 + e^{\beta E})^4} \left\{ 1 + \left[ \frac{2\pi 4E^2 \delta(4E^2)}{1 + e^{2\beta E}} \right]^2 \right\}. \quad (2.105)$$

Temos considerado que a massa do elétron  $m_e$  é muito menor que a massa do múon  $m_\mu$ , de modo que podemos assumir  $m_e = 0$ . Também temos usado

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m; \quad (2.106)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m, \quad (2.107)$$

assim como

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}; \quad (2.108)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}); \quad (2.109)$$

$$Tr(\text{número ímpar de matrizes } \gamma) = 0 \quad (2.110)$$

e as relações (2.11), (2.12), (2.30) e (2.31). Trabalhando um pouco mais (2.103), concluímos que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta,CM} = W_{CM}(\beta) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0,CM} \quad (2.111)$$

onde

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0,CM} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.112)$$

é a seção de choque diferencial em temperatura zero e  $\alpha = e^2/4\pi$  é a constante de estrutura fina. Realizando a integração sobre o ângulo sólido  $d\Omega$ , encontramos a seção de choque termal total:

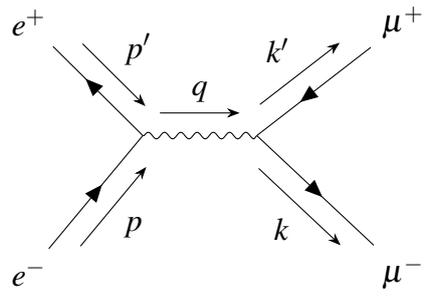
$$\sigma(\beta) = W_{CM}(\beta) \sigma_0, \quad (2.113)$$

onde

$$\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \quad (2.114)$$

é o resultado que se espera da teoria em temperatura zero.

Como vimos, a matriz  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  é a quantidade fundamental que devemos encontrar para o cálculo da seção de choque no formalismo DCT. Teoricamente, o procedimento descrito anteriormente poderia ser seguido para qualquer tipo de interação. No entanto, uma forma bem mais direta de calcular  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  ocorre através dos diagramas de Feynman. Para o espalhamento que acabamos de descrever, por exemplo, existe um único diagrama,



$$(2.115)$$

a nível de árvore, associado tanto a  $i\mathcal{M}(\beta)$  como a  $i\tilde{\mathcal{M}}(\beta)$ . Neste diagrama, cada uma das

linhas externas estão rotuladas pelas partículas envolvidas no espalhamento e estão orientadas ou da direita para esquerda, no caso de antipartículas, ou da esquerda para a direita, no caso de partículas. A linha interna representa o propagador, os pontos pretos os vértices e as setas de momento sobre cada linha, seja interna ou externa, nos informa sobre o fluxo de momento e devem sempre apontar da esquerda para a direita<sup>15</sup>. O fato é que cada perna externa está associada as possíveis contrações entre campos e estados termais (2.84)-(2.91) e a linha interna aos propagadores (2.94) e (2.95). Na prática, o que fazemos é desenhar todos os diagramas possíveis para um espalhamento específico e, então, aplicamos as regras de Feynman para escrever a matriz de espalhamento  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$ . Para o diagrama (2.115), por exemplo:

$$i\hat{\mathcal{M}}(\beta) = i\mathcal{M}(\beta) - i\tilde{\mathcal{M}}(\beta), \quad (2.116)$$

onde

$$i\mathcal{M}(\beta) = (L_1)(V_1)(L_2)(\text{Propagador})(L_3)(V_2)(L_4) \quad (2.117)$$

e

$$i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) = (\tilde{L}_1)(\tilde{V}_1)(\tilde{L}_2)(\text{Propagador Til})(\tilde{L}_3)(\tilde{V}_2)(\tilde{L}_4), \quad (2.118)$$

com  $L_i$  representando as linhas externas e  $V_i$  os possíveis vértices<sup>16</sup>. Como falado anteriormente, as linhas externas são encontradas através das contrações entre campos e estados termais. Para linhas de férmions iniciais, por exemplo, devemos escrever

$$u_F(\mathbf{p}, \beta) \mathbf{u}^s(p) \quad (2.119)$$

para o caso de  $i\mathcal{M}(\beta)$  e

$$-v_F(\mathbf{p}, \beta) \bar{\mathbf{u}}^{*s}(p) \quad (2.120)$$

para o caso de  $i\tilde{\mathcal{M}}(\beta)$ . Basicamente, o que fizemos foi escrever as contrações (2.84) e (2.90) no espaço dos momentos, ou seja, sem a exponencial. Todas as outras linhas externas podem ser encontradas semelhantemente.

As próximas cinco subseções deste capítulo serão destinadas a uma discussão mais detalhada sobre propagadores e vértices de interação na DCT. Consideraremos tanto a QED usual como a QED escalar e, embora tenhamos utilizado somente o formalismo canônico de operadores de campos até o momento, seguiremos daqui em diante com o método do funcional gerador que, como veremos, permitirá escrever as regras de Feynman para qualquer teoria diretamente da Lagrangiana. Por fim, finalizaremos o capítulo com uma breve discussão sobre o formalismo de Matsubara.

<sup>15</sup>Isto define o fluxo de partículas e o fluxo de momento e será bastante relevante quando encontrarmos as regras de Feynman para a QED escalar.

<sup>16</sup>Na QED usual  $V_1 = V_2$ . No entanto, em teorias com violação de Lorentz, outros tipos de vértices podem surgir.

### 2.1.6 O propagador termal do campo escalar real no formalismo DCT

Devido a estrutura dobrada dos graus de liberdade no formalismo DCT, o funcional gerador para o campo escalar real livre deve ser escrito como

$$Z_0[J, \tilde{J}] = \mathbf{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}}, \quad (2.121)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi + \frac{1}{2} i\varepsilon \phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + \frac{1}{2} m^2 \tilde{\phi}^2 - \tilde{J}\tilde{\phi} + \frac{1}{2} i\varepsilon \tilde{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.122)$$

com  $\mathbf{N}$  sendo a constante de normalização,  $J(x)$  e  $\tilde{J}(x)$  os termos de fontes nos espaços ordinário e til, respectivamente, e  $\frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2$  e  $\frac{1}{2}i\varepsilon\tilde{\phi}^2$  sendo as prescrições de Feynman. Realizando integrações por partes, é possível escrever o funcional gerador (2.121) como

$$Z_0[J, \tilde{J}] = \mathbf{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \phi [\square + m^2 - i\varepsilon] \phi - iJ\phi + \frac{1}{2} \tilde{\phi} [-\square - m^2 - i\varepsilon] \tilde{\phi} + i\tilde{J}\tilde{\phi} \right\}}. \quad (2.123)$$

Esta integral pode ser resolvida fazendo uso da identidade

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi(x) A \phi(x) + b(x) \phi(x) + c(x) \right]} = N_\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y [b(x) A^{-1} b(y) - c(x)]}, \quad (2.124)$$

onde  $N_\phi$  é uma constante que pode ser absorvida na constante de normalização do funcional gerador,  $b(x)$  e  $c(x)$  são funções quaisquer, e  $A$  um operador cuja inversa é dada por  $A^{-1}$ . Para a integral funcional em  $\phi$  por exemplo, devemos assumir que  $A = i(\square + m^2 - i\varepsilon)$ ,  $b = -iJ(x)$  e  $c(x) = 0$  de modo que

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \phi [i(\square + m^2 - i\varepsilon)] \phi - iJ\phi \right\}} = N_\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) (\square + m^2 - i\varepsilon)^{-1} J(y)}. \quad (2.125)$$

Agora, se  $\Delta_F(x-y)$  for a função de Green para o operador  $(\square + m^2 - i\varepsilon)$ , teremos que

$$(\square + m^2 - i\varepsilon) \Delta_F(x-y) = -\delta(x-y), \quad (2.126)$$

onde

$$\Delta_F(x-y) = -(\square + m^2 - i\varepsilon)^{-1}. \quad (2.127)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a integral funcional em  $\tilde{\phi}$ , podemos concluir que

$$[(-1)(\square + m^2 + i\varepsilon)] \tilde{\Delta}_F(x-y) = -\delta(x-y), \quad (2.128)$$

onde

$$\tilde{\Delta}_F(x-y) = (\square + m^2 + i\varepsilon)^{-1} \quad (2.129)$$

é a função de Green no espaço til. Das relações (2.127) e (2.129), vemos que

$$\tilde{\Delta}_F(x-y) = -\Delta_F^*(x-y). \quad (2.130)$$

O funcional gerador (2.123) pode, então, ser escrito como

$$Z_0[J, \tilde{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y [J(x)\Delta_F(x-y)J(y) + \tilde{J}(x)\tilde{\Delta}_F(x-y)\tilde{J}(y)]}, \quad (2.131)$$

onde temos usado a condição de normalização  $Z_0[0,0] = 1$ .

Como no caso da teoria em temperatura zero, pode ser mostrado que as funções de  $n$ -pontos para campos no espaço ordinário e til são dadas, respectivamente, por

$$\tau_\phi(x_1, \dots, x_n) = \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0, \tilde{0} \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J, \tilde{J}]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=\tilde{J}=0} \quad (2.132)$$

e

$$\tilde{\tau}_\phi(x_1, \dots, x_n) = \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\tilde{\phi}(x_1) \cdots \tilde{\phi}(x_n)] | 0, \tilde{0} \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J, \tilde{J}]}{\delta \tilde{J}(x_1) \cdots \delta \tilde{J}(x_n)} \Bigg|_{J=\tilde{J}=0}. \quad (2.133)$$

Portanto, os propagadores do campo escalar, no espaço ordinário e til, respectivamente, são dados por

$$\tau_\phi(x, y) = \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | 0, \tilde{0} \rangle = i\Delta_F(x-y) \quad (2.134)$$

e

$$\tilde{\tau}_\phi(x, y) = \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0, \tilde{0} \rangle = i\tilde{\Delta}_F(x-y). \quad (2.135)$$

Além disso, substituindo (2.130) em (2.135), encontramos que

$$\tilde{\tau}_\phi(x, y) = \tau_\phi^*(x, y). \quad (2.136)$$

O que precisamos fazer agora é encontrar  $\Delta_F(x-y)$ . Vimos anteriormente, equação (2.127), que

$$\Delta_F(x-y) = (-\square - m^2 + i\varepsilon)^{-1}. \quad (2.137)$$

Isto nos sugere que os propagadores podem ser encontrados diretamente da Lagrangiana para o

campo escalar livre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi(-\square - m^2 + i\varepsilon)\phi + \frac{1}{2}\tilde{\phi}(\square + m^2 + i\varepsilon)\tilde{\phi}, \quad (2.138)$$

simplesmente calculando a inversa dos operadores  $(-\square - m^2 + i\varepsilon)$  e  $(\square + m^2 + i\varepsilon)$ . A Lagrangiana em (2.138) difere daquela em (2.122) por uma quadridivergência e, portanto, são equivalentes uma a outra, ambas conduzem aos mesmos resultados físicos. Veja que (2.138) está contida no funcional gerador (2.123). Para o espaço ordinário, então, devemos resolver

$$(-\square - m^2 + i\varepsilon)\Delta_F(x-y) = \delta(x-y). \quad (2.139)$$

Através das transformadas de Fourier, podemos escrever a expressão acima como

$$(-\square - m^2 + i\varepsilon) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_F(k) e^{-ik \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (2.140)$$

onde  $\Delta_F(k)$  é a função de Green no espaço dos momentos. Desta forma,

$$(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\Delta_F(k) = 1 \quad (2.141)$$

e, portanto,

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.142)$$

Das equações (2.134) e (2.136), encontramos os propagadores para o campo escalar no espaço duplicado,

$$\tau_\phi(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (2.143)$$

e

$$\tilde{\tau}_\phi(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (2.144)$$

onde, nesta última, temos trocado  $k$  por  $-k$ .

Até agora não incluímos temperatura no sistema, pelo menos não de forma explícita. Entretanto, devemos lembrar que as quantidades que realmente estamos interessados em calcular são os propagadores termais definidos em (2.72). Existe uma forma bastante elegante de calcular propagadores termais usando a notação dubleto (2.27). Vamos primeiro definir a matriz propagadora dependente da temperatura cujos elementos são dados por

$$\tau_{ab}^\phi(x,y,\beta) = \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\Phi_a(x)\Phi_b(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (2.145)$$

onde  $a$  e  $b$  são índices matriciais que variam entre 1 e 2. Veja por exemplo que

$$\tau_{11}^\phi(x, y, \beta) = \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle = \tau_\phi(x, y, \beta) \quad (2.146)$$

e

$$\tilde{\tau}_{22}^\phi(x, y, \beta) = \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0(\beta) \rangle = \tilde{\tau}_\phi(x, y, \beta). \quad (2.147)$$

Fazendo uso das equações (2.13), (2.27) e (2.28), podemos escrever (2.145) como

$$\tau_{ab}^\phi(x, y, \beta) = \mathbf{C}_{ac}^{B(-1)}(\beta) \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\phi_c(x)\phi_d(y)] | 0, \tilde{0} \rangle \mathbf{C}_{db}^{B(-1)T}(\beta). \quad (2.148)$$

Deste modo, trabalhando no espaço dos momentos, devemos simplesmente calcular o produto matricial

$$\begin{aligned} \left[ \tau_{ab}^\phi(k, \beta) \right] &= \begin{bmatrix} u(\mathbf{k}, \beta) & v(\mathbf{k}, \beta) \\ v(\mathbf{k}, \beta) & u(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\mathbf{k}, \beta) & v(\mathbf{k}, \beta) \\ v(\mathbf{k}, \beta) & u(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) & 2\pi u_B(\mathbf{k}, \beta) v_B(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) \\ 2\pi u_B(\mathbf{k}, \beta) v_B(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

onde temos usado

$$2\pi i \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x) = \left( -\frac{1}{x + i\epsilon} \right)^{n+1} - \left( -\frac{1}{x - i\epsilon} \right)^{n+1}. \quad (2.150)$$

Os dois resultados fundamentais, necessários ao cálculo da matriz<sup>17</sup>  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$ , são os elementos

$$\tau_{11}^\phi(k, \beta) = \tau_\phi(k, \beta) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) \quad (2.151)$$

e

$$\tau_{22}^\phi(k, \beta) = \tilde{\tau}_\phi(k, \beta) = \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.152)$$

ou seja, justamente os propagadores termiais escritos no espaço dos momentos.

<sup>17</sup>Se estivéssemos trabalhando com a teoria de Yukawa, onde a interação entre férmions e bósons é permitida, estes seriam exatamente os propagadores termiais necessários ao cálculo de  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$ .

### 2.1.7 O propagador termal do campo de Dirac no formalismo DCT

O funcional gerador para o campo de Dirac livre no formalismo DCT é dado por

$$\begin{aligned}
Z_0[\eta, \tilde{\eta}, \bar{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}] &= \mathbf{N} \int \mathcal{D}\tilde{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \mathcal{D}\bar{\psi} \\
&\times e^{i \int d^4x [\tilde{\bar{\psi}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \tilde{\bar{\psi}}\eta + i\varepsilon \tilde{\bar{\psi}}\psi - \tilde{\bar{\psi}}(-i\gamma^{*\mu} \partial_\mu - m)\tilde{\psi} - \tilde{\eta}\tilde{\psi} - \tilde{\bar{\psi}}\tilde{\eta} + i\varepsilon \tilde{\bar{\psi}}\tilde{\psi}]} \\
&= Z_0[\eta, \bar{\eta}] \tilde{Z}_0[\tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}], \tag{2.153}
\end{aligned}$$

onde

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \mathbf{N}_1 \int \mathcal{D}\tilde{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x [\tilde{\bar{\psi}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \tilde{\bar{\psi}}\eta]} \tag{2.154}$$

e

$$\tilde{Z}_0[\tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}] = \mathbf{N}_2 \int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \mathcal{D}\tilde{\psi} e^{i \int d^4x [\tilde{\bar{\psi}}(i\gamma^{*\mu} \partial_\mu + m + i\varepsilon)\tilde{\psi} - \tilde{\eta}\tilde{\psi} - \tilde{\bar{\psi}}\tilde{\eta}]}, \tag{2.155}$$

com  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2$ . Aqui,  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são constantes de normalização,  $\bar{\eta}(x)$  [ $\tilde{\bar{\eta}}(x)$ ] é o termo de fonte para  $\psi(x)$  [ $\tilde{\psi}(x)$ ],  $\eta(x)$  [ $\tilde{\eta}(x)$ ] é o termo de fonte para  $\tilde{\psi}(x)$  [ $\tilde{\bar{\psi}}(x)$ ],  $i\varepsilon \tilde{\bar{\psi}}\psi$  e  $i\varepsilon \tilde{\bar{\psi}}\tilde{\psi}$  são as prescrições de Feynman.

Vamos começar trabalhando com  $\tilde{Z}_0[\tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}]$ . Definindo o operador

$$\tilde{S}^{-1} = (i\gamma^{*\mu} \partial_\mu + m + i\varepsilon) \tag{2.156}$$

e a quantidade

$$\tilde{Q}(\tilde{\bar{\psi}}, \tilde{\psi}) = \tilde{\bar{\psi}} \tilde{S}^{-1} \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \tilde{\psi} - \tilde{\bar{\psi}} \tilde{\eta}, \tag{2.157}$$

devemos procurar por valores que minimizam (2.157). Seja,

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m(\tilde{\bar{\psi}}_m, \tilde{\psi}_m) &= \tilde{\bar{\psi}}_m \tilde{S}^{-1} \tilde{\psi}_m - \tilde{\eta} \tilde{\psi}_m - \tilde{\bar{\psi}}_m \tilde{\eta} \\
&= -\tilde{\eta} \tilde{S} \tilde{\eta} \\
&= -\tilde{\bar{\psi}}_m \tilde{S}^{-1} \tilde{\psi}_m, \tag{2.158}
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\bar{\psi}}_m = \tilde{\eta} \tilde{S} \tag{2.159}$$

e

$$\tilde{\psi}_m = \tilde{S} \tilde{\eta} \tag{2.160}$$

foram encontrados assumindo as condições para a existência de um mínimo

$$\left. \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_m} = 0 \quad (2.161)$$

e

$$\left. \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_m} = 0. \quad (2.162)$$

Invertendo (2.159) e (2.160), e substituindo o resultado na Eq. (2.157), podemos mostrar que

$$\tilde{Q}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) = \tilde{Q}_m + (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m) \tilde{S}^{-1} (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m) \quad (2.163)$$

e escrever o funcional gerador til, Eq. (2.155), como

$$\tilde{Z}_0[\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] = e^{i \int d^4x d^4y \tilde{\eta}(x) \tilde{S}(x-y) \tilde{\eta}(y)}. \quad (2.164)$$

Para isto, devemos usar a identidade

$$\int \mathcal{D}\tilde{\psi} \mathcal{D}\tilde{\psi} e^{-\int d^4x (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m) (-i\tilde{S}^{-1}) (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m)} = \det[-i\tilde{S}^{-1}] \quad (2.165)$$

e a condição de normalização  $\tilde{Z}_0[0, 0] = 1$  de modo que

$$\mathbf{N}_2 = \frac{1}{\det[-i\tilde{S}^{-1}]}. \quad (2.166)$$

Com um raciocínio semelhante para  $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ , podemos escrever o funcional gerador total (2.153) como

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, \bar{\eta}, \eta] = e^{-i \int d^4x d^4y [\bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) + \bar{\eta}(x) \tilde{S}(x-y) \eta(y)]}, \quad (2.167)$$

onde

$$S(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\varepsilon)^{-1} \quad (2.168)$$

e

$$\tilde{S}(x-y) = (-1)(-i\gamma^{*\mu} \partial_\mu - m - i\varepsilon)^{-1}. \quad (2.169)$$

Assim como no caso do campo escalar, temos então que

$$\tilde{S}(x-y) = -S^*(x-y). \quad (2.170)$$

Agora, os propagadores nos espaços ordinário e til, respectivamente, podem ser

encontrados derivando funcionalmente o gerador (2.167), ou seja:

$$\begin{aligned}\tau_{\psi}(x,y) &= \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\psi(x) \tilde{\psi}(y)] | 0, \tilde{0} \rangle = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \eta(x) \delta \tilde{\eta}(y)} \Bigg|_{\eta=\tilde{\eta}=0}^{\eta=\tilde{\eta}=0} \\ &= iS(x-y)\end{aligned}\quad (2.171)$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\psi}(x,y) &= \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\tilde{\psi}(x) \psi(y)] | 0, \tilde{0} \rangle = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \tilde{\eta}(x) \delta \eta(y)} \Bigg|_{\eta=\tilde{\eta}=0}^{\eta=\tilde{\eta}=0} \\ &= i\tilde{S}(x-y),\end{aligned}\quad (2.172)$$

donde concluímos que

$$\tilde{\tau}_{\psi}(x,y) = \tau_{\psi}^*(x,y). \quad (2.173)$$

Nossa tarefa agora é determinar  $S$  e  $\tilde{S}$ , que são justamente as inversas dos operadores encontrados entre os dois campos na Lagrangiana de Dirac livre na ausência de fontes<sup>18</sup>,

$$\hat{\mathcal{L}} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m + i\varepsilon)\psi + \tilde{\bar{\psi}} [(-1)(-i\gamma^{*\mu} \partial_{\mu} - m - i\varepsilon)] \tilde{\psi}. \quad (2.174)$$

De modo geral, para determinarmos os propagadores de uma teoria, devemos escrever a parte sem interação da Lagrangiana no formato

$$(\text{Campo}) (\text{Operador}) (\text{Campo}) \quad (2.175)$$

e inverter o operador segundo a equação

$$(\text{Operador})(\text{Propagador}(x-y)) = i\mathbf{1}\delta(x-y), \quad (2.176)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade. Da Lagrangiana (2.174), então, temos que

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m + i\varepsilon)_{ac} \tau_{cb}^{\psi}(x,y) = i\delta_{ab} \delta(x-y), \quad (2.177)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são índices matriciais. Fazendo uso das transformadas de Fourier, encontramos que

$$(\gamma^{\mu} k_{\mu} - m + i\varepsilon)_{ac} \tau_{cb}^{\psi}(k) = i\delta_{ab}, \quad (2.178)$$

onde  $\tau_{\psi}(k)$  é o propagador no espaço dos momentos. Agora, multiplicando os dois lados da

---

<sup>18</sup>Esta Lagrangiana pode ser lida diretamente da exponencial em (2.153). Note também que temos acrescentado as prescrições de Feynman.

equação acima por  $(\gamma^\mu k_\mu - m + i\epsilon)_{da}^{-1}$ , nos encontramos

$$\tau_{db}^\Psi(k) = i(\gamma^\mu k_\mu - m + i\epsilon)_{db}^{-1}, \quad (2.179)$$

de modo que

$$\tau_\Psi(k) = \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - m + i\epsilon}. \quad (2.180)$$

No espaço das posições,

$$\tau_\Psi(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (2.181)$$

e

$$\tilde{\tau}_\Psi(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i(\gamma^{*\mu} k_\mu + m)}{k^2 - m^2 - i\epsilon} e^{+ik \cdot (x-y)}, \quad (2.182)$$

esta última, encontrada através da relação (2.173).

O propagador termal do campo de Dirac, por sua vez, pode ser encontrado facilmente fazendo uso da notação dubleto em (2.45)-(2.49). Iniciamos definindo a matriz propagadora termal, cujos elementos, em notação indicial, são dados por

$$\begin{aligned} \tau_{ab}^\Psi(x, y, \beta) &= \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y)] | 0(\beta) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{ac}^{F(-1)}(\beta) \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [\Psi_c(x) \bar{\Psi}_d(y)] | 0, \tilde{0} \rangle \mathbf{C}_{db}^F(\beta). \end{aligned} \quad (2.183)$$

deste modo, o que devemos fazer é calcular o produto matricial<sup>19</sup>

$$[\tau_{ab}^\Psi(k, \beta)] = \begin{bmatrix} u_F(\mathbf{k}, \beta) & v_F(\mathbf{k}, \beta) \\ -v_F(\mathbf{k}, \beta) & u_F(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_F(\mathbf{k}, \beta) & -v_F(\mathbf{k}, \beta) \\ v_F(\mathbf{k}, \beta) & u_F(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix}. \quad (2.184)$$

Na verdade, estamos interessados somente no elemento da primeira linha e primeira coluna desta matriz, ou seja,

$$\tau_{11}^\Psi(k, \beta) = \tau_\Psi(k, \beta) = \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi v_F^2(\mathbf{k}, \beta) (\gamma^\mu k_\mu + m) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.185)$$

onde temos usado mais uma vez a propriedade (2.150). Como  $\tilde{\tau}_\Psi(x, y, \beta) = \tau_\Psi^*(x, y, \beta)$ , temos que

$$\tilde{\tau}_\Psi(k, \beta) = \frac{-i(-\gamma^{*\mu} k_\mu + m)}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi v_F^2(\mathbf{k}, \beta) (-\gamma^{*\mu} k_\mu + m) \delta(k^2 - m^2). \quad (2.186)$$

<sup>19</sup>Veja que já estamos trabalhando no espaço dos momentos.

O sinal menos extra, em cada  $k_\mu$ , se deve ao fato de estarmos trabalhando no espaço dos momentos<sup>20</sup>.

### 2.1.8 O propagador termal do fóton no formalismo DCT

No formalismo DCT, a Lagrangiana livre para o campo de fótons pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu \tilde{A}^\mu \partial_\nu \tilde{A}^\nu, \quad (2.187)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.188)$$

com

$$-\frac{1}{2\alpha}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \quad (2.189)$$

e

$$\frac{1}{2\alpha}\partial_\mu \tilde{A}^\mu \partial_\nu \tilde{A}^\nu \quad (2.190)$$

sendo os fixadores de *gauge* no espaço ordinário e til, respectivamente, e  $A^\mu$  o campo de fótons<sup>21</sup>. Através da equação (2.188), podemos escrever

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu), \quad (2.191)$$

com uma expressão semelhante no espaço dos til. Agora, tendo como base funcional gerador, é possível reescrever (2.187) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu \left[ \eta_{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu + \frac{1}{2}\tilde{A}^\mu (-1) \left[ \eta_{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{A}^\nu. \quad (2.192)$$

Como vimos, os propagadores são determinados pelo o inverso dos operadores que aparecem como na Eq. (2.175). Assim, no espaço ordinário, por exemplo, devemos resolver

$$\left[ \eta_{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \tau_A^{\nu\rho}(x, y) = i\delta_\mu^\rho \delta(x - y), \quad (2.193)$$

<sup>20</sup>No espaço das posições, trocamos  $k$  por  $-k$  afim de ficar com uma exponencial com expoente negativo, convencional nas transformadas de Fourier.

<sup>21</sup> $A^\mu$  é o quadripotencial do campo eletromagnético.

onde  $\tau_A^{\nu\rho}(x,y)$  é o propagador do fóton no espaço das posições. No espaço dos momentos<sup>22</sup>,

$$\left[ -\eta_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu \right] \tau_A^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho. \quad (2.194)$$

Diferentemente dos outros casos, onde tínhamos somente um escalar de Lorentz, a quantidade entre colchetes é um tensor, e não pode ser invertida de qualquer forma. De fato, para a equação (2.194) ser satisfeita,  $\tau_A^{\nu\rho}(k)$  deve ser da forma

$$\tau_A^{\nu\rho}(k) = A\eta^{\nu\rho} + Bk^\nu k^\rho, \quad (2.195)$$

onde  $A$  e  $B$  são quantidades a serem determinadas. Substituindo (2.195) em (2.194), encontramos que

$$\tau_A^{\mu\nu}(k) = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - (\alpha - 1)\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2}, \quad (2.196)$$

onde temos acrescentado a prescrição de Feynman. No *gauge* de Lorentz,  $\alpha = 1$ , e portanto

$$\tau_A^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.197)$$

No espaço das posições, então:

$$\tau_{\mu\nu}^A(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)} \quad (2.198)$$

e

$$\tilde{\tau}_{\mu\nu}^A(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)}, \quad (2.199)$$

esta última sendo encontrada semelhantemente a anterior. Veja que, mais uma vez,

$$\tilde{\tau}_A^{\mu\nu}(x,y) = \tau_A^{*\mu\nu}(x,y). \quad (2.200)$$

Agora, para determinarmos o propagador termal do fóton, devemos mais uma vez recorrer à notação dubleto. Através da equação (2.53), podemos definir a matriz propagadora

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu_A}^{ab}(x,y,\beta) &= \langle 0(\beta) | \mathcal{T} \left[ \mathcal{A}_\mu^a(x) \mathcal{A}_\nu^b(y) \right] | 0(\beta) \rangle \\ &= \mathbf{C}_B^{-1ac}(\beta) \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} \left[ \mathcal{A}_\mu^c(x) \mathcal{A}_\nu^d(y) \right] | 0, \tilde{0} \rangle \mathbf{C}_B^{(-1)Tdb}(\beta) \end{aligned} \quad (2.201)$$

---

<sup>22</sup>Usamos as transformadas de Fourier.

de modo que, no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}\tau_{\mu\nu_A}^{ab}(k, \beta) &= \begin{bmatrix} u(\mathbf{k}, \beta) & v(\mathbf{k}, \beta) \\ v(\mathbf{k}, \beta) & u(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{+i\eta_{\mu\nu}}{k^2-i\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\mathbf{k}, \beta) & v(\mathbf{k}, \beta) \\ v(\mathbf{k}, \beta) & u(\mathbf{k}, \beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_B^2(\mathbf{k}, \beta)\delta(k^2) & -2\pi\eta_{\mu\nu}u_B(\mathbf{k}, \beta)v_B(\mathbf{k}, \beta)\delta(k^2) \\ -2\pi u_B(\mathbf{k}, \beta)v_B(\mathbf{k}, \beta)\delta(k^2) & \frac{+i\eta_{\mu\nu}}{k^2-i\epsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_B^2(\mathbf{k}, \beta)\delta(k^2) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.202}$$

Observe que os propagadores da QED usual, equações (2.94) e (2.95), no espaço dos momentos, são justamente os elementos  $\tau_{\mu\nu_A}^{11}(k, \beta)$  e  $\tau_{\mu\nu_A}^{22}(k, \beta)$ , respectivamente.

### 2.1.9 A QED no formalismo DCT

Em temperatura zero, a Lagrangiana que descreve a interação entre férmions e fótons é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi\tag{2.203}$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\tag{2.204}$$

é a derivada covariante de *gauge* e  $e$  a constante de acoplamento. Em princípio, toda Lagrangiana pode ser dividida em sua parte livre e de interação,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}.\tag{2.205}$$

Para o caso da QED usual, por exemplo,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi\tag{2.206}$$

e

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(-e\gamma^\mu)\psi A_\mu.\tag{2.207}$$

Como vimos, no formalismo DCT, a inclusão de temperatura ocorre através da duplicação dos graus de liberdade do sistema de modo que a Eq. (2.203) deve ser substituída por

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_{int},\tag{2.208}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_0 &= \mathcal{L}_0 - \tilde{\mathcal{L}}_0 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \tilde{\bar{\psi}}(-i\gamma^{*\mu}\partial_\mu - m)\tilde{\psi}\end{aligned}\quad (2.209)$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{int} &= \mathcal{L}_{int} - \tilde{\mathcal{L}}_{int} \\ &= \bar{\psi}(-e\gamma^\mu)\psi A_\mu + \tilde{\bar{\psi}}(e\gamma^{*\mu})\tilde{\psi}\tilde{A}_\mu.\end{aligned}\quad (2.210)$$

Os propagadores podem ser calculados diretamente da Lagrangiana livre (2.208) e serem “termalizados” segundo transformações de Bogoliubov. De fato, já realizamos esta tarefa nas seções anteriores, veja Eqs. (2.185), (2.186) e (2.202). Um ponto fundamental a ser notado é que todo o procedimento de derivação das regras de Feynman na DCT é bastante semelhante aquele realizado em temperatura zero, tanto no formalismo canônico, como no de integrais de caminhos por meio do funcional gerador. Neste sentido, os vértices da teoria são justamente os coeficientes da Lagrangiana de interação, multiplicados pelo imaginário  $i$ , quando os campos são escritos no espaço dos momentos. Assim, escrevendo (2.210) no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{int} &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} e^{-i(k_1+k_2+k_3)\cdot x} \bar{\psi}(-k_2)(-e\gamma^\mu)\psi(k_1)A_\mu(k_3) \\ &+ \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} e^{-i(k_1+k_2+k_3)\cdot x} \tilde{\bar{\psi}}(k_2)(e\gamma^{*\mu})\tilde{\psi}(-k_1)\tilde{A}_\mu(-k_3),\end{aligned}\quad (2.211)$$

concluimos que os vértices da QED usual, no espaço dos momentos, são dados por

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \mu \\ \searrow \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} = \begin{cases} -ie\gamma^\mu = V \\ +ie\gamma^{*\mu} = \tilde{V} \end{cases}, \quad (2.212)$$

onde  $V$  é devido aos campos no espaço ordinário e  $\tilde{V}$  é devido aos campos no espaço til. Observe que  $\tilde{V} = V^*$ .

Tendo calculado os vértices e os propagadores, as linhas externas podem ser determinadas através das contrações entre campos e estados de partículas termais, assim como fizemos nas Eqs. (2.84)-(2.91). Em resumo, a matriz

$$i.\hat{\mathcal{M}}(\beta) = i.\mathcal{M}(\beta) - i.\tilde{\mathcal{M}}(\beta), \quad (2.213)$$

na QED, é determinada segundo as regras:

## 1. Propagadores:

$$\mu \text{ --- } q \text{ --- } \nu = \begin{cases} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} - 2\pi \eta_{\mu\nu} v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ \frac{i\eta_{\mu\nu}}{q^2} - 2\pi \eta_{\mu\nu} v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.214)$$

$$\text{--- } k \text{ ---} = \begin{cases} \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi v_F^2(\mathbf{k}, \beta) (\gamma^\mu k_\mu + m) \delta(k^2 - m^2) \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ \frac{-i(-\gamma^{*\mu} k_\mu + m)}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi v_F^2(\mathbf{k}, \beta) (-\gamma^{*\mu} k_\mu + m) \delta(k^2 - m^2) \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.215)$$

## 2. Vértices:

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \mu \\ \diagup \end{array} \text{ ---} = \begin{cases} -ie\gamma^\mu \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ ie\gamma^{*\mu} \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} ; \quad (2.216)$$

## 3. Linhas externas:

$$\text{--- } p \text{ ---} \bullet = \begin{cases} +u_F(\mathbf{p}, \beta) \mathbf{u}^s(p) \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ -v_F(\mathbf{p}, \beta) \bar{\mathbf{u}}^{*s}(p) \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.217)$$

$$\bullet \text{ --- } p' \text{ ---} = \begin{cases} +u_F(\mathbf{p}', \beta) \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ -v_F(\mathbf{p}', \beta) \mathbf{v}^{*s'}(p') \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.218)$$

$$\bullet \text{ --- } k \text{ ---} = \begin{cases} +u_F(\mathbf{k}, \beta) \bar{\mathbf{v}}^r(k) \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ -v_F(\mathbf{k}, \beta) \mathbf{u}^{*r}(k) \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.219)$$

$$\bullet \text{ --- } k' \text{ ---} = \begin{cases} +u_F(\mathbf{k}', \beta) \mathbf{v}^{r'}(k') \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ -v_F(\mathbf{k}', \beta) \bar{\mathbf{v}}^{*r'}(k') \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.220)$$

$$\text{--- } q \text{ ---} \bullet = \begin{cases} +u_B(\mathbf{q}, \beta) \boldsymbol{\epsilon}_\mu^m(q) \text{ para } i\mathcal{M}(\beta) \\ +v_B(\mathbf{q}, \beta) \boldsymbol{\epsilon}_\mu^m(q) \text{ para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.221)$$

$$\bullet \xrightarrow{q} \text{~~~~~} = \begin{cases} +u_B(\mathbf{q}, \beta) \epsilon_\mu^{*m}(q) & \text{para } i.\mathcal{M}(\beta) \\ +v_B(\mathbf{q}, \beta) \epsilon_\mu^{*m}(q) & \text{para } i.\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases} \quad (2.222)$$

### 2.1.10 A QED escalar no formalismo DCT

A QED escalar é uma teoria que descreve a interação entre o campo escalar e campo eletromagnético e tem como Lagrangiana, em temperatura zero, a função

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (2.223)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.224)$$

é a derivada covariante usual e

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right] \quad (2.225)$$

é o campo escalar complexo que leva em consideração partículas e antipartículas escalares carregadas. Aqui,

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} + b(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} \right]. \quad (2.226)$$

A Lagrangiana (2.223) pode ainda ser separada em três setores,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.227)$$

onde

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.228)$$

é o setor de *gauge* puro,

$$\mathcal{L}_S = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (2.229)$$

o setor escalar e

$$\mathcal{L}_{int} = ieA_\mu (\partial^\mu \phi^\dagger \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \quad (2.230)$$

o setor de interação.

Já no formalismo DCT, devemos trabalhar com a Lagrangiana duplicada

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_G + \hat{\mathcal{L}}_S + \hat{\mathcal{L}}_{int}, \quad (2.231)$$

onde

$$\hat{\mathcal{L}}_G = \mathcal{L}_G - \tilde{\mathcal{L}}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2.232)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_S = \mathcal{L}_S - \tilde{\mathcal{L}}_S = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \partial_\mu\tilde{\phi}^\dagger\partial^\mu\tilde{\phi} + m^2\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} \quad (2.233)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{int} = \mathcal{L}_{int} - \tilde{\mathcal{L}}_{int} &= ieA_\mu(\partial^\mu\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi) + e^2A_\mu A^\mu\phi^\dagger\phi \\ &+ ie\tilde{A}_\mu(\partial^\mu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger\partial^\mu\tilde{\phi}) - e^2\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}. \end{aligned} \quad (2.234)$$

Tendo escrito a Lagrangiana na forma (2.231), podemos derivar as regras de Feynman seguindo o mesmo procedimento que foi descrito anteriormente. Comparando  $\hat{\mathcal{L}}_G$  com a Eq. (2.208), por exemplo, concluímos que o propagador termal do fóton não sofre nenhuma alteração em comparação ao da teoria usual. Assim, no espaço dos momentos, devemos ter

$$\mu \begin{array}{c} \text{---} q \text{---} \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \nu \end{array} = \begin{cases} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_B^2(\mathbf{q},\beta)\delta(q^2) & \text{para } i\mathcal{M}(\beta) \\ \frac{i\eta_{\mu\nu}}{q^2} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_B^2(\mathbf{q},\beta)\delta(q^2) & \text{para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases}. \quad (2.235)$$

Vamos então concentrar nossa atenção no cálculo do propagador escalar termal. Como vimos, ele pode ser lido diretamente da Lagrangiana do setor escalar,  $\hat{\mathcal{L}}_S$ , quando escrita na forma (2.175). Ou seja, uma vez que<sup>23</sup>

$$\hat{\mathcal{L}}_S = \phi^\dagger(-\square - m^2 + i\varepsilon)\phi + \tilde{\phi}^\dagger(-1)(-\square - m^2 - i\varepsilon)\tilde{\phi}, \quad (2.236)$$

concluimos que

$$\Delta_F(x-y) = (-\square - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \quad (2.237)$$

e

$$\tilde{\Delta}_F(x-y) = (-1)(-\square - m^2 - i\varepsilon)^{-1} = -\Delta_F^*(x-y). \quad (2.238)$$

Portanto, o propagador do campo escalar complexo é igual ao do campo escalar real, veja Eqs.

<sup>23</sup>Aqui estamos acrescentando as prescrições de Feynman.

(2.137) e (2.237). Em sua versão termal, escrita no espaço dos momentos, temos então:

$$\text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} = \begin{cases} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) & \text{para } i\mathcal{M}(\beta) \\ \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi v_B^2(\mathbf{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) & \text{para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases}. \quad (2.239)$$

Uma vez calculado os propagadores, devemos prosseguir com o cálculo dos vértices e, como sabemos, devemos escrever  $\hat{\mathcal{L}}_{int}$  no espaço dos momentos. Note ainda que podemos escrever (2.234) como

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = \hat{\mathcal{L}}_{int}^{(3)} + \hat{\mathcal{L}}_{int}^{(4)}, \quad (2.240)$$

onde

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(3)} = ieA_\mu(\partial^\mu \phi^\dagger \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + ie\tilde{A}_\mu(\partial^\mu \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger \partial^\mu \tilde{\phi}) \quad (2.241)$$

é responsável por vértices de três pontos e

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(4)} = e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi - e^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \quad (2.242)$$

por vértices de quatro pontos<sup>24</sup>. Vamos calcular primeiro os vértices de três pontos. Devido a presença de derivadas dos campos em  $\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(3)}$ , o tipo de partícula entrando ou saindo em cada vértice acaba influenciando na obtenção do mesmo. Para ver como isto acontece, vamos escrever os campos (2.225) e (2.226) como

$$\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x) \quad (2.243)$$

e

$$\phi^\dagger(x) = \phi_+^\dagger(x) + \phi_-^\dagger(x), \quad (2.244)$$

onde

$$\phi_+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_+(k) e^{-ik \cdot x}; \quad (2.245)$$

$$\phi_-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_-(k) e^{ik \cdot x}; \quad (2.246)$$

$$\phi_+^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_+^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}; \quad (2.247)$$

$$\phi_-^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_-^\dagger(k) e^{ik \cdot x}, \quad (2.248)$$

<sup>24</sup>O número de pontos é definido pelo número de campos presentes na Lagrangiana de interação, ele nos diz quantas linhas, externas ou internas, podem ser ligadas em cada vértice.





O fator de 2 extra é devido a simetria de troca no campo  $A^\mu$ . Esta simetria é facilmente entendida dentro do formalismo canônico, através das contrações de Wick. Imagine, por exemplo, que estamos interessados em analisar o espalhamento

$$\pi^-(p_1)\gamma(p_2) \rightarrow \pi^-(k_1)\gamma(k_2), \quad (2.261)$$

onde  $\pi^-$  é um pión e  $\gamma$  é o fóton. O diagrama que surge nesse processo é justamente aquele da Eq. (2.260)<sup>26</sup>. Em termos das contrações de Wick, teríamos duas possibilidades distintas de contrair estados termais de fótons com os campos  $A^\mu$ ,

$$\beta \langle p_1; p_2, m | A_\mu A_\nu \phi^\dagger \phi | k_1; k_2, m \rangle_\beta \quad (2.262)$$

e

$$\beta \langle p_1; p_2, m | A_\mu A_\nu \phi^\dagger \phi | k_1; k_2, m \rangle_\beta, \quad (2.263)$$

gerando o mesmo resultado. Desta forma, um fator de 2! deve ser acrescentado a expressão para<sup>27</sup>  $iT(\beta)$ . Este fator acaba contribuindo para o vértice, motivo pelo qual o acrescentamos em (2.260).

Por fim, as linhas externas podem ser obtidas analisando como os campos atuam nos estados de partículas. De modo geral,

$$\text{---} p \text{---} \bullet = \begin{cases} u_B(\mathbf{p}, \beta) & \text{para } i\mathcal{M}(\beta) \\ v_B(\mathbf{p}, \beta) & \text{para } i\tilde{\mathcal{M}}(\beta) \end{cases}, \quad (2.264)$$

independentemente das partículas estarem entrando ou saindo no vértice. As linhas externas para fótons são as mesma da subseção anterior.

## 2.2 O formalismo de Matsubara

Em geral, a análise estatística de um sistema físico em equilíbrio térmico, seja ele de caráter clássico ou quântico, tem como ponto de partida, a determinação da função de partição do sistema,

$$Z(\beta) = Tr \rho(\beta), \quad (2.265)$$

<sup>26</sup>O vértice é encontrado através da amputação das pernas externas.

<sup>27</sup>Uma análise semelhante pode ser feita para  $i\tilde{T}(\beta)$ .

onde  $Tr$  simboliza a operação traço e  $\beta = 1/T$ , sendo  $T$  a temperatura em que o sistema se encontra<sup>28</sup>. A função  $\rho(\beta)$ , denominada matriz densidade, carrega em sua forma funcional,

$$\rho(\beta) = e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad (2.266)$$

informações acerca do tipo de ensemble utilizado para tal análise. Para o ensemble grande canônico, por exemplo, a função  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\mathcal{H} = H - \mu N, \quad (2.267)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano que descreve a dinâmica do sistema,  $\mu$  o potencial químico e  $N$  o operador número. Já para o ensemble canônico,

$$\mathcal{H} = H, \quad (2.268)$$

de modo que podemos considerá-lo como sendo simplesmente o ensemble grande canônico com potencial químico nulo [51]. Uma vez determinada a função de partição, todas as propriedades termodinâmicas do sistema podem ser calculadas. A pressão, o número de partículas, a entropia e a energia, no limite termodinâmico de um sistema suficientemente grande, por exemplo, são respectivamente dadas por

$$P = \frac{\partial}{\partial V} [T \ln Z(\beta)]; \quad (2.269)$$

$$N = \frac{\partial}{\partial \mu} [T \ln Z(\beta)]; \quad (2.270)$$

$$S = \frac{\partial}{\partial T} [T \ln Z(\beta)]; \quad (2.271)$$

$$E = -PV + TS + \mu N, \quad (2.272)$$

onde  $V$  é o volume [65].

Uma quantidade de interesse, acima de tudo quando estamos avaliando sistemas quânticos, é a média termal de um observável  $\mathcal{O}$  que, por definição, é dada em termos da função de partição por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\beta} \equiv Z^{-1}(\beta) Tr [\rho(\beta) \mathcal{O}]. \quad (2.273)$$

É através da relação acima que seremos capazes de avaliar funções de correlações termiais envolvendo o produto de operadores tomados em coordenadas distintas como, por exemplo,

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t') \rangle_{\beta} = Z^{-1}(\beta) Tr [\rho(\beta) \mathcal{O}(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t')], \quad (2.274)$$

onde  $\mathcal{O}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathcal{O}'(\mathbf{x}', t')$  devem ser entendidos como quaisquer dois operadores escritos na

---

<sup>28</sup>Estamos tomando a constante de Boltzmann,  $k_B$ , igual a 1. Caso contrário,  $\beta = 1/k_B T$ .

representação de Heisenberg, com  $(\mathbf{x}, t) \neq (\mathbf{x}', t')$ . Na mecânica quântica<sup>29</sup>, para todo operador  $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ , na representação de Schrödinger, existe um operador  $\mathcal{O}(\mathbf{x}, t)$ , correspondente, que se relaciona com o primeiro através da transformação unitária

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}, t) = e^{i\mathcal{H}t} \mathcal{O}(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (2.275)$$

Uma consequência imediata das Eqs. (2.274) e (2.275) é que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[ e^{-\beta\mathcal{H}} e^{i\mathcal{H}t} \mathcal{O}(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{H}t} \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t') \right] \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[ e^{i\mathcal{H}(t+i\beta)} \mathcal{O}(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{H}(t+i\beta)} e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t') \right] \\ &= \langle \mathcal{O}'(\mathbf{x}', t') \mathcal{O}(\mathbf{x}, t + i\beta) \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (2.276)$$

onde temos feito o uso da Eq. (2.266), assim como da propriedade cíclica do traço,

$$\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB] = \text{Tr}[BCA], \quad (2.277)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são operadores completamente arbitrários. Relações tipo Eq. (2.276) são conhecidas como relações de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [51] e, quando avaliadas em relação a um único operador  $\mathcal{O}$ ,

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}, t) \mathcal{O}(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta = \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}', t') \mathcal{O}(\mathbf{x}, t + i\beta) \rangle_\beta, \quad (2.278)$$

são responsáveis pelas condições de periodicidade e anti-periodicidade que devem ser satisfeitas pelas funções de Green de dois pontos em temperatura finita, um ponto a ser discutido posteriormente nessa seção.

Embora tenhamos dito que podemos derivar todas as propriedades termodinâmica de um sistema estatístico em equilíbrio tendo conhecimento da função de partição, ainda temos que nos defrontar com o desafio de encontrar uma forma funcional exata para  $Z(\beta)$  e, em geral, isto não é uma tarefa possível de ser realizada [51]. Se escrevermos, por exemplo, a Eq. (2.265) na base  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, \dots\}$  do espaço de Hilbert de um sistema de interesse<sup>30</sup>,

$$\text{Tr} \rho(\beta) \rightarrow \sum_n \langle a_n | \rho(\beta) | a_n \rangle, \quad (2.279)$$

teremos primeiramente que encontrar os infinitos valores esperados,

$$\langle a_1 | \rho(\beta) | a_1 \rangle, \langle a_2 | \rho(\beta) | a_2 \rangle, \langle a_3 | \rho(\beta) | a_3 \rangle, \dots,$$

para, então, realizar a soma segundo a equação (2.279). Felizmente, o formalismo de Matsubara

<sup>29</sup>Uma análise mais detalhada pode ser encontrada na Ref. [66].

<sup>30</sup>Veja, por exemplo, referência [66].

fornece uma maneira de calcular a função de partição perturbativamente através de técnicas diagramáticas análogas aquelas da Teoria Quântica de Campos (TQC) à temperatura zero. Um aspecto importante a ser notado, e este define o ponto de partida para tal análise, é que a matriz densidade (2.266) tem a forma funcional de um operador evolução temporal para tempos negativos e imaginários puro. Estados na representação de Schrödinger, por exemplo, satisfazem uma relação de evolução que pode ser expressada como

$$|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha\rangle, \quad (2.280)$$

onde  $|\alpha\rangle \equiv |\alpha, 0\rangle$  é um estado em um tempo inicial definido arbitrariamente como sendo zero,  $|\alpha, t\rangle$  o respectivo estado após decorrido um certo tempo  $t$  e

$$U(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \quad (2.281)$$

o operador unitário que permite a própria evolução temporal. Veja que se  $t \rightarrow -i\beta$  (ou seja, um parâmetro negativo e imaginário puro) na equação acima, recuperaremos exatamente o formato da matriz densidade (2.266).

Em geral, qualquer que seja o sistema quântico de interesse, o Hamiltoniano dinâmico  $H$  pode ser escrito em termo de uma soma envolvendo uma parte livre ( $H_0$ ) e uma parte de interação ( $H_{\text{int}}$ ):

$$H = H_0 + H_{\text{int}}. \quad (2.282)$$

Sendo este o caso, a função  $\mathcal{H}$ , no expoente da matriz densidade (2.266), assume a forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + H_{\text{int}}, \quad (2.283)$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = H_0 - \mu N. \quad (2.284)$$

Note que escrevendo a matriz densidade de uma teoria livre (ou seja, sem interação) como

$$\rho_0(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}_0}, \quad (2.285)$$

podemos definir uma função

$$S(\beta) \equiv \rho_0^{-1}(\beta)\rho(\beta) \quad (2.286)$$

de modo que podemos escrever  $\rho(\beta)$  como

$$\rho(\beta) = \rho_0(\beta)S(\beta). \quad (2.287)$$

Agora, se as quantidades em (2.285) e (2.287) têm formas funcionais semelhantes a do operador

em (2.281), quais devem ser as equações de evolução temporal satisfeitas por elas? Sabemos da mecânica quântica que os estados representados na Eq. (2.280) satisfazem a equação de Shcrödinger<sup>31</sup> [66],

$$i \frac{\partial}{\partial t} [U(t) | \alpha \rangle] = \mathcal{H} [U(t) | \alpha \rangle], \quad (2.288)$$

e como  $|\alpha\rangle$  é um estado completamente arbitrário, chegamos a conclusão de que o operador evolução temporal deve satisfazer

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = \mathcal{H} U(t). \quad (2.289)$$

Portanto, se fizermos  $t \rightarrow -i\tau$  na equação acima, podemos deduzir diretamente que as matrizes densidades livre e total, respectivamente, devem satisfazer

$$\frac{\partial \rho_0(\tau)}{\partial \tau} = -\mathcal{H}_0 \rho_0(\tau) \quad (2.290)$$

e

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} = -\mathcal{H} \rho(\tau) \quad (2.291)$$

onde<sup>32</sup>  $0 \leq \tau \leq \beta$ . As equações acima são conhecidas como equações de Bloch e nos permitem encontrar a equação de evolução para  $S(\tau)$  como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \rho_0^{-1}(\tau)}{\partial \tau} \rho(\tau) + \rho_0^{-1}(\tau) \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} \\ &= -\rho_0^{-2}(\tau) \frac{\partial \rho_0(\tau)}{\partial \tau} \rho(\tau) + \rho_0^{-1}(\tau) \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} \\ &= \rho_0^{-1}(\tau) (-H_{int}) \rho_0(\tau) \rho_0^{-1}(\tau) \rho(\tau) \\ &= -H_I(\tau) S(\tau), \end{aligned} \quad (2.292)$$

onde temos definido

$$H_I = \rho_0^{-1}(\tau) (H_{int}) \rho_0(\tau). \quad (2.293)$$

Aqui devemos destacar três pontos. O primeiro é que a transformação acima é análoga àquela que define operadores na representação de interação da mecânica quântica [51,66]. O segundo é que se  $\tau$  for realmente um tempo imaginário ( $\tau = it$ ), então, a transformação é de fato unitária<sup>33</sup>.

<sup>31</sup> Temos feito  $\hbar = 1$ .

<sup>32</sup> Isto é devido a periodicidade, ou antiperiodicidade, resultante das relações do tipo KMS [51].

<sup>33</sup> Este é o motivo de o formalismo de Matsubara ser também conhecido como o formalismo do tempo imaginário.

O terceiro, e não menos importante, é que se os dois pontos anteriores forem tomados como verdade, a Eq. (2.292) é a mesma que descreve a dinâmica de um operador evolução temporal quando escrito na representação de interação [51] e, portanto, sua solução deve ser<sup>34</sup>

$$S(\beta) = \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_0^\beta d\tau H_I(\tau)} \right), \quad (2.294)$$

onde  $\mathcal{T}_\tau$  é o operador de ordenamento temporal quando aplicado a variável  $\tau$ . Esta quantidade é completamente análoga a matriz de espalhamento  $S$  da TQC em temperatura zero, a única diferença é que a integral em  $\tau$  acontece em um intervalo finito no eixo imaginário ( $0 \leq \tau \leq \beta$ ). Note ainda que, para  $\tau_1 > \tau_2$ , podemos definir uma quantidade

$$\begin{aligned} S(\tau_1, \tau_2) \equiv S(\tau_1) S^{-1}(\tau_2) &= \mathcal{T}_{\tau_1} \left( e^{-\int_0^{\tau_1} d\tau H_I(\tau)} \right) \mathcal{T}_{\tau_2} \left( e^{\int_0^{\tau_2} d\tau H_I(\tau)} \right) \\ &= \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau H_I(\tau)} \right) \end{aligned} \quad (2.295)$$

de modo que

$$S(\tau) = S(\tau, 0) \quad (2.296)$$

$$S^{-1}(\tau) = S(0, \tau). \quad (2.297)$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} S(\tau) S^{-1}(\tau) = S(\tau, 0) S(0, \tau) &= \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_0^\tau d\tau' H_I(\tau')} \right) \mathcal{T}_\tau \left( e^{\int_0^\tau d\tau' H_I(\tau')} \right) \\ &= \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_\tau^\tau d\tau' H_I(\tau')} \right) \\ &= S(\tau, \tau) = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.298)$$

e, semelhantemente,

$$\begin{aligned} S^{-1}(\tau) S(\tau) = S(0, \tau) S(\tau, 0) &= \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_\tau^0 d\tau' H_I(\tau')} \right) \mathcal{T}_\tau \left( e^{\int_0^\tau d\tau' H_I(\tau')} \right) \\ &= \mathcal{T}_\tau \left( e^{-\int_0^0 d\tau' H_I(\tau')} \right) \\ &= S(0, 0) = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.299)$$

onde  $\mathbf{1}$  é o operador identidade. De modo geral, para  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ , podemos então escrever:

$$\begin{aligned} S(\tau_1, \tau_2) S(\tau_2, \tau_3) &= S(\tau_1) S^{-1}(\tau_2) S(\tau_2) S^{-1}(\tau_3) \\ &= S(\tau_1) \mathbf{1} S^{-1}(\tau_3) \\ &= S(\tau_1) S^{-1}(\tau_3) = S(\tau_1, \tau_3). \end{aligned} \quad (2.300)$$

Esta é uma propriedade também satisfeita pelo o operador evolução temporal<sup>35</sup>, enfatizando

<sup>34</sup>Veja, por exemplo, Ref. [5]

<sup>35</sup>Veja, por exemplo, Ref. [5].

ainda mais o paralelo estabelecido com a teoria à temperatura zero.

Vamos agora considerar a função de correlação termal de dois pontos<sup>36</sup>, definida na representação de Heisenberg como

$$\mathcal{G}_\beta(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}' \tau') \equiv \langle \mathcal{T} \left\{ \phi_H(\mathbf{x}, \tau) \phi_H^\dagger(\mathbf{x}', \tau') \right\} \rangle_\beta, \quad (2.301)$$

onde  $\phi_H(\mathbf{x}, \tau)$ , que pode representar tanto um campo bosônico como um campo fermiônico, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \phi_H(\mathbf{x}, \tau) &= e^{\tau \mathcal{H}} \phi(\mathbf{x}) e^{-\tau \mathcal{H}} = e^{\tau \mathcal{H}} e^{-\tau \mathcal{H}_0} \phi_I(\mathbf{x}, \tau) e^{\tau \mathcal{H}_0} e^{-\tau \mathcal{H}} \\ &= S^{-1}(\tau) \phi_I(\mathbf{x}, \tau) S(\tau), \end{aligned} \quad (2.302)$$

onde temos usado a Eq. (2.275), no contexto em que  $t \rightarrow -i\tau$ , além da transformação (2.293), quando aplicada aos campos, e as Eqs. (2.266), (2.285) e (2.287). Aqui devemos estar atentos ao fato de que

$$\begin{aligned} \phi_H^\dagger(\mathbf{x}, \tau) &= e^{\tau \mathcal{H}} \phi^\dagger(\mathbf{x}) e^{-\tau \mathcal{H}} = e^{\tau \mathcal{H}} e^{-\tau \mathcal{H}_0} \phi_I^\dagger(\mathbf{x}, \tau) e^{\tau \mathcal{H}_0} e^{-\tau \mathcal{H}} \\ &= S^{-1}(\tau) \phi_I^\dagger(\mathbf{x}, \tau) S(\tau) \end{aligned} \quad (2.303)$$

é diferente de simplesmente tomar o conjugado Hermitiano da expressão (2.302). Também, o operador de ordenamento temporal deve ser entendido como habitualmente, ou seja:

$$\mathcal{T}_\tau \left\{ \phi_H(\mathbf{x}, \tau) \phi_H^\dagger(\mathbf{x}', \tau') \right\} = \Theta(\tau - \tau') \phi_H(\mathbf{x}, \tau) \phi_H^\dagger(\mathbf{x}', \tau') \pm \Theta(\tau' - \tau) \phi_H^\dagger(\mathbf{x}', \tau') \phi_H(\mathbf{x}, \tau) \quad (2.304)$$

onde o sinal positivo (negativo) é para campos bosônicos (fermiônicos) e

$$\Theta(\tau - \tau') = \begin{cases} 1 & \text{para } \tau > \tau' \\ 0 & \text{para } \tau < \tau' \end{cases} \quad (2.305)$$

sendo a função de Heaviside. Deste modo, através das Eqs. (2.273) e (2.287), podemos enfim escrever a Eq. (2.301) como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}' \tau') &= \frac{\text{Tr} \left[ \rho(\beta) \mathcal{T}_\tau \left\{ \phi_H(\mathbf{x}, \tau) \phi_H^\dagger(\mathbf{x}', \tau') \right\} \right]}{\text{Tr} \rho(\beta)} \\ &= \frac{\text{Tr} \left[ \rho_0(\beta) \mathcal{T}_\tau \left\{ \phi_I(\mathbf{x}, \tau) \phi_I^\dagger(\mathbf{x}, \tau) S(\beta) \right\} \right]}{\text{Tr} \rho_0(\beta)} \frac{1}{\frac{\text{Tr} [\rho_0(\beta) S(\beta)]}{\text{Tr} \rho_0(\beta)}} \\ &= \frac{\langle \mathcal{T}_\tau \left\{ \phi_I(\mathbf{x}, \tau) \phi_I^\dagger(\mathbf{x}', \tau') e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}_I(\mathbf{x}, \tau)} \right\} \rangle_{\beta, 0}}{\langle \mathcal{T} \left\{ e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}_I(\mathbf{x}, \tau)} \right\} \rangle_{\beta, 0}}, \end{aligned} \quad (2.306)$$

<sup>36</sup>Também chamadas de funções de Green de dois pontos termiais.

onde temos assumido que  $0 < \tau, \tau' < \beta$  e que o Hamiltoniano, dado em termos dos campos e dos momentos conjugados aos campos, podem depender tanto de  $\mathbf{x}$  como de  $\tau$ . Aqui, o subscrito “0” representa o fato de que a média termal é assumida em um ensemble não interagente. O resultado acima se parece muito com a fórmula de Gell-Mann e Low da TQC à temperatura zero<sup>37</sup>, a principal diferença é que a integral temporal é executada em um intervalo finito.

### 2.2.1 As frequências de Matsubara

O objetivo desta seção é investigar algumas propriedades interessantes das funções de Green de dois pontos definidas na Eq. (2.301). Note, por exemplo, que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') &= Z^{-1} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{T} \left[ e^{\tau \mathcal{H}} \phi e^{-\tau \mathcal{H}} e^{\tau' \mathcal{H}} \phi^\dagger e^{-\tau' \mathcal{H}} \right] \right\} \\
 &= Z^{-1} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{T} \left[ e^{(\tau - \tau') \mathcal{H}} \phi e^{-(\tau - \tau') \mathcal{H}} \phi^\dagger \right] \right\} \\
 &= Z^{-1} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{T} \left[ \phi_H(\tau - \tau') \phi_H^\dagger(0) \right] \right\} \\
 &\equiv \mathcal{G}_\beta(\tau - \tau')
 \end{aligned} \tag{2.307}$$

é uma função que depende apenas da diferença de seus argumentos. Ao escrever o resultado acima temos usado as Eqs. (2.273), (2.302) e (2.303), além de termos omitido a dependência espacial por simplicidade de notação.

Como vimos anteriormente, tanto  $\tau$  como  $\tau'$  pertencem ao intervalo fechado  $[0, \beta]$  e, portanto, o argumento da função de Green de dois pontos é tal que

$$-\beta \leq \tau - \tau' \leq \beta. \tag{2.308}$$

---

<sup>37</sup>Veja, por exemplo, Ref. [5].

Agora, para  $\tau > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\beta(0, \tau) &= \langle \mathcal{T}_\tau [\phi_H(0) \phi_H^\dagger(\tau)] \rangle_\beta \\
&= \langle \Theta(-\tau) \phi_H(0) \phi_H^\dagger(\tau) \pm \Theta(\tau) \phi_H^\dagger(\tau) \phi_H(0) \rangle_\beta \\
&= \pm \langle \phi_H^\dagger(\tau) \phi_H(0) \rangle_\beta \\
&= \pm Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[ e^{-\beta \mathcal{H}} e^{\tau \mathcal{H}} \phi^\dagger e^{-\tau \mathcal{H}} \phi \right] \\
&= \pm Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[ e^{\tau \mathcal{H}} \phi^\dagger e^{-\tau \mathcal{H}} e^{-\beta \mathcal{H}} e^{\beta \mathcal{H}} \phi e^{-\beta \mathcal{H}} \right] \\
&= \pm Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \left[ e^{-\beta \mathcal{H}} \phi_H(\beta) \phi_H^\dagger(\tau) \right] \\
&= \pm \langle \phi_H(\beta) \phi_H^\dagger(\tau) \rangle_\beta = \pm \mathcal{G}_\beta(\beta, \tau), \tag{2.309}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{G}_\beta(-\tau) = \pm \mathcal{G}_\beta(\beta - \tau) \tag{2.310}$$

onde temos mais uma vez utilizado a Eq. (2.275), com  $t$  sendo substituído por  $-i\tau$ , além da Eq. (2.307) e da propriedade cíclica do traço. Este é um resultado extremamente interessante, ele está nos dizendo que a função de Green termal de dois pontos é uma função periódica (sinal positivo) ou antiperiódica (sinal negativo), com período  $\beta$ .

Em geral<sup>38</sup>, uma função  $f(x)$ , satisfazendo  $f(-a) = f(a)$ , pode ser expandida em uma série de Fourier da forma

$$f(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-i\omega_n x} \tag{2.311}$$

onde

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) e^{i\omega_n x} dx, \tag{2.312}$$

e  $\omega_n = \frac{n\pi}{a}$ , com  $n$  pertencente aos inteiros, sendo as frequências discretas dos modos de Fourier. Analogamente, desde de que as funções de Green termais estão definidas no intervalo finito da

---

<sup>38</sup>Veja, por exemplo, Ref. [67].

Eq. (2.308), podemos pensar em uma expansão da forma

$$\mathcal{G}_\beta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{G}}_\beta(\omega_n) e^{-i\omega_n\tau}, \quad (2.313)$$

sendo

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \quad (2.314)$$

e  $\omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$ . Esta última equação nos traz, ainda, informações sobre os possíveis valores que as frequências  $\omega_n$  podem assumir quando em uma teoria bosônica ou fermiônica. Desde que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_\beta(\omega_n) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) + \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \pm \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau + \beta) + \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \pm \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n(\tau - \beta)} \mathcal{G}_\beta(\tau) + \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{2} [1 \pm (-1)^n] \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau), \end{aligned} \quad (2.315)$$

onde temos feito uso da relação (2.310), podemos concluir que somente os modos inteiros par contribuem para as funções de Green bosônicas, enquanto os modos inteiros ímpar contribuem para as funções de Green fermiônicas. Com isto, podemos simplesmente escrever

$$\mathcal{G}_\beta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{G}}_\beta(\omega_n) e^{-i\omega_n\tau}, \quad (2.316)$$

com

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \quad (2.317)$$

e

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{(Bósons)} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{(Férmions)} \end{cases} \quad (2.318)$$

sendo as famigeradas frequências de Matsubara.

A extensão para para quatro dimensões é bastante direta. Uma vez que as coordenadas espaciais não estão confinadas a um intervalo finito, podemos assumir uma expansão do tipo

$$\mathcal{G}_\beta(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n\tau - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \omega_n), \quad (2.319)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(\mathbf{p}, \omega_n) = \int_0^\beta d\tau \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\omega_n\tau - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \mathcal{G}(\mathbf{p}, \omega_n) \quad (2.320)$$

é a função de Green termal no espaço dos momentos  $\mathbf{p}$ .

### 2.2.2 Regras de Feynman

Nesta seção, ilustraremos através de uma teoria de campos escalar como o propagador termal pode ser derivado através de uma rotação de Wick que conduz o espaço-tempo de Minkowski ao espaço Euclidiano em quatro dimensões.

De modo geral, veja Refs. [51, 68], uma rotação de Wick pode ser efetuada através da correspondência

$$t \rightarrow -i\tau; \quad (2.321)$$

$$p^0 \rightarrow ip_E^0; \quad (2.322)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}. \quad (2.323)$$

Como podemos ver, a coordenada tempo passa a assumir valores imaginários e isto é exatamente o que precisamos para introduzir temperatura no sistema. De fato, até o momento, toda nossa análise foi baseada nessa correspondência, tornando, então, a extensão de uma teoria à temperatura zero em uma teoria à temperatura finita bastante direta.

Como vimos na seção anterior, se  $\tau_\phi(x)$  é o propagador escalar livre de Klein-Gordon à temperatura zero, então, ele deve satisfazer a equação

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \tau_\phi(x) = -i\delta(x), \quad (2.324)$$

onde  $\delta(x)$  deve ser entendida como sendo o produto  $\delta^3(\mathbf{x})\delta(t)$ . Portanto, através de uma rotação de Wick, onde

$$\tau_\phi(x) = \tau_\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \tau_\phi(\mathbf{x}, \tau); \quad (2.325)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2; \quad (2.326)$$

$$\delta(t) \rightarrow \delta(\tau), \quad (2.327)$$

podemos, enfim, escrever a equação (2.324) como<sup>39</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \mathcal{G}_\beta^\phi(\mathbf{x}, \tau) = -\delta^3(\mathbf{x}) \delta(\tau), \quad (2.328)$$

onde temos definido

$$\mathcal{G}_\beta^\phi(\mathbf{x}, \tau) \equiv i \tau_\phi(\mathbf{x}, \tau). \quad (2.329)$$

---

<sup>39</sup>Temos usado a propriedade  $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ .

Agora, gostaríamos de resolver a equação diferencial acima fazendo uso da expansão de Fourier apresentada na Eq. (2.319) e, portanto, precisamos de uma representação discreta para  $\delta(\tau)$ , uma vez que  $\tau$  está definido no intervalo finito  $[0, \beta]$ . Como discutido na Ref. [67], sendo  $u$  uma variável qualquer no intervalo  $[0, 2\pi]$ , então

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inu}. \quad (2.330)$$

Note que, se

$$u = \frac{2\pi}{\beta} \tau, \quad (2.331)$$

então,

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n \tau}, \quad (2.332)$$

sendo  $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ , com  $0 \leq \tau \leq \beta$ . Ao derivar a Eq. (2.332) temos novamente usado a propriedade  $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ . Com isso, desde que<sup>40</sup>

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.333)$$

podemos escrever o produto das deltas espaciais e temporal como

$$\delta^3(\mathbf{x})\delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n \tau - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}. \quad (2.334)$$

Finalmente, substituindo as expansões (2.319) e (2.334) na equação diferencial (2.324), iremos determinar que o propagador escalar termal, no espaço dos momentos, é dado por

$$\mathcal{G}_\beta(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (2.335)$$

com  $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ .

O exemplo acima ilustra uma característica muito interessante do formalismo de Matsubara: quantidades termais podem ser derivadas daquelas em temperatura zero por meio de uma rotação de Wick seguida das substituições

$$\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (2.336)$$

e

$$p_E^0 \rightarrow \omega_n. \quad (2.337)$$

---

<sup>40</sup>Veja Ref. [68].

com  $\omega_n$  é dada pela Eq. (2.318). O propagador escalar, por exemplo, dado em temperatura zero por

$$\tau_\phi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.338)$$

após uma rotação de Wick assume a forma<sup>41</sup>

$$\tau_\phi^E(x) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{-1}{-p_E^0 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-i(p_E^0 \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (2.339)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \tau_\phi^E(x) &\rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} e^{-i(\omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \\ &= \mathcal{G}_\beta^\phi(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (2.340)$$

após as identificações (2.336) e (2.337). Note que  $\mathcal{G}_\beta^\phi(\mathbf{x}, \tau)$  é justamente o propagador termal do campo escalar no formalismo de Matsubara. De fato, usaremos essa característica especial para calcular as correções radioativas para o propagador do fóton em um modelo de eletrodinâmica escalar que viola a simetria de Lorentz, a ser apresentada no próximo capítulo. Enquanto isso, na próxima subseção, iremos aplicar o formalismo de Matsubara em outro exemplo bem simples, considerando uma teoria escalar real de auto-interação do tipo  $\lambda \phi^4$ .

### 2.2.3 Correção de massa a um loop para o campo escalar real

Nesta subseção, iremos considerar uma teoria de auto-interação  $\lambda \phi^4$ , dada pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.341)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar real, no cálculo da correção de massa a um *loop*. Primeiro, as regras de Feynman em temperatura zero podem ser facilmente determinadas aplicando o método apresentado na seção anterior<sup>42</sup>. O propagador do campos escalar, por exemplo, deve ser o mesmo do campo escalar complexo, uma vez que a Lagrangiana  $\mathcal{L}$  pode ser escrita de forma equivalente como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi (-\square - m^2) \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.342)$$

Note que temos omitido a prescrição de Feynman. Escrevendo ainda a equação acima no espaço dos momentos, iremos encontrar que o vértice de interação é dado simplesmente por  $-i\lambda$ .

<sup>41</sup>O sobrescrito  $E$  é para Euclidiano.

<sup>42</sup>Note que as regras de Feynman em temperatura zero são equivalente aquelas para o espaço não til do formalismo DCT.

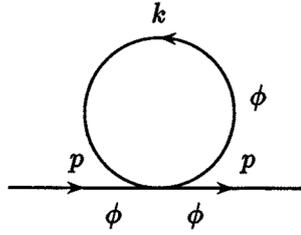


Figura 1: Diagrama para correção de massa a um *loop* da teoria  $\lambda\phi^4$

Agora que temos as regras de Feynman, estamos prontos para calcular a correção de massa a um *loop* na teoria  $\lambda\phi^4$ , dada em termos do diagrama da figura<sup>43</sup> (1). De modo geral, devemos resolver:

$$-i\Delta m^2 = \text{Diagrama.} \quad (2.343)$$

Notando que temos simplesmente um vértice e um propagador interno, podemos escrever:

$$-i\Delta m^2 = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}, \quad (2.344)$$

onde temos integrado sobre o momento de *loop* indeterminado e levado em consideração o fator de simetria do diagrama. Até agora o tratamento foi todo em temperatura zero. Como discutido na seção anterior, afim de implementar os efeitos de temperatura, devemos primeiro fazer uma rotação de Wick, onde

$$t \rightarrow -i\tau; \quad (2.345)$$

$$k^0 \rightarrow ik_E^0. \quad (2.346)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\Delta m^2 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^0)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.347)$$

Agora, através das relações (2.336) e (2.337), o formalismo de Matsubara nos permite então escrever a correção de massa em temperatura finita como

$$\Delta m^2(\beta) = -\frac{\lambda}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2(\mathbf{k})} \quad (2.348)$$

onde temos definido

$$\omega(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.349)$$

<sup>43</sup>Para mais detalhes, veja Refs. [5, 68].

Resolvendo o somatório, iremos encontrar como resultado

$$\Delta m^2(\beta) = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \coth \left[ \frac{\beta \omega(\mathbf{k})}{2} \right]. \quad (2.350)$$

Fazendo uso da identidade

$$\coth(\beta x) = 1 + 2n_B(2x), \quad (2.351)$$

onde

$$n_B(x) = \frac{1}{e^{\beta x} - 1} \quad (2.352)$$

é a função de distribuição bosônica [51], podemos enfim escrever

$$\Delta m^2(\beta) = \Delta m_0^2 + \Delta m_T^2(\beta), \quad (2.353)$$

onde

$$\Delta m_0^2 = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \quad (2.354)$$

é a contribuição em temperatura zero e

$$\Delta m_T^2(\beta) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \frac{1}{e^{\beta \omega(\mathbf{k})} - 1} \quad (2.355)$$

é a contribuição devido a temperatura. A integral na Eq. (2.354) é divergente e precisa de algum método de regularização para ser resolvida. Nos capítulos (5) e (6) encontraremos integrais também divergentes e aplicaremos a técnica de regularização dimensional, que consiste em estender a dimensão do espaço para  $D$  dimensões. Tomemos como exemplo a integral na Eq. (2.354). Em  $D$  dimensões devemos resolver<sup>44</sup>:

$$\begin{aligned} I(D) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 - m^2}} \\ &= \int d\Omega_D dk k^{D-1} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 - m^2}} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int dk \frac{k^{D-1}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 - m^2}}, \end{aligned} \quad (2.356)$$

onde

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (2.357)$$

---

<sup>44</sup>Para mais detalhes sobre a técnica de regularização dimensional, veja Refs. [5, 68].

Resolvendo a integral em  $k$ , iremos encontrar

$$I(D) = \pi^{\frac{D-1}{2}} m^{D-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right). \quad (2.358)$$

O resultado acima é divergente para  $D = 3$ . Entretanto, podemos isolar a parte divergente realizando uma expansão em torno de  $\varepsilon = 3 - D$ , sendo  $\varepsilon$  muito pequeno. O resultado é

$$I(\varepsilon) = \pi m^2 \left[ -\frac{2}{\varepsilon} + \ln(\pi m^2) + \gamma - 1 \right], \quad (2.359)$$

onde temos desconsiderado termos de ordem  $\varepsilon$ . Veja que o primeiro termo após o sinal de igualdade é justamente a parte divergente da integral.

A contribuição dependente da temperatura, por sua vez, não possui divergências, mas a integral na Eq. (2.355) não pode ser resolvida em uma forma fechada. Entretanto, no limite em que  $m \rightarrow 0$ ,

$$\Delta m_T^2(\beta) \rightarrow \frac{\lambda}{24\beta^2}, \quad (2.360)$$

onde vemos uma dependência quadrática com a temperatura, desde que  $\beta = 1/T$ . Este resultado nos diz então que a temperatura induz uma massa para partículas bosônicas.

### 3 O MODELO PADRÃO ESTENDIDO

Como discutido na introdução, o MPE nada mais é do que uma teoria de campos efetiva que possui em sua Lagrangiana todos os possíveis termos que violam a simetria de Lorentz e que, portanto, fornece uma estrutura geral para se investigar desvios da simetria CPT.

Um dos postulados da Relatividade especial diz que as leis da física devem ser as mesmas para todos os referenciais inerciais que, por sua vez, estão relacionados pelo conjunto de transformações de coordenadas de Lorentz [69]: três rotações (uma para cada eixo espacial) e três *boosts*<sup>1</sup> (um para cada direção do espaço). Dizer que a simetria de Lorentz é quebrada não significa que as leis da física deixam de ser invariantes sob transformações de coordenadas, mas sim que a equivalência entre transformações de coordenada e de partícula é quebrada, devido a presença de um campo de fundo que pode ter raízes em um processo de transição de fase envolvendo campos tensoriais de valor esperado não nulo [15, 70]. Se este for o caso, dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria. Entretanto, quando a quebra não precisa de um mecanismo para ser gerada, ou em outras palavras, quando os campos de fundo são inseridos *ad hoc*, dizemos que houve uma quebra explícita da simetria de Lorentz.

Hoje em dia, o MPE é dividido em dois setores: o mínimo e o não-mínimo [71, 72]. O primeiro deles restringe o MPE a operadores de dimensão de massa  $d \leq 4$  e tem sido extensivamente estudado nos mais diversos contextos, tais como correções radioativas [30, 31], oscilação de neutrinos [26–29], ação efetiva de Euler–Heisenberg [33] e gravitacional [73, 74]. O setor não-mínimo, por sua vez, incorpora todos os operadores de dimensão de massa arbitrária ( $d \geq 5$ ) e, embora conduza a teorias não-renormalizáveis, tem desempenhado um papel central em contextos formais tais como em teoria das cordas [8, 9], geometria Riemann–Finsler [40, 75–82], propagação de partículas clássicas [83], modelos super simétricos [34–37] e teoria quântica de campos não comutativa [38, 84]. Outra forte motivação para se estudar operadores de dimensão  $d \geq 5$  está relacionada as severas imposições estabelecidas por alguns processos astrofísicos em coeficientes de dimensão<sup>2</sup>  $d \leq 4$ , de modo que aqueles com  $d \geq 5$  tornam-se comparáveis ou até mesmo dominantes [85].

Na próxima seção, discutiremos brevemente a extensão mínima da eletrodinâmica quântica do MPE. Entretanto, uma discussão completa do MPE, incluindo os setores leptônico, de quarks, de Yukawa, de Higgs, assim como setor gravitacional, pode ser encontrado nas Refs. [15, 86, 87]. No final do capítulo, apresentaremos o modelo de eletrodinâmica escalar estendida de interesse para esta tese.

<sup>1</sup>Um *boost* é uma mudança de velocidade em uma determinada direção [69].

<sup>2</sup>Veja as tabelas apresentadas na Ref. [72]

### 3.1 Extensão mínima da eletrodinâmica quântica

A extensão mínima da eletrodinâmica quântica (EDQ) do MPE [16] é descrita pela Lagrangiana<sup>3</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{fótons}} + \mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-par}} + \mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-ímpar}} + \mathcal{L}_{\text{férmion}}, \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{fótons}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

é o setor de fótons puro, dado pela Lagrangiana usual de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-par}} = -\frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

é o setor de fótons CPT-par,

$$\mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-ímpar}} = -\frac{1}{4}(k_{AF})^\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\nu F^{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

é o setor de fótons CPT-ímpar e

$$\mathcal{L}_{\text{férmion}} = \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\psi \quad (3.5)$$

é o setor de férmions, que leva em consideração todos os termos que violam Lorentz e CPT através dos coeficientes

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\mu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\alpha\nu\mu}\sigma_{\alpha\nu} \quad (3.6)$$

e

$$M = m + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Nas equações acima,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (3.8)$$

é a derivada covariante usual, permitindo o acoplamento de férmions e fótons, e

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.9)$$

é o tensor do campo eletromagnético.

Note que nas Lagrangianas acima não há índices livres que possam colocar em xeque a invariância sob transformações de coordenadas da relatividade restrita. Entretanto, a

<sup>3</sup>A menos que se diga o contrário, estaremos nos referindo a densidades Lagrangianas apenas como Lagrangianas.

presença de constantes de acoplamento tensoriais acopladas aos campos acabam por quebrar a equivalência entre transformações de observador e de partícula, estabelecendo, assim, uma direção preferencial no espaço-tempo.

### 3.1.1 Setor de fótons CPT-par

No setor de fótons CPT-par, caracterizado pela Lagrangiana (3.3), os coeficientes  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  representam tensores reais, de ordem-4, que possuem a mesma simetria do tensor de Riemann,

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta} = -(k_F)_{\mu\nu\beta\alpha} = (k_F)_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.10)$$

e

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} + (k_F)_{\mu\beta\nu\alpha} + (k_F)_{\mu\alpha\beta\nu} = 0, \quad (3.11)$$

sendo esta última a identidade de Bianchi, além de satisfazerem a condição de duplo traço nulo,

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.12)$$

o que acaba por reduzir o número de componentes independentes de 256 para 19. Também, desde que o campo  $A_\mu$  e a derivada  $\partial_\mu$  possuem ambos dimensão de massa  $d = 1$ , o tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  deve ter dimensão de massa zero para que a ação<sup>4</sup> seja adimensional.

As propriedades de simetria quanto ao conjunto de transformações discreta CPT podem ser melhor avaliadas explicitando a Lagrangiana (3.3) em termos dos campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , o que pode ser feito através das relações

$$F_{i0} = E^i \quad (3.13)$$

e

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k. \quad (3.14)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-par}} = -\frac{1}{4} \left[ 4(k_F)_{0i0j} E^i E^j + 4(k_F)_{0ikl} \varepsilon_{klj} E^i B^j + (k_F)_{klmn} \varepsilon_{kli} \varepsilon_{mnj} B^i B^j \right], \quad (3.15)$$

donde vemos que os coeficientes  $(k_F)_{0i0j}$ ,  $(k_F)_{0ikl}$  e  $(k_F)_{klmn}$  estão todos associados a contribuições que preservam a simetria CPT, uma vez que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  se transformam de acordo com o que é apresentado na tabela (1).

Em particular, o coeficiente  $(k_F)_{0ikl}$  viola separadamente P e T, mas a simetria C continua preservada.

<sup>4</sup>A ação em quatro dimensões, por exemplo, é definida pela integral  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ .

	C	P	T	CPT
<b>E</b>	−	−	+	+
<b>B</b>	−	+	−	+
$A^0$	−	+	+	−
<b>A</b>	−	−	−	−
$\partial_0$	+	+	−	−
$\partial_i$	+	−	+	−

Tabela 1: Sinais adquiridos pelos campos, potenciais e derivadas sob transformações C, P, T e CPT.

### 3.1.2 Setor de fótons CPT-ímpar

O setor de fótons CPT-ímpar, proposto pela primeira vez em 1990 por Carroll, Field e Jackiw [88], tem o vetor  $(k_{AF})^\mu$  como o campo de fundo responsável pela quebra da covariância por transformações de partículas. Este é um tensor real, de ordem-1 e de dimensão de massa  $d = 1$ , como podemos ver após uma rápida análise dimensional, tal qual fizemos na seção anterior.

Em termos dos campos **E** e **B**, a Lagrangiana (3.4) assume a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fótons}}^{\text{CPT-ímpar}} = \frac{1}{2} [(k_{AF})^0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \phi (\mathbf{k}_{AF} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{k}_{AF} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E})], \quad (3.16)$$

onde  $A^0 = \phi$  é o potencial escalar. Aqui, temos novamente usado as Eqs. (3.13) e (3.14), além da propriedade

$$\varepsilon_{0ijk} \varepsilon^{jkl} = 2\delta_i^l. \quad (3.17)$$

Desta forma, tendo mais uma vez a tabela (1) como referência, podemos concluir que os coeficientes  $(k_{AF})^0$  e  $\mathbf{k}_{AF}$  são ambos associados a contribuições que violam a simetria CPT. Note ainda que  $(k_{AF})^0$  preserva C e T, mas viola paridade, enquanto que  $\mathbf{k}_{AF}$  preserva C e P, mas viola reversão temporal.

A Lagrangiana (3.16), junto com o setor de Maxwell puro, dado pela Eq. (3.2), compõem juntos a eletrodinâmica de Carrol-Field-Jackiw, inicialmente proposta com a finalidade de se verificar possíveis violações das simetria de Lorentz e CPT na eletrodinâmica de Maxwell [88], mas tendo sua estrutura avaliada em diferentes contextos, como em modificações induzidas na QED [89–93], redução dimensional [94], supersimetria [95–97], radiação Cherenkov no vácuo [98–101], efeito Casimir [102, 103] e radiação cósmica de fundo [104–107].

### 3.1.3 O setor de férmions

No setor fermiônico do MPE, os campos de fundo, que quebram a covariância sob transformações de partículas, são caracterizados pelos tensores  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$ ,  $e^\mu$ ,  $f^\mu$ ,  $g^{\alpha\nu\mu}$

e  $H_{\mu\nu}$ . Note que como o campo de férmions  $\psi$  tem dimensão de massa  $d = \frac{3}{2}$ , os coeficientes  $\Gamma^\mu$  e  $M$  têm que ter, respectivamente, dimensões de massa  $d = 0$  e  $d = 1$ . De modo geral, isto nos permite construir a tabela (2), que especifica a dimensão de massa dos diversos coeficientes que violam a simetria de Lorentz.

$d = 0$	$c^{\mu\nu}, d^{\mu\nu}, e^\mu, f^\mu$ e $g^{\alpha\nu\mu}$
$d = 1$	$a_\mu, b_\mu$ e $H_{\mu\nu}$

Tabela 2: Dimensão de massa dos diversos tensores que violam a simetria de Lorentz no setor fermiônico do MPE.

É importante notar que nem todos os termos da Lagrangiana (3.5) contribuem genuinamente para violação da simetria de Lorentz. De fato, os termos proporcionais a  $a_\mu$ ,  $e_\mu$  e  $f_\mu$  podem ser removidos após uma redefinição adequada dos campos espinoriais. Veja, por exemplo, que a contribuição devido a  $a_\mu$  para a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - a_\mu \gamma^\mu)\psi \quad (3.18)$$

pode ser eliminada através da transformação

$$\psi \rightarrow e^{-ia \cdot x} \psi. \quad (3.19)$$

Para mais detalhes quanto a absorção de termos de violação após redefinição dos campos, veja Ref. [108].

O comportamento de cada termo da Lagrangiana (3.5) sob transformações CPT pode, enfim, ser avaliado com base na forma como os campos e derivadas se transformam. Tomando como base as tabelas (1) e (3), podemos concluir que somente  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $e^\mu$ ,  $f^\mu$  e  $g^{\alpha\nu\mu}$  violam ambos Lorentz e CPT, sendo todos os outros associados a contribuições que violam somente a simetria de Lorentz.

*Bounds* para os diversos coeficientes do setor fermiônico que violam a simetria de Lorentz foram avaliados em diferentes cenários: através de espectroscopia em átomo de hidrogênio e de anti-hidrogênio [109, 110], por meio da comparação entre o momento magnético anômalo do elétron e do pósitron [111, 112], dentre outros exemplos citados na Ref. [113].

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
C	+	+	-	+	-
P	+	-	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	+	-	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
CPT	+	+	-	-	+

Tabela 3: Sinais adquiridos sob transformações CPT por alguns termos envolvendo o produto de campos fermiônicos. Aqui,  $(-1)^\mu \equiv 1$  para  $\mu = 0$  e  $(-1)^\mu \equiv -1$  para  $\mu = 1, 2, 3$ .

### 3.2 Eletrodinâmica escalar estendida

Nesta tese de doutorado, estaremos interessado em estudar um modelo de eletrodinâmica escalar que consiste de um acoplamento mínimo entre o campo eletromagnético e o setor escalar de uma extensão do MP que viola a simetria de Lorentz. Recentemente proposto por Edwards e Kostelecký [40],<sup>5</sup> o modelo tem como Lagrangiana a função

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^\dagger D_\nu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{i}{2} (\hat{K}_a)^\mu [\phi^\dagger D_\mu \phi - (D_\mu \phi)^\dagger \phi] \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

$$G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\hat{K}_c)^{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

com  $\eta^{\mu\nu}$  representando a métrica de Minkowski com assinatura  $(1, -1, -1, -1)$ . Os coeficientes  $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{K}_a)^\mu$  são tensores constantes que promovem a quebra da simetria de Lorentz por se comportarem como escalares sob transformação de partículas e podem ser tomados como hermitianos sem perda de generalidade<sup>6</sup> [40]. Também,  $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$  satisfaz a condição de traço nulo,  $(\hat{K}_c)^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu} (\hat{K}_c)^{\mu\nu} = 0$ . Note que o termo que permite o acoplamento entre o campo escalar complexo e o fóton é dado pela derivada covariante usual,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (3.22)$$

onde  $A^\mu$  é o quadrivetor potencial que define o tensor de campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  através da relação

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.23)$$

Uma maneira conveniente de reescrever a Eq. (3.20) é separando as partes livres e de interação como se segue:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathcal{L}_S = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + (\hat{K}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - \frac{i}{2} (\hat{K}_a)^\mu (\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (3.25)$$

é o setor escalar livre, permitindo a propagação de um campo escalar complexo  $\phi$ , de massa  $m$ ,

<sup>5</sup>Embora o trabalho original de Edwards e Kostelecký assuma que os coeficientes que violam a simetria de Lorentz podem ser escritos como uma série de potências em termos dos momentos, aqui, não levaremos em consideração essa possibilidade, investigaremos somente o caráter geral da violação devido à presença de  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{k}_a)^\mu$  e deixaremos como perspectiva a análise envolvendo termos de altas derivadas.

<sup>6</sup>Isto surge como uma consequência de  $\mathcal{L}$  ser hermitiana.

	C	P	T	CPT
$(\hat{k}_a)^0$	-	+	+	-
$(\hat{k}_a)^i$	-	-	-	-
$(\hat{k}_c)^{00}$ ou $(\hat{k}_c)^{ij}$	+	+	+	+
$(\hat{k}_c)^{0i}$	+	-	-	+

Tabela 4: Sinais adquiridos pelos termos proporcionais a cada uma das componentes dos tensores  $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{K}_a)^\mu$  sob C, P, T e CPT.

na presença de efeitos arbitrários que violam a simetria de Lorentz [40],

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.26)$$

é o setor de gauge puro e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & ieA^\mu(\phi^\dagger\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^\dagger\phi) + e^2A_\mu A^\mu\phi^\dagger\phi + ie(\hat{K}_c)^{\mu\nu}A_\mu(\phi^\dagger\partial_\nu\phi - \partial_\nu\phi^\dagger\phi) \\ & + e^2(\hat{K}_c)^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\phi^\dagger\phi - e(\hat{K}_a)^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

é o setor de interação. Note que temos simplesmente substituído as Eqs. (3.21) e (3.22) em (3.20).

Com relação as transformações de simetria, desde que o campo escalar complexo satisfaz<sup>7</sup>

$$P\phi(t, \mathbf{x})P = \phi(t, -\mathbf{x}); \quad (3.28)$$

$$T\phi(t, \mathbf{x})T = \phi(-t, \mathbf{x}); \quad (3.29)$$

$$C\phi(t, \mathbf{x})C = \phi^\dagger(t, \mathbf{x}), \quad (3.30)$$

onde  $P$ ,  $T$  e  $C$  são os operadores de paridade, reversão temporal e conjugação de carga, respectivamente, podemos concluir que os tensores  $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{K}_a)^\mu$  são, respectivamente, CPT-par e CPT-ímpar. Assim, embora ambos sejam proporcionais a termos que violam a simetria de Lorentz, destes, somente os que são proporcionais ao primeiro são invariantes sob transformações CPT. A tabela (4) resume os sinais adquiridos pelos termos proporcionais a cada uma das componentes de  $(\hat{K}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{K}_a)^\mu$  sob simetrias discretas C, P e T.

As regras de Feynman para o modelo, quando em temperatura zero, podem ser derivadas diretamente das Lagrangianas (3.25)-(3.27) pelo método apresentado no capítulo anterior<sup>8</sup>. Consideremos, por exemplo, o setor escalar livre, dado pela Eq. (3.25). Quando pensada em termos do funcional gerador, podemos realizar integrações por partes que permitem escrever  $\mathcal{L}_S$  como

<sup>7</sup>Veja Ref. [5].

<sup>8</sup>Note que as regras de Feynman em temperatura zero são justamente aquelas referente ao espaço ordinário do formalismo DCT.

$$\mathcal{L}_S = \phi^\dagger [-\square - m^2 - (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - i(\hat{k}_a)^\mu \partial_\mu] \phi, \quad (3.31)$$

de modo que o propagador  $\tau_\phi(x-y)$  deve satisfazer

$$[-\square - m^2 - (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - i(\hat{k}_a)^\mu \partial_\mu] \tau_\phi(x-y) = i\delta(x-y). \quad (3.32)$$

Supondo uma solução do tipo transformada de Fourier,

$$\tau_\phi(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tau_\phi(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (3.33)$$

e considerando a representação integral da delta de Dirac,

$$\delta(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (3.34)$$

podemos, enfim, escrever

$$\tau_\phi(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} [i(\hat{k}_c)^{\mu\nu} p_\mu p_\nu] \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} [-i(\hat{k}_a)^\mu p_\mu] \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (3.35)$$

onde temos feito uma expansão em primeira ordem nos parâmetros que violam Lorentz. O primeiro termo é o propagador usual para o campo escalar complexo:

$$\text{-----} \begin{array}{c} p \\ \blacktriangleright \end{array} \text{-----} = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (3.36)$$

No segundo e terceiro termo, vemos as inserções ao propagador devido aos coeficientes tensoriais e vetoriais que violam a simetria de Lorentz, respectivamente. Diagramaticamente, tais inserções são representadas por

$$\text{-----} \begin{array}{c} p \\ \bullet \end{array} \text{-----} = i(\hat{k}_c)^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (3.37)$$

e

$$\text{-----} \begin{array}{c} p \\ \times \end{array} \text{-----} = -i(\hat{k}_a)^\mu p_\mu. \quad (3.38)$$

Em resumo, temos que

$$\text{-----} \begin{array}{c} p \\ \blacktriangleright \end{array} \text{-----} = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (3.39)$$

$$\mu \text{-----} \begin{array}{c} q \\ \sim \end{array} \text{-----} \nu = -\frac{i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \quad (3.40)$$

são respectivamente os propagadores para o campo escalar e o do fóton,

$$\text{---}\overset{P}{\bullet}\text{---} = i(\hat{k}_c)^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (3.41)$$

$$\text{---}\overset{P}{\times}\text{---} = -i(\hat{k}_a)^\mu p_\mu \quad (3.42)$$

são as inserções ao propagador escalar devido aos parâmetros que violam Lorentz e

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} \diagdown \\ \diagdown \text{---} \diagup \end{array} = -i\lambda \quad (3.43)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} \diagdown \\ \diagdown \text{---} \diagup \end{array} = 2ie^2 \eta^{\mu\nu} \quad (3.44)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} p \\ \diagdown \text{---} p' \end{array} \text{---} = ie\eta^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) \quad (3.45)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} p \\ \diagdown \text{---} p' \end{array} \overset{\bullet}{\text{---}} = ie(\hat{k}_c)^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} p \\ \diagdown \text{---} p' \end{array} \otimes \text{---} = -ie(\hat{k}_a)^\mu \quad (3.47)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} \diagdown \\ \diagdown \text{---} \diagup \end{array} \overset{\bullet}{\text{---}} = 2ie^2 \hat{K}_c^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

são todos os possíveis vértices de interação. Como podemos ver nos diagramas (3.46), (3.47) e (3.48), novos vértices que violam a simetria de Lorentz são introduzidos pelos parâmetros  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{k}_a)^\mu$ .

## 4 ESPALHAMENTO DE MÉSONS NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA À TEMPERATURA FINITA

Neste capítulo, a seção de choque diferencial para o espalhamento de mésons em uma eletrodinâmica escalar estendida violando a simetria de Lorentz, apresentada no capítulo (3), será calculada à temperatura finita. A implementação de temperatura se dará através do formalismo DCT, discutido no capítulo (2). Realizar tal análise é importante a medida que ela pode nos ajudar a entender como temperatura pode contribuir para uma nova classe de vínculos aos parâmetros que violam a simetria de Lorentz. Os resultados deste capítulo foram publicados na Ref. [59].

### 4.1 Eletrodinâmica escalar estendida no formalismo DCT

Devido a duplicação dos graus de liberdade do sistema, ao invés da Lagrangiana em (3.24), no formalismo DCT devemos trabalhar com

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{\text{int}} - \tilde{\mathcal{L}}_S - \tilde{\mathcal{L}}_G - \tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{L}_S$ ,  $\mathcal{L}_G$  e  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  são dadas respectivamente por (3.25), (3.26) e (3.27), com  $\tilde{\mathcal{L}}_S$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_G$  e  $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}}$  sendo obtidas das primeiras, respectivamente, por meio das RCT, Eqs. (2.5)-(2.8). Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}} = & -ie\tilde{A}^\mu(\tilde{\phi}^\dagger\partial_\mu\tilde{\phi} - \partial_\mu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}) + e^2\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} - ie(\hat{k}_c)^{\mu\nu}\tilde{A}_\mu(\tilde{\phi}^\dagger\partial_\nu\tilde{\phi} - \partial_\nu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}) \\ & + e^2(\hat{k}_c)^{\mu\nu}\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} - e(\hat{k}_a)^\mu\tilde{A}_\mu\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} - \frac{\lambda}{4}(\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi})^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Da nossa experiência com as eletrodinâmicas espinorial e escalar, apresentadas no capítulo (2) por meio do formalismo DCT, sabemos que os vértices de interação que decorrem da Lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}} - \tilde{\mathcal{L}}_{\text{int}} \quad (4.3)$$

são os mesmos que aqueles encontrados na seção (3.2), com o adicional dos correspondentes vértices no espaço til, que podem ser encontrados a partir dos anteriores através das RCT. Assim, se  $V$  é um vértice no espaço ordinário,  $\tilde{V} = V^*$  é o análogo no espaço til. Esta também é uma característica das inserções aos propagadores: se  $I$  é uma inserção no espaço ordinário,  $\tilde{I} = I^*$  é a inserção correspondente no espaço til. Para ver isto, notemos que  $\tilde{\mathcal{L}}_S$  pode ser escrita como

$$\tilde{\mathcal{L}}_S = \tilde{\phi}^\dagger [-\square - m^2 - (\hat{k}_c)^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + i(\hat{k}_a)^\mu\partial_\mu] \tilde{\phi}. \quad (4.4)$$

Então, o propagador escalar  $\tilde{\tau}_\phi(x-y)$ , no espaço til, deve satisfazer

$$[-\square - m^2 - (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + i(\hat{k}_a)^\mu \partial_\mu] \tilde{\tau}_\phi(x-y) = -i\delta(x-y), \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{\tau}_\phi(x-y)$  assume uma expansão de Fourier dada por

$$\tilde{\tau}_\phi(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\tau}_\phi(p) e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (4.6)$$

Fazendo uso da equação (3.34) e expandindo até primeira ordem nos parâmetros que violam Lorentz, encontraremos

$$\tilde{\tau}_\phi(p) = \frac{-i}{p^2 - m^2} + \frac{-i}{p^2 - m^2} [-i(\hat{k}_c)^{\mu\nu} p_\mu p_\nu] \frac{-i}{p^2 - m^2} + \frac{-i}{p^2 - m^2} [i(\hat{k}_a)^\mu p_\mu] \frac{-i}{p^2 - m^2}, \quad (4.7)$$

que é justamente o resultado que obteríamos se tivéssemos desde o princípio atuado com as RCT na equação (3.35).

A principal diferença trazida pelo formalismo DCT está, de fato, nos propagadores, que agora devem carregar a dependência com a temperatura, veja Eqs. (2.239) e (2.235), respectivamente.

## 4.2 Seção de choque diferencial para o espalhamento de mésons

Munidos das regras de Feynman para uma eletrodinâmica escalar violando Lorentz no formalismo DCT, estamos aptos a calcular a seção de choque diferencial à temperatura finita para o processo de espalhamento

$$M_a(p) + \bar{M}_a(p') \rightarrow M_b(k) + \bar{M}_b(k'), \quad (4.8)$$

onde  $M_a$  é um méson do tipo  $a$  que é diferente de um méson do tipo  $b$ ,  $M_b$ , com  $\bar{M}_a$  e  $\bar{M}_b$  indicando as respectivas antipartículas.

Os possíveis diagramas de Feynman, a nível de árvore, comum a ambos os espaços, til e não til, estão representados na figura (2), onde temos considerado somente contribuições de primeira ordem nos parâmetros que violam Lorentz, desde que os mesmos devem contribuir com correções muito pequenas. Fazendo uso das regras de Feynman no formalismo DCT, podemos escrever a matriz de espalhamento  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}(\beta) &= \frac{e^2}{q^2} v(\mathbf{p}, \beta) v(\mathbf{p}', \beta) v(\mathbf{k}, \beta) v(\mathbf{k}', \beta) \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'})/2} + 1 \right] \\ &\times \left[ (p^\nu - p'^\nu)(k_\nu - k'_\nu) + 2(\hat{k}_c)^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu)(k_\nu - k'_\nu) - (\hat{k}_a)^\mu (k_\mu + p_\mu - p'_\mu - k'_\mu) \right] \\ &\times \left\{ 1 - 2\pi i q^2 v^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \left[ \frac{e^{\beta(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'})/2} - 1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'})/2} + 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

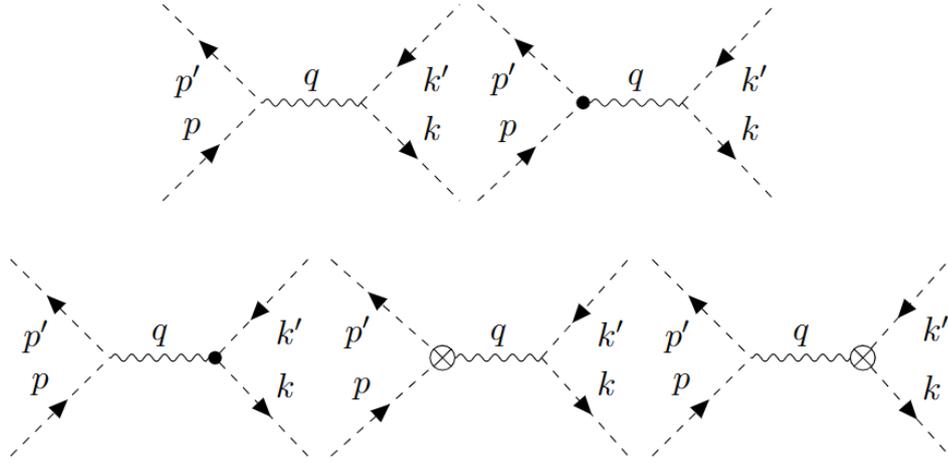


Figura 2: Diagramas de Feynman possíveis para mésons e antimésons do tipo  $a$  se espalhando em mésons e antimésons do tipo  $b$ .

Aqui cabe uma observação. Cada gráfico na figura (2) contribui individualmente para  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  com uma matriz<sup>1</sup>  $\hat{\mathcal{M}}_i(\beta)$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) de modo que

$$\hat{\mathcal{M}}(\beta) = \sum_{n=1}^5 \hat{\mathcal{M}}_i(\beta), \quad (4.10)$$

com

$$\hat{\mathcal{M}}_i(\beta) = \mathcal{M}_i(\beta) - \tilde{\mathcal{M}}_i(\beta). \quad (4.11)$$

Assim, é aconselhável escrever separadamente para cada diagrama  $\mathcal{M}_i$  e  $\tilde{\mathcal{M}}_i$ , para só depois realizar a soma segundo as Eqs. (4.10) e (4.11). Digamos, por exemplo, que  $\hat{\mathcal{M}}_1(\beta)$  seja a matriz correspondente ao primeiro diagrama da figura (2), localizado no canto superior esquerdo. Então,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1(\beta) &= u_B(\mathbf{p}, \beta) ie\eta^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) u_B(\mathbf{p}', \beta) \\ &\times \left[ -\frac{i\eta_{\nu\rho}}{q^2} - 2\pi\eta_{\nu\rho} v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \right] \\ &\times u_B(\mathbf{k}, \beta) ie\eta^{\sigma\rho} (k_\sigma - k'_\sigma) u_B(\mathbf{k}', \beta) \end{aligned} \quad (4.12)$$

e

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_1(\beta) &= v_B(\mathbf{p}, \beta) \left[ -ie\eta^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) \right] v_B(\mathbf{p}', \beta) \\ &\times \left[ \frac{i\eta_{\nu\rho}}{q^2} - 2\pi\eta_{\nu\rho} v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \right] \\ &\times v_B(\mathbf{k}, \beta) \left[ -ie\eta^{\sigma\rho} (k_\sigma - k'_\sigma) \right] v_B(\mathbf{k}', \beta), \end{aligned} \quad (4.13)$$

<sup>1</sup>Note que temos cinco gráficos.

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_1(\beta) &= e^2(p^\nu - p'^\nu)(k_\nu - k'_\nu)v_B(\mathbf{p}, \beta)v_B(\mathbf{p}', \beta)v_B(\mathbf{k}, \beta)v_B(\mathbf{k}', \beta) \\ &\times \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} + 1 \right] \\ &\times \left\{ \frac{1}{q^2} - 2\pi i v_B^2(\mathbf{q}, \beta) \delta(q^2) \left[ \frac{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} - 1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} + 1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde também temos usado as Eqs. (2.11) e (2.12). Note que nenhum termo de violação é observado, pois não há a presença de vértices como os das equações (3.46)-(3.48).

Uma vez tendo encontrado  $\hat{\mathcal{M}}(\beta)$  na Eq. (4.9), precisamos calcular  $|\hat{\mathcal{M}}(\beta)|^2$  no referencial do centro de massa, onde são válidas as Eqs. (2.101) e (2.102). Note que

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{M}}(\beta)|^2 &= \frac{e^4}{q^4} v^2(\mathbf{p}, \beta) v^2(\mathbf{p}', \beta) v^2(\mathbf{k}, \beta) v^2(\mathbf{k}', \beta) \left[ e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} + 1 \right]^2 \\ &\times \left\{ [(p^\nu - p'^\nu)(k_\nu - k'_\nu)]^2 + 2(p^\nu - p'^\nu)(k_\nu - k'_\nu) \right. \\ &\times \left. \left[ 2(\hat{k}_c)^{\mu\nu}(p_\mu - p'_\mu)(k_\nu - k'_\nu) - 2(\hat{k}_a)^\mu(p_\mu - k'_\mu) \right] \right\} \\ &\times \left\{ 1 + 4\pi^2 q^4 v^4(\mathbf{q}, \beta) [\delta(q^2)]^2 \left[ \frac{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} - 1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'})/2} + 1} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde temos desconsiderado termos de segunda ordem nos parâmetros de violação. Assim:

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2 &= e^4 \frac{(e^{\beta E_{CM}} + 1)^2}{(e^{\beta E_{CM}/2} - 1)^4} \\ &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{m_b^2}{E^2} \right] \cos^2 \theta + 4\sqrt{1 - \frac{m_b^2}{E^2}} \cos \theta \left[ \frac{\hat{K}_c^{3j}(k_j - k'_j)}{E_{CM}} + \frac{\hat{K}_a^j(p_j - k'_j)}{E_{CM}^2} \right] \right\} \\ &\times \left\{ 1 + \left[ \frac{2\pi E_{CM}^2 \delta(E_{CM}^2)}{e^{\beta E_{CM}} + 1} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde temos usado mais uma vez (2.11) e (2.12). Aqui,  $m_b$  é a massa de um méson do tipo  $b$  e  $E_{CM} = 2E$ .

Agora, uma vez que a Eq. (2.54), no referencial do centro de massa, assume a forma

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta, CM} = \frac{1}{2E_{CM}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{CM}} |\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2, \quad (4.17)$$

com  $|\hat{\mathcal{M}}_{CM}(\beta)|^2$  dado pela expressão (4.16), podemos finalmente escrever a seção de choque

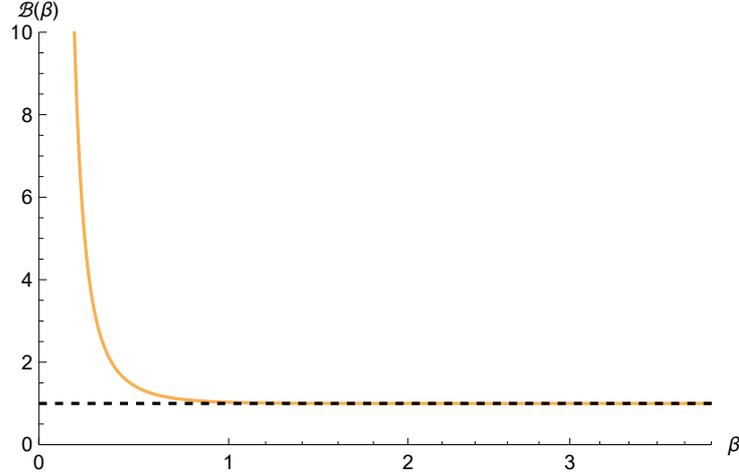


Figura 3: Gráfico da função  $\mathcal{B}$  em relação a  $\beta$  (curva amarela).

diferencial dependente da temperatura, para o espalhamento de mésons da Eq. (4.8), como

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta, CM} &= \mathcal{B}(\beta) \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \left[ 1 - \frac{m_b^2}{E^2} \right]^{3/2} \left\{ \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \left[ \left( \hat{k}_c^{32} + \frac{\hat{k}_a^2}{2E_{CM}} \right) \sin \theta \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \hat{k}_c^{33} + \frac{\hat{k}_a^3}{2E_{CM}} \right) \cos \theta + \frac{\hat{k}_a^3}{2E_{CM}} \left( 1 - \frac{m_b^2}{E^2} \right)^{-1/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $\alpha = e^2/4\pi$  é a constante de estrutura fina e

$$\mathcal{B}(\beta) = \frac{(e^{\beta E_{cm}} + 1)^2}{(e^{\beta E_{cm}/2} - 1)^4} \left\{ 1 + \left[ \frac{2\pi E_{cm}^2 \delta(E_{cm}^2)}{e^{\beta E_{cm}} + 1} \right]^2 \right\} \quad (4.19)$$

é o fator de correção termal. Como podemos notar, existe em  $\mathcal{B}(\beta)$  um produto de funções delta com argumentos idênticos, a saber,  $[\delta(E_{cm}^2)]^2$ . Tais termos são muito comuns no formalismo DCT e surgem devido a dependência do propagador com a temperatura<sup>2</sup>. Eles representam um tipo de patologia aparente, conhecidas na literatura como singularidades de *pinch* [114], que podem ser evitadas ao se trabalhar com a forma regularizada das funções delta e suas derivadas, Eq. (2.150). Nesta equação, como mencionado nas Refs. [114, 115], se o  $\varepsilon$  for mantido finito, pode ser mostrado que termos potencialmente perigosos, como aqueles, irão se cancelar depois que todos os diagramas relevantes forem levados em consideração.

Para finalizar, podemos calcular a seção de choque total integrando sobre  $d\Omega$ . O resultado será:

$$\sigma_{\text{total}}(\beta) = \mathcal{B}(\beta) \left( 1 - 4\hat{k}_c^{33} - \frac{2\hat{k}_a^3}{E_{cm}} \right) \frac{\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \left[ 1 - \frac{4m_b^2}{E_{cm}^2} \right]^{3/2}. \quad (4.20)$$

Claramente, o comportamento da seção de choque com a temperatura é ditado pela função  $\mathcal{B}(\beta)$ . De fato, como pode ser observado na figura (3), esta função tende a 1 no limite

<sup>2</sup>Para o caso da eletrodinâmica usual, veja Eq. (2.105).

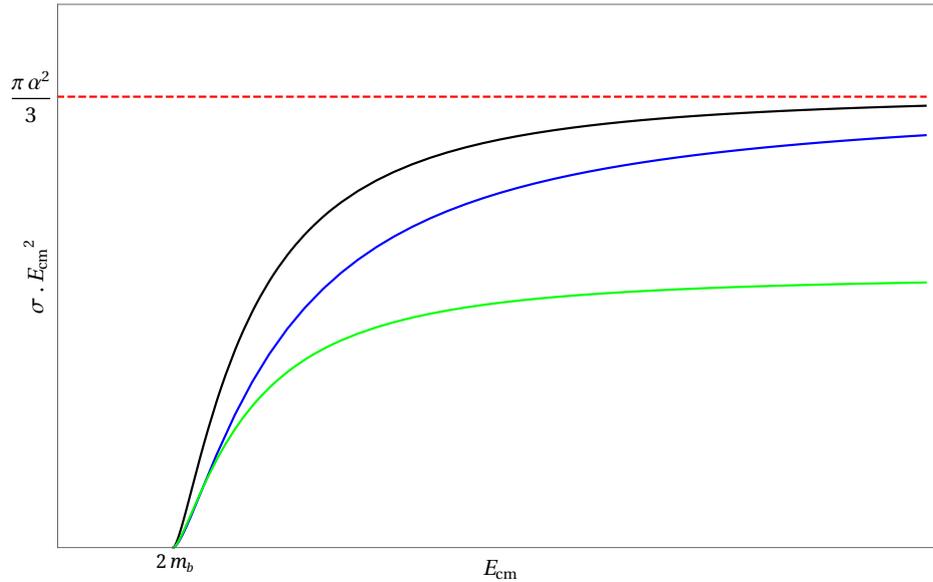


Figura 4: Comportamento da seção de choque em temperatura zero com a energia do centro de massa para o espalhamento de mésons em uma eletrodinâmica escalar violando a simetria de Lorentz: Caso padrão (linha preta),  $\hat{k}_c^{33} = 0$  e  $\hat{k}_a^3 = 1/2$  (linha azul),  $\hat{k}_c^{33} = 1/10$  e  $\hat{k}_a^3 = 0$  (linha verde).

de temperatura zero ( $\beta \rightarrow \infty$ ), permitindo assim recuperar o resultado padrão de uma eletrodinâmica escalar violando Lorentz. Na figura (4), plotamos a seção de choque total, à temperatura zero, como função da energia do centro de massa do sistema. Note que a violação da simetria de Lorentz, ditada pelos coeficientes  $(\hat{k}_c)^{33}$  e  $(\hat{k}_a)^3$ , tende a diminuir o valor da seção de choque, como podemos concluir das curvas azul e verde. Além disso, correções termais a seção de choque, devido a altas temperaturas, são extremamente relevantes, uma vez que a função  $\mathcal{B}(\beta)$  assume altos valores nesse limite, como pode ser novamente observado da figura (3). Também, o comportamento da seção de choque com os coeficientes que violam a simetria de Lorentz está relacionado com a direção de propagação dos mésons no início do processo, uma vez que nosso resultado só depende de  $(\hat{k}_c)^{33}$  e  $(\hat{k}_a)^3$ .

## 5 CORREÇÕES RADIOATIVAS NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA À TEMPERATURA FINITA

Um dos assuntos mais interessantes e bem estabelecido da física de altas energias é o da geração radioativa de termos que violam a simetria de Lorentz do MPE. Desde o final dos anos 90, onde foi mostrado que o termo CPT-ímpar  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\alpha\beta}$ , conhecido na literatura como termo de Carroll–Field–Jackiw (CFJ), era induzido por correções radioativas devido ao termo  $b_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$  do setor fermiônico<sup>1</sup> do MPE [30, 86, 116], o assunto vem sendo amplamente investigado ao longo dos anos [117–122], inclusive no contexto de temperatura finita [45, 47, 123–125].

Neste capítulo, calculamos as correções radioativas a um loop para a auto-energia do campo de gauge em uma eletrodinâmica escalar modificada por termos que violam a simetria de Lorentz na estrutura do MPE. Investigamos tanto as contribuições devido ao setor CPT-par como as do setor CPT-ímpar. Utilizamos o método de regularização dimensional e implementamos temperatura por meio do formalismo de Matsubara. Os resultados deste capítulo foram publicados na Ref. [60].

### 5.1 Tensor de polarização do fóton a 1-loop

O tensor de polarização (auto-energia) do fóton,  $\Pi^{\mu\nu}(k)$ , no modelo de eletrodinâmica escalar estendida discutida no final do capítulo (3), pode ser escrito como<sup>2</sup>

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = T^{\mu\nu}(k) + R^{\mu\nu}(k), \quad (5.1)$$

onde  $T^{\mu\nu}(k)$  e  $R^{\mu\nu}(k)$  são as contribuições devido aos coeficientes CPT-par e CPT-ímpar do MPE, respectivamente. Estudaremos isoladamente cada caso nas subseções que se seguem.

#### 5.1.1 Contribuições CPT-par

Nesta subseção, iremos calcular as correções à polarização do vácuo devido ao coeficiente  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  no cenário de temperatura finita. Nosso ponto de partida será escrever  $T^{\mu\nu}(k)$  considerando todos os diagramas possíveis a 1-loop que violam Lorentz em primeira ordem no coeficiente  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$ . Tais diagramas, representados na figura (5), permitem escrever o tensor de polarização CPT-par como

$$T^{\mu\nu}(k) = T_1^{\mu\nu}(k) + T_2^{\mu\nu}(k) + T_3^{\mu\nu}(k) + T_4^{\mu\nu}(k), \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Veja capítulo (2).

<sup>2</sup> $k$  representa o quadrimomento do fóton.

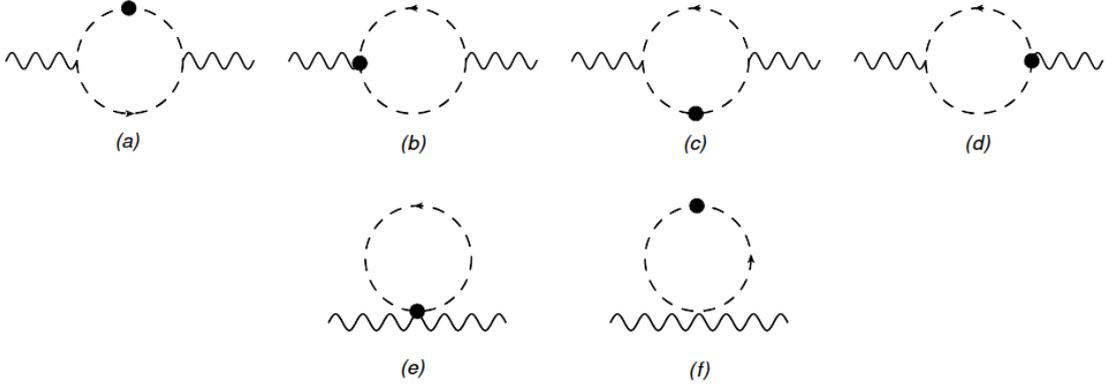


Figura 5: Diagramas de Feynman a 1-loop correspondentes ao setor CPT-par da eletrodinâmica estendida.

onde

$$T_1^{\mu\nu}(k) = 2e^2(\hat{k}_c)^{\alpha\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \times [\eta^{\mu\nu}(q^2 - m^2) - (p^\mu + q^\mu)(p^\nu + q^\nu)]; \quad (5.3)$$

$$T_2^{\mu\nu}(k) = e^2(\hat{k}_c)^{\mu\alpha} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p_\alpha + q_\alpha)(p^\nu + q^\nu)(p^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}; \quad (5.4)$$

$$T_3^{\mu\nu}(k) = e^2(\hat{k}_c)^{\nu\alpha} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p_\alpha + q_\alpha)(p^\mu + q^\mu)(p^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}; \quad (5.5)$$

$$T_4^{\mu\nu}(k) = -e^2(\hat{k}_c)^{\mu\nu} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} \quad (5.6)$$

e  $q = p + k$ . Aqui cabem duas observações. A primeira é que, ao escrever as equações acima, temos feito uso das regras de Feynman<sup>3</sup> apresentadas no final do capítulo (3) e, portanto, todas as expressão ainda estão sendo avaliadas no regime de temperatura zero. A segunda observação diz respeito à correlação entre os diagramas da figura (5) e as Eqs. (5.3)-(5.6). Especificamente, os diagramas (a) e (c) contribuem com a mesma expressão, que somadas a contribuição do diagrama (f), produzem a Eq. (5.3). As Eqs. (5.4)-(5.6), por outro lado, correspondem aos diagramas (b), (d) e (e), respectivamente.

Após uma parametrização de Feynman<sup>4</sup>, que permite escrever

$$\frac{1}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[(p+xk)^2 - M^2]^3}, \quad (5.7)$$

<sup>3</sup>Note que estamos nos referindo as regras de Feynman convencionais e não aquelas que derivamos no formalismo DCT. Aqui utilizaremos uma outra abordagem, através do formalismo do tempo imaginário (Matsubara).

<sup>4</sup>Para mais detalhes sobre a parametrização de Feynman, veja Ref. [5].

com

$$M^2 = m^2 + x(x-1)k^2, \quad (5.8)$$

as Eqs. (5.3)-(5.6) assumem a forma

$$T_i^{\mu\nu}(k) = 2e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx 2(1-x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(N_i)^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (5.9)$$

onde  $i = 1, \dots, 4$  e

$$\begin{aligned} (N_1)^{\mu\nu} &= x^2 (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \{ \eta^{\mu\nu} [(1-x)^2 k^2 - m^2] - (1-2x)^2 k^\mu k^\nu \} \\ &+ \{ 4x(1-2x) [(\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu] \\ &+ (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} (Dx^2 - 4x) \} \frac{p^2}{D} - 8(\hat{k}_c)^{\mu\nu} \frac{p^4}{D(D+2)}; \\ (N_2)^{\mu\nu} &= \frac{(1-2x)^2}{2} (k^2 x^2 - m^2) (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu \\ &+ \{ (2x-1) [2x(D+4) - D] (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu \\ &+ 4(x^2 k^2 - m^2) (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \} \frac{p^2}{2D} \\ &+ 24(\hat{k}_c)^{\mu\nu} \frac{p^4}{2D(D+2)}; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$(N_3)^{\mu\nu} = (N_2)^{\nu\mu}; \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} (N_4)^{\mu\nu} &= -(\hat{k}_c)^{\mu\nu} \{ x^2 (x-1)^2 k^4 - (2x^2 - 2x + 1) m^2 k^2 + m^4 \} \\ &- (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \{ k^2 [2Dx(x-1) + D + 4x(x-1)] - 2Dm^2 \} \frac{p^2}{D} \\ &- (\hat{k}_c)^{\mu\nu} p^4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ao escrever o resultado acima, temos assumido a condição de traço nulo satisfeita pelo coeficiente CPT-par,

$$(\hat{k}_c)^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = (\hat{k}_c)^\mu{}_\mu = 0, \quad (5.13)$$

além das propriedades<sup>5</sup>

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu f(p^2) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\eta^{\mu\nu}}{D} p^2 f(p^2) \quad (5.14)$$

e

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta f(p^2) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(\eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha})}{D} p^4 f(p^2) \quad (5.15)$$

Temos também empregado o procedimento da regularização dimensional, que consiste em es-

<sup>5</sup>Veja Ref. [68] para mais detalhes.

tender o espaço-tempo de 4 para  $D$  dimensões, de modo que

$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \quad (5.16)$$

sendo  $\mu$  um regularizador de massa. Isto nos permitirá isolar as possíveis divergências do nosso resultado<sup>6</sup>.

Resolvendo a integral (5.9) para cada  $i$  e expandindo o resultado em torno de  $\varepsilon = 4 - D$ , encontraremos que

$$T^{\mu\nu}(k) = -\frac{ie^2}{48\pi^2\varepsilon} \left\{ g^{\mu\nu} [2k_\alpha k_\beta (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} - \kappa k^2] + 2k^2 (\hat{k}_c)^{\mu\nu} + \kappa k^\mu k^\nu - 2k^\nu k_\alpha (\hat{k}_c)^{\alpha\mu} - 2k^\mu k_\alpha (\hat{k}_c)^{\alpha\nu} \right\} + F_0^{\mu\nu}(k), \quad (5.17)$$

onde  $\kappa = g^{\alpha\beta} (\hat{k}_c)_{\alpha\beta}$ . No resultado acima, temos somente escrito explicitamente a parte divergente do tensor de polarização CPT-par em temperatura zero, entretanto, a expressão para a parte finita,  $F_0^{\mu\nu}(k)$ , pode ser encontrada no apêndice (A). Note que toda expressão é, por construção, invariante de gauge:

$$k_\mu T^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (5.18)$$

Considerando mais uma vez a condição de traço nulo, Eq. (5.13), podemos reduzir a Eq. (5.17) para

$$T^{\mu\nu}(k) = -\frac{ie^2}{24\pi^2\varepsilon} (\hat{k}_F)^{\alpha\beta\mu\nu} k_\alpha k_\beta + F_0^{\mu\nu}(k), \quad (5.19)$$

onde temos definido

$$(\hat{k}_F)^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - (\hat{k}_c)^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} - (\hat{k}_c)^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}. \quad (5.20)$$

### 5.1.1.1 Regime de temperatura finita

No final do capítulo (2), quando discutimos propagadores no formalismo de Matsubara, chegamos a conclusão de que quantidades termais podem ser derivadas daquelas em temperatura zero por meio de uma rotação de Wick, que conduz o espaço-tempo de Minkowski ao espaço Euclidiano através das Eqs. (2.321)-(2.323), e das transformações (2.336) e (2.337). Embora nossa discussão tenha sido feita para 4-dimensões, podemos generalizá-la para um espaço-tempo  $D$ -dimensional, onde a única modificação que acontece é no elemento de integração:

$$\int \frac{d^D p_E}{(2\pi)^D} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad (5.21)$$

<sup>6</sup>Para mais detalhes sobre a técnica de regularização dimensional, veja Ref. [68].

com  $d = D - 1$ . Quando estas transformações são aplicadas a Eq. (5.9), seremos conduzidos a um conjunto de três integrais que podem ser escritas resumidamente como

$$I_j = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + \Delta)^{4-j}}, \quad (5.22)$$

onde  $\Delta = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2(n^2 + \xi^2)$ , com  $\xi = \frac{M\beta}{2\pi}$  e  $j = 1, 2, 3$ . Resolvendo a integral de momento<sup>7</sup>, obtemos

$$I_j = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(4-j-\frac{d}{2})}{\Gamma(4-j)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-8+2j} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + \xi^2)^{-(4-j-\frac{d}{2})}. \quad (5.23)$$

Agora, o somatório acima pode apresentar singularidades no limite em que  $d \rightarrow 3$  e, a fim de isolá-las, iremos recorrer a expressão de Ford [126]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)(a^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} + 4\sin(\pi\lambda)f_\lambda(a, b), \quad (5.24)$$

onde a função

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right] \quad (5.25)$$

é válida para  $\operatorname{Re}[\lambda] < 1$ , além dos polos em  $\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ . Deste modo, a Eq. (5.23) assume a forma

$$I_j = \frac{M^{d-7+2j}\Gamma\left(\frac{7-2j-d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(4-j)} + \frac{\Gamma\left(j-\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(4-j)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-8+2j} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) A_j(\xi, d), \quad (5.26)$$

onde

$$A_1(\xi, d) = \frac{\pi^2}{\xi^2} F_3(\xi, d) - \frac{(d-2)(d-3)}{2\xi^2} F_2(\xi, d); \quad (5.27)$$

$$A_2(\xi, d) = -2F_2(\xi, d); \quad (5.28)$$

$$A_3(\xi, d) = \frac{8}{(d-4)(d-2)} F_1(\xi, d). \quad (5.29)$$

<sup>7</sup>Para detalhes sobre como resolver integrais desse tipo, veja Ref. [68].

Aqui,  $F_1(\xi, d)$ ,  $F_2(\xi, d)$ , e  $F_3(\xi, d)$  são funções dependentes da temperatura, de dimensão arbitrária  $d$ , dadas por

$$F_k(\xi, d) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{k - \frac{d}{2}}} [\coth(\pi z) - 1], \quad (5.30)$$

quando  $k = 1, 2$ , e

$$F_3(\xi, d) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{1 - \frac{d}{2}}} \coth(\pi z) \operatorname{csch}^2(\pi z). \quad (5.31)$$

Ao escrever a Eq. (5.26), temos ainda usado a relação de recorrência

$$f_\lambda(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \left[ \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(a, b) + \frac{1}{2(\lambda - 2)(\lambda - 1)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b) \right], \quad (5.32)$$

para lidar com os valores de  $\lambda$  que não pertencem ao intervalo permitido da função  $f_\lambda(a, b)$ .

Finalmente, após aplicar todos estes resultados na Eq. (5.9), podemos escrever o tensor de polarização CPT-par total, Eq. (5.2), como

$$T^{\mu\nu}(k) = T_0^{\mu\nu}(k) + T_\beta^{\mu\nu}(k), \quad (5.33)$$

onde

$$T_0^{\mu\nu}(k) = -\frac{ie^2}{24\pi^2\epsilon} (\hat{k}_F)^{\alpha\beta\mu\nu} k_\alpha k_\beta + F_0^{\mu\nu}(k), \quad (5.34)$$

é parte que não depende da temperatura, dada pela Eq. (5.19). Note que toda a dependência com a temperatura está contida na função

$$T_\beta^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2}{\beta^2} \{ (\hat{k}_c)^{\mu\nu} H(\xi, k) - (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta I^{\mu\nu}(\xi, k) - [(\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu] J(\xi, k) \}, \quad (5.35)$$

com

$$H(\xi, k) = H_1(\xi, k) + H_2(\xi, k) + H_3(\xi, k); \quad (5.36)$$

$$I^{\mu\nu}(\xi, k) = I_1^{\mu\nu}(\xi, k) + I_2^{\mu\nu}(\xi, k); \quad (5.37)$$

$$J(\xi, k) = J_1(\xi, k) + J_2(\xi, k); \quad (5.38)$$

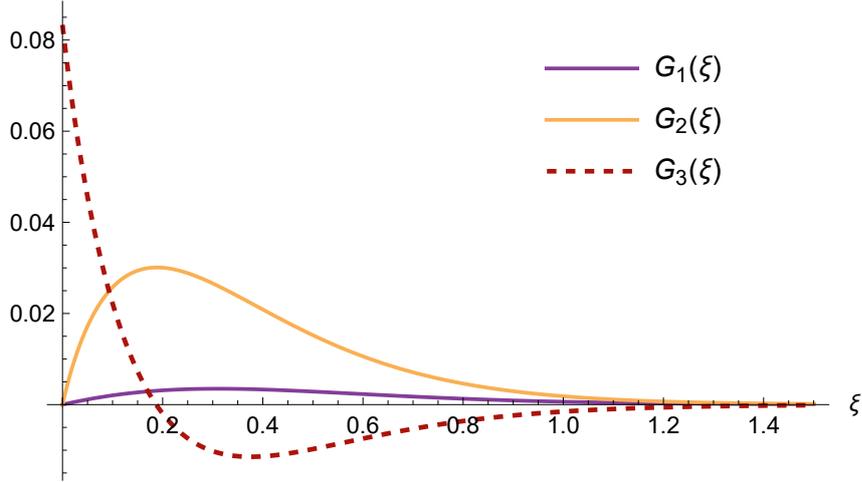


Figura 6: Gráficos de  $G_1$  (linha lilás),  $G_2$  (linha amarela) e  $G_3$  (linha vermelha tracejada) como função de  $\xi$ .

e

$$H_1(\xi, k) = \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 dx G_1(\xi) (1-x) \times \frac{m^4 - x(x+2)m^2k^2 + x(10x-3)(x-1)^2k^4}{[m^2 + k^2x(x-1)]^2}; \quad (5.39)$$

$$H_2(\xi, k) = 2 \int_0^1 dx G_2(\xi) (1-x) \frac{m^2 + k^2[x(3-2x) - 1]}{m^2 + k^2x(x-1)}; \quad (5.40)$$

$$H_3(\xi, k) = \frac{4}{3} \int_0^1 dx G_3(\xi) (1-x); \quad (5.41)$$

$$I_1^{\mu\nu}(\xi, k) = \pi^2 \int_0^1 dx G_1(\xi) x(x-1) \times \frac{k^\mu k^\nu x(1-2x)^2 + \eta^{\mu\nu}[m^2 - 2x(x-1)^2k^2]}{[m^2 + k^2x(x-1)]^2}; \quad (5.42)$$

$$I_2^{\mu\nu}(\xi, k) = 2\eta^{\mu\nu} \int_0^1 dx G_2(\xi) \frac{x(x-1)^2}{m^2 + k^2x(x-1)}; \quad (5.43)$$

$$J_1(\xi, k) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 dx G_1(\xi) \frac{k^2x(x-1)(1-2x)^3}{[m^2 + k^2x(x-1)]^2}; \quad (5.44)$$

$$J_2(\xi, k) = \int_0^1 dx G_2(\xi) \frac{(x-1)(1-2x)^2}{m^2 + k^2x(x-1)}. \quad (5.45)$$

As funções dependentes da temperatura  $G_1(\xi)$ ,  $G_2(\xi)$  e  $G_3(\xi)$ , que se comportam<sup>8</sup> em relação a variável  $\xi$  como apresentado figura (6), são dadas por

<sup>8</sup>É importante notar que a variável  $\xi$  possui uma dependência em  $x$  de modo que o comportamento das funções  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  dependem, de fato, do resultado da integral em  $x$ . Entretanto, podemos pensar nos gráficos da figura (6) como sendo construído para um valor de  $x$  fixo, ou mesmo como sendo tomados no regime de baixas energias, desde que estejamos interessados somente no comportamento geral de tais funções.

$$G_1(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \xi^2 \sqrt{z^2 - \xi^2} \coth(\pi z) \operatorname{csch}^2(\pi z); \quad (5.46)$$

$$G_2(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{\xi^2}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} [\coth(\pi z) - 1]; \quad (5.47)$$

$$G_3(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{z^2 - 2\xi^2}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} [\coth(\pi z) - 1], \quad (5.48)$$

respectivamente. Note que a parte dependente da temperatura não exibe divergências no limite  $d \rightarrow 3$ , e temos assumido este valor quando escrevemos a Eq. (5.35). Do gráfico na figura (6), pode também ser notado que todas as funções  $G$  tendem a zero no limite de temperatura zero ( $\xi \rightarrow \infty$ ), assim recuperando o resultado da Eq. (5.34), uma vez que  $T_{\beta}^{\mu\nu} \rightarrow 0$ , como esperado. No limite de altas temperaturas ( $\xi \rightarrow 0$ ), por sua vez, a função  $G_3(\xi)$  é dominante e nosso resultado na Eq. (5.35) torna-se uma função quadrática com a temperatura,

$$T_{\beta}^{\mu\nu}(k) \rightarrow \frac{ie^2}{18} T^2 (\hat{k}_c)^{\mu\nu}, \quad (5.49)$$

uma vez que  $G_3(\xi) \rightarrow \frac{1}{12}$ . É importante destacar, aqui, que os efeitos de temperatura não afetam a estrutura tensorial do tensor de polarização. Por fim, observe que o resultado para altas temperaturas, Eq. (5.49), claramente viola a invariância de *gauge*. Entretanto, muito embora não seja possível escrever uma expressão analítica fechada para a Eq. (5.35), podemos, ao menos, avaliá-la numericamente. Ao fazermos isso, conseguimos mostrar que a parte dependente da temperatura do tensor de polarização CPT-par preserva a invariância de *gauge* desde que  $\beta > 0$ .

### 5.1.2 Contribuições CPT-ímpar

Analogamente, os diagramas correspondentes as contribuições CPT-ímpar para a auto-energia do fóton têm a mesma estrutura geral que aqueles da figura (5), mas com o fator de vértice da Eq. (3.46) sendo substituído pelo da Eq. (3.47) e com o diagrama (*e*) sendo excluído da análise, veja Fig. (7). Consequentemente, o tensor de polarização que leva em consideração contribuições do coeficiente vetorial  $(\hat{k}_a)^{\mu}$  pode ser escrito como

$$R^{\mu\nu}(k) = R_1^{\mu\nu}(k) + R_2^{\mu\nu}(k) + R_3^{\mu\nu}(k), \quad (5.50)$$

onde

$$R_1^{\mu\nu}(k) = -e^2 (\hat{k}_a)^{\mu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^{\nu} + q^{\nu})(p^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}, \quad (5.51)$$

$$R_2^{\mu\nu}(k) = -e^2 (\hat{k}_a)^{\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^{\mu} + q^{\mu})(p^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}, \quad (5.52)$$

$$R_3^{\mu\nu}(k) = -2e^2 \eta^{\mu\nu} (\hat{k}_a)^{\alpha} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\alpha}(q^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2}. \quad (5.53)$$

Aqui cabem mais duas observações: as expressões que surgem dos diagramas (*a*) e (*c*) são

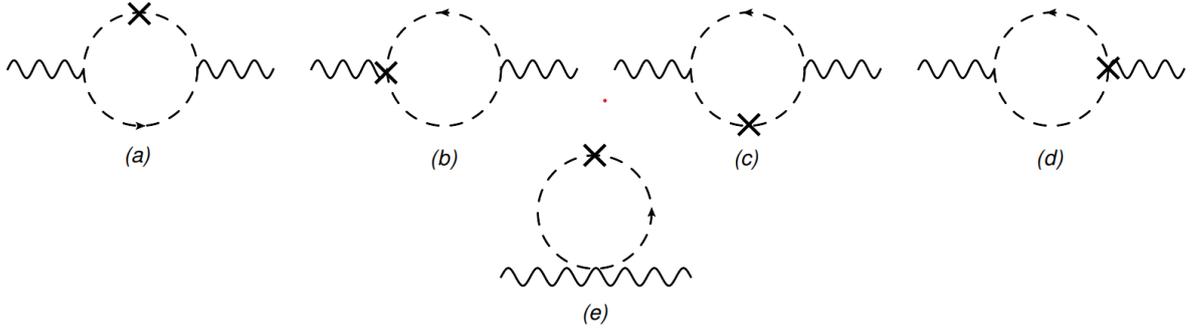


Figura 7: Diagramas de Feynman a 1-loop correspondentes ao setor CPT-ímpar da eletrodinâmica estendida.

canceladas uma com a outra e as Eqs. (5.51)-(5.53) são correspondentes aos diagramas (b), (d), e (e), respectivamente.

Agora, seguindo passo a passo o procedimento descrito na subseção anterior, somos conduzidos ao resultado

$$R_{total}^{\mu\nu}(k) = R_0^{\mu\nu}(k) + R_\beta^{\mu\nu}(k), \quad (5.54)$$

com

$$R_0^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (5.55)$$

sendo o tensor de polarização em temperatura zero e

$$R_\beta^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2}{\beta^2} \{ \eta^{\mu\nu} (\hat{k}_a)^\alpha k_\alpha K(\xi, k) + [(\hat{k}_a)^\mu k^\nu + (\hat{k}_a)^\nu k^\mu] L(\xi, k) \}, \quad (5.56)$$

a correção devido a temperatura. Nesta última equação, temos ainda que

$$K(\xi, k) = K_1(\xi, k) + K_2(\xi, k); \quad (5.57)$$

$$L(\xi, k) = L_1(\xi, k) + K_2(\xi, k); \quad (5.58)$$

e

$$K_1(\xi, k) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 dx G_1(\xi) (x-1)^2 \frac{m^2 + k^2 x(5x-3)}{[m^2 + k^2 x(x-1)]^2}; \quad (5.59)$$

$$K_2(\xi, k) = \int_0^1 dx G_2(\xi) (x-1) \frac{1-3x}{m^2 + k^2 x(x-1)}; \quad (5.60)$$

$$L_1(\xi, k) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 dx G_1(\xi) x(x-1) \frac{m^2 + k^2(1-5x+5x^2)}{[m^2 + k^2 x(x-1)]^2}. \quad (5.61)$$

O resultado nulo na Eq. (5.55) é, de fato, esperado no regime de temperatura zero.

Ele pode ser interpretado como uma consequência da simetria de conjugação de carga, que acaba por conduzir a uma generalização do teorema de Furry. Em sua versão usual, para a eletrodinâmica espinorial, o teorema de Furry afirma que qualquer *loop* de férmion com um número ímpar de fótons externos tem amplitude nula [68]. O efeito da operação de conjugação de carga não está relacionada com o espaço-tempo, mas sim com os campos. Estes operadores atuam intercambiando partículas e anti-partículas segundo a Eq. (3.30). Entretanto, o efeito líquido de  $C$  sobre regras de Feynman pode ser descrito considerando que  $Cp_\mu C = -p_\mu$ . Conseqüentemente, inserindo um operador identidade, a saber,  $I = \hat{C}\hat{C}$ , entre cada propagador e vértice, é possível ver o cancelamento de qualquer *loop* com um número ímpar de fótons externos para as contribuições devido a  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$ , assim como o cancelamento de qualquer *loop* com um número par de fótons externos para as contribuições devido a  $(\hat{k}_a)^\mu$ . A diferença no teorema de Furry para  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{k}_a)^\mu$  é devido ao fato de que, enquanto  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  preserva a simetria de conjugação,  $(\hat{k}_a)^\mu$  a quebra, como podemos ver na tabela (4). Em temperatura finita, a simetria de conjugação de carga é quebrada com a presença da quantidade não-nula encontrada na Eq. (5.56). Entretanto, a simetria parece ser restaurada no limite de altas temperaturas, desde que as funções  $G_1(\xi)$  e  $G_2(\xi)$  vão a zero, o que é um resultado bastante interessante. Em relação a simetria de *gauge*, realizando uma análise numérica, conseguimos mostrar que  $k_\mu R_\beta^{\mu\nu}(k) = 0$  para  $\beta > 0$ , ou seja, que a simetria de *gauge* é, de fato, preservada.

Em adição, é importante notar que o coeficiente  $(\hat{k}_a)^\mu$  pode ser visto como um potencial químico generalizado para partículas carregadas. De fato, tanto os coeficientes CPT-par quanto CPT-ímpar foram considerados na investigação de efeitos de violação de Lorentz em sistemas envolvendo transições de fase que conduziam a um condensado de Bose-Einstein (CBE) em temperatura finita. Na Ref. [127], por exemplo, os autores encontraram alguns limites superiores para os termos CPT-par considerando um gás de bóson ideal não relativístico, verificando também que no caso relativístico o potencial químico tem contribuições que violam a simetria de Lorentz. Na Ref. [128], foram obtidas expressões analíticas para a pressão, a energia, o calor específico e a densidade de carga considerando tanto  $(\hat{k}_a)^0$  como  $(\hat{k}_a)^i$ , assim como uma correção para a temperatura crítica  $T_c$ , que estabelece o CBE. Nesta mesma referência, é possível ver claramente o papel de potencial químico generalizado desempenhado por  $(\hat{k}_a)^\mu$ . Note, portanto, que os resultados obtidos neste capítulo sugerem que novas contribuições podem estar presentes, tanto em um potencial químico generalizado que viola a simetria de Lorentz como na temperatura crítica  $T_c$ , onde o CBE acontece.

## 6 ENERGIA DE CASIMIR NA ELETRODINÂMICA ESCALAR ESTENDIDA

O efeito Casimir é um fenômeno puramente quântico e se apresenta com uma das mais diretas manifestações da existência de flutuações do vácuo quântico [129, 130]. Previsto por H. Casimir em 1948 [131], o efeito Casimir é caracterizado pela força de atração entre duas placas condutoras paralelas, e eletricamente neutras, separadas por uma pequena distância no vácuo quântico. Esta força surge como uma consequência das condições de contorno impostas nos campos eletromagnéticos devido a presença das placas, que acaba por forçar as frequências dos campos a um espectro discreto com valores específicos e bem definidos. Consequentemente, a energia de ponto zero (energia de vácuo) também sofre mudanças, onde, após um processo de regularização, o que se obtém é uma quantidade finita que pode ser interpretada como a energia necessária para manter as placas em uma determinada configuração desejada. Experimentalmente, M. J. Sparnaay confirmou o efeito Casimir em uma escala micrométrica para placas de alumínio em 1958 [132]. Cerca de 39 anos depois, o experimento foi novamente executado com muito mais precisão usando camadas de cobre e ouro por Lamoreaux [133] e para uma esfera e placa plana, ambas metálicas, por Mohideen and Roy [134]. Uma revisão moderna dos métodos experimentais e medidas pode ser encontradas nas Refs. [134–136].

Embora o efeito Casimir tenha sido inicialmente estudado para o campo eletromagnético, ele pode ocorrer para qualquer campo quântico sobre certas condições de contorno, que podem ser meios materiais, interface entre duas fases do vácuo, ou até mesmo topologias no espaço tempo [129, 137]. De fato, o efeito Casimir pode depender de muitos parâmetros: como a geometria do material confinante e o tipo de condições de contorno (Dirichlet, Neumann, ou mista) levadas em consideração [138, 139], ou até mesmo da presença de dimensões extras [140]. Neste sentido, o efeito Casimir foi vastamente avaliado nos mais diversos cenários: como o de buracos negros [139, 141–144], de gravidade modificada [145, 146], de teoria de campos do tipo Hořava-Lifshitz [147–151], e mesmo no contexto de violação de Lorentz [138, 152–154].

Neste capítulo, o setor tensorial, em 4 dimensões, da extensão da eletrodinâmica escalar violando a simetria de Lorentz, apresentada no capítulo (3), será considerado no cálculo da energia de Casimir para um campo escalar complexo satisfazendo condições de Dirichlet entre duas grandes placas paralela separadas por uma pequena distância. Como veremos, por meio de uma parametrização tensorial apropriada, dada em termos de vetores que compreendem os coeficientes de violação, seremos capazes de investigar o efeito Casimir em três diferentes cenários: isotrópico, anisotrópico de paridade ímpar e anisotrópico de paridade par. Consequentemente, efeitos de violação na energia de Casimir podem depender da direção do espaço-tempo tomada para análise. Em todos os casos, aplicaremos o processo de regularização dimensional, afim de regularizar nossos resultados. Os resultados deste capítulo foram submetidos para publicação e estão sob análise de *referee*, mas podem ser encontrados na Ref. [61].

## 6.1 Equações de campo parametrizadas

Nesta seção, apresentamos algumas características do modelo que consideraremos na investigação do efeito Casimir, cuja Lagrangiana, descrevendo a propagação de um campo escalar complexo  $\phi$ , de massa  $m$ , na presença de efeitos arbitrários que violam a simetria de Lorentz, é dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - \frac{i}{2} (\hat{k}_a)^\mu \left[ (\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \phi) \right] - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (6.1)$$

Em especial, focaremos nossos objetivos no setor tensorial (segundo termo após o sinal de igualdade na Eq. (6.1)), deixando como perspectiva as contribuições vetoriais advindas dos termos proporcionais a  $(\hat{k}_a)^\mu$ .

Como procedimento padrão [5], dada uma densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$ , as equações de movimento que descrevem a dinâmica dos campos passam a ser determinadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right), \quad (6.2)$$

onde o índice  $i$  serve para distinguir os diferentes tipos de campos presentes em  $\mathcal{L}$ . Assim, quando substituimos a Eq. (6.1) na Eq. (6.2), somos conduzidos a duas equações de Klein-Gordon modificadas:

$$[\square + m^2 + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu] \phi = 0 \quad (6.3)$$

e

$$[\square + m^2 + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu] \phi^\dagger = 0, \quad (6.4)$$

onde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ . Note que temos omitido o setor vetorial decorrente do terceiro termo do lado direito da Eq. (6.1). Como mencionado, uma análise envolvendo tais termos será deixada como perspectiva.

Uma vez tendo encontrado as equações de movimento para os campos, devemos resolvê-las considerando alguma configuração de contorno de interesse. Para nosso propósito, por exemplo, iremos considerar o campo escalar complexo  $\phi$  satisfazendo as condições de Dirichlet,

$$\phi(x, y, 0, t) = \phi(x, y, a, t) = 0, \quad (6.5)$$

quando confinado na região delimitada por duas placas paralelas separadas por uma distância  $a \ll L$ , onde  $L$  é o comprimento dos lados de cada placa, veja figura (8). Note que temos escolhido arbitrariamente o eixo- $z$  como sendo perpendicular as placas.

Em princípio, temos todas as informações necessárias para resolver as Eqs. (6.3)

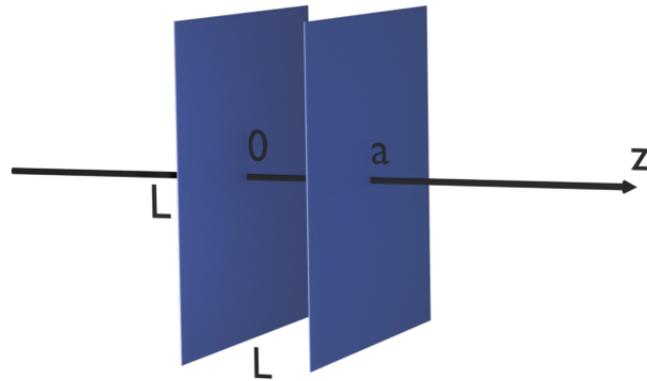


Figura 8: Duas placas paralelas de área  $L^2$  separadas por uma pequena distância  $a$  ( $a \ll L$ ).

e (6.4). Entretanto, devemos antes nos perguntar sobre os tipos de soluções que queremos encontrar<sup>1</sup>. Especificamente, estamos interessados em soluções que possuam uma forma analítica fechada para  $\phi$ , sem que haja a necessidade de recorrermos a soluções numéricas. Embora isto possa parecer uma restrição severa, e de fato ela é, teremos a vantagem de performar nossa análise tomando como base o formalismo da quantização canônica de campos, ou seja, quando estes são evoluídos a operadores [5]. Neste sentido, buscaremos por soluções separáveis, da forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x, y, t) Z(z), \quad (6.6)$$

que, como veremos, fornecerão uma maneira bastante simples e direta de se calcular a energia de Casimir quando os campos satisfazem a Eq. (6.5).

Agora, uma vez que  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  é um tensor simétrico de traço nulo, podemos usar a parametrização geral

$$(\hat{k}_c)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(U^\mu V^\nu + U^\nu V^\mu) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(U \cdot V), \quad (6.7)$$

onde  $U$  e  $V$  são dois quadri-vetores arbitrários que compreendem os coeficientes que violam a simetria de Lorentz [155]. Esta parametrização se mostra bastante interessante, pois permite investigar as diferentes configurações deste tensor isoladamente [156]: o setor anisotrópico de paridade par, por exemplo, é parametrizado por dois quadri-vetores do tipo espaço puro,  $U = (0, \mathbf{u})$  e  $V = (0, \mathbf{v})$ , satisfazendo o vínculo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , enquanto que o setor anisotrópico de paridade ímpar é representado por  $U = (0, \mathbf{u})$  e  $V = (v_0, \mathbf{0})$ . O setor isotrópico, por sua vez, é recuperado considerando dois quadri-vetores do tipo tempo, a saber,  $U = (u_0, \mathbf{0})$  e  $V = (v_0, \mathbf{0})$ . Aqui cabe outra observação. Note que, de modo geral, um tensor de ordem-2, simétrico e de traço nulo, em  $n$  dimensões, tem

$$\frac{n}{2}(n+1) - 1 \quad (6.8)$$

<sup>1</sup>De fato, só precisamos resolver uma das equações, uma vez que  $\phi^\dagger$  é o complexo conjugado de  $\phi$ .

componentes independentes. No nosso caso, quando  $n = 4$ , o tensor  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  deve então ter 9 componentes independentes. Veja que o primeiro termo do lado direito da Eq. (6.7) pode ser visto como uma matriz  $4 \times 4$  simétrica, tendo assim 10 componentes independentes. Já o segundo termo, garante a condição de traço nulo, uma vez que o vínculo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.9)$$

deve ser satisfeito. Portanto, o número de componentes independentes dos dois lados da Eq. (6.7) é o mesmo, como deveria ser.

Nas seções que se seguem, iremos calcular a energia de vácuo para cada setor mencionado acima considerando o campo escalar complexo satisfazendo as condições de Dirichlet, Eq. (6.5), entre duas placas paralelas separadas por uma pequena distância  $a$ , veja novamente figura (8).

## 6.2 O setor isotrópico

Como discutido anteriormente, para o caso isotrópico, o tensor  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  deve ser parametrizado por dois quadri-vetores do tipo tempo,  $U = (u_0, \mathbf{0})$  e  $V = (v_0, \mathbf{0})$ . Isto permite, portanto, escrever a Eq. (6.3) como

$$(\square + m^2 + \frac{3}{4}u_0v_0\partial_0^2 + \frac{1}{4}u_0v_0\nabla^2)\phi = 0. \quad (6.10)$$

Adotando o procedimento padrão<sup>2</sup>, onde as soluções assumem o caráter separável da Eq. (6.6), os campos quânticos podem ser expandidos como

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\sin(n\pi z/a)}{2\omega_n(\mathbf{p})} \left[ a_n(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + b_n^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \right], \quad (6.11)$$

onde  $n$  é um número inteiro e

$$\omega_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \left[\mathbf{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right] + m^2} \quad (6.12)$$

é a frequência angular dos modos de Fourier, com

$$p \cdot x \equiv \omega_n(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad (6.13)$$

e  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ . Note que as condições de contorno da Eq. (6.5) são diretamente verificadas, uma vez que

$$\sin(n\pi z/a) = 0 \quad (6.14)$$

<sup>2</sup>O método de solução de equações diferenciais por separação de variáveis é muito comum em qualquer livro de Física Matemática. Exemplos muito bons de aplicação do método podem ser encontrados, por exemplo, na Ref. [67].

para  $z = 0$  e  $z = a$ .

Agora, desde que a energia de vácuo é dada em termos do valor esperado do Hamiltoniano  $H$  do sistema, precisamos primeiro determinar quem é  $H$ . De modo geral,

$$H = \int d^3x T^{00}, \quad (6.15)$$

onde  $T^{00}$  é a componente zero-zero do tensor energia-momento [5]

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (6.16)$$

Substituindo a Eq. (6.1) na equação acima e calculando a componente zero-zero, encontraremos que

$$H = \int d^3x \left[ \left(1 + \frac{3}{4}u_0v_0\right) \partial^0 \phi^\dagger \partial^0 \phi + \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (6.17)$$

Como resultado da quantização canônica, onde os campos em (6.11) são evoluídos a operadores, podemos escrever:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4}u_0v_0\right) \left[ a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) + b_n^\dagger(\mathbf{p}) b_n(\mathbf{p}) + \frac{L^2}{1 + \frac{3}{4}u_0v_0} 2\omega_n(\mathbf{p}) \right], \quad (6.18)$$

onde  $L^2$  é a área de cada uma das placas. Aqui,  $a_n(\mathbf{p})$  e  $a_n^\dagger(\mathbf{p})$  são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, e devem satisfazer

$$[a_n(\mathbf{p}), a_m^\dagger(\mathbf{q})] = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}u_0v_0} (2\pi)^2 2\omega_n(\mathbf{p}) \delta^2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{nm}, \quad (6.19)$$

com todas as outras relações de comutação sendo iguais a zero. Os operadores  $b_n(\mathbf{p})$  e  $b_n^\dagger(\mathbf{p})$  obedecem a mesma álgebra.

Portanto, tomando o valor esperado no vácuo do Hamiltoniano (6.18), encontraremos

$$E_{(iso)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2p \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \left[ \mathbf{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right] + m^2} \quad (6.20)$$

como a energia de vácuo para o campo escalar complexo massivo no setor isotrópico.

Aparentemente, a integral acima diverge. Entretanto, podemos contornar este problema fazendo uso da técnica de regularização dimensional, que consiste, neste caso, em estender o espaço de duas para  $d$  dimensões [157], de modo que podemos escrever

$$E_{(iso)}^{Reg} = \frac{L^d}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^d p \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \left[ \mathbf{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right] + m^2}, \quad (6.21)$$

onde  $d$  é a dimensão transversa, assumida como uma variável complexa e contínua. Para resolver a integral de momento, iremos recorrer a representação do tempo próprio de Schwinger,

$$\frac{1}{a^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-at}, \quad (6.22)$$

que permite escrever a Eq. (6.21) como

$$\begin{aligned} E_{(iso)}^{Reg} &= \frac{L^d}{(2\pi)^d \sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \int dt t^{-\frac{3}{2}} e^{-tm^2} \int_0^\infty dp p^{d-1} e^{-(1-\frac{1}{4}u_0v_0)t \left[ \mathbf{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde já temos realizado a integral sobre o ângulo sólido em  $d$  dimensões<sup>3</sup>, a saber,

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (6.24)$$

Depois de calcularmos a integral em  $p$  e em  $t$ , respectivamente, obteremos como resultado

$$\begin{aligned} E_{(iso)}^{Reg} &= \frac{L^d}{(2\pi)^d \sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \frac{\pi^{d/2} \Gamma(-\frac{d+1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{4}u_0v_0)^{d/2}} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ m^2 + \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{\frac{d+1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Para resolvermos o somatório, devemos recorrer a relação funcional

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (bn^2 + \mu^2)^{-s} &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \mu^{1-2s} \\ &+ \frac{2\pi^s}{\sqrt{b}\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty'} \mu^{\frac{1}{2}-s} \left(\frac{n}{\sqrt{b}}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}-s} \left(\frac{2\pi\mu n}{\sqrt{b}}\right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

que é conhecida na literatura como função Zeta do tipo Epstein-Hurwitz [158]. Na equação acima,  $K_\nu(z)$  é a função de Bessel modificada e a linha no somatório indica que o termo  $n = 0$

<sup>3</sup>Para mais detalhes sobre como resolver integrais desse tipo, veja Ref. [68].

deve ser excluído. Assim, se

$$b = \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 : \quad (6.27)$$

$$\mu = m; \quad (6.28)$$

$$s = -\frac{1+d}{2}, \quad (6.29)$$

na Eq. (6.26), podemos escrever a Eq. (6.25) como

$$\begin{aligned} E_{(iso)}^{Reg} &= -\frac{L^d}{(4\pi)^{\frac{d+2}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right)^{\frac{d+1}{2}} \sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \\ &\times \left\{ -m^{d+1} \Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right) \pi + am^{d+2} \Gamma\left(-\frac{d+2}{2}\right)} \right. \\ &\left. + \frac{4m^{\frac{d+2}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right)^{\frac{d+2}{4}}}{a^{d/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{d+2}{2}}\left(\frac{2amn}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}u_0v_0}}\right)}{n^{(d+2)/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Note que somente o terceiro termo entre as chaves é relevante para a energia de Casimir. Termos que não dependem de  $a$  ou que possuem uma dependência linear com  $a$  não devem contribuir. Consequentemente, a energia de Casimir, para uma dimensão arbitrária  $d$ , pode ser escrita como

$$E_{(iso)}^{Cas}(d) = -\frac{4L^d a^{-d/2}}{\left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right)^{-\frac{d}{4}} \sqrt{1 + \frac{3}{4}u_0v_0}} \left(\frac{m}{4\pi}\right)^{\frac{d+2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{d+2}{2}}\left(\frac{2amn}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}u_0v_0}}\right)}{n^{(d+2)/2}}. \quad (6.31)$$

Finalmente, tomando  $d = 2$  na expressão acima, alguns limites interessantes podem ser analisados. Por exemplo, para o caso em que  $ma \ll \left(1 - \frac{1}{4}u_0v_0\right)^{1/2}$ , a expressão (6.31) pode ser aproximada como

$$E_{(iso)}^{Cas} = -\sqrt{\frac{4 - u_0v_0}{4 + 3u_0v_0}} \frac{L^2 \pi^2}{720a^3} + \frac{4}{\sqrt{16 - 8u_0v_0 - 3u_0^2v_0^2}} \frac{L^2 m^2}{48a} + \dots, \quad (6.32)$$

onde o primeiro termo pode ser reconhecido como a energia de Casimir usual para o campo escalar complexo sem massa e o segundo como o termo de massa usual, ambos corrigidos por um fator multiplicativo que viola a simetria de Lorentz. Também, uma vez que o produto  $u_0v_0$  é supostamente muito pequeno, a Eq. (6.32) pode ser expandida, em primeira ordem, como

$$E_{(iso)}^{Cas} = -\frac{\pi^2 L^2}{720a^3} + \frac{L^2 m^2}{48a} + \frac{\pi^2 L^2 u_0v_0}{1440a^3} + \frac{L^2 m^2 u_0v_0}{192a}, \quad (6.33)$$

onde podemos ver que os dois últimos termos representam as correções para a energia de Casimir usual (campo escalar complexo sem massa) e do termo de massa, respectivamente. Note

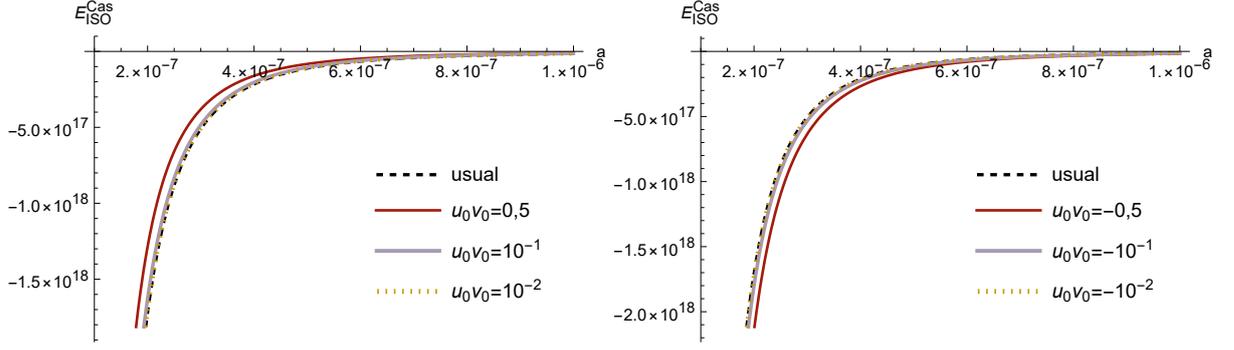


Figura 9: Energia de Casimir no setor isotrópico para alguns valores de  $u_0 v_0$ . Temos assumido  $L = 1$  e  $m = 1$ . (Limite  $ma \ll \sqrt{1 - u_0 v_0/4}$ )

ainda que o efeito líquido das contribuições isotrópicas, expressadas pelo produto  $u_0 v_0$ , é visto como uma diminuição da energia de Casimir quando  $u_0$  e  $v_0$  possuem sinais opostos. Caso contrário, a energia de Casimir deve aumentar, como podemos ver no gráfico esquerdo da figura (9). Ainda, para valores muito pequenos do produto  $u_0 v_0$ , como os atuais *bounds* sobre eles ( $u_0 v_0 \approx 10^{-14} GeV$ ), as curvas praticamente se sobrepõem.

No outro extremo, isto é, quando  $ma \gg (1 - \frac{1}{4}u_0 v_0)^{1/2}$ , temos que

$$E_{(iso)}^{Cas} = -\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{3}{4}u_0 v_0)} \sqrt{1 - \frac{1}{4}u_0 v_0}} \frac{L^2 m^2}{8 \pi^2 a} \left(\frac{\pi}{ma}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2ma}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}u_0 v_0}}\right), \quad (6.34)$$

onde observamos o esperado decaimento exponencial com relação a massa  $m$ , entretanto, também acompanhado por um fator que viola a simetria de Lorentz. Note que a presença do produto  $u_0 v_0$  no fator exponencial faz com que a magnitude da energia de Casimir decaia um pouco mais rápido quando comparada a do caso usual. Em concordância, a energia de Casimir deve novamente conduzir a uma força pequena no limite não relativístico. Devemos estar atentos ainda ao fato de que ambos os resultados, Eqs. (6.32) e (6.34), carregam um fator extra de 2 para levar em conta os graus de liberdade do campo escalar complexo. Também, os resultados padrões são recobrados quando a violação de Lorentz é “desligada” ( $u_0 = v_0 = 0$ ). Veja ainda que, até primeira ordem em  $u_0 v_0$ , a Eq. (6.34) assume a expansão

$$E_{(iso)}^{Cas} = -\frac{L^2 m^2}{8 \pi^2 a} \sqrt{\frac{\pi}{ma}} e^{-2ma} + \frac{L^2 m^2 (4ma + 5) u_0 v_0}{128 \pi^2 a} \sqrt{\frac{\pi}{ma}} e^{-2ma} \quad (6.35)$$

e, portanto, novamente observamos que as contribuições isotrópicas somente diminuem a energia de Casimir quando os coeficientes  $u_0$  e  $v_0$  possuem sinais opostos. Caso contrário ela deve aumentar. Da figura (10), claramente percebemos o quão similar é o comportamento da energia de Casimir nesse regime com aquele apresentado na figura (9).

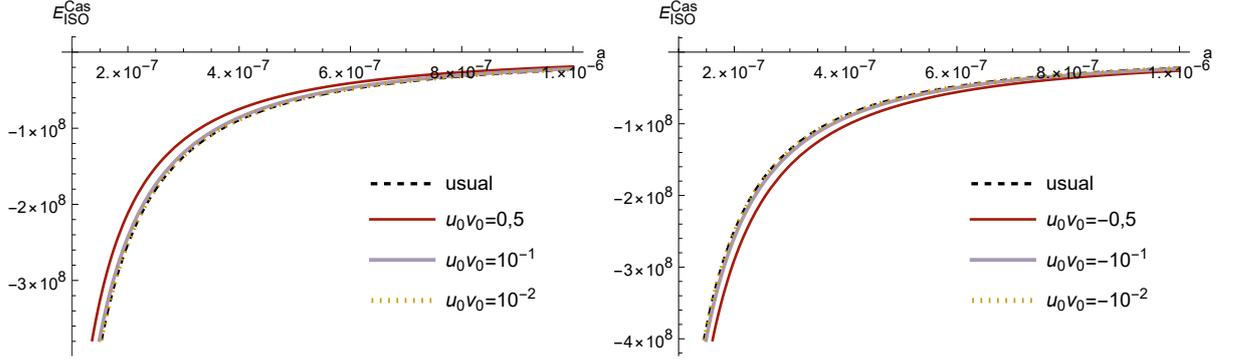


Figura 10: Energia de Casimir no setor isotrópico para alguns valores de  $u_0 v_0$ . Temos assumido  $L = 1$  e  $m = 1$ . (Limite  $ma \gg \sqrt{1 - u_0 v_0/4}$ )

### 6.3 O setor anisotrópico de paridade par

O setor anisotrópico de paridade par é parametrizado por dois quadrivetores do tipo espaço puro,  $U = (0, \mathbf{u})$  e  $V = (0, \mathbf{v})$ , onde o vínculo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  deve ser satisfeito. Nesta configuração, a equação de Klein-Gordon modificada assume a forma

$$[\square + m^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \nabla)] \phi = 0. \quad (6.36)$$

Também, como discutido no início deste capítulo, estamos interessados em soluções do tipo separável e, por este motivo, devemos assumir que nosso aparato seja configurado de tal modo que os efeitos da violação de Lorentz observados estejam no plano  $xy$ , ou seja,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ . Portanto, seguindo os mesmos passos descritos na seção anterior, encontraremos que a solução da Eq. (6.36) pode ser novamente escrita como a Eq. (6.11), mas com uma nova relação de dispersão, a saber,

$$\omega_n(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad (6.37)$$

com  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ . Isto acaba por conduzir a um novo Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[ a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) + b_n^\dagger(\mathbf{p}) b_n(\mathbf{p}) + L^2 2\omega_n(\mathbf{p}) \right], \quad (6.38)$$

onde os operadores de aniquilação e criação  $a_n(\mathbf{p})$  e  $a_n^\dagger(\mathbf{p})$ , respectivamente, satisfazem

$$[a_n(\mathbf{p}), a_m^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^2 2\omega_n(\mathbf{p}) \delta^2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{nm} \quad (6.39)$$

com todas as outras relações de comutação sendo iguais a zero e com  $b_n(\mathbf{p})$  e  $b_n^\dagger(\mathbf{p})$  obedecendo a mesma álgebra.

Consequentemente, a energia de vácuo para o campo escalar complexo no setor

anisotrópico de paridade par, sem violação de Lorentz na direção  $z$ , é

$$E_{(ape)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2p \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (6.40)$$

Neste ponto, devemos estar atentos a algumas observações. A primeira é que o vetor  $\mathbf{p}$  está no plano  $xy$ , assim como os vetores de violação  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . A segunda diz respeito aos ângulos estabelecidos por cada vetor, um em relação aos outros. Devido a equação de vínculo (6.9), sabemos que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais entre si. Sendo  $\theta_{uv}$  o ângulo estabelecido entre esses dois vetores, então  $\theta_{uv} = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta_{uv} = \frac{3\pi}{2}$ . Agora, se  $\theta_u$  e  $\theta_v$  forem os ângulos que os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  fazem com o momento  $\mathbf{p}$ , respectivamente, teremos

$$\theta_u - \theta_v = \theta_{uv}. \quad (6.41)$$

Nesta configuração, a energia de vácuo, Eq. (6.40), passa a ser escrita como

$$E_{(app)}^{(\pm)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2p \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 \mp |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathbf{p}^2 \sin \theta_u \cos \theta_u + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad (6.42)$$

onde o sinal superior é para quando  $\theta_{uv} = \frac{\pi}{2}$  e o sinal inferior para quando  $\theta_{uv} = \frac{3\pi}{2}$ . Agora, devido a simetria axial do nosso problema, podemos escolher um sistema de coordenadas em relação ao qual o vetor  $\mathbf{u}$  aponta na direção do eixo- $y$ . Desta forma, se  $\theta$  for o ângulo que o momento  $\mathbf{p}$  faz com o eixo  $y$  desse sistema de coordenadas, então  $\theta = \theta_u$  e, portanto, poderemos escrever

$$E_{(app)}^{(\pm)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} p d\theta dp \sqrt{(1 \mp |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta \cos \theta) \mathbf{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (6.43)$$

Resolvendo a integral angular, obteremos:

$$E_{(app)}^{(\pm)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} p dp I_{\theta}, \quad (6.44)$$

onde

$$I_{\theta} = 2\sqrt{B^2 + \frac{1}{2}(2 \mp A)p^2} \left\{ E \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\mp 2Ap^2}{2B^2 + (2 \mp A)p^2} \right] + E \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{\mp 2Ap^2}{2B^2 + (2 \mp A)p^2} \right] \right\}, \quad (6.45)$$

com

$$A = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|, \quad (6.46)$$

$$B = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (6.47)$$

e

$$E(\theta, s) = \int_0^\theta (1 - s \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta, \quad (6.48)$$

esta última sendo uma integral elíptica do segundo tipo. Como os efeitos da violação de Lorentz são muito pequenos, podemos ainda expandir  $I_\theta$  como

$$I_\theta \approx 2\pi \sqrt{p^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} - \frac{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{64} \frac{2\pi p^4}{\left[p^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (6.49)$$

Note que o primeiro termo da expressão acima corresponde exatamente ao que é esperado para o cálculo da energia de Casimir usual (sem violação). Já o segundo, é o termo responsável pela correção da energia de vácuo devido à violação de Lorentz. Ainda da expressão (6.49), podemos concluir que não há distinção se o vetor  $\mathbf{v}$  aponta na direção positiva ou negativa da coordenada  $x$ , ou seja, a energia de vácuo é a mesma independente se  $\theta_{uv} = \frac{\pi}{2}$  ou se  $\theta_{uv} = \frac{3\pi}{2}$ . Com isso, podemos simplesmente escrever

$$E_{(app)} = E_{\text{usual}} + \delta E_{(app)}, \quad (6.50)$$

onde

$$E_{\text{usual}} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2 p \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (6.51)$$

e

$$\delta E_{(app)} = -\frac{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{64} \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2 p \frac{\mathbf{p}^4}{\left[\mathbf{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (6.52)$$

Ao escrever o resultado acima, temos ainda usado

$$\int_0^\infty 2\pi p dp = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} p d\theta dp = \int d^2 p. \quad (6.53)$$

Uma vez que já conhecemos a forma funcional de <sup>4</sup>  $E_{\text{usual}}$ , devemos nos preocupar em resolver a correção  $\delta E_{\text{usual}}$  devido à violação de Lorentz e, para isso, devemos recorrer mais uma vez ao método de regularização dimensional. De fato, todos os passos aplicados na seção anterior podem ser novamente aplicados aqui. Como resultado, teremos que a correção para a energia de Casimir em  $d$  dimensões é

$$\delta E_{(app)}^{Cas}(d) = -\left(\frac{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}{4}\right)^2 \frac{d(2+d)L^d}{a^{d/2}} \left(\frac{m}{4\pi}\right)^{\frac{d+2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{d+2}{2}}(2amn)}{n^{(d+2)/2}}. \quad (6.54)$$

---

<sup>4</sup>Veja seção anterior.

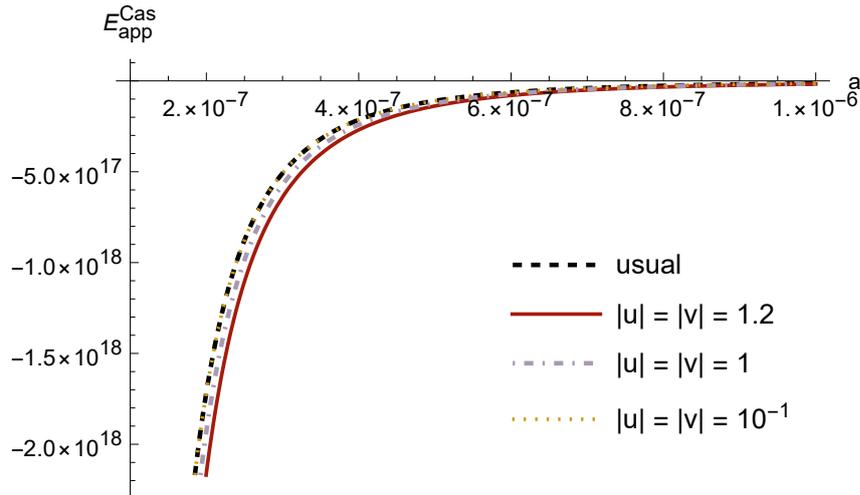


Figura 11: Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade par para alguns valores de  $|\mathbf{u}|$  e  $|\mathbf{v}|$ . Temos assumido  $L = 1$  e  $m = 1$ . (Limite  $ma \ll 1$ )

Quando  $d = 2$  e  $ma \ll 1$ , a expressão acima se comporta assintoticamente como

$$\delta E_{(app)}^{Cas} = \frac{L^2 m^2 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{384a} - \frac{L^2 \pi^2 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{5760a^3}, \quad (6.55)$$

onde o primeiro termo corresponde à correção ao termo de massa e o segundo à correção da energia de Casimir usual para o campo escalar complexo sem massa. Da expressão (6.50), podemos então escrever a energia de Casimir do setor anisotrópico de paridade par, no limite em que  $ma \ll 1$ , como

$$E_{(app)}^{Cas} = -\frac{\pi^2 L^2}{720a^3} + \frac{L^2 m^2}{48a} + \frac{L^2 m^2 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{384a} - \frac{L^2 \pi^2 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{5760a^3}. \quad (6.56)$$

Como a distância de separação  $a$  entre as placas é bem pequena, o segundo termo da expressão (6.55) é dominante, fazendo com que o efeito líquido devido à violação de Lorentz acabe por diminuir a energia de Casimir, como pode ser observado na figura (11).

Por outro lado, quando  $d = 2$  e  $ma \gg 1$ , podemos escrever a energia de Casimir corrigida pela violação de Lorentz como

$$E_{(app)}^{Cas} = -\frac{L^2 m^2}{8\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{ma}\right)^{1/2} e^{-2ma} - \frac{L^2 m^2 |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}{64\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{ma}\right)^{1/2} e^{-2ma}, \quad (6.57)$$

onde mais uma vez observamos que o efeito líquido da violação diminui o valor da energia de Casimir, em concordância com a figura (12).

#### 6.4 O setor anisotrópico de paridade ímpar

No setor anisotrópico de paridade ímpar, parametrizado por um quadri vetor do tipo tempo e outro do tipo espaço, a equação de Klein-Gordon modificada assume a forma

$$[\square + m^2 + v_0(\mathbf{u} \cdot \nabla)\partial_0]\phi = 0. \quad (6.58)$$

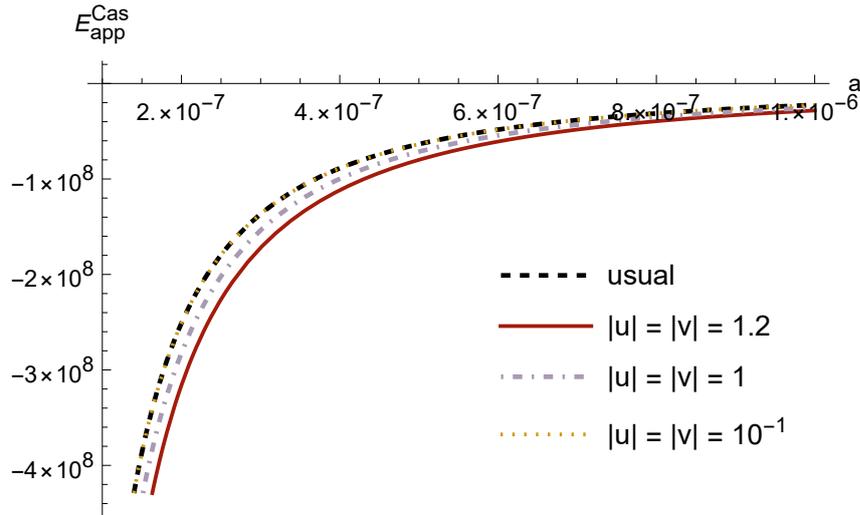


Figura 12: Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade par para alguns valores de  $|\mathbf{u}|$  e  $|\mathbf{v}|$ . Temos assumido  $L = 1$  e  $m = 1$ . (Limite  $ma \gg 1$ )

Similarmente a seção anterior, vamos assumir que nosso aparato seja configurado de modo que os efeitos de violação de Lorentz observados estejam no plano  $xy$ . Com isso, a solução de campo para a Eq. (6.58) pode ser novamente escrita como a Eq. (6.11), entretanto, com

$$p \cdot x = \left[ \frac{v_0}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + \omega_n(\mathbf{p}) \right] t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad (6.59)$$

e

$$\omega_n(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{v_0^2}{4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2}. \quad (6.60)$$

O Hamiltoniano, por sua vez, passa a ser dado por

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\omega_n(\mathbf{p})^2} \left[ 2\omega_n(\mathbf{p})^2 + v_0 \omega_n(\mathbf{p}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \right] \times \left[ a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) + b_n^\dagger(\mathbf{p}) b_n(\mathbf{p}) + L^2 2\omega_n(\mathbf{p}) \right], \quad (6.61)$$

onde todos os operadores de aniquilação e criação satisfazem novamente a álgebra da Eq. (6.39). A energia de vácuo para o campo escalar complexo massivo no setor anisotrópico de paridade ímpar, portanto, pode ser escrita como

$$E_{(api)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2 p \left[ \frac{v_0}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) + \sqrt{\frac{v_0^2}{4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \right]. \quad (6.62)$$

Mais uma vez, devido a simetria axial do nosso problema, iremos assumir que o vetor  $\mathbf{u}$  aponta na direção  $y$  do sistema de coordenadas escolhido para a análise do sistema<sup>5</sup>. Isto permite,

<sup>5</sup>Lembremos que nesse sistema, as placas são perpendiculares a direção  $z$ .

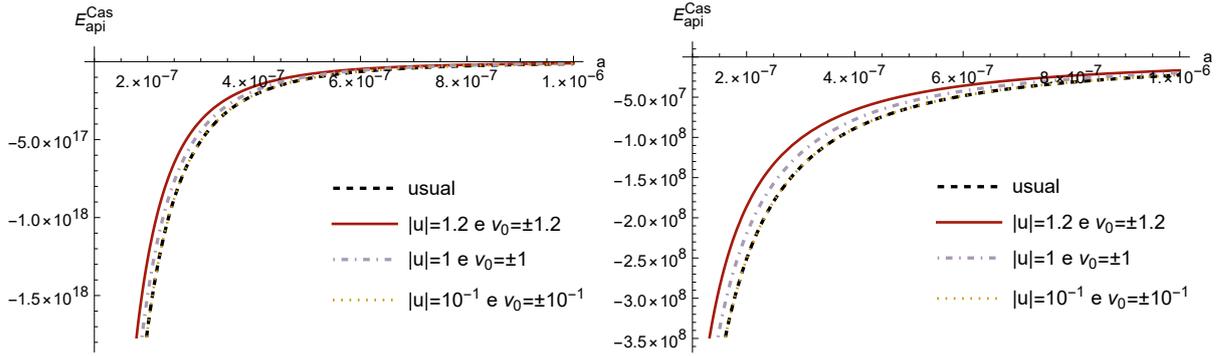


Figura 13: Energia de Casimir no setor anisotrópico de paridade ímpar para alguns valores de  $|\mathbf{u}|$  e  $|\mathbf{v}|$ . Temos assumido  $L = 1$  e  $m = 1$ . (Lado esquerdo:  $ma \ll 1$ ) (Lado direito:  $ma \gg 1$ )

então, escrever a Eq. (6.62) como

$$E_{(api)} = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} p d\theta dp \sqrt{\left(1 + \frac{v_0^2}{4} |\mathbf{u}|^2 \cos^2 \theta\right) p^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad (6.63)$$

onde  $\theta$  é novamente o ângulo que o vetor  $\mathbf{p}$  faz com o eixo  $y$ . Daqui em diante, o procedimento de solução da equação acima é bem semelhante ao da seção anterior. De fato, a integral angular conduz a uma expressão que é dada em termos de integrais elípticas, veja apêndice (B). Estas, ao serem expandidas, até primeira ordem nos coeficiente de violação, permitem escrever

$$E_{(api)} = E_{\text{usual}} + \delta E_{(api)}, \quad (6.64)$$

onde  $E_{\text{usual}}$ , novamente, é dada pela Eq. (6.51). Já a correção devido à violação de Lorentz, após a extensão de 2 para  $d$  dimensões, assume a forma

$$\delta E_{(api)}^{\text{Reg}} = \left(\frac{v_0 |\mathbf{u}|}{4}\right)^2 \frac{L^d}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^d p \frac{\mathbf{p}^2}{\left[\mathbf{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (6.65)$$

Portanto, aplicando a representação do tempo próprio de Schwinger, Eq. (6.22), resolvendo a integral em  $p$ , em seguida a integral em  $t$  e, finalmente, recorrendo a função Zeta do tipo Epstein-Hurwitz, Eq. (6.26), iremos encontrar como resultado:

$$\delta E_{(api)}^{\text{Cas}}(d) = \left(\frac{v_0 |\mathbf{u}|}{4}\right)^2 \frac{4dL^d}{a^{d/2}} \left(\frac{m}{4\pi}\right)^{\frac{d+2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{d+2}{2}}(2amn)}{n^{(d+2)/2}}. \quad (6.66)$$

Quando  $d = 2$  e  $ma \ll 1$ , a expressão acima se comporta assintoticamente como

$$\delta E_{(api)}^{\text{Cas}} = -\frac{L^2 m^2 |\mathbf{u}|^2 v_0^2}{384a} + \frac{L^2 \pi^2 |\mathbf{u}|^2 v_0^2}{5760a^3}, \quad (6.67)$$

onde, comparando com o resultado da Eq. (6.55), chegamos a conclusão de que

$$\delta E_{(api)}^{\text{Cas}} \approx -\delta E_{(app)}^{\text{Cas}}, \quad (6.68)$$

ou seja, o efeito de violação no setor anisotrópico de paridade ímpar é oposto aquele do setor anisotrópico de paridade par: embora a energia de Casimir seja corrigida, em magnitude, praticamente da mesma quantidade<sup>6</sup>, quando a paridade é ímpar ela sofre um aumento, enquanto que quando a paridade é par, ela sofre uma diminuição, como podemos observar comparando os gráficos das figuras (11)-(13). Note ainda que este mesmo comportamento é observado no limite em que  $ma \gg 1$ , onde

$$\delta E_{(api)}^{Cas} = \frac{L^2 m^2 v_0^2 |\mathbf{u}|^2}{64 \pi^2 a} \left( \frac{\pi}{ma} \right)^{1/2} e^{-2ma}. \quad (6.69)$$

---

<sup>6</sup>Como os efeitos de violação são bem pequenos, espera-se que, em módulo, as correções tenham praticamente o mesmo valor.

## 7 CONCLUSÃO

Nesta tese, investigamos como a violação da simetria de Lorentz devido a uma extensão da eletrodinâmica escalar do MP afeta a energia de Casimir, a seção de choque de espalhamento de mésons e o propagador do fóton a um *loop*, sendo que estas duas últimas análises foram executas no contexto de temperatura finita.

Na introdução, iniciamos com uma breve discussão sobre o MP e suas simetrias. Em especial, vimos que sua estrutura foi toda construída de modo a preservar a simetria Lorentz, um dos pilares da relatividade especial. Também, como consequência da unificação da relatividade com a quântica, vimos que o MP permite explicar resultados que nenhuma dessas teorias sozinhas conseguiria, como o teorema CPT, que também parece ser uma simetria fundamental da Natureza. A despeito do grande sucesso experimental, vimos que o MP ainda deixa algumas questões em aberto, o que acabou por incentivar a busca por teorias que vão além do MP, como a teoria das cordas que, embora matematicamente fascinante, traz consigo dificuldades significativas em relação a sua verificação experimental, em grande parte devido a escala de energia a qual está associada. Como abordagem alternativa, então, Colladay e Kostelecký propuseram o MPE, que visa investigar sinais de violação mensuráveis em baixas energias. Como uma teoria de campos efetiva, o MPE inclui todos os possíveis termos que violam a simetria de Lorentz e acaba por fornecer uma vasta e compreensível estrutura para se investigar desvios do teorema CPT.

No capítulo (2), fizemos uma breve revisão da TQC à temperatura finita. Iniciamos discutindo a DCT, um formalismo de tempo real que tem como principal característica a construção de um estado de vácuo termal através da duplicação dos graus de liberdade do sistema. Como consequência, conseguimos construir operadores de criação e aniquilação termais que atuam no estado de vácuo termal de forma completamente análoga aqueles da teoria à temperatura zero. Na verdade, toda estrutura da DCT traça um completo paralelo com a TQC à temperatura zero. Note, por exemplo, que a álgebra satisfeita pelos operadores de criação e aniquilação, sejam eles bosônicos ou fermiônicos, são as mesmas; ou a semelhança na definição da seção de choque dependente da temperatura; ou a extensão do teorema de Wick e das contrações de Wick; ou mesmo a forma como derivamos as regras de Feynman para o espaço til e não til através do método do funcional gerador. Em especial, vimos ainda que a principal diferença que ocorre quanto as regras de Feynman estão nos propagadores. Estes, quando no formalismo DCT, possuem uma forma funcional que separa as partes em temperatura zero e finita. No final do capítulo, discutimos ainda sobre o formalismo de Matsubara, onde a implementação de temperatura no sistema ocorre através da correspondência  $t \rightarrow -i\beta$ , sendo  $t$  o tempo e  $\beta$  o inverso da temperatura. Especificamente, vimos que quantidades termais podem ser derivadas daquelas em temperatura zero performando uma rotação de Wick no sistema e assumindo que a componente zero do momento Euclidiano só pode tomar valores discretos,

sejam elas relacionadas a bósons ou a férmions.

No capítulo (3), iniciamos com uma breve apresentação da extensão mínima da eletrodinâmica quântica do MP. Em seguida discutimos sobre as propriedades de simetria CPT dos setores de fóton e de férmion isoladamente. Vimos que o setor de fótons CPT-par (CPT é preservada) é caracterizado por um campo de fundo tensorial,  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ , de dimensão de massa zero, com as mesmas propriedades de simetria e antissimetria de índices do tensor de Riemann. Já o setor de fótons CPT-ímpar (CPT é violada), é caracterizado por um campo de fundo vetorial,  $(k_{AF})^\mu$ , de dimensão de massa um. Tanto no setor CPT-par como ímpar, fomos capazes de escrever as Lagrangianas em termos dos campos eletromagnéticos e avaliar as propriedades de simetria CPT de cada termo que quebra a covariância por transformações de partículas. Em particular, vimos que termos proporcionais a  $(k_F)_{0ikl}$  violam separadamente paridade (P) e reversão temporal (T), mas preservam a simetria de conjugação de carga (C). Também, termos proporcionais a  $(k_{AF})^0$  preservam C e T, mas violam P, enquanto que os proporcionais ao vetor  $\mathbf{k}_{AF}$  preservam C e P, mas viola T. Uma análise semelhante foi feita para o setor fermiônico. No final do capítulo, apresentamos, enfim, o modelo de eletrodinâmica escalar estendida que estávamos interessados em avaliar nesta tese. Discutimos brevemente sobre as propriedades de simetria CPT e derivamos as regras de Feynman em temperatura zero, onde vimos que novos vértices de interação, devido aos coeficiente que violam a simetria de Lorentz, somaram-se aqueles da eletrodinâmica escalar convencional. Em adição, vimos também o aparecimento de inserções no propagador escalar, enquanto que o propagador do fóton, dado pela Lagrangiana de Maxwell usual, foi preservado.

No capítulo (4), efeitos de violação da simetria de Lorentz no espalhamento de mésons à temperatura finita foram investigados considerando o modelo de eletrodinâmica escalar estendida apresentada no capítulo (3). Especificamente, calculamos a seção de choque termal para o processo de méson e anti-méson do tipo  $a$  se espalhando em méson e anti-méson do tipo  $b$ , com  $b \neq a$ . Os efeitos de temperatura foram implementados através do formalismo DCT. Como resultado, vimos que o comportamento da seção de choque com a temperatura depende unicamente de um fator de forma  $\mathcal{B}(\beta)$  que é dado pela equação (4.19). Na figura (3), plotamos o comportamento de  $\mathcal{B}(\beta)$  em relação  $\beta$ . Como pode ser notado, no regime de temperatura zero ( $\beta \rightarrow \infty$ ), o fator de forma tende a um, de modo que recobramos o resultado da seção de choque em temperatura zero, corrigida unicamente pelas componentes  $(\hat{k}_c)^{33}$  e  $(\hat{k}_a)^3$  dos coeficientes de violação de Lorentz CPT-par e CPT-ímpar, respectivamente. Isto sugere que a seção de choque sentirá os efeitos de violação unicamente devido as componente de  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  e  $(\hat{k}_a)^\mu$  na direção de propagação das partículas no início do processo de espalhamento. Na figura (4), plotamos a seção de choque total à temperatura zero como função da energia do centro de massa do sistema. Através das curvas azul e verde podemos concluir que a violação da simetria de Lorentz tende a diminuir o valor da seção de choque. Além disso, correções termais à seção de choque devido a altas temperaturas são extremamente relevantes, uma vez que a função  $\mathcal{B}(\beta)$  assume altos valores nesse limite, veja novamente figura (3).

No capítulo (5), calculamos as correções para a auto-energia do campo de gauge a um *loop* considerando uma eletrodinâmica escalar modificada por termos que violam a simetria de Lorentz na estrutura do MPE. Focamos nossa atenção tanto nas contribuições CPT-par como CPT-ímpar. Para ambos os casos, correções radioativas foram calculadas pela técnica da regularização dimensional, permitindo tratar com as divergências presentes no regime de temperatura zero. A separação das contribuições devido a temperatura zero e finita foram alcançadas através do formalismo de Matsubara e da relação de recorrência de Larry Ford, esta última para performar a soma sobre as frequências de Matsubara. Para a contribuição CPT-par, a parte dependente da temperatura não exibe divergências no limite em que  $d \rightarrow 3$ . Do gráfico da figura 6, podemos notar que todas as funções  $G$  vão a zero no limite de zero temperatura ( $\xi \rightarrow \infty$ ), assim recobrando o resultado usual, em temperatura zero. Além disso, no limite de altas temperaturas ( $\xi \rightarrow 0$ ), a função  $G_3(\xi)$  é dominante e o tensor de polarização torna-se uma função quadrática da temperatura. Para o caso CPT-ímpar, obtivemos um valor nulo para o tensor de polarização em temperatura zero, que, como discutido no texto, é uma consequência direta do teorema de Furry. Ainda verificamos a quebra do teorema de Furry no regime de temperatura finita. Entretanto, o teorema de Furry parece ser restaurado quando  $T \rightarrow \infty$ . Ainda, tanto no caso CPT-par como CPT-ímpar, os efeitos termais não afetaram a estrutura tensorial da teoria.

No capítulo (6), investigamos a influência das contribuições CPT-par da eletrodinâmica escalar estendida na energia de Casimir. Consideramos o campo escalar complexo satisfazendo condições de contorno de Dirichlet entre duas placas paralelas separadas por uma pequena distância. Além disso, uma parametrização tensorial apropriada nos permitiu estudar o efeito de Casimir em três distintas configurações: isotrópica, anisotrópica de paridade par e anisotrópica de paridade ímpar. Em cada caso, aplicamos a técnica de regularização dimensional para regularizar a energia de Casimir. Para todas as três configurações, mostramos que a violação da simetria de Lorentz afeta a energia de Casimir, promovendo um aumento ou uma diminuição dela, dependendo da configuração na qual o sistema se encontra. Entretanto, estas modificações são de fato muito pequenas, desde que os *bounds* atuais para o tensor  $(\hat{k}_c)^{\mu\nu}$  não são maiores que  $10^{-14} GeV$ . Em especial, um aumento (diminuição) na energia de Casimir produz uma diminuição (aumento) na força de Casimir. Note também que quando esta advém de contribuições que violam Lorentz, sua magnitude deve ser no mínimo quatorze vezes menor que a da força de Casimir usual. Para a configuração isotrópica, encontramos uma solução geral que foi estudada em dois regimes,  $ma \ll (1 - \frac{1}{4}u_0v_0)^{1/2}$  e  $ma \gg (1 - \frac{1}{4}u_0v_0)^{1/2}$ . Em ambos os regimes, o efeito líquido das contribuições isotrópicas, expressadas pelo produto  $u_0v_0$ , foi visto como uma diminuição da energia de Casimir quando  $u_0$  e  $v_0$  possuem sinais opostos. Caso contrário, a energia de Casimir deve aumentar, como podemos ver nos gráficos das figuras (9) e (10). Nas configurações anisotrópicas de paridade par e ímpar, o procedimento tomado foi bastante semelhante ao do caso isotrópico. Como resultado, concluímos que o efeito de violação no setor anisotrópico de paridade ímpar é oposto aquele do setor anisotrópico de paridade par: embora a energia de Casimir seja corrigida, em magnitude, praticamente da mesma quantidade

quando a paridade é ímpar ela sofre um aumento, enquanto que quando a paridade é par, ela sofre uma diminuição, como podemos observar comparando os gráficos das figuras (11)-(13).

Como perspectivas, pretendemos investigar outras abordagens que envolvam a violação das simetrias de Lorentz e CPT. Investigar o comportamento analítico dos termos induzidos por correções radioativas, à temperatura finita, na origem do espaço dos momentos. Aplicar o formalismo aqui desenvolvido para investigar como temperatura afeta o setor gravitacional e teorias que envolvam outros tipos de geometria, como, por exemplo, a geometria de Riemann–Finsler.

## REFERÊNCIAS

- [1] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: Wiley-Vch, 2008.
- [2] MOREIRA, M. A. O modelo padrão da física de partículas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 31, p. 1306–1, 2009.
- [3] COTTINGHAM, W. N.; GREENWOOD, D. A. *An introduction to the standard model of particle physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- [4] SCHWICHTENBERG, J. *Physics from symmetry*. [S.l.]: Springer, 2018.
- [5] PESKIN, M. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- [6] BARGER, V.; MARFATIA, D.; WHISNANT, K. *The physics of neutrinos*. [S.l.]: Princeton University Press, 2012.
- [7] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, 1998.
- [8] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [9] KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Cpt and strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 359, n. 2-3, p. 545–570, 1991.
- [10] GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum space-time. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- [11] BOJOWALD, M.; MORALES-TÉCOTL, H. A.; SAHLMANN, H. Loop quantum gravity phenomenology and the issue of lorentz invariance. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 8, p. 084012, 2005.
- [12] HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009.
- [13] COGNOLA, G. *et al.* Covariant hořava-like and mimetic horndeski gravity: cosmological solutions and perturbations. *Classical and quantum gravity*, IOP Publishing, v. 33, n. 22, p. 225014, 2016.
- [14] CARROLL, S. M. *et al.* Noncommutative field theory and lorentz violation. *Physical Review Letters*, APS, v. 87, n. 14, p. 141601, 2001.
- [15] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.

- [16] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [17] TASSON, J. D. What do we know about lorentz invariance? *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 77, n. 6, p. 062901, 2014.
- [18] WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 17, p. 1–117, 2014.
- [19] HEES, A. *et al.* Tests of lorentz symmetry in the gravitational sector. *Universe*, MDPI, v. 2, n. 4, p. 30, 2016.
- [20] LINK, J. *et al.* Charm system tests of cpt and lorentz invariance with focus. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 556, n. 1-2, p. 7–13, 2003.
- [21] AUBERT, B. *et al.* Search for c p t and lorentz violation in  $b^0$ - $b^{\bar{0}}$  oscillations with dilepton events. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 13, p. 131802, 2008.
- [22] BABUSCI, D. *et al.* Test of cpt and lorentz symmetry in entangled neutral kaons with the kloe experiment. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 730, p. 89–94, 2014.
- [23] DOMENICO, A. D.; COLLABORATION, K. Cpt symmetry and quantum mechanics tests in the neutral kaon system at kloe. *Foundations of Physics*, Springer, v. 40, p. 852–866, 2010.
- [24] ABAZOV, V. M. *et al.* Search for Violation of *CPT* and Lorentz Invariance in  $B_s^0$  Meson Oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 115, n. 16, p. 161601, 2015.
- [25] AAIJ, R. *et al.* Search for violations of Lorentz invariance and *CPT* symmetry in  $B_{(s)}^0$  mixing. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 24, p. 241601, 2016.
- [26] ADAMSON, P. *et al.* A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 151601, 2010.
- [27] ADAMSON, P. *et al.* Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, p. 151601, 2008.
- [28] KATORI, T. Tests of Lorentz and CPT violation with MiniBooNE neutrino oscillation excesses. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 27, p. 1230024, 2012.
- [29] AGUILAR-AREVALO, A. A. *et al.* Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses. *Phys. Lett. B*, v. 718, p. 1303–1308, 2013.
- [30] JACKIW, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 3572–3575, 1999.

- [31] KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D.; PICKERING, A. G. M. One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 056006, 2002.
- [32] FERRARI, A. F. *et al.* One-loop calculations in Lorentz-breaking theories and proper-time method. *EPL*, v. 136, n. 2, p. 21002, 2021.
- [33] FURTADO, J.; MARIZ, T. Lorentz-violating Euler-Heisenberg effective action. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 2, p. 025021, 2014.
- [34] LEHUM, A. C. *et al.* Dynamical gauge symmetry breaking in lower-dimensional Lorentz-violating supersymmetric theory. *Phys. Lett. B*, v. 790, p. 129–133, 2019.
- [35] FERRARI, A. F.; LEHUM, A. C.  $CP^{(N-1)}$  model in aether-superspace. *EPL*, v. 122, n. 3, p. 31001, 2018.
- [36] BELICH, H. *et al.* Aspects of CPT-even Lorentz-symmetry violating physics in a supersymmetric scenario. *Eur. Phys. J. C*, v. 75, n. 6, p. 291, 2015.
- [37] COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Vector Superfields and Lorentz Violation. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 025021, 2011.
- [38] CARROLL, S. M. *et al.* Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, p. 141601, 2001.
- [39] EDWARDS, B. R.; KOSTELECKÝ, V. A. Searching for CPT Violation with Neutral-Meson Oscillations. *Phys. Lett. B*, v. 795, p. 620–626, 2019.
- [40] EDWARDS, B. R.; KOSTELECKÝ, V. A. Riemann–Finsler geometry and Lorentz-violating scalar fields. *Phys. Lett. B*, v. 786, p. 319–326, 2018.
- [41] MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.
- [42] NASCIMENTO, J.; RIBEIRO, R.; SVAITER, N. Radiatively induced lorentz and cpt violation in qed at finite temperature. *arXiv preprint hep-th/0012039*, 2000.
- [43] GOMES, M. *et al.* Free energy of Lorentz-violating QED at high temperature. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 045013, 2010.
- [44] LEITE, J.; MARIZ, T. Induced Lorentz-violating terms at finite temperature. *EPL*, v. 99, n. 2, p. 21003, 2012.
- [45] LEITE, J.; MARIZ, T.; SERAFIM, W. The induced higher derivative Lorentz-violating Chern–Simons term at finite temperature. *J. Phys. G*, v. 40, p. 075003, 2013.

- [46] MARIZ, T. *et al.* Ambiguities of the CPT-even aether-like Lorentz-breaking term at finite temperature. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 4, p. 045015, 2014.
- [47] ASSUNÇÃO, J. F. *et al.* Induced Chern-Simons modified gravity at finite temperature. *JHEP*, v. 08, p. 072, 2018.
- [48] CELESTE, A. *et al.* Higher-derivative Lorentz-breaking terms in extended QED at the finite temperature. *Phys. Rev. D*, v. 93, n. 6, p. 065012, 2016.
- [49] ASSUNÇÃO, J. F.; FURTADO, J.; MARIZ, T. Nonanalyticity of the non-Abelian five-dimensional Chern-Simons term. *EPL*, v. 134, n. 4, p. 41002, 2021.
- [50] TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H. Thermo field dynamics. *International journal of modern Physics B*, World Scientific, v. 10, n. 13n14, p. 1755–1805, 1996.
- [51] DAS, A. *Finite temperature field theory*. [S.l.]: World Scientific, 1997.
- [52] KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: Algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2009.
- [53] SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Lorentz violation in bhabha scattering at finite temperature. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 12, p. 125012, 2017.
- [54] SOUZA, P. R. A. *et al.* On Lorentz violation in  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$  scattering at finite temperature. *Phys. Lett. B*, v. 791, p. 195–200, 2019.
- [55] SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Lorentz violation, gravitoelectromagnetism and bhabha scattering at finite temperature. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 33, n. 10n11, p. 1850061, 2018.
- [56] KHANNA, F. C. *et al.* Bhabha scattering in very special relativity at finite temperature. *The European Physical Journal. C, Particles and Fields.*, Springer Nature BV, v. 80, n. 8, 2020.
- [57] SANTOS, A. F.; KHANNA, F. C. Temperature effects for  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$  scattering in very special relativity. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 137, n. 1, p. 101, 2022.
- [58] FRIEDMAN, A. S. *et al.* Improved constraints on anisotropic birefringent Lorentz invariance and CPT violation from broadband optical polarimetry of high redshift galaxies. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 4, p. 043008, 2020.
- [59] ARAÚJO, M. C.; MALUF, R. V. Meson scattering in a Lorentz-violating scalar QED at finite temperature. *Annals Phys.*, v. 444, p. 169036, 2022.
- [60] ARAÚJO, M. C.; FURTADO, J.; MALUF, R. V. Lorentz-violating extension of scalar QED at finite temperature. *Phys. Lett. B*, v. 844, p. 138064, 2023.

- [61] ARAÚJO, M. C.; FURTADO, J.; MALUF, R. V. Casimir effect in a Lorentz-violating tensor extension of a scalar field theory. *arXiv preprint hep-th/2302.08836*, 2023.
- [62] MERTIG, R.; BOHM, M.; DENNER, A. FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes. *Comput. Phys. Commun.*, v. 64, p. 345–359, 1991.
- [63] SHTABOVENKO, V.; MERTIG, R.; ORELLANA, F. New Developments in FeynCalc 9.0. *Comput. Phys. Commun.*, v. 207, p. 432–444, 2016.
- [64] SHTABOVENKO, V. FeynHelpers: Connecting FeynCalc to FIRE and Package-X. *Comput. Phys. Commun.*, v. 218, p. 48–65, 2017.
- [65] KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- [66] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.
- [67] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. [S.l.]: Academic Press, 2011.
- [68] SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- [69] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [70] BELICH, H. *et al.* Violação da simetria de lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 57–64, 2007.
- [71] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 015020, 2009.
- [72] KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Rev. Mod. Phys.*, v. 83, p. 11–31, 2011.
- [73] ACCIOLY, A.; BRITO, G. P. de; HELAYËL-NETO, J. Photon gravitational deflection in Lorentz violating scenarios. 4 2016.
- [74] KOSTELECKÝ, V. A.; MELISSINOS, A. C.; MEWES, M. Searching for photon-sector Lorentz violation using gravitational-wave detectors. *Phys. Lett. B*, v. 761, p. 1–7, 2016.
- [75] KOSTELECKÝ, A. Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics. *Phys. Lett. B*, v. 701, p. 137–143, 2011.
- [76] SCHRECK, M. Classical Lagrangians for the nonminimal Standard-Model Extension at higher orders in Lorentz violation. *Phys. Lett. B*, v. 793, p. 70–77, 2019.

- [77] REIS, J. A. A. S.; SCHRECK, M. Leading-order classical Lagrangians for the nonminimal standard-model extension. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 6, p. 065019, 2018.
- [78] COLLADAY, D. Extended Hamiltonian Formalism and Lorentz-Violating Lagrangians. *Phys. Lett. B*, v. 772, p. 694–698, 2017.
- [79] SILVA, J. E. G.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. A nonlinear dynamics for the scalar field in Randers spacetime. *Phys. Lett. B*, v. 766, p. 263–267, 2017.
- [80] FOSTER, J.; LEHNERT, R. Classical-physics applications for Finsler  $b$  space. *Phys. Lett. B*, v. 746, p. 164–170, 2015.
- [81] RUSSELL, N. Finsler-like structures from Lorentz-breaking classical particles. *Phys. Rev. D*, v. 91, n. 4, p. 045008, 2015.
- [82] KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N.; TSO, R. Bipartite Riemann–Finsler geometry and Lorentz violation. *Phys. Lett. B*, v. 716, p. 470–474, 2012.
- [83] REIS, J. a. A. A. S.; SCHRECK, M. Classical Lagrangians for the nonminimal spin-nondegenerate Standard-Model Extension at higher orders in Lorentz violation. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 9, p. 095029, 2021.
- [84] HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on  $R^{**4}$ . *Phys. Lett. B*, v. 478, p. 394–400, 2000.
- [85] FURTADO NETO, J. S. Correções radiativas na edq com extensões de violação de lorentz e horava-lifshitz. Tese (Doutorado em Física)-Maceió, Universidade Federal de Alagoas, 2015.
- [86] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 116002, 1998.
- [87] KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 69, p. 105009, 2004.
- [88] CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 41, p. 1231, 1990.
- [89] ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term. *Nucl. Phys. B*, v. 607, p. 247–267, 2001.
- [90] ADAM, C.; KLINKHAMER, F. R. Photon decay in a CPT violating extension of quantum electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, v. 657, p. 214–228, 2003.
- [91] ANDRIANOV, A. A.; SOLDATI, R. Lorentz symmetry breaking in Abelian vector field models with Wess-Zumino interaction. *Phys. Rev. D*, v. 51, p. 5961–5964, 1995.

- [92] ANDRIANOV, A. A.; SOLDATI, R. Patterns of Lorentz symmetry breaking in QED by CPT odd interaction. *Phys. Lett. B*, v. 435, p. 449–452, 1998.
- [93] ANDRIANOV, A. A.; SOLDATI, R.; SORBO, L. Dynamical Lorentz symmetry breaking from (3+1) Axion-Wess-Zumino model. *Phys. Rev. D*, v. 59, p. 025002, 1999.
- [94] BELICH JR., H. *et al.* Dimensional reduction of a Lorentz and CPT violating Chern-Simons model. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 125011, 2003.
- [95] BERGER, M. S.; KOSTELECKÝ, V. A. Supersymmetry and Lorentz violation. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 091701, 2002.
- [96] BELICH, H. *et al.* Supersymmetric extension of the Lorentz and CPT violating Maxwell-Chern-Simons model. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 065030, 2003.
- [97] SCARPELLI, A. P. B. *et al.* Remarks on the causality, unitarity and supersymmetric extension of the Lorentz and CPT violating Maxwell-Chern-Simons model. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, v. 127, p. 105–109, 2004.
- [98] LEHNERT, R.; POTTING, R. The Cerenkov effect in Lorentz-violating vacua. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 125010, 2004.
- [99] LEHNERT, R.; POTTING, R. Vacuum Cerenkov radiation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, p. 110402, 2004.
- [100] ALTSCHUL, B. Cerenkov Radiation in a Lorentz-Violating and Birefringent Vacuum. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 105003, 2007.
- [101] KAUFHOLD, C.; KLINKHAMER, F. R. Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, v. 734, p. 1–23, 2006.
- [102] FRANK, M.; TURAN, I. The Casimir Force in a Lorentz Violating Theory. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 033016, 2006.
- [103] KHARLANOV, O. G.; ZHUKOVSKY, V. C. Casimir Effect within  $D=3+1$  Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 025015, 2010.
- [104] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Lorentz-violating electrodynamics and the cosmic microwave background. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, p. 011601, 2007.
- [105] XIA, J.-Q. *et al.* Testing CPT Symmetry with CMB Measurements. *Astron. Astrophys.*, v. 483, p. 715–718, 2008.
- [106] XIA, J.-Q.; LI, H.; ZHANG, X. Probing CPT Violation with CMB Polarization Measurements. *Phys. Lett. B*, v. 687, p. 129–132, 2010.

- [107] FENG, B. *et al.* Searching for CPT Violation with Cosmic Microwave Background Data from WMAP and BOOMERANG. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 221302, 2006.
- [108] COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Redefining spinors in Lorentz violating QED. *J. Math. Phys.*, v. 43, p. 3554–3564, 2002.
- [109] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. CPT and Lorentz tests in hydrogen and anti-hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 2254–2257, 1999.
- [110] KOSTELECKÝ, V. A.; VARGAS, A. J. Lorentz and CPT tests with hydrogen, antihydrogen, and related systems. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 5, p. 056002, 2015.
- [111] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Testing CPT with anomalous magnetic moments. *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, p. 1432–1435, 1997.
- [112] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. CPT and Lorentz tests in Penning traps. *Phys. Rev. D*, v. 57, p. 3932–3943, 1998.
- [113] SANTOS, V. E. M. d. Acoplamentos não-mínimos de dimensão cinco com violação da simetria de lorentz nos setores eletrofraco e hadrônico. Tese (Doutorado em Física)-São Luís, Universidade Federal do Maranhão, 2018.
- [114] LANDSMAN, N. P.; WEERT, C. G. van. Real and Imaginary Time Field Theory at Finite Temperature and Density. *Phys. Rept.*, v. 145, p. 141, 1987.
- [115] WEERT, C. G. van. An introduction to real-and imaginary-time thermal field theory. *Lecture Notes on Statistical Field Theory*, 2001.
- [116] COLEMAN, S. R.; GLASHOW, S. L. High-energy tests of Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, v. 59, p. 116008, 1999.
- [117] GOMES, M. *et al.* On the aether-like Lorentz-breaking actions. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 045018, 2010.
- [118] SCARPELLI, A. P. B. *et al.* Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities. *Eur. Phys. J. C*, v. 73, p. 2526, 2013.
- [119] CARROLL, S. M.; TAM, H. Aether Compactification. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 044047, 2008.
- [120] MARIZ, T. Radiatively induced Lorentz-violating operator of mass dimension five in QED. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 045018, 2011.
- [121] MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y. On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 125003, 2012.

- [122] CASANA, R. *et al.* Radiative generation of the CPT-even gauge term of the SME from a dimension-five nonminimal coupling term. *Phys. Lett. B*, v. 726, p. 815–819, 2013.
- [123] MARIZ, T. *et al.* A remark on lorentz violation at finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2005, n. 10, p. 019, 2005.
- [124] NASCIMENTO, J. R. *et al.* Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature. *JHEP*, v. 06, p. 016, 2007.
- [125] ASSUNÇÃO, J. F.; MARIZ, T.; PETROV, A. Y. Nonanalyticity of the induced Carroll-Field-Jackiw term at finite temperature. *EPL*, v. 116, n. 3, p. 31003, 2016.
- [126] FORD, L. H. Vacuum Polarization in a Nonsimply Connected Space-time. *Phys. Rev. D*, v. 21, p. 933, 1980.
- [127] CASANA, R.; SILVA, K. A. T. da. Lorentz-violating effects in the Bose–Einstein condensation of an ideal bosonic gas. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 30, n. 07, p. 1550037, 2015.
- [128] FURTADO, J.; RAMOS, A. C. A.; ASSUNÇÃO, J. F. Effects of Lorentz violation in the Bose-Einstein condensation. *EPL*, v. 132, n. 3, p. 31001, 2020.
- [129] BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. New developments in the Casimir effect. *Phys. Rept.*, v. 353, p. 1–205, 2001.
- [130] BORDAG, M. *et al.* *Advances in the Casimir effect*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. v. 145.
- [131] CASIMIR, H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Indag. Math.*, v. 10, n. 4, p. 261–263, 1948.
- [132] SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, v. 24, p. 751–764, 1958.
- [133] LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 5475–5476, 1998.
- [134] MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 4549–4552, 1998.
- [135] KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. The Casimir force between real materials: Experiment and theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 81, p. 1827–1885, 2009.
- [136] MILTON, K.; BREVIK, I. Casimir Physics and Applications. *Symmetry*, v. 11, n. 2, p. 201, 2019.

- [137] PLUNIEN, G.; MULLER, B.; GREINER, W. The Casimir Effect. *Phys. Rept.*, v. 134, p. 87–193, 1986.
- [138] CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. Bezerra de; PETROV, A. Y. Casimir effects in Lorentz-violating scalar field theory. *Phys. Rev. D*, v. 96, n. 4, p. 045019, 2017.
- [139] MUNIZ, C. R. *et al.* On the Global Casimir Effect in the Schwarzschild Spacetime. *JCAP*, v. 01, p. 006, 2018.
- [140] PONTON, E.; POPPITZ, E. Casimir energy and radius stabilization in five-dimensional orbifolds and six-dimensional orbifolds. *JHEP*, v. 06, p. 019, 2001.
- [141] ALENCAR, G. *et al.* Rainbow's gravity corrections to the black hole global Casimir effect. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 135, n. 1, p. 18, 2020.
- [142] SORGE, F.; WILSON, J. H. Casimir effect in free fall towards a Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 10, p. 105007, 2019.
- [143] CHRISTODOULAKIS, T. *et al.* Casimir effect in 2-D stringy black hole backgrounds. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 124022, 2001.
- [144] VAGENAS, E. C. Casimir effect, Achucarro-Ortiz black hole and the cosmological constant. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 024015, 2003.
- [145] LAMBIASE, G.; STABILE, A.; STABILE, A. Casimir effect in Extended Theories of Gravity. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 8, p. 084019, 2017.
- [146] BUONINFANTE, L. *et al.* Casimir effect in quadratic theories of gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 1, p. 41, 2019.
- [147] MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; CUNHA, M. S. Hořava-Lifshitz gravity effects on Casimir energy in weak field approximation and infrared regime. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 104035, 2013.
- [148] FERRARI, A. F. *et al.* Horava-Lifshitz modifications of the Casimir effect. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 28, p. 1350052, 2013.
- [149] ULION, I. J. M.; MELLO, E. R. Bezerra de; PETROV, A. Y. Casimir effect in Horava-Lifshitz-like theories. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 30, n. 36, p. 1550220, 2015.
- [150] MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; CUNHA, M. S. Casimir effect in the Hořava-Lifshitz gravity with a cosmological constant. *Annals Phys.*, v. 359, p. 55–63, 2015.
- [151] SILVA, D. R. da; CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. Bezerra de. Fermionic Casimir effect in Horava-Lifshitz theories. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 34, n. 20, p. 1950107, 2019.

- [152] BLASONE, M. *et al.* Casimir effect in Post-Newtonian Gravity with Lorentz-violation. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 11, p. 976, 2018.
- [153] ESCOBAR-RUIZ, A. M. *et al.* Scalar Casimir effect for a conducting cylinder in a Lorentz-violating background. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 36, n. 23, p. 2150168, 2021.
- [154] CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. Bezerra de; PETROV, A. Y. Fermionic Casimir effect in a field theory model with Lorentz symmetry violation. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 8, p. 085012, 2019.
- [155] CASANA, R. *et al.* Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 125006, 2010.
- [156] SANTOS, F. E. P. dos; FERREIRA, M. M. Fermion Scattering in a CPT-Even Lorentz Violation Quantum Electrodynamics. *Symmetry*, v. 10, n. 8, p. 302, 2018.
- [157] MILTON, K. A. *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. [S.l.]: World Scientific, 2001.
- [158] ZHAI, X.-h.; LI, X.-z.; FENG, C.-J. The Casimir force of Quantum Spring in the (D+1)-dimensional spacetime. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 26, p. 669–679, 2011.

**APÊNDICE A – EXPRESSÃO PARA O RESULTADO FINITO DO TENSOR DE  
POLARIZAÇÃO CPT-PAR À TEMPERATURA ZERO**

A expressão para a parte finita do tensor de polarização CPT-par no regime de temperatura zero é dada por

$$\begin{aligned}
F_0^{\mu\nu}(k) = & \int_0^1 dx \frac{e^2(1-x)}{8\pi^2[m^2+k^2x(x-1)]} \left( -(\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[ -m^2 + k^2(x-1)^2 \right] \right. \right. \\
& - k^\mu k^\nu (1-2x)^2 \left. \right\} x^2 + \frac{1}{2} \left[ (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu \right] (1-2x)^2 (m^2 - k^2 x^2) \\
& + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \left[ m^2 - k^2(x-1)^2 \right] \left[ m^2 - k^2 x^2 \right] - 2\gamma_E \left[ m^2 + k^2 x(x-1) \right] \left\{ (\hat{k}_c)^{\mu\nu} m^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[ (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu \right] (1-2x)^2 + (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} (x-1) \\
& + k^2 (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \left[ x(3-2x) - 1 \right] \left. \right\} - \left[ m^2 + k^2 x(x-1) \right] \left\{ (\hat{k}_c)^{\mu\nu} [2m^2 - k^2(1-2x+2x^2)] \right. \\
& + \frac{(1-2x)^2}{2} \left[ (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu \right] + (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} x^2 \\
& + 2 \ln \left[ \frac{m^2 + k^2 x(x-1)}{4\pi} \right] \left\{ (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \left[ m^2 + k^2(3x - 2x^2 - 1) \right] \right. \\
& + \frac{(1-2x)^2}{2} \left[ (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu \right] + (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} x(x-1) \left. \right\} \\
& + (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \left[ m^2 + k^2 x(x-1) \right]^2 \left\{ 1 + 2\gamma_E \ln \left[ \frac{m^2 + k^2 x(x-1)}{4\pi} \right]^2 \right\} \\
& + 4 \left[ m^2 + k^2 x(x-1) \right] \left\{ \frac{(1-2x)^2}{2} \left[ (\hat{k}_c)^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + (\hat{k}_c)^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu \right] \right. \\
& + (\hat{k}_c)^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} x(x-1) + k^2 (\hat{k}_c)^{\mu\nu} \left[ x(4-3x) - 1 \right] \left. \right\} \ln \mu \Big), \tag{A.1}
\end{aligned}$$

onde  $\gamma_E$  é a constante de Euler–Mascheroni ( $\gamma_E \approx 0,577$ ). É importante enfatizar que ao contrairmos  $F_0^{\mu\nu}(k)$  com  $k_\mu$  iremos obter zero como resultado, após a integral em  $x$  ser realizada. Isto nos diz que, de fato, o tensor de polarização é invariante de *gauge*.

**APÊNDICE B – INTEGRAL ANGULAR DO SETOR ANISOTRÓPICO DE PARIDADE ÍMPAR**

A integral angular

$$I_{(api)}^\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\left(1 + \frac{v_0^2}{4} |\mathbf{u}|^2 \cos^2 \theta\right) p^2 + m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (\text{B.1})$$

tem como solução

$$\begin{aligned} I_{(api)}^\theta &= \frac{2}{\sqrt{(B+p^2)[(A+1)p^2+B]}} \left\{ Ap^2 \sqrt{B+p^2} K \left[ \frac{Ap^2}{(A+1)p^2+B} \right] \right. \\ &+ p^2 \sqrt{B+p^2} K \left( \frac{Ap^2}{(A+1)p^2+B} \right) - iAp^2 \sqrt{B+p^2} K \left[ \frac{p^2+B}{(A+1)p^2+B} \right] \\ &+ iAp^2 \sqrt{(A+1)p^2+B} K \left[ \frac{Ap^2}{p^2+B} + 1 \right] \\ &- \sqrt{(A+1)p^2+B} [(2A+1)p^2+B] K \left[ -\frac{Ap^2}{p^2+B} \right] + B\sqrt{B+p^2} K \left[ \frac{Ap^2}{(A+1)p^2+B} \right] \\ &\left. + 2(B+p^2) \sqrt{(A+1)p^2+B} E \left[ -\frac{Ap^2}{p^2+B} \right] \right\}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{v_0^2}{4} |\mathbf{u}|^2; \quad (\text{B.3})$$

$$B = m^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; \quad (\text{B.4})$$

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right); \quad (\text{B.5})$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{B.6})$$

sendo

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{B.7})$$

uma integral elíptica do primeiro tipo e

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{B.8})$$

uma integral elíptica do segundo tipo.