UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

SAMUEL HONÓRIO MARTINS

EXPOENTE DE ŁOJASIEWICZ: APLICAÇÃO À RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA DE POLINÔMIOS NO INFINITO

FORTALEZA
2023

SAMUEL HONÓRIO MARTINS

EXPOENTE DE ŁOJASIEWICZ: APLICAÇÃO À RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA DE POLINÔMIOS NO INFINITO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M346e Martins, Samuel Honório.
Expoente de Lojasiewicz : aplicação à relação de equivalência de polinômios no infinito / Samuel Honório Martins. – 2023.
44 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Expoente de Lojasiewicz. 2. Conjuntos semialgébricos. 3. Equivalência analítica no infinito. I. Título.

CDD 510

SAMUEL HONÓRIO MARTINS

EXPOENTE DE ŁOJASIEWICZ: APLICAÇÃO À RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA DE POLINÔMIOS NO INFINITO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 01/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (ICMC-USP)

Prof. Dr. Filipe Balduíno Pires Fernandes
Universidade do Distrito Federal Professor Jorge Amaury Maia Nunes (UNDF)

À Antonieta Pires Honório, Ivo de Freitas Martis, meus pais, e à Ana Beatriz Gonçalves Ribeiro, minha namorada. Sem vocês isto não seria possível.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ascender a chama da esperança em meu coração, estar atento às minhas preces, ser consolo na angústica, levar-me sobre asas de águia até ele (Êxodo 19,4), pois, de fato, Ele é a nossa paz (Ef 2,14). Ele sabe quantas dificuldades foram nescessárias serem superadas para chegar até aqui, nem todas palavras do mundo seriam o bastante para externar toda a gratidão que há em meu peito: de tarde vem o pranto, de manhã gritos de alegria (Salmo, 30).

À Virgem Maria por escutar as minhas orações silenciosas no debulhar das contas do terço e apresentá-las ao seu Filho.

Aos meus pais por todo suporte e paciência ao longo desses anos.

À minha namorada pelo carinho, motivação e atenção.

Ao professor doutor Alexandre Fernandes pela orientação, atenção, paciência, compreensão e gentileza.

Aos membros da banca que se disponibilizaram a avaliar este trabalho.

À todos os companheiros de pós-graduação pelas sugestões e por tornarem esses dois anos mais leves e alegres. Em particular, meus agradecimentos à Vinícius Prado por toda a ajuda com o Latex.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Transformaste o meu luto em dança, tiraste meu pano grosseiro e me cingiste de alegria"

(Bíblia, 2002, p. 891)

RESUMO

Apresentamos o expoente de Łojasiewicz no infinito, demonstramos que este é um número racional para aplicações polinomiais $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $n \geq 2$. Mostramos ainda que, para este caso, o expoente é atingido no conjunto dos $z \in \mathbb{C}^n$, tais que uma de suas funções coordenadas se anula. Ademais, definimos a relação de equivalência analítica de funções no infinito e utilizamos o exponte de Łojasiewicz para mostrar que no complementar de um conjunto algébrico próprio dos polinômios de grau menor ou igual a um certo grau fixado, há somente um número finito de classes de equivalência.

Palavras-chave: conjuntos semialgébricos; expoente de Łojasiewicz; equivalência analítica de funções no infinito.

ABSTRACT

We present the Łojasiewicz exponent at infinity, we show that this is a rational number for polynomial maps $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $n \geq 2$. We also show that, for this case, the exponent is attained in the set of $z \in \mathbb{C}^n$, such that one of its coordinate functions is zero. Furthermore, we define the analytic equivalence relation of functions at infinity and use the exponent of Łojasiewicz to show that in the complement of a proper algebraic set of polynomials of degree less than or equal to a certain fixed degree, there are only a finite number of equivalence classes.

Keywords: semialgebraic sets; Łojasiewicz expoent; analytic equivalence of functions at infinity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais atividades da matemática é classificar objetos. Ainda no início da vida acadêmica temos contato com a noção de homeomorfismo, por exemplo, passando-se a procurar objetos que são topologicamente equivalentes. Mais ainda, busca-se propriedades que dois objetos homeomorfos devem ter em comum ou que, eventualmente, possam não ter. Em particular, em 1962 René Thom conjecturou que no conjunto dos polinômios reais em n variáveis de grau menor ou igual a k só teríamos uma quantidade finita de equivalências topológicas (mais detalhes serão dados no início do capítulo 3). Embora esta conjectura tenha sido provada como verdadeira, outros resultados permaneceram em aberto. Neste trabalho buscamos estudar o conceito de equivalência analítica no infinito entre polinômios utilizando o expoente de Łojasiewicz.

O primeiro capítulo trata a respeito de algumas propriedades de equações diferenciais ordinárias que serão importantes nos principais resultados deste trabalho. Após isto, passamos a tratar de conjuntos semialgébricos. Apresentamos algumas propriedades básicas, enunciamos o teorema da Decomposição Cilíndrica e, após definir o que é uma função semialgébrica, o utilizamos para demonstrar o teorema de Tarski-Seidenberg. Este teorema tem papel central na geometria algébrica real. Com efeito, este nos diz que funções semialgébricas preservam a estrutura de conjunto semialgébrico, algo que não ocorre, por exemplo, com as funções contínuas e conjuntos abertos, uma vez que uma esta pode aplicar um aberto em um conjunto que não é aberto. Feito isto, encerramos o capítulo demonstrando algumas propriedades das funções semialgébricas, por exemplo, mostramos que se $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ é semialgébrica, então existem $B > A$ e N natural tal que, para $x \in (B, +\infty)$, temos $|f(x)| < x^N$.

No segundo capítulo definimos o expoente de Łojasiewicz ($\mathscr{L}_\infty(F)$) e enunciamos um resultado devido a Stanisław Spodzieja em [13] que relaciona o expoente com as aplicações semialgébricas. Após isso, demonstramos na Proposição 3.0.2 que se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $n \geq 2$, é polinomial então o expoente de Łojasiewicz de F restrita a um subconjunto S algébrico próprio e ilimitado é um número racional e, como corolário, obtemos que $F|S$ é própria se e somente se o expoente de Łojasiewicz de $F|S$ é positivo. Por fim, demonstramos $\mathscr{L}_\infty(F) = \mathscr{L}_\infty(F|S)$ onde S é o conjunto dos pontos onde ao menos uma das funções coordenadas de F se anula.

Por fim, no terceiro capítulo definimos o que é uma vizinhança do infinito e o que significa duas funções serem analiticamente equivalentes no infinito. Somado a isso, mostramos que, dado um polinômio real f em n variáveis de grau menor ou igual a k com $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) \geq k-1$, existem hipóteses sobre um polinômio P de modo a termos f analiticamente equivalente no infinito a $f+P$. A saber, estas condições são que P seja um polinômio de grau menor ou igual a k em n variáveis tal que para um certo $\varepsilon > 0$ tenhamos $|P(x)| \leq \varepsilon \parallel x \parallel^k$ e $\parallel \nabla P(x) \parallel \leq \varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}$ para $\parallel x \parallel > R > 0$.

Ainda no terceiro capítulo, demonstramos que existe um subconjunto algébrico próprio no conjunto dos polinômios reais de n variáveis de grau menor ou igual a k, tal que, o gradiente dos polinômios no complementar desse conjunto tem expoente de Łojasiewicz igual a $k-1$. Mais ainda, no complementar deste mesmo conjunto só há um número finito de classes de equivalência. Encerramos o capítulo fazendo comentários a respeito do caso complexo.

2 PREMILINARES

Este capítulo pretende em sua primeira seção enunciar resultados da já conhecida teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que serão usados ao longo do texto e em sua segunda seção introduzir conjuntos semialgébricos o que será fundamental para o restante do trabalho. Provaremos ainda algumas propriedades topológicas básicas destes conjuntos. Ainda nesta segunda parte será introduzido o que é uma aplicação semialgébrica e demonstraremos o Teorema de Tarski-Seidenberg, após isto, provaremos algumas propriedades de funções semialgébricas.

2.1 Equações diferenciais ordinárias

Seja $F : G \to \mathbb{R}^n$ definido no aberto $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Considere a seguinte equação diferencial

$$y' = F(t,y) \tag{2.1}$$

onde $y' = (y_1^{'}, ..., y_n^{'})$. Assuma que o sistema (2.1) tem a seguinte propriedade: para todo $(\tau,\eta) \in G$ há uma única solução $\phi(\tau,\eta) : I(\tau,\eta) \to \mathbb{R}^n$ do sistema (2.1) definida no intervalo maximal $I(\tau,\eta) \subset \mathbb{R}$ e satisfazendo a condição inicial $\phi(\tau,\eta)(\tau) = \eta$.

Dizemos que $\phi(\tau,\eta)$ é solução do sistema integral (2.1). Dizemos que essa equação diferencial possui a propriedade de unicidade de soluções.

Para tais sistemas definimos

$$V = \{(\tau,\eta,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (\tau,\eta) \in G, t \in I(\tau,\eta)\}$$

e $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi(\tau,\eta,t) = \phi(\tau,\eta)(t).$$

Φ é dita solução geral de (2.1).

Proposição 2.1.1. *Sejam $F : J \times D \to \mathbb{R}^n$ contínua e $\phi : (a,b) \to D$ solução integral de (2.1). Se $(a,b] \subset J$, então para todo compacto $K \subset D$ há $c \in (a,b)$ tal que $\phi(t) \notin K$ para $t \in (c,b)$. Analogamente, se $[a,b) \subset J$, então para todo compacto $K \subset D$ há $d \in (a,b)$, tal que $\phi(t) \notin K$ para $t \in (a,d)$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.1 de [6]. □

Teorema 2.1.1. *Se o mapa F é solução de classe $C^m, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, então a solução geral do sistema (2.1) existe e é de classe C^m.*

Demonstração. Ver Corolário 4.1 de [6]. □

Teorema 2.1.2. *Se o mapa F é analítico, então a solução geral do sistema (2.1) existe e é analítica.*

Demonstração. Ver Teorema 1.8.12 de [9]. □

2.2 Conjunto semialgébricos

Os resultados e definições feitos nesta seção estão em [1] e [4].

Definição 2.2.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico se existem polinômios $P_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ tais que*

$$X = \bigcap_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j} s_{i,j} 0\}, s_{i,k} \in \{<, =, >\}.$$

Exemplo 2.2.1. *Todo conjunto algébrico é semialgébrico.*

Exemplo 2.2.2. *Os conjuntos semialgébricos da reta são uniões finitas de pontos e intervalos.*

Proposição 2.2.1. *A coleção de conjuntos semialgébricos é a menor coleção de conjuntos que contém $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ e é fechada por uniões e interseções finitas e complementares.*

Demonstração. Seja Ω uma família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que contém todos os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ fechada para uniões e interseções finitas e complementares.

Tome $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ elemento de Ω. Então $\mathbb{R}^n - A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$. Seja $g \in \mathbb{R}[x_1, \cdots x_n], g = -f$. O conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) > 0\}$ é um elemento de Ω e $\mathbb{R}^n - B = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq f(x)\}$. Como Ω é fechada para interseções finitas, $C = (\mathbb{R}^n - A) \cap (\mathbb{R}^n - B) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ é um elementode Ω. Logo, Ω contém todos os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}, \forall f \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Daí, Ω contém todos os conjuntos semialgébricos.

Por outro lado, a interseção de todos os conjuntos do tipo Ω contém todos os conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}, \forall f \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ e é fechada para interseções finitas, uniões finitas e complementares. Portanto os semialgébricos estão contidos na interseção. □

Proposição 2.2.2. *Todo conjunto semialgébrico em* $\mathbb{R}^n$ *pode ser escrito como uma união finita de conjuntos semialgébricos da forma:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0, Q_1(x), \dots Q_l(x) > 0\}, \tag{2.2}$$

onde $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l$ *são elementos de* $\mathbb{R}[x_1, \dots, X_n]$.

Demonstração. Todo conjunto da forma (2.2) pode ser escrito como $\bigcap_{i=1}^{m}\{x \in \mathbb{R}^n : R_i s_i 0\}$, com $s_j \in \{>, =\}$ e R_i é uma renomeação dos polinômios P_i e Q_j. Logo, a família dos conjuntos da forma (2.2) formam uma subfamília da família dos conjuntos semialgébricos e contém os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$. Pela Proposição 2.2.1, basta mostrar que ela é fechada para uniões finitas, interseções finitas e complementares.

Ela é fechada para a uniões finitas por definição e o caso da interseção segue da distributividade da interseção pela união. Quanto a ser fechado por complementar, basta notar

$$\bigcap_{i=1}^{m}\{x \in \mathbb{R}^n ; R_i s_i 0\} = \bigcup\{x \in \mathbb{R}^n : R_i(x) \neg s_i 0\},$$

onde $\neg s_i \in \{\neq, <\}$.

Se $\neg s_i = \neq$, podemos escrever $\{x \in \mathbb{R}^n : R_i(x) \neq 0\}$ como $\{x \in \mathbb{R}^n : R_i(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : -R_i(x) > 0\}$, obtendo um conjunto do mesmo tipo. Portanto, podemos concluir que essa união é de conjuntos do tipo enuciado. $\square$

Enuciamos agora o Teorema da Decomposição Cilíndrica.

Teorema 2.2.1. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto semialgébrico, e denotemos um elemento de* $\mathbb{R}^n$ *por* $(x,t) = ((x_1, ..., x_{n-1}), t)$. *Então:*

(a_n) *X tem uma quantidade finita de componentes conexas, e cada uma delas é semialgébrica;*

(b_n) *Existe uma partição finita* $\mathscr{P}$ *de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *em conjuntos semialgébricos conexos de forma que, para todo* $A \in \mathscr{P}$, *podemos definir*

$$f_k^A : A \to \overline{\mathbb{R}}, k = 0, 1, \dots S_A, S_A + 1$$

tais que:

1) $f_0^A = -\infty, f_{S_A+1}^A = +\infty$;
2) $f_k^A : A \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua para todo* $k = 0, 1, \dots, S_A, S_A + 1$, *e para todo* $x \in A, f_k^A(x) < f_{k+1}^A(x)$;

3) Todos os conjuntos da forma

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n : f_k^A(x) < t < f_{k+1}^A(x)\}, k = 0,1,\ldots,S_A,$$

são ditos de tipo $\mathscr{B}$ e

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n : f_k^A = t\}, k = 1,\ldots,S_A$$

são ditos de tipo $\mathscr{G}$.

4) A coleção de todos os conjuntos de $\mathbb{R}^n$ indicados em 3) formam uma partição de $\mathbb{R}^n$. A coleção destes conjuntos que está contida em X formam uma partição de X.

Demonstração. Ver Teorema 2.2.1 de [1]. □

Definição 2.2.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semialgébricos. Dizemos que $f : X \to Y$ é semialgébrica se o gráfico de f é um conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Exemplo 2.2.3. *Todo polinômio P em n variáveis é semialgébrico, pois o gráfico de P é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y - P(x) = 0\}$.*

Enunciamos agora um dos teoremas mais importantes envolvendo conjuntos semialgébricos. Este nos diz que uma função semialgébrica aplica semialgébrico em semialgébrico. Veja que algo análogo não ocorre, por exemplo, com funções contínuas, estas não aplicam abertos em abertos. Por outro lado, homeomorfismos o fazem. Ocorre algo análogo também para homomofismos de grupos, onde a imagem de um grupo é ainda um grupo ou subgrupo. Isto nos diz que aplicações semialgébricas preservam a estrutura de conjuntos semialgébricos. O que será fundamental.

Teorema 2.2.2. *(Teorema de Tarski-Seidenberg) Sejam X e Y conjuntos semialgébricos, e $f : X \to Y$ uma função semialgébrica. Então $f(X)$ é semialgébrico.*

Demonstração. De f ser semialgébrica, temos que o gráfico de f é semialgébrico e note que $f(X) = \pi(X \times Y \cap graf(f))$ onde $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a projeção. Note que π é semialgébrica, pois o gráfico de π é o conjunto $\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^{m+n+m}; y - t = 0\}$. Logo, é suficiente mostrar que se $V \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então $\pi(V)$ também o é.

Façamos indução sobre m. Para o caso $m = 1$, o Teorema da Decomposição Cilíndrica permite que escrevamos V como a união de conjuntos semialgébricos conexos dos tipos $\mathscr{B}$ e $\mathscr{G}$ sobre conjuntos semialgébricos que particionam $\mathbb{R}^n$. Ao aplicar π em V os conjuntos resultantes são elementos que particionam $\pi(V)$. Como união finita de conjuntos semialgébricos é semialgébrica, então $\pi(V)$ é semialgébrico.

Supondo que a afirmação vale para o caso m, em $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$, podemos expressar $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ como a composição de $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ composto com $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Pelo caso de base $\pi_1(V)$ é semialgébrico, e pela hipótese de indução, $\pi_2(\pi_1(V))$ é semialgébrico. $\square$

Proposição 2.2.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semialgébricos e $f : X \to Y$ uma bijeção semialgébrica. Então, $f^{-1} : Y \to X$ também é semialgébrica.*

Demonstração. Por definição $graf(f)$ é semialgébrico. Além disso, defina $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ por $A(x,y) = (y,x)$. Temos que $graf(A) = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; x-t = 0, y-s = 0\}$. Logo, A é semialgébrica e o resultado segue de $graf(f^{-1}) = A(graf(f))$. $\square$

Iremos apresentar agora a versão lógica do Teorema de Tarski-Seidenberg. Para tanto precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.2.3. *Uma linguagem de primeira ordem na língua de corpos ordenados com parâmetros em $\mathbb{R}$ é definida como:*

(1) As fórmulas atômicas são dadas por $P(x) > 0$ e $Q(x) = 0$ onde $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$;

(2) Se Φ e Ψ são fórmulas de primeira ordem, então $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \wedge \Psi$ e $\neg\Phi$ são fórmulas de primeira ordem;

(3) Se Φ é fórmula de primeira ordem, então $\exists X\Phi$ e $\forall X\Phi$ são fórmulas de primeira ordem.

Ora, os conjuntos semialgébricos podem ser escritos utilizando linguagem de primeira ordem, uma vez que vale:

(a) $y \in \{x \in \mathbb{R}^n; P(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x)\} \Leftrightarrow P(y) \vee Q(y)$.

(b) $y \in \{x \in \mathbb{R}^n; P(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x)\} \Leftrightarrow P(y) \wedge Q(y)$.

(c) $y \in \{x \in \mathbb{R}^n : P(x)\}^C \Leftrightarrow \neg P(y)$.

Teorema 2.2.3. *Se Ψ é uma fórmula de primeira ordem, então $\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x)\}$ é semialgébrico.*

Demonstração. Procedamos por indução. É evidente que (1) e (2) na Definição 2.2.3 produzem conjuntos semialgébricos. Quanto a (3), se

$$\{(x_1, \ldots x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}; \Psi(x_1, \ldots x_{n+1})\}$$

é semialgébrico, então

$$\{(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n;\exists x_{n+1},\Psi(x_1,\dots x_{n+1})$$

é semialgébrico pois é a projeção do conjunto anterior. O caso do $\forall X\Psi$ é equivalente a $\neg\exists X\neg\Psi$.

$\square$

Esta caracterização pode facilitar muito a verificação de exemplo.

Exemplo 2.2.4. *A função módulo é semialgébrica pois o seu gráfico é o conjunto*

$$\{(x,y);y=|x|\}=\{(x,y);x\geq 0\wedge y=x\}\cup\{(x,y);x<0\wedge y=-x\}.$$

Aplicaremos a versão lógica acima para demontrar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.4. *Se $X\subset\mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então também são semialgébricos os conjuntos $int(X),\partial X$ e $\overline{X}$.*

Demonstração. Seja P a fórmula que define o conjunto X. Daí,

1. $\overline{X}=\{$ x $\in\mathbb{R}^n;\forall\varepsilon>0,\exists y\in\mathbb{R}^n(\parallel x-y\parallel<\varepsilon)\}=\{x\in\mathbb{R}^n;\forall\varepsilon>0,\exists y\in\mathbb{R}^n(\parallel x-y\parallel^2<\varepsilon^2)\wedge P(y)\}$;
2. $\partial X=\overline{X}\cap\overline{\mathbb{R}^n-X}$;
3. int $(X)=\mathbb{R}^n-(\overline{\mathbb{R}^n-X})$.

$\square$

A proposição anterior nos deu propriedades topológicas de conjuntos semialgébricos. Vejamos agora propriedades de funções semialgébricas:

Proposição 2.2.5. *Sejam $X\subset\mathbb{R}^n,Y\subset\mathbb{R}^m$ e $Z\subset\mathbb{R}^p$ conjuntos semialgébricos e $f:X\to Y$ e $g:Y\to Z$ funções semialgébricas tais que faz sentido $g\circ f$. Então vale:*

1. *$g\circ f:X\to Z$ é semialgébrica;*
2. *Se $B\subset Y$ é semialgébrico, então $f^{-1}(B)$ é semialgébrico;*
3. *$S(X)=\{h:X\to\mathbb{R};h$ é semialgébrica$\}$ é um anel comutativo com unidade.*
4. *f é semialgébrica se, e somente se, as funções coordenadas são semialgébricas.*
5. *$h:X\to Y$ é semialgébrica se, e somente se, $g\circ h\in S(X)$ para toda $g\in S(Y)$.*
6. *Se $f:X\to\mathbb{R}$ e $f(x)\neq 0,\forall x\in X$. $f\in S(X)$ se, e somente se, $\frac{1}{f}\in S(X)$.*

Demonstração. 1. Temos que $graf(g\circ f)=\pi((graf(f)\times\mathbb{R}^p)\cap(\mathbb{R}^n\cap graf(g))$ onde π é a projeção de $\mathbb{R}^{n+m+p}$ em $\mathbb{R}^{n+p}$. A afirmação é válida por 2.2.2.

2. Veja que $f^{-1}(B) = \pi((X \times B) \cap graf(f))$. Por Tarski-Seidenberg o resultado segue.
3. Veja que se f é uma função constante igual a c, então f é semialgébrica, pois $graf(f) = X \times \{c\}$. Assim, as funções constantes iguais a 0 e 1 são semialgébricas. Além disso, a soma e o produto de funções semialgébricas é ainda semialgébrica, pois para f_1 e f_2 semialgébricas o $graf(f_1+f_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m;$ *existem y' e z' com f(y')=y e f(z') = z e* $x - y - z = 0\}$. Analogamente o produto também é semialgébrico. Por fim, $-f = 0 - f$. Logo $S(X)$ é subanel comutativo com unidade do conjunto do anel das funções de X em $\mathbb{R}$.
4. Se f é semialgébrica então $f_i = \pi_i \circ f$ que é a composta de funções semialgébricas. Logo, f_i é semialgébrica. Por outro lado, $f(x) = (f_1(x), 0, ..., 0) + (0, f_2(x), 0, ..., 0) + \cdots + (0, 0, ..., f_m(x))$. De forma que podemos tomar a composta $j_i \circ f(x)$ onde $j_i(x)$ é a inclusão que é 0 zero em todas as entradas exceto a i-ésima que é x. Temos que $graf(j_i) = \{x, x_1, ..., x_m); x - x_i = 0 \; e \; x_j = 0 \; para \; j \neq i\}$. Que é um conjunto semialgébrico. Segue que f é semialgébrica.
5. Por 1), se h é semialgébrica, $g \circ h$ também é. Por outro lado, se $g \circ h \in S(X)$ para toda $g \in S(Y)$, então $h_i = \pi_i \circ h$ também é semialgébrica e por 4), h é semialgébrica.
6. Temos $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ que leva x em $\frac{1}{x}$ é semialgébrica, pois $graf(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$. Logo, $g \circ f$ é semialgébrica.

□

Exemplo 2.2.5. *As funções racionais são semialgébricas pelos itens (1) e (6) da Proposição 2.2.5.*

Vamos estimar o crescimento de uma função real semialgébrica, não nescessariamente contínua. Antes façamos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.6. *Seja $P = a_0X^d + \cdots + a_{d-1}X + a_d$, onde $a_0 \neq 0$. Se $c \in \mathbb{C}$ é uma raíz de P, então*

$$|c| \leq \max_{i=1,\ldots,d} \left(d\frac{|a_i|}{|a_0|} \right)^{\frac{1}{i}}.$$

Demonstração. Seja

$$M = \max_{i=1,\ldots,d} \left(d\frac{|a_i|}{|a_0|} \right)^{\frac{1}{i}}$$

e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > M$. Então,

$$\frac{|a_0||z|^i}{d} > \frac{|a_o|d|a_i|}{d|a_0|} = |a_i|$$

para $i = 1, ..., d$. Logo,

$$|a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d| \leq |a_1||z|^{d-1} + \cdots + |a_d| < |a_0 z^d|$$

e, portanto, $P(z) \neq 0$, uma vez que se z é zero de P, então $a_0 z^d + \cdots + a_{d-1} z + a_d = 0$ e, daí, $|a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d| = |a_0 z^d|$. □

Proposição 2.2.7. *Seja $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ semialgébrica. Então existe $B \geq A$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq x^N$ para todo $x \in (B, +\infty)$.*

Demonstração. Seja Γ o gráfico de f que é um semialgébrico de $\mathbb{R}^2$. Pela Proposição 2.2.2 podemos escrever $I = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_p$ onde cada G_i é não vazio da forma

$$G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P_i(x, y) = 0, Q_{i,1}(x, y) > 0, ..., Q_{i,k_i}(x, y) > 0\}.$$

Onde todos os polinômios P_i tem grau maior que zero em relação a y, pois, caso contrário, se $(x_0, y_0) \in G_i$ então o gráfio deveria conter a linha $\{x_0\} \times \mathbb{R}$, pois P_i não dependeria de y. O que não pode ocorrer pois é gráfico. Seja $P(x, y) = a_0(x) y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_d(x)$ o produto de todos os $P_i(x, y)$, onde $d > 0$ e $a_0 \neq 0$. Escolha $C \geq A$ grande o suficiente para $a_o(x)$ não se anular em $(C, +\infty)$. Pela Proposição 2.2.6, como f é zero de P, nós obtemos

$$|f(x)| \leq \max_{i=1,\dots,d} \left(d \frac{|a_i(x)|}{|a_0(x)|} \right)^{\frac{1}{i}}$$

Fazendo $x \to \infty$ temos que o lado direito é equivalente a $|\lambda x^\alpha|, \alpha \in \mathbb{Q}$, pois temos o quociente de um polinômio elevado a um número racional vezes uma constante e, assim, para efeitos de limite com $x \to \infty$, apenas o monômio de maior grau é de interesse. Logo, tomando $N \in \mathbb{N}, N > \alpha$, obtemos $B \geq C$, tal que $|f(x)| < x^N$ para $x \in (B, +\infty)$. □

Demonstraremos agora a inequação de Łojasiewicz:

Teorema 2.2.4. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto e semialgébrico e $f, g : K \to \mathbb{R}$ funções contínuas semialgébricas, tais que se $x \in K$ e $f(x) = 0$, vale que $g(x) = 0$. Então existem $N \in \mathbb{N}$ e uma constante $C \geq 0$, tal que para todo $x \in K$, temos que $|g(x)|^N \leq C|f(x)|$.*

Demonstração. Para $t > 0$, o conjunto $F_t = \{x \in K; t|g(x)| = 1\}$. Claramente F_t é fechado em K. em particular, F_t é compacto. Suponhamos $F_t \neq \emptyset$, então f não se anula em F_t (caso contrário, g também se anularia) e a função $\frac{1}{|f(x)|}$ tem máximo em F_t, que denotaremos por $\theta(t)$. Se F_t é vazio, colocamos $\theta(t) = 0$. Isto define uma função $\theta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que é semialgébrica. Pela Proposição 2.2.7, existe $B > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t > B$, $|\theta(t)| \leq t^N$. Isto é equivalente a

$$\forall x \in K \left(0 < |g(x)| < \frac{1}{B} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \leq t^N = \frac{1}{|g(x)|^N} \right).$$

Seja D o máximo de $\frac{|g(x)|^N}{|f(x)|}$ no compacto $\{x \in K; |g(x)| \geq 1/B\}$ e $C = \max\{1, D\}$. Obtemos $|g(x)|^N \leq C|f(x)|$. $\square$

3 O EXPOENTE DE ŁOJASIEWICZ NO INFINITO

Neste capítulo iremos definir o expoente de Łojasiewicz e demonstrar resultados feitos em [2]. Inicialmente mostraremos que se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, n \geq 2$, é polinomial e a imagem inversa do zero por F restrita a um conjunto algébrico ilimitado é finita, então o expoente de Łojasiewicz é racional (Proposição 3.0.2). Por fim mostraremos que o expoente de Łojasiewicz de F é atingido no conjunto formado pelos pontos em $\mathbb{C}^n$ onde ao menos uma de suas funções coordenadas se anula (Teorema 3.0.1). Para tanto, iniciemos com o expoente para aplicações em $\mathbb{R}^n$.

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definimos

$$N(F) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists C, R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n (\| x \| > R \Rightarrow \| F(x) \| \geq C \| x \|^v)\}$$

e colocamos $\mathscr{L}_\infty(F)$ como o $sup\{N(F)\}$. Se $N(F) = \varnothing$, colocamos $\mathscr{L}_\infty(F) = -\infty$. De forma análoga, para S conjunto algébrico ilimitado em $\mathbb{R}^n$, podemos colocar:

$$N(F|S) = \{v \in \mathbb{R} : \exists C, R > 0, \forall x \in S(\| x \| > R \Rightarrow \| F(x) \| \geq C \| x \|^v)\}$$

e, assim, $\mathscr{L}_\infty(F|S) = sup\{N(F|S)\}$.

De forma parecida ao caso real, definimos o expoente de Lojasiewicz de $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ no infinito como o supremo do conjunto

$$N(F) = \{v \in \mathbb{R} : \exists C, R > 0, \forall z \in \mathbb{C}^n \| z \| > R \Rightarrow \| F(z) \| \geq C \| z \|^v\}$$

e denotamos por $\mathscr{L}_\infty(F)$, onde $\| z \| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}, z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$. Caso $N(F) = \varnothing$, então $\mathscr{L}_\infty(F) = -\infty$.

Uma relação entre mapas semialgébricos e o expoente é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3.0.1. *Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é semialgébrico, então existem $C, R > 0$, tais que $\| F(x) \| \geq C \| x \|^{\mathscr{L}_\infty(F)}$ para $\| x \| > R$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.5 de [13]. □

Uma curva $\phi : (R, \infty) \to \mathbb{R}^k$ é dita meromorfa no infinito se ϕ é soma de uma série de Laurent da forma

$$\phi(t) = t^p \alpha_p + t^{p-1} \alpha_{p-1} + ..., \alpha_i \in \mathbb{R}^k, p \in \mathbb{Z}.$$

De forma análoga podemos definir uma curva meromorfa no infinito com contradomínio em $\mathbb{C}^k$. Neste caso, observe ainda que fazendo a mudança de variável $z = \frac{1}{t}$ obteremos

$$\phi(z) = z^{-p}p + \cdots + \alpha_0 + z\alpha_{-1} + \cdots, \alpha_i \in \mathbb{C}^k$$

de forma que ϕ passa a ser uma série de Laurent em torno do zero. Além disso, cada coordenada de ϕ é uma série meromorfa de uma variável complexa que faz parte do anel das funções meromorfas. De modo que se a imagem de ϕ está contida em um conjunto S algébrico ilimitado, tal que $(F|S)^{-1}(0)$ é um conjunto finito, onde $F : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^m, k \geq 2$ é polinomial, então $F \circ \phi$, ainda é uma curva meromorfa no infinito

Lema 3.0.1. *(Lema de Seleção da Curva) Se $X \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto semialgébrico ilimitado, então há uma curva $\phi : (R, \infty) \to \mathbb{R}^k$, meromorfa no infinito, tal que $\phi(t) \in X$ para $t \in (R, \infty)$ e $\| \phi(t) \| \to \infty$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Ver Lema 2 de [10]. $\square$

Dizemos ainda que $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n) : \{t \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n\}$ é meromorfa no ∞ se cada ϕ_i é meromorfa.

A notação $\| F(z) \| \sim \| z \|^\lambda$ será usada para dizer que

$$0 < \lim_{z \to \infty} \frac{\| F(z) \|}{\| z \|^\lambda} < M$$

Sejam $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, n \geq 2$, polinômio e $S \subset \mathbb{C}^n$ conjunto algébrico ilimitado, vale:

Proposição 3.0.2. *Se $(F|S)^{-1}(0) < +\infty$, então $\mathscr{L}_\infty(F|S) \in N(F|S) \cap \mathbb{Q}$. Mais ainda, há uma curva meromorfa no infinito $\phi : \{t \in \mathbb{C}; |t| > R\} \to \mathbb{C}^m$, tal que $\phi(t) \in S, \| \phi(t) \| \to \infty$ quando $t \to \infty$ e $\| F \circ \phi(t) \| \sim \| \phi(t) \|^{\mathscr{L}_\infty(F|S)}$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Note que o conjunto $\{(z, w) \in S \times S; \| F(z) \|^2 \leq \| F(w) \|^2 \vee \| z \|^2 \neq \| w \|^2\}$ é semialgébrico.

Pelo Teorema de Tarski-Seidenberg o conjunto

$$X = \{z \in S; \forall w \in S (\| F(z) \|^2 \leq \| F(w) \|^2 \vee \| z \|^2 \neq \| w \|^2)\} = \{z \in S; \| F(z) \| = \min_{\|z\| = \|w\|} \| F(w) \|\}$$

é também semialgébrico e ilimitado. Este último acontece, pois, como S é ilimitado, para todo número real A, podemos obter $z \in S$ com $\| z \| > A$, daí podemos tomar $z_0 \in S$ com $\| z_0 \| = \| z \|$ e

$$\| F(z_0) \| = \min_{\|x\| = \|z\|} \| F(x) \|,$$

para $x \in S$.

Pelo Lema de Seleção de Curvas existe uma curva $\overline{\phi} : (R, \infty) \to X$ meromorfa no infinito com $\| \overline{\phi}(t) \| \to \infty$ quando $t \to \infty$. Então há um inteiro positivo p tal que $\overline{\phi}$ é a soma da série de Laurent: $t^p \alpha_p + t^{p-1}\alpha_{p-1} + \dots$, com $\alpha_i \in \mathbb{C}^k, \alpha_p \neq 0$. Daí, como F é polinomial, segue que existe q inteiro com $F \circ \overline{\phi}(t) = t^q \beta_q + t^{q-1}\beta_{q-1} + \dots, \beta_i \in \mathbb{C}, \beta_q \neq 0$. Daí, tomemos $\lambda = \frac{q}{p}$, e, portanto, $\| F \circ \overline{\phi}(t) \| \sim \| \overline{\phi}(t) \|^{\lambda}$ quando $t \to +\infty$.

Seja $\overline{\Gamma} = \{z \in \mathbb{C}^n; z = \overline{\phi}(t), t \in (R, +\infty)\}$. Então $\| F(z) \| \sim \| z \|^{\lambda}$, quando $\| z \| \to \infty, z \in \overline{\Gamma}$.

Desejamos mostrar que $\mathscr{L}_\infty(F|S) = \lambda$.

Como

$$0 < \lim_{z \to +\infty} \frac{\| F(z) \|}{\| z \|^{\lambda}} < M,$$

então para $z \in \overline{\Gamma}, \| z \| > A$, temos que $\| F(z) \| \leq M \| z \|^{\lambda}$, segue que $\mathscr{L}_\infty(F|S) \leq \lambda$.

Como $\overline{\Gamma}$ é ilimitado, segue que existem $A, B > 0$ tais que, para $z \in \overline{\Gamma}, \| z \| > B$, temos $\| F(z) \| > A \| z \|^{\lambda}$. Seja $w \in S$ $\| w \| > B$, temos que existe $w_0 \in X, \| w_0 \| = \| w \|$ e daí

$$\| F(w) \| \geq \| F(w_0) \| \geq A \| w_0 \|^{\lambda} = A \| w \|^{\lambda} .$$

Daí, $\lambda \in N(F|S)$ e, portanto, $\mathscr{L}_\infty(F|S) \geq \lambda$. De forma que a primeira parte da proposição está demonstrada.

Quanto a segunda parte, seja ϕ a extensão ao domínio complexo de $\overline{\phi}$, isto é, $\phi(t) = t^p \alpha_p + t^{p-1}\alpha_{p-1} + \cdots$, onde $t \in \mathbb{C}, |t| > R, \alpha_i \in \mathbb{C}^m, \alpha_p \neq 0$. Temos que ϕ é meromorfa no infinito e $\| \phi(t) \| \to \infty$ quando $t \to \infty$. De forma analoga, seja $F \circ \phi$ extensão de $F \circ \overline{\phi}$ como $F \circ \phi(t) = t^q \beta_q + t^{q-1}\beta_{q-1} + \cdots$, onde $t \in \mathbb{C}, |t| > R, \beta_i \in \mathbb{C}^m$ e $\beta_q \neq 0$. Pela construção feita anteriormente, temos o resultado.

□

Segue da proposição anterior que:

Corolário 3.0.1. *$\mathscr{L}_\infty(F|S) > -\infty$ se, e somente se, $\#(F|S)^{-1}(0) < \infty$.*

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita própria se a imagem inversa de compacto por f é ainda compacto. Isto é equivalente a termos que se $\lim x_k = \infty$, então $\lim f(x_k) = \infty$.

Corolário 3.0.2. *$F|S$ é próprio se, e somente se, $\mathscr{L}_\infty(F|S) > 0$.*

Demonstração. Se $\mathscr{L}_\infty(F|S) \leq 0$, pela proposição anterior, existiria uma curva meromorfa no ∞ indo para o infinito, mas com F composta com essa curva limitado. Assim, $F|S$ não seria própria.

Por outro lado, existem $A, B > 0$ tal que para $\| z \| > B$, temos $\| F(z) \| > A \| z \|^{\mathscr{L}_\infty(F|S)}$. Assim, se z_k é uma sequência indo para o ∞, temos que para k suficientemente grande passamos a ter $\| F(z_k) \| > A \| z_k \|^{\mathscr{L}_\infty(F|S)}$, logo $F(z_k) \to +\infty$. $\square$

Exemplo 3.0.1. *Seja $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $F(x,y) = x^2y + x$ e $S = \{(x,y); 2xy + 1 = 0\}$. Temos que $\phi(t) = (\frac{1}{t}, \frac{-t}{2})$ pertence a S para todo $t > 0$. Além disso, $F \circ \phi(t) = \frac{1}{2t}$ que pela Proposição 3.0.2 nós que*

$$\mathscr{L}_\infty(F|S) = -1$$

. Isto é, $F|S$ não é uma aplicação própria.

Lema 3.0.2. *Seja $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_m) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$ um mapa polinomial e $\phi = \phi_1 \cdots \phi_m$. Se ϕ é um polinômio de grau positivo e T o conjunto dos seus zeros, então para todo $t \in \mathbb{C}$*

$$\| \Phi(t) \| \geq 2^{-deg\Phi} \min_{\tau \in T} \| \Phi(\tau) \| .$$

Demonstração. Fixemos $t_0 \in \mathbb{C}$ e o $\min_{\tau \in T} |t_0 - \tau|$ atingido em $\tau_0 \in T$. Se ϕ_i é um polinômio de grau positivo e tem a forma

$$\phi_i(t) = c_i \prod_{j=1}^{deg\phi_i} (t - \tau_{ij}),$$

então nós temos

$$2|t_0 - \tau_{ij}| = |t_0 - \tau_{ij}| + |t_0 - \tau_{ij}| \geq |t_0 - \tau_0| + |t_0 - \tau_{ij}| \geq |\tau_0 - \tau_{ij}|.$$

Portanto,

$$2^{deg\phi_i}|\phi_i(t_0)| = 2^{deg\phi_i}|c_i \prod_{j=1}^{deg\phi_i} (t - \tau_{ij})| = |c_i \prod_{j=1}^{deg\phi_i} 2(t - \tau_{ij})| \geq |c_i| \prod_{j=1}^{deg\phi_i} 2|\tau_0 - \tau_{ij}| = |\phi_i(\tau_0)|.$$

Essa inequação também é verdade para ϕ_i constante. Como $deg\Phi \geq deg\phi$, obtemos

$$2^{deg\Phi} \| \Phi(t_0) \| \geq \| \Phi(\tau_0) \| \geq min_{\tau \in T} \| \Phi(t) \| .$$

$\square$

Para uma sequência $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n, n \geq 2$, pomos, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $z_i^{'} = (z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n)$.

Lema 3.0.3. *Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ polinômio não constante e S o conjunto dos seus zeros. Se $degf = deg_{z_i}f$ para $i \in \{1, ..., n\}$, então há constantes $C \geq 1, D > 0$, tal que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $|z_i| \leq C|z_i'|$ para $z \in S$ e $|z_i'| > D$.*

Demonstração. Suponha que isto não ocorra, então existe uma sequência $\{z_{ik}'\} \subset S$, com $\| z_{ik}' \| \to \infty$ e $z_{ik} > C_i \| z_{ik}' \|$. Isto é,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| z_{ik}' \|}{\| z_{ik} \|} = 0.$$

Digamos que o grau de f seja d e observemos os monômios de grau d de f, denotando por f_d. Daí, se $z = (z_1, \ldots z_n) \in S$, temos

$$\frac{\Sigma a_I z_{1k}^{\alpha_1} \cdots z_{nk}^{\alpha_n}}{z_{ik}^d} = 0 \tag{3.1}$$

Porém, como $degf = deg_{z_i}f$, existe um monômio $\Sigma a_0 z_i^d$, onde a_0 é diferente de 0. Daí, tomando $k \to \infty$ na equação 3.1, obtemos $a_0 = 0$.

□

Lema 3.0.4. *Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ e T uma mudança linear de coordenadas de $\mathbb{C}^n$. Se $v \in N(F)$, então $v \in N(F \circ T)$.*

Demonstração. Temos que T é um isomorfismo e vale que

$$N = \inf_{\|x\|=1} \| Tx \| < \| T \| < \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| = M.$$

Tome $v \in N(F)$, daí existem $A, B > 0$ tais que $\| x \| > B$ implica $\| F(x) \| \geq B \| x \|^v$. Agora, se $Tx = y$, então $\| Tx \| \geq N \| x \|$, de forma que se $\| x \| > \frac{A}{N}$, teremos $\| y \| \geq A$ e irá valer que $\| F \circ T(x) \| = \| F(y) \| \geq B \| y \|^v$. De forma que $v \in N(F \circ T)$. □

Veja que de forma análoga ao Lema anterior, se S é um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ ilimitado, então $N(F|S)$ é invariante por mudanças lineares de coordenadas em $\mathbb{C}^n$.

Teorema 3.0.1. *Seja $F = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, n \geq 2$, um mapa polinomial e $S = \{z \in \mathbb{C}^n; f_1(z) \cdots f_m(z) = 0\}$ não vazio, então $\mathscr{L}_\infty(F) = \mathscr{L}_\infty(F|S)$.*

Demonstração. Vamos assumir que

(1) $S \neq \mathbb{C}^n$;

(2) $(F|S)^{-1}(0) < \infty$.

Com efeito, se (1) não vale o resultado é imediato e se (2) não vale o resultado segue do Corolário 3.0.1. Somado a isso, é evidente que $N(F) \subset N(F|S)$, logo, basta-nos mostrar que $N(F|S) \subset N(F)$.

Vamos realizar uma mudança de coordenadas em $\mathbb{C}^n$ da seguinte forma: substitua z_1 por $a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n$,..., z_n por $a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n$, de forma que a matriz (a_{ij}) seja invertível. Há um número infinito de formas de escolher os a_{ij}. Porém, colocaremos mais condições sobre a escolha destes. Seja $f = f_1 \cdots f_m$. De (1) nós temos que $degf > 0$ e podemos olhar para a parte homogênea de grau máximo, digamos d, de f como

$$\sum_i a_i z_1^{\alpha_{1i}} \cdots z_n^{\alpha_{ni}}$$

onde $\sum_j \alpha_{ji} = d$ que pela mudança de coordenadas acima ficará:

$$\sum_i a_i (a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n)^{\alpha_{i1}} \cdots (a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n)^{\alpha_{in}}.$$

Para cada v_j teremos um monômio da forma $\sum_i a_i (a_{1j}^{\alpha_{i1}} \cdots a_{nj}^{\alpha_{in}}) v_j^d$. Queremos que cada $a_i (a_{1j}^{\alpha_{i1}} \cdots a_{nj}^{\alpha_{in}}) \neq 0$. Mas como só há uma quantidade finita de equações que os a_{ij} precisam satisfazer, isto é possível. De tal forma que, podemos assumir $degf = deg_{z_i} f$ e, mais ainda, repetindo este processo para cada f_j, teremos $deg_{z_i} f_j = degf_j$.

De (2) e do Corolário 3.0.1, segue que $N(F|S)$ é não vazio. Tome $v \in N(F|S)$, então existem $A, B > 0$ com $\| F(\zeta) \| \geq A \| \zeta \|^v$ para $\| \zeta \| > B$.

Pelo Lema 3.0.3, existem $C \geq 1$ e $D > 0$ tais que para todo $i \in \{1, ..., n\}$ vale $|z_i| \leq C|z_i'|$, onde $z \in S$ e $|z_i'| > D$.

Ponha $A_1 = 2^{-degF} A min(1, C^v)$ e $B_1 = max(B, D)$. Tome $z^0 \in \mathbb{C}^n$ qualquer tal que $\| z^0 \| > B_1$. Devido a equivalência das normas, ao invés de utilizar a norma euclidiana, podemos usar a norma de máximo, de modo a termos que existe i com $\| z_0 \| = \| z_i^{0\prime} \|$. Defina $\phi_j(t) = f_j = (z_1^0, ..., z_{i-1}^0, t, z_{i+1}^0, ..., z_n^0), \Phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$. Da construção $degF = deg\Phi$. Definindo $\phi = \phi_1 \cdots \phi_m$ polinômio de grau positivo com T o conjunto dos seus zeros. Do Lema 3.0.2 segue que

$$\|F(z^0)| = \| \Phi(z_i^0) \| \geq 2^{-deg\Phi} \min_{\tau \in T} \| \Phi(\tau) \| = 2^{-degF} \| F(\zeta^0) \|$$

onde $\zeta^0 = (z_1^0, ..., z_{i-1}^0, \tau_0, z_{i+1}^0, ..., z_n^0), \tau_0 \in T$. Segue que $\zeta^0 \in S$, pois como alguma ϕ_j se anula, temos que f_j se anula.

Como $\| z^0 \| > B_1$ e $\| \zeta^0 \| \geq \| z_i^{0\prime} \| = \| z^0 \|$. Daí, vale que

$$\| F(z^0) \geq 2^{-degF} \| F(\zeta^0) \| > 2^{-degF} A \| \zeta^0 \|^{v} .$$

E

$$\| z^0 \| \leq \| \zeta^0 \| \leq C \| \zeta_i^{0\prime} \| \leq C \| z_i^{0\prime} \| = C \| z^0 \| .$$

Segue que $\| F(z^0) \| \geq A_1 \| z^0 \|^{v}$.

Como z^0 é arbitrário, $v \in N(F)$ e o resultado segue.

□

Exemplo 3.0.2. *Seja $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $f(x,y) = (x+y^3, x^2+y^2)$. Podemos parametrizar os zeros de f_1 e f_2 por $\overline{\phi_1}(t) = (-t^3, t), \overline{\phi_2}(t) = (-it, t), \overline{\phi_3}(t) = (it, t)$, onde na notação da demonstração da Proposição 3.0.2 teremos p, respectivamente $p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 1$ e assim $f \circ \overline{\phi_1}(t) = (0, t^6 + t^2), f \circ \overline{\phi_2}(t) = (-it + t^3, 0), f \circ \overline{\phi_3}(t) = (it + t^3, 0)$ e, portanto, $q_1 = 6, q_2 = 3, q_3 = 3$. Logo, $\mathscr{L}_\infty(F) = \mathscr{L}_\infty(F|S) = 2$.*

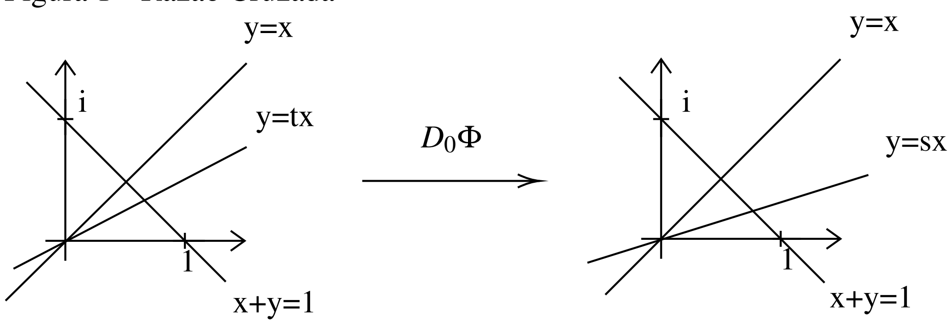
4 EQUIVALÊNCIA ANALÍTICA NO INFINITO

4.1 Breve evolução histórica

Em 1962 René Thom conjecturou que há somente um número finito de tipos topológicos de polinômios reais e complexos em n variáveis de grau no máximo k; isto é, uma quantidade finita de classes de equivalência, onde um polinômio f é equivalente a um polinômio g se $f \circ \phi = \psi \circ g$, para certos homeomorfismos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (no caso complexo $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$). Em 1976 T. Fukuda provou isto. Sabe-se que esta equivalência topológica não pode ser substituída por equivalência difeomórfica, isto é, ϕ e ψ passarem a ser difeomorfismos. Mostraremos isso através do próximo exemplo.

Exemplo 4.1.1. *Considere o polinômio de Whitiney $f_t(x,y) = xy(x-y)(y-tx)$. Se f_t é difeomorficamente equivalente a f_s por um difeomorfismo Φ, então $D_0\Phi$ é tal que $D\phi(0) = 0$ e as retas $x = 0, y = 0, x = y$ e $y = tx$ são levadas em permutações nas retas $x = 0, y = 0, x = y$ e $y = sx$. De tal forma que ao passarmos a reta $x + y = 1$ ela irá interceptar a reta $x = 0$ no ponto, visto como número complexo, i, $y = 0$ no número complexo 1. Já a reta $y = tx$ e $y = sx$ serão interceptadas, respectivamente, nos pontos $\frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t}i$ e $\frac{1}{1+s} + \frac{s}{1+s}i$. Por fim, quanto a reta $x = y$, teremos $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.*

Figura 1 – Razão Cruzada



Fonte: elaborada pelo autor.

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dois a dois distintos, a razão cruzadas destes é o conjunto de todos os quocientes $\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4}$ onde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ e $x_i \in \{a, b, c, d\}$. Sabemos que a razão cruzada dos pontos que são zeros de f_t e estão na reta $x + y = 1$ devem ser os mesmos dos pontos que são zeros de f_s e estão na reta $x + y = 1$. Na Tabela 1 listamos todas as razões cruzadas.

Agora devemos igualar cada termo da primeira coluna da tabela 1 com os da segunda coluna, afim de termos condições para f_t ser equivalente a um f_s. Por exemplo, se

Tabela 1 – Todas as razões cruzadas referentes a f_t e a f_s

Razão Cruzada referente a f_t	Razão Cruzada referente a f_s
$\frac{t+1}{2t}$	$\frac{s+1}{2s}$
$\frac{2}{t+1}$	$\frac{2}{s+1}$
$\frac{-2t-2}{t-1}$	$\frac{-2s-2}{s-1}$
$\frac{1-t}{2(t+1)}$	$\frac{1-s}{2(s+1)}$
$\frac{t+1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$
$\frac{2t}{t+1}$	$\frac{2s}{s+1}$

Fonte: elaborada pelo autor.

igualarmos a primeira linha da primeira coluna com a primeira linha da segunda, obteremos $t = s$. Todas opções possíveis são dadas abaixo:

$t = s$	$t = \frac{3s-1}{s+1}$, se $s \neq -1$	$t = \frac{1-3s}{5s+1}$, se $s \neq -\frac{1}{5}$
$t = \frac{-s-1}{s-3}$, se $s \neq 3$	$t = \frac{-5s-1}{s+1}$, se $s \neq -1$	$t = \frac{s}{s+2}$, se $s \neq -2$
$t = \frac{1-s}{5s+3}$, se $s \neq -\frac{3}{5}$	$t = \frac{-2s}{s+1}$, se $s \neq -1$	$t = \frac{s+1}{3s-1}$, se $s \neq -\frac{1}{3}$
$t = \frac{-s-1}{2s}$, se $s \neq 0$	$t = \frac{-5s-3}{s-1}$, se $s \neq 1$	$t = \frac{-5s-3}{3s+5}$, se $s \neq -\frac{5}{3}$
$t = \frac{1}{s}$, se $s \neq 0$	$t = \frac{3-s}{s+1}$, se $s \neq -1$	$t = \frac{s-3}{s+5}$, se $s \neq -5$
$t = \frac{-s-1}{5s+1}$, se $s \neq -\frac{1}{5}$	$t = \frac{-2s-1}{s}$, se $s \neq 0$	$t = -2s - 1$
$t = \frac{3-s}{s+1}$, se $s \neq -1$	$t = \frac{-5s-1}{3s-1}$, se $s \neq -\frac{1}{3}$	$t = \frac{1}{-2s-2}$, se $s \neq \frac{1}{2}$

Segue daí que apenas para um número finito de casos f_t é equivalente a f_s. Uma variante deste exemplo será importante futuramente quando estivermos falando de equivalência analítica no infinito.

O Teorema 4.2.3 feito por Grzegorz Skalski em [12] resolve parcialmente o problema de Thom para equivalências analíticas no infinito. Mostraremos que o complementar de um certo conjunto algébrico próprio nos polinômios de graus menor ou igual a k em n variáveis tem um número finito de classes de equivalência.

4.2 Equivalência analítica no infinito

Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dizemos que uma bijeção $\phi : U_1 \to U_2$ é um difeomorfismo analítico se ϕ e ϕ^{-1} são analíticas. Uma vizinhança do infinito é o complementar de um compacto, isto é, $U \subset \mathbb{R}^n$ é vizinhança do infinito se existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto com $U = \mathbb{R}^n - K$.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que f e g são analiticamente equivalentes no infinito se há um difeomorfismo analítico $\phi : U_1 \to U_2$ de vizinhanças do infinito $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\parallel \phi(x) \parallel \to \infty$ se, e somente se, $\parallel x \parallel \to \infty$ e há um difeomorfismo analítico $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f \circ \phi = \psi \circ g$ em U_1.

Na família das funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definimos uma relação de equivalência dizendo que $f \approx g$ se f e g são analíticamente equivalentes no infinito

Seja $k \in \mathbb{Z}$ um inteiro não negativo definimos $\mathbb{R}_k[x_1, ..., x_n] = \{f \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n] : degf \leq k\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ definimos o conjunto $\mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1, ..., x_n]$ como sendo todos os polinômios $P \in \mathbb{R}_k[x_1, ..., x_n]$, tais que existe $R > 0$ com $|P(x)| \leq \varepsilon \parallel x \parallel^k$ e $\parallel \nabla P(x) \parallel \leq \varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}$ para $\parallel x \parallel > R$.

Demonstraremos dois Lemas de EDO que serão utilizados adiante.

Lema 4.2.1. *Seja* $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x \parallel > R\}$*, onde* $R > 0$ *e seja* $W : (-2,2) \times D \to \mathbb{R}^n\}$ *um mapa contínuo que satisfaz* $\parallel W(t,x) \parallel \leq \frac{1}{2} \parallel x \parallel$ *para* $(t,x) \in (-2,2) \times D$*. Seja* $\phi : (\alpha, \beta) \to D$ *uma solução integral do sistema de equações diferenciais*

$$y' = W(t,y).$$

Se $0 \in (\alpha, \beta)$ *e* ϕ *satisfaz a condição inicial* $\phi(0) = x$*, onde* $x \in D$*, então*

$$\parallel x \parallel e^{-\frac{1}{2}t} \leq \parallel \phi(t) \parallel \leq \parallel x \parallel e^{\frac{1}{2}(1-t)}$$

para $t \in [0, \beta)$*. Se* $1 \in (\alpha, \beta)$ *e* ϕ *satisfaz a condição inicial* $\phi(1) = x$*, onde* $x \in D$*, então*

$$\parallel x \parallel e^{-\frac{1}{2}(1-t)} \leq \parallel \phi(t) \parallel \leq \parallel x \parallel e^{\frac{1}{2}(1-t)}$$

para $t \in (\alpha, 1]$*.*

Demonstração. Iremos demonstrar a primeira parte, uma vez que a segunda é análoga. Como $\| \phi(t) \| > R$, pois $\phi(t) \in D$ para $t \in (\alpha, \beta)$, então podemos definir $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2} ln \| \phi(t) \|^2$$

para $t \in (\alpha, \beta)$.

Derivando e usando que ϕ é solução de W temos que

$$f'(t) = \frac{< \phi(t), \phi'(t) >}{\| \phi(t) \|^2} = \frac{< \phi(t), W(t, \phi(t)) >}{\| \phi(t) \|^2}$$

para $t \in (\alpha, \beta)$. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $t \in (0, \beta)$, há $\theta \in (0, t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(\theta)t$. Fazendo as substituições

$$|f(t) - f(0)| \leq |f'(\theta)| t \leq \frac{|\phi(\theta)| \cdot |W(\theta, \phi(\theta))|}{|\phi(\theta)|^2} \cdot t \leq \frac{1}{2} t.$$

Portanto, para todo $t \in (0, \beta)$, vale

$$f(0) - \frac{1}{2} t \leq f(t) \leq f(0) + \frac{1}{2} t \Rightarrow \frac{1}{2} ln \| x \|^2 - \frac{1}{2} t \leq \frac{1}{2} ln \| \phi(t) \|^2 \leq e^{\frac{1}{2} ln \|x\|^2} \cdot e^{\frac{1}{2} t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{2} ln \|x\|^2}}{e^{\frac{1}{2} t}} \leq e^{\frac{1}{2} ln \|\phi(t)\|^2} \leq e^{\frac{1}{2} ln \|x\|^2} e^{\frac{1}{2} t} \Rightarrow \| x \| e^{-\frac{1}{2} t} \leq \| \phi(t) \| \leq \| x \| e^{\frac{1}{2} t}.$$

Onde na primeira implicação usamos que $f(0) = \frac{1}{2} ln \| x \|^2$ e na segunda aplicamos a função exponencial. □

Lema 4.2.2. *Seja* $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| > R\}$, *onde* $R > 0$ *e seja* $W : (-2, 2) \times D \to \mathbb{R}^n\}$ *um mapa contínuo que satisfaz* $\| W(t, x) \| \leq \frac{1}{2} \| x \|$ *para* $(t, x) \in (-2, 2) \times D$. *Seja* $\phi : (\alpha, \beta) \to D$ *uma solução integral do sistema de equações diferenciais*

$$y' = W(t, y).$$

Se ϕ *satisfaz a condição inicial* $\phi(0) = x$, *onde* $\| x \| > 2R$, *então* $\beta > 1$. *Se* ϕ *satisfaz a condição inicial* $\phi(1) = x$, *onde* $\| x \| > 2R$, *então* $\alpha < 0$.

Demonstração. Novamente iremos provar apenas a primeira parte, uma vez que a segunda é análoga. Por contradição suponhamos que $\beta \leq 1$. Do Lema 4.2.1 obtemos, para $t \in [0, \beta)$, que:

$$R < \frac{1}{\sqrt{e}} \| x \| \leq \| \phi(t) \| \leq \sqrt{e} \| x \| .$$

Assim, ϕ restrita a $[0, \beta)$ está contida no compacto: $\left\{ y \in \mathbb{R}^n ; \frac{1}{\sqrt{e}} \| x \| \leq \| y \| \leq \sqrt{e} \| x \| \right\}$. O que é um absurdo. □

No próximo teorema utilizaremos o exponte de Łojasiewicz para, dado um polinômio f, com uma hipótese sobre o seu gradiente, colocarmos algumas condições sob um polinômio P de forma que f seja analiticamente equivalente no infinito a $f+P$.

Teorema 4.2.1. *Seja $f \in \mathbb{R}[x_1,...,x_n]$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Se $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) \geq k-1$, então há $\varepsilon > 0$ tal que para todo $P \in \mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1,...,x_n]$ os polinômios f e $f+P$ são analiticamente equivalentes no infinito.*

Demonstração. De f ser semi-algébrica, pela Proposição 3.0.1 segue que existem $C > 0$ e $R > 1$ tal que $C \parallel x \parallel^{k-1} \leq \parallel \nabla f(x) \parallel$ para $\parallel x \parallel > R$.

Seja $\varepsilon = \frac{C}{4}$ e fixe um polinômio arbitrário $P \in \mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1,...,x_n]$. Aumentando R se necessário podemos supor que $\parallel P(x) \parallel \leq \varepsilon \parallel x \parallel^k$ e $\parallel \nabla P(x) \parallel \leq \varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}$ para $\parallel x \parallel > R$.

Definimos $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ polinômio por $F(\xi,x) = f(x) + \xi P(x)$, $G = \{(\xi,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |\xi| < 2, \parallel x \parallel > R\}$ e, por fim, $D = \{x \in \mathbb{R}^n; \parallel x \parallel > R\}$.

Segue que $\nabla F = (P(x), \nabla f(x) + \xi \nabla P(x))$, de tal forma que para $(\xi,x) \in G$, temos $\parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel \geq \parallel \nabla f(x) \parallel - |\xi| \cdot \parallel \nabla P(x) \parallel \geq \parallel \nabla f(x) \parallel -2 \parallel \nabla P(x) \parallel$.

Daí segue que $\parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel \geq C \parallel x \parallel^{k-1} - 2\varepsilon \parallel x \parallel^{k-1} = (C - 2\varepsilon) \parallel x \parallel^{k-1} \geq 2\varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}$. Onde na última igualdade usamos que $\frac{C}{4} = \varepsilon \Rightarrow C = 4\varepsilon \Rightarrow C - 2\varepsilon = 2\varepsilon$. De modo que $\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel \geq \parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel \geq 2\varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}$.

De sorte que podemos definir o mapa $X = (X_1,...,X_{n+1}) : (\xi,x) \in G \to \frac{P(x)}{\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel^2} \nabla F(\xi,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Da definição de X, obtemos

$$\parallel X(\xi,x) \parallel = \frac{\parallel P(x) \parallel}{\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel^2} \parallel \nabla F(\xi,x) \parallel = \frac{\parallel P(x) \parallel}{\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel} \leq \frac{\varepsilon \parallel x \parallel^k}{\parallel \nabla F(\varepsilon,x) \parallel} \leq \frac{\varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}}{2\varepsilon \parallel x \parallel^{k-1}} < 1.$$

Além disso, para $(\xi,x) \in G$, observe que

$$X_1(\xi,x) = \frac{P(x)}{\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel^2} \cdot \frac{\partial F(\xi,x)}{\partial \xi} = \frac{P(x) \cdot P(x)}{\parallel \nabla F(\xi,x) \parallel^2}$$

logo,

$$\parallel X_1(\xi,x) - 1 \parallel = \left\| \frac{(P(x))^2}{\parallel P(x)^2 \parallel + \parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel^2} - 1 \right\| = \frac{\parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel^2}{\parallel P(x) \parallel^2 + \parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel^2}.$$

Agora olhemos para

$$\parallel (X_2,...,X_{n+1})(\xi,x) \parallel = \frac{\parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel \cdot \parallel P(x) \parallel}{\parallel P(x) \parallel^2 + \parallel \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \parallel^2}$$

.

Assim, faz sentido definir o mapa W:

$$W : (\xi, x) \in G \to \frac{1}{X_1(\xi, x) - 1}(X_2, ..., X_{n+1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\| W(\xi,x) \| &= \frac{1}{X_1(\xi,x)-1} \| (X_2,...,X_{n+1})(\xi,x) \| \\
&= \frac{\| P(x) \|^2 + \| \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \|^2}{\| \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \|^2} \cdot \frac{\| \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \| \cdot \| P(x) \|}{\| P(x) \|^2 + \| \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \|^2} \\
&= \frac{\| P(x) \|}{\| \nabla f(x) + \xi \nabla P(x) \|} \\
&\leq \frac{\varepsilon \| x \|^k}{2\varepsilon \| x \|^{k-1}} \\
&= \frac{1}{2} \| x \| .
\end{aligned}$$

De forma que faz sentido considerar o seguinte sistema de equações diferenciais: $y' = W(t, y)$, onde W está definida em G. Seja $U = \{x \in \mathbb{R}^n ; \| x \| > 2R\}$. Como W é analítica em G, ela possui solução geral $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$ analítica, onde

$$V = \{(\tau, \eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; (\tau, \eta) \in G, t \in I(\tau, \eta)\}$$

e $I(\tau, \eta) \subset \mathbb{R}$ é o intervalo aberto de existência da solução integral $t \to \Phi(\tau, \eta, t)$ passando por (τ, η).

Do Lema 4.2.2, obtemos para $x \in U$, $1 \in I(0,x)$ e $0 \in I(1,x)$. Isso implica que estão bem definidas :

$$\Psi : x \in U \to \Phi(0, x, 1) \in D$$

e

$$\Theta : y \in U \to \Phi(1, y, 0) \in D$$

e são analíticas. Da unicidade de solução, temos ainda que elas são injetivas.

Mais ainda, do Lema 4.2.1 elas satisfazem as inequações

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \| x \| \leq \| \Psi(x) \| \leq \sqrt{e} \| x \|$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \| y \| \leq \| \Theta(y) \| \leq \sqrt{e} \| y \|$$

onde $x, y \in U$.

Definimos a seguinte vizinhança do infinito $U_1 = \{y \in U; \| y \| > 4R\}$, da segunda inequação acima, obtemos que $\| \Theta(y) \| \geq \frac{1}{\sqrt{e}} \| y \| > 2R$ e, portanto, temos $\Theta(U_1) \subset U$.

Iremos provar que $\Psi \circ \Theta(y) = y$ sempre que y pertencer a U_1. Ora, como $\Phi(1,y,0) = \Theta(y) \in U$ para $y \in U_1$ e $\Phi(0,\Phi(1,y,0),0) = \Phi(1,y,0)$. Pela unicidade de soluções $\Phi(0,\Phi(1,y,0),t) = \Phi(1,y,t)$ para $t \in [0,1]$. Portanto, para $y \in U_1$, $\Psi \circ \Theta(y) = \Phi(0,\Phi(1,y,0),1) = \Phi(1,y,1) = y$.

Como $\Theta(U_1) \subset U \Rightarrow \Psi \circ \Theta(U_1) \subset \Psi(U) \Rightarrow U_1 \subset \Psi(U)$.

Definimos $U_2 = \Psi^{-1}(U_1)$, então U_2 é aberto e $\Psi(U_2) = U_1$. Iremos provar que $\Theta \circ \Psi(x) = x$ para $x \in U_2$.

Da definição de U_2 nós temos que $\Phi(0,x,1) = \Psi(x) \in U_1$ para $x \in U_2$, então, pela unicidade de solução $\Phi(1,\Phi(0,x,1),t) = \Phi(0,x,t)$ para $t \in [0,1]$.

Portanto, $\Theta \circ \Psi(x) = \Phi(1,\Phi(0,x,1),0) = \Phi(0,x,0) = x$.

Logo, $U_2 = \Theta(U_1)$ e Θ é um difeomorfismo analítico de U_1 em U_2 e $\Psi|_{U_2} = (\Theta|_{U_1})^{-1}$.

Assim, para termos um difeomorfismo analítico entre vizinhanças do infinito, resta mostrar que U_2 é uma vizinhança do infinito. Para tanto, definimos $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; \| x \| > 8R\}$ e $x \in U_3$ um elemento arbitrário. Então, $x \in U$ e $\| \Psi(x) \| \geq \frac{1}{\sqrt{e}\|x\|} > 4R$.

Logo, $\Psi(x) \in U_1$ e $x \in U_2$. O que implica que $U_3 \subset U_2$ e U_2 é uma vizinhança do infinito.

Fixemos $x \in U$ e seja $\phi_x(t) = \Phi(0,x,t)$ para $t \in [0,1]$. Iremos provar que $F(t,\phi_x(t)) = f(x)$ para $t \in [0,1]$.

Da definição de X e W nós obtemos para $(\xi,x) \in G$ que

$$(1,W) = \left(1, \frac{X_2}{X_1 - 1}, \ldots, \frac{X_{n+1}}{X_1 - 1}\right) = \frac{1}{X_1 - 1}(X_1 - 1, X_2, \ldots, X_{n+1}) = \frac{1}{X_1 - 1}(X - e_1)$$

onde o (ξ,x) foram omitidos.

Vale ainda que $\langle \nabla F(\xi,x), X(\xi,x) \rangle = \left\langle \nabla F, \frac{P \nabla F}{\|\nabla F\|^2} \right\rangle = P$.

Seja $\varsigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\varsigma(t) = F(t,\phi_x(t)), t \in [0,1]$. Daí,

$$\begin{aligned}
\varsigma'(t) &= \left\langle \nabla F(t,\phi_x(t)), (1,\phi_x'(t)) \right\rangle = \langle \nabla F(t,\phi_x(t)), (1, W(t,\phi_x(t))) \rangle \\
&= \left\langle \nabla F(t,\phi_x(t)), \frac{1}{X_1(t,\phi_x(t)) - 1}(X(t,\phi_x(t)) - ne_1) \right\rangle \\
&= \frac{1}{X_1(t,\phi_x(t)) - 1}\left[\langle \nabla F(t,,\phi_x(t)), X(t,\phi_x(t)) \rangle - \langle \nabla F(t,\phi_x(t)), e_1 \rangle\right] \\
&= \frac{1}{X_1(t,\phi_x(t)) - 1}(P(\phi_x(t)) - P(\phi_x(t))) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\varsigma(t)$ é constante e como $\varsigma(0) = F(0, \phi_x(0)) = f(x)$, vale que $\varsigma(t) = f(x)$ para todo $t \in [0,1]$. Isto é, $F(t, \phi_x(t)) = f(x)$.

Como $\phi_x(0) = x$, vale $F(t, \phi_x(t)) = f(x)$. Daí, temos que para $x \in U_2$

$$f(x) = F(0,x) = F(0, \phi_x(0)) = F(1, \phi_x(1)) = F(1, \psi(x)) =$$
$$= f(\psi(x)) + 1 \cdot P(\psi(x)) = (f+P)(\psi(x)).$$

Como $\psi|_{U_2} = (\Theta|_{U_1})^{-1}$, temos $f \circ \Theta(x) = f(x) + P(x), \forall x \in U_1$.

Seja $\psi = \Theta|_{U_1}$ e Id a função identidade dos números reais. Então $f \circ \phi = Id \circ (f+P)$. Das inequações, segue que $|\phi(x)| \to \infty \iff |x| \to \infty$ $\square$

Corolário 4.2.1. *Seja $f \in \mathbb{R}[x_1,..,x_n]$ e $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. Se há $C, R > 0$, tal que $\| \nabla f(x) \| \leq C \| x \|^{k-1}$ para $\| x \| > R$, então para todo polinômio $P \in \mathbb{R}_k[1,...,x_n]$, cujos módulos dos coeficientes dos monômios de grau k não são maiores que*

$$\frac{C}{n(4k+4)\binom{n+k-1}{n-1}}$$

os polinômios f e $f+P$ são analiticamente equivalentes no infinito.

Demonstração. Seja

$$D = \frac{C}{n(4k+4)\binom{n+k-1}{n-1}},$$

temos que o resultado vale para $k = 0$, pois P se torna o polinômio contante e, para $\varepsilon = \frac{C}{4}$, é trivial aplicar o Teorema 4.2.1 . Suponhamos $k > 0$ e seja $P \in \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]$ um polinômio arbitrário com $P = P_1 + P_2$ onde P_1 tem grau menor que k e P_2 é um polinômio homogêneo de grau k ou o polinômio nulo. Se o módulo dos coeficientes do polinômio P_2 não são maiores que D, então o módulo dos coeficientes das derivadas parciais de P_2 não são maiores que kD. Como $\binom{n+k-1}{n-1}$ é o número de monômios de P_2, então

$\| P_2(x) \| \leq \binom{n+k-1}{n-1} \cdot \frac{C}{n(4k+4)\cdot\binom{n+k-1}{n-1}} \cdot \| x \|^k \leq \left(\frac{C}{4k+4}\right) \| x \|^k$.

Além disso, para $P_2(x) = \Sigma\beta_i x_1^{\alpha_{i1}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}$, então $\nabla P_2 = (\Sigma\beta_i\alpha_{i1}x_1^{\alpha_{i1}-1} \cdots x_n^{\alpha_{in}}, \ldots, \Sigma\beta_i\alpha_{in}x_1^{\alpha_{i1}} \cdots x_n^{\alpha_{in}-$

logo

$$\| \nabla P_2(x) \| \leq \sqrt{n\left(kD \| x \|^{k-1} \binom{n+k-2}{n-1}\right)^2} = kD \| x \|^{k-1} \binom{n+k-2}{n-1}\sqrt{n} \leq \frac{kC}{n(4k+4)} \| x \|^{k-1}.$$

Na primeira desigualdade acima, usamos que para $t = \frac{1}{\|x\|}$, então $\| (tx_1)^{\alpha_1} ... (tx_n)^{\alpha_n} \| \leq 1$ e daí $t^{k-1} \| x_1{}^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \| \leq 1$, de forma que $\| x_1{}^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \| \leq \frac{1}{t^{k-1}} = \| x \|^{k-1}$.

Pela escolha de P_1, vale que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\| P_1 \|}{\| x \|^k} = 0,$$

logo existe $R > 0$ tal que $\| x \| > R \Rightarrow \| P_1 \| < \varepsilon \| x \|^k$, para $\varepsilon > 0$ dado. Analogamente para ∇P_1. Seja $\varepsilon = \frac{C}{4}$ e $R_1 > 0$ tal que $\| P_1(x) \| \leq \left(\varepsilon - \frac{C}{4k+4}\right) \| x \|^k$ e $\| \nabla P_1(x) \| \leq \left(\varepsilon - \frac{kC}{4k+4}\right) \| x \|^{k-1}$ para $\| x \| > R$. Assim, $P \in \mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1,...,x_n]$ e o resultado segue do Teorema 4.2.1. □

Podemos enfranquecer a noção de equivalência analítica para no lugar de usarmos funções analíticas, usarmos funções de classe C^r, para $r \in \mathbb{Z}, r \geq 0$. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções, diremos que elas são $\mathbb{C}^r$-equivalentes no infinito se há um C^r difeomorfismo $\phi : U_1 \to U_2$, onde U_1 e U_2 são vizinhanças do infinito em $\mathbb{R}^n$, tal que $\| \phi(x) \| \to \infty$ se, e somente se, $\| x \| \to \infty$ e há um C^r-difeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f \circ \phi = \psi \circ g$ em U_1.

Como em funções de classe C^{r+1} o expoente de Lojasiewicz não precisa ser atingido, então podemos reescrever o Teorema 4.2.1, usando o Teorema 2.1.1, da seguinte forma:

Teorema 4.2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^{r+1}, $r \in \mathbb{Z}, r \geq 0$. Se existem $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$, $C, R > 0$, tais que $\| \nabla f(x) \| \geq C \| x \|^{k-1}$ para $\| x \| > R$, então há $\varepsilon > 0$, tal que para todo $P \in \mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1,...,x_n]$ as funções f e $f + P$ são C^r-equivalentes no infinito.*

O espaço projetivo de dimensão k, denotado por $\mathbb{P}^k$, é dado $\mathbb{C}^{k+1}/\sim$, onde $(x_0,...,x_n) \sim (y_0,...,y_n)$ se $y_i = \lambda x_i$ para $i = 0,...,n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Representaremos uma classe de equivalência por $[z]$. Seja $S \subset \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$, definimos $Z(S) = \{x \in \mathbb{C}^n; \textit{ para todo} f \in S, f(x) = 0\}$.

Dizemos que $X \subset \mathbb{P}^n$ é algébrico se $X = Z(S)$ para algum S. .

Proposição 4.2.1. *Para todo $A \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^N$ algébrico, tem-se que $\pi_2(A) \subset \mathbb{C}^N$ é algébrico, onde $\pi_2 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ é definido por $\pi_2(x,y) = y$.*

Demonstração. Veja o primeiro teorema da seção 6.2 de [7]. □

Voltemos o olhar para os polinômios analiticamente equivalentes no infinito. Iremos mostrar que, após retirarmos um subconjunto algébrico próprio, só restará uma quantidade finita de classes de equivalência no conjuntos dos polinômios de n variáveis de grau menor ou igual a k. O subconjunto que devemos tirar será dado pelo próximo lema.

Lema 4.2.3. *Seja k um inteiro positivo. Há um subconjunto algébrico próprio $\Sigma \subset \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]$, tal que $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) = k - 1$ para $f \in \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n] - \Sigma$.*

Demonstração. Seja $\Sigma_k = \{f \in A_k : \exists z \in \mathbb{C}^n, \| z \| = 1; \nabla f(z) = 0\}$, onde A_k é o espaço linear dos polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ de grau k, assumimos que $0 \in A_k$. Denotaremos por f_k o único polinômio homogênio de grau k, tal que $f - f_k$ tem o grau menor que k. Iremos mostrar que o conjunto desejado é $\Sigma = \{f \in \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]; f_k \in \Sigma_k\}$.

Primeiramente, Σ_k é um subconjunto algébrico próprio de A_k. Utilizando a Proposição 4.2.1, defina $B = \{([z], f); [z] \in \mathbb{P}^n \textit{ e } f \textit{ um polinômio homogênio de grau } k; \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) = \cdots \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) = 0\}$. Temos que $B \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^N$ é algébrico, logo $\pi(B)$ é algébrico.

De forma análoga ao f_k podemos definir f_1 como a parte homogênea de grau 1 de f, f_2 a parte homogênea de grau 2 de f e assim por diante. No caso, f_0 representa as constantes. De modo que cada f_i pertence a uma $\mathbb{R}^{n_i}$, logo $\mathbb{R}_k[x_1,...,x_n] = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n_k}$. Logo, $\Sigma = \mathbb{R}^N \times \Sigma_k \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n_k}$. Como $_k$ é algébrico em R^{n_k}, temos que Σ é algébrico.

Seja $f \in \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n] - \Sigma$ arbitrário e ponha $C = \frac{1}{2} inf\{\| \nabla f_k(x) \| : x \in \mathbb{R}^n, \| x \| = 1\}$.

Assim, da definição de Σ_k, de $C > 0$ e das entradas de ∇f_k serem polinômios homogêneos, vale que para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, vale

$$\frac{1}{\| x \|^{k-1}} \| \nabla f_k(x) \| = \| \nabla f_k \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \| \geq 2C.$$

Portanto, $\| \nabla f_k(x) \| \geq 2C \| x \|^{k-1}$ para $x \neq 0$.

Como $deg(f - f_k) \leq k-1$ então existe $R > 0$, tal que $\| \nabla(f - f_k)(x) \| \leq C \| x \|^{k-1}$ para $\| x \| \geq R$, de forma que:

$$| \| \nabla f \| - \| \nabla f_k \| | \geq \| \nabla f - \nabla f_k \| = \| \nabla(f - f_k) \| \leq C \| x \|^{k-1}$$

logo,

$$\| \nabla f \| \geq \| \nabla f_k \| - | \| \nabla f \| - \| \nabla f_k \| | \geq 2C \| x \|^{k-1} - C \| x \|^{k-1} \geq C \| x \|^{k-1}$$

sempre que $\| x \| \geq R$.

Segue que $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) \geq k-1$. Como $deg f \leq k$, então $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) \leq k-1$. □

Teorema 4.2.3. *Seja k um inteiro não negativo. Há um subconjunto algébrico próprio $\Sigma \subset \mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]$, tal que toda componente S do conjunto $\mathbb{R}_k[x_1,...,x_n] - \Sigma$ contém somente polinômios analiticamente equivalentes, isto é, $f \approx g$ para $f, g \in S$. Em particular, em $\mathbb{R}_k[x_1,...,x_n] - \Sigma$ há somente um número finito de equivalência analítica no infinito.*

Demonstração. Para $k = 0$ é suficiente tomar Σ como o conjunto vazio. Suponhamos $k > 0$. Seja Σ como o conjunto do lema anterior e suponhamos que S seja uma componente fixada de

$\mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]-\Sigma$ e $f\in S$. Consideremos o conjunto $S_f=\{g\in S; g\approx f\}$ claramente não vazio. Por hipótese, existem $C,R>0$, tais que

$$\| \nabla f(x) \| \geq C \| x \|^{\mathscr{L}_\infty(\nabla f)}$$

Defina $|f|=max\{|a|;\ a\text{ é coeficiente de }f\}$. Seja $f_1\in S_f$ e $g\in S$, tal que $|f_1-g|<\frac{\varepsilon}{\lambda k\sqrt{n}}$ onde λ é o número máximo de monômios que um polinômio de grau k em n variáveis pode ter e $\varepsilon=\frac{C}{4}$. Assim, se $f_1=\sum a_i x_1^{\alpha_{i_1}}\cdots x_n^{\alpha_{i_n}}$ e $g=\sum b_i x_1^{\alpha_{i_1}}\cdots x_n^{\alpha_{i_n}}$, então $|a_i-b_i|<\frac{\varepsilon}{\lambda k\sqrt{n}}$. Veja que $\sum \alpha_{ji}\leq k$. Logo, para $x=(x_1,\cdots,x_n)$ e $\| x\|>1$, temos $|(g-f_1)(x)|\leq |a_j-b_j|\ \| x\|^k$ $+\cdots+|a_0-b_o|\ \| x\|^k\leq \varepsilon \| x\|^k$ e

$$\nabla(g-f_1)(x)=(\sum(b_i-a_i)\alpha_{i1}x_1^{\alpha_{i1}-1}\cdots x_n^{\alpha_{in}},...,\sum(b_i-a_i)\alpha_{in}x_1^{\alpha_{i1}}\cdots x_n^{\alpha_{in}-1})$$

.

Observe que o módulo de cada entrada do gradiente acima é menor que $\varepsilon k \| x\|^{k-1}$ de tal forma que

$$\| \nabla(g-f_1)(x) \| \leq \sqrt{n(\varepsilon k \| x \|^{k-1})^2} \leq \varepsilon \| x \|^{k-1} .$$

Assim, $(g-f_1)\in\mathbb{R}_{k,\varepsilon}[x_1,...,x_n]$ e $f_1=f_1+(g-f_1)\approx g$ pelo Teorema 4.2.1, isto é, S_f é aberto. De forma, analoga mostramos que se f_n é uma sequência em S_f com f_n convergindo a uma f_0 em S, teremos para n suficientemente grande $|f_n-f_0|<\frac{\varepsilon}{\lambda}$, logo $f_0\in S_f$. Da conexidade, temos que $S_f=S$.

A segunda parte do teorema segue de $\mathbb{R}_k[x_1,...,x_n]-\Sigma$ ter um número finito de componentes semialgébricas. □

De fato, é necessário tirar um conjunto para termos apenas um número finito de classes de equivalência, vide o exemplo abaixo:

Exemplo 4.2.1. *Considere $f_t(x,y,z)=y(x+y)(x-ay)$ polinômio de Whitney. Sejam $s,t\in\mathbb{R}$, tais que $f_t\approx f_s$. Sejam $U_1,U_2\subset\mathbb{R}^3$ vizinhanças do infinito e $\phi:\mathbb{R}^3-U_1\to\mathbb{R}^3-U_2$ difeomorfismo analítico com $f_t=f_s\circ\phi$ em U_2. Veja que ϕ leva os zeros de f_t nos zeros de f_s.*

Como f_t não depende de z então $f(0,0,z)=0$. Como $U_2=\mathbb{R}^3-K$, onde K é um compacto, podemos tomar z suficientemente distante da origem para termos que o plano passando por z e paralelo ao plano xy não intercepta K e $f(0,0,z)=0$. Temos que $\phi(0,0,z)$ é um zero de f_s com a imagem de um ponto do tipo $(0,0,z)$ por ϕ sendo um ponto do tipo $(0,0,z')$, *uma vez que o conjunto singular desses zeros está sobre o eixo z. Daí podemos olhar para a derivada de* $DF(0,0,z)$ *e repetir o raciocínio já feito no exemplo 4.1.1.*

Exemplo 4.2.2. *Na linguagem do Lema 4.2.3 tomemos* $g \in R_2[x,y]$. *Temos que* $g = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$*.Segue daí que o* $g_2 = ax^2 + bxy + cy^2$. *De forma que* $\nabla f(x,y) = (2ax + by, bx + 2cy)$. *Isto é igual a zero se* $2ax + by = 0$ *e* $bx + 2cy = 0$. *Segue daí que para o sistema ter uma solução não nula precisaríamos ter* $b^2 - 4ac = 0$. *Logo, ao identificarmos* $\mathbb{R}_2[x,y]$ *com* $\mathbb{R}^6$ *nós temos* $\Sigma = \{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6; b^2 - 4ac = 0\}$ *que é um super cilindro em* $\mathbb{R}^6$. *Logo há no máximo três classes de equivalência no conjunto dos polinômios de duas variáveis de grau menor ou igual a 2, após tirarmos* Σ.

Por fim, note que para $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, tem-se que $f \circ \psi = g$ onde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\psi(x) = x^3$. Note que $\| x \| \to \infty$ se, e somente se, $\| \psi(x) \| \to \infty$. Daí f é analiticamente equivalente no infinito a g. Temos que $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 3x^2$, de forma que o expoente de Łojasiewicz da derivada de f e da derivada de g são distintos. Em resumo, não é verdade que se dois polinômios são analiticamente equivalentes no infinito, então seus gradientes possuem o mesmo expoente.

4.3 O caso complexo

Resultados análogos aos obtidos na seção anterior podem ser obtidos para polinômios complexos, conforme [12]. Procederemos definindo vizinhança do infinito como o complementar de um compacto $K \subset \mathbb{C}^n$. Dizemos que $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ são analiticamente equivalentes no infinito se existe um difeomorfismo analítico $\phi : U_1 \to U_2$ (visto como uma aplicação em $\mathbb{R}^{2n}$) entre vizinhanças do infinito $U_1, U_2 \in \mathbb{C}^n$, tal que $\| \phi(z) \| \to \infty$ se, e somente se, $\| z \| \to \infty$ e há uma difeomorfismo analítico $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f \circ \phi = \psi \circ g$ em U_1.

Os conjuntos $\mathbb{C}_k[z_1, ..., z_n]$ e $\mathbb{C}_{k,\varepsilon}[z_1, ..., z_n]$ tem definições analogas.

O Teorema 4.2.1 assume a seguinte forma:

Teorema 4.3.1. *Seja* $f \in \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ *e* $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. *Se* $\mathscr{L}_\infty(\nabla f) \geq k - 1$, *então há* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $P \in \mathbb{C}_{k,\varepsilon}[z_1, \cdots, z_n]$ *os polinômios* f *e* $f + P$ *são analiticamente equivalentes no infinito.*

Demonstração. O teorema será resolvido de forma análoga ao caso real onde definiremos

$F(t,z) = f(z) + tP(z)$, $X(t,z) = \frac{P(z)}{\|\nabla F(t,z)\|^2}\overline{\nabla F(t,z)}$ e a EDO é dada por $y' = W(t,y)$ onde

$$W(t,z) = \frac{1}{X_1(t,z)-1}(X_2(t,z), \cdots, X_{n+1}(t,z)).$$

□

Do teorema acima iremos obter:

Teorema 4.3.2. *Há um subconjunto algébrico próprio $\Sigma \subset \mathbb{C}_k[z_1,...,z_n]$, tal que quaisquer polinômios $f, g \in \mathbb{C}_k[z_1,...,z_n] - \Sigma$ são analiticamente equivalentes no infinito.*

Veja que, diferente do caso caso real, só haverá uma classe de equivalência em $\mathbb{C}_k[z_1,...,z_n]$, pois Σ é um conjunto fino e, portanto, seu complementar é conexo, vide Corolário II.1.4. de [11].

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho definimos em seu primeiro capítulo o que é uma equação diferencial ordinária e um conjunto semialgébrico, demonstrando algumas propriedades destes. Feito isto, no segundo capítulo definimos o expoente de Łojasiewicz, exibindo uma relação deste com as funções semialgébricas. Somado a isso, exibimos um conjunto onde o expoente de Łojasiewicz de uma aplicação $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $n \geq 2$, é atingido. Por fim, no último capítulo, utilizamos o expoente de Łojasiewicz para estudar a relação de equivalência analítica no infinito entre polinômios, mais precisamente, mostramos que no complementar de um subconjunto algébrico próprio no conjuntos dos polinômios em n variáveis de grau menor ou igual a k há somente uma quantidade finita de classes de equivalência.

Para mais resultados relacionados ao assunto, pode-se consultar [14] ou [3] para buscar fórmulas do expoente de Łojasiewicz, ainda que para casos particulares ou [8] para a conexão entre o expoente e a conjectura jacobiana.

Permanecem para estudos futuros questões como o de encontrar fórmulas para o expoente de Łojasiewicz para o caso de polinômios com domínio n-dimensional, assim também como para o gradiente destes polinômios. Ademais, será possível diminuir o conjunto Σ de 4.2.3 de modo ainda a termos apenas uma quantidade finita de classes de equivalência?

REFERÊNCIAS

[1] BENEDETTI, Riccardo; RISLER, Jean-Jacques. **Real algebraic and semi-algebraic sets**. Paris: Hermann, 1991.

[2] CHADZYNSKI, J.; KRASINSKI, T. A set on which the Lojasiewicz exponent at infinity is attained. **Ann. Polon. Math**, Poland, v. 67, n. 2, p. 191-197, 1997.

[3] CHADZYNSKI, J.; KRASINSKI, T. On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ and components of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$. **Annales Polonici Mathematici**, Poland, v. 57, p. 291–302, 1992.

[4] COSTE, M. **An introduction to semialgebraic geometry**. France: *[s. n.]*, 2000.

[5] COSTE, M.; SHIOTA, M. Nash triviality in families of Nash manifolds. **Inventiones mathematicae**, Germany, v. 108, p. 349–368, 1992.

[6] HARTMAN, P. **Ordinary differential equations**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[7] HUMPHREYS, J. E. **Linear algebraic groups**. New York : Springer Science Business Media, 2012. (Graduate texts in mathematics, v. 21).

[8] KRASINSKI, T. On the Łojasiewicz exponent at infinity of polynomial mappings. **Acta Math.Vietnam**, Singapore, v. 32, n. 2-3, p. 189–203, 2007.

[9] NARASIMHAN, R. **Analysis on real and complex manifolds**. New York: Elsevier, 1985.

[10] NÉMETHI, A.; ZAHARIA, A. Milnor fibration at infinity. **Indagationes Mathematicae**, Netherlands, v. 3, n. 3, p. 323–335, 1992.

[11] SEBASTIANI, M. **Introdução à geometria analítica complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[12] SKALSKI, G. On analytic equivalence of functions at infinity. **Bulletin des sciences mathematiques**, France, v. 135, n. 5, p. 517–530, 2011.

[13] SPODZIEJA, S. The Łojasiewicz exponent of subanalytic sets. In: **Annales Polonici Mathematici.** [S. l.: s. n.], 2005. v. 1, n. 87, p. 247–263.

[14] VUI, H. H.; DUC, N. H. A formula for the Łojasiewicz exponent at infinity in the real plane via real approximations. **Hokkaido Mathematical Journal**, Japan, v. 38, n. 3, p. 417–425, 2009.