



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

**DEFLEXÃO GRAVITACIONAL DE PARTÍCULAS E O TEOREMA DE
GAUSS-BONNET**

FORTALEZA

2023

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

DEFLEXÃO GRAVITACIONAL DE PARTÍCULAS E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho .

Coorientador: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz.

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Carvalho, Icaro Daniel Dias de.

Deflexão gravitacional de partículas e o teorema de Gauss-Bonnet / Icaro Daniel Dias de Carvalho. – 2023.

90 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientação: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz.

1. Deflexão gravitacional. 2. Buracos negros. 3. Buracos de minhoca. 4. Modelo de Bumblebee. 5. Buracos de minhoca de Casimir. I. Título.

CDD 530

ÍCARO DANIEL DIAS DE CARVALHO

DEFLEXÃO GRAVITACIONAL DE PARTÍCULAS E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 07/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação,
Ciências e Letras de Iguatu (FECLI)

Prof. Dr. Manuel Eleuterio Rodrigues
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Job Furtado Neto
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e discernimento para superar as dificuldades.

Aos meus pais Maria Alice e José Valdir, pelo amor, dedicação e acima de tudo por confiarem em mim.

Aos meus irmãos Italo, Saruanna e Rafael por todo o apoio e segurança durante toda minha vida.

A Sarah Borges pela paciência, compreensão e cuidado durante todo esse período.

Ao meu orientador Geová Maciel de Alencar Filho pelas orientações, conselhos e aulas ministradas.

Ao professor Célio Rodrigues Muniz que aceitou me coorientar.

Ao professor Ricardo Renan Landim de Carvalho tanto pelas orientações durante o mestrado e parte do doutorado quanto pelas aulas ministradas.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar.

Ao departamento de física da UFC pela disponibilidade e infraestrutura fornecida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o ângulo de deflexão gravitacional devido a os espaços-tempos oriundos de dois modelos. O primeiro é o modelo Bumblebee, o segundo refere-se aos buracos de minhoca de Casimir. Os buracos negros de Bumblebee quebram a simetria de Lorentz devido a um valor de expectativa de vácuo diferente de zero do campo de Bumblebee. Os buracos de minhoca de Casimir consideram a energia Casimir como a fonte. Além disso, alguns desses buracos de minhoca Casimir consideram as correções da energia de Casimir pelo Princípio da Incerteza Generalizada (PIG). Usamos o método Ishihara para a métrica Jacobi, que nos permite estudar o ângulo de deflexão da luz e partículas de teste massivas considerando distâncias finitas. No modelo do Bumblebee, consideramos dois buracos negros: o primeiro foi encontrado por Bertolami et al. e é assintoticamente plano. O segundo foi encontrado recentemente por Maluf et al. e não é assintoticamente plano devido a uma constante cosmológica efetiva. Para os buracos de minhoca Casimir, além da fonte Casimir não corrigida, consideramos muitas correções PIG, a saber: o modelo Kempf, Mangano e Mann (KMM), o modelo Detournay, Gabriel e Spindel (DGS), e o chamado modelo tipo II para PIG. Encontramos também o ângulo de deflexão da luz e das partículas massivas no caso de o receptor e a fonte estarem longe da lente para cada espaço-tempo considerado.

Palavras-chave: deflexão gravitacional; buracos negros; buracos de minhoca; modelo de Bumblebee; buracos de minhoca de Casimir.

ABSTRACT

In this work, we investigate the gravitational bending angle due to the spacetimes of two matters. The first is the bumblebee model, and the second is the Casimir wormholes. The bumblebee black holes break the Lorentz symmetry due to a non-zero vacuum expectation value of the bumblebee field. Casimir wormholes consider the Casimir energy as the source. Furthermore, some of these Casimir wormholes regard Generalized Uncertainty Principle (GUP) corrections of Casimir energy. We use the Ishihara method for the Jacobi metric, which allows us to study the bending angle of light and massive test particles for finite distances. In the bumblebee model, we consider two backgrounds: the first was found by Bertolami et al. and is asymptotically flat. The second was found recently by Maluf et al. and is not asymptotically flat due to an effective cosmological constant. For the Casimir wormholes, beyond the uncorrected Casimir source, we consider many GUP corrections, namely: the Kempf, Mangano and Mann (KMM) model, the Detournay, Gabriel and Spindel (DGS) model, and the so-called type II model for the GUP principle. We also find the deflection angle of light and massive particles in the case the receiver and the source are far away from the lens for each spacetime considered.

Keywords: gravitational deflection; black holes; wormholes; Bumblebee model; Casimir wormholes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Figura esquemática para o teorema de Gauss-Bonnet.	36
Figura 2 – Figura esquemática de uma trajetória defletida.	37
Figura 3 – Base vetorial local da superfície	66
Figura 4 – Derivada Covariante	69
Figura 5 – Transporte paralelo sobre caminho fechado	75
Figura 6 – Transporte paralelo sobre caminhos distintos	75
Figura 7 – Ângulos externos	78
Figura 8 – Ângulo externo no caso do vértice ser um "bico"	78
Figura 9 – Triângulos adjacentes com aresta comum com orientação oposta	81
Figura 10 – identificação de arestas e vértices.	83
Figura 11 – Soma dos ângulos internos de um polígono	84
Figura 12 – Aplicação 3 do Teorema de Gauss-Bonnet	85
Figura 13 – Aplicação 4 do Teorema de Gauss-Bonnet	87

LISTA DE SÍMBOLOS

B_μ	Campo de Bumblebee
χ	Característica de Euler-Poincaré
$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$	Coefficientes de conexão do espaço-tempo
$T_{\mu\nu}$	Componentes do tensor densidade de energia-momento.
Λ	Constante Cosmológica
G	Constante da Gravitacional
κ_g	Curvatura geodésica
K	Curvatura total
D_μ	Derivada covariante
$\frac{D\mathbf{w}}{dt}$	Derivada covariante do campo vetorial \mathbf{w} em t
\mathbf{K}	Escalar de Kretschmann
R	Escalar de Ricci
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo curvo
h_{ij}	Métrica induzida por uma superfície no \mathbb{R}^3
H_{ij}	Métrica óptica
b	Parâmetro de impacto
τ	Tempo próprio
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R_{\nu\rho\sigma}^\mu$	Tensor de Riemann
c	Velocidade da luz
ε_i	Vetores que formam uma base no espaço
θ_i	i -ésimo ângulo externo de uma curva.
α	Ângulo de deflexão da luz

LISTA DE SIGLAS

ECE	Equações de Campo de Einstein
PIG	Princípio de Incerteza Generalizado
LG	Lente Gravitacional
MACHOs	MAssive Compact Halo Objects
MB	Modelo de Bumblebee
RG	Relatividade Geral
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
EES	Estático e Esfericamente Simétrico
TGB	Teorema de Gauss-Bonnet

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRINCÍPIOS DE RELATIVIDADE GERAL	16
2.1	Equações de Campo Gravitacional	16
2.2	Espaço Esfericamente Simétrico e Estático	18
2.3	Espaço de Schwarzschild	19
2.4	Espaço de Kottler	21
2.5	Princípio de Fermat para um espaço-tempo curvo e estático	22
3	ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS DE INTERESSE	25
3.1	Soluções de Buraco Negro em Gravidade de Bumblebee	25
3.1.1	<i>Buracos negros tipo Schwarzschild</i>	26
3.1.2	<i>Buraco negro tipo Kottler</i>	28
3.2	Soluções de Buracos de minhoca de Casimir	29
4	DEFLEXÃO GRAVITACIONAL E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET	33
5	DEFLEXÃO DE PARTÍCULAS MASSIVAS E LUZ PARA ESPAÇOS- TEMPOS DE INTERESSE	38
5.1	Deflexão de partículas massivas e luz devido a buracos negros EES em gravidade de Bumblebee	38
5.1.1	<i>Buraco negro tipo Schwarzschild</i>	38
5.1.2	<i>Buraco negro tipo Kottler</i>	39
5.2	Deflexão de partículas massivas e luz devido a buracos de minhoca de Ca- simir	43
5.2.1	<i>Buraco de minhoca de Garattini</i>	43
5.2.2	<i>Função de redshift</i> $\Phi(x) = const.$	46
5.2.3	<i>Função de redshift</i> $\Phi(r) = r_0/r$	48
5.2.4	<i>Função de redshift</i> $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$	51
5.2.5	<i>Função de redshift</i> $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i/r^2)^{-2(1+1/\omega)}$	53
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	55
	REFERÊNCIAS	
	APÊNDICE A – TEOREMA DE GAUSS-BONNET	64
	APÊNDICE B – IDENTIDADE SOBRE TRIANGULAÇÕES	89

1 INTRODUÇÃO

A Lei da Gravitação Universal teve sucesso em descrever o movimento dos corpos celestes. Soldner foi o primeiro a prever a deflexão da luz usando gravitação newtoniana, teoria da luz corpuscular e o fato da velocidade da luz ser finita [1]. Porém, a Lei da Gravitação Universal não concorda com os dados experimentais para a precessão do periélio de Mercúrio e nem com as observações realizadas para medir a deflexão da luz devido ao Sol. Estes desacordos com os resultados experimentais foram solucionados com o surgimento de outra teoria de gravitação, a teoria da Relatividade Geral (RG). Esta teoria conseguiu explicar a precessão do periélio de Mercúrio e prevê, corretamente, o ângulo de deflexão da luz devido ao Sol duas vezes maior que a gravitação newtoniana. A deflexão da luz devido ao Sol conduziu um dos primeiros testes experimentais da RG [2].

A RG é uma teoria clássica de campos que considera a gravidade como sendo a deformação do espaço-tempo provocada por matéria e energia. Este espaço-tempo curvado determina a trajetória das partículas [3–6]. Como prova do poder preditivo da RG, nós podemos mencionar a detecção de ondas gravitacionais, em 2016, pela colaboração entre os laboratórios VIRGO e LIGO [7] e captura da primeira foto de um buraco negro pelo projeto Event Horizon Telescope (EHT) em 2019 [8]. A presença de uma distribuição de matéria e energia modifica a trajetória dos raios luminosos, a esta distribuição dá-se o nome Lente Gravitacional (LG) por analogia à ótica [9–11]. O estudo de LG tornou-se importante, pois ele possibilita investigar muitos assuntos, como o estudo dos parâmetros cosmológicos [12], a descoberta de exoplanetas [13, 14], a investigação de objetos massivos com *halo* compacto (MACHOs - do inglês *Massive Compact Halo Objects*) [15], a investigação sobre existência de dimensões extras [16] e investigações sobre o comportamento de buraco negro no papel de LG [17, 18].

Além da gravitação, os processos físicos são caracterizados pelo Modelo Padrão (MP), do inglês *Standard Model*, que incluem o eletromagnetismo, a força nuclear forte e a força nuclear fraca. O MP é notavelmente bem-sucedido porque é consistente com quase todos os resultados experimentais [19] (uma revisão histórica foi feita na referência [20]). Porém, este modelo não consegue explicar os efeitos quânticos da gravitação. Desse modo, muitas teorias surgiram com intuito de explicar a gravidade quântica. Um experimento direto capaz de validar alguma dessas teorias é impraticável, pois este experimento deve alcançar a escala de Plank (10^{19} GeV). Felizmente, alguns efeitos indiretos podem surgir em escala de energia mais baixa de modo que seja possível formular algum experimento. Esses efeitos indiretos podem ser associados com a violação da simetria de Lorentz. O Modelo Padrão Estendido (MPE), do inglês *Standard Model Extension*, é uma teoria de campos efetiva que generaliza MP e RG,

permitindo a violação da simetria de Lorentz e as simetrias de inversão de carga, inversão de paridade e inversão do tempo [21, 22].

Um modelo particular do MPE é o Modelo de Bumblebee (MB), este modelo viola a simetria de Lorentz e difeomorfismo devido a um campo vetorial com valor esperado de vácuo não nulo [23–25]. Em 2005, Bertolami e Páramos encontraram uma solução de buraco negro assintoticamente plana para MB [26]. Em 2019, Casana *et al.* encontraram uma solução de buraco negro tipo Schwarzschild considerando MB [27]. Esses resultados foram generalizados por Li *et al.* na referência [28], pois neste trabalho foi encontrada uma solução estacionária (tipo Kerr) para MB. Recentemente, Maluf *et al.* encontraram uma solução que não é assintoticamente plana devido a uma constante cosmológica efetiva [29].

A RG é uma teoria bastante fértil, pois permite soluções tipo buraco de minhoca atravessáveis. Buracos de minhoca são soluções das Equações de Campo de Einstein (ECE) que conectam duas regiões distintas do espaço-tempo [30]. As primeiras soluções de buraco de minhoca possuem dificuldades relacionadas a capacidade de serem atravessáveis [6, 31–34]. Na década de 70, Ellis, e independentemente Bronnikov, encontraram uma solução viável de buraco de minhoca atravessável [35, 36], que foi generalizado em 1988 por Morris e Thorne [37]. Após uma década, Teo generalizou a solução de Morris e Thorne para buracos de minhoca com rotação [38]. Recentemente, soluções de buracos de minhocas girantes gerados por matéria escura e pressão isotrópica foram encontradas e discutidas na referência [39]. Em geral, existe a necessidade de uma matéria exótica para formação de buracos de minhoca. O entendimento dessas soluções tornou-se um tópico de intensa pesquisa nos últimos anos [40], incluindo a estudos sobre buraco de minhocas humanamente atravessáveis [41]. Nesta tese estamos interessado por soluções específicas de buraco de minhoca, essas soluções estão diretamente relacionadas com o efeito Casimir.

O efeito Casimir envolve energias negativas de campos quânticos no vácuo em determinadas condições de contorno (veja [42] e as referências dele). Este tema tem originado novos pontos de vista sobre o questionamento se a gravidade efetivamente modifica a energia de vácuo e se o vácuo gravita, pelo menos no regime de campo fraco. Isso é atualmente um objeto de discussão na literatura [43–45] e com propostas de investigação observacionais [46]. Com relação a buracos de minhoca, o estudo de placas de Casimir em orbita de buracos de minhoca pode ser encontrado nas referências [47–51]. Como a energia de Casimir é negativa, logo exótica, foi especulado que ela fosse fonte de buracos de minhoca por um longo tempo por Morris e Thorne e algum tempo depois por Visser [30, 52].

Porém, um buraco de minhoca formado apenas pela energia de Casimir em quatro dimensões, chamado de buraco de minhoca de Casimir, só foi encontrado recentemente [53]. Este resultado foi logo generalizado para três dimensões [54] e para D dimensões [55]. Em

relação a estes objetos, o espaço-tempo é curvado devido à fontes de matéria descritas por um tensor densidade de energia e momento cujas quantidades são a causa do efeito Casimir no espaço-tempo de Minkowski com simetria esférica. Além disso, a energia de Casimir é um ingrediente necessário para obtenção do buracos de minhoca humanamente atravessáveis pois é a energia de Casimir que não permite o buraco de minhoca colapsar [41, 56]. Cabe citar que, em grandes escalas de energia, os buracos de minhoca de Casimir podem sofrer efeitos de gravidade quântica, considerando o Princípio de Incerteza Generalizado (PIG), do inglês *Generalized Uncertainty Principle*, [57, 58]. As teorias de PIG corrigem o princípio de incerteza de Heisenberg próximo da escala de Plank pela introdução de um comprimento mínimo invariante na natureza (veja [59] e as referências dele). No contexto de espaço-tempo curvo, recentemente, limites fenomenológicos para os parâmetros de PIG foram extraídos de eventos de ondas gravitacionais [60].

Em outra direção, o Teorema de Gauss-Bonnet (TGB) conecta a geometria diferencial com a topologia [61, 62]. Em 2008, Gibbons e Werner propuseram um método que usa o TGB para calcular o ângulo de deflexão da luz devido a um espaço-tempo Estático e Esfericamente Simétrico (EES), do inglês *Static and Spherically Symmetric*, [63]. Em 2016, Ishihara *et al.* estenderam o método desenvolvido por Gibbons e Werner para uma metodologia que considera as distâncias do sistema composto por receptor, lente gravitacional e fonte [64]. Em seguida Ishihara *et al.* deram continuidade a este estudo na referência [65], onde os autores estudaram a deflexão forte da luz. Finalmente Ono *et al.* generaliza o método de Ishihara de deflexão da luz para espaços-tempos estacionários [66–68]. Com o surgimento desses métodos, muitos trabalhos surgiram na literatura com o intuito de investigar a deflexão da luz para buracos negros e buracos de minhoca à luz dessas novas abordagens [69–73]. O conjunto dessas metodologias originaram uma rica investigação sobre a deflexão da luz devido a um espaço-tempo, e naturalmente surge o interesse sobre a generalização dessa abordagem para deflexão de partículas massivas.

Em 2015 Gibbons mostrou que o movimento de partículas massivas livres em um espaço-tempo EES é regido por geodésicas de uma métrica riemanniana dependente da energia nas secções espaciais análoga à métrica de Jacobi na dinâmica clássica [74]. Crisnejo e Gallo foram os primeiros a estudar a deflexão de partículas massivas em um espaço-tempo EES por meio da métrica de Jacobi e o TGB [75]. Naturalmente muitos artigos surgiram com essa nova técnica capaz de computar o desvio gravitacional de partículas massivas. Podemos citar, por exemplo, um estudo sobre deflexão devido a buraco de minhoca [76], deflexão devido a buraco negro de Kerr e buraco de minhoca de Teo [77], investigação sobre singularidades nuas girantes pelo estudo de deflexão de partículas massivas [78], estudo de órbitas circulares e efeitos de lentes fraca [79], deflexão devido a um buraco negro tipo Kerr em MB [28].

Nesta tese, nós iremos estudar a deflexão fraca de partículas massivas e luz devido a dois tipos de espaços-tempo EES. O primeiro tipo de espaço-tempo é oriundo do Modelo de Bumblebee, o segundo tipo refere-se as soluções de buraco de minhoca de Casimir. Este trabalho é estruturado do seguinte modo. No segundo capítulo, nós apresentamos os princípios básicos da RG e o princípio de Fermat para espaços-tempos curvos e estáticos. No terceiro capítulo é realizada uma breve revisão do MB e das soluções de buraco negro das referências [26, 27, 29] na seção 3.1 e fazemos uma breve revisão das soluções de buraco de minhoca de Casimir presente nas referências [53, 57] na seção 3.2. No quarto capítulo, nós apresentamos a metodologia do cálculo de deflexão da luz e partículas massivas por meio do TGB considerando distâncias entre o receptor, lente gravitacional e fonte. O quinto capítulo desta tese é destinado à apresentação das nossas análises e resultados sobre o ângulo de deflexão da luz e de partículas massivas para os dois tipos de espaços-tempos apresentados no segundo capítulo. No sexto capítulo, nós apresentamos nossos principais resultados e perspectivas futuras.

2 PRINCÍPIOS DE RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo, nós apresentamos as *Equações de Campo Gravitacional*, encontramos a solução de Schwarzschild para exemplificar como se encontra uma solução de espaço-tempo e fazemos uma apresentação do *Princípio de Fermat* para o caso de um espaço curvo e estático. Para um estudo em Teoria da Relatividade Geral, pode-se utilizar as referências [3–6, 80].

2.1 Equações de Campo Gravitacional

A Teoria da Relatividade Geral compreende o termo gravidade como sendo o encurvamento do espaço-tempo causada pela distribuição de matéria e energia. Como essa distribuição de matéria e energia se modifica então o espaço-tempo também se modifica, ou seja, o espaço-tempo é dinâmico. Cabe aqui citar um pensamento de John Archibal Wheeler que pode ser expresso pela seguinte frase "A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz a matéria como se mover". Observe o quão entrelaçados estão a matéria e o espaço-tempo e isso se traduz matematicamente pelas *Equações de Campo Gravitacional*. Pode-se encontrar uma dedução heurística na referência [81]. Nesta referência é mostrado, de forma bastante elegante, que uma mistura de razoabilidade física, simplicidade matemática e sensibilidade estética conduz às *Equações de Campo Gravitacional*.

O intervalo infinitesimal ds entre dois eventos, pontos coordenados do espaço-tempo, é responsável pela noção de distância no espaço-tempo. Essa distância é modificada pelo campo gravitacional devido a uma distribuição de matéria e energia. Como foi dito, a matéria modifica o espaço-tempo, ou seja, modifica a distância entre os eventos. A descrição dessa espécie de contração (ou dilatação) é dada pelo tensor métrico cujas componentes são $g_{\mu\nu}$, onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Durante toda esta tese usaremos 0 para representar a coordenada temporal e 1, 2, 3 para as coordenadas espaciais. O intervalo infinitesimal pode é descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde μ e ν estão somados, pois usaremos também a convenção de soma de Einstein, onde índices repetidos em um único lado da igualdade estão sendo somados e a soma é feita sobre todos os valores do índice. Para índices gregos a soma é feita de 0 a 3, mas para índices latinos a soma é feita de 1 a 3. Resolver as equações de campo para uma distribuição de matéria e energia significa encontrar $g_{\mu\nu}(x)$. Antes de encontrar as *Equações de Campo de Einstein* é conveniente apresentar alguns objetos geométricos. Com o tensor métrico nós podemos cons-

truir os coeficientes de conexão, também conhecidos como símbolos de Christoffel de segundo tipo, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, explicitamente

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\eta} [\partial_{\mu}g_{\eta\nu} + \partial_{\nu}g_{\eta\mu} - \partial_{\eta}g_{\mu\nu}], \quad (2.2)$$

e com estes podemos construir o tensor de curvatura cujas componentes são $R_{\alpha\beta\gamma}^{\xi}$. Podemos escrever as componentes do tensor de curvatura em função dos coeficientes de conexão e suas derivadas, a saber

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\xi} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\xi}. \quad (2.3)$$

Com isso, o tensor de Ricci é definido como $R_{\mu\nu} = R_{\mu\eta\nu}^{\eta}$ e o escalar de Ricci é definido como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, onde $g^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor inverso ao tensor métrico. Podemos agora apresentar as ECE, isso será feito em duas etapas, primeiro nós iremos apresentar a parte geométrica e depois a parte referente a matéria. Nós iremos abordar as ECE por meio do Princípio Variacional, ou seja, as ECE serão originadas de uma ação. A parte da ação que representa a geometria, conhecida como *Ação de Einstein-Hilbert*, é

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G/c^4} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.4)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento de volume invariante do espaço-tempo, g é o determinante da métrica e R é o escalar de Ricci calculados para a métrica $g_{\mu\nu}$ [5], nós adotaremos a assinatura $(-, +, +, +)$ nesta tese.

Uma maneira fácil para variar esta ação é pelo *Princípio Variacional de Palatini* que pode ser encontrado na referência [82]. Variando esta ação com relação as componentes do tensor métrico encontra-se

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.5)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é conhecido como as componentes do tensor de Einstein. Essas quantidades são construídas por meio da métrica $g_{\mu\nu}$ o que evidencia a importância da métrica. O conjunto de equações (2.5) é conhecido como equações de campo na ausência de fonte. Para obter as equações de forma completa é preciso considerar uma ação total somando a *Ação de Einstein-Hilbert* um termo devido a matéria, S_m . A referência [5] afirma que a variação da ação devido a matéria só pode ser feita quando se conhece sua forma previamente, mas que de modo geral pode-se representar esta variação por

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.6)$$

onde o δ representa variação com relação as componentes da métrica e $T_{\mu\nu}$ pode ser identificado como as componentes do tensor densidade de energia-momento que possui divergência nula, $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. Com isso, pode-se apresentar as equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

estas são as ECE da Relatividade Geral. Einstein acrescentou um termo a mais na ação S_{EH} , este termo envolve a constante cosmológica Λ , este termo foi introduzido devido ao fato de que as equações de campo previam que o universo poderia colapsar e o termo de constante cosmológica, repulsivo, tornaria o universo estático. Atualmente sabe-se que o universo está realmente em expansão, mais detalhes podem ser vistos na referência [83]. A ação com a constante cosmológica torna-se

$$S = S_{EH+\Lambda} + S_m = \frac{1}{16\pi G/c^4} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + S_m. \quad (2.8)$$

A variação desta ação é análoga e a equação de campo gerada com o termo da constante cosmológica acrescentado é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Na próxima seção nós iremos apresentar os espaços estáticos e esfericamente simétricos.

2.2 Espaço Esfericamente Simétrico e Estático

Nesta seção busca-se apresentar uma construção do tensor métrico formado pelas componentes $g_{\mu\nu}$ que seja estático e esfericamente simétrico. Todas as soluções em que iremos calcular o ângulo de deflexão da luz e de partículas massivas são estáticas e esfericamente simétricas, devido a isso é fundamental que nós apresentemos um *ansatz* que represente esses espaços-tempo. O caminho tomado para fazer isto será baseado na referência [3].

Tome o conjunto de coordenadas $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$ do espaço-tempo tal que as componentes do tensor métrico não dependam do tempo, ou seja, caráter estático e a distância entre dois eventos infinitesimalmente próximos tenha a parte espacial como função só dos invariantes de rotação, $d\mathbf{r}^2$, $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, r . Logo, o intervalo infinitesimal toma a forma

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + E(r)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})dt + D(r)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^2 + C(r)d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\x^3 &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{2.11}$$

e algumas redefinições necessárias, podemos obter uma forma bastante simples para a equação (2.10), a saber

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.\tag{2.12}$$

Esta é a forma padrão para apresentar a métrica esféricamente simétrica e estática, e também está implícito que a velocidade da luz, c , foi tomada como a unidade ($c = 1$). Busca-se encontrar as formas de $A(r)$ e $B(r)$ para uma fonte com essa simetria. Identificando as componentes do tensor métrico da equação (2.12), pode-se escrever todas as componentes em forma de uma matriz diagonal,

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}) = \text{diag}(-A(r), B(r), r^2, r^2 \sin^2 \theta)\tag{2.13}$$

Com isso, pode-se calcular as componentes $G_{\mu\nu}$, as não nulas são

$$G_{00} = \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B},\tag{2.14}$$

$$G_{11} = \frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right),\tag{2.15}$$

$$G_{22} = \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{r^2}{2AB} \left[A'' - \frac{A'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)\right],\tag{2.16}$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta,\tag{2.17}$$

onde linha representa derivação com relação a variável r . Nas próximas seções serão abordadas as soluções e características usadas no desenvolvimento dos capítulos futuros.

2.3 Espaço de Schwarzschild

Uma das soluções mais simples das ECE é a métrica gerada por um corpo estático, esféricamente simétrico e eletricamente neutro. Tome este corpo na origem do sistema de coordenadas, tendo massa M e esteja em uma região delimitada por $r < R$. Logo o tensor densidade de energia-momento para $r > R$ é nulo, porque não existe matéria nesta região, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. Com isso, as equações de campo tornam-se $G_{\mu\nu} = 0$, onde $G_{\mu\nu}$ são dados pelas equações (2.14)

à (2.17). Logo

$$\frac{B}{A}G_{00} + G_{11} = \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Note que usando $r > R > 0$ e $A(r), B(r) \neq 0$ em (2.18) é fácil ver que

$$\frac{d(AB)}{dr} = 0 \rightarrow A(r) = \frac{C}{B(r)}. \quad (2.19)$$

Para $r \rightarrow \infty$, ou seja, para um ponto muito distante do corpo, é natural que os efeitos dele sejam nulos. A constante de C pode ser absorvida fazendo $d\bar{r} = \sqrt{C}dt$, a métrica torna-se

$$ds^2 = -\frac{1}{B(r)}d\bar{r}^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}\theta^2d\phi^2, \quad (2.20)$$

por simplicidade, podemos renomear $d\bar{r} = dt$ e $B(r)^{-1} = A(r)$, logo

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}\theta^2d\phi^2, \quad (2.21)$$

Agora podemos integrar a equação (2.15), assim

$$A(r) = 1 + \frac{\text{const}}{r} \quad (2.22)$$

Podemos agora considerar o limite clássico. A *Teoria da Relatividade Geral* deve recobrar a *Lei da Gravitação Universal* de Newton no limite $v^2/c^2 \ll v/c \ll 1$. Tome uma perturbação da métrica de Minkowski do seguinte modo, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1 + h, 1, 1, 1)$, ($h \ll 1$). Como no limite clássico $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \rightarrow 1$ a quadrivelocidade, $U^\mu = c(1, \mathbf{v}/c)$, que tem as componentes espaciais muito menores que a temporal, torna-se aproximadamente $U^\mu = (c, \mathbf{0})$. Nesse limite pode-se tomar as coordenadas espaciais $x^l = (x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ da equação da geodésica, pois esta equação fornece a trajetória de uma partícula,

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} = -\Gamma_{00}^l c^2 = -\frac{\partial h}{\partial x^l}, \quad (2.23)$$

pois, $\Gamma_{00}^l = \partial_l g_{00}/2 = \partial_l h/2$. Usando o fato que a aceleração é igual ao potencial gravitacional $\Phi = GM/r$, onde G é a constante da gravitação universal. Tomando,

$$\frac{\partial h}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{2GM}{rc^2} \right), \quad (2.24)$$

pode-se considerar $c = 1$ e comparar (2.24) com (2.22), desse modo nós encontramos

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (2.25)$$

Com as equações (2.25), (2.19) e a velocidade da luz igual a unidade, pode-se escrever o intervalo infinitesimal como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (2.26)$$

Esta solução, representada por (2.26), é uma das soluções mais simples das equações de campo e quem a descobriu foi Schwarzschild em 1916, e é conhecida na literatura como solução de Schwarzschild, por motivos óbvios.

2.4 Espaço de Kottler

O Espaço de Kottler [84] se diferencia do de Schwarzschild, pois neste espaço considera-se a constante cosmológica Λ tendo um valor diferente de zero. O conjunto de equações a ser resolvido são os fornecidos por (2.9). Neste espaço além de considerar a deformação causada por uma massa M , que é o caso de Schwarzschild, considera-se também a deformação da métrica devido a constante cosmológica, ou seja, as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ não são nulas para um $r > R$. Podemos escrever as equações de campo (2.9) com $T_{\mu\nu} = 0$ do seguinte modo $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -g_{\mu\nu}\Lambda$, as equações não nulas são

$$G_{00} = \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B} = A\Lambda, \quad (2.27)$$

$$G_{11} = \frac{A'}{rA} - \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = -B\Lambda, \quad (2.28)$$

$$G_{22} = \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{r^2}{2AB} \left[A'' - \frac{A'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)\right] = -r^2\Lambda, \quad (2.29)$$

$$G_{33} = G_{22}\sin^2\theta = -r^2\sin^2\theta\Lambda. \quad (2.30)$$

Usando o fato de que $(B/A)G_{00} + G_{11} = 0$ e que quando $\Lambda = 0$ temos que obter a solução de Schwarzschild, nós encontramos

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2$$

e $B(r) = 1/A(r)$. Desse modo, nós obtemos a solução de Kottler para um corpo com massa (M) e o elemento infinitesimal de linha é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (2.31)$$

Vale ressaltar que quando a constante cosmológica é positiva, $\Lambda > 0$, o espaço é chamado de *Espaço de Sitter* e quando ela é negativa, $\Lambda < 0$, o espaço é chamado de *Espaço anti-de Sitter*. [5]

2.5 Princípio de Fermat para um espaço-tempo curvo e estático

Agora será desenvolvido o *Princípio de Fermat* generalizado para um espaço-tempo curvo e estático. Antes de seguirmos para o desenvolvimento que valida esta generalização é conveniente apresentar alguns conceitos importantes sobre *geodésicas nulas*. Esta seção é baseada na referência [5].

Dada uma partícula de massa m em um espaço curvo que possua uma métrica cujas componentes são $g_{\mu\nu}$ onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. O caminho tomado por esta partícula é obtido variando a ação S , com o parâmetro sendo o tempo próprio τ , a saber

$$S = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.32)$$

A equação de movimento é a equação da geodésica neste espaço curvo, dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.33)$$

O conceito de geodésica e os coeficientes de conexão Γ são apresentados no apêndice A no contexto de métrica induzida, porém a definição é a mesma para um espaço de dimensão maior e para uma métrica genuína, a única mudança é o valor tomado pelos índices que é igual ao da dimensão do espaço-tempo. Esses conceitos estão presentes em todas as referências citadas no início deste capítulo.

Tome um outro parâmetro λ tal que $\tau = \tau(\lambda)$, fazendo a mudança de τ para λ na equação (2.33), obtemos

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d^2 \tau}{d\lambda^2} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} =: f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.34)$$

Se $f(\lambda)$ for nulo, então a equação (2.34) tem a mesma forma que a equação (2.33) e λ é chamado de *parâmetro afim* por sua propriedade de preservar a forma da equação da geodésica.

Existem outras ações que fornecem a equação da geodésica (2.33). Se λ for um parâmetro afim, então a ação

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.35)$$

fornece a mesma equação de movimento (2.33), porém com λ no lugar de τ . Cabe aqui reforçar que esta ação só pode ser usada se λ for um parâmetro afim. Agora podemos definir o conceito de geodésicas nulas. Uma geodésica nula será o caminho tomado por um raio luminoso em um espaço-tempo curvo assim como uma geodésica tipo tempo descreve o caminho de uma partícula. No caso de geodésicas nulas a escolha do parâmetro é delicada no sentido de não poder usar a parametrização do tempo próprio, pois ele é nulo durante todo o caminho. Define-

se geodésicas nulas como curvas integrais do campo vetorial k^α tal que ele seja do tipo luz

$$k^\alpha k_\alpha = 0. \quad (2.36)$$

Além disso, este campo vetorial tem que satisfazer a equação (2.34), com $k^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. A equação (2.34) pode ser reescrita em função de k^α , a saber

$$k^\alpha \partial_\alpha k^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta k^\alpha k^\nu = f(\lambda) k^\beta. \quad (2.37)$$

Podemos escolher um parâmetro λ tal que $f(\lambda) = 0$, de modo que satisfaça a equação da geodésica. Usualmente utiliza-se o momento do fóton como parâmetro. Com isso,

$$k^\alpha \partial_\alpha k^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta k^\alpha k^\nu = 0. \quad (2.38)$$

Com as informações acima pode-se apresentar o *Princípio de Fermat* generalizado. Tome um espaço-tempo curvo estático, isso significa que $g_{0i} = 0$ e $g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$. Considere todas as geodésicas nulas que conectam dois eventos P e Q . Cada geodésica pode ser descrita por três funções $x^j(t) = 0$ e que levará o tempo Δt para ir de P para Q . O que se pretende mostrar a seguir é que as geodésicas nulas são as curvas que minimizam Δt . Um fato que deve ser usado é que no caso de geodésicas nulas o intervalo infinitesimal fornece

$$0 = dt^2 + \frac{g_{ij}}{g_{00}} dx^i dx^j. \quad (2.39)$$

Tomando a equação da geodésica, mudando o parâmetro de λ para t , de forma análoga a equação (2.34), e multiplicando pela métrica

$$g_{\nu\mu} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} - \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{dt} = 0. \quad (2.40)$$

De acordo com as características da métrica pode-se escrever três das quatro equações presentes na (2.40) como segue

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{i00} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{ijk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} g_{ij} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.41)$$

Como $x^0 = t$ a "parte temporal" da equação (2.40) fornece

$$2 \frac{1}{g_{00}} \Gamma_{0k0} \frac{dx^k}{dt} = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1} \frac{d^2 t}{d\lambda^2}. \quad (2.42)$$

Por outro lado a identidade (2.39) fornece

$$\frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = - \frac{g_{ij}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \quad (2.43)$$

Podemos usar (2.42) e (2.43) em (2.41), além de usar a notação $\dot{f} := df/dt$ para encontrar

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - 2\frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (2.44)$$

Observe que o segundo termo do primeiro membro possui $\dot{x}^j \dot{x}^k$ que é simétrico, assim nós podemos simetrizar o termo entre parênteses, nós encontramos

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} - \frac{g_{ik}}{g_{00}}\Gamma_{0j0} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (2.45)$$

Mas, uma vez considerando as características da métrica, pode-se escrever o termo entre parênteses como

$$\left(\Gamma_{ijk} - \frac{g_{jk}}{g_{00}}\Gamma_{i00} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}\Gamma_{0k0} - \frac{g_{ik}}{g_{00}}\Gamma_{0j0} \right) = \frac{-g_{00}}{2} \left[\partial_j \left(-\frac{g_{ik}}{g_{00}} \right) + \partial_k \left(-\frac{g_{ij}}{g_{00}} \right) - \partial_i \left(-\frac{g_{jk}}{g_{00}} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em (2.44) e definindo $H_{ij} = -g_{ij}/g_{00}$

$$H_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \frac{1}{2} [\partial_j H_{ik} + \partial_k H_{ij} - \partial_i H_{jk}] \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (2.47)$$

A equação (2.47) nada mais é do que a equação da geodésica com o t sendo o parâmetro afim e com as componentes da métrica H_{ij} , essa métrica é chamada de *Métrica Óptica*. Ou seja, as geodésicas nulas são tais que no espaço da *Métrica Óptica*

$$\delta \int dt = 0. \quad (2.48)$$

Este é o *Princípio de Fermat*, este princípio afirma que os raios luminosos percorrem trajetórias de menor tempo. Porém neste caso houve uma generalização para um espaço-tempo curvo e estático.

Neste capítulo nós apresentamos as características principais da RG com foco no que iremos precisar durante esta tese. No próximo capítulo nós iremos apresentar as soluções de interesse para que, posteriormente, possamos calcular o ângulo de deflexão da luz e de partículas massiva devido a esses espaços-tempos.

3 ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS DE INTERESSE

Este capítulo tem o objetivo de introduzir as soluções que temos interesse em investigar a deflexão da luz e partículas massivas considerando as distâncias entre os elementos que formam o sistema observador, lente gravitacional e fonte. Nós consideramos dois tipos de soluções: i) as soluções de buraco negro em gravidade de bumblebee, duas destas são assintoticamente planas [26, 27] e ii) a solução tipo Kottler, esta solução não é assintoticamente plana [29]. As três soluções de buraco negro em gravidade de bumblebee são apresentadas na seção 3.1. Além das soluções de buraco negro em gravidade de bumblebee, nós estamos interessados em outro tipo de solução, as soluções de buraco de minhoca de Casimir. Nós apresentamos a primeira solução de buraco de minhoca encontrada por Garattini e as soluções que consideram correções de PIG na energia de Casimir na seção 3.2.

3.1 Soluções de Buraco Negro em Gravidade de Bumblebee

Neste seção, nós iremos apresentar uma breve revisão sobre o Modelo de Bumblebee. Este modelo inserido no contexto de MPE que viola a simetria de Lorentz por meio de um campo vetorial B_μ , chamado campo de bumblebee. Embora simples, este modelo tem interessantes características como *boost*, rotação e violação de CPT. A violação de Lorentz acontece devido a um valor esperado de vácuo não nulo do campo de bumblebee [23, 24]. A ação do modelo de bumblebee com constante cosmológica e torção nula é expressa por

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda + \xi R_{\mu\nu} B^\mu B^\nu) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - V(B_\nu B^\nu \pm b^2) \right], \quad (3.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, Λ é a constante cosmológica, ξ é uma constante real que controla o acoplamento não mínimo entre o campo de bumblebee e a curvatura, e b^2 é uma constante real positiva. O *field-strength* do campo de bumblebee é definido como

$$B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (3.2)$$

onde D_μ é a derivada covariante. A determinação do valor esperado de vácuo do campo de bumblebee é dado quando o potencial é nulo, $V(B^\mu B_\mu \pm b^2) = 0$. Quando isso ocorre, nós temos que $B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0$, de modo que o valor esperado de vácuo do campo de bumblebee é b_μ , onde $b^\mu b_\mu = \mp b^2$. As quantidades b^μ são os coeficientes das violações de Lorentz e CTP, e o sinal \pm no potencial indica se b^μ é tipo-espaço ou tipo-tempo. Um estudo mais profundo sobre MPE e

MB pode ser encontrados nos trabalhos [21–27,29]. Agora nós podemos descrever as principais características que compõe as três soluções de buraco negro EES em gravidade de bumblebee de nosso interesse. Duas destas soluções são ditas tipo Schwarzschild pois não consideram constante cosmológica ($\Lambda = 0$). Essas soluções tornam-se a solução de Schwarzschild, equação (2.26), quando o valor esperado de vácuo do campo de bumblebee é nulo. A outra solução é tipo Kottler, que surge quando levamos em conta uma constante cosmológica não nula ($\Lambda \neq 0$). Esta última solução torna-se a solução de Kottler, equação (2.31), quando o valor esperado de vácuo do campo de bumblebee é nulo. A solução de Kottler descreve um espaço-tempo gerado por uma fonte de matéria esférica levando em conta a constante cosmológica, esta solução generaliza a solução de Schwarzschild [85].

Essas três soluções de buraco negro em gravidade de bumblebee compartilham algumas hipóteses. A primeira é que essas soluções são EES, desta forma podemos adotar um *ansatz* para essas soluções do tipo

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(-e^{2\gamma(r)}, e^{2\zeta(r)}, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta \right), \quad (3.3)$$

onde $\gamma(r)$ e $\zeta(r)$ são funções só da coordenada radial, note também que este *ansatz* é equivalente a equação (2.12). A segunda hipótese é que o campo de bumblebee B_μ se mantém congelado no seu valor esperado de vácuo b_μ . Além disso, vamos assumir que o valor esperado de vácuo do campo de bumblebee é radial, $b_\mu = (0, b_r(r), 0, 0)$.

3.1.1 Buracos negros tipo Schwarzschild

A primeira solução que nós apresentaremos foi descoberta por Bertolami e Páramos [26]. Com o intuito de encontrar b_μ , eles impuseram a condição da derivada covariante atuando no campo de bumblebee ser zero, $D_\mu b_\nu = \partial_\mu b_\nu - b_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$, que implica em

$$b_r(r) = \xi^{-1/2} b_0 e^\zeta, \quad (3.4)$$

sendo b_0 uma constante. Deste modo, o elemento de linha da solução de Bertolami e Páramos é

$$ds^2 = -f_B(r) dt^2 + \frac{1}{f_B(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (3.5)$$

onde

$$f_B(r) = \left[1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{r}{L_0} \right)^{l_B} \right]. \quad (3.6)$$

Na equação (3.6), L_0 é uma distância arbitrária, $l_B \approx b_0^2/2$, e $M = Gm$ é a massa geométrica [26]. Buscando compreender melhor o comportamento desta solução nós calculamos o escalar de Ricci e o escalar de Kretschmann. O escalar de Ricci é dado por

$$R_{Bertolami} = \frac{2M}{r^3} \left(\frac{r}{L_0} \right)^{l_B} (1 + l_B) l_B. \quad (3.7)$$

Note que, embora a solução de Bertolami seja tipo Schwarzschild, o escalar de Ricci é não nulo. O escalar de Kretschmann, definido por $\mathbf{K} = R^{\mu\nu\sigma\beta} R_{\mu\nu\sigma\beta}$, no limite de $l_B \ll 0$ torna-se

$$\mathbf{K}_{Bertolami} = \left(1 - \frac{5}{3} l_B \right) \left(\frac{r}{L_0} \right)^{2l_B} \left(\frac{14M}{r^6} \right). \quad (3.8)$$

Um fato importante é que tanto o escalar de Ricci quanto o de Kretschmann para este espaço-tempo vão a zero num ponto muito distante da fonte ($r \rightarrow \infty$), assim esta solução é assintoticamente plana.

A outra solução tipo Schwarzschild de nosso interesse foi encontrada por Casana *et al.* [27]. Os autores, diferente de Bertolami e Páramos, não usaram a condição $D_\mu b_\nu = 0$. Em vez disso, eles encontraram b_μ pela condição $b_\mu b^\mu = \text{const.}$ que fornece

$$b_r(r) = |b| e^{\rho(r)}. \quad (3.9)$$

Então, o elemento de linha de Casana *et al.* [27] é dado por

$$ds^2 = -f_c(r) dt^2 + (1 + l_c) \frac{1}{f_c(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.10)$$

onde

$$f_c(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.11)$$

Nas equações (3.10) e (3.11), $M = Gm$ é a massa geométrica e $l_c = \xi b^2$. Deste modo, l_c depende do valor esperado de vácuo do campo de bumblebee e da constante de acoplamento ξ . Similar ao que foi feito para a solução de Bertolami nós calculamos o escalar de Ricci e o de Kretschmann para a solução de Casana. O escalar de Ricci para esta solução é

$$R_{Casana} = \frac{2}{r^2} \frac{l_c}{1 + l_c}. \quad (3.12)$$

Observe que apesar desta solução ser tipo Schwarzschild, o escalar de Ricci é não nulo. O escalar de Kretschmann é dado por

$$\mathbf{K}_{Casana} = \frac{4(12M^2 + 4Mr l_c + l_c^2 r^2)}{r^6 (1 + l_c)^2}. \quad (3.13)$$

Observe que assim como a solução de Bertolami, o escalar de Ricci e de Kretschmann vão a zero em um ponto muito distante da fonte ($r \rightarrow \infty$), este é um indício de que essas soluções são assintoticamente planas. Além disso, note que quando $r \rightarrow 0$ os escalares divergem, o que caracteriza uma singularidade.

3.1.2 *Buraco negro tipo Kottler*

A última solução de interesse para nós foi descoberta por Maluf e Neves [29]. Eles consideraram a ação de bumblebee (3.1) com a constante cosmológica não nula, logo a solução encontradas por eles é assintoticamente não plana. Diferente das outras soluções apresentadas na subseção anterior, Maluf e Neves consideraram um potencial linear,

$$V(B_\mu B^\nu \pm b^2) = \frac{\sigma}{2} (B_\mu B^\nu - b^2), \quad (3.14)$$

onde σ é um multiplicador de Lagrange. Note que $V = 0$ e $V' \equiv dV(y)/dy = \sigma/2$ quando $B_\mu B^\nu = b^2$. Este potencial linear foi escolhido para que fosse possível encontrar uma solução com constante cosmológica não nula. O elemento de linha encontrado por Maluf e Neves é

$$ds^2 = -f_M(r)dt^2 + (1+l_c)\frac{1}{f_M(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.15)$$

onde

$$f_M(r) = 1 - \frac{2M}{r} - (1+l_c)\frac{\Lambda_e}{3}r^2. \quad (3.16)$$

Nas equações (3.15) e (3.16) temos $l_c = \xi b^2$ e

$$\Lambda_e = \frac{\kappa\sigma}{\xi}. \quad (3.17)$$

Desse modo, nós temos uma constante cosmológica efetiva que depende da constante de acoplamento não mínimo ξ e do multiplicador de Lagrange σ . Assim como fizemos para as soluções assintoticamente planas, nós calculamos os escalares de Ricci e Kretschmann. O escalar de Ricci é dado por

$$R_{Maluf} = 4\Lambda_e + \frac{2}{r^2} \frac{l_c}{1+l_c}, \quad (3.18)$$

e o escalar de Kretschmann é

$$\mathbf{K}_{Maluf} = \frac{8}{3}\Lambda_e^2 + \frac{l_c}{(1+l_c)r^2} \left[\frac{8}{3}\Lambda_e + \frac{4l_c}{(1+l_c)r^2} \frac{16M}{(1+l_c)r^3} + \frac{48M^2}{l_c(1+l_c)r^4} \right]. \quad (3.19)$$

Tanto o escalar de Ricci quanto o escalar de Kretschmann tendem a $4\Lambda_e$ e $8\Lambda_e^2/3$ quando $r \rightarrow \infty$. Como esperado, a constante cosmológica efetiva promove uma curvatura constante no mesmo

limite. Note que quando tomamos o limite de $r \rightarrow 0$ os escalares divergem, o que caracteriza singularidade.

Uma vez que apresentamos brevemente o Modelo de Bumblebee e as soluções de buraco negro de nosso interesse, os objetivos desta seção foram concluídas. Na próxima seção, nós iremos apresentar brevemente as soluções de buraco de minhoca de Casimir que temos interesse.

3.2 Soluções de Buracos de minhoca de Casimir

Nesta seção, nós iremos apresentar os elementos de linha encontrados pelas referências [53, 57]. Essas soluções partem da classe de buraco de minhoca de Morris e Thorne, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.20)$$

onde $\Phi(r)$ e $b(r)$ são as funções de *redshift* e de *shape*, respectivamente. Além disso, $r \in [r_0, \infty)$, onde r_0 é o raio da garganta do buraco de minhoca. A função de *shape* $b(r)$ determina a geometria do buraco de minhoca e deve obedecer duas condições: $b(r_0) = r_0$ e a condição de *flaring-out* $[b(r) - rb'(r)]/b^2(r) > 0$, onde $b'(r) = db/dr$. Além dessas condições, é fundamental que não haja horizontes presentes, que são identificados como as superfícies com $e^{2\Phi(r)} \rightarrow 0$, de modo que $\Phi(r)$ deve ser finito em toda parte. As equações de campo de Einstein podem ser escritas com $G_V^\mu = 8\pi T_V^\mu$, onde adotaremos $c = G = \hbar = 1$. Estas equações para o elemento de linha da equação (3.20) são

$$\frac{b'}{r^2} = 8\pi\rho(r), \quad (3.21)$$

$$\frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi'(r) - \frac{b}{r^3} = 8\pi p_r(r), \quad (3.22)$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'(r)' + \Phi'(r) \left(\Phi'(r) + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{b'r - b}{2r^2} \left(\Phi'(r) + \frac{1}{r} \right) = 8\pi p_t(r), \quad (3.23)$$

em que $\rho(r)$ é a densidade de energia, $p_r(r)$ é a pressão radial e $p_t(r)$ é a pressão lateral. Garattini foi o primeiro a investigar se de fato a energia de Casimir poderia ser a fonte de um buraco de minhoca atravessável. Agora nós vamos deduzir a métrica encontrada por Garattini. Podemos resolver a equação (3.21) onde a densidade de energia de Casimir é $\rho(r) = -\pi^2/720r^4$, pois $c = G = \hbar = 1$. Assim nós encontramos de forma direta que

$$b(r) = r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1^2}{r}, \quad (3.24)$$

onde $r_1^2 = \pi^3/90$ e a condição $b(r_0) = r_0$ foi imposta. Mas para sabermos se de fato a energia da Casimir pode gerar um buraco de minhoca atravessável, nós precisamos também investigar a função de *redshift*. Substituindo a equação (3.24) e a equação de estado $p_r(r) = \omega\rho(r)$ na equação (3.22), obtemos

$$\frac{2}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_1^2}{r_0 r} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \Phi'(r) - \frac{r_0}{r^3} + \frac{r_1^2}{r_0 r^3} - \frac{(1-\omega)r_1^2}{r^4} = 0. \quad (3.25)$$

Podemos fazer uma integração por frações parciais e obter

$$\Phi(r) = \text{const} - (1-\omega) \ln(r) - \frac{r_1^2 \omega - r_0^2}{r_0^2 + r_1^2} \ln(r - r_0) - \frac{r_0^2 \omega - r_1^2}{r_0^2 + r_1^2} \ln(rr_0 + r_1^2). \quad (3.26)$$

Claramente temos um problema nesta solução devido a $\ln(r - r_0)$ no limite de $r \rightarrow r_0$. Podemos reescrever a equação (3.26) como

$$e^{2\Phi(r)} = X(r)(r - r_0)^{-\frac{r_1^2 \omega - r_0^2}{r_0^2 + r_1^2}}, \quad (3.27)$$

onde $X(r)$ representa os outros termos que são bem comportados. Assim podemos ver que se $r_1^2 \omega - r_0^2 > 0$, então no limite $r \rightarrow r_0$ existirá uma singularidade. Como já foi dito, $e^{2\Phi(r)}$ deve ser finito para todo r do domínio, desse modo, não podemos considerar $r_1^2 \omega - r_0^2 > 0$. Caso $r_1^2 \omega - r_0^2 < 0$, existirá um horizonte no limite $r \rightarrow r_0$. Como nenhuma dessas condições são aceitáveis para que tenhamos um buraco de minhoca atravessável, nos resta fixar $\omega = r_0^2/r_1^2$. Pode-se fixar a constante de integração ao adicionar a condição de que queremos um espaço-tempo assintoticamente plano, precisamos que $\Phi(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, assim

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}(\omega - 1) \ln \left(\frac{r\omega}{\omega r + r_0} \right). \quad (3.28)$$

Podemos também reescrever a função de *shape* usando $\omega = r_0^2/r_1^2$, desse modo,

$$b(r) = \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) r_0 + \frac{r_0^2}{\omega r^2}. \quad (3.29)$$

Por fim, usando a equação de estado $p_t(r) = \omega_t(r)\rho(r)$ na equação (3.23), nós encontramos

$$\omega_t(r) = -[\omega^2(4r - r_0) + r_0(4\omega + 1)](4(\omega r + r_0))^{-1}. \quad (3.30)$$

Com os passos descritos acima, Garattini encontrou a solução de buraco de minhoca de Casimir representado pelo elemento de linha

$$ds^2 = - \left(\frac{r\omega}{\omega r + r_0} \right)^{\omega-1} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) \frac{r_0}{r} - \frac{r_0^2}{\omega r^2}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.31)$$

Este elemento de linha é associado ao tensor densidade energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{r_0^2}{8\pi\omega r^4} [\text{diag}(-1, -\omega, 1, 1) + (\omega_r(r) - 1)\text{diag}(0, 0, 1, 1)]. \quad (3.32)$$

Observe que a energia de Casimir obedece a equação de estado $P = 3\rho$, o que faz $\omega = 3$ ser um valor especial. Além disso, quando $\omega = 1$, o elemento de linha da equação (3.31) torna-se a solução de buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov com tamanho *subplankiano* [35, 36]. O buraco de minhoca de Garattini, apesar de ser atravessável, não pode ser percorrido devido a seu tamanho *plankiano*. Nós também temos interesse em outras soluções de buraco de minhoca de Casimir. Estas tem a energia de Casimir corrigida por PIG como fonte do buraco de minhoca.

Na referência [57], Jusufi *et al.* usaram três modelos de PIG: (1) o modelo de Kempf, Mangano e Mann (KMM), (2) o modelo de Detournay, Gabriel e Spindel (DGS) e (3) o chamado modelo de PIG do segundo tipo. As soluções encontradas por Jusufi *et al.* possuem a mesma função de *shape*

$$b(r) = r_0 - \frac{\pi^3}{90} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right), \quad (3.33)$$

onde β é o parâmetro de comprimento mínimo e D_i são constantes que podem ter os valores

$$\begin{aligned} D_1 &= 5\pi^2 \left(\frac{28 + 3\sqrt{10}}{42} \right), \\ D_2 &= 20\pi^2 \left(\frac{3 + \pi^2}{63} \right), \\ D_3 &= \frac{10\pi^2}{9}, \end{aligned}$$

de acordo com cada modelo de PIG. A primeira solução encontrada tem a função de *redshift* constante, $\Phi(r) = \text{const.}$, então o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.34)$$

onde nós usamos $dt^2 = \exp(2\Phi(r))dt'^2$, pois $\Phi(r) = \text{const.}$ A segunda solução tem função de *redshift* do tipo $\Phi(r) = r_0/r$, e o elemento de linha é da forma

$$ds^2 = -e^{\frac{2r_0}{r}} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.35)$$

A terceira solução tem uma função de *redshift* que obedece $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$, deste

modo o elemento de linha se torna

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\gamma^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.36)$$

onde γ é um fator positivo e $r \geq r_0$. A última solução tem a função de *redshift* obedecendo a relação $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i / r^2)^{-2(1+1/\omega)}$ e o elemento de linha dado por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\beta D_i}{r^2} \right)^{-\frac{2}{(1+1/\omega)}} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.37)$$

Um estudo mais aprofundado na obtenção dessas soluções pode ser encontrado nas referências [53, 57]. No próximo capítulo nós iremos apresentar uma revisão sobre o método de deflexão da luz e partículas massivas via TGB.

4 DEFLEXÃO GRAVITACIONAL E O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Neste capítulo, nós apresentaremos uma revisão sobre o método de Ishihara [64] aplicado na métrica de Jacobi [74]. Esse método, como já foi dito, é baseado no TGB e engloba a deflexão gravitacional tanto de partículas massivas quanto da luz. Considerando um espaço-tempo EES, nós podemos adotar o elemento de linha do tipo

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Vamos deduzir a métrica de Jacobi associada a métrica da equação (4.1). A ação de uma partícula com massa m no espaço-tempo da equação (4.1) é

$$S = -m \int dt \sqrt{A - g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} \equiv -m \int dt L, \quad (4.2)$$

onde $\dot{x}^k \equiv dx^k/dt$, $g_{ij} = \text{diag}(B(r), r^2, r^2 \sin^2\theta)$ e $\{x^i\} = \{r, \theta, \phi\}$. Nós podemos calcular o momento p_k , fazendo isso nós obtemos

$$p_k = -m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}_k}{\sqrt{A - g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} = \frac{m\dot{x}_k}{L}. \quad (4.3)$$

Outra quantidade fundamental é o hamiltoniano associado a ação da equação (4.2). Fazendo uma transformação de Legendre nós obtemos

$$H = \frac{m\dot{x}^k\dot{x}^l g_{kl}}{L} + mL = \frac{m}{L} \left(\dot{x}^k\dot{x}^l g_{kl} + L^2 \right). \quad (4.4)$$

Note que usando $L^2 + \dot{x}^k\dot{x}^l g_{kl} = A$, juntamente com $m^2\dot{x}^k\dot{x}^l g_{kl} = L^2 g^{kl} \dot{p}_k \dot{p}_l$, a equação (4.4) torna-se

$$H = \sqrt{m^2 A + A g^{ij} p_i p_j}. \quad (4.5)$$

Podemos então escrever a equação de Hamilton-Jacobi, usando $p_k = \partial_k S$, como

$$\sqrt{m^2 A + A g^{ij} \partial_i S \partial_j S} = E. \quad (4.6)$$

A métrica ótica é dada por $f_{ij} = A^{-1} g_{ij}$, onde a relação $f_{ij} f^{jk} = \delta_i^k$ é satisfeita. Nós podemos reescrever a equação (4.6) como

$$\frac{1}{E^2 - m^2 A} f^{ij} \partial_i S \partial_j S = 1. \quad (4.7)$$

A equação (4.7) é a equação de Hamilton-Jacobi para geodésicas da métrica de Jacobi j_{ij} dada por

$$j_{lk} dx^l dx^k = (E^2 - m^2 A) A^{-1} g_{lk} dx^l dx^k. \quad (4.8)$$

Para mais detalhes, veja a referência [74]. Desse modo, a métrica de Jacobi para um espaço-tempo tipo EES é

$$ds^2 = (E^2 - m^2 A(r)) \left[\frac{B(r)}{A(r)} dr^2 + \frac{r^2}{A(r)} d\phi^2 \right], \quad (4.9)$$

onde foi considerado o plano equatorial $\theta = \pi/2$. Observando a equação (4.9) podemos notar que a conservação do momento angular devido a simetria axial é dada por

$$J \equiv (E^2 - m^2 A(r)) \frac{r^2}{A(r)} \frac{d\phi}{ds} = \text{const.} \quad (4.10)$$

A equação da trajetória para partículas massivas é obtida usando as equações (4.9) e (4.10), após algumas manipulações nós encontramos

$$(E^2 - m^2 A(r))^2 \frac{B(r)}{A(r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) A(r). \quad (4.11)$$

Nós queremos que o ângulo de deflexão de partículas massivas seja função de alguns parâmetros que constituem o sistema receptor, lente gravitacional e fonte. Estes parâmetros são a velocidade da partícula v , o parâmetro de impacto da trajetória b , as quantidades que caracterizam a lente gravitacional e o inverso das distâncias do receptor u_R e da fonte u_S até a lente gravitacional. Faz-se necessário compreender de forma precisa qual é v . A quantidade v é a norma da velocidade da partícula de teste com massa m vista por um receptor estático a uma distância r_R da lente gravitacional. Vamos agora relacionar a velocidade da partícula com sua velocidade assintótica v_∞ . Podemos escrever a equação (4.1) como $ds^2 = -A(r)dt^2 + dl^2$, então o tempo próprio para um receptor a uma distância r_R é $d\tau_R = \sqrt{A(r_R)}dt$ e o tempo próprio para um receptor no infinito é $d\tau_\infty = dt$ quando o espaço é assintoticamente plano. Desse modo, a relação entre os tempos próprios é $d\tau_\infty/d\tau_R = A(r_R)^{-1/2}$ e

$$v = \frac{dl}{d\tau_R} = \frac{dl}{d\tau_\infty} \frac{d\tau_\infty}{d\tau_R} = \frac{v_\infty}{\sqrt{A(r_R)}}. \quad (4.12)$$

Nós queremos considerar as constantes de movimento: energia e momento angular com função da velocidade assintótica v_∞ porque este é o procedimento adotado nos artigos que conhecemos e pelo fato do caso da luz ser recobrado quando $v_\infty = 1$. Desse modo, nós consideramos as constantes de movimento: momento angular e energia como $J = mv_\infty b / \sqrt{1 - v_\infty^2}$ e $E = m / \sqrt{1 - v_\infty^2}$, respectivamente [75]. A velocidade da partícula de teste vista por um re-

ceptor a uma distância r_R da lente é dada pela equação (4.12). Nós também adotaremos a transformação de coordenada $u = 1/r$. A equação da trajetória (4.11) torna-se

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{b^2 v_\infty^2} - \left(\frac{1-v_\infty^2}{b^2 v_\infty^2} + u^2 \right) A \right]. \quad (4.13)$$

Além disso, quando consideramos $E = m/\sqrt{1-v_\infty^2}$ e definimos $\Omega^2 \equiv m^2(1/(1-v_\infty^2) - A)$, podemos reescrever o elemento de linha presente na equação (4.9) como

$$ds^2 = \Omega^2 \left[\frac{B(r)}{A(r)} dr^2 + \frac{r^2}{A(r)} d\phi^2 \right]. \quad (4.14)$$

Um estudo aprofundado em métrica de Jacobi para um espaço-tempo EES pode ser encontrado na referência [74]. Cabe aqui definir alguns vetores relacionados a métrica de Jacobi que serão úteis quando for apresentado a aplicação do método de Ishihara para deflexão da luz. Podemos definir os vetores unitários na direção radial e direção angular, que são respectivamente,

$$e_{\text{rad}} = \left(\frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{A}{B}}, 0 \right), \quad (4.15)$$

$$e_{\text{ang}} = \left(0, \frac{\sqrt{A}}{\Omega r} \right). \quad (4.16)$$

Além destes, é importante definir também o vetor unitário tangente a trajetória

$$(K^r, K^\phi) = \frac{J}{\Omega^2} \frac{A}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi}, 1 \right). \quad (4.17)$$

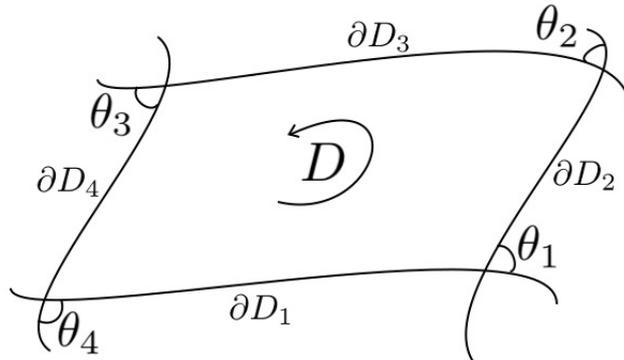
Agora temos as quantidades necessárias para falar propriamente do método de Ishihara.

O teorema de Gauss-Bonnet associa as características geométricas de uma superfície com sua característica de Euler, que é uma quantidade topológica. Seja (D, χ, g) um subconjunto compacto de uma superfície orientada com característica de Euler $\chi(D)$ e uma métrica riemanniana g que origina uma curvatura gaussiana K . Além disso, seja $\partial D : \{t\} \rightarrow D$ o contorno suave por partes com curvatura geodésica κ e seja θ_i o ângulo externo no i -ésimo vértice, percorrido no sentido positivo (veja figura 1). Então o TGB pode ser escrito como

$$\int \int_D K dS + \int_{\partial D} \kappa dt + \sum_i \theta_i = 2\pi \chi(D). \quad (4.18)$$

Um estudo mais profundo sobre TGB pode ser encontrado no apêndice A. O método de Ishihara consiste em utilizar o princípio de Fermat generalizado para um espaço-tempo EES e o TGB, associando a métrica ótica à métrica que descrever a superfície do TGB. O princípio de Fermat generalizado mostra que os raios luminosos percorrem trajetórias de menor tempo, estas trajetórias são descritas por geodésicas da métrica ótica [5]. Dado um espaço-tempo EES

Figura 1 – Figura esquemática para o teorema de Gauss-Bonnet.



Fonte: Elaborado pelo autor

de acordo com a equação (4.1), a métrica ótica associada a ele é

$$ds^2 = \frac{B(r)}{A(r)} dr^2 + \frac{r^2}{A(r)} d\phi^2. \quad (4.19)$$

Note que o espaço-tempo da métrica de Jacobi é conforme a da métrica ótica, basta comparar as equações (4.14) e (4.19). Ishihara mostra que o ângulo de deflexão - considerando distâncias finitas entre o receptor, lente gravitacional e fonte - é dado por

$$\alpha = \Psi_R - \Psi_S + \phi_{RS}. \quad (4.20)$$

O que faremos agora é definir cada parte que compõe o ângulo de deflexão, nós iremos computar cada termo de acordo com a métrica de Jacobi (equação (4.14)), pois desse modo nós encontraremos o ângulo de deflexão para o caso de partículas massivas e o ângulo de deflexão da luz pode ser encontrado ao adotar a velocidade da partícula igual a da luz, ou seja, $v = 1$. Vamos começar pelo termo $\Psi_R - \Psi_S$. Seja $\Psi(u)$ o ângulo entre o vetor tangente a trajetória no ponto e o vetor unitário radial (veja figura 2), assim calculando o produto interno entre esses vetores nós encontramos

$$\cos \Psi = \Omega^2 \left(\frac{B}{A} K^r e_{rad}^r + \frac{r^2}{A} K^\phi e_{rad}^\phi \right) = \sqrt{AB} \frac{J}{\Omega r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (4.21)$$

onde nós usamos a definição de e_{rad} e do vetor unitário tangente a trajetória (4.17). Nós podemos evitar $dr/d\phi$ se usarmos a relação fundamental da trigonometria, assim a equação (4.21) torna-se

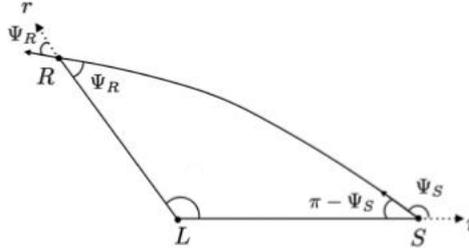
$$\text{sen}^2 \Psi = 1 - \frac{AB}{\Omega^2} J^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2, \quad (4.22)$$

onde nós usamos $r = 1/u$. Podemos simplificar ainda mais essa equação se usarmos a equação

da trajetória presente na equação (4.13), desse modo a equação (4.22) torna-se

$$\Psi(u) = \arcsin \left(buv \sqrt{\frac{A}{1 - A(1 - v_\infty^2)}} \right). \quad (4.23)$$

Figura 2 – Figura esquemática de uma trajetória defletida.



Fonte: Ishihara *et al.* [64]

O termo $\Psi_R - \Psi_S$ pode ser obtido por meio da equação (4.23) juntamente com $\Psi_R - \Psi_S = \Psi(u_R) + \Psi(u_S) - \pi$, sendo u_R o inverso da distância entre o receptor e a lente gravitacional e u_S o inverso de distância entre a fonte e a lente gravitacional. O outro termo que constitui o ângulo de deflexão é ϕ_{RS} , que é definido por $\phi_{RS} \equiv \phi(u_R) - \phi(u_S)$, onde $\phi(u)$ pode ser encontrado via equação (4.13). Por mais que já tenhamos dito, é importante reforçar que o ângulo de deflexão de partículas massivas encontrado via (4.20) se torna o ângulo de deflexão da luz presente no método de Ishihara [64] quando consideramos $v_\infty = 1$ nas equações (4.13) e (4.23). No próximo capítulo nós utilizaremos esta abordagem para encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz considerando distâncias finitas para os espaços-tempos de buraco negro em gravidade de bumblebee e para os buracos de minhoca de Casimir.

5 DEFLEXÃO DE PARTÍCULAS MASSIVAS E LUZ PARA ESPAÇOS-TEMPOS DE INTERESSE

Este capítulo é destinado a apresentar os nossos resultados que deram origem a dois artigos [86, 87]. Na próxima seção nós iremos investigar o ângulo de deflexão gravitacional de partículas massivas e luz considerando as distâncias do sistema receptor, lente gravitacional e fonte para os buracos negros em gravidade de Bumblebee de Bertolami *et al.* e Maluf *et al.* pelo método apresentado no capítulo anterior. Após, iremos investigar a deflexão gravitacional para os buracos de minhoca de Casimir das referências [53] e [57].

5.1 Deflexão de partículas massivas e luz devido a buracos negros EES em gravidade de Bumblebee

Neste seção nós iremos aplicar a método de Ishihara para a métrica de Jacobi com o intuito de encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz para o espaço-tempo de Bertolami e Páramos (equações (3.5) e (3.6)) e para o de Maluf e Neves (equações (3.15) e (3.16)). Para encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz para o espaço-tempo de Casana *et al.* basta fazer a constante cosmológica ser nula nos resultados que obteremos para o espaços-tempo de Maluf e Neves. A utilização do método de Ishihara para o caso de espaço-tempo não assintoticamente planos só é possível se considerarmos que o receptor ou fonte não estejam no horizonte [88] e consideramos o ponto de vista do observador, como foi discutido na referência [89].

5.1.1 Buraco negro tipo Schwarzschild

Para encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas para o espaço-tempo de Bertolami, nós iremos construir cada termo que compõe a equação (4.20). Identificando $A(r)$ e $B(r)$ ao comparar a solução de Bertolami com o a equação (4.1) e calculando $\Psi(u)$ (equação (4.23)), nós encontramos que no limite de campo fraco (M/b), o termo $\Psi_R - \Psi_S$ torna-se

$$\begin{aligned} \Psi_R - \Psi_S &= \arcsin bu_R + \arcsin bu_S - \pi \\ &- \frac{M}{bv_\infty^2} \left(\frac{b}{L_0} \right)^{l_B} \left[\frac{b^2 u_R^2}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b^2 u_S^2}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] + O\left(\frac{M^2}{b^2}\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Também considerando o limite de campo fraco para a equação (4.13), nós encontramos que

$$\begin{aligned} \phi_{RS} &= \pi - \arcsin bu_R - \arcsin bu_S \\ &+ \frac{M}{bv_\infty^2} \left(\frac{b}{L_0} \right)^{l_B} \left[\frac{1 + v_\infty^2 - v_\infty^2 b^2 u_R^2}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{1 + v_\infty^2 - v_\infty^2 b^2 u_S^2}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] + O\left(\frac{M^2}{b^2}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Então o ângulo de deflexão de partículas massivas devido ao buraco negro em gravidade de Bumblebee de Bertolami e Páramos é

$$\alpha = \frac{M}{b} \left(\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} \right) \left(\frac{b}{L_0} \right)^{l_B} \left[\sqrt{1 - b^2 u_S^2} + \sqrt{1 - b^2 u_R^2} \right] + O\left(\frac{M^2}{b^2}\right). \quad (5.3)$$

Cabe agora analisar o resultado da equação (5.3) em alguns casos. O primeiro caso é quando consideramos a deflexão da luz, isto pode ser feito quando adotamos a velocidade $v_\infty = 1$, assim a deflexão devido ao buraco negro de Bertolami e Páramos para a luz é

$$\alpha_{luz} = \frac{2M}{b} \left(\frac{b}{L_0} \right)^{l_B} \left[\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right] + O\left(\frac{M^2}{b^2}\right). \quad (5.4)$$

Outro caso de interesse é quando o receptor e a fonte estão muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \approx 0$), neste limite o ângulo de deflexão de partículas massivas se torna

$$\alpha \approx \frac{2M}{b} \left(\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} \right) \left(\frac{b}{L_0} \right)^{l_B}. \quad (5.5)$$

O último caso resume a quando nós consideramos o valor esperado de vácuo do campo de Bumblebee como zero, ou seja, $l_B = 0$, neste caso a equação (5.5) torna-se

$$\alpha \approx \frac{2M}{b} \left(\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} \right). \quad (5.6)$$

Este resultado concorda com a referência [75]. Note que para o caso da luz ($v_\infty = 1$) a equação (5.6) torna-se $\alpha_{luz} = 4M/b$, que é o ângulo de deflexão da luz para o caso da métrica de Schwarzschild. Estes resultados são esperados pelo fato do elemento de linha de Bertolami, equações (3.5) e (3.6), torna-se o de Schwarzschild quando o valor esperado de vácuo do campo de Bumblebee é nulo.

5.1.2 Buraco negro tipo Kottler

Vamos agora encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas ao buraco negro de Maluf e Neves, equações (3.15) e (3.16). Seguindo o mesmo procedimento, primeiro nós identificamos quem é $A(r)$ e $B(r)$ comparando a solução de Maluf e o elemento de linha EES presente na equação (4.1). Assim, nós podemos encontrar o termo $\Psi_R - \Psi_S$ até primeira ordem

de M/b e $(1+l_c)\Lambda_e$ para esta solução por meio da equação (4.23), a saber

$$\begin{aligned}
\Psi_R - \Psi_S &= \arcsin bu_R + \arcsin bu_S - \pi \\
&- \frac{M}{bv_\infty^2} \left[\frac{b^2 u_R^2}{\sqrt{1-b^2 u_R^2}} + \frac{b^2 u_S^2}{\sqrt{1-b^2 u_S^2}} \right] - \frac{\lambda^2 \Lambda_e b^2}{6v_\infty^2} \left[\frac{(bu_R)^{-1}}{\sqrt{1-b^2 u_R^2}} + \frac{(bu_S)^{-1}}{\sqrt{1-b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{6v_\infty^2} \left[\frac{3-4v_\infty^2+2(2v_\infty^2-1)b^2 u_R^2}{(1-b^2 u_R^2)^{3/2}} + \frac{3-4v_\infty^2+2(2v_\infty^2-1)b^2 u_S^2}{(1-b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] \\
&+ O\left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2\right), \tag{5.7}
\end{aligned}$$

onde $\lambda \equiv \sqrt{1+l_c}$. Precisamos agora encontrar a o termo ϕ_{RS} que compõe o ângulo de deflexão de acordo com a equação (4.20). Podemos resolver a equação (4.13) considerando também até primeira ordem de M/b e $(1+l_c)\Lambda_e$, desse modo encontramos

$$\begin{aligned}
\phi_{RS} &= \lambda [\pi - \arcsin bu_R - \arcsin bu_S] \\
&+ \frac{M}{bv_\infty^2} \left[\frac{\lambda(1+v_\infty^2) - \lambda v_\infty^2 b^2 u_R^2}{\sqrt{1-b^2 u_R^2}} + \frac{\lambda(1+v_\infty^2) - \lambda v_\infty^2 b^2 u_S^2}{\sqrt{1-b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e b^2}{6v_\infty^2} \left[\frac{\lambda(v_\infty^2-1) + \lambda(2-v_\infty^2)b^2 u_R^2}{bu_R \sqrt{1-b^2 u_R^2}} + \frac{\lambda(v_\infty^2-1) + \lambda(2-v_\infty^2)b^2 u_S^2}{bu_S \sqrt{1-b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{6v_\infty^2} \left[\frac{2(2v_\infty^2-1)\lambda - 3\lambda v_\infty^2 b^2 u_R^2}{(1-b^2 u_R^2)^{3/2}} + \frac{2(2v_\infty^2-1)\lambda - 3\lambda v_\infty^2 b^2 u_S^2}{(1-b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^3 \Lambda_e Mb}{6} \left(\frac{1-v_\infty^2}{v_\infty^2} \right)^2 \left[\frac{3b^2 u_R^2 - 4}{(1-b^2 u_R^2)^{3/2}} + \frac{3b^2 u_S^2 - 4}{(1-b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^3 \Lambda_e Mb}{2} \left(\frac{1-v_\infty^2}{v_\infty^2} \right)^2 \left[\tanh^{-1} \left(\sqrt{1-b^2 u_R^2} \right) + \tanh^{-1} \left(\sqrt{1-b^2 u_S^2} \right) \right] \\
&+ O\left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2\right), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

onde $\tanh^{-1}(x)$ é a inversa da função tangente hiperbólica. Assim, o ângulo de deflexão de partículas massivas considerando distâncias finitas devido ao buraco negro em gravidade de Bumblebee de Maluf e Neves é

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1 - \lambda) [\arcsin bu_R + \arcsin bu_S - \pi] \\
&+ \frac{M}{bv_\infty^2} \left[\frac{\lambda(1 + v_\infty^2) - (1 + \lambda v_\infty^2)b^2 u_R^2}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{\lambda(1 + v_\infty^2) - (1 + \lambda v_\infty^2)b^2 u_S^2}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e b^2}{6v_\infty^2} \left[\frac{\lambda(v_\infty^2 - 1 + (2 - v_\infty^2)b^2 u_R^2) - 1}{bu_R \sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{\lambda(v_\infty^2 - 1 + (2 - v_\infty^2)b^2 u_S^2) - 1}{bu_S \sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{6v_\infty^2} \left[\frac{4v_\infty^2(\lambda - 1) + 3 - 2\lambda + (4v_\infty^2 - 3\lambda v_\infty^2 - 2)b^2 u_R^2}{(1 - b^2 u_R^2)^{3/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{4v_\infty^2(\lambda - 1) + 3 - 2\lambda + (4v_\infty^2 - 3\lambda v_\infty^2 - 2)b^2 u_S^2}{(1 - b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^3 \Lambda_e Mb}{6} \left(\frac{1 - v_\infty^2}{v_\infty^2} \right)^2 \left[\frac{3b^2 u_R^2 - 4 + 3(1 - b^2 u_R^2)^{3/2} \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - b^2 u_R^2} \right)}{(1 - b^2 u_R^2)^{3/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{3b^2 u_S^2 - 4 + 3(1 - b^2 u_S^2)^{3/2} \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right)}{(1 - b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] + O \left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2 \right). \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Cabe agora analisar esta solução em alguns casos. O ângulo de deflexão da luz pode ser obtido tomando $v_\infty = 1$, deste modo, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{luz} &= (\lambda - 1) [\pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S)] \\
&+ \frac{M}{b} \left[\frac{2\lambda - b^2 u_S^2 (\lambda + 1)}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} + \frac{2\lambda - b^2 u_R^2 (\lambda + 1)}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} \right] \\
&- \frac{\lambda^2 \Lambda_e b^2}{6} \left[\frac{1 - \lambda b^2 u_R^2}{bu_R \sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{1 - \lambda b^2 u_S^2}{bu_S \sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{6} \left[\frac{2\lambda - 1 + (2 - 3\lambda)b^2 u_R^2}{(1 - b^2 u_R^2)^{3/2}} + \right. \\
&+ \left. \frac{2\lambda - 1 + (2 - 3\lambda)b^2 u_S^2}{(1 - b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] + O \left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2 \right). \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Quando consideramos o receptor e a fonte estejam muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \approx 0$), o ângulo de deflexão de partículas massivas torna-se

$$\begin{aligned} \alpha &= (\lambda - 1)\pi + \frac{\lambda 2M}{b} \left(\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e b^2}{6v_\infty^2} \left[\frac{\lambda(v_\infty^2 - 1) - 1}{bu_R} + \frac{\lambda(v_\infty^2 - 1) - 1}{bu_S} \right] \\ &+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{3v_\infty^2} [4v_\infty^2(\lambda - 1) + 3 - 2\lambda] \\ &+ \frac{\lambda^3 \Lambda_e Mb}{12} \left(\frac{1 - v_\infty^2}{v_\infty^2} \right)^2 [3\pi - 16] + O\left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2\right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Outro caso de interesse é quando o campo de Bumblebee tem valor esperado de vácuo nulo, ou seja, $\lambda = 1$, desse modo a equação (5.11) torna-se

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2M}{b} \left(\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} \right) + \frac{\Lambda_e b^2}{6v_\infty^2} \left[\frac{v_\infty^2 - 2}{bu_R} + \frac{v_\infty^2 - 2}{bu_S} \right] \\ &+ \frac{\lambda^2 \Lambda_e Mb}{3v_\infty^2} + \frac{\Lambda_e Mb}{12} \left(\frac{1 - v_\infty^2}{v_\infty^2} \right)^2 [3\pi - 16] + O\left(\frac{M^2}{b^2}, \lambda^2 \Lambda_e^2\right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

As divergências aparentes que aparecem nas equações (5.11) e (5.12) são problemáticas apenas se a fonte ou o receptor estiverem localizados no horizonte [88]. Além disso nós podemos apresentar o ângulo de deflexão de partículas massivas devido ao buraco negro de Casana *et al.* quando consideramos $\Lambda_e = 0$ na equação (5.9). Fazendo isto, nós obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \lambda) [\arcsin bu_R + \arcsin bu_S - \pi] \\ &+ \frac{M}{bv_\infty^2} \left[\frac{\lambda(1 + v_\infty^2) - (1 + \lambda v_\infty^2)b^2 u_S^2}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} + \frac{\lambda(1 + v_\infty^2) - (1 + \lambda v_\infty^2)b^2 u_R^2}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} \right] \\ &+ O\left(\frac{M^2}{b^2}\right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

O resultado presente na equação (5.13) concorda com as referências [28] e [79]. A deflexão da luz devido ao buraco negro de Casana *et al.* é facilmente encontrado fazendo $v_\infty = 1$ na equação (5.13). Além disso, no limite de receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \approx 0$), o ângulo de deflexão da luz para o buraco negro de Casimir *et al.* torna-se $\alpha_{luz} \approx 4M/b + (l_c \pi)/2$, que é o mesmo resultado obtido por Casana *et al.* na referência [27]. Os resultados apresentados neste capítulo originaram um artigo [87]. Na próxima seção nós iremos apresentar nossos resultados referente aos buracos de minhoca de Casimir apresentados no seção 3.2.

5.2 Deflexão de partículas massivas e luz devido a buracos de minhoca de Casimir

Nesta seção nós iremos calcular o ângulo de deflexão de partículas massivas e luz para os buracos de minhoca de Casimir apresentados na seção 3.2. Nós estamos interessados no limite de deflexão fraca, então $r_0 \ll b \leq r$, sendo b o parâmetro de impacto e r_0 o raio da garganta do buraco de minhoca. Os motivos de adotar este limite são dois. O primeiro motivo é devido ao fato de que os efeitos de deflexão são bastante fracos e o segundo é que nesse limite nós conseguimos obter de forma analítica estes resultados. Nas seções a seguir nós vamos estudar o desvio gravitacional para cada buraco de minhoca de Casimir apresentado na seção 3.2.

5.2.1 Buraco de minhoca de Garattini

O primeiro buraco de minhoca que vamos analisar foi descoberto por Garattini, equação (3.33). Comparando a solução de Garattini com o elemento de linha EES presente na equação (4.1), nós podemos inferir que

$$A(r)^{-1} = \left(\frac{r\omega}{\omega r + r_0} \right)^{-(\omega-1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) r_0 u + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega}\right) r_0^2 u^2 + O(r_0^3), \quad (5.14)$$

onde $u = 1/r$. Podemos calcular $\Psi(u)$, até primeira ordem de r_0/b , usando a equação (5.14) em (4.23), assim nós podemos escrever

$$\begin{aligned} \Psi_R - \Psi_S &= \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi \\ &- \frac{r_0}{2v_\infty^2 b} \left[\frac{b^2 u_R^2 c_1}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b^2 u_S^2 c_1}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &- \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{c_2 b^3 u_R^3}{2v_\infty^2 \sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{c_2 b^3 u_S^3}{2v_\infty^2 \sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{c_1^2 b^3 u_R^3 (2b^2 u_R^2 - 3)}{8v_\infty^4 (1 - b^2 u_R^2)^{3/2}} + \frac{c_1^2 b^3 u_S^3 (2b^2 u_S^2 - 3)}{8v_\infty^4 (1 - b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] + O(r_0^3/b^3), \quad (5.15) \end{aligned}$$

onde $c_1 \equiv 1 - 1/\omega$ e $c_2 \equiv (1/2)(1 - 1/\omega)(1 - 2/\omega)$. Falta agora calcular o termo ϕ_{RS} para que nós possamos encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas. Podemos começar por encontrar a função $u(\phi)$ por meio da equação (4.14). A equação da órbita para esta solução é

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = (1 - c_1 r_0 u - c_3 r_0^2 u^2) \left[\frac{1}{b^2} - u^2 + \frac{c_1 r_0 u}{b^2 v_\infty^2} + \frac{c_2 r_0^2 u^2}{b^2 v_\infty^2} \right], \quad (5.16)$$

onde $c_3 \equiv 1/\omega$. Nós podemos calcular u de forma iterativa considerando $du/d\phi|_{\phi=\pi/2} = 0$. Assim, encontramos

$$u = \frac{1}{b} \operatorname{sen} \phi + \frac{r_0 c_1}{2b^2} \left[\frac{1 + v_\infty^2}{v_\infty^2} - \operatorname{sen}^2 \phi \right] - r_0^2 \frac{4f_1 + 3f_2}{8b^3} \operatorname{sen} \phi + \frac{r_0^2 f_2}{32b^3} \operatorname{sen}(3\phi), \quad (5.17)$$

em que

$$f_1 \equiv \frac{c_1^2 + 2c_2 + (3c_1^2 - 2c_3)v_\infty^2}{2v_\infty^2}, \quad (5.18)$$

$$f_2 \equiv \frac{4c_3 - 3c_1^2}{2}. \quad (5.19)$$

Com isso nós podemos encontrar ϕ também de forma iterativa,

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 + r_0 \phi_1 + r_0^2 \phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| < \pi/2 \\ \pi + \frac{r_0^2(4f_1 + 3f_2)\pi}{8b^2} - \phi_0 - r_0 \phi_1 - r_0^2 \phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| > \pi/2, \end{cases} \quad (5.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arcsin(bu), \\ \phi_1 &= -\frac{c_1}{2v_\infty^2 b} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u^2}}, \\ \phi_2 &= \frac{c_1^2 b u}{8b^2 v_\infty^4} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u^2 v_\infty^2)^2}{(1 - b^2 u^2)^{3/2}} - \frac{c_1^2 b u}{2v_\infty^2 b^2} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u^2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nós podemos adotar $\phi_R > \pi/2$ and $\phi_S < \pi/2$, então encontramos que

$$\begin{aligned} \phi_{RS} &= \pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S) \\ &+ \frac{r_0 c_1}{2v_\infty^2 b} \left[\frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_R^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_S^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &- \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{c_1^2 b u_R}{8v_\infty^4} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_R^2 v_\infty^2)^2}{(1 - b^2 u_R^2)^{3/2}} + \frac{c_1^2 b u_S}{8v_\infty^4} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_S^2 v_\infty^2)^2}{(1 - b^2 u_S^2)^{3/2}} \right] \\ &+ \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{c_1^2 b u_R}{2v_\infty^2} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_R^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{c_1^2 b u_S}{2v_\infty^2} \frac{(1 + v_\infty^2 - b^2 u_S^2 v_\infty^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{4c_3 - 3c_1^2}{64} \right] \left[\frac{b u_R (3 - 4b^2 u_R^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b u_S (3 - 4b^2 u_S^2)}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{4c_1^2 + 8c_2 + (3c_1^2 + 4c_3)v_\infty^2}{16v_\infty^2} \right] [\pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S)] \\ &+ O(r_0^3/b^3). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Substituindo as equações (5.15) e (5.22) em (4.20), nós obtemos o ângulo de deflexão de partículas massivas considerando distâncias finitas para o buraco negro de Casimir encontrado por Garattini, nós encontramos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{4c_1^2 + 8c_2 + (3c_1^2 + 4c_3)v_\infty^2}{16v_\infty^2} \right] [\pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S)] \\
&+ \frac{r_0}{b} \frac{c_1(1+v_\infty^2)}{2v_\infty^2} \left[\sqrt{1-b^2u_R^2} + \sqrt{1-b^2u_S^2} \right] \\
&- \frac{r_0^2 c_1^2}{b^2} \left[\frac{bu_R(1+v_\infty^2 - b^2u_R^2v_\infty^2)^2 - b^3u_R^3(2b^2u_R^2 - 3)}{8v_\infty^4(1-b^2u_R^2)^{3/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{bu_S(1+v_\infty^2 - b^2u_S^2v_\infty^2)^2 - b^3u_S^3(2b^2u_S^2 - 3)}{8v_\infty^4(1-b^2u_S^2)^{3/2}} \right] \\
&+ \frac{r_0^2}{b^2} \left[\frac{4c_3 - 3c_1^2}{64} \right] \left[\frac{bu_R(3 - 4b^2u_R^2)}{\sqrt{1-b^2u_R^2}} + \frac{bu_S(3 - 4b^2u_S^2)}{\sqrt{1-b^2u_S^2}} \right] + O(r_0^3/b^3). \quad (5.23)
\end{aligned}$$

O ângulo de deflexão da luz pode ser encontrado fazendo $v = 1$ na equação (5.23). Nós podemos analisar alguns casos particulares para a equação (5.23). O ângulo de deflexão de partículas massivas no limite do receptor e fonte estão muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \ll 1$) é

$$\alpha \approx \frac{r_0 c_1}{b} \frac{(1+v_\infty^2)}{v_\infty^2} + \frac{r_0^2 \pi}{b^2} \left[\frac{4c_1^2 + 8c_2 + (3c_1^2 + 4c_3)v_\infty^2}{16v_\infty^2} \right]. \quad (5.24)$$

O ângulo de deflexão da luz ($v = 1$) no limite da equação (5.24) é

$$\alpha_{luz} \approx \frac{2r_0 c_1}{b} + \frac{r_0^2 \pi}{b^2} \left[\frac{4c_1^2 + 8c_2 + 3c_1^2 + 4c_3}{16v_\infty^2} \right]. \quad (5.25)$$

Além destes resultados, cabe aqui apresentar o caso o ângulo de deflexão para $\omega = 3$, as constantes tornam-se $c_1 = 2/3$, $c_2 = 1/9$ e $c_3 = 1/3$. Então o ângulo de deflexão da luz para partículas massivas considerando distâncias finitas torna-se

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{a}{b} \frac{(1+v_\infty^2)}{3v_\infty^2} \left[\sqrt{1-b^2u_R^2} + \sqrt{1-b^2u_S^2} \right] + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{1+v_\infty^2}{6v_\infty^2} \right) [\pi - \arcsin(bu_R) - \arcsin(bu_S)] \\
&- \frac{4a^2}{9b^2} \left[\frac{bu_R(1+v_\infty^2 - b^2u_R^2v_\infty^2)^2 - b^3u_R^3(2b^2u_R^2 - 3)}{8v_\infty^4(1-b^2u_R^2)^{3/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{bu_S(1+v_\infty^2 - b^2u_S^2v_\infty^2)^2 - b^3u_S^3(2b^2u_S^2 - 3)}{8v_\infty^4(1-b^2u_S^2)^{3/2}} \right] + O(r_0^3/b^3). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

No caso de deflexão da luz, basta tomar $v_\infty = 1$ na equação (5.26). Considerando o limite de

receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional, a equação (5.26) torna-se

$$\alpha \approx \frac{2r_0}{3b} \frac{(1+v_\infty^2)}{v_\infty^2} + \frac{r_0^2 \pi}{6b^2} \frac{(1+v_\infty^2)}{v_\infty^2}. \quad (5.27)$$

Quando consideramos a deflexão da luz ($v = 1$), a equação (5.27) torna-se

$$\alpha_{luz} \approx \frac{4r_0}{3b} + \frac{r_0^2 \pi}{3b^2}. \quad (5.28)$$

O segundo termo da equação (5.28) não concorda com o obtido pela referência [90]. Acreditamos que essa discordância deve ser porque a referência [90] considerou a aproximação de linha reta para a trajetória da luz ($u = \frac{1}{b} \text{sen}\phi$).

Nas próximas subseções nós iremos estudar o ângulo de deflexão de partículas massivas e luz para as soluções de buraco de minhoca de Casimir corrigidos por PIG.

5.2.2 Função de redshift $\Phi(x) = \text{const.}$

A primeira refere-se ao buraco de minhoca com correção de PIG que iremos analisar possui a função de redshift constante, $\Phi = \text{const.}$, esta solução foi apresentada no capítulo 3, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\pi^3}{90r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (5.29)$$

Nós podemos encontrar as quantidades de interesse para a aplicação do método de Ishihara quando nós comparamos as equações (4.1) e (5.29), deste modo nós concluímos que $A(r) = 1$ e

$$B(r) = \left[1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\pi^3}{90r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) \right]^{-1}. \quad (5.30)$$

Para simplificar os procedimentos futuros nós podemos reescrever a equação (5.29) em ordens de $1/r$, assim

$$B(r) = \left[1 - \left(r_0 - \frac{\pi^3}{90r_0} - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r_0^3} \right) \frac{1}{r} - \left(\frac{\pi^3}{90} \right) \frac{1}{r^2} - \left(\frac{\pi^3 D_i \beta}{270} \right) \frac{1}{r^4} \right]^{-1}. \quad (5.31)$$

Note que o coeficiente do termo $1/r$ é a massa ADM que está definida na equação (61) da referência [57]. Para simplificar nosso desenvolvimento é conveniente fazer algumas definições. Podemos definir $\varepsilon \equiv \pi^3/90$ e

$$\frac{\chi}{b^4} \equiv \frac{\pi^3 D_i \beta}{270b^4} = \frac{\varepsilon}{90b^2} \frac{D_i \beta}{3b^2}, \quad (5.32)$$

onde $D_i = \{D_1, D_2, D_3\}$ é um conjunto de fatores numéricos associados a cada modelo de PIG e β é o parâmetro de comprimento mínimo [57]. Note que χ/b^4 é muito menor que ε/b^2 e M/b

($\chi/b^4 \ll \varepsilon/b^2$ e $\chi/b^4 \ll M/b$). Neste limite a massa ADM se torna

$$M \equiv r_0 - \frac{\pi^3}{90r_0}. \quad (5.33)$$

Então a equação (5.31) torna-se

$$B(r) = [1 - Mu - \varepsilon u^2]^{-1}, \quad (5.34)$$

Como temos $A(r)$ e $B(r)$ para esta solução, nós podemos encontrar o ângulo de deflexão presente na equação (4.20). Vamos começar por encontrar o termo $\Psi_R - \Psi_S$. Como $A(r) = 1$ então a equação (4.23) torna-se $\Psi(u) = \arcsin(bu)$. Desse modo, podemos escrever

$$\Psi_R - \Psi_S = \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi. \quad (5.35)$$

Para computar o termo ϕ_{RS} nós iremos usar a equação da orbita de partículas massivas, equação (4.13). A equação da órbita para o espaço-tempo da equação (5.29) é

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left[\frac{1}{b^2} - u^2\right] (1 - Mu - \varepsilon u^2). \quad (5.36)$$

Nós podemos calcular a $u(\phi)$ de forma iterativa considerando $du/d\phi|_{\phi=\pi/2} = 0$. Fazendo isso, nós encontramos

$$u = \frac{1}{b} \sin\phi + \frac{M}{2b^2} \cos^2\phi + \frac{\varepsilon}{16b^3} [-4\phi \cos\phi + \sin(3\phi)] + O(M\varepsilon, M^2, \varepsilon^2). \quad (5.37)$$

Nós podemos também calcular ϕ de forma iterativa, nós obtemos

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 + M\phi_1 + \varepsilon\phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| < \pi/2; \\ \pi + \frac{\pi\varepsilon}{4b^2} - \phi_0 - M\phi_1 - \varepsilon\phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| > \pi/2, \end{cases} \quad (5.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arcsin(bu), \\ \phi_1 &= -\frac{1}{2b} \sqrt{1 - b^2 u^2}, \\ \phi_2 &= \frac{1}{4b^2} \arcsin(bu) - \frac{1}{16b^2} \frac{(3 - 4b^2 u^2)bu}{\sqrt{1 - b^2 u^2}}. \end{aligned}$$

Note que nós estamos adotando a convenção $\phi_R > \pi/2$ e $\phi_S < \pi/2$, então

$$\begin{aligned}\phi_{RS} &= \pi + \frac{\pi\varepsilon}{4b^2} - [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \left(1 + \frac{\varepsilon}{4b^2}\right) \\ &+ \frac{M}{b} \left[\sqrt{1 - b^2u_R^2} + \sqrt{1 - b^2u_S^2} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{4b^2} \left[\frac{bu_R(3 - 4b^2u_R^2)}{\sqrt{1 - b^2u_R^2}} + \frac{bu_S(3 - 4b^2u_S^2)}{\sqrt{1 - b^2u_S^2}} \right] + O(M\varepsilon, M^2, \varepsilon^2).\end{aligned}\quad (5.39)$$

O ângulo de deflexão de partículas massiva para esta solução pode ser encontrado quando usamos as equações (5.35) e (5.39) na equação (4.20). O ângulo de deflexão gravitacional considerando distâncias finitas é

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi\varepsilon}{4b^2} - [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \frac{\varepsilon}{4b^2} \\ &+ \frac{M}{2b} \left[\sqrt{1 - b^2u_R^2} + \sqrt{1 - b^2u_S^2} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{4b^2} \left[\frac{bu_R(3 - 4b^2u_R^2)}{\sqrt{1 - b^2u_R^2}} + \frac{bu_S(3 - 4b^2u_S^2)}{\sqrt{1 - b^2u_S^2}} \right] + O(M\varepsilon, M^2, \varepsilon^2).\end{aligned}\quad (5.40)$$

A primeira coisa que podemos notar é que a velocidade v_∞ não aparece na equação (5.40), isto é consequência de que $A(r) = 1$. Neste caso, o ângulo de deflexão de partículas massivas é igual ao ângulo de deflexão da luz. Cabe aqui também considerar o caso limite do receptor e fonte estarem muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \ll 1$), neste limite o ângulo de deflexão torna-se

$$\alpha_\infty \approx \frac{r_0}{b} - \frac{\pi^3}{90r_0b} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b}\right), \quad (5.41)$$

onde nós fizemos uso da definição $\varepsilon \equiv \pi^3/90$ e da definição de M presente na equação (5.33). A equação (5.41) concorda com a referência [57].

Nas próximas subseções, nós iremos estudar o ângulo de deflexão para as soluções de buraco de minhoca de Casimir com correções de PIG e função de *redshift* variável.

5.2.3 Função de *redshift* $\Phi(r) = r_0/r$

Agora nós iremos nos aprofundar no estudo de deflexão gravitacional para o buraco de minhoca de Casimir com função de *redshift* $\Phi = \frac{r_0}{r}$, esta solução possui elemento de linha dado por

$$ds^2 = -e^{\frac{2r_0}{r}} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\pi^3}{90r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.42)$$

O procedimento é o mesmo das seções anteriores, nós iremos computar os termos que compõe a equação (4.20). Vamos encontrar primeiro o termo $\Psi_R - \Psi_S$, a equação (4.23), para esta solução, torna-se

$$\Psi(u) = \arcsin \left(buv_\infty \left(e^{-2r_0/r} - (1 - v_\infty^2) \right)^{-1/2} \right). \quad (5.43)$$

Quando consideramos o limite de deflexão fraca $r_0 \ll b \leq r$ nós podemos escrever $e^{-2r_0/r} \approx 1 - 2r_0/r$, então fazendo uma expansão nós encontramos

$$\Psi(u) = \arcsin(bu) + \frac{r_0}{bv_\infty^2} \frac{b^2 u^2}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} + O(r_0^2/b^2). \quad (5.44)$$

Logo o termo $\Psi_R - \Psi_S$ da equação (4.20) torna-se

$$\Psi_R - \Psi_S = -\pi + \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) + \frac{r_0}{bv_\infty^2} \left[\frac{b^2 u_R^2}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b^2 u_S^2}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] + O(r_0^2/b^2). \quad (5.45)$$

Vamos encontrar o termo ϕ_{RS} usando a equação da órbita para partículas massivas, equação (4.13). A equação da órbita para esta solução presente na equação (5.42) é

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left[\frac{1}{b^2} - u^2 - \frac{2r_0 u}{b^2 v_\infty^2} \right] (1 - Mu - \varepsilon u^2), \quad (5.46)$$

onde $\varepsilon \equiv \pi^3/90$ e M é dado pela equação (5.33). Como fizemos nas seções anteriores, iremos encontrar u iterativamente considerando $du/d\phi|_{\phi=\pi/2} = 0$. Desse modo, nós encontramos

$$u = \frac{1}{b} \sin \phi + \frac{M}{2b^2} \cos^2 \phi - \frac{r_0}{b^2 v_\infty^2} + \frac{\varepsilon}{16b^3} [-4\phi \cos \phi + \sin(3\phi)] + O(Mr_0, M\varepsilon, r_0\varepsilon, M^2, r_0^2, \varepsilon^2). \quad (5.47)$$

Podemos calcular ϕ iterativamente a partir da equação (5.47). Nós obtemos

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 + M\phi_{1,1} + r_0\phi_{1,2} + \varepsilon\phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| < \pi/2; \\ \pi + \frac{\varepsilon\pi}{4b^2} - \phi_0 - M\phi_{1,1} - r_0\phi_{1,2} - \varepsilon\phi_2 + \dots, & \text{se } |\phi| > \pi/2, \end{cases} \quad (5.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arcsin(bu), \\ \phi_{1,1} &= -\frac{1}{2b} \sqrt{1 - b^2 u^2}, \\ \phi_{1,2} &= \frac{1}{bv_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 u^2}}, \\ \phi_2 &= \frac{1}{16b^2} \left(4 \arcsin(bu) - \frac{(3 - 4b^2 u^2)bu}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} \right). \end{aligned}$$

Usando a convenção que estamos adotando $\phi_R > \pi/2$ e $\phi_S < \pi/2$, nós encontramos

$$\begin{aligned} \phi_{RS} &= \pi + \frac{\varepsilon\pi}{4b^2} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4b^2}\right) [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \\ &+ \frac{M}{2b} \left[\sqrt{1 - b^2u_R^2} + \sqrt{1 - b^2u_S^2} \right] - \frac{r_0}{bv_\infty^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - b^2u_R^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - b^2u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{16b^2} \left[\frac{(3 - 4b^2u_R^2)bu_R}{\sqrt{1 - b^2u_R^2}} + \frac{(3 - 4b^2u_S^2)bu_S}{\sqrt{1 - b^2u_S^2}} \right] + O(Mr_0, M\varepsilon, r_0\varepsilon, M^2, r_0^2). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Nós podemos usar as equações (5.45) e (5.49) na equação (4.20) para encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas considerando distâncias finitas, a saber

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon\pi}{4b^2} - \frac{\varepsilon}{4b^2} [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] + \left[\frac{M}{2b} - \frac{r_0}{bv_\infty^2} \right] \left[\sqrt{1 - b^2u_R^2} + \sqrt{1 - b^2u_S^2} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{16b^2} \left[\frac{(3 - 4b^2u_R^2)bu_R}{\sqrt{1 - b^2u_R^2}} + \frac{(3 - 4b^2u_S^2)bu_S}{\sqrt{1 - b^2u_S^2}} \right] + O(Mr_0, M\varepsilon, r_0\varepsilon, M^2, r_0^2). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Esse resultado concorda com a equação (5.40) quando $A(r) = 1$ (quando disconsideramos o termo r_0/bv_∞^2 na equação (5.50)). O ângulo de deflexão da luz pode ser obtido quando consideramos $v_\infty = 1$ na equação (5.50). No caso limite em que o receptor e fonte estejam muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \ll 1$), o ângulo de deflexão de partículas massivas torna-se

$$\alpha_\infty \approx -\frac{r_0}{b} \left(\frac{2 - v_\infty^2}{v_\infty^2} \right) - \frac{\pi^3}{90br_0} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b} \right), \quad (5.51)$$

onde usamos a definição $\varepsilon \equiv \pi^3/90$ e M dado pela equação (5.33). Por fim, basta tomar $v_\infty = 1$ na equação (5.51), para encontrar o ângulo de deflexão da luz. A saber,

$$\alpha_{\infty[luz]} \approx -\frac{r_0}{b} - \frac{\pi^3}{90br_0} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b} \right). \quad (5.52)$$

Este resultado concorda com a referência [57] só com o termo $-r_0/b$. O sinal negativo nas equações (5.51) e (5.52) refere-se ao afastamento das partículas quando defletidas por este buraco de minhoca, o ângulo é o valor absoluto $|\alpha|$.

5.2.4 Função de redshift $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$

Nesta seção nós iremos considerar a solução que tem função de *redshift* $e^{2\Phi(r)} = 1 + \frac{\gamma^2}{r^2}$, desse modo o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\gamma^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\pi^3}{90r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.53)$$

Fazendo o mesmo que as seções anteriores, nós podemos começar por calcular o ângulo que o vetor tangente a trajetória faz com o vetor radial em um dado ponto cujo o inverso da distância é u , assim nós usamos a equação (4.23) e encontramos

$$\Psi(u) = \arcsin \left(bu v \left((1 + \gamma^2 u^2)^{-1} - (1 - v_\infty^2) \right)^{-1/2} \right). \quad (5.54)$$

Como estamos interessados no limite de deflexão fraca, podemos tomar o seguinte regime $\gamma^2/r^2 < \gamma^2/b^2 \ll 1$, fazendo uma expansão da equação (5.54) nós encontramos

$$\Psi(u) = \arcsin(bu) + \frac{\gamma^2}{2v_\infty^2 b^2} \frac{b^3 u^3}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} + O\left(\frac{\gamma^4}{b^4}\right). \quad (5.55)$$

Deste modo, o termo $\Psi_R - \Psi_S$ da equação (4.20) torna-se

$$\Psi_R - \Psi_S = \arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S) - \pi + \frac{\gamma^2}{2v_\infty^2 b^2} \left[\frac{b^3 u_R^3}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b^3 u_S^3}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] + O\left(\frac{\gamma^4}{b^4}\right). \quad (5.56)$$

O termo ϕ_{RS} pode ser obtido via a equação da orbita, equação (4.13), que para este wormhole de Casimir, equação (5.53), torna-se

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left[\frac{1}{b^2} - u^2 - \frac{\gamma^2 u^2}{b^2 v_\infty^2} \right] (1 - Mu - \varepsilon u^2), \quad (5.57)$$

onde consideramos $(1 + \gamma^2 u^2)^{-1} \approx 1 - \gamma^2 u^2$. Podemos assim computar u iterativamente quando consideramos $du/d\phi|_{\phi=\pi/2} = 0$ e após podemos computar ϕ do mesmo modo que foi feito nas seções anteriores, nós obtemos

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 + M\phi_1 + \gamma^2 \phi_{2,1} + \varepsilon \phi_{2,2} + \dots, & \text{se } |\phi| < \pi/2; \\ \pi + \frac{\varepsilon \pi}{4b^2} + \frac{\pi \gamma^2}{2b^2 v_\infty^2} - \phi_0 - M\phi_1 - \gamma^2 \phi_{2,1} - \varepsilon \phi_{2,2} + \dots, & \text{se } |\phi| > \pi/2, \end{cases} \quad (5.58)$$

onde

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \arcsin(bu), \\ \phi_1 &= -\frac{1}{2b}\sqrt{1-b^2u^2}, \\ \phi_{2,1} &= \frac{1}{2b^2v_\infty^2}\arcsin(bu), \\ \phi_{2,2} &= \frac{1}{16b^2}\left(4\arcsin(bu) - \frac{(3-4b^2u^2)bu}{\sqrt{1-b^2u^2}}\right).\end{aligned}$$

Adotando que $\phi_S < \pi/2$ e $\phi_R > \pi/2$, nós podemos escrever

$$\begin{aligned}\phi_{RS} &= \pi + \frac{\varepsilon\pi}{4b^2} + \frac{\pi\gamma^2}{2b^2v_\infty^2} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4b^2} + \frac{\gamma^2}{2b^2v_\infty^2}\right) [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \\ &+ \frac{M}{2b} \left[\sqrt{1-b^2u_R^2} + \sqrt{1-b^2u_S^2} \right] + \frac{\varepsilon}{16b^2} \left[\frac{(3-4b^2u_R^2)bu_R}{\sqrt{1-b^2u_R^2}} + \frac{(3-4b^2u_S^2)bu_S}{\sqrt{1-b^2u_S^2}} \right] \\ &+ O(M\gamma^2, M\varepsilon, \gamma^2\varepsilon, M^2, \gamma^4).\end{aligned}\quad (5.59)$$

Para encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas basta aplicar as equações (5.56) e (5.59) na equação (4.20). O ângulo de deflexão de partículas massivas considerando distâncias finitas para a solução de Casimir corrigido por PIG com $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$ é

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\varepsilon\pi}{4b^2} + \frac{\pi\gamma^2}{2b^2v_\infty^2} - \left(\frac{\varepsilon}{4b^2} + \frac{\gamma^2}{2b^2v_\infty^2}\right) [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \\ &+ \frac{M}{2b} \left[\sqrt{1-b^2u_R^2} + \sqrt{1-b^2u_S^2} \right] + \frac{\gamma^2}{2b^2v_\infty^2} \left[\frac{b^3u_R^3}{\sqrt{1-b^2u_R^2}} + \frac{b^3u_S^3}{\sqrt{1-b^2u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{16b^2} \left[\frac{(3-4b^2u_R^2)bu_R}{\sqrt{1-b^2u_R^2}} + \frac{(3-4b^2u_S^2)bu_S}{\sqrt{1-b^2u_S^2}} \right] + O(M\gamma^2, M\varepsilon, \gamma^2\varepsilon, M^2, \gamma^4).\end{aligned}\quad (5.60)$$

Quando consideramos $\gamma = 0$, a equação (5.60) torna-se (5.40), como tem que ser. Para encontrar o ângulo de deflexão da luz basta tomar $v_\infty = 1$ na equação (5.60). No limite do receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional, no caso do buraco de minhoca, ($bu_R \approx bu_S \ll 1$), o ângulo de deflexão torna-se

$$\alpha_\infty \approx \frac{r_0}{b} - \frac{\pi^3}{90r_0b} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b}\right) + \frac{\pi\gamma^2}{2b^2v_\infty^2},\quad (5.61)$$

onde, mais uma vez, nós utilizamos a definição $\varepsilon \equiv \pi^3/90$ e M de acordo com a equação 5.33. O ângulo de deflexão da luz pode ser encontrado tomando $v_\infty = 1$ na equação (5.61). A equação (5.61) com v_∞ concorda com a referência [57] só com os dois primeiros termos. O termo γ^2

discorda com relação a potência de γ (na referência [57] este termo está com a dimensão errada) e discorda também com o sinal.

5.2.5 Função de redshift $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i/r^2)^{-2(1+1/\omega)}$

Finalmente, nós iremos encontrar o ângulo de deflexão de partículas massivas e luz considerando distâncias finitas para o caso de buraco de minhoca de Casimir com correção de PIG com $\omega = \text{const.}$ e função de redshift que obedece a $e^{2\Phi(r)} = \left(1 + \frac{\beta D_i}{r^2}\right)^{-\frac{2}{1+1/\omega}}$, o elemento de linha desta solução é

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\beta D_i}{r^2}\right)^{-\frac{2}{1+1/\omega}} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\pi^3}{90r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{\pi^3 D_i \beta}{270r} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.62)$$

Faremos isso por meio de um atalho, pois o procedimento é bastante similar ao realizado na seção anterior, onde $A^{-1} \approx 1 - \gamma^2 u^2$, pois a equação (5.62) no limite de deflexão fraco torna-se

$$A^{-1} = (1 + \beta D_i u^2)^{\frac{2}{1+1/\omega}} \approx 1 - \left(-\frac{2}{1 + \omega^{-1}} \beta D_i\right) u^2. \quad (5.63)$$

Então, o ângulo de deflexão de partículas massivas é igual ao fornecido pela equação (5.60) quando

$$\gamma^2 = -\frac{2}{1 + \omega^{-1}} \beta D_i. \quad (5.64)$$

Desse modo, o ângulo de deflexão de partículas massivas para esta solução é

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon \pi}{4b^2} - \frac{1}{1 + \omega^{-1}} \frac{\pi \beta D_i}{b^2 v_\infty^2} - \left(\frac{\varepsilon}{4b^2} - \frac{1}{1 + \omega^{-1}} \frac{\beta D_i}{b^2 v_\infty^2}\right) [\arcsin(bu_R) + \arcsin(bu_S)] \\ &+ \frac{M}{2b} \left[\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right] - \frac{1}{1 + \omega^{-1}} \frac{\beta D_i}{b^2 v_\infty^2} \left[\frac{b^3 u_R^3}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b^3 u_S^3}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{16b^2} \left[\frac{(3 - 4b^2 u_R^2) bu_R}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{(3 - 4b^2 u_S^2) bu_S}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right] + O(M\gamma^2, M\varepsilon, \gamma^2 \varepsilon, M^2, \gamma^4). \quad (5.65) \end{aligned}$$

O ângulo de deflexão para a luz é encontrado quando fazemos $v_\infty = 1$. No limite do receptor e fontes muito distantes da lente gravitacional ($bu_R \approx bu_S \ll 1$), a equação (5.65) torna-se

$$\alpha_\infty \approx \frac{r_0}{b} - \frac{\pi^3}{90r_0 b} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b}\right) - \frac{1}{1 + \omega^{-1}} \frac{\pi \beta D_i}{b^2 v_\infty^2}. \quad (5.66)$$

O ângulo de deflexão da luz neste mesmo limite e considerando $\omega = 1$ é dado por

$$\alpha_{\infty[luz]} \approx \frac{r_0}{b} - \frac{\pi^3}{90r_0 b} \left(1 - \frac{\pi r_0}{4b}\right) - \frac{\pi \beta D_i}{2b^2}. \quad (5.67)$$

Este resultado concorda com a referência [57] concorda com os dois primeiros termos e discorda do último devido ao sinal. Os resultados desta seção originaram um artigo [86]. A seguir, nós resumimos nossos principais resultados e apresentamos nossas perspectivas.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese, nós estudamos o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz em dois diferentes tipos de espaço-tempo, buracos negros em gravidade de Bumblebee e os buracos de minhoca de Casimir. Nós adotamos o método de Ishihara porque ele fornece um ângulo de deflexão gravitacional que leva em conta as distâncias do sistema constituído pelo receptor, lente gravitacional e fonte. O estudo de deflexão de partículas massivas foi possível devido a utilização do método de Ishihara na métrica de Jacobi associada a cada espaço-tempo que analisamos. Nós calculamos o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz tanto considerando as distâncias do sistema finitas quanto no limite do receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional.

Nós decidimos apresentar nossos resultados como função da velocidade assintótica v_∞ por dois motivos. O primeiro, e mais importante, é que quando representamos o ângulo de deflexão de partículas massivas usando a velocidade assintótica a deflexão da luz pode ser encontrada apenas tomando $v_\infty = 1$. O segundo motivo é que decidimos respeitar o procedimento padrão da literatura, pois todos os artigos que vimos apresentam seus resultados em função da velocidade assintótica. Além disso, a velocidade da partícula de teste vista por um observador estático a uma distância r_R da lente pode ser obtida por meio da equação (4.12).

No capítulo 3, especificamente na seção 3.1, nós apresentamos brevemente o modelo de Bumblebee e apresentamos a solução de buraco negro tipo Schwarzschild encontrada por Bertolami e Páramos [26] e a solução tipo Kottler encontrada por Maluf e Neves [29]. Na seção 3.2, nós apresentamos as soluções de buraco de minhoca de Casimir, uma destas foi encontrada por Garattini [53] e as outras quatro foram encontradas por Jusufi *et al.* [57] que consideraram a energia de Casimir com correções de PIG. No capítulo 4, nós apresentamos o método de Ishihara aplicado na métrica de Jacobi e suas características.

Nós apresentamos nossos resultados no capítulo 5. Estes estudos deram origem a dois artigos [86, 87]. Na seção 5.1, investigamos a influência do campo de bumblebee na deflexão gravitacional. Para a solução de Bertolami e Neves nós encontramos o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz com distâncias finitas, apresentados pelas equações (5.4) e (5.9), respectivamente. Nós encontramos também a deflexão gravitacional devido a partículas massivas e luz no limite do receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional, equação (5.5) considerando v_∞ e $v_\infty = 1$, respectivamente. Por fim, nós calculamos o ângulo de deflexão da luz quando o campo de bumblebee tem valor esperado de vácuo nulo, $l_B = 0$ e $l_C = 0$. Quando $l_B = 0$, o ângulo de deflexão torna-se igual ao de Schwarzschild como tem que ser, pois nesse caso a solução de Bertolami torna-se a de Schwarzschild. Quando $l_C = 0$,

o ângulo de deflexão torna-se igual ao de Kottler com constante cosmológica efetiva dada por $\Lambda_e = \kappa\sigma/\xi$. Por fim, quando consideramos a solução de Maluf e Neves com $\Lambda_e = 0$, nós encontramos o ângulo de deflexão para a solução de Casana *et al.*

Na seção 5.2 nós estudamos o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz para cinco buracos de minhoca de Casimir atravessáveis. O primeiro foi construído por Garattini e a fonte dessa solução é a energia de Casimir. As outras soluções consideram efeitos de PIG de altas energias. Essas soluções corrigidas por PIG diferem-se devido as funções de *redshift*. Nós analisamos a deflexão gravitacional de partículas massivas e luz para as funções de *redshift* $\Phi(r) = const$, $\Phi(r) = r_0/r$, $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$ e $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i/r^2)^{-2/(1+1/\omega)}$. Também analisamos cada solução no caso do receptor e fonte muito distantes da lente gravitacional ($bu_S \approx bu_R \ll 1$). Sempre que foi possível, nós comparamos nossos resultados com os encontrados por Jusufi *et al.*

Primeiro, nós encontramos o ângulo de deflexão de partículas massivas com distâncias finitas para a solução de Garattini com ω constante, este resultado está presente na equação (5.23). Este resultado é bastante geral, o que fizemos após foi considerar alguns casos especiais desta equação. Quando tanto a fonte quando o receptor está muito distante da lente, o ângulo de deflexão é o apresentado na equação (5.24) e a deflexão da luz ($v_\infty = 1$) foi apresentada na equação (5.25). Além disso, nós analisamos o caso especial $\omega = 3$ (neste caso a energia de Casimir obedece a equação de estado $P = 3\rho$), apresentamos o ângulo de deflexão de partículas massivas com distâncias finitas na equação (5.26). Também para $\omega = 3$ nós encontramos o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz no limite de receptor e fonte longe da lente, equações (5.27) e (5.28), respectivamente. A equação (5.28) discorda da referência [90] com relação ao segundo termo. Nós acreditamos que esse desacordo seja devido ao fato dos autores do artigo considerarem a equação da órbita como $u = \frac{1}{b} \sin \phi$.

Nós analisamos a deflexão gravitacional para cada solução com PIG. Nós apresentamos o ângulo de deflexão de partículas massivas com distâncias finitas para o caso $\Phi(r) = const$. na equação (5.40). Foi observado que este ângulo não depende da velocidade assintótica da partícula de teste, ou seja esse resultado é válido para partículas com e sem massa (luz), isso ocorre devido ao fato de $A(r) = 1$. Neste caso, as quantidades que compõem o ângulo de deflexão de partículas massivas tornam-se as que compõem o ângulo de deflexão da luz. No limite de observador e fonte muito distantes da lente gravitacional ($bu_S \approx bu_R \ll 1$), o ângulo de deflexão torna-se o da equação (5.41). A equação (5.41) concorda com a referência [57].

Nós estudamos também esse efeito gravitacional para a solução com *redshift* $\Phi(r) = r_0/r$. O ângulo de deflexão de partículas massivas considerando distâncias finitas foi apresentado na equação (5.50). Como de costume, o ângulo de luz é encontrado quando fizermos $v_\infty = 1$ e no limite de receptor e fonte distantes da lente, a deflexão de partículas massivas

e da luz tornam-se as equações (5.51) e (5.52), respectivamente.

As duas soluções caracterizadas pelos *redshifts* $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$ e $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i/r^2)^{-2/(1+1/\omega)}$ tem procedimentos bastante similares no cálculo da deflexão gravitacional de partículas massivas até primeira ordem. Primeiro nós encontramos o ângulo de deflexão de partículas massivas para a solução com *redshift* $\exp(2\Phi(r)) = 1 + \gamma^2/r^2$, este resultado está na equação (5.60). O ângulo de deflexão da luz pode ser encontrado fazendo $v_\infty = 1$ na equação (5.60). Calculamos também a deflexão dessas partículas massivas no limite do receptor e fonte distantes da lente, apresentamos esse resultado em(5.61) e a deflexão da luz é encontrada fazendo $v_\infty = 1$ em (5.61).

Finalmente, nós estudamos a deflexão gravitacional para a solução com *redshift* $\exp(2\Phi(r)) = (1 + \beta D_i/r^2)^{-2/(1+1/\omega)}$. O ângulo de deflexão de partículas massivas foi apresentado na equação (5.65). O ângulo de deflexão da luz pode ser encontrado ao fazer $v_\infty = 1$. Quando consideramos o limite de receptore fonte distantes da lente gravitacional, o ângulo de deflexão de partículas massivas e da luz tornam-se as equações (5.66) e (5.67), respectivamente.

Nós temos como perspectivas futuras três linhas de pesquisa. A primeira delas é analisar a existência de um método de teste da Relatividade Geral por meio da separação entre partículas massivas e luz ao passar por uma lente gravitacional. A segunda é investigar se ao considerarmos as distâncias do sistema observador, lente gravitacional e fonte, a teoria de lentes gravitacionais possa fornecer resultados mais precisos. A terceira refere-se ao estudo de deflexão forte da luz e de partículas (veja [65] e as referências dele) e análises de retro lente. Retro lenteamento é uma configuração do sistema observador-fonte-lente tal que o ângulo de deflexão é $\alpha \sim \pi$. Existem muitos trabalhos de retro lenteamento considerando buracos negros e *black bounce*, veja [91,92] e as referências deles. Nós pretendemos estudar o efeito de retro lenteamento por meio do TGB.

REFERÊNCIAS

- [1] DOUGHTY, N. *Lagrangian interaction: an introduction to relativistic symmetry in electrodynamics and gravitation*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- [2] DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, v. 220, p. 291–333, 1920.
- [3] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1972. v. 67.
- [4] LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 2.
- [5] PADMANABHAN, T. *Gravitation: foundations and frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [6] MISNER, C. W. *et al.* Gravitation. [S.l.]: Macmillan, 1973.
- [7] ABBOTT, B. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [8] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, v. 875, n. 1, p. L1, 2019.
- [9] SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. *Gravitational lenses*. [S.l.]: Springer, 1992.
- [10] WAMBSGANSS, J. Gravitational lensing in astronomy. *Living Rev. Rel.*, v. 1, p. 12, 1998.
- [11] BARTELMANN, M. Gravitational lensing. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 27, n. 23, p. 233001, 2010.
- [12] INADA, N. *et al.* The sloan digital sky quasar lens search v. final catalog from seventh data release. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 143, n. 5, p. 119, 2012.
- [13] BEAULIEU, J.-P. *et al.* Discovery of a cool planet of 5.5 earth masses through gravitational microlensing. *Nature*, v. 439, p. 437–440, 2006.
- [14] GAUDI, B. *et al.* Discovery of a jupiter/saturn analog with gravitational microlensing. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 319, n. 5865, p. 927–930, 2008.
- [15] ALCOCK, C. *et al.* The MACHO project: microlensing results from 5.7 years of LMC observations. *Astrophys. J.*, v. 542, p. 281–307, 2000.
- [16] CHAKRABORTY, S.; SENGUPTA, S. Strong gravitational lensing: a probe for extra dimensions and Kalb- Ramond field. *JCAP*, v. 07, p. 045, 2017.
- [17] VIRBHADRA, K. S.; ELLIS, G. F. R. Schwarzschild black hole lensing. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 084003, 2000.

- [18] VIRBHADRA, K. S. Relativistic images of Schwarzschild black hole lensing. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 083004, 2009.
- [19] MOREL, L. *et al.* Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, v. 588, n. 7836, p. 61–65, 2020.
- [20] WEINBERG, S. The Making of the standard model. *Eur. Phys. J. C*, v. 34, p. 5–13, 2004.
- [21] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- [22] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 116002, 1998.
- [23] KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 69, p. 105009, 2004.
- [24] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. *Phys. Rev. D*, v. 71, p. 065008, 2005.
- [25] LUHM, R.; FUNG, S.-H.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous Lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 6, p. 065020, 2008.
- [26] BERTOLAMI, O.; PARAMOS, J. Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 4, p. 044001, 2005.
- [27] CASANA, R. *et al.* Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [28] LI, Z.; ÖVÇÜN, A. Finite-distance gravitational deflection of massive particles by a Kerr-like black hole in the bumblebee gravity model. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 2, p. 024040, 2020.
- [29] MALUF, R. V.; NEVES, J. C. S. Black holes with a cosmological constant in the bumblebee gravity. *Physical Review D*, 11 2020.
- [30] VISSER, M.; WORMHOLES, L. From Einstein to Hawking. *American Institute of Physics, New York*, 1996.
- [31] EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, v. 48, p. 73–77, 1935.
- [32] MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. Classical physics as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space. *Annals Phys.*, v. 2, p. 525–603, 1957.
- [33] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. v. 1.
- [34] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.

- [35] ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 14, p. 104–118, 1973.
- [36] BRONNIKOV, K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B*, v. 4, p. 251–266, 1973.
- [37] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, v. 56, p. 395–412, 1988.
- [38] TEO, E. Rotating traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 024014, 1998.
- [39] XU, Z. et al. Possibility of traversable wormhole formation in the dark matter halo with isotropic pressure. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 1, p. 70, 2020.
- [40] GAO, P.; JAFFERIS, D. L.; WALL, A. C. Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation. *JHEP*, v. 12, p. 151, 2017.
- [41] MALDACENA, J.; MILEKHIN, A. Humanly traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 6, p. 066007, 2021.
- [42] BORDAG, M. *et al.* Advances in the casimir effect. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 145.
- [43] SORGE, F. Quasi-local Casimir energy and vacuum buoyancy in a weak gravitational field. *Class. Quant. Grav.*, v. 38, n. 2, p. 025009, 2020.
- [44] LIMA, A. P. C. M. *et al.* Null Second Order Corrections to Casimir Energy in Weak Gravitational Field. *JCAP*, v. 07, p. 011, 2019.
- [45] LIMA, A. P. C. M.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Null Second Order Corrections to Casimir Energy in Weak Gravitational Field: the Schwinger's approach. *JCAP*, v. 01, p. 056, 2021.
- [46] CALLONI, E. *et al.* The Archimedes experiment. *Nucl. Instrum. Meth. A*, v. 824, p. 646–647, 2016.
- [47] KHABIBULLIN, A. R.; KHUSNUTDINOV, N. R.; SUSHKOV, S. V. Casimir effect in a wormhole spacetime. *Class. Quant. Grav.*, v. 23, p. 627–634, 2006.
- [48] BUTCHER, L. M. Casimir Energy of a Long Wormhole Throat. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 2, p. 024019, 2014.
- [49] SORGE, F. Casimir effect around an Ellis wormhole. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 29, n. 01, p. 2050002, 2019.
- [50] SANTOS, A. C. L.; MUNIZ, C. R.; OLIVEIRA, L. T. Casimir Effect in a Schwarzschild-Like Wormhole Spacetime. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 30, n. 05, p. 2150032, 2021.
- [51] MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Casimir Effect in space-times of rotating wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 3, p. 209, 2021.
- [52] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Phys. Rev. Lett.*, v. 61, p. 1446–1449, 1988.

- [53] GARATTINI, R. Casimir Wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 11, p. 951, 2019.
- [54] ALENCAR, G.; BEZERRA, V. B.; MUNIZ, C. R. Casimir Wormholes in (2+1) Dimensions with Applications to the Graphene. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 10, oct., 2021.
- [55] OLIVEIRA, P. H. F. *et al.* Traversable Casimir Wormholes in D Dimensions. *Modern Physics Letters A*, v. 37, n. 15, 2022.
- [56] MALDACENA, J.; MILEKHIN, A.; POPOV, F. Traversable wormholes in four dimensions. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1807.04726v1.pdf>.
- [57] JUSUFI, K.; CHANNUIE, P.; JAMIL, M. Traversable Wormholes Supported by GUP Corrected Casimir Energy. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 2, p. 127, 2020.
- [58] TRIPATHY, S. K. Modelling Casimir wormholes in extended gravity. *Phys. Dark Univ.*, v. 31, p. 100757, 2021.
- [59] TAWFIK, A. N.; DIAB, A. M. Review on Generalized Uncertainty Principle. *Rept. Prog. Phys.*, v. 78, p. 126001, 2015.
- [60] DAS, A. *et al.* Bounds on GUP parameters from GW150914 and GW190521. *Phys. Lett. B*, v. 819, p. 136429, 2021.
- [61] CARMO, M. P. D. *Differential geometry of curves and surfaces*: revised and updated second edition. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2016.
- [62] KLINGENBERG, W. *A course in differential geometry*. New York: Springer Science, 2013. v. 51.
- [63] GIBBONS, G.; WERNER, M. Applications of the gauss–bonnet theorem to gravitational lensing. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 25, n. 23, p. 235009, 2008.
- [64] ISHIHARA, A. *et al.* Gravitational bending angle of light for finite distance and the gauss-bonnet theorem. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 8, p. 084015, 2016.
- [65] ISHIHARA, A. *et al.* Finite-distance corrections to the gravitational bending angle of light in the strong deflection limit. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 4, p. 044017, 2017.
- [66] ONO, T.; ISHIHARA, A.; ASADA, H. Gravitomagnetic bending angle of light with finite-distance corrections in stationary axisymmetric spacetimes. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 10, p. 104037, 2017.
- [67] ONO, T.; ISHIHARA, A.; ASADA, H. Deflection angle of light for an observer and source at finite distance from a rotating wormhole. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 4, p. 044047, 2018.
- [68] ONO, T.; ISHIHARA, A.; ASADA, H. Deflection angle of light for an observer and source at finite distance from a rotating global monopole. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 12, p. 124030, 2019.
- [69] WERNER, M. Gravitational lensing in the Kerr-Randers optical geometry. *Gen. Rel. Grav.*, v. 44, p. 3047–3057, 2012.

- [70] JUSUFI, K. *et al.* Deflection of light by rotating regular black holes using the Gauss-Bonnet theorem. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 12, p. 124024, 2018.
- [71] ÖVGÜN, A. Light deflection by Damour-Solodukhin wormholes and Gauss-Bonnet theorem. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 4, p. 044033, 2018.
- [72] ÖVGÜN, A.; GYULCHEV, G.; JUSUFI, K. Weak Gravitational lensing by phantom black holes and phantom wormholes using the Gauss-Bonnet theorem. *Annals Phys.*, v. 406, p. 152–172, 2019.
- [73] ÖVGÜN, A. Weak field deflection angle by regular black holes with cosmic strings using the Gauss-Bonnet theorem. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 10, p. 104075, 2019..
- [74] GIBBONS, G. W. The Jacobi-metric for timelike geodesics in static spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, v. 33, n. 2, p. 025004, 2016.
- [75] CRISNEJO, G.; GALLO, E. Weak lensing in a plasma medium and gravitational deflection of massive particles using the Gauss-Bonnet theorem: a unified treatment. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 12, p. 124016, 2018.
- [76] LI, Z.; HE, G.; ZHOU, T. Gravitational deflection of relativistic massive particles by wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 4, p. 044001, 2020.
- [77] JUSUFI, K. Gravitational deflection of relativistic massive particles by Kerr black holes and Teo wormholes viewed as a topological effect. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 6, p. 064017, 2018.
- [78] JUSUFI, K. *et al.* Distinguishing rotating naked singularities from Kerr-like wormholes by their deflection angles of massive particles. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 1, p. 28, 2019.
- [79] LI, Z.; ZHANG, G.; ÖVGÜN, A. Circular Orbit of a Particle and Weak Gravitational Lensin. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 12, p. 124058, 2020.
- [80] SCHUTZ, B. A first course in general relativity. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [81] CHANDRASEKHAR, S. On the “derivation” of einstein’s field equations. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 2, p. 224–234, 1972.
- [82] NAKAHARA, M. Geometry, topology and physics. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- [83] BAHCALL, N. A. *et al.* The cosmic triangle: Revealing the state of the universe. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 284, n. 5419, p. 1481–1488, 1999.
- [84] KOTTLER, F. Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 361, n. 14, p. 401–462, 1918.
- [85] MÜLLER, T.; GRAVE, F. Catalogue of spacetimes. *arXiv preprint arXiv:0904.4184*, 2009.

- [86] CARVALHO, I. D. D.; ALENCAR, G.; MUNIZ, C. R. Gravitational bending angle with finite distances by Casimir wormholes. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 31, n. 03, p. 2250011, 2022.
- [87] CARVALHO, I. D. D. *et al.* The gravitational bending angle by static and spherically symmetric black holes in bumblebee gravity. *EPL*, v. 134, n. 5, p. 51001, 2021.
- [88] ONO, T.; ASADA, H. The effects of finite distance on the gravitational deflection angle of light. *Universe*, v. 5, n. 11, p. 218, 2019.
- [89] TAKIZAWA, K.; ONO, T.; ASADA, H. Gravitational deflection angle of light: Definition by an observer and its application to an asymptotically nonflat spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 10, p. 104032, 2020.
- [90] JAVED, W.; HAMZA, A.; ÖVGÜN, A. Weak deflection angle by Casimir wormhole using Gauss-Bonnet theorem and its shadow. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 35, n. 39, p. 2050322, 2020.
- [91] TSUKAMOTO, N. Gravitational lensing by using the 0th order of affine perturbation series of the deflection angle of a ray near a photon sphere. *Eur. Phys. J. C*, v. 83, n. 4, p. 284, 2023.
- [92] TSUKAMOTO, N. Retrolensing by two photon spheres of a black-bounce spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 8, p. 084036, 2022.
- [93] PRESSLEY, A. N. Elementary differential geometry. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- [94] TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. [S.l.]: Ed Edgard Blücher, 2008.
- [95] SOKOLNIKOFF, I. S. Tensor analysis: theory and applications. [S.l.]: Wiley, 1951.
- [96] ARFKEN, G.; WEBER, H. H. Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. [S.l.]: Elsevier, 2007.

APÊNDICE A – TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Neste apêndice busca-se apresentar alguns conceitos básicos sobre geometria diferencial, enunciar e demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet tanto na sua versão local quanto global. Além disso, serão feitas algumas aplicações simples para que o leitor possa compreender cada parte que constitui o teorema. Por meio deste teorema que é formulada a metodologia para o cálculo de deflexão da luz.

Este apêndice será baseado no livro "Differential Geometry of Curves and Surfaces" do professor Manfredo, [61]. Outras referências que irão auxiliar são os livros [62, 93, 94] onde este último é um ótimo livro para um primeiro contato com geometria diferencial, uma outra referência que fala sobre estes assuntos com um olhar mais intuitivo é [95] de análise tensorial.

As definições a seguir foram retiradas de [61], caso não seja desta referência será indicado.

A.1 Superfície Regular e Plano Tangente

Um conceito fundamental que estará presente em todo o apêndice é o de superfície e é definida por [61] como segue:

Definição 1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ e um mapa $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ que vai um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ para $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que:*

- 1 *\mathbf{x} é diferenciável. Isso significa que se $\mathbf{x}(q^1, q^2) = (x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2))$ onde $(q^1, q^2) \in U$, as funções $x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.*
- 2 *\mathbf{x} é um homeomorfismo. Como 1 garante que \mathbf{x} é contínuo, isso significa que \mathbf{x} tem uma inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua, ou seja, \mathbf{x}^{-1} é a restrição de um mapa contínuo $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em um conjunto aberto W contendo $V \cap S$*
- 3 *(Condição de regularidade.) Para cada $q \in U$, o mapa diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo.*

O mapeamento \mathbf{x} é dito uma parametrização de S . Usando esta parametrização é possível definir uma base vetorial local na superfície, esta base vetorial compõe o espaço tangente da superfície no ponto, vamos construir isso como segue.

Seja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ a base canônica do \mathbb{R}^2 com coordenadas (q^1, q^2) , e seja $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$ a base canônica do \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) . Seja $q = (q_0^1, q_0^2) \in U$, o vetor \mathbf{e}_1 é tangente a curva $q^1 = (q^1, q_0^2)$ cuja a imagem é

$$q^1 \rightarrow (x(q^1, q_0^2), y(q^1, q_0^2), z(q^1, q_0^2)), \quad (\text{A.1})$$

que é a curva imagem, chamada de curva coordenada $q^2 = q_0^2$, sobre S e tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^1}, \frac{\partial y}{\partial q^1}, \frac{\partial z}{\partial q^1} \right), \quad (\text{A.2})$$

as derivadas são computadas sempre no ponto q e o vetor (A.2) é dado de acordo com a base $\{f_1, f_2, f_3\}$. De modo análogo, o vetor \mathbf{e}_2 é tangente a curva $q^2 = (q_0^1, q^2)$ cuja a imagem é

$$q^2 \rightarrow (x(q_0^1, q^2), y(q_0^1, q^2), z(q_0^1, q^2)), \quad (\text{A.3})$$

onde (A.3) representa a curva coordenada $q^1 = q_0^1$ sobre S e o vetor tangente é

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^2}, \frac{\partial y}{\partial q^2}, \frac{\partial z}{\partial q^2} \right). \quad (\text{A.4})$$

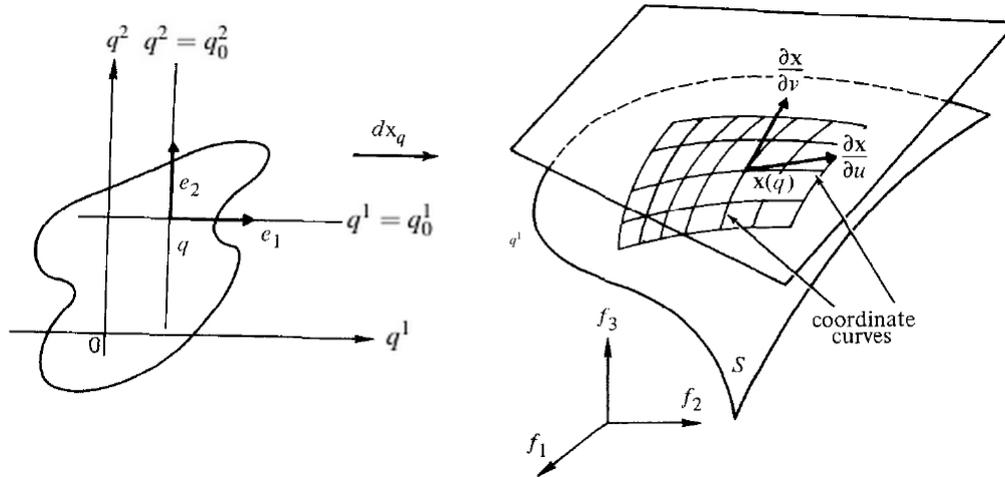
Uma definição importante que irá nos auxiliar é a seguinte

Definição 2 *Dada superfície parametrizada $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathbf{x} é um mapa diferenciável que vai de $U \subset \mathbb{R}^2$ para \mathbb{R}^3 . \mathbf{x} é regular se $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo para todo $q \in U$. Isso significa os vetores $\partial \mathbf{x} / \partial q^1$ e $\partial \mathbf{x} / \partial q^2$ são linearmente independentes para todo $q \in U$.*

De agora em diante derivadas parciais $\partial f / \partial x$ serão representadas por $\partial_x f$, caso sejam derivadas com relação as coordenadas representa-se por $\partial_{q^i} f = \partial_i f$ e também, baseado em [96] para a base do espaço tangente, $\partial_1 \mathbf{x} =: \varepsilon_1$ e $\partial_2 \mathbf{x} =: \varepsilon_2$. Com essas definições podemos associar a cada ponto $\mathbf{x}(q) \in S$ uma base local $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de um espaço vetorial. Tal espaço vetorial é o espaço tangente a S em $\mathbf{x}(q)$ e é representado por $T_{\mathbf{x}(q)}(S)$ e com isso qualquer vetor pertencente a $T_{\mathbf{x}(q)}(S)$ pode ser escrito como uma combinação linear da base local $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Observe a figura 3, onde foi modificado apenas os eixos de \mathbb{R}^2 para q^1, q^2 .

Note que o espaço tangente em um ponto $q \in S$ fica completamente definido desde que se conheça a parametrização, pois com ela pode-se construir a base deste espaço.

Figura 3 – Base vetorial local da superfície



Fonte: [61], modificado

A.2 Primeira Forma fundamental e métrica induzida

Agora será apresentado o conceito de Primeira forma fundamental da geometria diferencial que permite estudar características geométricas da superfície. Como de costume o desenvolvimento abaixo é baseado em [61] e partes em [95].

Inicia-se pelo fato de que S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Como o produto interno é bem definido em \mathbb{R}^3 basta induzir a noção de produto interno para o espaço tangente de cada ponto da superfície. Seja $\mathbf{x}(q) = p$, assim $T_p S$ é o espaço tangente do ponto $p \in S$, logo o produto interno induzido no espaço tangente $T_p S$ será representado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Dados dois vetores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ então o produto interno $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do \mathbb{R}^3).

Definição 3 A primeira forma quadrática I_p em $T_p S$ é chamada de primeira forma fundamental das superfícies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$. $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = |\mathbf{w}|^2 > 0. \quad (\text{A.5})$$

Como existe uma base para cada $T_p S$ pode-se reescrever os vetores de $T_p S$ como uma combinação linear da base e com isso efetuar o produto interno. Note que dada uma origem em \mathbb{R}^3 a parametrização \mathbf{x} de S é um vetor posição que varre os pontos da superfície. Logo tomando dois pontos pertencentes a S infinitesimalmente próximos, tome $p = \mathbf{x}(q)$ e $p + dp = \mathbf{x}(q + dq)$, e usando a regra da cadeia, o vetor que liga esses dois pontos e que pertence ao espaço tangente é dado por

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} dq^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 dq^1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 dq^2. \quad (\text{A.6})$$

Basta agora usar a primeira forma quadrática para calcular o quadrado dessa distância infinitesimal, assim

$$ds^2 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle (dq^1)^2 + 2 \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle dq^1 dq^2 + \langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle (dq^2)^2. \quad (\text{A.7})$$

Cabe agora introduzir algumas nomenclaturas e definir uma representação para os produtos internos acima. Da geometria riemanianna toma-se "emprestado" o conceito de métrica e define a chamada métrica induzida em S . Para isso tome a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle &=: h_{11} \\ \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle &=: h_{12} (= h_{21}) \\ \langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle &=: h_{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Onde h_{11}, h_{12}, h_{22} são chamadas de componentes da métrica induzida. Usando a convenção de Einstein que diz que índices repetidos de um dos lados da igualdade estão somados e o somatório é suprimido, a soma varre valores que são previamente conhecidos, no caso abaixo os índices tomam valores de 1 e 2. A equação (A.7), pode ser reescrita como

$$ds^2 = h_{ij} dq^i dq^j. \quad (\text{A.9})$$

Uma parametrização \mathbf{x} é dita ser ortogonal se $h_{12} = 0$ para todo $(q^1, q^2) \in U$. As vezes os h_{ij} são representados como uma matriz quadrada simétrica que tem determinante representado por $\det(h_{ij}) =: h$ e tem elementos de sua inversa denotados por $(h_{ij})^{-1} =: h^{ij}$.

A.3 Vetor Normal, Superfície Orientável

De posse do espaço tangente e sua base é possível definir a aplicação normal de Gauss, que associa a cada ponto p pertencente a S um vetor unitário normal a $T_p S$, diz que este vetor unitário normal é ortogonal a S em p .

Da geometria analítica sabe-se que o produto vetorial no \mathbb{R}^3 (representado por \wedge) de dois vetores resulta em um outro vetor que é ortogonal aos outros dois. Logo fazendo o produto vetorial dos dois vetores de base do espaço tangente de S em um ponto p pode-se obter o vetor que é normal a S em p , onde $p = \mathbf{x}(q)$ ($q \in U$). Seja $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, logo

$$\mathbf{N} = \frac{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2}{|\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2|}(q). \quad (\text{A.10})$$

Agora é conveniente definir o conceito de área de uma região pertencente a superfície. Uma região $R \subset S$ é a união de um domínio com seu bordo, uma região é dita limitada se pode ser envolvida por uma bola do \mathbb{R}^3 . Tome uma parametrização $\mathbf{x}(U) \rightarrow S$, tome R como contida dentro de uma vizinhança da parametrização, isso significa que existe $W \subset U$ uma região limitada de

U tal que a restrição $\mathbf{x}(W) = R$, logo $W = \mathbf{x}^{-1}(R)$.

Por outro lado é conhecido da geometria analítica que a norma do produto vetorial de dois vetores é numericamente igual a área do paralelogramo formado por eles, logo tomando o produto vetorial dos dois vetores de base do espaço tangente e integrando teremos a área da região. Pode-se definir área do seguinte modo

Definição 4 *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular contida dentro de uma vizinhança de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo*

$$A(R) = \int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2| dq^1 dq^2 \quad (\text{A.11})$$

é chamado de área da região R .

Esta definição tem fortes indicações para ser adotada, note que usando as operações de vetores no \mathbb{R}^3 é fácil mostrar que

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle^2. \quad (\text{A.12})$$

Reescrevendo em termos da métrica induzida é fácil ver que $|\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2| = \sqrt{h}$ e a definição de área torna-se:

$$A(R) = \int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{h} dq^1 dq^2. \quad (\text{A.13})$$

Um conceito importante que será necessário é o de superfície orientável. Define-se como

Definição 5 *Uma superfície regular S é orientável se é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças desta família, então a mudança de parâmetros tem jacobiano positivo. A escolha de uma família acima é chamada de uma orientação para S se for possível fazê-lo. Se não for possível escolher uma família a superfície é dita não orientável.*

Para que S seja orientável basta que exista o campo vetorial normal unitário $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínuo em toda a superfície.

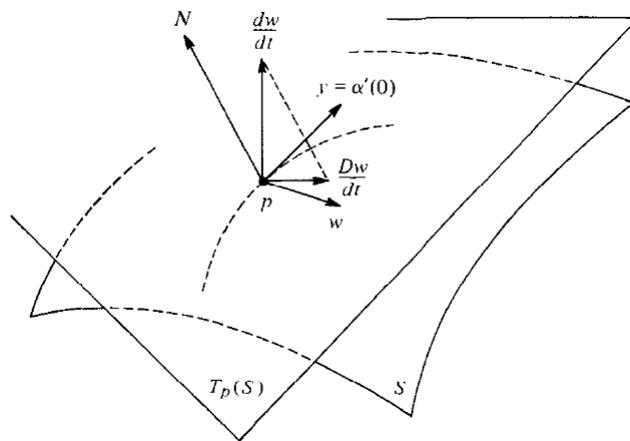
A.4 Derivada Covariante, Transporte Paralelo e Curvatura Geodésica

O conceito que será apresentado agora é o de Derivada Covariante, este conceito é fundamental pois é com ele que se define a curvatura geodésica de uma curva, esta por sua vez está presente no teorema de Gauss-Bonnet. Primeiro será dada uma definição geométrica da derivada covariante e após será apresentado uma forma de calcular esta quantidade.

Definição 6 Seja \mathbf{w} um campo vetorial diferenciável em um aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $\mathbf{y} \in T_p S$. Considere a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ com $\alpha(0) = p$ e $\mathbf{y} = d\alpha/dt(0)$. Seja $\mathbf{w}(t)$ a restrição de $\mathbf{w} : (-\varepsilon, \varepsilon)$ a curva α . O vetor obtido pela projeção de $d\mathbf{w}/dt$ no plano tangente $T_p S$ é chamado de derivada covariante em p do vetor \mathbf{w} relativo a \mathbf{y} . Denotado por $D\mathbf{w}/dt(0)$.

Note que a superfície S está contida no \mathbb{R}^3 logo a derivação de campos vetoriais diferenciáveis é bem definida. Derivar um campo vetorial sobre a superfície não garante que este novo vetor pertença ao espaço tangente no ponto, esta definição está dizendo que deve-se pegar apenas a componente deste novo vetor que pertence ao espaço tangente. Observe a figura 4.

Figura 4 – Derivada Covariante



Fonte: [61]

Agora mostra-se como calcula a derivada covariante de um campo vetorial com relação a outro e também que as componentes independem da curva α , de modo que a derivada covariante seja um conceito intrínseco.

A derivada parcial de um vetor de base do espaço tangente pode ser escrita como uma combinação linear da própria base, pois pela definição de derivada covariante caso apareça alguma parte que não pertença ao espaço tangente basta tomar a projeção desta parte sobre ele. Assim pode-se escrever

$$\nabla_i \varepsilon_j = \Gamma_{ij}^k \varepsilon_k, \quad (\text{A.14})$$

onde i, j, k assumem os valores $\{1, 2\}$, Γ_{ij}^k são conhecidos como símbolos de Christoffel de segunda espécie, ou coeficiente de conexão, e ∇_i representa a derivada parcial com relação a coordenada i do vetor de base ε projetada no espaço tangente. Como $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle_p = h_{ij}$ de acordo com os coeficientes da métrica induzida que pode ser visto em (A.8) é fácil mostrar usando a

(A.14) que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} [\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}]. \quad (\text{A.15})$$

Assim, os símbolos Γ_{ij}^k dependem só da primeira forma diferencial, ou seja, da métrica induzida (h_{ij}). Com isso, pode-se obter a derivada covariante do campo vetorial $\mathbf{w} = w^i \boldsymbol{\varepsilon}_i$. Note que tanto as componentes w^i quanto a base são funções das coordenadas (q^1, q^2) que por sua vez são funções do parâmetro da curva t . Logo derivando \mathbf{w} e usando (A.14), além de notar o fato que a derivada de \mathbf{w} no plano tangente é a própria derivada covariante de \mathbf{w} ,

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw^i}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}_i + w^i \Gamma_{li}^k \frac{dq^l}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (\text{A.16})$$

Usando o fato de que no ultimo termo do lado direito os índices k e i são mudos (estão somados) então pode-se permuta-los e notando que de acordo com a definição $dq^i/dt = y^i$ pode-se reescrever (A.16) como

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \left[\frac{dw^i}{dt} + w^k \Gamma_{lk}^i y^l \right] \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (\text{A.17})$$

Observe que a derivada covariante não depende da curva e é um conceito intrínseco. Outra definição importante é o de transporte paralelo. Primeiro se define o conceito de campo paralelo ao longo de uma curva.

Definição 7 Um campo \mathbf{w} sobre uma curva parametrizada $\alpha(t) : I \rightarrow S$ é dito paralelo se para todo $t \in I$ a derivada covariante é nula ($D\mathbf{w}/dt = 0$).

Com isso pode-se definir transporte paralelo de um vetor sobre uma curva.

Definição 8 Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $\mathbf{w}_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Desde que \mathbf{w} seja paralelo ao longo de α , com $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$. O vetor \mathbf{w}_1 , $t_1 \in I$, é chamado de transporte paralelo de \mathbf{w}_0 ao longo de α até o ponto t_1 .

Esta definição pode ser compreendida de modo direto no caso euclidiano. Por exemplo, pense em um campo vetorial no \mathbb{R}^2 , como os símbolos de Christoffel são nulos a derivada covariante é a derivadas simples do vetor com relação ao parâmetro da curva. Como a derivada covariante do campo vetorial é nula, este campo é um campo constante que é transportado por toda a curva apenas trasladando ele.

Convém agora definir a derivada covariante de um campo vetorial unitário ao longo de uma curva pertencente a uma superfície orientada em termos de um vetor unitário e seu módulo. Para isso, será apresentada a definição de derivada covariante

Definição 9 Seja \mathbf{w} um campo de velocidades unitário(unitário significa que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 1$ para todo ponto onde o campo está definido) ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, onde S é uma

superfície orientável. Desde que $\mathbf{w}(t), t \in I$, é um vetor unitário, $d\mathbf{w}/dt$ é normal a \mathbf{w} e desta forma

$$\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \lambda(t)(\mathbf{N} \wedge \mathbf{w}), \quad (\text{A.18})$$

onde $\lambda(t) = [D\mathbf{w}/dt]$ é o valor algébrico da derivada covariante de \mathbf{w} em t .

Note que \mathbf{N} é o vetor normal a superfície no ponto, logo a derivada covariante é ortogonal tanto a \mathbf{N} quando a \mathbf{w} .

Agora pode-se definir o conceito de curvatura geodésica que é análogo a curvatura de uma curva plana

Definição 10 *Seja C uma curva regular e orientada contida em uma superfície também orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C por comprimento de arco na vizinhança de $p \in S$. O valor algébrico da derivada covariante $[D\alpha'/ds] = \kappa_g$ de $\alpha'(s)$ em p é a chamada curvatura geodésica de C em p .*

Pode-se definir geodésicas por curvas que tenham curvatura geodésica nula, $\kappa_g = 0$, se $\alpha(s) = \alpha^i \varepsilon_i$, pode-se facilmente encontrar a equação da geodésica, a saber

$$\frac{d^2 \alpha^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\alpha^j}{ds} \frac{d\alpha^k}{ds} = 0. \quad (\text{A.19})$$

A partir de agora será apresentada uma forma de calcular o valor algébrico da derivada covariante e com isso encontrar a curvatura geodésica.

Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} dois campos vetoriais unitários ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. Busca-se definir uma função $\varphi : I \rightarrow S$ tal que $\varphi, t \in I$ determina o ângulo de \mathbf{v} para \mathbf{w} na orientação de S . Considere também $\bar{\mathbf{v}}$ ao longo de α de modo que $\{\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $t \in I$. Logo, para todo ponto \mathbf{w} pode ser escrito nessa base como

$$\mathbf{w}(t) = a(t)\mathbf{v}(t) + b(t)\bar{\mathbf{v}}(t) \quad \leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (\text{A.20})$$

Para definir este ângulo, basta fixa-lo em um ponto e estender ele por todo o intervalo de acordo com o lema abaixo

Lema 1 *Sejam a e b duas funções diferenciáveis em I , $a^2 + b^2 = 1$, e φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Então a função diferenciável*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - a'b) dt \quad (\text{A.21})$$

é tal que $a(t) = \cos \varphi$, $b(t) = \sin \varphi$, $t \in I$, e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Prova: É suficiente mostrar que $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$. Usando o fato de $a^2 + b^2 = 1$ que implica em $aa' + bb' = 0$, basta agora derivar A . Derivando encontra-se que $A' = 0$ o que

mostra que A é constante. Como $A'=0$ implica que $a^2 + b^2 = 1$ então $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$.
(Q.E.D.)

Pode-se relacionar as derivadas covariantes de dois vetores por meio do ângulo formado entre eles. Veja o lema abaixo.

Lema 2 *Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} dois campos vetoriais diferenciáveis unitários ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$, então*

$$\left[\frac{D\mathbf{v}}{dt} \right] = \left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}, \quad (\text{A.22})$$

onde φ é dado pelo lema 1.

Prova: *Sejam $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{v}$ e $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{w}$. Logo, escrevendo \mathbf{w} na base $\{\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}\}$*

$$\mathbf{w} = \cos \varphi \mathbf{v} + \sin \varphi \bar{\mathbf{v}}, \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \cos \varphi \mathbf{N} \wedge \mathbf{v} + \sin \varphi \mathbf{N} \wedge \bar{\mathbf{v}}, \quad (\text{A.24})$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \cos \varphi \bar{\mathbf{v}} - \sin \varphi \mathbf{v}. \quad (\text{A.25})$$

Notando que $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 0$, e $\langle \mathbf{v}', \bar{\mathbf{v}} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}' \rangle$. Ao derivar \mathbf{w} e tomar o produto interno com $\bar{\mathbf{w}}$ fornecido por (A.25) é fácil ver que

$$\langle \mathbf{w}', \bar{\mathbf{w}} \rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \langle \mathbf{v}', \bar{\mathbf{v}} \rangle. \quad (\text{A.26})$$

Por fim, olhando a definição de valor algébrico da derivada covariante a (A.26) se torna

$$\left[\frac{D\mathbf{v}}{dt} \right] = \left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

(Q.E.D.)

A proposição a seguir permite computar o valor algébrico da derivada covariante ao longo de uma curva com parametrização ortogonal apenas conhecendo as componentes da métrica induzida.

Proposição 1 *Seja $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ uma parametrização ortogonal ($h_{12} = 0$) de uma vizinhança em S orientada, e $\mathbf{w}(t)$ um campo de velocidades unitário ao longo de $\mathbf{x}(q^1(t), q^2(t))$, então*

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}, \quad (\text{A.27})$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo que ε_1 faz com \mathbf{w} de acordo com a orientação.

Prova: A princípio ε_i , para $i = 1, 2$ não é unitário, usando a ortogonalidade pode-se definir o unitário dele como $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / \sqrt{h_{ii}}$. Além disso, $\hat{\varepsilon}_1 \wedge \hat{\varepsilon}_2 = \mathbf{N}$, onde \mathbf{N} é dado pela orientação de S e $\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \mathbf{N}\}$ forma uma base local positivamente orientada. Usando o lema 2, pode-se escrever

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \left[\frac{D\hat{\varepsilon}_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{A.28})$$

Analisando o primeiro termo do lado direito pode-se escrever pela definição de valor algébrico da derivada covariante que

$$\left[\frac{D\hat{\varepsilon}_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{d\hat{\varepsilon}_1}{dt}, \mathbf{N} \wedge \hat{\varepsilon}_1 \right\rangle = \left\langle \frac{d\hat{\varepsilon}_1}{dt}, \hat{\varepsilon}_2 \right\rangle = \langle \partial_1 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle \frac{dq^1}{dt} + \langle \partial_2 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle \frac{dq^2}{dt}. \quad (\text{A.29})$$

Note que, derivando $h_{11} = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$ com relação a q^2 e usando o fato que $\partial_i \varepsilon_j = \partial_j \varepsilon_i$, tem-se que

$$\frac{1}{2} \partial_2 h_{11} = \langle \partial_2 \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle \partial_1 \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = \partial_1 \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle - \langle \partial_1 \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle,$$

lançando mão de que $h_{12} = 0$, conclui-se

$$\langle \partial_1 \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = -\frac{1}{2} \partial_2 h_{11}. \quad (\text{A.30})$$

Agora pode-se substituir $\varepsilon_i = \sqrt{h_{ii}} \hat{\varepsilon}_i$. Assim,

$$\langle \partial_1 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \partial_2 h_{11}. \quad (\text{A.31})$$

De modo análogo

$$\langle \partial_2 \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{h}} \partial_1 h_{22}. \quad (\text{A.32})$$

Substituindo (A.31) e (A.32) em (A.30)

$$\left[\frac{D\mathbf{w}}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Assim a proposição está demonstrada. (Q.E.D)

Com esta proposição pode-se apresentar a curvatura geodésica apresentada na definição 8 usando $\mathbf{w} = \alpha'(s)$, a saber

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{dt} - \partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{A.33})$$

A.5 Tensor Curvatura, Teorema Egregium de Gauss e Curvatura Total

Nesta secção será apresentado de maneira heurística o conceito de curvatura gaussiana de uma superfície, apresentar o teorema Egregium e por fim definir a curvatura gaussiana

por meio do tensor curvatura usando uma definição encontrada em [95].

Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ existem dois tipos de curvaturas. Uma é a curvatura média e está relacionada com a propriedades da superfície quando estudada como estando imersa no \mathbb{R}^3 . A outra é a curvatura gaussiana ou curvatura total que fornece informação da superfície por si só e é uma característica intrínseca. Um exemplo simples é o caso de um cilindro reto imerso no \mathbb{R}^3 . Observando esta superfície como imersa no \mathbb{R}^3 é fácil deduzir que ela tem alguma curvatura, pois de fato ela não é um plano, e a curvatura média dessa superfície é realmente diferente de zero.

Agora observando este mesmo cilindro de forma intrínseca e levando em consideração que um cilindro reto nada mais é do que um plano enrolado pode ver que as características como distâncias entre dois pontos são iguais, ou seja, de modo intrínseco uma região do cilindro é equivalente a um plano, deste modo pode-se mostrar que a curvatura total é nula.

Convém apresentar o Teorema Egregium de Gauss, egregium vem do latim e significa excelente. O fato da curvatura total ser intrínseca a superfície é algo notável, pois não era esperado que fosse, por isso Gauss nomeou o teorema como egregium, "teorema notável". Em [61] este teorema é definido como segue.

Teorema 1 (*Teorema Egregium de Gauss*) *A Curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S e $p \in S$. Se $\varphi : V \subset S \rightarrow S$, onde $V \subset \mathbf{x}(U)$ é a vizinhança do ponto p , é uma isometria local em p , então $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi$ é uma parametrização de S em $\varphi(p)$. Desde que φ seja uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental (ou seja, as componentes da métrica induzida) nas parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} concordam nos pontos q e $\varphi(q)$. Como os coeficientes da métrica induzida concordam os coeficientes de conexão também concordam pois são função dos h_{ij} de acordo com (A.15). A descoberta de Gauss é que a curvatura gaussiana é função só da primeira forma fundamental, pois antes deste teorema ela era função da primeira e segunda formas fundamentais. Mais detalhes podem ser encontrados em [61].

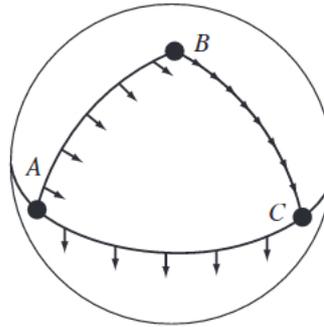
Agora será apresentado o tensor curvatura e será dado uma definição para a curvatura total.

Uma maneira de encontrar o tensor curvatura é transportando um vetor via transporte paralelo por dois caminhos distintos que possuam a origem e final em comum. O vetor no final depende do caminho que foi adotado se o espaço tiver alguma curvatura. Note o exemplo retirado de [80] abaixo.

Tome três caminhos, arcos de grandes círculos, sobre uma esfera. Tome um vetor

transportado paralelamente pelo ponto $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. De acordo com a figura 5 pode-se ver de forma clara que após o vetor ser transportado por este caminho ele é diferente do vetor inicial, isto se dá pelo fato do espaço ter curvatura gaussiana não nula.

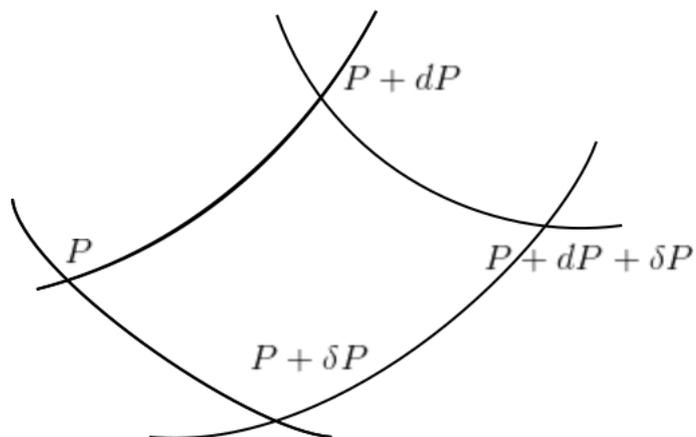
Figura 5 – Transporte paralelo sobre caminho fechado



Fonte: [80]

Para que seja possível encontrar uma forma para o tensor curvatura em função dos coeficientes da métrica induzida, o que será feito aqui é tomar dois caminhos infinitesimais de um ponto P até um ponto $P + dP + \delta P$ sobre uma superfície S com uma parametrização \mathbf{x} . Observe a figura 6. Tome um vetor \mathbf{A} com componentes A^i em P e transporte \mathbf{A} paralelamente

Figura 6 – Transporte paralelo sobre caminhos distintos



Fonte: Elaborado pelo autor

pelos caminhos $C_1 : P \rightarrow P + dP \rightarrow P + dP + \delta P$ e $C_2 : P \rightarrow P + \delta P \rightarrow P + dP + \delta P$. Faz-se agora uma investigação sobre a diferença do vetor \mathbf{A} transportado paralelamente pelos dois caminhos. Transportando paralelamente o vetor \mathbf{A} pelo caminho C_1 , tomando variações até

ordem dois, $O_2(dq\delta q)$, e tomando $\Gamma_{mn}^l(P+dP) = \Gamma_{mn}^l(P) + \partial_k \Gamma_{mn}^l(P)dq^k$, obtém-se

$$C_1 : A^i(P+dP+\delta P) = A^i - \Gamma_{kl}^i A^k dq^l - A^m \Gamma_{mn}^i \delta q^n - A^m \partial_r \Gamma_{mn}^i dq^r \delta q^n + A^k dq^l \delta q^n \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mn}^i \quad (\text{A.34})$$

Analogamente transportando o vetor \mathbf{A} pelo caminho C_2 , tem-se

$$C_2 : A^i(P+dP+\delta P) = A^i - A^k \Gamma_{kl}^i dq^l - A^m \Gamma_{mn}^i \delta q^n - A^k \delta q^r dq^l \partial_r \Gamma_{kl}^i - A^k \delta q^r dq^l \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i \quad (\text{A.35})$$

Tomando a diferença do vetor \mathbf{A} , ΔA^i , pelos dois caminhos e organizando os índices mudos é fácil obter

$$\Delta A^i = (\partial_r \Gamma_{kl}^i - \partial_l \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i) A^k dq^l \delta q^r. \quad (\text{A.36})$$

O termo entre parenteses é conhecido como tensor curvatura e é denotado por R_{krl}^i , assim

$$R_{krl}^i := \partial_r \Gamma_{kl}^i - \partial_l \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ml}^i. \quad (\text{A.37})$$

Agora é conveniente apresentar este tensor como contraído com a métrica induzida, note

$$R_{ijkl} := h_{in} R_{jkl}^n. \quad (\text{A.38})$$

Definindo o símbolo de Christoffel de primeira espécie $\Gamma_{ijk} := \frac{1}{2}(\partial_j h_{ki} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk})$, os dois últimos índices são simétricos, pode-se reescrever a equação (A.38) como

$$R_{ijkl} = \partial_k \Gamma_{ijl} - \partial_l \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jk}^n \Gamma_{nli} - \Gamma_{jl}^n \Gamma_{nki}. \quad (\text{A.39})$$

Como de costume os índices variam de 1 a 2. Pode-se definir a curvatura gaussiana de acordo com [95]:

$$K = \frac{R_{1212}}{h} = \frac{\partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma_{21}^n \Gamma_{n21} - \Gamma_{22}^n \Gamma_{n11}}{h}. \quad (\text{A.40})$$

Os outros componentes são nulos, observe $R_{1111} = R_{2222} = 0$. Esta curvatura gaussiana está de acordo com [61] e pode ser encontrada na seção denominada *The Gauss theorem and the Equations of Compatibility* e pode ser encontrado em [95]. Com a equação (A.40) pode-se encontrar a curvatura gaussiana para uma parametrização \mathbf{x} ortogonal, $h_{12} = 0$, desenvolvendo esta equação usando o fato de que $h = h_{11}h_{22}$ e $h^{ii} = h_{ii}^{-1}$ encontra-se

$$K = -\frac{1}{2h_{11}h_{22}} \left\{ \left[\partial_{22} h_{11} - \frac{1}{2} \partial_2 h_{11} \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{h_{11}} + \frac{\partial_2 h_{22}}{h_{22}} \right) \right] + \left[\partial_{11} h_{22} - \frac{1}{2} \partial_1 h_{22} \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{h_{22}} + \frac{\partial_1 h_{11}}{h_{11}} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.41})$$

Ainda pode-se simplificar esta expressão por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ \partial_2 \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right) \right\}. \quad (\text{A.42})$$

Esta última equação fornece a curvatura gaussiana em termo dos componentes da métrica induzida na superfície por uma parametrização ortogonal.

O desenvolvimento realizado nesta seção foi, apesar de preciso, superficial. Um estudo mais aprofundado sobre as curvaturas de uma superfície pode ser encontrado nas referências dadas no início deste apêndice.

A.6 Teorema de Gauss-Bonnet

Antes de começar esta seção convém citar uma frase presente em [61] que mostra a grandiosidade do *Teorema de Gauss-Bonnet*, o autor diz que o *Teorema de Gauss-Bonnet* é provavelmente o teorema mais importante no estudo de geometria diferencial de superfícies.

Esta é a seção mais importante do apêndice. Porém, fez-se necessário apresentar todo o exposto acima, mesmo que de forma rápida. Esta seção, não diferenciando-se das outras, será baseada em [61]. Antes de enunciar o teorema nas suas duas versões é preciso ainda definir mais algumas entidades que são apresentadas abaixo.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ um mapa contínuo de um intervalo fechado $[0, l]$. Este mapa é chamado de curva parametrizada simples, fechada e regular por partes se

- $\alpha(0) = \alpha(l)$, (curva fechada)
- $t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in [0, l] \rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ (sem auto-interseção)
- Existe uma subdivisão

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$$

de $[0, l]$, tal que α é diferenciável e regular ($\alpha'(t) \neq 0$) em todo intervalo do tipo $[t_i, t_{i+1}]$; $i = 0, \dots, k$ e $\alpha'(t)$ é bem definido exceto em um número finito de pontos.

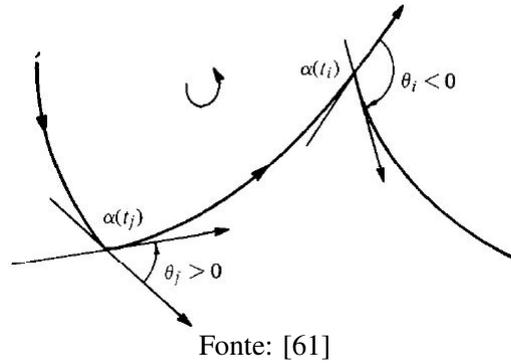
Os pontos $\alpha(t_i)$ ($i = 0, \dots, k$) são chamados de vértices da curva α , $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são os arcos regulares da curva α e $\alpha([0, l])$ é chamado de curva fechada regular por partes. Convém investigar os vértices e definir os ângulos externos da curva.

Por regularidade, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe limite pela direita e esquerda de $\alpha'(t_i)$. Tome $\varepsilon > 0$ infinitesimal:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) &= \alpha'(t_i^-) \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) &= \alpha'(t_i^+) \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Tome S orientada e seja $\theta_i, 0 < |\theta_i| \leq \pi$, o menor ângulo formado por $\alpha'(t_i^-)$ até $\alpha'(t_i^+)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$ o sinal de θ_i é dado por $\det(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), \mathbf{N})$. Ou seja, se $\alpha'(t_i)$ não é um bico o sinal de θ_i é dado pela orientação de S . Os ângulos θ_i são chamados de ângulos externos dos vértices $\alpha'(t_i)$. Observe a figura 7.

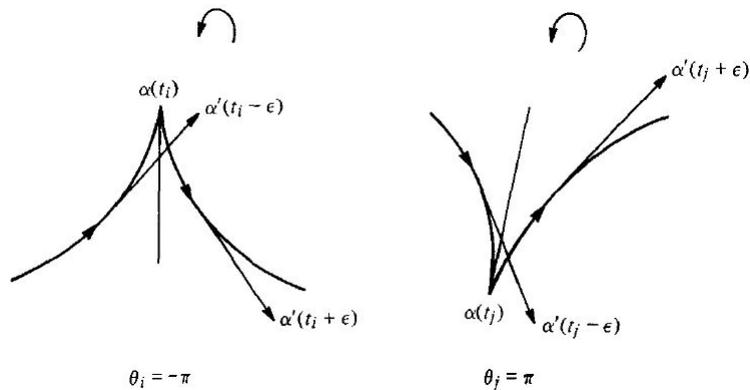
Figura 7 – Ângulos externos



Fonte: [61]

Se $\alpha(t_i)$ for um vértice que forma um "bico", $|\theta_i| = \pi$, escolhe-se θ_i do seguinte modo. Por regularidade, existe $\epsilon' > 0$ tal que $\det(\alpha'(t_i - \epsilon), \alpha'(t_i + \epsilon), \mathbf{N})$ não muda de sinal para todo $0 < \epsilon < \epsilon'$. O determinante dá o sinal de θ_i . Observe a figura 8.

Figura 8 – Ângulo externo no caso do vértice ser um "bico"



Fonte: [61]

Seja $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que fornecem para cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de ϵ_1 para $\alpha'(t)$, de acordo com o lema 1, página 31.

Alguns fatos vindos da topologia serão apresentados sem prova, pois as demonstrações fogem do escopo deste trabalho. Um fato que será preciso para demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet na sua versão local é o "Teorema do Índice de Rotação".

Teorema 2 (Teorema do Índice de Rotação) De acordo com as definições acima

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi, \tag{A.44}$$

em que \pm é de acordo com a orientação de α .

Este teorema diz que a variação total do ângulo dos vetores tangentes de α com uma direção dada mais a soma dos ângulos externos dos vértices é 2π . Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [62].

Outro teorema importante e que deve ser conhecido de todo aluno que possui conhecimento de cálculo diferencial e integral é o *Teorema de Gauss-Green*.

Teorema 3 (*Teorema de Gauss-Green*) Se $P(q^1, q^2)$ e $Q(q^1, q^2)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, e com o contorno dado por $q^1 = q^1(s)$ e $q^2 = q^2(s)$, então

$$\sum_{i=0}^k \int_i^{s_{i+1}} \left[P \frac{dq^1}{ds} + Q \frac{dq^2}{ds} \right] ds = \int \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial q^1} - \frac{\partial P}{\partial q^2} \right) dq^1 dq^2. \quad (\text{A.45})$$

Tanto a demonstração quanto exercícios sobre este teorema podem ser encontrados em [?] ou em [?]. Por fim, uma região $R \subset S$ é chamada de região simples se ela é homeomorfa ao disco e seu bordo é o traço de uma curva parametrizada simples, regular por partes e fechada.

Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S compatível com a orientação e seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples de S . Se f é uma função diferenciável em S , então escolhida a orientação de \mathbf{x} a integral

$$\int \int_{W=\mathbf{x}^{-1}(R)} f(q^1, q^2) \sqrt{h} dq^1 dq^2 \quad (\text{A.46})$$

independe da parametrização. A integral de f sobre a região R é denotada por

$$\int \int_R f d\sigma, \quad (\text{A.47})$$

onde $d\sigma$ é o elemento infinitesimal de área.

Com todo o exposto acima pode-se enunciar o teorema de Gauss-Bonnet na sua versão local.

Teorema 4 *TEOREMA DE GAUSS-BONNET (LOCAL)*. Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal, $h_{12} = 0$, de uma superfície orientada S , $U \in \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e \mathbf{x} é compatível com a orientação da superfície S . Seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$, tal que $\partial R = \alpha(I)$. Assumindo que α é positivamente orientada, parametrizado por comprimento de arco s , e seja $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e ângulos externos de α . Então

$$\int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i}(s) ds + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad (\text{A.48})$$

onde K é a curvatura gaussiana da superfície S e $\kappa_g(s)$ é a curvatura geodésica do arco regular da curva α .

Antes de partir para a demonstração do teorema vale ressaltar que a parametrização ser ortogonal é apenas para simplificar a demonstração deste e como se pode ver a equação (A.48) não depende de parametrização. Com isso pode-se ir para a demonstração.

Demonstração: Como a parametrização é ortogonal, pode-se usar a equação (A.42) e (A.46) de modo que

$$\int \int_R K d\sigma = -\frac{1}{2} \left\{ \partial_2 \left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right) \right\} dq^1 dq^2. \quad (\text{A.49})$$

Agora usando a equação (A.45) do Teorema de Gauss-Green com

$$P = -\left(\frac{\partial_2 h_{11}}{\sqrt{h}} \right), \\ Q = \left(\frac{\partial_1 h_{22}}{\sqrt{h}} \right).$$

Obtém-se que

$$\int \int_R K d\sigma = -\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{h}} \left\{ -\partial_2 h_{11} \frac{dq^1}{ds} + \partial_1 h_{22} \frac{dq^2}{ds} \right\} ds. \quad (\text{A.50})$$

Agora usando a equação da curvatura geodésica dada por (A.33)

$$\int \int_R K d\sigma = -\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i}(s) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (\text{A.51})$$

Note que pode-se usar o teorema fundamental do cálculo e após usar o teorema do índice de rotação no ultimo termo do lado direito. Como α está orientado positivamente,

$$\int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_{g_i} ds + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Que está de acordo com a equação (A.48) e com isso o teorema está demonstrado. (Q.E.D.)

Com o teorema local demonstrado serão fornecidos alguns fatos topológicos e definições para que seja possível apresentar e demonstrar o teorema de forma global.

Seja S uma superfície regular. Uma região $R \subset S$ é dita regular se R é compacta e se o seu contorno é formado por uma união finita de curvas simples e regular por partes que não se intersectam.

Um triângulo é uma região simples que possui apenas três vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, ($i = 1, 2, 3$).

Uma triangulação de uma superfície regular R é uma decomposição em triângulos, uma família finita de triângulos $\{T_i\}_{i=1}^N$, tal que

- $R = \bigcup_{i=1}^N T_i$.
- Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, então é um vértice ou uma aresta em comum. Os triângulos que compõem uma triangulação não se sobrepõem.

Dada uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S . Será usada a seguinte notação: F é o número de faces (como cada triângulo possui uma face F também será o número de triângulos), V é o número de vértices, A é o número de arestas. A característica de Euler-Poincaré de uma triangulação é representada por χ e é calculada do seguinte modo:

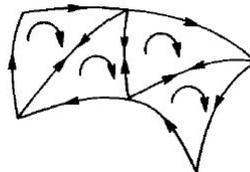
$$\chi = F - A + V. \quad (\text{A.52})$$

Um estudo mais preciso em topologia e característica de Euler-Poincaré pode ser visto em [82]. Faz-se necessário apresentar quatro proposições sem demonstração retiradas de [61]. As proposições são

Proposição 2 *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 3 *Seja S uma superfície orientada e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, a família de parametrizações com orientação compatíveis com a orientação de S . Seja $R \subset S$ uma região regular de S . Então existe uma triangulação tal que todo triângulo está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$. E se o contorno de todo triângulo é positivamente orientado, triângulos adjacentes tem orientações opostas em arestas em comum. Observe a figura 9.*

Figura 9 – Triângulos adjacentes com aresta comum com orientação oposta



Fonte: [61]

Proposição 4 *Se $R \subset S$ é uma região regular da superfície S , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R . Denota-se convenientemente $\chi = \chi(R)$.*

Por fim, considere uma região R regular contida em uma superfície orientável S e seja \mathbb{T} uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_j \in \mathbb{T}$, $j = 1, \dots, k$, está contido em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}_j(U_j)$ de uma família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatível com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S , a integração de f sobre a região R não depende da triangulação em do mapeamento de acordo com a seguinte proposição

Proposição 5 De acordo com a notação acima, a soma

$$\sum_{i=0}^k \int \int_{\mathbf{x}_j^{-1}(T_j)} f(q_j^1, q_j^2) \sqrt{h_j} dq_j^1 dq_j^2$$

não depende da triangulação \mathbb{T} ou da família $\{\mathbf{x}_j\}$ de parametrização de S

Ou seja, esta soma tem o significado geométrico da integral sobre a região regular R da função f . Com isso pode-se enunciar o teorema de forma global.

Teorema 5 TEOREMA DE GAUSS-BONNET (GLOBAL). *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e C_1, \dots, C_n as curvas fechadas simples e regulares por partes que formam o bordo ∂R de R . Supondo que cada C_i é positivamente orientado e seja $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então*

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=0}^p \theta_l = 2\pi\chi(R), \quad (\text{A.53})$$

aqui s denota os comprimentos de arco de C_i , e as integrais sobre C_i representa a soma das integrais sobre os arcos regulares de C_i .

Demonstração: *Pela proposição 3, considere uma triangulação onde cada triângulo esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais. Deste modo, se cada triângulo está positivamente orientado as arestas que são comuns a triângulos adjacentes tem orientações opostas.*

Pode-se usar o Teorema de Gauss-Bonnet local em cada triângulo da triangulação e somar os resultados usando a proposição 5 e como cada aresta interior terá duas orientações que são opostas, obtém-se

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F, \quad (\text{A.54})$$

onde F denota o número de faces, ou triângulos, da triangulação \mathbb{T} e para cada triângulo T_j existem os três ângulos externos $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$.

Definindo por $\phi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ os ângulos internos da triangulação T_j , pode-se escrever que

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 (\pi - \phi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_{jk}. \quad (\text{A.55})$$

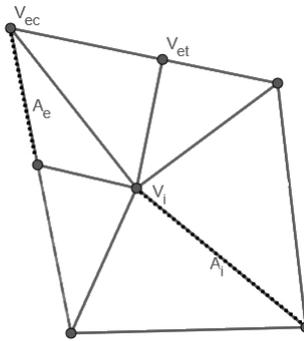
Agora é importante usar uma notação que segue abaixo,

- A_e representa o número de arestas externas

- A_i representa o número de arestas internas
- V_e representa o número de vértices externos
- V_i representa o número de vértices internos

Os vértices externos se subdividem, $V_e = V_{et} + V_{ec}$, onde V_{et} são os vértices devido a triangulação e V_{ec} são os devido as curvas que formam o contorno da região. Para compreender melhor a notação acima, veja a figura 10. Um fato simples de se verificar é que se uma curva

Figura 10 – identificação de arestas e vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor.

C_i é fechada, então $A_e = V_e$. E pode-se provar por indução que

$$3F = 2A_i + A_e. \quad (\text{A.56})$$

Para um esboço da demonstração veja o Apêndice B. Antes de retomar a equação (A.54) convém analisar a soma dos ângulos interno. Com o auxílio da figura 10 para que se possa ter uma noção é fácil ver que para cada vértice interno a soma dos ângulos internos ao redor dele é 2π , para cada vértice externo da triangulação a soma dos ângulos internos ao redor dele é π e para cada vértice externo da curva o ângulo interno dele é por definição π menos o ângulo externo. Somando todas as parcelas,

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_{jk} = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \pi V_{ec} - \sum_{l=1}^p \theta_l. \quad (\text{A.57})$$

Usando as equações (A.55), (A.56), (A.57) em (A.54) e organizando é fácil ver que

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F - \pi(2A_i + A_e) + 2\pi V_i + \pi V_e. \quad (\text{A.58})$$

Usando que $A = A_i + A_e$ e $V = V_i + V_e$ em (A.56), tem-se

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V - \pi(A_e - V_e). \quad (\text{A.59})$$

Por fim, usando o fato que $A_e = V_e$ e a definição da característica de Euler-Lagrange

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R).$$

Que está de acordo com a equação (A.53) (Q.E.D.)

Com o Teorema de Gauss-Bonnet demonstrado esta seção teve seu objetivo realizado. Cabe agora fazer algumas aplicações deste teorema.

A.7 Aplicações elementares do Teorema de Gauss-Bonnet

A.7.1 Soma dos ângulos internos de um polígono.

A primeira aplicação se refere a encontrar qual é a soma dos ângulos internos de um Polígono. Pode-se usar o Teorema de Gauss-Bonnet na sua forma local.

Como um polígono é uma figura plana cujo interior forma uma região homeomorfa a um disco e é formado por segmento de retas fica evidente que ele está imerso no plano. Logo, a curvatura total de Gauss é nula e como é formado por retas que são as geodésicas portanto a curvatura geodésica é nula. Com isso o teorema local de Gauss-Bonnet (A.48) para um polígono de n torna-se

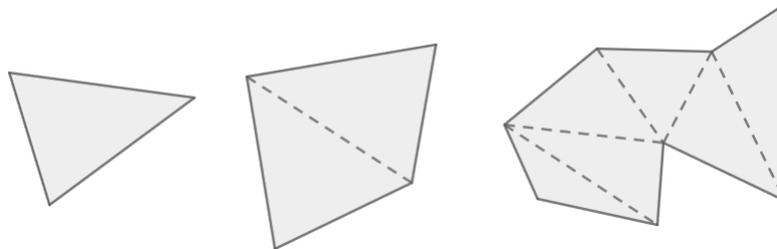
$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi. \quad (\text{A.60})$$

Note que este resultado já é notável pelo fato de mostrar que para qualquer polígono a soma dos ângulos externos é igual a 2π , usando agora a definição de ângulo interno, $\theta_i = \pi - \phi_i$,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = (n - 2)\pi. \quad (\text{A.61})$$

Este resultado pode ser encontrado nos livros de ensino fundamental, observe a figura 11 que ilustra este fato para alguns casos.

Figura 11 – Soma dos ângulos internos de um polígono



Fonte: Elaborado pelo autor.

A.7.2 Característica de Euler-Poincaré de uma esfera.

Outra aplicação interessante consiste em utilizar o teorema no caso de S ser uma superfície orientável compacta, com isso o teorema se torna

$$\int \int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S). \quad (\text{A.62})$$

Agora como aplicação procura-se saber qual é a *característica de Euler-Poincaré* de uma esfera de raio a . Como a métrica induzida por uma esfera é dada por

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (\text{A.63})$$

usando a $\theta =: q^1 \in [0, \pi]$ e $\varphi = q^2 \in [0, 2\pi]$. A partir a equação (A.42) é fácil ver que $K = 1/a^2$ e o elemento de área $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Logo (A.61) torna-se

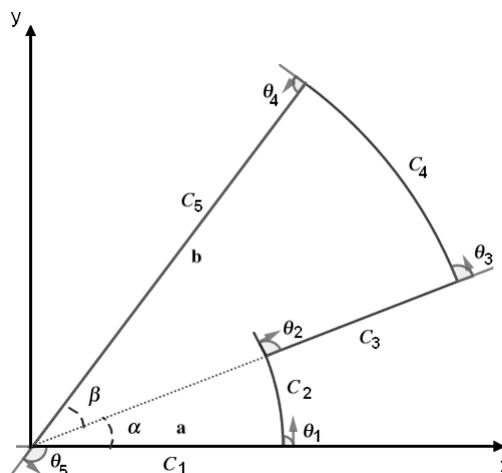
$$2\pi\chi(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \rightarrow \chi(S) = 2. \quad (\text{A.64})$$

Este resultado que é conhecido, de fato uma esfera pode ser deformada continuamente para um tetraedro ou um cubo e como χ é um invariante topológico o tetraedro compartilha o mesmo valor de χ de uma esfera. No caso do tetraedro $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$.

A.7.3 Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples de um espaço plano.

Como exercício cabe verificar a validade do *Teorema de Gauss-Bonnet* de uma região formada por dois arcos de círculo, o primeiro com raio \mathbf{a} e ângulo α e o segundo com raio \mathbf{b} e ângulo β . Veja a figura 12.

Figura 12 – Aplicação 3 do Teorema de Gauss-Bonnet



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como trata-se de uma figura plana, a curvatura gaussiana é zero. Uma vez que retas

são as geodésicas no plano as curvaturas geodésicas das curvas C_1, C_3, C_5 são nulas. Desse modo, o teorema toma a seguinte forma

$$\int_{C_2} \kappa_{g2} ds_2 + \int_{C_4} \kappa_{g4} ds_4 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi. \quad (\text{A.65})$$

Observa-se pela figura que foi adotado o sentido anti-horário. Com isso $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = -\pi/2$, $\theta_3 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi/2$ e $\theta_5 = \pi - \alpha - \beta$. Como o espaço é plano, a derivada covariante é a própria derivada e parametrizando por comprimento de arco, a curvatura geodésica nada mais é que a norma da derivada com relação ao comprimento de arco do vetor tangente.

Como as duas curvas são arcos de círculo é conveniente fazer o caso de uma curva que é um arco de círculo com raio r . A curva pode ser parametrizada como

$$\alpha(s) = r \cos(s/r) \hat{\mathbf{x}} + r \sin(s/r) \hat{\mathbf{y}}.$$

Assim o vetor tangente é dado por

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\sin(s/r) \hat{\mathbf{x}} + \cos(s/r) \hat{\mathbf{y}}.$$

Para encontrar a curvatura geodésica basta derivar novamente, pois o espaço é plano, e calcular a norma do vetor, logo

$$\left| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right| = \kappa_g(s) = \frac{1}{r}. \quad (\text{A.66})$$

Sabendo disso e substituindo o elemento de linha $ds = rd\phi$, a equação (A.65) torna-se

$$\int_0^\alpha \frac{1}{a} ad\phi + \int_\alpha^{\beta+\alpha} \frac{1}{b} bd\phi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - \alpha - \beta = 2\pi. \quad (\text{A.67})$$

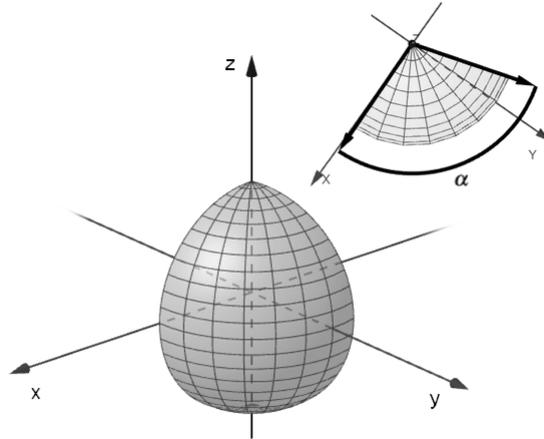
Integrando e ajustando os termos fica claro que $2\pi = 2\pi$ e o como era óbvio o *Teorema de Gauss-Bonnet* é válido.

A.7.4 Verificação do teorema de Gauss-Bonnet para uma região simples sobre a esfera.

Um outro exercício consiste em verificar a validade do teorema em um caso semelhante ao da *Aplicação 2*, porém tomando uma parte da casca esférica, usando coordenadas esféricas esta parte consiste em considerar uma esfera de raio a , $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, \alpha]$, de acordo com a figura 13

Primeiro só existem duas curvas que são o bordo dessa superfície, ambas são arcos de grandes círculos logo são geodésicas. E como é uma região simples, $\chi = 1$. Tome a normal apontando na direção radial, da origem para a superfície, logo pode-se orientar o caminho fechado do bordo da região como: quando $\varphi = 0$, θ vai de 0 a π e quando $\varphi = \alpha$, θ vai de

Figura 13 – Aplicação 4 do Teorema de Gauss-Bonnet



Fonte: Elaborado pelo autor.

π a 0. Por fim é fácil notar que os ângulos externos são ambos $\pi - \alpha$. Então, o teorema toma a forma

$$\int_0^\alpha d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi + 2\pi - 2\alpha = 2\pi. \quad (\text{A.68})$$

Com isso $2\pi = 2\pi$ e o teorema se mostrou consistente.

A.7.5 *Um par de geodésicas em um espaço de curvatura não positiva não forma uma região simples.*

Por fim, uma aplicação apresentada em [61] que será útil no próximo C-Apítulo, isso faz com que esta aplicação seja a mais importante. Avalie a afirmação abaixo.

Seja S uma superfície orientada com curvatura gaussiana negativa ou nula. Então duas geodésicas γ_1 e γ_2 que começam em um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em outro ponto $q \in S$ de modo que os traços de γ_1 e γ_2 possam a formar uma região R simples de S .

Assumindo que elas se encontrem em $q \in S$. Pelo *Teorema de Gauss-Bonnet* no caso em que R seja simples

$$\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \quad (\text{A.69})$$

Como as duas geodésica não são mutuamente tangentes, $\theta_1 < \pi$ e $\theta_2 < \pi$. Logo

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi - \theta_1 - \theta_2 \geq 0. \quad (\text{A.70})$$

Porém $K \leq 0$, o que é uma contradição.

Isso mostra que dado uma superfície com curvatura não positiva, por exemplo um

plano ou uma superfície hiperbólica, duas geodésicas que são concorrentes em um ponto não se encontrarão em nenhum outro ponto formando uma região simples, sem furos.

Com isso os objetivos deste apêndice foram concluídos. Mais aplicações sobre o *Teorema de Gauss-Bonnet* podem ser encontradas nas referências citadas neste apêndice.

APÊNDICE B – IDENTIDADE SOBRE TRIANGULAÇÕES

Um esboço de demonstração pode ser dado pelo método de indução. Para cada caso que aparecerá será retirado um triângulo da triangulação e a identidade continuará sendo válida de acordo com a hipótese de indução. Dada uma triangulação a identidade $3F = 2A_i + A_e$ é verdadeira. Por indução, tome a triangulação formada por um triângulo, este caso $F = 1$, $A_i = 0$ e $A_e = 3$, logo é verdadeiro. Agora é necessário dividir em casos e usar a hipótese de indução. A hipótese consiste em que se for verdadeira a identidade para uma triangulação com um triângulo a menos, também vale para a triangulação original.

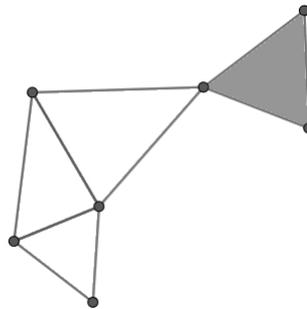


Figura 1.

Caso 1: O triângulo retirado tem apenas um vértice em comum com outro triângulo, de acordo com a figura 1. Usando linha a triangulação sem um triângulo (F', A'_i, A'_e) e sem linha para a triangulação original (F, A_i, A_e) é fácil ver que $F' = F - 1$, $A'_i = A_i$ e $A'_e = A_e - 3$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e.$$

Caso 2: O triângulo retirado tem uma aresta em comum com outro triângulo, de acordo com a

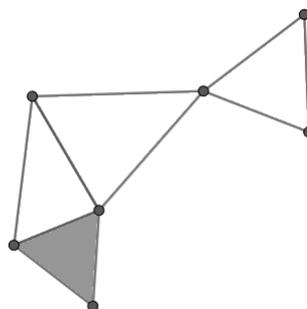


Figura 2.

figura 2. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 1$, $A'_e = A_e - 2 + 1$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e.$$

Caso 3: O triângulo retirado tem duas arestas em comum com a triangulação, de acordo com a

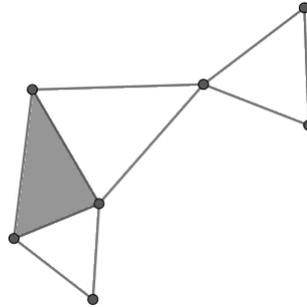


Figura 3.

figura 3. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 2$, $A'_e = A_e - 1 + 2$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e.$$

Caso 4: O triângulo retirado tem três arestas em comum com a triangulação, de acordo com a

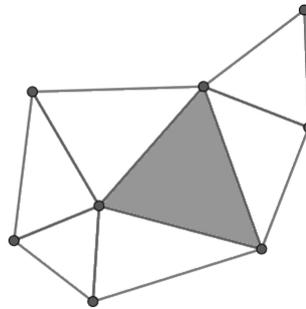


Figura 4.

figura 4. Assim $F' = F - 1$, $A'_i = A_i - 3$, $A'_e = A_e + 3$, logo

$$3F' = 2A'_i + A'_e \rightarrow 3F = 2A_i + A_e$$

E com isso a demonstração está completa, e a relação é verdadeira para qualquer triangulação.