



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**MESTRADO EM FÍSICA**

**IGOR PEREIRA CAVALCANTE**

**UM ESTUDO SOBRE A FILTRAGEM UTILIZANDO MEIOS POROSOS COM**  
**PROPRIEDADES ELÉTRICAS**

**FORTALEZA**

**2023**

IGOR PEREIRA CAVALCANTE

UM ESTUDO SOBRE A FILTRAGEM UTILIZANDO MEIOS POROSOS COM  
PROPRIEDADES ELÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.  
Coorientador: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C364e Cavalcante, Igor Pereira.

Um estudo sobre a filtragem utilizando meios porosos com propriedades elétricas / Igor Pereira Cavalcante. – 2023.  
58 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

Coorientação: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza.

1. Filtragem. 2. Meios porosos. 3. Interação partícula/fluido. 4. Eficiência de filtros. I. Título.  
CDD 530

---

IGOR PEREIRA CAVALCANTE

UM ESTUDO SOBRE A FILTRAGEM UTILIZANDO MEIOS POROSOS COM  
PROPRIEDADES ELÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em: 17/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Rilder de Sousa Pires  
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu orientador, Ascânio Dias Araújo, pelo seu apoio, orientação e incentivo ao longo desta jornada. Sua expertise, paciência e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento e conclusão desta dissertação.

Também gostaria de agradecer ao meu coorientador, Michael Ferreira de Souza, por sua colaboração e valiosas ideias durante o processo de pesquisa. Sua contribuição foi de grande importância para o aprofundamento desse estudo.

Aos meus amigos de laboratório, Robert, Miguel, Thiago, Márcio, Jéssica e Alessandro, que compartilharam ideias, conhecimentos e experiências, meu sincero agradecimento. Suas contribuições tornaram essa jornada mais significativa.

Não posso deixar de expressar minha gratidão aos meus pais, João Célio e Tânia Maria, pelo amor, apoio incondicional e incentivo ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Sem a presença deles, nada disso seria possível.

Agradeço também à Universidade Federal do Ceará pela oportunidade de realizar este estudo e pelos recursos disponibilizados, que foram essenciais para o desenvolvimento da pesquisa.

Por fim, gostaria de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento concedido, que viabilizou a realização deste trabalho e contribuiu para o avanço da ciência em nosso país.

A todos que de alguma forma contribuíram para o sucesso deste trabalho, meu mais sincero agradecimento.

"A vida é para quem topa qualquer parada. Não  
para quem para em qualquer topada."  
(MARLEY, B. , 2001)

## RESUMO

A filtração é uma técnica que retém partículas suspensas em um fluido através de um meio filtrante. Trata-se de um processo presente tanto na natureza quanto em dispositivos humanos, baseada na separação de partículas por tamanho ou em sua remoção por agregação ou retenção. Pesquisa na área de filtração é ativa e importante em diversos campos, como Engenharia Química, Geofísica do Petróleo, Biofísica e Medicina. Filtros físicos podem ser simulados usando meios porosos com estruturas estocásticas. A investigação do comportamento das partículas no filtro, em relação ao meio, é essencial para a compreensão do seu funcionamento e a proposição de melhorias na eficiência. Neste estudo, analisamos o transporte de partículas em diferentes meios porosos desordenados utilizando fluidos newtonianos para o escoamento e transporte das partículas. Analisamos o comportamento das partículas transportadas pelo fluido considerando diferentes tipos de interação partícula/fluido e estrutura/partícula. Quando as partículas suspensas não interagem eletricamente com o meio poroso, observamos um decaimento exponencial na densidade das partículas ao longo do filtro, que varia com o número de Stokes ( $St$ ). Quando o filtro está eletricamente carregado, observamos que o comportamento das partículas é governado pela competição entre o potencial de interação (Potencial de Yukawa) e o campo de velocidade do fluido no qual a partícula está inserida, o que altera a densidade do material retido no filtro. Essa análise considera os parâmetros que controlam a dinâmica do sistema, como a intensidade do potencial de interação entre as partículas e meio poroso, alcance dessa interação elétrica, velocidade do escoamento e número de Stokes.

**Palavras-chave:** filtração; meios porosos; interação partícula/fluido; eficiência de Filtros.



## ABSTRACT

Filtration is a technique that retains suspended particles in a fluid through a filtering medium. It is a process found in nature as well as in human-made devices, based on the separation of particles by size or their removal through aggregation or retention. Research in the field of filtration is active and important in various fields such as Chemical Engineering, Petroleum Geophysics, Biophysics, and Medicine. Physical filters can be simulated using porous media with stochastic structures. In this context, it is essential to investigate the behavior of particles as filter efficiency devices, relating it to the behavior in the medium to understand its functioning and propose improvements in its efficiency. In this study, we analyzed the transport of particles in different disordered porous media using Newtonian fluids for flow and particle transport. We examined the behavior of particles transported by the fluid considering different types of particle/fluid and structure/particle interactions. When the suspended particles do not interact electrically with the porous medium, we observed an exponential decrease in particle density along the filter, which varies with the Stokes number ( $St$ ). When the filter is electrically charged, we observed that the behavior of particles is governed by the competition between the interaction potential (Yukawa potential) and the fluid velocity field in which the particle is embedded, which alters the density of the material retained in the filter. This analysis considers parameters that control the system dynamics, such as the intensity of the interaction potential between particles and porous medium, the range of this electrical interaction, flow velocity, and Stokes number.

**Keywords:** filtering; porous media; particle/fluid interaction; filter efficiency.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Alguns mecanismos de captura presentes na <i>Deep Bed Filtration</i> . . . . .	14
Figura 2 – Diferença entre regimes de escoamento, laminar e turbulento, a partir da representação do número de Reynolds. . . . .	18
Figura 3 – Diferença entre regimes de escoamento, laminar e turbulento, a partir da representação do número de Reynolds. . . . .	21
Figura 4 – O gráfico ilustra o potencial de Yukawa, representado por $U(r)$ , em várias configurações de $k$ em relação à distância $r$ . As linhas contínuas representam diferentes valores de blindagem, indicados pelo parâmetro $k$ , no potencial. É observado que um aumento no valor de $k$ resulta em um alcance menor do potencial para uma mesma distância $r$ . . . . .	24
Figura 5 – Representação do meio poroso utilizado com suas respectivas características e condições para o escoamento. . . . .	25
Figura 6 – Representação ilustrativa de como o <i>mesh</i> foi feito, com células mais espaçadas nas bordas e mais densa próximo dos obstáculos. A malha real utilizada tem o número de células na ordem de $10^6$ . . . . .	26
Figura 7 – Recorte de uma região específica do meio poroso. O mapa de cores indica a intensidade da velocidade em regiões distintas do meio poroso. . . . .	28
Figura 8 – Gráfico que ilustra as linhas de corrente da solução analítica de Kubawara, na condição de célula unitária com um obstáculo de raio 0,1. . . . .	31
Figura 9 – Teste de erro da interpolação Bilinear, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Utilizamos a função <code>vtk.Probe</code> , da biblioteca VTK. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo $y$ . . . . .	32
Figura 10 – Teste de erro da interpolação Bicúbica, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo $y$ . . . . .	33
Figura 11 – Teste de erro da interpolação RBF, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo $y$ . . . . .	33

Figura 12 – Os gráficos apresentam a evolução do erro médio em função do número de pontos de entrada. . . . .	34
Figura 13 – Mecânica de interpolação por células para uma partícula suspensa no fluido. O meio poroso é dividido em células com pontos de velocidade. À medida que a partícula avança, a interpolação é recalculada na célula atual para obter um campo de velocidades contínuo adequado. . . . .	35
Figura 14 – Comparação da integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem adaptativo, empregando tanto o campo de velocidades analítico (representado por uma linha sólida) quanto o campo de velocidades interpolado por meio do método RBF (representado por uma linha tracejada), para um determinado número de Stokes. . . . .	37
Figura 15 – Comparação da integração numérica entre o ANSYS FLUENT (representado por uma linha sólida) e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem adaptativo, utilizando o campo de velocidades obtido por meio do método de volumes finitos (FVM) com ANSYS FLUENT e a interpolação de velocidades utilizando o método RBF (representado por uma linha tracejada), para um determinado número de Stokes. . . . .	38
Figura 16 – Gráfico das trajetórias de partículas em um meio poroso, ilustrando diferentes comportamentos de acordo com o número de Stokes. A primeira imagem a esquerda apresenta partículas balísticas com $St = 10^{-2}$ , a figura superior a direita um valor intermediário e finalmente a última imagem representa <i>tracers</i> com $St = 10^{-4}$ . . . . .	39
Figura 17 – A relação entre a fração de partículas capturadas ( $\phi$ ) no interior de um meio poroso e o comprimento de penetração normalizado para diferentes valores do número de Stokes. As linhas contínuas indicam os ajustes exponenciais realizados para cada curva, sendo que o parâmetro $\lambda$ representa o comprimento característico associado a cada ajuste exponencial. . . . .	41
Figura 18 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes $St$ , caso neutro. . . . .	41
Figura 19 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por $U(r)$ , em várias configurações de $A$ em relação à distância $r$ . É observado que um aumento no valor de $A$ resulta em um alcance maior do potencial para uma mesma distância $r$ . . . . .	43

- Figura 20 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 0$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial ( $A$ ). As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ . . . . . 44
- Figura 21 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$ . Os diferentes símbolos representam valores distintos do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares propostos para cada curva, em que os coeficientes angulares correspondem ao expoente na lei de potência. . . . . 45
- Figura 22 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 0$  (potencial Colombiano). As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na forma como as curvas se comportam para diferentes valores do parâmetro  $A$ . . . . . 46
- Figura 23 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em diferentes configurações de  $A$  em relação à distância  $r$ , considerando uma situação com blindagem, onde  $k = 10/D$ . Ainda é observado que um aumento no valor de  $A$  resulta em um aumento do alcance do potencial para uma mesma distância  $r$ . 47
- Figura 24 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 10/D$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial ( $A$ ). As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ . . . . . 47
- Figura 25 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$  para o caso blindado  $k = 10/D$ . Os diferentes símbolos representam valores distintos do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares propostos para cada curva, em que os coeficientes angulares correspondem ao expoente na lei de potência. . . . . 48

- Figura 26 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 10/D$ . As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na identificação do parâmetro  $A$ . . . . . 49
- Figura 27 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em diferentes configurações de  $A$  em relação à distância  $r$ , considerando uma situação com blindagem, onde  $k = 10/D$ . Ainda é observado que um aumento no valor de  $A$  resulta em um aumento do alcance do potencial para uma mesma distância  $r$ . 50
- Figura 28 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 20/D$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial  $A$ . As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ . . . . . 51
- Figura 29 – Gráfico em escala log-log mostra o comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$  para o caso de blindagem  $k = 20/D$ . Os diferentes símbolos representam valores variados do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares aplicados a cada curva. . . . 51
- Figura 30 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 20/D$ . As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na identificação do parâmetro  $A$ . . . . . 52

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
2	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	16
2.1	Meios Porosos	16
2.2	Navier-Stokes	18
2.3	Equação de movimento: Partículas transportadas pelo fluido	21
2.4	Interação Elétrica: Potencial de Yukawa	23
3	<b>METODOLOGIA</b>	25
3.1	Construção do meio poroso	25
3.2	Cálculo do campo de velocidades	27
3.3	Interpolação do campo de velocidades	28
3.4	Integração numérica	36
3.5	Validação dos métodos	37
4	<b>RESULTADOS</b>	39
4.1	Meios porosos com propriedades elétricas	42
4.2	$k = 0$ (Coulomb)	43
4.3	$k = 10/D$ e $k = 20/D$	46
5	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	54
	<b>REFERÊNCIAS</b>	57

## 1 INTRODUÇÃO

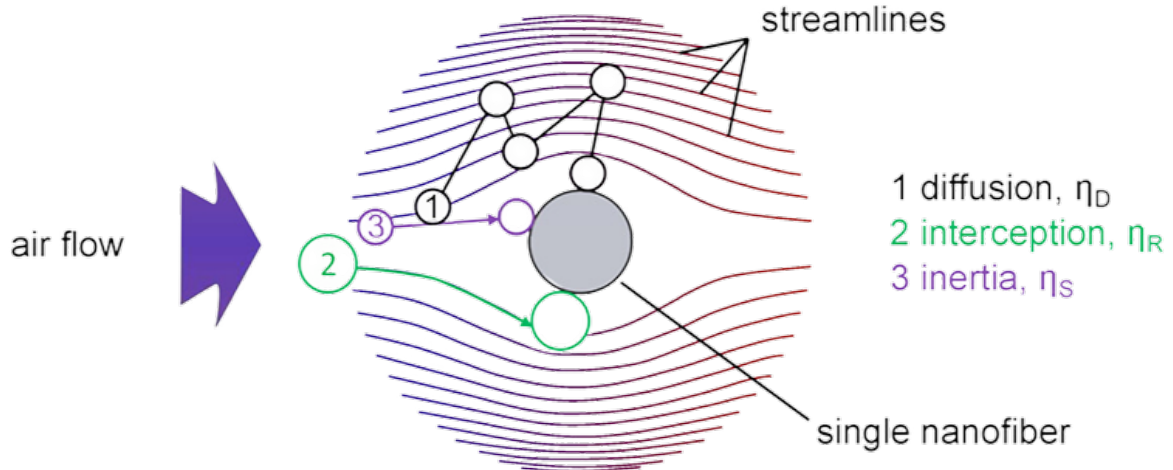
Tradicionalmente, um meio poroso é um material sólido com espaços vazios interconectados que podem ser preenchidos com fluidos. É caracterizado pela sua permeabilidade, que é a medida da facilidade com que um fluido pode fluir através do material. A porosidade é outra propriedade importante dos meios porosos, que se refere à fração de volume do material que é composta de espaços vazios (POP; INGHAM, 2002). O transporte de fluidos e materiais em meios porosos, rochas fraturadas e matrizes porosas sintéticas é um fenômeno comum em vários campos da ciência e tecnologia. Esses campos abrangem uma ampla gama de áreas, incluindo agricultura, biomédica, construção, cerâmica, química, engenharia de petróleo, ciências de alimentos e tecnologia dos solos (SAHIMI, 2012).

Desafios nessa área inclui o estudo do processo de filtração de pequenas partículas. A filtração é o processo de separação de partículas sólidas de um fluido por um meio poroso ou membrana. As partículas sólidas são retidas no meio poroso ou na membrana, enquanto o fluido passa através dele (Matteson, 1986). Embora esse tipo de técnica seja muito antiga, esta ainda se baseia nos princípios fundamentais, separar partículas por tamanho ou retirar partículas de um fluido por meio de agregação ou retenção.

Existem vários métodos de filtração, tais como *Cross flow* (HOLDER *et al.*, 2013), onde o fluxo de alimentação e a direção do fluxo de filtração estão em um ângulo de 90 graus, *Cake* (CIVAN, 2016), um tipo de filtração, definida como um fenômeno em que cada partícula agrega em outras partículas depositadas criando um *cake* ou bolo que pode sofrer um processo de compactação pelo efeito de arrasto do fluido a medida que as partículas menores fluem através do bolo. Esses exemplos demonstram que esta área é bastante explorada a partir dos seus métodos e mecanismos de captura devido sua importância e aplicações na indústria. Exploraremos um método chamado *Deep bed filtration* ou filtração de leito profundo (JEGATHEESAN; VIGNESWARAN, 2005), consiste em um processo em que partículas em suspensão são capturadas em diversas profundidades do meio filtrante. Isso ocorre porque as partículas transportadas pelo fluido são muito menores que os obstáculos que compõem a estrutura do meio poroso. O processo normalmente ocorre em dois estágios: no estágio inicial, as partículas são depositadas nos poros do filtro; no segundo estágio (transitório), o aprisionamento das partículas ocorre ao longo do meio poroso e determina a eficiência da filtração final para as partículas que continuam transportadas pelo fluido. Nesse método, existem alguns mecanismos de captura, como a *Diffusion* em que o movimento browniano das partículas

suspensas é observado, ou *Interception* em que as partículas permanecem nas linhas de fluxo que se aproximam da superfície obstáculo. Apesar de existirem vários mecanismos, concentraremos no chamado *Inertial* ou Inercial, no qual as partículas que tiverem inércia suficiente manterão uma trajetória que pode levá-las para mais perto da superfície da estrutura do meio poroso.

Figura 1 – Alguns mecanismos de captura presentes na *Deep Bed Filtration*



Fonte: (DEUBER *et al.*, 2018)

Apesar de diversos estudos relacionados a esse mecanismo que faz parte do processo de filtração, o efeito da inércia sobre o movimento das partículas transportadas ainda é considerado insignificante. No entanto, as trajetórias dessas partículas não-brownianas através do meio poroso certamente constitui um importante mecanismo que ainda não é muito bem estabelecido do ponto de vista quantitativo. (KOCH; HILL, 2001). Existem alguns trabalhos que exploram esse mecanismo inercial a partir de simulações de fluidos em meios porosos (ARAÚJO *et al.*, 2006). Porém, um aspecto ainda pouco explorado é a análise inercial com a utilização de um potencial elétrico nos poros do meio filtrante. Podemos pensar em aplicações mais evidentes como em filtros fibrosos aplicados a máscaras ou filtros de ar, nos quais utilizam o método de captura mecânica, de atração elétrica juntamente com a inercial. A literatura relata alguns exemplos de modelos de condutividade elétrica em meios porosos com o objetivo principal de investigar os efeitos de estruturas, geometrias e configurações rochosas (BROVELLI *et al.*, 2005), utilizando uma condutividade elétrica no fluido e nas rochas/poros. Entretanto, ainda é escassa a análise de um fluido neutro com algum potencial elétrico nos obstáculos.



Esse trabalho aborda dois aspectos diferentes quanto a interação das partículas transportadas pelo fluido. O primeiro caso, as partículas transportadas pelo meio fluido são neutras e o mecanismo de retenção surge apenas da inércia das partículas durante o contato com a estrutura do meio poroso. No segundo caso, as partículas são eletricamente carregadas e interagem com a estrutura do meio poroso por meio de um potencial elétrico, além dos mecanismos de inércia já mencionados.

A presente dissertação está organizada em quatro seções distintas. A primeira seção aborda aspectos relevantes da filtração já documentados na literatura especializada. A segunda seção descreve detalhadamente a metodologia adotada em nosso estudo. Em seguida, a terceira seção apresenta os resultados obtidos a partir da análise dos dados coletados. Por fim, a última seção traz as conclusões alcançadas com base nos resultados e aponta possíveis direções para pesquisas futuras.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo apresentaremos a base do conhecimento para o desenvolvimento desse trabalho. Passaremos primeiramente pelo conceito de escoamento em meios porosos, apresentando sua forma mais básica até a equação de Navier-Stokes que rege o escoamento.

### 2.1 Meios Porosos

O meio poroso é um material sólido que contém espaços vazios interconectados, criando uma estrutura porosa no seu interior. Esses poros podem ser ocupados por um fluido, como ar, água ou óleo, ou podem estar vazios. Exemplos comuns de meios porosos incluem rochas sedimentares, solos, materiais porosos sintéticos e até mesmo tecidos biológicos. A estrutura desses meios porosos pode variar em termos de tamanho, forma e distribuição dos poros. Essas características desempenham um papel fundamental nas propriedades do meio poroso, como sua porosidade (a fração de volume ocupada pelos poros) e permeabilidade (a capacidade de permitir o fluxo de um fluido através dos poros), por exemplo (VAFAI, 2005).

A porosidade é uma medida da quantidade de espaço vazio, ou poros, em um meio poroso em relação ao seu volume total. É expressa como uma porcentagem ou uma fração entre 0 e 1. Quanto maior a porosidade, maior a quantidade de espaços vazios no interior da estrutura porosa. A porosidade é calculada dividindo-se o volume total da estrutura pelo volume ocupado pela estrutura do meio poroso e pode ser expressa na forma:

$$\varepsilon = 1 - \frac{A_s}{A_t} \quad (2.1)$$

No caso 2d,  $A_s$  é a área ocupada pelos obstáculos e  $A_t$  é a área total do meio poroso. Do ponto de vista dinâmico, podemos dizer que a permeabilidade é uma medida da facilidade com que um fluido pode fluir através de um meio poroso. Esta descreve a capacidade de um material permitir a passagem de um fluido através de seus poros, sendo assim, essa característica depende de diversos fatores, incluindo a conectividade e tamanho dos poros, bem como a viscosidade do fluido e do gradiente de pressão no qual o meio poroso está submetido. A permeabilidade é geralmente expressa em unidades de comprimento por tempo, pois os materiais com alta permeabilidade permitem o fluxo fácil e rápido de fluidos, enquanto materiais com baixa permeabilidade dificultam o fluxo. Esta propriedade foi descoberta pelo engenheiro hidráulico francês Henry Darcy em 1856. Basicamente, Darcy realizou experimentos para estudar o fluxo

de água em meios porosos, especialmente a filtração de água em solos. Com base nessas observações, ele formulou a Lei de Darcy, equação 2.2, uma relação matemática que descreve o fluxo em meios porosos.

$$Q = -k.A.(dP/dL) \quad (2.2)$$

onde  $Q$  é o fluxo de fluido através do meio poroso, vazão por unidade de área,  $k$  é a permeabilidade,  $A$  a área transversal na qual o fluido escoar e por último,  $dP/dL$  é o gradiente de pressão aplicado ao longo do fluxo. Essa equação implica diretamente que a taxa de fluxo de um fluido através de um meio poroso é proporcional à permeabilidade do meio. Quanto maior for a permeabilidade maior será a vazão ao longo do meio para um dado gradiente de pressão aplicada.

Quando tratamos de partículas em meios porosos, temos vários exemplos de aplicações que vão desde mascarar filtrantes, amplamente utilizada na pandemia do Covid-19, até filtragens mais elaboradas em indústrias. Sendo assim, o estudo de como essas partículas suspensas se comportam é de fundamental importância para a compreensão dos fenômenos pertinentes a esse processo. Quando é utilizada a técnica "Deep bed filtration", onde o fluido escoar de maneira laminar e as partículas são muito menores com relação ao tamanho da estrutura presente no meio poroso, temos uma relação em que a densidade de partículas suspensas ao longo do meio filtrante decai exponencialmente, este resultado pode ser deduzido facilmente considerando um meio poroso muito diluído ( $\varepsilon \approx 1$ ) e para regimes de partículas puramente balísticos ( $St \rightarrow \infty$ ) (ARAÚJO *et al.*, 2006):

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp(-x/\lambda), \\ \lambda &= \frac{\pi D}{4(1-\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

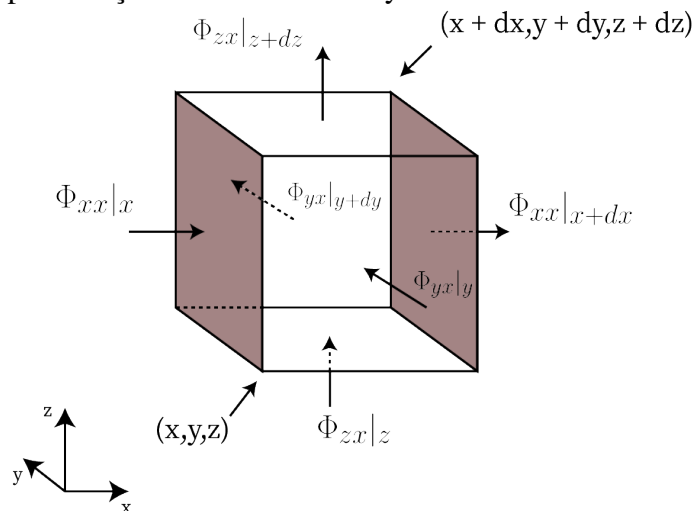
Nesta relação, o parâmetro  $\lambda$  representa a capacidade de penetração das partículas no filtro. Quanto maior o valor de  $\lambda$ , maior será o número de partículas capazes de atravessar o meio poroso e alcançar a extremidade do filtro. Por outro lado, se o valor de  $\lambda$  for baixo, apenas algumas poucas partículas conseguem chegar até a extremidade do filtro, o que indica uma maior eficiência do filtro. O parâmetro  $D$  representa o diâmetro de cada obstáculo presente no meio poroso, e conseqüentemente seu tamanho característico.

## 2.2 Navier-Stokes

A Mecânica dos Fluidos é uma área que estuda o comportamento dos fluidos, tanto em repouso quanto em movimento. Essa disciplina tem sido objeto de estudo há milênios e conta com contribuições importantes de diversos cientistas ao longo do tempo. Entre eles, destacam-se Arquimedes, que investigou o conceito de empuxo e flutuação, Leonardo da Vinci, Blaise Pascal e o próprio Isaac Newton. Um marco crucial na Mecânica dos Fluidos é a equação de Navier-Stokes, uma das equações mais importantes nesse campo. Essa equação descreve o movimento de substâncias fluidas, levando em consideração a viscosidade do fluido. Ela foi desenvolvida por Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes no século XIX, e desde então tem sido fundamental para a compreensão e análise dos fluidos em movimento (Cengel, 2005).

Podemos conseguir uma dedução para essa equação partindo de princípios básicos, considerando um fluido incompressível escoando em um elemento de volume infinitesimal e ponderar a taxa de entrada e saída de momento, dentro do nosso volume (BIRD *et al.*, 2001) Figura 2. Basicamente aplicação da Segunda Lei de Newton a massa contida no elemento de volume.

Figura 2 – Diferença entre regimes de escoamento, laminar e turbulento, a partir da representação do número de Reynolds.



Fonte: Autor.

Em termos básicos temos a seguinte relação:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Taxa de variação} \\ \text{de momento} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Fluxo de momento} \\ \text{entrando} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Fluxo de momento} \\ \text{saindo} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Força externa} \\ \text{no fluido} \end{array} \right) \quad (2.4)$$

Sendo assim, analisando primeiramente o fluxo de momento  $\Phi_x$ , na direção x, teremos:

$$dxdydz \frac{\partial U_x}{\partial t} = dydz(\Phi_{xx}|_x - \Phi_{xx}|_{x+dx}) + dzdx(\Phi_{yx}|_y - \Phi_{yx}|_{y+dy}) + dxdy(\Phi_{zx}|_z - \Phi_{zx}|_{z+dz}). \quad (2.5)$$

Dispensaremos a força gravitacional para o nosso problema, mas ela poderia ser colocada como um termo adicional na equação 2.5, assim como qualquer outra força externa que atue sobre o fluido. Integrando ambos os lados, teremos:

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z} \right). \quad (2.6)$$

consequentemente, juntando todas as componentes, chegaremos:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \quad (2.7)$$

A equação 2.7 é conhecida por ser a equação de conservação do momento para um sistema contínuo, assim, a taxa de variação temporal do momento em um sistema contínuo é igual à divergência do fluxo de momento. Em outras palavras, ela nos diz que a mudança no momento ao longo do tempo é igual à quantidade de momento que entra ou sai do sistema. No nosso caso, utilizamos em um problema de mecânica dos fluidos, mas a forma geral dessa equação pode ser utilizada em várias áreas da física como eletromagnetismo e mecânica quântica por exemplo. Expandindo por completo o segundo termo, obtemos uma dependência de pressão e viscosidade, além de uma força externa, caso fosse considerada na construção inicial.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} = -[\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U})] + \nabla p + (\nabla \cdot \tau). \quad (2.8)$$

O primeiro termo depois da igualdade representa a contribuição das flutuações turbulentas no fluxo do fluido. A divergência do tensor de tensões de Reynolds, termo entre parênteses, reflete como as flutuações de velocidade no fluido se propagam e contribuem para a mudança de momento. "A parte que envolve a pressão descreve como as variações de pressão no fluido contribuem para a mudança de momento. Um gradiente de pressão positivo indica uma força de pressão que acelera o fluido na direção oposta ao gradiente. Por último, mas não menos importante, temos a divergência do tensor de tensões viscosas  $\tau$ , que leva em conta os efeitos da viscosidade do fluido que se opõe a deformação e movimento do mesmo. Sua divergência reflete como as forças viscosas contribuem para a mudança do momento.

Podemos reduzir a equação 2.8, no lado direito, utilizando as componentes do tensor de tensões e, do lado esquerdo da equação, colocando uma derivada total da velocidade:

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (2.9)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade do fluido, nesse caso, a derivada total é chamada de derivada material, e leva em conta tanto a variação temporal da velocidade como a advecção convectiva. Assim, esse termo é a taxa de variação do momento por unidade de volume do fluido e pode ser obtido fazendo:

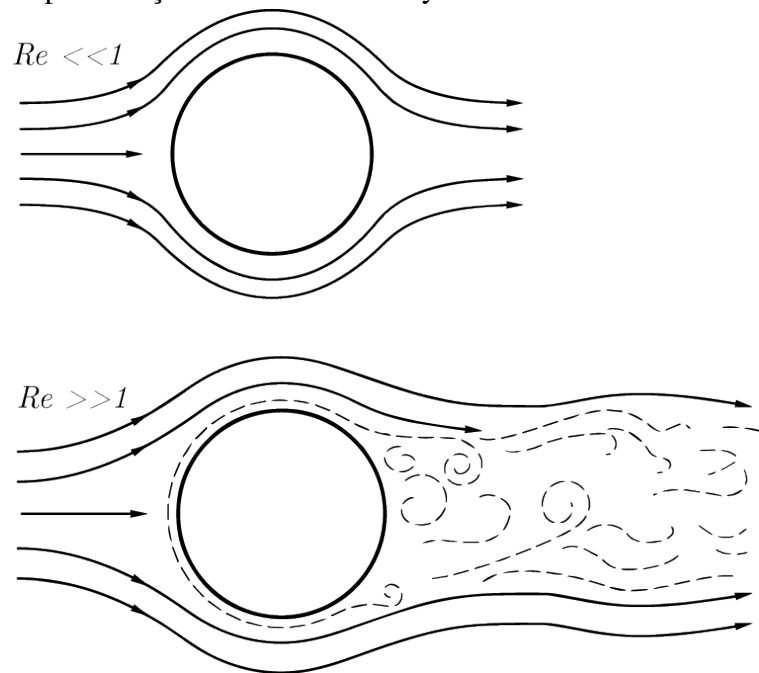
$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left( u_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) \quad (2.10)$$

Por último, podemos deixar a equação 2.9 adimensional, colocando cada componente dividido por seu valor característico do sistema. Isso nos permite simplificar e introduzir uma constante adimensional muito importante que nos informa o regime de escoamento.

$$\mathcal{U} \cdot (\nabla \mathcal{U}) = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathcal{U}. \quad (2.11)$$

O parâmetro  $Re$  é o número de Reynolds, que expressa a razão entre as forças inerciais e viscosas. A equação 2.11 é comumente chamada de Navier-Stokes adimensional que descreve o campo de velocidades e pressão de um escoamento, e será ela que utilizaremos para simular o escoamento de um fluido através de um filtro. Vale salientar que trata-se de uma equação não linear que só possui solução analítica em situações bastantes particulares de escoamento. A maior parte das soluções tratadas em escoamento de fluidos são obtidas de forma numérica. No cotidiano podemos encontrar dois regimes de escoamento diferentes, o laminar e o turbulento, esse último pode ser encontrado em rios, correntes oceânicas, dutos e tubulações e indica que as forças inerciais são muito maiores que as forças viscosas (Cengel, 2005). Por outro lado, escoamentos através de pequenos objetos, capilares e tubos estreitos tem seu regime laminar, consequentemente as forças viscosas são superiores as inerciais, podemos ver a representação prática desses regimes de escoamento analisando como as linhas de corrente se estabelecem para os dois regimes considerados na Figura 3

Figura 3 – Diferença entre regimes de escoamento, laminar e turbulento, a partir da representação do número de Reynolds.



Fonte: Autor.

### 2.3 Equação de movimento: Partículas transportadas pelo fluido

A força de arrasto em um fluido é um fenômeno físico que ocorre quando uma estrutura física se move através de um meio, como ar ou água. Essa força, também conhecida como resistência do ar ou hidrodinâmica, exerce uma influência significativa sobre o movimento do objeto no meio em questão. É um conceito fundamental em áreas como aerodinâmica, hidrodinâmica, engenharia e esportes. Essa força é resultado da interação entre o objeto em movimento e o fluido circundante. Quando um objeto se desloca através de um fluido, como um avião voando no ar ou um barco navegando na água, ocorre uma complexa interação entre as moléculas do fluido e a superfície do objeto. Essa interação resulta em uma força que atua na direção oposta ao movimento do objeto, ou seja, uma força de arrasto (ANDERSON, 2016).

A magnitude dessa força depende de vários fatores como, velocidade, forma e a área frontal do objeto, viscosidade do fluido e as propriedades da superfície da estrutura que está sendo arrastada. Por exemplo, quanto maior a velocidade e área, maior a força de arrasto. Formas aerodinâmicas e superfícies suaves tendem a experimentar uma resistência menor do que objetos com formas irregulares ou superfícies rugosas. Para a maioria dos objetos grandes, como ciclistas, carros e bolas de beisebol, que não se movem a velocidades muito baixas, a magnitude da força de arrasto ( $F_D$ ) é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do objeto. Essa

relação é conhecida como arrasto quadrático ou resistência quadrática. Em termos científicos, podemos expressá-la como  $\mathbf{F}_D \propto \mathbf{u}_p^2$ , onde  $\mathbf{F}_D$  representa a força de arrasto e  $\mathbf{u}_p$  é a velocidade do objeto.

Essa relação significa que, à medida que a velocidade do objeto aumenta, a força de arrasto aumenta de forma quadrática. Por exemplo, se dobrarmos a velocidade do objeto, a força de arrasto será multiplicada por um fator de quatro. Isso ocorre porque, à medida que o objeto se desloca mais rapidamente através de um fluido, há um maior número de colisões e interações entre as moléculas do fluido e a superfície do objeto, resultando em uma resistência maior. Essa compreensão do arrasto quadrático é crucial para projetar e otimizar a aerodinâmica de veículos, equipamentos esportivos e outras estruturas que interagem com fluidos. Ao considerar a influência da velocidade e sua relação quadrática com a força de arrasto, é possível minimizar a resistência e melhorar a eficiência do movimento. A equação da força de arrasto quadrático pode ser expressa por:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} \rho A C_d \mathbf{u}_p^2 \quad (2.12)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $A$  é a área frontal do objeto,  $C_d$  é o coeficiente de arrasto, que depende da forma do objeto,  $\mathbf{u}_p$  é a velocidade do objeto. O coeficiente de arrasto é um termo adimensional, que descreve a resistência ao movimento de um objeto em um fluido, levando em consideração diversos fatores, já citados anteriormente, como a geometria do objeto. Para o caso mais simples de um objeto esférico, temos uma correlação que prevê com precisão o coeficiente de arrasto para uma ampla faixa de números de Reynolds, para o caso em que temos um escoamento laminar, o  $C_d$  é simplesmente dado por:

$$C_d = 24/Re \quad (2.13)$$

Portanto, temos uma simplificação da equação 2.12, no chamado regime de Stokes, dando uma equação nomeada como Lei de Stokes:

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\mu R\mathbf{u}_p \quad (2.14)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade,  $R$  é o raio do objeto e  $V$  a velocidade da partícula em relação ao fluido. Essa equação é somente aplicável em situações de baixo número de Reynolds, onde o fluxo é laminar e as forças viscosas são predominantes. Nesse regime, a força de arrasto é diretamente proporcional à velocidade e ao raio da partícula. Neste trabalho, simplificamos ainda mais esta



equação, deixando o lado esquerdo somente com a derivada temporal da velocidade da partícula e o lado direito em função de uma constante adimensional chamada de número de Stokes:

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_p}{St} + \mathbf{F}_{ext}. \quad (2.15)$$

Essa constante descreve o comportamento de uma partícula em um fluido de tal modo que, quando  $St \gg 1$  a partícula tem um comportamento puramente balístico, de forma que seu fator inercial é predominante, em contra partida se temos  $St \ll 1$ , a partícula segue o fluxo do fluido suavemente, e é levada sem resistência. O número de Stokes pode ser relacionado na seguinte forma:

$$St = \frac{ud_p^2\rho_p}{18l\mu} \quad (2.16)$$

Na fórmula,  $u$  representa a velocidade do fluido,  $d_p$  é o diâmetro da partícula,  $\rho_p$  é a densidade da partícula,  $\mu$  é a viscosidade e  $l$  é o comprimento característico.

## 2.4 Interação Elétrica: Potencial de Yukawa

O potencial de Yukawa é conhecido por seu papel na modelagem de interações de curto alcance, especialmente quando há um efeito de blindagem presente. Esse efeito de blindagem é capturado pelo parâmetro de blindagem  $k$ , que influencia a rapidez com que a força do potencial diminui com a distância e é dado por:

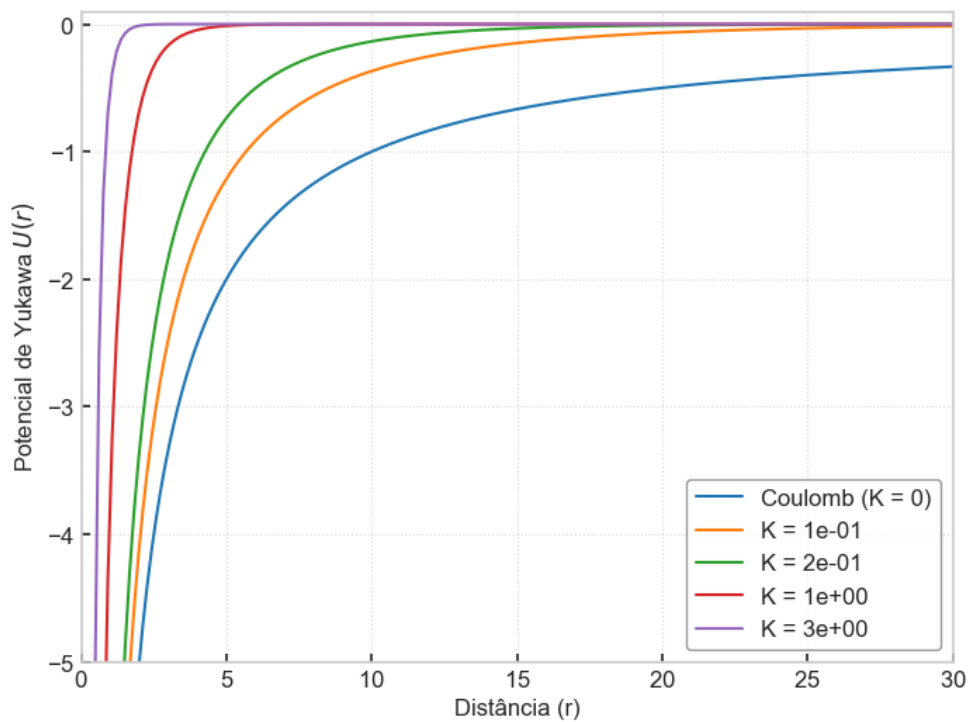
$$U(r) = -\frac{Ae^{-k(r-R_{obs})}}{r - R_{obs}}, \quad (2.17)$$

onde o parâmetro  $A$  representa a intensidade do potencial e  $R_{obs}$  é um tamanho característico presente na construção do meio poroso. Valores mais altos do parâmetro  $k$  indicam uma maior blindagem, resultando em um alcance mais curto da interação entre as partículas.

Utilizando o potencial de Yukawa com esse parâmetro ajustável, podemos obter informações valiosas sobre as propriedades elétricas das estruturas presentes no meio poroso. O potencial central resultante desempenha um papel fundamental na determinação do campo elétrico, permitindo-nos estudar como as partículas carregadas interagem com essas estruturas. É importante ressaltar que, ao estabelecer  $k = 0$ , podemos retornar facilmente ao potencial de Coulomb, que descreve a interação eletrostática clássica como podemos ver na Figura 4, onde apresentamos o comportamento do potencial de Yukawa em função da distância  $r$  para diferentes valores do parâmetro  $k$ . Conforme já mencionado, quando  $k = 0$  recuperamos o potencial Coulombiano.

Importante ressaltar que o potencial de Yukawa apresenta uma forma funcional versátil que nos permite explorar diferentes cenários e compreender melhor as interações elétricas em diferentes condições físicas.

Figura 4 – O gráfico ilustra o potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em várias configurações de  $k$  em relação à distância  $r$ . As linhas contínuas representam diferentes valores de blindagem, indicados pelo parâmetro  $k$ , no potencial. É observado que um aumento no valor de  $k$  resulta em um alcance menor do potencial para uma mesma distância  $r$ .

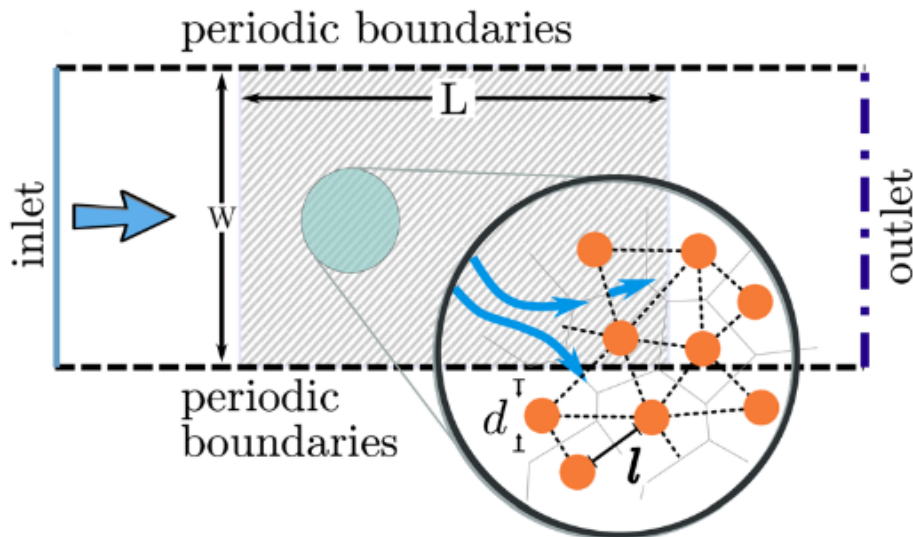


Fonte: Autor.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo, abordaremos os métodos computacionais utilizados para a realização deste estudo, apresentando uma visão geral dos métodos computacionais empregados. Iniciamos pela representação esquemática do nosso objeto de estudo que ilustra um escoamento de um fluido através de um meio poroso desordenado formado pela alocação aleatória de obstáculos circulares no interior de uma região definida como meio poroso. Essa região é limitada por duas outras regiões livres de obstáculos que evitam efeitos de bordas durante o escoamento. O meio poroso apresenta condição de contorno periódica na direção  $y$  e o escoamento é realizado da esquerda para direita na direção  $x$ . A condição para o escoamento é estabelecida por meio da introdução de um perfil uniforme de velocidade para o fluido na região definida como *inlet* e uma condição de pressão nula é imposta na extremidade direita definida por *outlet*, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Representação do meio poroso utilizado com suas respectivas características e condições para o escoamento.



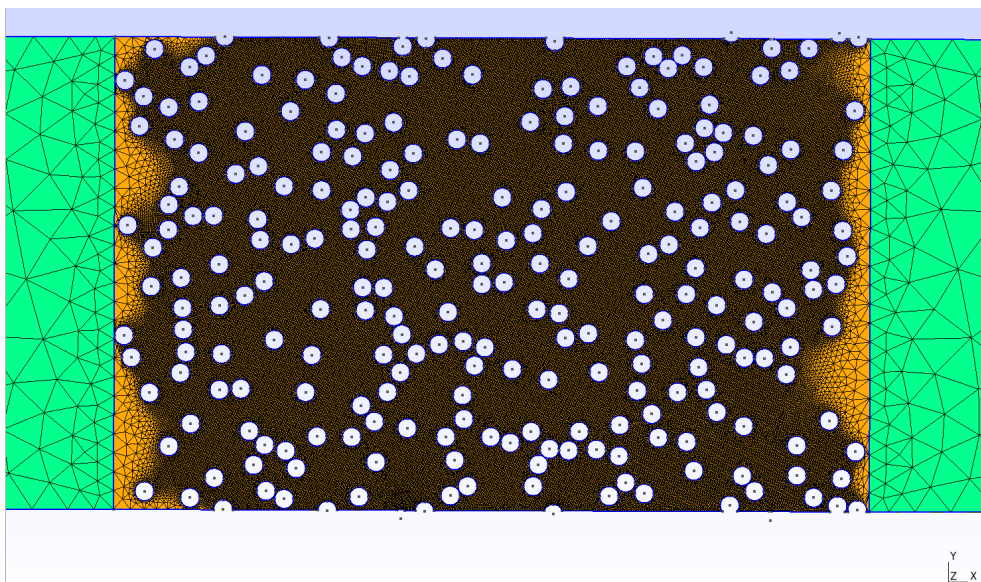
Fonte: (SEYBOLD *et al.*, 2021)

#### 3.1 Construção do meio poroso

Em nosso estudo utilizamos meios porosos compostos por obstáculos circulares com diâmetro adimensional  $D = 0.02$ . Esses obstáculos foram colocados de forma estocástica em um domínio retangular com condições de contorno periódicas no eixo vertical, conectando a

borda superior do retângulo com a borda inferior. O domínio tem altura  $w = 25D$  e largura  $L = 40D$ , onde  $D$  é o diâmetro do obstáculo e o comprimento característico do meio poroso. Quanto à criação, começando com um obstáculo, os discos foram colocados sequencialmente de forma aleatória dentro do domínio, mantendo uma distância mínima de  $D/10$  entre eles para evitar a formação de empacotamentos intransponíveis. Repetimos esse processo de alocação dos obstáculos no interior da região definida como meio poroso até que o meio atinja uma porosidade previamente estabelecida. Ao mudar a semente de geração aleatória inicial, obtemos diferentes geometrias e, conseqüentemente, vários meios porosos diferentes entre si porém, mesma fração de vazios (porosidade). Todos os nossos filtros têm a mesma porosidade  $\varepsilon$ , mas com diferentes posições para os obstáculos. Isso foi feito para que as simulações tivessem uma boa amostragem estatística. Tendo os obstáculos devidamente alocados, criamos uma malha não-estruturada. A densidade da malha é adaptativa em relação aos obstáculos, resultando em uma densidade bem maior onde há concentração de discos, e uma menor quando nos afastamos dessa região como podemos observar na Figura 6. Essa adaptatividade é importante, tanto para convergência mais rápida da solução para o escoamento, quanto para a precisão do campo de velocidades nessa região.

Figura 6 – Representação ilustrativa de como o *mesh* foi feito, com células mais espaçadas nas bordas e mais densa próximo dos obstáculos. A malha real utilizada tem o número de células na ordem de  $10^6$ .



Fonte: Autor.

### 3.2 Cálculo do campo de velocidades

Depois de criar e importar a malha, é necessário definir o modelo físico e as propriedades do fluido, como viscosidade e velocidade. Também é importante estabelecer as condições de contorno que melhor representam o modelo proposto. Em nosso caso, aplicamos condições de contorno periódicas na direção vertical, fazendo com que ele pareça ser repetido infinitamente nessa direção. Esse tipo de condição reduz os efeitos de tamanho finito. Também utilizamos condições de contorno não deslizantes na interação entre o fluido e o sólido, o que significa que a velocidade do escoamento é zero próximo aos obstáculos.

Após essas construções, utilizamos o *software* ANSYS FLUENT, que é bastante utilizado em pesquisas em diversas áreas incluindo engenharia mecânica, aeroespacial, química e civil (OSSES; COMPLEXOS, 2020). Ele foi usado para simular o comportamento do escoamento do fluido em meios porosos. Como técnica para a solução do escoamento o Fluent utiliza o método de volumes finitos (FVM), que envolve a divisão do domínio em um número finito de volumes. As equações diferenciais são então resolvidas em cada volume utilizando uma abordagem de conservação. Assim, as propriedades do fluido, como massa e energia, são conservadas em cada pedaço de volume.

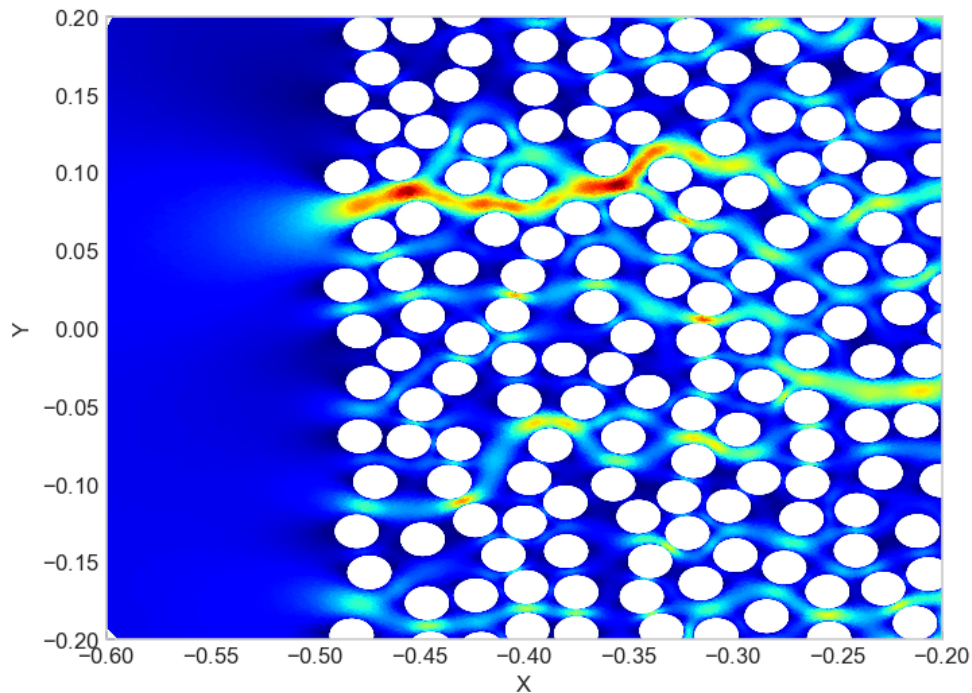
Uma característica importante do método de volumes finitos (FVM) é que ele respeita os princípios de conservação (massa, momento e energia) que são a base da modelagem matemática para a mecânica do contínuo (ABD; ABUSHAIKHA, 2020). Assim, por definição as equações deduzidas por esse método respeitam estes princípios, o que torna o método amplamente utilizado, não se limita a mecânica dos fluidos. Em geral, o FVM consiste em passos simples.

1. Decompor o domínio em volumes de controle;
2. Formular as equações de conservação para cada volume;
3. Resolver numericamente as integrais;
4. Estimar os valores das variáveis nas faces e suas derivadas usando informações das variáveis dos vértices;
5. Resolver o sistema algébrico obtido.

O ponto chave do método é a decomposição do domínio em pequenos volumes, com isso, é armazenado as variáveis a serem calculadas, nos vértices ou centros da malha e conseqüentemente essas variáveis são a referência para aproximar a solução para o resto do domínio. Depois de definidos esses pequenos volumes, as equações de conservação (massa, momento e energia) são transformadas em sua forma integral para cada pequeno volume da malha (MUNIZ *et al.*,

2005). Nesse sentido, o teorema de Gauss é utilizado para converter as integrais de volume em integrais de superfície. Após todo o processo obtemos os campos de velocidades e de pressão do escoamento proposto.

Figura 7 – Recorte de uma região específica do meio poroso. O mapa de cores indica a intensidade da velocidade em regiões distintas do meio poroso.



Fonte: Autor.

### 3.3 Interpolação do campo de velocidades

A interpolação espacial é um método usado para estimar valores em um domínio contínuo a partir de dados pontuais já conhecidos. É bastante útil em muitas áreas de conhecimento como geografia, meteorologia e engenharia, onde que os dados são coletados em pontos específicos do domínio e é necessário estimar valores em regiões em que não há dados disponíveis (CARUSO; QUARTA, 1998). Por exemplo, se tivéssemos dados de temperatura de algumas cidades de uma região, poderíamos utilizar interpolação para estimar a temperatura em outras áreas dessa mesma região, onde não temos dados disponíveis. O que nos permite transformar o conjunto de dados pontuais em um mapa contínuo de temperatura para região completa.

Para o nosso estudo, foi necessário realizar uma interpolação do campo de velocidades do escoamento para determinar a velocidade do fluido em pontos que não estavam incluídos no domínio discreto simulado. Isso foi providencial devido a necessidade de obtermos a solução

para o campo de velocidades o mais próximo do contínuo, permitindo assim estabelecer de forma mais fidedigna a trajetória das partículas quando transportadas pelo fluido no interior do meio poroso. Dado isso, é importante selecionar um método adequado dentre as várias opções disponíveis. Vários métodos foram testados para o nosso problema de escoamento. Podemos citar alguns:

#### 1. **Método do inverso da distância quadrada média (IDW)**

O ponto que está fora do domínio discretizado é calculado utilizando uma média ponderada de  $X$  pontos próximos, com os pesos calculados a partir do inverso da distância, sendo este um espaço euclidiano. Na prática, o método assume que os pontos próximos são mais semelhantes do que pontos distantes e conseqüentemente esses pontos tem mais influencia sobre o valor previsto do que aqueles que estão mais distantes (MALEIKA, 2020).

#### 2. **Método de Krigagem (KRG)**

Método de correlação estatística que leva em questão a correlação espacial entre os pontos de dados para estimar os pontos fora do domínio. A ideia parte da premissa que o ponto desconhecido é dado pela combinação linear dos valores já possuídos nas suas redondezas, com seus devidos pesos determinados a partir das suas correlações espaciais. Muito utilizado para prever valores em uma área geográfica e é amplamente utilizado em geologia, mineração, solo e ciência ambiental.

#### 3. **Método de interpolação Linear 2D ou Bilinear**

Esse método é realizado encontrando a equação do plano que passa pelos pontos conhecidos mais próximos e, em seguida, usando essa equação para estimar o valor em um ponto intermediário. Bastante utilizada em diversas áreas e sempre é parâmetro de comparação para outras interpolações semelhantes mas com a ordem do polinômio maior, como interpolação cubica por exemplo (KUMAR *et al.*, 2021).

#### 4. **Método RBF**

Este método utiliza funções de base radial (RBF), cujo valor depende apenas da distância entre o ponto de entrada, que seria o ponto a ser interpolado, e um ponto central fixo, faz parte do conjunto de pontos já conhecidos. Sendo assim, o método funciona escolhendo uma função RBF e ajustando seus parâmetros para que a função de interpolação se ajuste aos dados. As funções RBF mais comuns incluem as funções Gaussianas e multiquadráticas. Bastante útil em muitas aplicações, como modelagem de superfícies, previsão de dados e análise de imagens. Esse método em especial, foi escolhido para a realização

definitiva da interpolação do nosso escoamento.

Todos esses métodos, tem como base encontrar uma função  $F(x, y)$ , que descreve o modelo interpolado a partir dos dados de entrada. Essa função varia de acordo com o método utilizado. Um exemplo de funções que podemos citar para exemplificar o que foi dito é a função para o método linear/bilinear, quando aumentamos a ordem desse método, tornando-o cúbico obtemos uma maior precisão para os nossos dados.

Para isso, vamos considerar que  $v(x, y)$  é um dos valores dos dado de entrada no ponto  $P = (x, y)$ , portanto teremos  $P_{11} = (x^1, y^1)$ ,  $P_{21} = (x^2, y^1)$ ,  $P_{22} = (x^2, y^2)$  e  $P_{12} = (x^1, y^2)$ . Com  $f(x, y_1)$  e  $f(x, y_2)$  sendo a função de interpolação linear unidimensional para a respectiva posição do eixo vertical, equação 3.1, e  $F(x, y)$  a função de interpolação linear bidimensional(bilinear) (MONASSE, 2019):

$$\begin{aligned} f(x, y_1) &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} v(P_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} v(P_{21}) \\ f(x, y_2) &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} v(P_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} v(P_{22}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$F(x, y) = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2) \quad (3.2)$$

Para o caso bicúbico ou multilinear (LANEVE *et al.*, 2010), o que teremos é um polinômio, portanto a função  $F(x, y)$  será:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} v(P_{ij}) = a_{11} v(P_{11}) + a_{21} v(P_{21}) + a_{12} v(P_{12}) + a_{22} v(P_{22}) \quad (3.3)$$

Do ponto de vista computacional, as equações em questão podem ser representadas como sistemas lineares, que podem ser resolvidos por meio de algoritmos apropriados. A escolha do algoritmo mais adequado depende do contexto e dos conjuntos de dados de entrada. Como ilustrado anteriormente na Figura 6, nossa malha é não estruturada, tornando mais vantajoso o uso de um método mais apropriado para essa situação. Para a técnica de interpolação do escoamento que será utilizada, temos:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i R(\|x - y_i\|). \quad (3.4)$$

Usamos uma função de base radial (RBF) determinada pela distância euclidiana entre os pontos de dados  $y$  e um ponto de interpolação  $x$ , ao considerar os parâmetros  $\alpha_i$  e  $R$ . (WANG; LIU, 2002). No entanto, existem diversas funções  $R$  disponíveis, e realizamos uma comparação entre algumas delas para determinar aquela que proporciona a melhor precisão de interpolação.



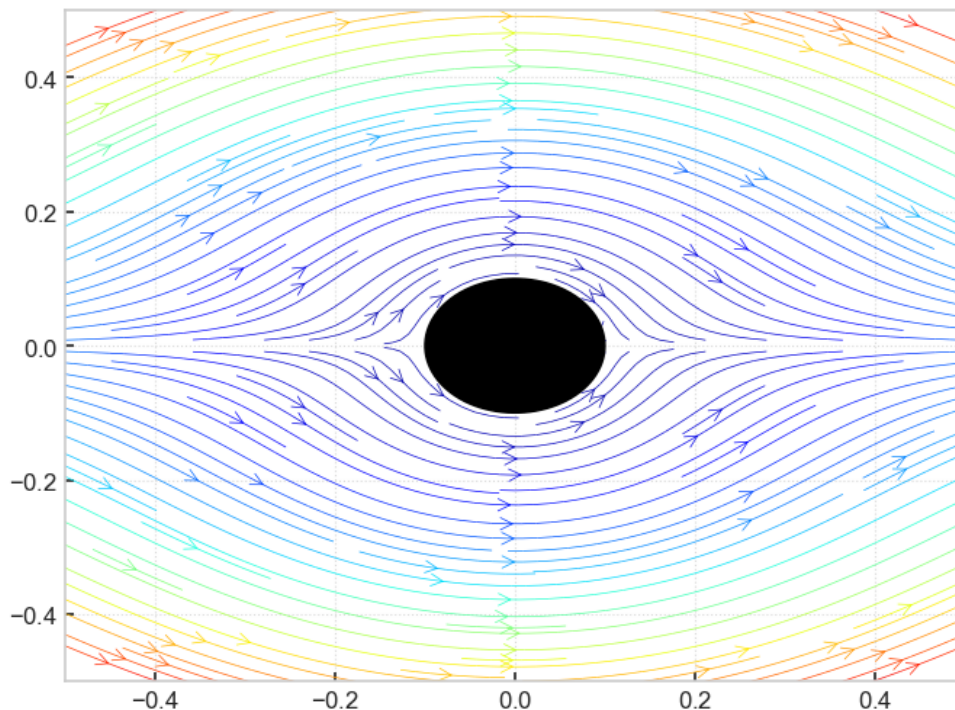
Para realizar os testes, utilizamos uma solução analítica para o caso de uma célula unitária com porosidade controlada. Esta solução é conhecida como solução de Kubawara (MARSHALL *et al.*, 1994), que é uma aproximação para escoamentos laminares ( $Re \ll 1$ ) que lineariza as equações de Navier-Stokes. Essa solução fornece a equação biarmônica:

$$\nabla^4 \Psi = \Delta^2 \Psi = 0. \quad (3.5)$$

Cuja solução analítica é dada para uma célula unitária com condições de contorno não deslisantes:

$$v_r(r = R) = v_\theta(r = R) = 0. \quad (3.6)$$

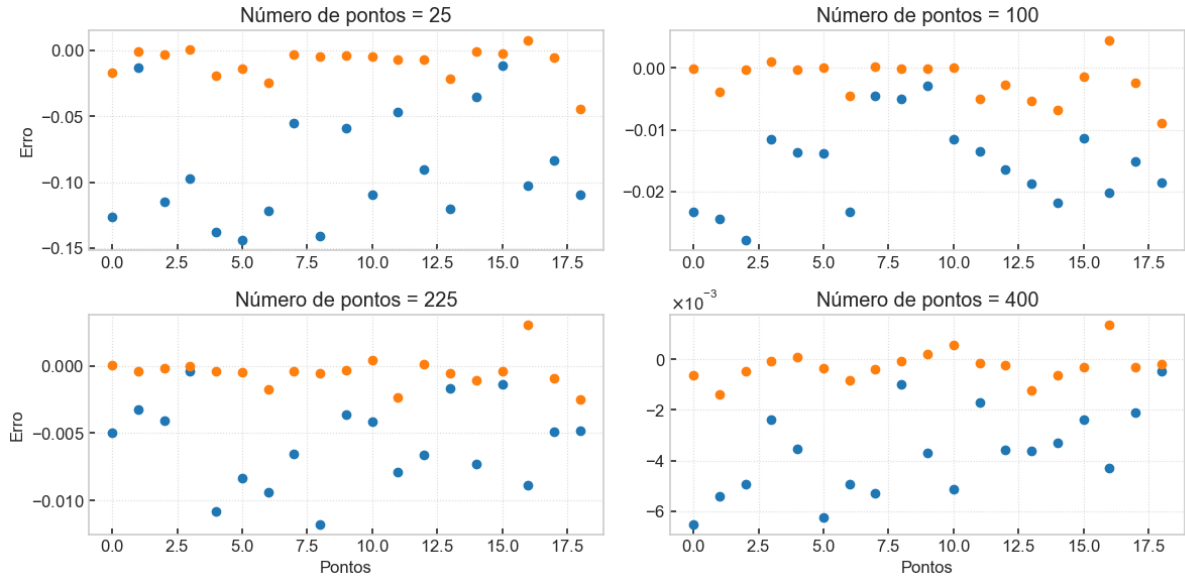
Figura 8 – Gráfico que ilustra as linhas de corrente da solução analítica de Kubawara, na condição de célula unitária com um obstáculo de raio 0,1.



Fonte: Autor.

Realizamos a construção de uma malha regular e comparamos os valores interpolados das velocidades com os valores analíticos. Por meio dessa série de testes, torna-se evidente a ordem de precisão dos métodos utilizados em relação ao número de pontos de entrada. No primeiro teste, utilizamos uma função chamada `vtk.probe`, presente no Kitware Visualization Toolkit (VTK), que realiza a interpolação bilinear com base nos dados próximos ao ponto de interesse Figura 9.

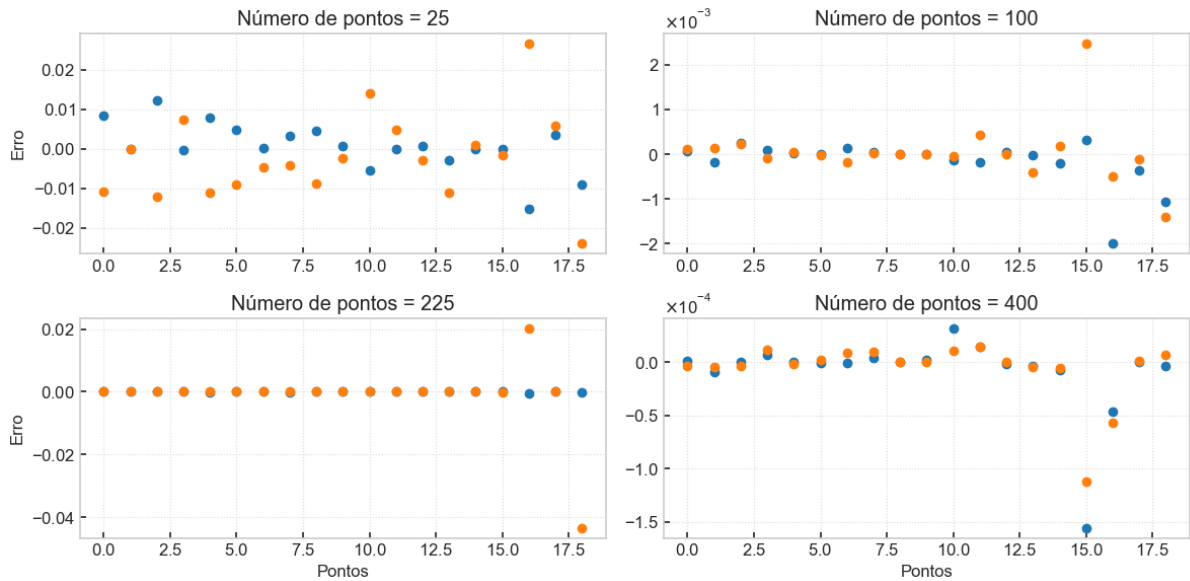
Figura 9 – Teste de erro da interpolação Bilinear, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Utilizamos a função `vtk.Probe`, da biblioteca VTK. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo  $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo  $y$ .



Fonte: Autor.

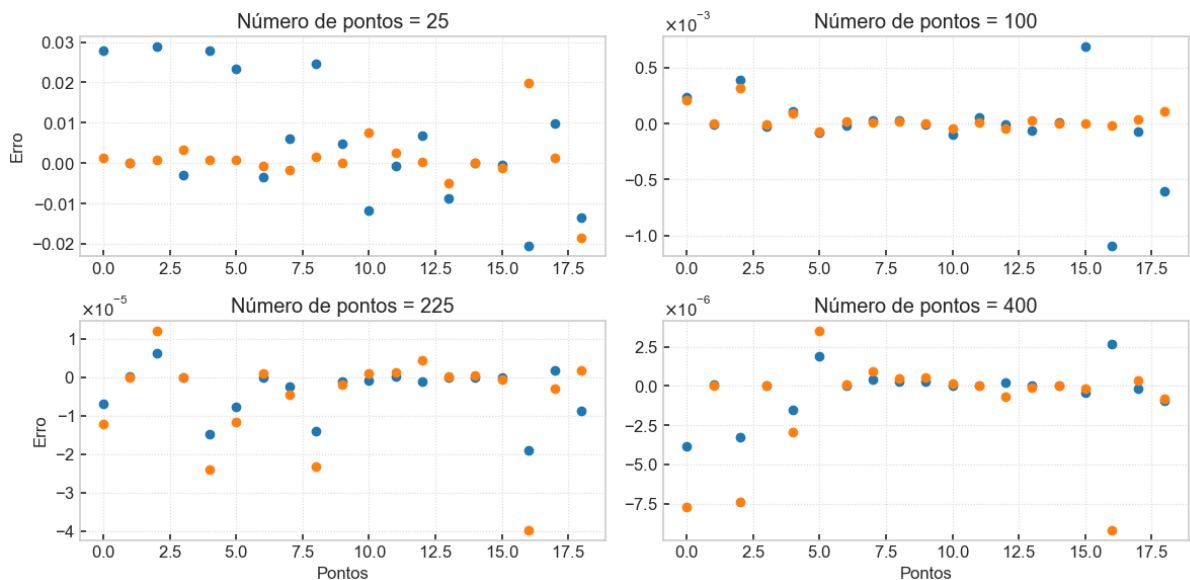
Fica evidente que quanto mais pontos de entrada, mais precisa ficará a interpolação linear. Além disso podemos ver um certo viés de erro para campo abaixo do eixo horizontal. Para o segundo teste, interpolamos todo o domínio uma única vez, e criamos a função  $F$  para o caso Bicúbico Figura 10. Note que para esse caso, tivemos evolução na precisão, entretanto, para pontos próximos do obstáculo, o erro na velocidade vertical ( $V_y$ ) é muito exacerbado, enquanto o erro para velocidade horizontal ( $V_x$ ) continua com suas flutuações normalmente dentro de um limite aceitável. Para o terceiro teste, utilizamos o método RBF, para um polinômio de ordem 5 Figura 11.

Figura 10 – Teste de erro da interpolação Bicúbica, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo  $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo  $y$ .



Fonte: Autor.

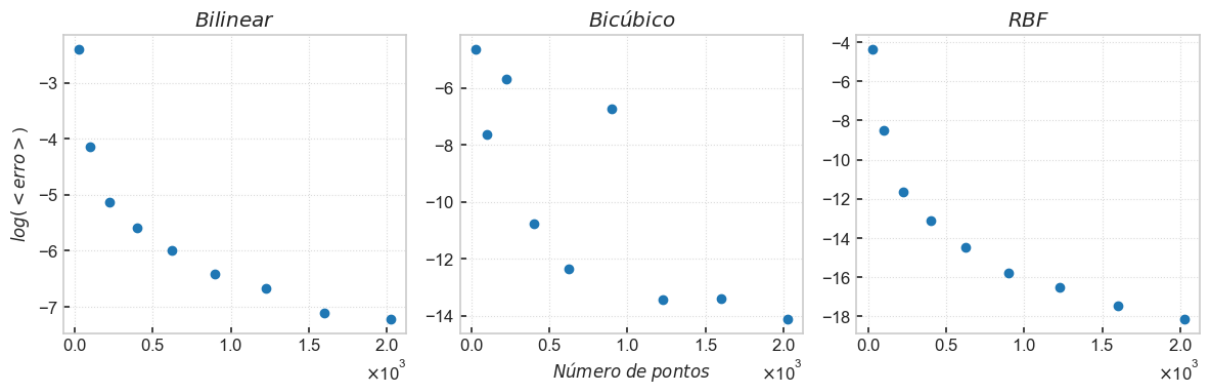
Figura 11 – Teste de erro da interpolação RBF, com pontos aleatórios dentro do domínio de Kubawara. Os pontos azuis representam as componentes de velocidade no eixo  $x$ , enquanto os pontos laranjas representam a componente de velocidade no eixo  $y$ .



Fonte: Autor.

Neste último, existe mais precisão e consistência com relação os outros, além de notoriamente a taxa de erro cair mais rapidamente, como podemos ver na Figura 15. Para os erros mais acentuados em todas os gráficos, deve-se a proximidade da interpolação com o obstáculo. Sendo esse erro maior para o caso quando utilizamos interpolação bicúbica em todo o domínio para depois consultarmos os valores de velocidades.

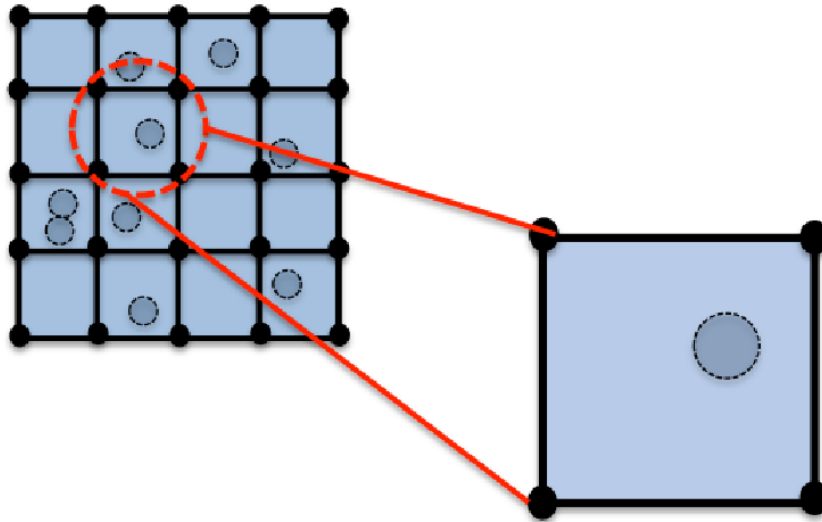
Figura 12 – Os gráficos apresentam a evolução do erro médio em função do número de pontos de entrada.



Fonte: Autor.

De fato, para o caso bicúbico, notamos que a média do erro é instável devido a alguns fatores, a interpolação bicúbica, é solucionada resolvendo sistemas lineares e não leva em consideração explicitamente a proximidade dos dados, sendo assim, quando interpolamos o domínio inteiro, e consultamos os valores de velocidades em pontos próximos do obstáculo, onde não temos dados de entrada, obtemos erros muito grandes. Em contrapartida, dentre as outras duas interpolações mais estáveis, a primeira é a interpolação bilinear, que utiliza um conjunto restrito de dados próximos ao ponto de interesse. Por sua vez, a interpolação RBF, também realizada apenas uma vez no domínio, minimiza o erro dos valores interpolados considerando as distâncias euclidianas do conjunto de dados. Sendo assim, fica mais evidente que o método RBF que utilizamos além de ser mais preciso, é mais estável em comparação ao método de interpolação bicúbico com base na equação 3.3.

Figura 13 – Mecânica de interpolação por células para uma partícula suspensa no fluido. O meio poroso é dividido em células com pontos de velocidade. À medida que a partícula avança, a interpolação é recalculada na célula atual para obter um campo de velocidades contínuo adequado.



Fonte: (ZAKY, 2017)

No caso específico do meio poroso, que contém milhões de pontos de velocidade tanto na vertical quanto na horizontal, não é viável aplicar a interpolação em todos esses pontos. Em vez disso, propõe-se uma abordagem que divide o meio poroso em pequenas regiões, Figura 13, cada uma contendo uma quantidade calculável de pontos de velocidade. Quando uma partícula está suspensa no meio poroso, identifica-se a região em que a partícula está localizada e calcula-se a função  $F(x,y)$  da interpolação utilizando o método RBF. Dessa forma, obtemos um campo de velocidades contínuo para integrar a partícula enquanto ela permanecer nessa região. Conforme a partícula avança e sai dessa região, ela entra em outra, reiniciando-se o cálculo da função de interpolação. Com essa abordagem, quando outras partículas passarem pelas mesmas regiões, não será necessário recalculá-la.

### 3.4 Integração numérica

Para a integração numérica da equação 2.15, utilizamos o método bastante conhecido Runge-Kutta de 4ª ordem, entretanto usamos uma variação que nos permite conseguir mais precisão e velocidade na integração. O chamado Runge-Kutta Adaptativo (PRESS; TEUKOLSKY, 1992), funciona basicamente sacrificando um pouco de processamento, calculando o mesmo ponto três vezes, em troca de otimizar o tamanho dos passos. Primeiramente fazemos o método normalmente:

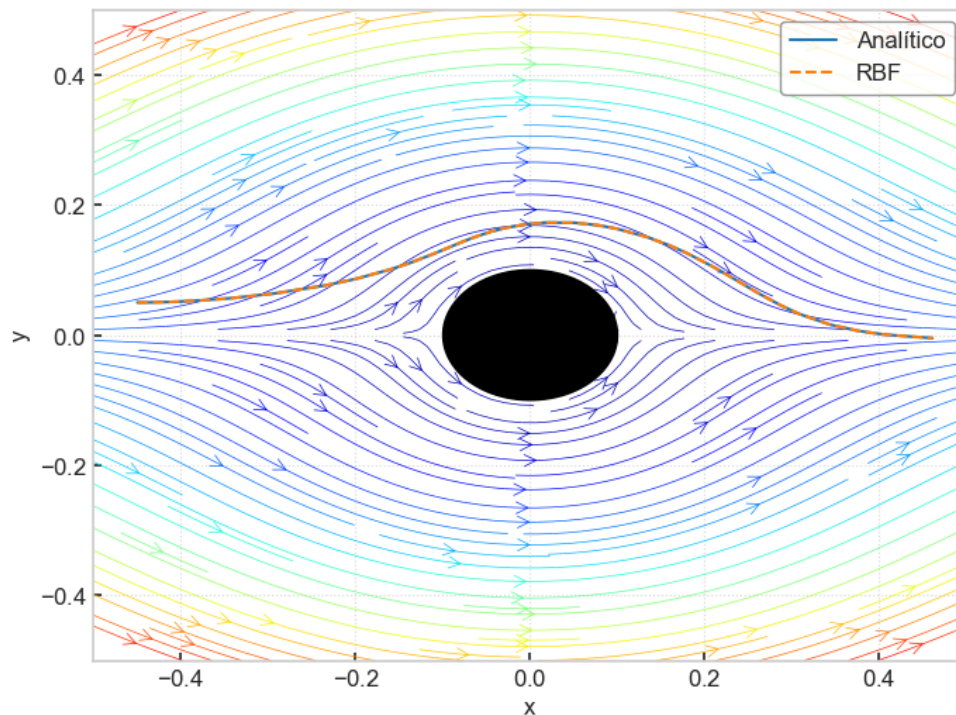
$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
 k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 + O(h^5)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

em seguida realizamos três passos, o primeiro  $y_1$  com o tamanho  $h$ , o segundo,  $y_{02}$  com a mesma origem do  $y_1$ , porém com o tamanho  $h/2$ , e em sequencia o  $y_{12}$  também com o tamanho  $h/2$ . No final chegamos no final do passo de duas maneiras diferentes, claramente a segunda, na qual foi realizado passos menores, será mais precisa. Agora, calculamos  $\Delta = y_{12} - y_1$ , esse será o erro entre os dois caminhos. Em método, fixamos um erro tolerável de  $10^{-4}$ . Tendo isso em mente, quando o  $\Delta$  ultrapassa esse erro, diminuimos o  $h$  pela metade e reiniciamos o cálculo. Quando o erro está dentro do tolerável, aumentamos o  $h$  em 50%, assim a integração vai dando passos mais largos onde o erro não ultrapassa o tolerável, e sendo mais cuidadosa onde é necessário mais precisão. Essa maneira simples de utilizar a integração é benéfico especialmente, quando as partículas se aproximam dos obstáculos, onde notamos um aumento no erro, e assim passos mais cautelosos são realizados pelo método.

### 3.5 Validação dos métodos

Após a análise de erro, foram realizados experimentos para investigar as trajetórias de partículas em dois cenários distintos. No primeiro caso, a solução analítica foi utilizada como referência, comparando a trajetória calculada a partir do campo de velocidades de Kubawara com a trajetória obtida através da interpolação de um conjunto de pontos provenientes da mesma solução analítica.

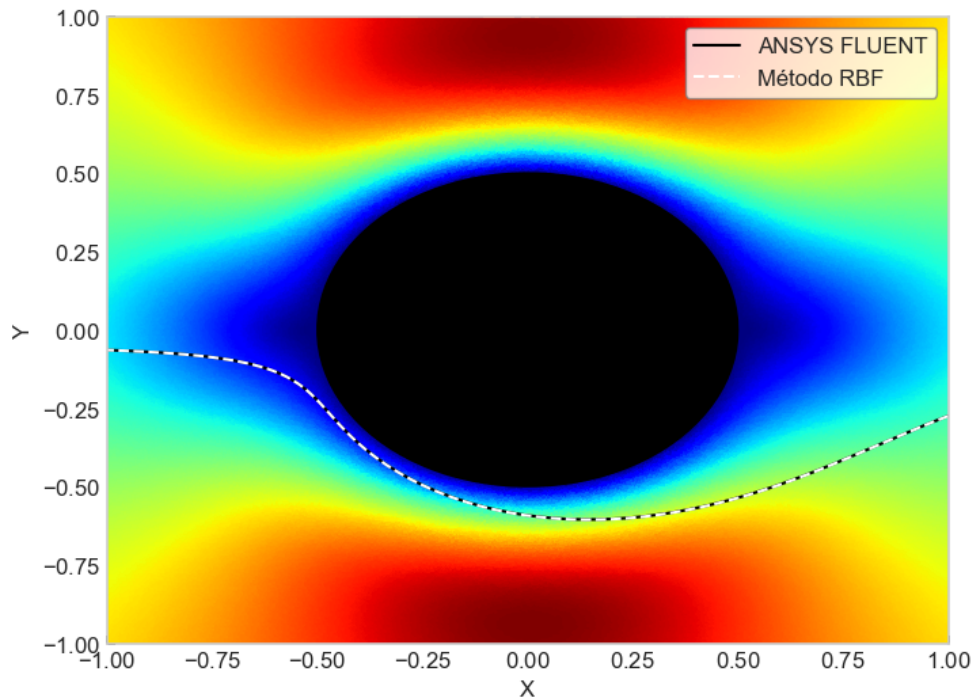
Figura 14 – Comparação da integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem adaptativo, empregando tanto o campo de velocidades analítico (representado por uma linha sólida) quanto o campo de velocidades interpolado por meio do método RBF (representado por uma linha tracejada), para um determinado número de Stokes.



Fonte: Autor.

No teste subsequente, um experimento similar foi conduzido para comparar os resultados com o do ANSYS FLUENT. Nesse caso, o campo de velocidades utilizado foi semelhante ao campo analítico, mas foi obtido utilizando o método de volumes finitos (FVM) para descrever o comportamento do fluxo.

Figura 15 – Comparação da integração numérica entre o ANSYS FLUENT (representado por uma linha sólida) e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem adaptativo, utilizando o campo de velocidades obtido por meio do método de volumes finitos (FVM) com ANSYS FLUENT e a interpolação de velocidades utilizando o método RBF (representado por uma linha tracejada), para um determinado número de Stokes.



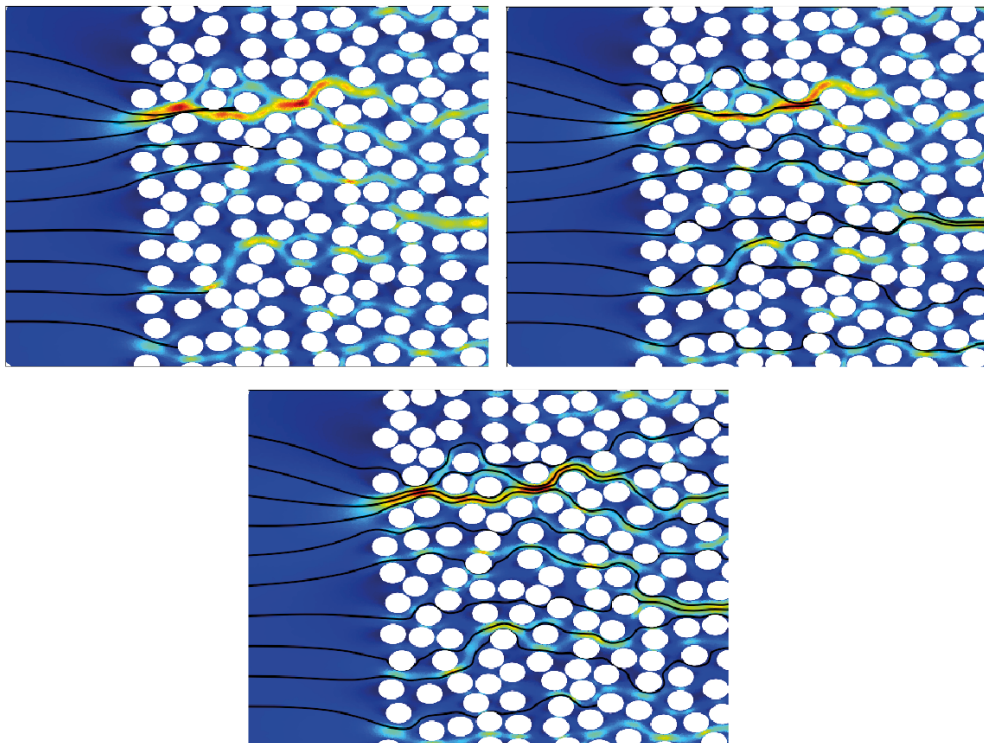
Fonte: Autor.



## 4 RESULTADOS

Considerando o escoamento de um fluido em um meio poroso, realizamos uma análise sobre o processo de captura de partículas que atravessam esse meio quando são transportadas pelo fluido. A captura das partículas ocorre quando elas tocam alguma estrutura dentro do meio poroso, o que significa que a partícula se encontra a uma distância menor que  $\frac{D}{2} + 10^{-4}$  de algum obstáculo. Devido à natureza aleatória da composição do meio poroso utilizado, empregamos quinze meios porosos distintos, todos com uma porosidade constante de 0.6, seguindo a equação 2.1. O escoamento do fluido ocorre no regime de baixos números de Reynolds. Uma vez definido o regime de escoamento, iniciamos a etapa que investiga as trajetórias das partículas utilizando como parâmetro de controle o número de Stokes. Trata-se de um número adimensional que define se o comportamento das partículas serão balístico ou *tracer*.

Figura 16 – Gráfico das trajetórias de partículas em um meio poroso, ilustrando diferentes comportamentos de acordo com o número de Stokes. A primeira imagem a esquerda apresenta partículas balísticas com  $St = 10^{-2}$ , a figura superior a direita um valor intermediário e finalmente a última imagem representa *tracers* com  $St = 10^{-4}$



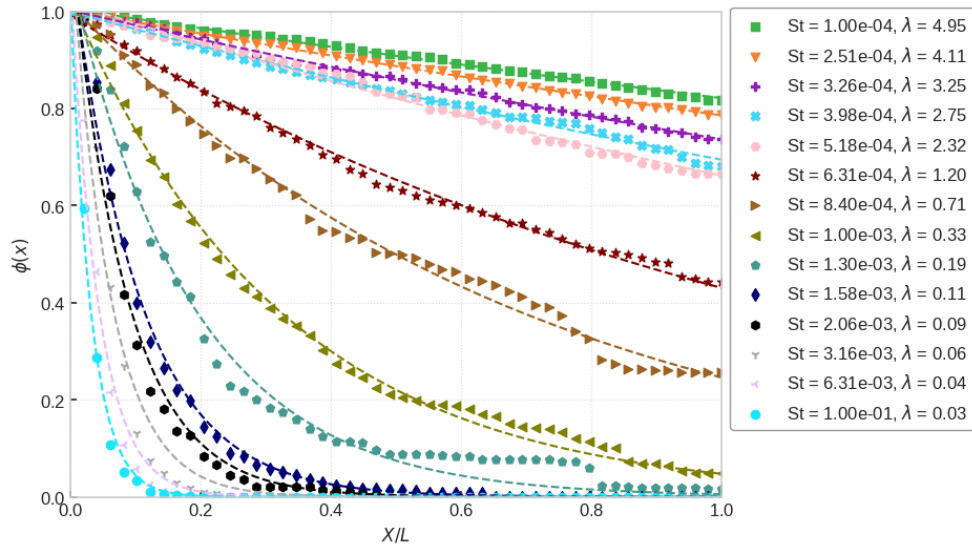
Fonte: Autor.

Para cada meio poroso, procedemos com uma análise do processo de captura (eficiência de um filtro) considerando a trajetória de 100 partículas lançadas na entrada de cada meio, distribuídas de forma equidistante ao longo dessa entrada. É importante ressaltar que as partículas não interagem entre si e não transferem momento para o fluido (partículas com tamanho muito reduzido). Inicialmente, investigamos o cenário em que as partículas e o meio poroso são neutros, ou seja, não há interação elétrica. Esse cenário neutro serve como referência para o comportamento padrão da trajetória das partículas transportadas pelo fluido.

O critério de utilização de 100 partículas justifica-se pelo fato de que quando aumentamos esse número as partículas passam a seguir trajetórias idênticas no interior do meio poroso. Portanto, aumentar o número de partículas não acrescenta informações ao nosso processo de captura. Vale salientar que, com esse número de partículas obtemos um comportamento satisfatório em termos de continuidade para o parâmetro ( $\lambda$ ) definido como o comprimento característico da exponencial que descreve a fração de capturas das partículas, a medida que essas penetram no meio. Essa equação é empregada como base para a investigação do processo de penetração das partículas no meio poroso. Especificamente, realizamos cálculos para determinar a fração de captura ( $\phi$ ) das partículas em relação ao comprimento do meio poroso. Inicialmente, conduzimos essa análise com um valor fixo do número de Stokes, variando o número de partículas suspensas no fluxo, a fim de determinar o número ideal de partículas a serem lançadas utilizando como critério a definição das trajetória, conforme mencionado anteriormente. Uma vez que justificamos a quantidade de partículas, investigamos como a fração de partículas suspensas se comporta para casos diferentes do número de Stokes, Figura 17.

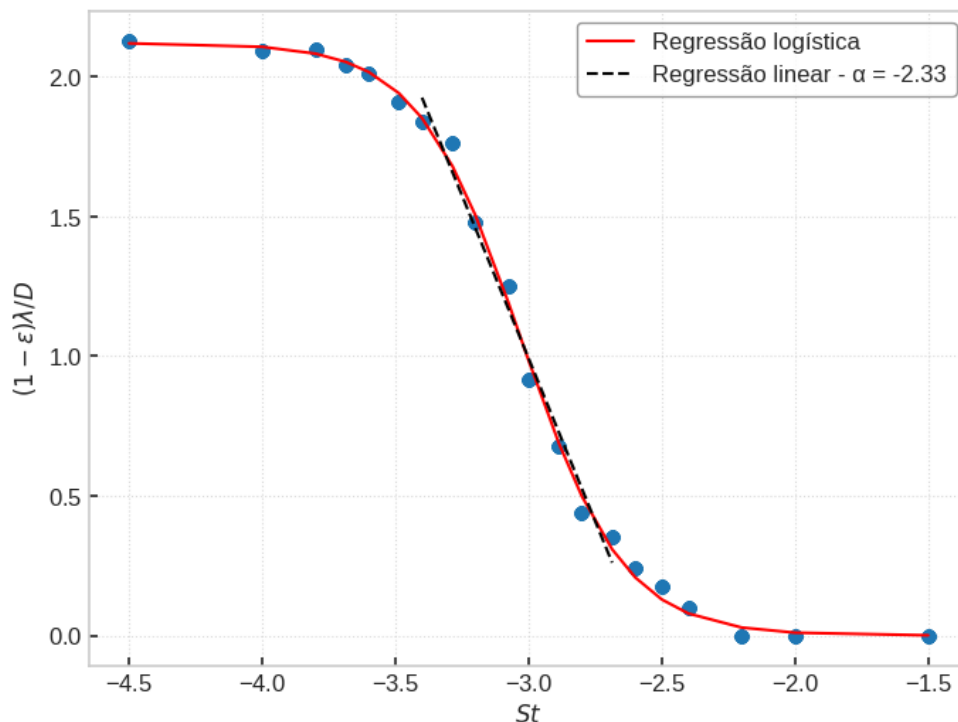
A partir das curvas apresentadas na Figura 17, podemos constatar um comportamento exponencial, da fração de captura ( $\phi$ ) ao longo do comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ) para diferentes valores do número de Stokes. Esse padrão é evidenciado pelos ajustes exponenciais realizados em cada curva (diferentes símbolos), linhas sólidas, correspondendo aos diversos valores do número de Stokes. À medida que o número de Stokes aumenta, as partículas exibem um comportamento mais balístico, resultando em uma diminuição mais rápida na fração de captura. Esse aspecto fica claramente evidenciado pelos valores do parâmetro característico da exponencial ( $\lambda$ ), que varia inversamente proporcional ao número de Stokes. Quanto mais balísticas as partículas se tornam, maior é a probabilidade de colisão com obstáculos durante a penetração no meio poroso e menor será o seu comprimento de penetração, evidenciando uma maior eficiência no processo de captura para esse valor do número de Stokes.

Figura 17 – A relação entre a fração de partículas capturadas ( $\phi$ ) no interior de um meio poroso e o comprimento de penetração normalizado para diferentes valores do número de Stokes. As linhas contínuas indicam os ajustes exponenciais realizados para cada curva, sendo que o parâmetro  $\lambda$  representa o comprimento característico associado a cada ajuste exponencial.



Fonte: Autor

Figura 18 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes  $St$ , caso neutro.



Fonte: Autor.

Quando analisamos o parâmetro de penetração ( $\lambda$ ) em relação ao número de Stokes, conforme representado em escala log-log na Figura 18, observamos a existência de dois limites distintos. Primeiramente na região de valores elevados do número de Stokes, notamos que

o comprimento de penetração das partículas passa a ser constante além de um determinado ponto próximo ao regime puramente balístico. Independentemente do aumento no valor de  $St$ , não observaremos mais partículas se deslocando ao longo do filtro. Por outro lado, existe um limite para as partículas que conseguem atravessar a estrutura porosa sem serem capturadas. A medida que aumentamos o valor do Stokes o sistema exibe um comportamento em lei de escala, evidenciado pelo comportamento linear da curva na figura em escala log-log, onde o comprimento de penetração  $\lambda$  decai na forma de uma lei de potência,  $(1 - \varepsilon)\lambda/D \sim St^{-\alpha}$ , em função do número de Stokes. Esse comportamento se estabelece até atingir um comprimento nulo para a penetração, quando o número de Stokes é da ordem de  $10^{-2.3}$ . A partir desse valor o comprimento de penetração é nulo e o comportamento das partículas é totalmente balístico. Seria a eficiência máxima de nosso processo de filtragem. Nesse regime, todas as partículas são capturadas pelo filtro (meio poroso).

Além dos limites previamente mencionados, conforme já destacado, ressaltamos a presença de uma lei de escala em um intervalo específico do número de Stokes, que reflete o comportamento não linear das variáveis em análise. Realizando os ajustes apropriados utilizando os parâmetros do estudo, obtemos um comportamento que segue uma lei de potência expressa na seguinte forma:

$$(1 - \varepsilon)\lambda/D = \beta St^{-\alpha} \quad (4.1)$$

Através da análise de regressão linear, determinamos o expoente  $\alpha \approx -2.33$  que governa o declínio da curva na região em lei de potência.

#### 4.1 Meios porosos com propriedades elétricas

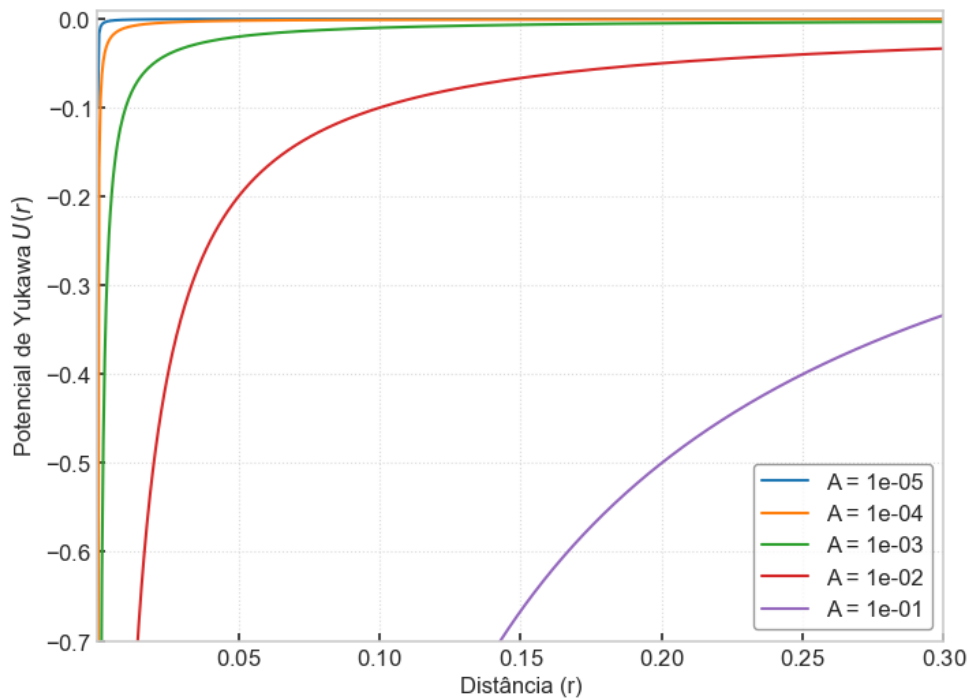
Incorporando propriedades elétricas às estruturas porosas presentes nos filtros em simulação, será introduzida uma camada adicional de complexidade no sistema. Para modelar essas propriedades elétricas, serão consideradas cargas nas partículas suspensas e na estrutura do meio poroso. Essa interação elétrica será representada por meio do potencial central de Yukawa, descrito pela equação 2.17. Com base nesse potencial analisaremos os efeitos da blindagem (parâmetro  $k$ ) e intensidade do potencial (parâmetro  $A$ ) sobre o processo de capturas das partículas. Investigaremos esses efeitos sobre a densidade de partículas suspensas ( $\phi$ ) e sobre o comprimento de penetração a penetração no meio filtrante ( $\lambda$ ), conforme proposto anteriormente no caso neutro. Essa abordagem permite uma investigação mais aprofundada

dos efeitos da presença de interações elétricas no processo de filtragem de pequenas partículas. Destacamos a importância de uma comparação desses comportamentos na presença de cargas elétricas com o caso neutro, uma vez que o comportamento físico/químico na escala micro, majoritariamente se estabelece por meio das interações elétricas.

#### 4.2 $k = 0$ (Coulomb)

Inicialmente, vamos examinar o caso em que não há blindagem do potencial, permitindo que todas as partículas suspensas sejam afetadas pelo campo elétrico presente em toda a estrutura porosa. Nesse contexto, investigaremos o efeito da intensidade do potencial, representada por  $A$ . A Figura 19 ilustra como essa intensidade influencia o comportamento do potencial de Yukawa. Esse parâmetro está diretamente relacionado à propriedade elétrica da estrutura porosa, de modo que um aumento no valor de  $A$  resulta em um maior alcance do potencial. Em outras palavras, para uma mesma distância  $r$ , observamos uma maior efetividade do potencial quando a intensidade é maior.

Figura 19 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em várias configurações de  $A$  em relação à distância  $r$ . É observado que um aumento no valor de  $A$  resulta em um alcance maior do potencial para uma mesma distância  $r$ .

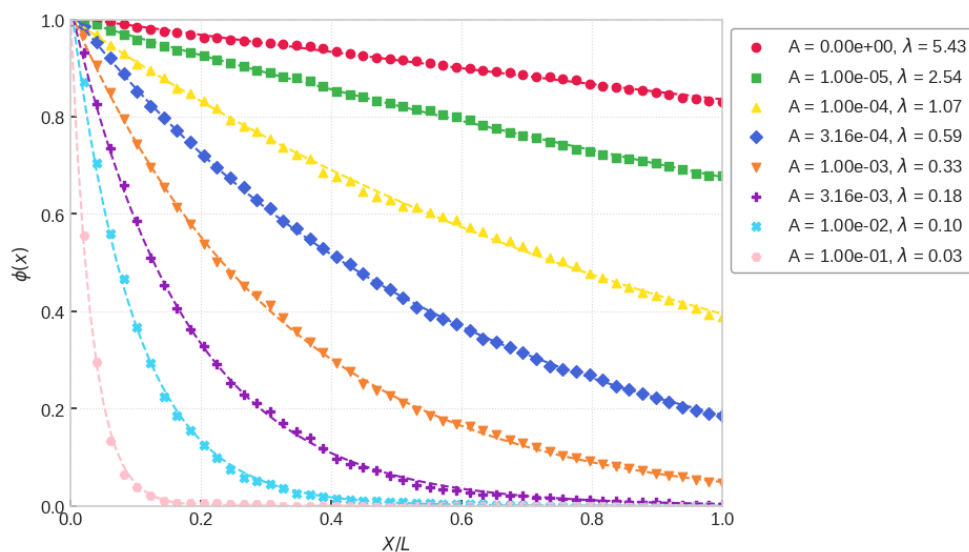


Fonte: Autor.

Ao incorporarmos o efeito elétrico, observamos que não há uma modificação na forma funcional da densidade de partículas suspensas ( $\phi$ ) ao longo do meio. As simulações realizadas, apresentadas na Figura 20, mostram que, mesmo variando a intensidade  $A$  do efeito elétrico, mantendo o número de Stokes fixo, não mudam o comportamento exponencial da densidade das partículas suspensas. Nesse contexto, analisamos a mudança de intensidade do potencial para diferentes números de Stokes e estudamos como o comprimento característico  $\lambda$  da função exponencial se modifica em relação ao parâmetro de intensidade  $A$ . Como a aparência da exponencial se manteve para todos os casos do número de Stokes, o fator da inercia, apesar de alterar o processo de capturas das partículas o seu regime de atuação (limites de mudança de comportamento) não foi substancialmente modificado pela presença de forças elétricas no sistema. Veremos mais adiante que a influência das interações elétricas se limitou ao valores dos parâmetros de ajuste para os comportamentos exponenciais das curvas.

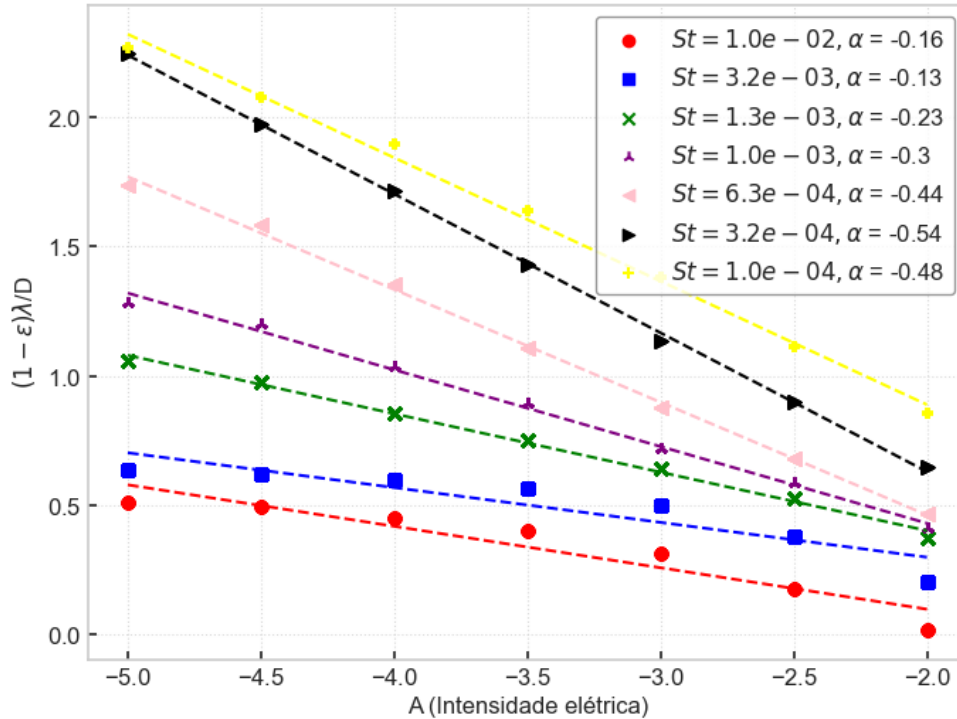
Ao analisarmos os valores do comprimento de penetração normalizado em relação à efetividade do potencial  $A$  para diferentes números de Stokes, observamos um comportamento de lei de potência, semelhante ao encontrado anteriormente para o caso em que não há propriedades elétricas nas estruturas porosas, equação 4.1, e se dá na forma  $(1 - \varepsilon)\lambda/D \sim A^{-\alpha}$ .

Figura 20 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 0$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial ( $A$ ). As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ .



Fonte: Autor.

Figura 21 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$ . Os diferentes símbolos representam valores distintos do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares propostos para cada curva, em que os coeficientes angulares correspondem ao expoente na lei de potência.

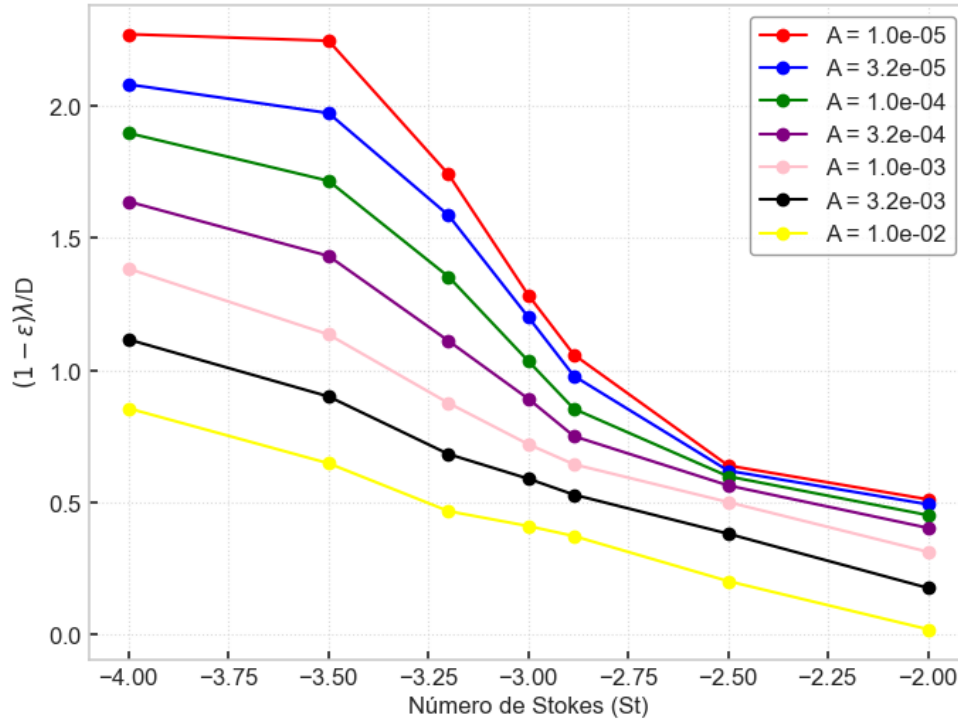


Fonte: Autor.

O comportamento observado sugere a existência de uma relação de escala característica para o caso com a presença de interação elétrica, porém um aspecto relevante foi o surgimento de uma dependência do expoente que controla o comportamento em lei de potência com a intensidade do potencial elétrico  $A$ . O efeito da interação elétrica fica mais evidente para partículas com uma inércia menor, aquelas partículas que seguem as flutuações no campo de velocidade. Mas vale destacar que para o caso de elevados número de Stokes, partículas balísticas, esse efeito também reduz o comprimento de penetração aumentando a eficiência da filtragem. Essa observação indica que a intensidade do potencial elétrico desempenha um papel substancial na captura e movimento das partículas suspensas, influenciando diretamente sua distribuição e dinâmica ao longo do meio poroso.

A partir do gráfico da Figura 22, podemos observar que, à medida que aumentamos o potencial elétrico, ocorre uma redução na penetração ( $\lambda$ ) normalizada. Além disso, é possível perceber uma mudança no comportamento do comprimento de penetração para o caso elétrico. Para valores pequenos de  $A$  o comprimento de penetração sofre uma mudança mais acentuada como função do número de Stokes. A medida que aumentamos a intensidade da interação elétrica,

Figura 22 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 0$  (potencial Colombiano). As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na forma como as curvas se comportam para diferentes valores do parâmetro  $A$ .



Fonte: Autor.

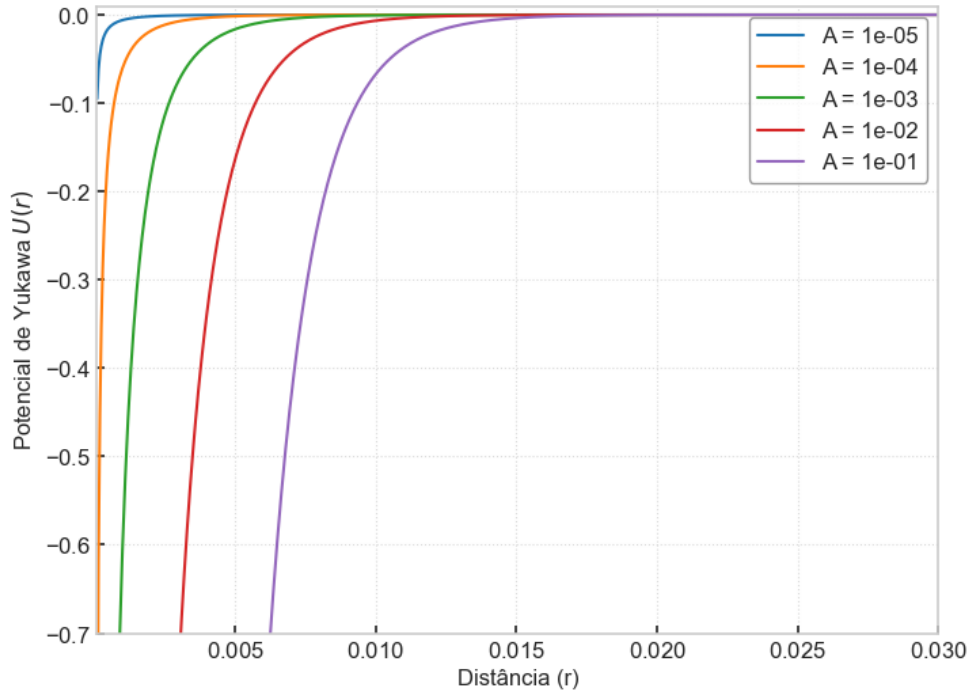
esse decaimento vai ficando mais suave. Fica evidente que o comprimento de penetração exibe uma região de transição, para valores moderados do Stokes, bem mais sensível ao parâmetro  $A$ .

### 4.3 $k = 10/D$ e $k = 20/D$

Quando consideramos o potencial de Yukawa com valores distintos de zero para o parâmetro  $k$ , adicionamos um elemento adicional na interação elétrica chamado blindagem do potencial. Para ilustrar melhor como o parâmetro  $k$  afeta o potencial de Yukawa, a Figura 24 exibe as curvas do potencial com  $k = 10/D$  e diferentes valores de  $A$ . Nesse contexto, a blindagem do potencial varia conforme a distância  $r$ . À medida que a distância se aproxima da ordem de magnitude dos obstáculos, o efeito do potencial se torna insignificante. Somente para valores elevados de  $A$ , a partícula percebe a interação elétrica quando está próxima do obstáculo. Para esse caso em específico, as partículas interagem eletricamente com a estrutura a partir de distâncias menores do que  $3D/4$  da superfície. Conforme os valores de  $A$  aumentam, a interação se restringe a uma distância curta. Esse fenômeno de blindagem que impacta o transporte das partículas amplia a eficiência do filtro.

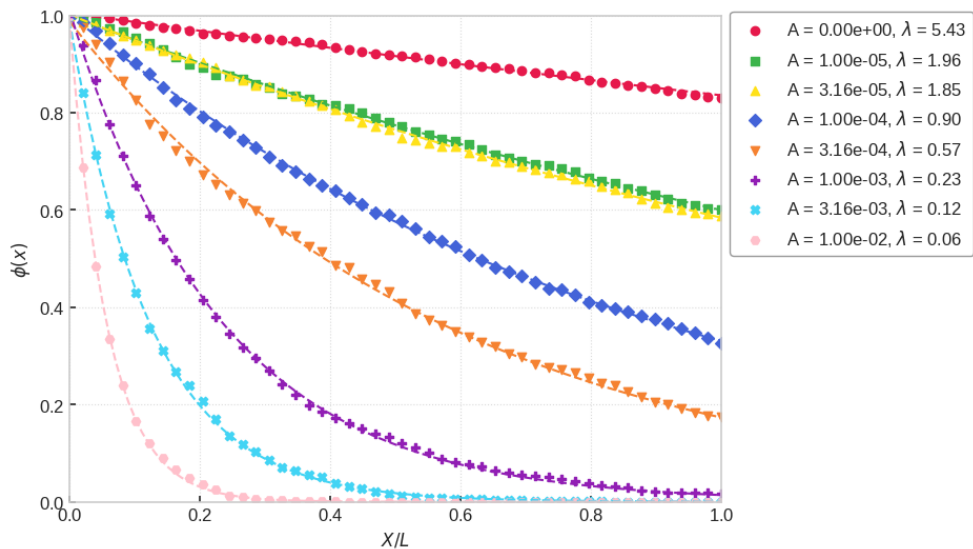


Figura 23 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em diferentes configurações de  $A$  em relação à distância  $r$ , considerando uma situação com blindagem, onde  $k = 10/D$ . Ainda é observado que um aumento no valor de  $A$  resulta em um aumento do alcance do potencial para uma mesma distância  $r$ .



Fonte: Autor.

Figura 24 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 10/D$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial ( $A$ ). As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ .



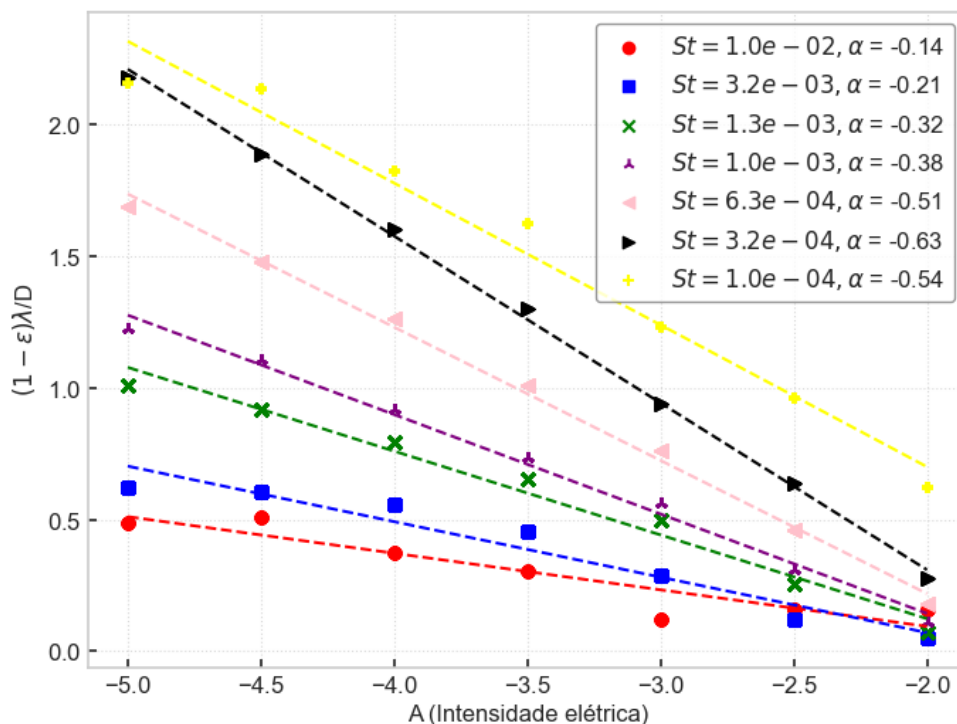
Fonte: Autor.

O comportamento exponencial da fração de partículas ao longo do meio poroso não se altera, mas os coeficientes que governam a penetração dessas partículas apresentam alterações

sistemáticas, conforme ilustrado no gráfico da Figura 24. Neste caso, a queda do comprimento característico da exponencial ocorre de forma um pouco diferente, especialmente para partículas com baixo número de Stokes. É importante observar que em uma determinada faixa do parâmetro  $A$ , a evolução da densidade de partículas suspensas quase não apresenta alteração. Isso ocorre devido à presença da blindagem, onde a intensidade do potencial elétrico nesse ponto é muito fraca e a blindagem é muito pequena.

Nesse contexto, as partículas do tipo *tracers*, que passam próximas aos obstáculos, são capturadas, enquanto aquelas que não passam suficientemente próximas conseguem atravessar todo o meio poroso. Portanto, foram realizadas simulações para entender melhor o comportamento das partículas quando a estrutura porosa exhibe esse fenômeno de blindagem, alterando-se o número de Stokes.

Figura 25 – Gráfico que apresenta uma escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$  para o caso blindado  $k = 10/D$ . Os diferentes símbolos representam valores distintos do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares propostos para cada curva, em que os coeficientes angulares correspondem ao expoente na lei de potência.

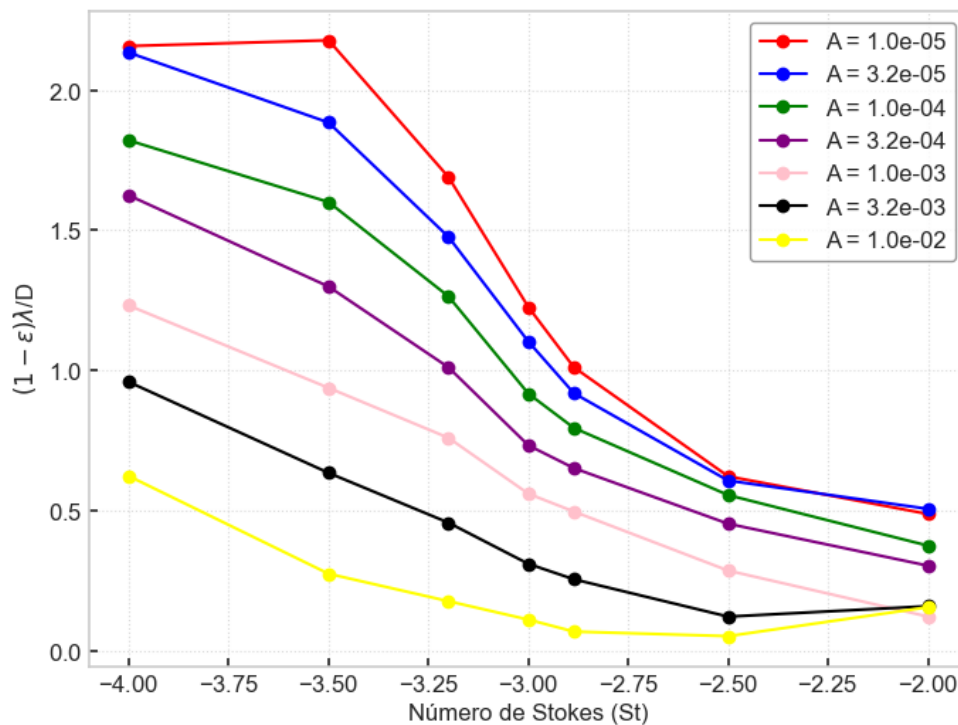


Fonte: Autor.

Ao analisarmos o gráfico da Figura 25, podemos observar novamente o fenômeno mencionado anteriormente. No caso em que  $St = 10^{-4}$ , quando ocorre uma baixa intensidade do potencial, há uma mudança no comportamento do parâmetro de penetração das partículas.

Essa mudança se estende para intensidades ainda mais baixas, pois as partículas que estão muito próximas dos obstáculos são capturadas. Por outro lado, no caso mais balístico, podemos observar um comportamento não sistemático em relação à penetração, que se acentua quando aumentamos a intensidade. A explicação para isso é que as partículas mais balísticas conseguem superar o potencial de Yukawa à medida que se aproximam da distância para uma efetiva blindagem. No entanto, quando aumentamos muito a intensidade, essas partículas são rapidamente capturadas, como evidenciado pela constância dos três últimos pontos quando o número de Stokes é igual a  $St = 10^{-2}$ .

Figura 26 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 10/D$ . As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na identificação do parâmetro  $A$ .



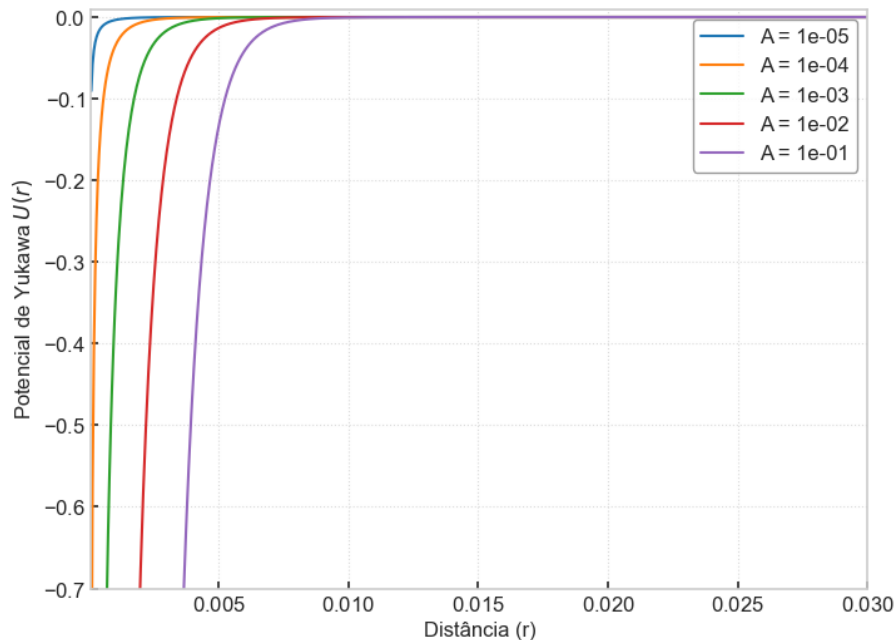
Fonte: Autor.

Quando analisamos o comprimento de penetração em função do Stokes para diferentes valores de  $A$ , considerando a presença da blindagem, o gráfico na Figura 26 revela uma diminuição no parâmetro de penetração ( $\lambda$ ) à medida que o potencial elétrico é aumentado. Além disso, observa-se uma mudança no comportamento das curvas, resultando em uma alteração do coeficiente característico da lei de potência mencionada anteriormente. No entanto, uma região de interesse é evidenciada pelos dados representados pelas cores amarelo, preto e rosa, onde regimes mais balísticos são observados. Nessa região, as forças inerciais atuando nas partículas

superam o potencial elétrico e a blindagem. Notavelmente, as três curvas convergem para um valor único de penetração, indicando um comportamento distinto nesse regime específico.

Essa mesma análise é válida quando realizamos o estudo com uma blindagem ainda mais próxima do obstáculo, usando  $k = 20/D$ . Nesse caso, observamos algumas pequenas diferenças, mas o comportamento das trajetórias e da fração de partículas suspensas permanecem inalterado. Podemos constatar que agora as partículas só irão perceber a presença do potencial quando estiverem a cerca de  $D/4$  da superfície das estruturas porosas.

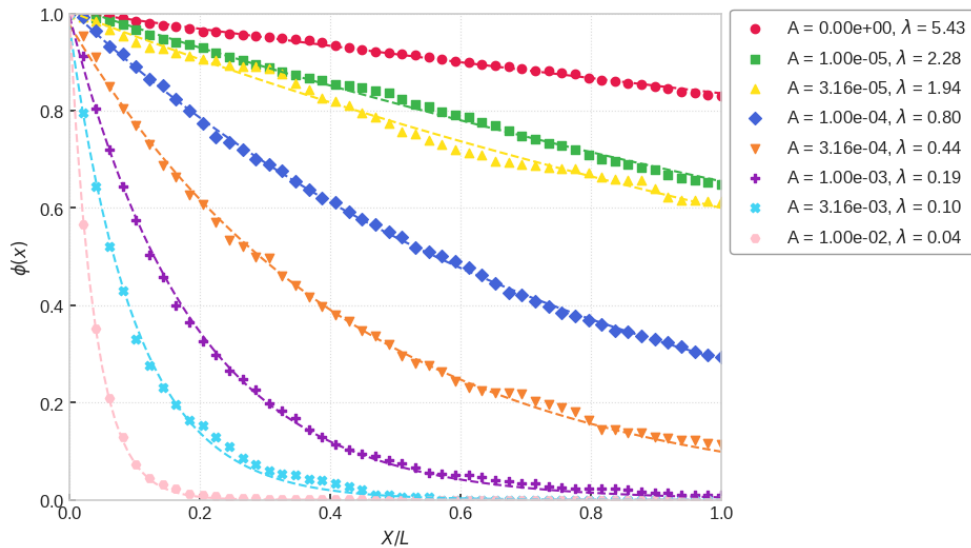
Figura 27 – Ilustração do potencial de Yukawa, representado por  $U(r)$ , em diferentes configurações de  $A$  em relação à distância  $r$ , considerando uma situação com blindagem, onde  $k = 10/D$ . Ainda é observado que um aumento no valor de  $A$  resulta em um aumento do alcance do potencial para uma mesma distância  $r$ .



Fonte: Autor.

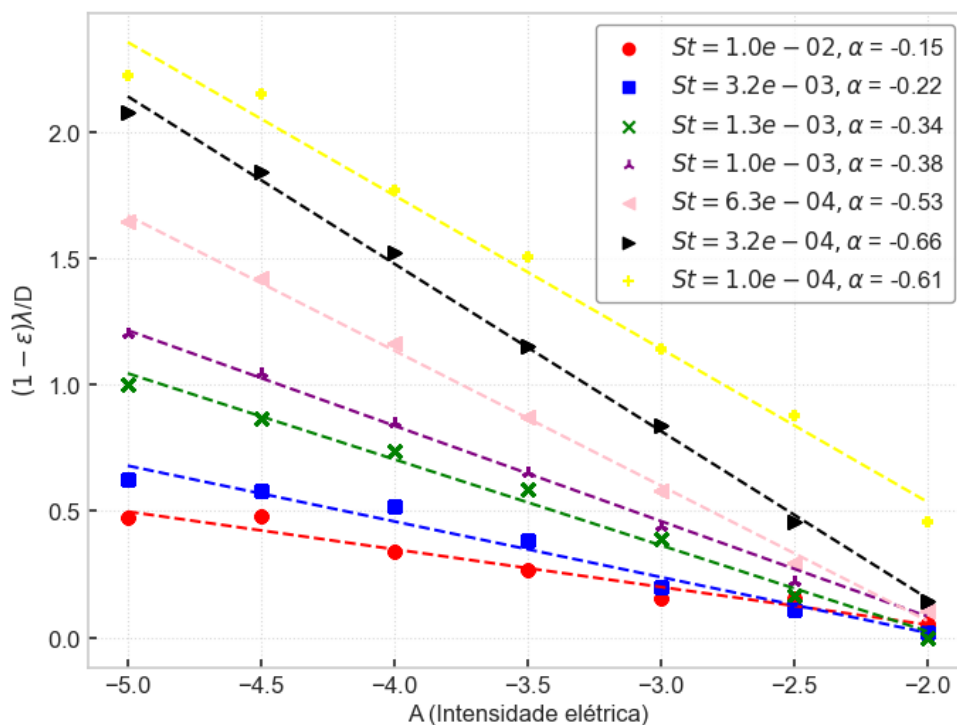
O gráfico da densidade de partículas suspensas ao longo do meio poroso, como mencionado anteriormente, apresentou alterações mínimas em relação ao caso anterior. Por exemplo, a penetração ( $\lambda$ ), como mostrado na Figura 28, foi menor para os casos com maior intensidade de potencial, mas foi maior para os casos das partículas *tracers* em comparação ao caso anterior. Esse comportamento pode ser atribuído principalmente ao comportamento do potencial, que atinge valores mais altos quando se está muito próximo da origem. Nesse caso específico, as partículas balísticas continuam com seu padrão de captura e como a distância de blindagem é menor, mais partículas do tipo *tracers* conseguem chegar ao final do meio poroso, pois não entram na blindagem do potencial. Esse comportamento é evidenciado na Figura 29.

Figura 28 – Gráfico da fração de captura ( $\phi$ ) em relação ao comprimento de penetração normalizado ( $X/L$ ), considerando um número de Stokes constante ( $St = 10^{-4}$ ) para o caso  $k = 20/D$ . Os diferentes símbolos representam os valores distintos da intensidade do potencial  $A$ . As linhas sólidas correspondem aos ajustes exponenciais obtidos para cada curva, apresentando os respectivos valores do comprimento característico da exponencial  $\lambda$ .



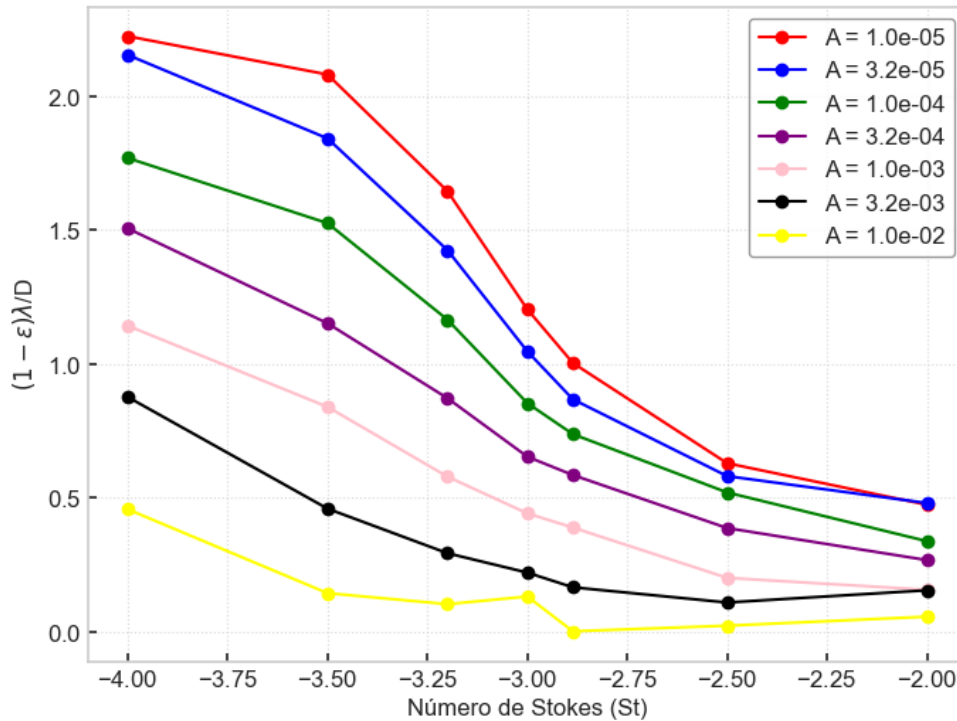
Fonte: Autor.

Figura 29 – Gráfico em escala log-log mostra o comprimento de penetração normalizado em relação à intensidade do potencial  $A$  para o caso de blindagem  $k = 20/D$ . Os diferentes símbolos representam valores variados do número de Stokes. As linhas sólidas representam ajustes lineares aplicados a cada curva.



Fonte: Autor.

Figura 30 – O gráfico ilustra uma representação em escala log-log do comprimento de penetração normalizado em relação ao número de Stokes, considerando diferentes intensidades de potencial  $A$  para  $k = 20/D$ . As linhas sólidas foram adicionadas para auxiliar na identificação do parâmetro  $A$ .



Fonte: Autor.

Conforme discutido anteriormente, a Figura 30 revela uma mudança significativa no comportamento das partículas em comparação ao caso anterior. Observamos uma alteração na penetração na faixa de valores de  $(St)$  entre  $10^{-3.25}$  e  $10^{-2.75}$ , especialmente em casos em que o potencial elétrico é mais intenso. Quando analisamos o comportamento do comprimento de penetração em função do número de Stokes, para o caso com blindagem maior, podemos observar que as curvas apresentam comportamento similar para o caso de campo fraco, porém para valores elevados de  $A$  as curvas não recuperam o comportamento em lei de escala observado anteriormente. Elas exibem um valor mínimo para o comprimento de penetração na região de valores intermediários do número de Stokes. Notavelmente, esse comportamento precisa de uma investigação mais minuciosa considerando meios porosos com diferentes porosidades.

Nos meios porosos com porosidade 0.6, exceto nos casos mais balísticos, a presença de obstáculos limita a exploração do parâmetro  $k$  do potencial. Isso ocorre devido à distância mínima entre os obstáculos, que é definida como  $D/10$ . Em certas regiões, independentemente do parâmetro de blindagem, o potencial mínimo é suficiente para capturar as partículas nesse percurso. Portanto, a alteração da intensidade  $A$  do potencial elétrico resulta em uma modificação significativa no comportamento das partículas no meio poroso.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi realizado um estudo acerca do processo de retenção de partículas transportadas por um fluido escoando no regime de baixo número de Reynolds (regime laminar) no interior de um meio poroso. Inicialmente, consideramos partículas neutras que não interagem com a estrutura do meio poroso. Em seguida um potencial elétrico foi introduzido e as partículas carregadas interagem com a estrutura do meio poroso por meio de forças elétricas. Com base nessa premissa, foi investigado o processo de capturas das partículas alterando o fator de inercia das partículas. Inicialmente, foram analisadas as frações de captura das partículas suspensas em relação ao comprimento de penetração. Verificou-se que a fração das partículas capturadas  $\phi$  segue um decaimento exponencial em função do comprimento de penetração normalizado. Ao examinar o comprimento característico da exponencial, observou-se um comportamento de escala caracterizado pela relação  $(1 - \varepsilon)\lambda/D \sim St^{-\alpha}$ , onde  $\varepsilon$  é a porosidade,  $\lambda$  é o comprimento característico e  $D$  é diâmetro da estrutura circular porosa. Compreendemos que há dois limites para qual não importa o aumentar ou diminuir o parâmetro de Stokes  $St$ , que a fração de partículas ao longo do meio não irá ser alterada, de forma que a lei de escala estabelece no meio desses limites do parâmetro de penetração  $\lambda$ .

Realizamos uma investigação em meios porosos com estruturas circulares e propriedades elétricas, introduzindo maior complexidade ao problema de captura de partículas. Nesses meios, as partículas possuem cargas e interagem com a estrutura porosa. Representamos essa interação elétrica utilizando o potencial de Yukawa, inicialmente analisando o caso de blindagem nula ( $k = 0$ ), que corresponde ao potencial de Coulomb, e posteriormente considerando valores de  $k = 10/D$  e  $k = 20/D$ .

Verificamos que a inclusão desses efeitos elétricos não resultou em alterações significativas na densidade de partículas suspensas  $\phi(x)$ . O comportamento exponencial ainda estava presente. No entanto, ao analisar o comprimento característico  $\lambda$  em função da efetividade do potencial  $A$  para diferentes números de Stokes, observamos novamente uma lei de escala semelhante ao caso neutro, mas com a forma  $(1 - \varepsilon)\lambda/D \sim A^{-\alpha}$ . Essa relação demonstra que o número de Stokes influencia o comportamento da lei de potência, representado pelo expoente característico  $\alpha$ . Ao aumentar o número de Stokes, o efeito da efetividade do potencial, caracterizada pelo parâmetro  $A$ , é significativamente reduzido, afetando a eficiência do filtro. Por outro lado, ao analisarmos o impacto da intensidade do potencial elétrico no comportamento da penetração ( $\lambda$ ), observamos uma clara mudança na distribuição dessas penetrações em relação



ao número de Stokes. Isso resulta em uma alteração do coeficiente característico para o caso de um meio poroso eletricamente neutro. Essa mudança indica que a intensidade do potencial elétrico desempenha um papel significativo na modulação da penetração das partículas no meio poroso, afetando sua distribuição e comportamento em relação ao número de Stokes.

Nos casos de blindagem específicos, a interação elétrica é negligenciada para distâncias além do limite imposto pela blindagem. No caso em que  $k = 10/D$ , as partículas interagem eletricamente apenas quando estão aproximadamente a  $3D/4$  de distância das superfícies dos obstáculos, enquanto no caso de  $k = 20/D$ , essa distância é de aproximadamente  $D/4$ . Novamente, o padrão exponencial da fração de capturas e a relação de potência foram mantidos, mas os expoentes que influenciam a penetração no meio poroso foram alterados. Observamos uma forte relação entre esses expoentes e o número de Stokes. Além disso, a mudança na distribuição da penetração também indica uma variação significativa no comportamento do filtro. Nos casos mais balísticos, as forças inerciais prevalecem sobre o potencial elétrico, resultando em uma redução da eficiência do filtro. Nesses casos, as partículas são menos retidas pelo potencial elétrico devido à predominância das forças inerciais, o que afeta negativamente a capacidade do filtro em reter as partículas no meio poroso. Todas essas características têm um impacto significativo na eficiência de captura de partículas, resultando em alterações significativas no processo de filtração.

Acreditamos que nossos resultados fornecem informações valiosas para aprimorar a compreensão dos mecanismos de captura de partículas em meios porosos com propriedades elétricas. Essas descobertas contribuem para o desenvolvimento de estratégias mais eficientes de filtração.

Para futuras investigações, temos como objetivo explorar porosidades mais altas, também conhecidas como porosidades diluídas, tanto no contexto neutro quanto no elétrico, a fim de entender melhor o processo de captura de partículas. Prevê-se que a competição entre os fatores inerciais e elétricos se torne mais proeminente em estruturas porosas com maior separação. Além disso, planejamos examinar outros potenciais além do potencial de Yukawa, que tem sido útil para compreender o fenômeno de blindagem. O potencial dipolo, por exemplo, pode proporcionar uma melhor representação das interações presentes na natureza.

Essas investigações permitiriam explorar métodos de filtração que levem em consideração interações entre partículas e mecânicas mais complexas. Além disso, poderíamos investigar novas estruturas porosas baseadas em filtros fibrosos ou fractais, ampliando o leque de

opções. Também seria interessante explorar diferentes dinâmicas de escoamento, como regimes turbulentos em casos de alto número de Reynolds, ou investigar o entupimento da estrutura porosa, o que acarretaria em mudanças nos campos de velocidade e pressão do escoamento.

## REFERÊNCIAS

- ABD, A. S.; ABUSHAIKHA, A. Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media. **Scientific Reports**, Springer Science and Business Media LLC, v. 10, n. 1, mar. 2020.
- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of aerodynamics**. 6. ed. Columbus, OH: McGraw-Hill Education, 2016.
- ARAÚJO, A. D.; ANDRADE, J. S.; HERRMANN, H. J. Critical role of gravity in filters. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 13, set. 2006.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena**. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 2001.
- BROVELLI, A.; CASSIANI, G.; DALLA, E.; BERGAMINI, F.; PITEA, D.; BINLEY, A. M. Electrical properties of partially saturated sandstones: Novel computational approach with hydrogeophysical applications. **Water Resources Research**, American Geophysical Union (AGU), v. 41, n. 8, ago. 2005.
- CARUSO, C.; QUARTA, F. Interpolation methods comparison. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier BV, v. 35, n. 12, p. 109–126, jun. 1998.
- Cengel. **Fluid mechanics**. Maidenhead, England: McGraw Hill Higher Education, 2005.
- CIVAN, F. Cake filtration. In: **Reservoir Formation Damage**. Elsevier, 2016. p. 295–341.
- DEUBER, F.; MOUSAVI, S.; FEDERER, L.; HOFER, M.; ADLHART, C. Exploration of ultralight nanofiber aerogels as particle filters: Capacity and efficiency. **ACS Applied Materials & Interfaces**, American Chemical Society (ACS), v. 10, n. 10, p. 9069–9076, fev. 2018.
- HOLDER, A.; SCHOLZ, S.; KULOZIK, U.; HINRICHS, J. Cross-flow electro membrane filtration: Theory and application in the dairy industry. **Chemie Ingenieur Technik**, Wiley, v. 85, n. 8, p. 1193–1200, maio 2013.
- JEGATHEESAN, V.; VIGNESWARAN, S. Deep bed filtration: Mathematical models and observations. **Critical Reviews in Environmental Science and Technology**, Informa UK Limited, v. 35, n. 6, p. 515–569, nov. 2005.
- KOCH, D. L.; HILL, R. J. IscpNERTIAL/scp escpFFECTS IN/scp sscpUSPENSION AND/scp pscpOROUS/scp-mscpEDIA/scp fscpLOWS/scp. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 33, n. 1, p. 619–647, jan. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.619>.
- KUMAR, R.; BHATTACHARYA, S.; MURMU, G. Exploring optimality of piecewise polynomial interpolation functions for lung field modeling in 2d chest x-ray images. **Frontiers in Physics**, **Frontiers Media SA**, v. 9, nov. 2021.

- LANEVE, C.; LASCU, T. A.; SORDONI, V. The interval analysis of multilinear expressions. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, Elsevier BV, v. 267, n. 2, p. 43–53, out. 2010.
- MALEIKA, W. Inverse distance weighting method optimization in the process of digital terrain model creation based on data collected from a multibeam echosounder. **Applied Geomatics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 4, p. 397–407, abr. 2020.
- MARSHALL, H.; SAHRAOUI, M.; KAVIANY, M. An improved analytic solution for analysis of particle trajectories in fibrous, two-dimensional filters. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 6, n. 2, p. 507–520, fev. 1994.
- Matteson. **Filtration**. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1986. (Chemical Industries).
- MONASSE, P. Extraction of the Level Lines of a Bilinear Image. **Image Processing On Line**, v. 9, p. 205–219, 2019.
- MUNIZ, A. R.; SECCHI, A. R.; CARDOZO, N. S. M. Uma nova metodologia para a simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos. **Polímeros**, FapUNIFESP (SciELO), v. 15, n. 1, p. 53–58, mar. 2005.
- OSSES, J.; COMPLEXOS, E. mecânico e mestre em ciências da Engenharia pela Universidade do Chile. Trabalha com simulação de sistemas de Dinâmica dos F. **O método de volumes finitos**. 2020. Disponível em: <https://www.esss.co/blog/o-metodo-de-volumes-finitos/>. Acesso em: 24 jun. 2023.
- POP, I.; INGHAM, D. B. **Transport Phenomena in Porous Media II**. London, England: Pergamon Press, 2002.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A. Adaptive stepsize runge-kutta integration. **Computers in Physics**, AIP Publishing, v. 6, n. 2, p. 188, 1992.
- SAHIMI, M. **Flow and transport in porous media and fractured rock**. 2. ed. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2012.
- SEYBOLD, H. J.; LIMA, I. A.; ARAÚJO, A. D. The critical behavior of the clogging process in a porous medium. **Physics of Fluids**, AIP Publishing, v. 33, n. 9, p. 093609, set. 2021.
- VAFAI, K. **Handbook of Porous Media**. [S. l.]: Taylor amp; Francis, 2005.
- WANG, J. G.; LIU, G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 54, n. 11, p. 1623–1648, 2002.
- ZAKY, Z. **Particle-laden fluids for industrial and manufacturing processes**. Tese (Doutorado) – University of California, Berkeley, Berkeley, Estados Unidos, 2017. Disponível em: <https://escholarship.org/uc/item/3c41x7cf>. Acesso em: 18 fev. 2023.