



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E**  
**CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E**  
**CONSTRUÇÃO CIVIL**

**KAYQUE ANDSON SILVA XIMENES**

**ANÁLISE DE DANO EM COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO MODELO DE**  
**FALHA TRIDIMENSIONAL**

**FORTALEZA**

**2023**

KAYQUE ANDSON SILVA XIMENES

ANÁLISE DE DANO EM COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO MODELO DE  
FALHA TRIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Engenharia Estrutural

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Silva Me-  
deiros Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- X34a Ximenes, Kayque Andson Silva.  
Análise de dano em compósitos laminados utilizando modelo de falha tridimensional / Kayque Andson Silva Ximenes. – 2023.  
96 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros Júnior.  
Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.
1. Modelo de Puck 3D. 2. Compósitos Laminados. 3. Falha Progressiva. 4. Dano Contínuo. I. Título.  
CDD 624.1
-

KAYQUE ANDSON SILVA XIMENES

ANÁLISE DE DANO EM COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO MODELO DE  
FALHA TRIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Engenharia Estrutural

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros  
Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Avelino Manuel da Silva Dias  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
(UFRN)

À Deus e à minha família.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por sua misericórdia na minha vida, por sua ajuda na minha caminhada até aqui, pois “Até aqui nos ajudou o Senhor. (1Samuel 7:12b)”.

Aos meus pais, Teodoro Ximenes Neto e Lúcia Maria Silva Ximenes, por tudo que fazem por mim, pelo apoio, encorajamento e amor.

À minha irmã, Mylena Silva Ximenes, pelos conselhos, incentivos e companhia.

À minha tia Antônia Eurismar Farias e ao meu “primo-irmão” Kauã Farias pela confiança e amor que sempre me deram.

À minha esposa Thayane de Oliveira Vieira por todo o suporte e torcida.

À Lucileide, Itamar, Tamara e Jackson que compõem uma família da qual me fazem sentir fazer parte diante do amor que me concedem.

A todos que compõem a equipe do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) pelo suporte no desenvolvimento do trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros pelo suporte e incentivos.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Evandro Parente Júnior pelos esclarecimentos e ajuda.

Ao Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso, ao Prof. Dr. Avelino Manual da Silva Dias por aceitarem o convite para participar da banca.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa para realização do mestrado.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo financiamento das passagens aéreas para a realização do estágio de pesquisa na *École de technologie supérieure* (ÉTS) em Montreal, Canadá.

## RESUMO

Os compósitos laminados são materiais amplamente utilizados em diversas áreas por permitirem a construção de elementos estruturais com excelente relação peso/resistência. Por outro lado esses materiais demonstram um comportamento frágil, apresentando forte anisotropia e complexos mecanismos de falha e ruptura. Isso dificulta a caracterização precisa da não linearidade de seu comportamento mecânico. Desta forma, o objetivo principal deste trabalho foi a implementação e aplicação de um critério de falha 3D de compósitos laminados associado a modelos de degradação progressiva em um software comercial de Elementos Finitos. Para tanto, foi utilizado o modelo de falha de Puck tridimensional, incorporado a um modelo de degradação brusca, *Element Weakening Method* (EWM), a um modelo de degradação progressiva, *Constant Stress Exposure Method* (CSE), e a um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo (MDC). Os algoritmos desenvolvidos neste trabalho foram implementados em forma de subrotinas de usuário para caracterização do material (UMAT), programadas em Fortran e incorporadas ao Abaqus®. Objetiva-se também uma melhoria no processo de busca do ângulo de fratura a fim de diminuir o custo computacional da análise. Para validação do modelo foram utilizados resultados numéricos e experimentais da literatura. Os resultados foram parcialmente satisfatórios pois foi eficaz na maioria dos exemplos, mas apresentou deficiência quanto a abordagem de delaminação. Além disso demonstrou uma redução de custo computacional média de 23%, mas apenas em alguns modelos apontando para um efeito considerável na montagem do sistema mas não na sua resolução.

**Palavras-chave:** Modelo de Puck 3D. Compósitos Laminados. Falha Progressiva. Dano Contínuo.

## ABSTRACT

Laminate composites are materials widely used in several areas because they allow the construction of structural elements with an excellent weight/strength ratio. These materials demonstrate a fragile behavior, presenting strong anisotropy and complex failure and rupture mechanisms. This makes it difficult to characterize the non-linearity of its mechanical behavior. Thus, the main objective of this work was the implementation and application of a 3D failure criterion for laminated composites associated with progressive degradation models in a commercial software of Finite Elements. For this purpose, the Puck's three-dimensional failure model was used, incorporated into a abrupt degradation model, *Element Weakening Method* (EWM), a progressive degradation model, *Constant Stress Exposure Method* (CSE), and a model based on Continuous Damage Mechanics (CDM). The algorithms developed in this work were implemented in the form of user subroutines for material characterization (UMAT), programmed in Fortran and incorporated into Abaqus ®. It also aims to adapt the search process for the fracture angle to reduce the computational cost of the analysis. Numerical and experimental results from the literature were used to validate the model. The results were partially satisfactory as it was effective in most examples, but was lacking in the delamination approach. In addition, it demonstrated an average computational cost reduction of 23%, but only in some models, pointing to a considerable effect in the assembly of the system but not in its resolution.

**Keywords:** 3D Puck model. Laminated Composites. Progressive Failure. Continuous Damage.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação de Materiais Compósitos . . . . .	18
Figura 2 – Lâminas unidirecionais compondo um compósito laminado reforçado por fibras	19
Figura 3 – Esquema Genérico de Laminação . . . . .	20
Figura 4 – Demonstração da rotação entre os eixos locais e globais de um sistema 3D. . . . .	22
Figura 5 – Rotação entre os eixos locais e globais de uma lâmina . . . . .	23
Figura 6 – Modelo de torção 3D . . . . .	29
Figura 7 – Tipos de FF. . . . .	32
Figura 8 – Tipos de IFF. . . . .	35
Figura 9 – Modos de Fratura do IFF. . . . .	35
Figura 10 – Tensões agindo no plano de fratura. . . . .	36
Figura 11 – Demonstração simplificada da busca por varredura do $\theta_{fp}$ . . . . .	39
Figura 12 – Esquema gráfico de Degradação progressiva brusca. . . . .	41
Figura 13 – Esquema gráfico de Degradação progressiva brusca e gradual. . . . .	43
Figura 14 – Lei de evolução do dano de acordo com o <i>softening</i> exponencial. . . . .	48
Figura 15 – Exemplo-Teste 1 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	60
Figura 16 – Exemplo-Teste 2 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	60
Figura 17 – Exemplo-Teste 3 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	61
Figura 18 – Exemplo-Teste 4 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	61
Figura 19 – Exemplo-Teste 5 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	61
Figura 20 – Exemplo-Teste 6 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	62
Figura 21 – Exemplo-Teste 7 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura. . . . .	62
Figura 22 – Representação do modelo do Cubo. . . . .	63
Figura 23 – Evolução dos danos no cubo sobre tração. . . . .	64
Figura 24 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre tração. . . . .	65
Figura 25 – Comparação dos resultados (A) sem crack band e (B) com crack band no cubo sobre tração. . . . .	66
Figura 26 – Evolução dos danos no cubo sobre compressão. . . . .	66
Figura 27 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre compressão. . . . .	67
Figura 28 – Sequência de deslocamentos do caso cíclico. . . . .	67
Figura 29 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano EWM. . . . .	68

Figura 30 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano CSE. . . . .	68
Figura 31 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano MDC. . . . .	69
Figura 32 – Configuração do <i>Composite Layup</i> . . . . .	70
Figura 33 – Características geométricas do modelo de placa tracionada. . . . .	70
Figura 34 – Discretização da malha da placa tracionada. . . . .	71
Figura 35 – Condições de contorno aplicadas na modelagem. . . . .	71
Figura 36 – Constraint aplicado ao modelo. . . . .	72
Figura 37 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 0°. . . . .	73
Figura 38 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra -45°. . . . .	73
Figura 39 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 45°. . . . .	73
Figura 40 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 90°. . . . .	74
Figura 41 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 0°. . . . .	74
Figura 42 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra -45°. . . . .	74
Figura 43 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 45°. . . . .	75
Figura 44 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 90°. . . . .	75
Figura 45 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra 0°. . . . .	75
Figura 46 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra -45°. . . . .	76
Figura 47 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra 45°. . . . .	76
Figura 48 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra 90°. . . . .	76
Figura 49 – Curva de Força x Deslocamento. . . . .	77
Figura 50 – Características geométricas do modelo de placa metal-fibra. . . . .	79
Figura 51 – Condições de contorno e características geométricas do modelo reduzido de placa metal-fibra. . . . .	79
Figura 52 – Configuração de lâminas do modelo reduzido de placa metal-fibra. . . . .	80
Figura 53 – Discretização do modelo de placa metal-fibra. . . . .	80
Figura 54 – Evolução do dano EWM na lâmina de fibra 0°. . . . .	82
Figura 55 – Evolução do dano EWM na lâmina de fibra 90°. . . . .	83
Figura 56 – Evolução do dano CSE na lâmina de fibra 0°. . . . .	83
Figura 57 – Evolução do dano CSE na lâmina de fibra 90°. . . . .	84
Figura 58 – Evolução do dano contínuo na lâmina de fibra 0°. . . . .	84

Figura 59 – Evolução do dano contínuo na lâmina de fibra 90° . . . . .	85
Figura 60 – Curva Força x Deslocamento. . . . .	85
Figura 61 – Propriedades geométricas da coluna em perfil C. . . . .	87
Figura 62 – Condições de contorno da coluna em perfil C. . . . .	87
Figura 63 – Carga x Deslocamento Coluna em perfil C. . . . .	88

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Nomenclatura dos parâmetros utilizados no critério FF de Puck. . . . .	34
Tabela 2 – Nomenclatura dos parâmetros utilizados no critério IFF de Puck. . . . .	38
Tabela 3 – Exemplos utilizados nos testes da otimização da busca do ângulo de fratura. . . . .	59
Tabela 4 – Resultados dos testes do método de busca otimizada. . . . .	60
Tabela 5 – Propriedades materiais do compósito de fibras de carbono T300 e resina 976. . . . .	64
Tabela 6 – Propriedades materiais do compósito de fibras de carbono T300 e resina epóxi 1304-C. . . . .	72
Tabela 7 – Comparativo entre as cargas últimas. . . . .	77
Tabela 8 – Análise dos tempos de processamento. . . . .	78
Tabela 9 – Análise do efeito de cada modificação no tempo de processamento. . . . .	78
Tabela 10 – Propriedades materiais do adesvio do compósito da placa de metal-fibra. . . . .	81
Tabela 11 – Propriedades materiais das lâminas do compósito da placa de metal-fibra. . . . .	81
Tabela 12 – Propriedades materiais da placa de alumínio do modelo metal-fibra. . . . .	82
Tabela 13 – Comparativo das cargas últimas. . . . .	86
Tabela 14 – Comparativo das cargas últimas modelo coluna. . . . .	88

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo Geral</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>Materiais Compósitos</b>	<b>18</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Compósitos Laminados Unidirecionais</i>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Comportamento Mecânico</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Crterios de Iniciação de Falha</b>	<b>25</b>
<b>2.3.1</b>	<i>Crterio de Tsai-Wu</i>	<b>26</b>
<b>2.3.2</b>	<i>Crterio de Hashin</i>	<b>27</b>
<b>2.3.3</b>	<i>Crterio de LaRC</i>	<b>28</b>
<b>2.3.4</b>	<i>Crterio de Puck</i>	<b>30</b>
<b>2.3.4.1</b>	<i>Fratura das Fibras (Fiber Fracture - FF)</i>	<b>31</b>
<b>2.3.4.2</b>	<i>Fratura entre as Fibras (Inter Fiber Fracture - IFF)</i>	<b>34</b>
<b>2.3.4.3</b>	<i>Determinação do ângulo de fratura</i>	<b>39</b>
<b>2.4</b>	<b>Análise do Comportamento Pós-Pico</b>	<b>40</b>
<b>2.4.1</b>	<i>Modelos de degradação e de dano contínuo</i>	<b>40</b>
<b>2.4.1.1</b>	<i>Modelo de Degradação Brusca</i>	<b>41</b>
<b>2.4.1.1.1</b>	<i>Método EWM</i>	<b>42</b>
<b>2.4.1.2</b>	<i>Modelo de Degradação Gradual</i>	<b>43</b>
<b>2.4.1.2.1</b>	<i>Método CSE</i>	<b>43</b>
<b>2.4.1.3</b>	<i>Modelo de Dano Contínuo</i>	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>51</b>
<b>3.1</b>	<b>Melhoria da Determinação do Ângulo de Fratura</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Adaptação do Modelo de Dano CSE</b>	<b>56</b>
<b>3.3</b>	<b>Análise Numérica</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>59</b>
<b>4.1</b>	<b>Busca do Ângulo de Fratura</b>	<b>59</b>
<b>4.2</b>	<b>Análise de Comportamento do Dano</b>	<b>63</b>

4.2.1	<i>Cubo submetido à Tração</i> . . . . .	64
4.2.2	<i>Cubo submetido à Compressão</i> . . . . .	66
4.2.3	<i>Cubo submetido a carregamento cíclico</i> . . . . .	67
4.3	<b>Placa com furo sujeita à tração</b> . . . . .	69
4.4	<b>Placa Composta de Metal-Fibra</b> . . . . .	78
4.5	<b>Coluna de perfil C laminado</b> . . . . .	86
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	89
5.1	<b>Sugestão para trabalho futuros</b> . . . . .	90
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	92

## 1 INTRODUÇÃO

A evolução tecnológica tem promovido o desenvolvimento de novos materiais com propriedades superiores que atendam de forma mais eficiente as exigências de projetos cada vez mais complexos. Entre esses materiais encontram-se os compósitos, com destaque para os laminados reforçados por fibras, que têm sido amplamente empregados na indústria aeronáutica, naval, automobilística e civil, destacando-se devido a combinação de alta rigidez, alta resistência e baixo peso específico que eles apresentam.

Os materiais compósitos reforçados por fibras geralmente exibem um comportamento frágil, apresentando pouca deformação plástica e, portanto, falha repentina. A ortotropia e os diferentes mecanismos de falha dificultam a caracterização precisa do comportamento de tais materiais. Por conta da dificuldade de se considerar todos os aspectos particulares da falha de materiais compósitos, desde sua iniciação até sua propagação, foram desenvolvidos vários modelos de dano, cada um com suas vantagens e desvantagens (KADDOUR; HINTON, 2012a).

Com isso, no início dos anos 1990, foi organizado uma série de estudos que ficou conhecido como *World Wide Failure Exercise* (WWFE) para analisar as capacidades preditivas dos diversos critérios de falha. O primeiro WWFE iniciou em 1996 e findou em 2004 com a publicação de Hinton *et al.* (2004), que detalha os 19 critérios de falha que foram avaliados sob casos de estado plano de tensão.

Esse primeiro exercício não proporcionou informações sobre a maturidade dos critérios em casos de tensões triaxiais, de desenvolvimento de trincas e de delaminação. Deste modo houve um segundo exercício, WWFE-II, que tratou do estudo envolvendo estados de tensão tridimensionais, com um conjunto de 12 casos de teste (Kaddour e Hinton (2012b); Kaddour e Hinton (2013)). Quanto aos estudos relacionados aos assuntos de desenvolvimento de trincas e início de delaminação na matriz, foi realizado terceiro exercício WWFE-III com 13 casos de teste na presença de concentração de tensão e de várias condições de carregamento no plano (KADDOUR *et al.*, 2014).

A partir dos resultados do WWFE I e WWFE II, não havia um consenso claro sobre os critérios de falha com melhor desempenho para todos os diferentes casos de carga, no entanto, os exercícios serviram para mostrar os pontos fortes e as deficiências dos critérios. Pode-se observar, entretanto, que o critério de falha de Puck apresentou um desempenho consistente e abrangente para a maioria dos casos testados (KADDOUR; HINTON, 2012a).

Entretanto, o critério de Puck está atrelado a um alto custo computacional. Isso se

deve à necessidade de um algoritmo iterativo de busca de plano de fratura crítico onde o critério de Mohr-Coulomb é utilizado tendo como base o estado multiaxial de tensões. No caso da análise por elementos finitos, esta busca tem que ser efetuada em cada ponto de integração para cada incremento da análise. Originalmente, Puck e Schurmann (1998) utilizaram uma busca por varredura com incrementos de  $1^\circ$ , o que o torna de 10 a 100 vezes mais caro computacionalmente, que os critérios fenomenológicos mais simples.

Isso ocasiona uma certa divisão no cenário científico, onde uns defendem a melhor precisão usando critérios de Puck ou similares, como os modelos LARC da NASA (DÁVILA *et al.*, 2003; DÁVILA; CAMANHO, 2003; PINHO *et al.*, 2005a), e outros defendem a maior eficiência computacional dos critérios mais simples. Tal fato mostra a necessidade de desenvolver soluções para redução do custo computacional em análises com critérios mais robustos como o de Puck.

Além dos critérios de falha, a representação do comportamento pós-pico depende do modelo de degradação utilizado. No caso de algumas estruturas laminadas de materiais compósitos reforçados por fibras, nota-se nos ensaios que podem suportar cargas crescentes mesmo após a falha de uma ou mais lâminas. Tem-se, portanto, que as lâminas falham de forma gradual e, conseqüentemente, a rigidez do laminado diminui progressivamente. Tal fato aponta para o uso do modelo de falha progressiva, podendo ser de degradação brusca, como o *Element Weaking Method* (EWM) (LEE *et al.*, 2015), ou de degradação gradual, como o *Constant Stress Exposure Method* (CSE) (KODAGALI, 2017), ou ainda com modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo (MDC) (REINOSO *et al.*, 2017).

Nestes trabalhos, percebe-se a constante utilização de modelagens baseadas em métodos numéricos, dentre eles o Método dos Elementos Finitos (MEF). O Método dos Elementos Finitos é um dos métodos mais utilizados para análise de estruturas, como observa-se na literatura. Nesse método são utilizadas funções polinomiais para a interpolação dos deslocamentos, que são a base da análise. A natureza das funções utilizadas não permitem uma representação exata da geometria de estruturas complexas. Entretanto, o refinamento da malha de elementos na discretização da estrutura reduz esse problema, desde que sejam levados em consideração os problemas relacionados com a convergência da malha e com a localização do dano.

Este trabalho, portanto, propõe a aplicação de modelos de degradação de falha progressiva, tendo como critério de iniciação de falha o modelo de Puck tridimensional com melhorias na busca do ângulo de fratura. Estes modelos serão aplicados no estudo do comporta-

mento da falha do material em estruturas de compósitos laminados.

## 1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é o estudo e a implementação de modelos constitutivos 3D de degradação e de dano contínuo para compósitos laminados unidirecionais reforçados por fibras, utilizando o modelo de Puck como critério inicial de falha. O intuito deste esforço de pesquisa é o desenvolvimento e validação do ferramental computacional necessário a estudos futuros envolvendo a não linearidade física e geométrica de estruturas de compósitos laminados.

## 1.2 Objetivos Específicos

- Explorar o estado da arte relativo a modelos de degradação progressiva e dano contínuo disponíveis na literatura, para escolha dos modelos mais promissores a serem implementados e validados neste trabalho;
- Implementar os modelos constitutivos escolhidos, para uso no software Abaqus®, na forma de subrotinas de material (UMATs) em Fortran, baseados no modelo de Puck como critério de iniciação de falha. Estes modelos foram capazes de simular a não linearidade física do material a partir do início da falha considerando-se uma formulação tridimensional;
- Fazer modificações na rotina para busca do ângulo de fratura que diminuam o alto custo computacional inerente ao modelo original de Puck;
- Validar as subrotinas desenvolvidas através de ensaios experimentais e *benchmarks* disponíveis na literatura, calibrando a UMAT para utilização em trabalhos futuros.

## 1.3 Organização do Trabalho

O Capítulo 1 do presente trabalho traz uma breve introdução que apresenta os materiais compósitos, comenta alguns aspectos importantes que devem ser estudados sobre estruturas laminadas e exemplifica o cenário da produção científica com trabalhos que abordam uma temática conectada com a desta pesquisa.

O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica, onde, inicialmente, são apresentados conceitos e classificações sobre os materiais compósitos. Em seguida, são abordados alguns critérios de análise de falha e modelos de degradação do material. Vale ressaltar que dos critérios

de falha apresentados foi aplicado nas análises apenas o critério de Puck.

O Capítulo 3 traz os resultados dos exemplos numéricos e estudos realizados neste trabalho.

Por fim, o Capítulo 4 apresenta as considerações e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

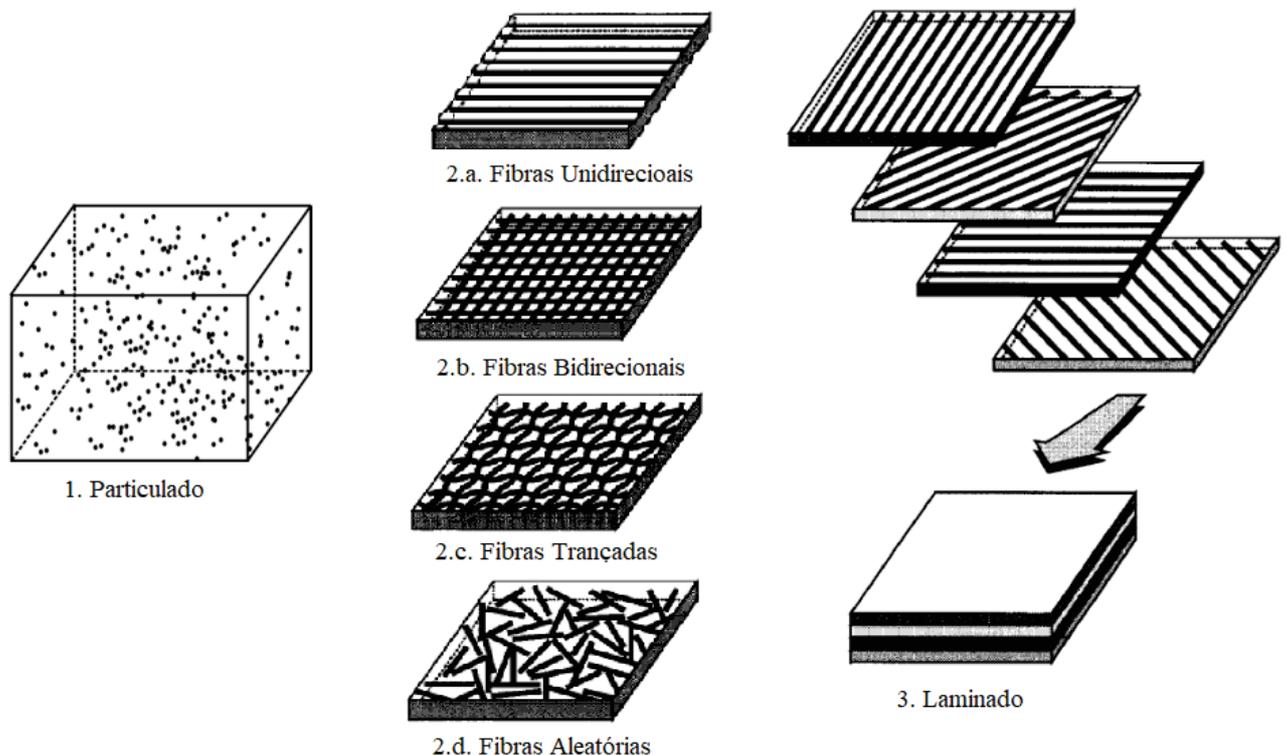
Sendo o objetivo principal desse trabalho a elaboração de uma subrotina de descrição do comportamento mecânico de compósitos laminados, foi realizada uma revisão bibliográfica para embasamento e compreensão dos conteúdos pertinentes a este trabalho. Nesta revisão destacam-se as relações constitutivas tanto elástica como danificada, os critérios de falha para identificação do início do dano e os modelos de degradação para aplicação do efeito do dano no comportamento do material.

### 2.1 Materiais Compósitos

Material compósito é um material resultante da combinação de dois ou mais materiais, o qual apresenta propriedades físicas e mecânicas superiores aos de seus constituintes isoladamente, devido à união das características vantajosas dos materiais que o formam (JONES, 1999).

De acordo com a forma dos materiais a serem combinados, os compósitos podem ser classificados como particulados, fibrosos ou laminados, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Classificação de Materiais Compósitos



Fonte: Adaptado de Reddy (2004)

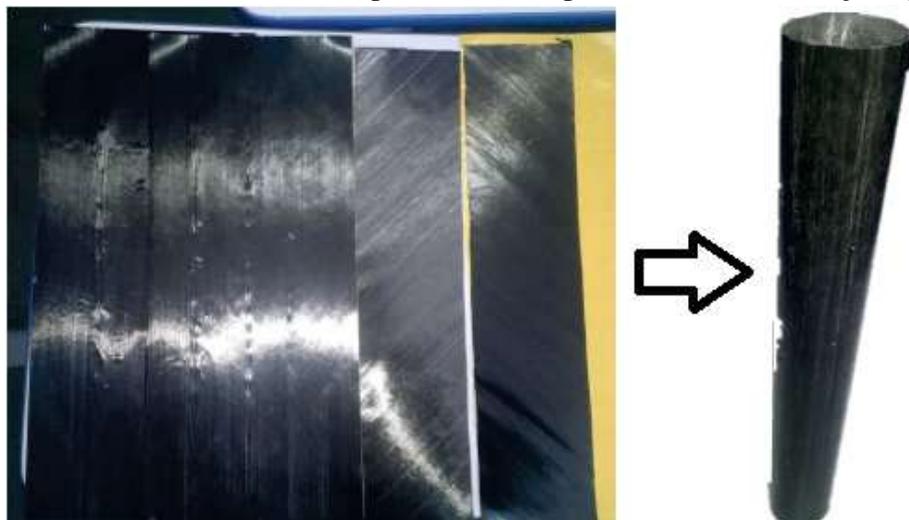
Os compósitos particulados são constituídos de uma matriz na qual estão imersas inclusões, que podem apresentar várias formas e tamanhos. Essas partículas, normalmente, encontram-se distribuídas aleatoriamente, de forma que em escala macroscópica estes, materiais são aproximadamente homogêneos e isotrópicos. O concreto de cimento Portland e o asfáltico são exemplos desse tipo de compósito (GERMAN, 2016).

Os compósitos fibrosos, de forma análoga, são compostos por fibras dispersas em uma matriz (geralmente polimérica, mas podem ser encontradas matrizes metálicas e cerâmicas). As fibras, que podem ser curtas ou longas, são as responsáveis pela resistência mecânica do sistema, já a matriz é a responsável pela transferência das tensões de cisalhamento (distribuição das tensões). Devido à orientação das fibras (unidirecionais, bidirecionais, trançadas ou aleatórias), os compósitos fibrosos são considerados materiais ortotrópicos (ROSEN; DOW, 1972).

Os compósitos laminados, foco do presente trabalho, consistem em camadas (ou lâminas) empilhadas e unidas entre si, onde cada lâmina pode ser de um material diferente (compósitos laminados híbridos) ou não, e ainda cada lâmina pode ser um compósito fibroso ou particulado. A laminação é utilizada para combinar as melhores características dos constituintes das lâminas, de modo a se obter uma estrutura mais eficiente (JONES, 1999).

Uma estrutura de alto desempenho pode ser o resultado de um laminado constituído de matriz polimérica, reforçada por fibras unidirecionais (Compósito Reforçado por Fibras). A Figura 2 mostra um exemplo em que as laminas são de compósitos fibrosos unidirecionais constituindo um Compósito Reforçado por Fibras, essa é uma estrutura de alto desempenho e exemplifica o tipo de compósito a ser estudado neste trabalho.

Figura 2 – Lâminas unidirecionais compondo um compósito laminado reforçado por fibras



Fonte: Adaptada de Martins (2015).

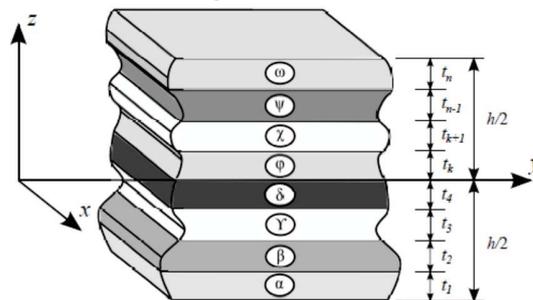
### 2.1.1 Compósitos Laminados Unidirecionais

Os compósitos laminados reforçados por fibra são geralmente compostos de fibras de alta resistência, como vidro ou carbono, imersas em uma matriz polimérica, como resina epóxi. Esta combinação resulta em materiais de alto desempenho mecânico, alta resistência à corrosão e à fadiga, baixa expansão térmica, bom amortecimento estrutural e baixo peso (BARBERO, 2011). Tais características são atrativas na Engenharia, sendo as indústrias naval, aeronáutica e mecânica destaques no uso desse material.

O comportamento global de um compósito laminado é regido pelo comportamento de cada lâmina que o compõe, a qual pode ter seu desempenho analisado com duas abordagens, micromecânica e macromecânica. Na micromecânica, os materiais da lâmina são analisados isoladamente, ou seja fibra e matriz, sendo considerado, portanto, a interação entre eles. Na abordagem macromecânica as fibras e a matriz são considerados como um compósito homogêneo e ortotrópico. Desse modo, de acordo com os objetivos já mencionados, será adotado a abordagem macromecânica no desenvolvimento desse trabalho.

O esquema de laminação ou de empilhamento (*layup*) também é fundamental para o estudo dos laminados. Esse esquema é representado pelos ângulos de orientação das fibras, numerados de baixo para cima dados por  $[\alpha/\beta/\gamma/.../\omega]$ , de acordo com a Figura 3. Logo,  $\alpha$  é o ângulo de orientação das fibras da primeira camada,  $\beta$  é o ângulo de orientação da segunda camada e assim por diante.

Figura 3 – Esquema Genérico de Laminação



Fonte: Rocha (2013).

Os ângulos de orientação devem estar contidos no intervalo entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ . Dependendo dos ângulos de orientação de cada lâmina, um esquema de laminação pode ser classificado como:

- *Cross-ply*: Quando o esquema apresenta lâminas com orientação das fibras iguais a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ , por exemplo  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

- *Angle-ply*: Quando a laminação apresenta pelo menos um ângulo de orientação das fibras diferente de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , por exemplo  $[30^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

A sequência na qual os ângulos são dispostos geram a classificação em:

- **Laminados Simétricos**: apresentam simetria do material e da orientação das fibras ao longo da espessura em relação à superfície média. Por exemplo,  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , que também pode ser descrito por  $[0^\circ/90^\circ]_S$ , onde o índice  $s$  indica que o laminado possui simetria. Para um laminado com número ímpar de lâminas, o ângulo que não repete tem um traço sobre ele. Assim, pode-se definir o esquema  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]$  como  $[45^\circ/-45^\circ/\bar{0}^\circ]_S$ . Pode ocorrer de o laminado apresentar simetria de espessura, de material, porém uma antissimetria nas orientações das fibras, em relação à superfície média, como  $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$ , o que caracteriza um laminado Antissimétrico. Quando foge dessas duas situações tem-se um laminado Assimétrico.
- **Laminados Balanceados**: apresentam para cada camada com orientação  $\alpha$  diferente de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , outra camada com orientação  $-\alpha$ , com as mesmas propriedades do material e espessura, podendo ou não ser adjacente. Por exemplo, o esquema  $[-45^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$  é balanceado.
- **Laminados Simétricos e Balanceados**: Aqui se unem as duas características citadas acima, ou seja, apresenta um plano de simetria e camadas com ângulos invertidos. Por exemplo,  $[90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]_S$  é simétrico e balanceado. De forma análoga, tem-se as demais combinações, como laminados simétricos e não-balanceados, assimétrico e balanceados.

## 2.2 Comportamento Mecânico

Em situações usuais de serviço com cargas estáticas onde as deformações lentas podem ser desprezadas, o comportamento mecânico dos laminados até próximo da falha pode ser considerado como elástico (JONES, 1999). Nestas condições as relações constitutivas seguem a Lei de Hooke generalizada (KODAGALI, 2017) e pode ser representadas na Equação (1):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_1 = \mathbf{S}\sigma_1 \quad (1)$$

na qual  $\mathbf{S}$  é a matriz de flexibilidade,  $\varepsilon$  é o vetor das deformações,  $\sigma$  é o vetor das tensões e o índice 1 orientação no sistema local da lâmina. Os coeficientes de flexibilidade  $S_{ij}$  são:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}; S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}; S_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1}{E_2}; \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}; S_{33} = \frac{1}{E_3}; S_{44} = \frac{1}{G_{12}}; S_{55} = \frac{1}{G_{13}}; S_{66} = \frac{1}{G_{23}} \end{aligned} \quad (2)$$

onde,  $\nu_{ij}$  são os coeficientes de Poisson,  $E_{ij}$  são os módulos de elasticidade nas direções de orientação das fibras e  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade ao cisalhamento.

Invertendo a relação demonstrada na Equação (1), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \mathbf{C}\varepsilon_1 \quad (3)$$

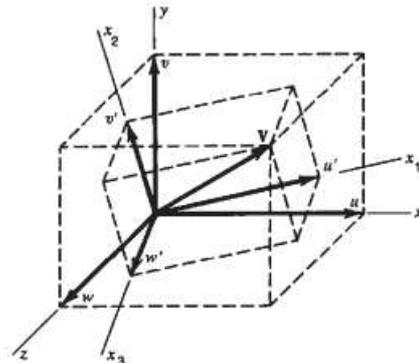
onde

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})\Delta; C_{22} = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})\Delta; C_{33} = E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})\Delta; \\ C_{12} &= E_1(\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23})\Delta; C_{13} = E_2(\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31})\Delta; C_{23} = E_3(\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})\Delta; \\ C_{44} &= G_{12}; C_{55} = G_{13}; C_{66} = G_{23} \text{ e } \Delta = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}} \end{aligned} \quad (4)$$

sendo  $C_{ij}$  são os componentes da matriz de rigidez constitutiva da lâmina em um sistema local.

Tendo que estas relações estão orientadas pelo sistema local da lâmina é necessário fazer uma transformação para o sistema global do laminado a partir dos ângulos de rotação entre os eixos, como na Figura 4.

Figura 4 – Demonstração da rotação entre os eixos locais e globais de um sistema 3D.



Fonte: Adaptado de Cook *et al.* (2002).

Matricialmente a transformação das deformações é definida por (COOK *et al.*, 2002):

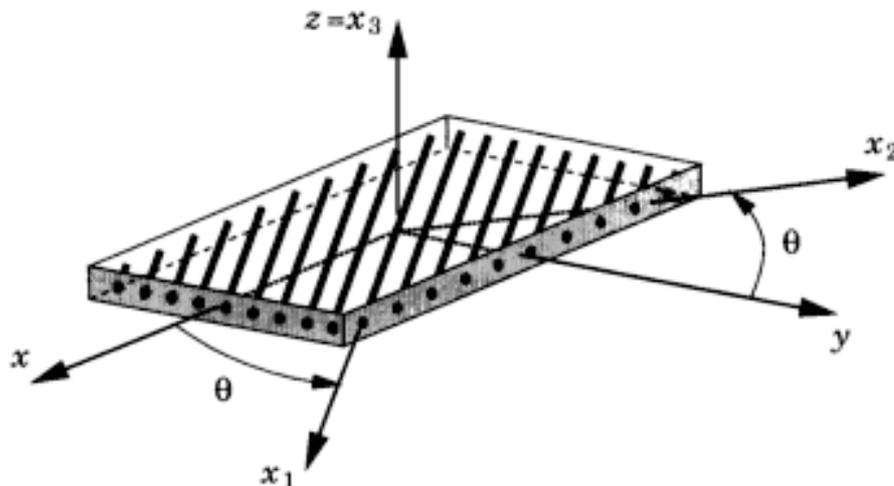
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & n_1 l_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & n_2 l_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & n_3 l_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (5)$$

onde  $l$ ,  $m$  e  $n$  são os cossenos diretores entre os eixos principais do sistema local e do sistema global:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x, x_1); & m_1 &= \cos(y, x_1); & n_1 &= \cos(z, x_1) \\ l_2 &= \cos(x, x_2); & m_2 &= \cos(y, x_2); & n_2 &= \cos(z, x_2) \\ l_3 &= \cos(x, x_3); & m_3 &= \cos(y, x_3); & n_3 &= \cos(z, x_3) \end{aligned} \quad (6)$$

Em laminado planos (chapas e placas), que são o foco deste trabalho, a orientação do sistema de eixos local se dá pela direção da fibra, conforme a Figura 5. Vale ressaltar que essa transformação não é válida para cascas devido à presença de curvatura.

Figura 5 – Rotação entre os eixos locais e globais de uma lâmina



Fonte: Reddy (2004).

Assim, os cossenos diretores podem ser definidos como:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \cos(\theta); \quad m_1 = \cos(90^\circ - \theta) = \sin(\theta); \quad n_1 = \cos(90^\circ) = 0 \\
 l_2 &= \cos(90^\circ + \theta) = -\sin(\theta); \quad m_2 = \cos(\theta); \quad n_2 = \cos(90^\circ) = 0 \\
 l_3 &= \cos(90^\circ) = 0; \quad m_3 = \cos(90^\circ) = 0; \quad n_3 = \cos(0^\circ) = 1
 \end{aligned} \tag{7}$$

E o tensor de transformação pode ser simplificado para:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{8}$$

chamando a matriz de transformação de  $\mathbf{T}$ , tem-se que  $\varepsilon_1 = \mathbf{T}\varepsilon$  e, pelo princípio dos trabalhos virtuais,  $\sigma = \mathbf{T}^T \sigma_1$

Aplicando a transformação dos eixos à relação constitutiva, tem-se:

$$\sigma = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \varepsilon \Rightarrow \sigma = \mathbf{Q}\varepsilon, \text{ com } \mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \tag{9}$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{10}$$

sendo  $\mathbf{Q}$  a matriz constitutiva no sistema do laminado, da qual os componentes  $Q_{ij}$

podem ser calculados com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= C_{11} (\cos(\theta))^4 - 2(\cos(\theta))^4 C_{12} + (\cos(\theta))^4 C_{22} - 4C_{44} (\cos(\theta))^4 \\
&\quad + 2(\cos(\theta))^2 C_{12} - 2(\cos(\theta))^2 C_{22} + 4(\cos(\theta))^2 C_{44} + C_{22} \\
Q_{12} &= -C_{11} (\cos(\theta))^4 + 2(\cos(\theta))^4 C_{12} - (\cos(\theta))^4 C_{22} + 4C_{44} (\cos(\theta))^4 \\
&\quad + (\cos(\theta))^2 C_{11} - 2(\cos(\theta))^2 C_{12} + (\cos(\theta))^2 C_{22} - 4(\cos(\theta))^2 C_{44} + C_{12} \\
Q_{13} &= (\cos(\theta))^2 C_{13} - (\cos(\theta))^2 C_{23} + C_{23} \\
Q_{14} &= \left( (\cos(\theta))^2 C_{11} - 2(\cos(\theta))^2 C_{12} + (\cos(\theta))^2 C_{22} - 4(\cos(\theta))^2 C_{44} + C_{12} \right. \\
&\quad \left. - C_{22} + 2C_{44} \right) \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) \\
Q_{22} &= C_{11} (\cos(\theta))^4 - 2(\cos(\theta))^4 C_{12} + (\cos(\theta))^4 C_{22} - 4C_{44} (\cos(\theta))^4 \\
&\quad - 2(\cos(\theta))^2 C_{11} + 2(\cos(\theta))^2 C_{12} + 4(\cos(\theta))^2 C_{44} + C_{11} \\
Q_{23} &= -(\cos(\theta))^2 C_{13} + (\cos(\theta))^2 C_{23} + C_{13} \tag{11} \\
Q_{24} &= - \left( (\cos(\theta))^2 C_{11} - 2(\cos(\theta))^2 C_{12} + (\cos(\theta))^2 C_{22} - 4(\cos(\theta))^2 C_{44} \right. \\
&\quad \left. - C_{11} + C_{12} + 2C_{44} \right) \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) \\
Q_{33} &= C_{33} \\
Q_{34} &= \sin(\theta) \cos(\theta) (C_{13} - C_{23}) \\
Q_{44} &= -C_{11} (\cos(\theta))^4 + 2(\cos(\theta))^4 C_{12} - (\cos(\theta))^4 C_{22} + 4C_{44} (\cos(\theta))^4 \\
&\quad + (\cos(\theta))^2 C_{11} - 2(\cos(\theta))^2 C_{12} + (\cos(\theta))^2 C_{22} - 4(\cos(\theta))^2 C_{44} + C_{44} \\
Q_{55} &= (\cos(\theta))^2 C_{55} - (\cos(\theta))^2 C_{66} + C_{66} \\
Q_{56} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) (C_{55} - C_{66}) \\
Q_{66} &= -(\cos(\theta))^2 C_{55} + (\cos(\theta))^2 C_{66} + C_{55}
\end{aligned}$$

A partir desses desenvolvimentos é possível obter as tensões em cada lâmina do laminado. Assim, critérios de falhas podem ser utilizados para prever até quais níveis de carregamentos a integridade estrutural de um laminado pode ser mantida.

### 2.3 Critérios de Iniciação de Falha

Vários critérios foram propostos para prever o início da falha em materiais compósitos, dentre os quais pode-se observar na literatura a citação recorrente de Tsai e Wu (1971),

de Hashin (1980), de Puck e Schurmann (1998), entre outros. No início dos anos 90, o *World Wide Failure Exercise* (WWFE) foi inicializado e ofereceu um amplo estudo coordenado das capacidades preditivas de critérios de falha proeminentes, atualmente em uso, para descrever o comportamento de laminados reforçados com fibra. Muitos dos autores desses critérios de falha foram convidados a fornecer previsões para diferentes casos e, em seguida, essas as previsões foram avaliadas em relação a outras previsões e aos dados experimentais. O modelo de Puck se destacou como modelo de abordagem fenomenológica com base física tridimensional (HINTON *et al.*, 2000), sendo portanto o critério escolhido para aplicação neste trabalho.

Depois da realização do WWFE já foram desenvolvidos novos critérios de falha, dentre os quais vale destacar LaRC 04 (PINHO *et al.*, 2005a), que tem sido bastante citado na literatura.

Nesta seção está comentado sobre os critérios citados a seguir devido o seu destaque na literatura, mas o foco foi para o critério de Puck visto que é o critério utilizado neste trabalho.

### 2.3.1 Critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu tem como base um teoria polinomial a qual utiliza-se de tensores interativos para ponderar os valores das tensões. Esse tipo teoria não fornece embasamento físico e, nesse caso, parte da suposição da existência de uma superfície de falha no espaço de tensão que pode ser obtido do ajuste de curvas (TSAI; WU, 1971). Esse critério é considerado como quadrático, podendo ser expresso por:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (12)$$

onde,  $f_i$  e  $f_{ij}$  são, respectivamente, tensores de força de segunda e quarta ordem.

No caso de Estado Plano de Tensões é suposta uma superfície fechada no espaço  $(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_6)$ , cuja a Equação 12 pode ser reescrita como:

$$f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_{23}^2 + f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \tau_{23} + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (13)$$

sendo,

$$f_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}; f_{11} = \frac{1}{X_T X_C}; f_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}; f_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C}; f_6 = 0 \text{ e } f_{66} = \frac{1}{S_{23}^2} \quad (14)$$

onde  $X$  e  $Y$  são, respectivamente, as resistências nas direções longitudinal e transversal, e  $S$  a resistência ao cisalhamento, sendo os subscritos  $t$  e  $c$  indicativos, respectivamente, de tração e de compressão.

De um modo geral, a determinação do termo  $f_{12}$  pode ser complexa, o qual pode ser obtido experimentalmente por ensaios biaxiais. Em alguns trabalhos (REDDY *et al.*,1995;NALI; CARRERA,2012) encontra-se a utilização de uma aproximação dada por:

$$f_{12} \approx \beta \sqrt{f_{11}f_{22}} \quad (15)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro de interação generalizada.

Kuraishi *et al.* (2002) comenta que esse parâmetro varia entre 0 e -0,5 para a maioria dos materiais e que ao adotar  $\beta = -0.5$  pode-se considerar como um critério de Von Mises generalizado.

Vale ressaltar que o critério é dado por uma única equação e, portanto, não distingue diretamente o modo de falha da lâmina.

### 2.3.2 Critério de Hashin

Este critério é uma teoria de falha parcial que consiste na combinação de condições interativas e não interativas, o qual consegue distinguir a falha na fibra e na matriz, diferenciando esforços de tração e compressão, sendo esse o critério utilizado pelo ABAQUS no modelo de dano de compósitos.

A proposição inicial desse critério foi feita por Hashin e Rotem (1973) e modificada posteriormente por Hashin (1980) e Hashin (1981), assumindo a forma atual que descreve os seguintes modos de falha:

- **Modo de falha das fibras por tração ( $\sigma_1 > 0$ ):**

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2)}{S_{12}^2} \leq 1 \quad (16)$$

- **Modo de falha das fibras por compressão ( $\sigma_1 < 0$ ):**

$$\left(\frac{|\sigma_1|}{X_C}\right) \leq 1 \quad (17)$$

- **Modo de falha da matriz por tração ( $\sigma_2 > 0$ ):**

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_T}\right)^2 + \frac{(\tau_{23}^2 - \sigma_2 \sigma_3)}{S_{23}^2} + \frac{(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2)}{S_{12}^2} \leq 1 \quad (18)$$

- **Modo de falha da matriz por compressão ( $\sigma_2 < 0$ ):**

$$\left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2S_{23}}\right)^2 + \frac{(\tau_{23}^2 - \sigma_2 \sigma_3)}{S_{23}^2} + \frac{(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2)}{S_{12}^2} \leq 1 \quad (19)$$

### 2.3.3 Critério de LaRC

A *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) possui um centro de pesquisa chamado *Langley Research Center*, no qual foram propostas novos critérios de falha para compósitos reforçados por fibras. Dentre estes, escolheu-se o critério LaRC 04 para ser comentado neste trabalho por ele considerar o carregamento geral tridimensional e a linearidade de cisalhamento no plano (PINHO *et al.*, 2005a).

Os índices de análise da falha na matriz são calculados pelas seguintes expressões:

- **Modo de falha da matriz por compressão ( $\sigma_2 < 0$ ;  $\sigma_1 \geq -Y^C$ ):**

$$FI_M = \left(\frac{\tau^T}{S^T - \eta^T \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau^L}{S_{is}^L - \eta^L \sigma_n}\right)^2 \quad (20)$$

- **Modo de falha da matriz por tração ( $\sigma_2 \geq 0$ ):**

$$FI_M = (1 - g) \frac{\sigma_2}{Y_{is}^T} + g \left(\frac{\sigma_2}{Y_{is}^T}\right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12})}{\chi(\gamma_{12, is}^u)} \quad (21)$$

onde, as tensões nos planos potenciais de falha para um intervalo de  $\alpha \in [0, \pi[$ :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{23} \sin(2\alpha) \quad (22)$$

$$\tau^T = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{23} \cos(2\alpha) \quad (23)$$

$$\tau^L = \tau_{12} \cos(\alpha) + \tau_{31} \sin(\alpha) \quad (24)$$

Já as tensões de falha sob compressão biaxial são obtidas por:

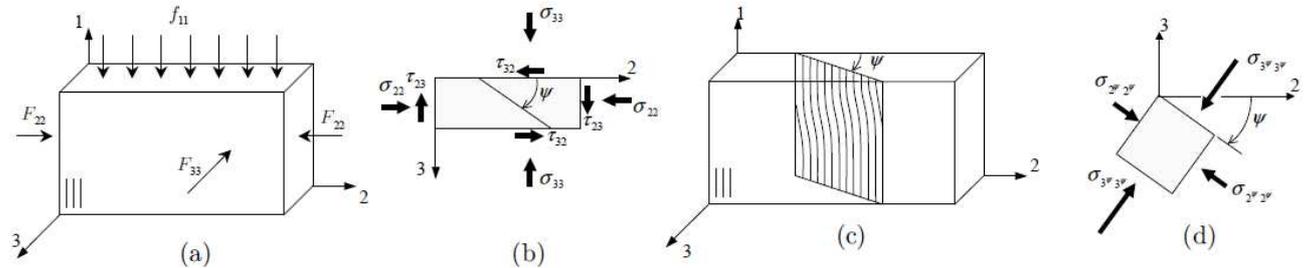
$$\sigma_n^m = \frac{\sigma_{2^m} + \sigma_{3^\psi}}{2} + \frac{\sigma_{2^m} - \sigma_{3^\psi}}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{2^m 3^\psi} \sin(2\alpha) \quad (25)$$

$$\tau^{Tm} = -\frac{\sigma_{2^m} - \sigma_{3^\psi}}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{2^m 3^\psi} \cos(2\alpha) \quad (26)$$

$$\tau^{Lm} = \tau_{1^m 2^m} \cos(\alpha) + \tau_{3^\psi 1^m} \sin(\alpha) \quad (27)$$

No Critério LaRc 04 o estado de tensão é considerado 3D genérico, como já citado, no qual o plano de torção forma um ângulo  $\varphi$  com o eixo 2, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Modelo de torção 3D



Fonte: Pinho *et al.* (2005a).

As tensões no plano de torção são obtidas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{2^\psi} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos(2\psi) + \tau_{23} \sin(2\psi) \quad (28)$$

$$\sigma_{3^\psi} = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_{2^\psi} \quad (29)$$

$$\tau_{12^\psi} = \tau_{12} \cos(\psi) + \tau_{31} \sin(\psi) \quad (30)$$

$$\tau_{2^\psi 3^\psi} = 0 \quad (31)$$

$$\tau_{3^\psi 1} = \tau_{31} \cos(\psi) - \tau_{12} \sin(\psi) \quad (32)$$

A formação da faixa de torção se dá pela falha da matriz devido ao desalinhamento das fibras, o qual gera tensões dadas por:

$$\sigma_{1^m} = \frac{\sigma_1 + \sigma_{2^\psi}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_{2^\psi}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{12^\psi} \sin(2\varphi) \quad (33)$$

$$\sigma_{2^m} = \sigma_1 + \sigma_{2^\psi} - \sigma_{1^m} \quad (34)$$

$$\tau_{1^m 2^m} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_{2^\psi}}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{12^\psi} \cos(2\varphi) \quad (35)$$

$$\tau_{2^m 3^\psi} = \tau_{2^\psi 3^\psi} \cos(\varphi) - \tau_{3^\psi 1} \sin(\varphi) \quad (36)$$

$$\tau_{3^\psi 1^m} = \tau_{3^\psi 1} \cos(\varphi) \quad (37)$$

Os índices de falha das fibras ( $FI_F$ ) são expressos por:

- **Modo de falha das fibras por tração ( $\sigma_1 \geq 0$ ):**

$$FI_F = \frac{\sigma_1}{X^T} \quad (38)$$

- **Modo de falha das fibras por compressão ( $\sigma_1 < 0$ ;  $\sigma_{2^m} < 0$ ):**

$$FI_F = \left( \frac{\tau_{1^m 2^m}}{S_{is}^L - \eta^L \sigma_{2^m}} \right)^2 \quad (39)$$

O LaRC04 ainda faz a consideração de uma falha simultânea, onde a matriz falha por tração sob compressão longitudinal com torção da fibra ( $FI_{M/F}$ ). Sendo:

- **Modo de falha das fibras por compressão ( $\sigma_1 < 0$ ;  $\sigma_{2^m} \geq 0$ ):**

$$FI_{M/F} = (1-g) \frac{\sigma_{2^m}}{Y_{is}^T} + g \left( \frac{\sigma_{2^m}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{2^m 3}^2 \psi + \chi (\gamma_{1^m 2^m})}{\chi (\gamma_{12|is}^\mu)} \quad (40)$$

onde,  $Y_{is}^T$  é a resistência à tração transversal in-situ,  $\gamma_{12|is}^\mu$  corresponde a deformação final in-situ,  $g$  é a constante do material e  $\Lambda_{23}^o$  é um componente do *crack tensor* ( $\Lambda$ ). Estes podem ser obtidos a partir das seguintes expressões:

$$Y_{is}^T = 1.12 \sqrt{2} Y^T \quad (41)$$

$$\gamma_{12|is}^\mu = \chi^{-1} [2\chi (\gamma_{12}^\mu)] \quad (42)$$

$$\Lambda_{23}^o = \Lambda_{22}^o = 2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right) \quad (43)$$

$$g = \frac{\Lambda_{22}^o (Y_{is}^T)^2}{\chi (\gamma_{12|is}^\mu)} \quad (44)$$

#### 2.3.4 Critério de Puck

Este critério baseia-se em Mohr-Coulomb apresentando uma fundamentação teórica rigorosa, em oposição a outros critérios mais empíricos, e a capacidade de prever não só o início da falha, mas também a orientação dos planos de fratura (PINHO *et al.*, 2005b). Esta última característica é particularmente importante para a modelagem de compósitos laminados, pois,

uma vez que estes materiais são suscetíveis a modos de ruptura brusca, é necessário prever não apenas se um componente irá falhar, mas também como.

O critério de Puck, assim como a maioria dos demais critérios de falha, é baseado nas tensões e deformações presentes no nível da lâmina. Esse critério distingue dois mecanismos de falha: fratura das fibras (*Fiber Fracture* - FF) e fratura entre as fibras (*Inter Fiber Fracture* - IFF). O domínio elástico é, portanto, caracterizado pela definição de quatro superfícies de falha: falha da fibras (longitudinal) na tração (N = FF+) e na compressão (N = FF-) e falha entre as fibras, ou seja, na matriz (transversal) sob tração (N = IFF+) e sob compressão (N = IFF-). Assim, as funções de identificação do início dos danos adotam as formas:

$$F_{FF+} = f_{E,FF+} - r_{E,FF+} \leq 0 ; F_{FF-} = f_{E,FF-} - r_{E,FF-} \leq 0 \quad (45)$$

$$F_{IFF+} = f_{E,IFF+} - r_{E,IFF+} \leq 0 ; F_{IFF-} = f_{E,IFF-} - r_{E,IFF-} \leq 0$$

onde  $f_{E,FF+}$  e  $f_{E,FF-}$  são os fatores de exposição à falha na fibra e  $r_{E,FF+}$  e  $r_{E,FF-}$  são os limiares de dano da fibra, sendo o indicador positivo referente a tração e o negativo a compressão. De forma análoga,  $f_{E,IFF+}$ ,  $f_{E,IFF-}$ ,  $r_{E,IFF+}$  e  $r_{E,IFF-}$  são os parâmetros relacionados ao caso de falha entre as fibras. É importante observar que os limiares de dano são definidos inicialmente com um valor unitário (1.0), visto que este é o valor no qual os fatores de exposição indicam o início da falha.

#### 2.3.4.1 Fratura das Fibras (*Fiber Fracture* - FF)

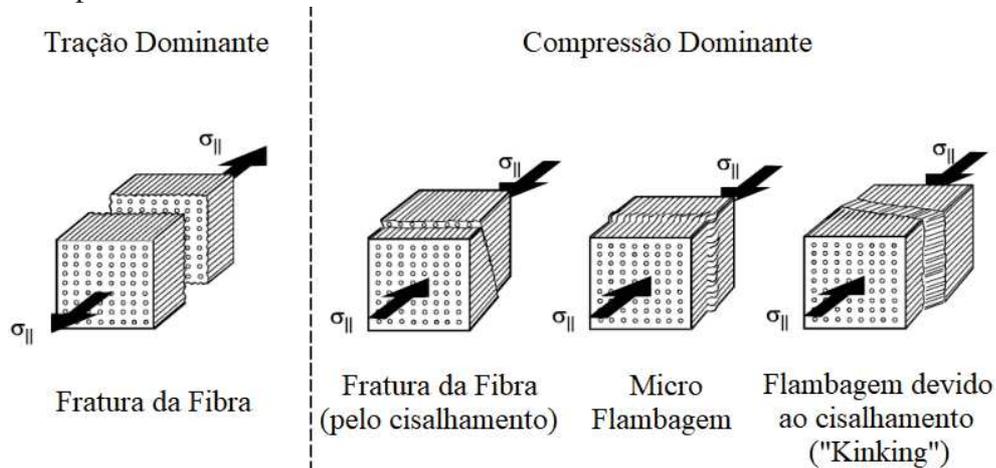
A Fratura das Fibras (FF) define a fratura da maior parte ou de todas as fibras de uma lâmina, não a fratura de fibras individuais que estatisticamente começam a quebrar em cerca de 50% a 70% do limite de fratura da fibra (KNOPS, 2008). Portanto, uma fratura de fibra é definido como a carga em que toda a lâmina se separa abruptamente na direção paralela às fibra.

Tratando a lâmina como um material homogêneo, esses critérios são definidos pela carga máxima homogeneizada na direção paralela à fibra e longitudinal da lâmina. Nesse sentido, uma lâmina se comporta de maneira diferente se submetida à tração ou à compressão. De maneira geral, as fibras possuem uma resistência superior e suportam cargas bem maiores, no sentido das mesmas, do que o material da matriz. Por outro lado, na direção transversal às fibras, a mesma quantidade de carga age tanto nas fibras quanto na matriz.

A tração paralela às fibras leva à separação do material em um plano de fratura perpendicular às fibras. A capacidade de carga nessa direção é fortemente dominada pelas fibras. Micro-danos na matriz, devido a adição de carga perpendicular aplicada à fibra, ou até mesmo

cisalhamento não influenciam de forma significativa a capacidade de carga na direção da fibra. No entanto, a capacidade de carga na direção da fibra é influenciada pela carga perpendicular à fibra devido à contração lateral das fibras e da matriz.

Figura 7 – Tipos de FF.



Fonte: Adaptado de Deuschle (2010).

Sob uma carga compressiva, três modos de falhas são possíveis. A flambagem local das fibras, em inglês "*kink*", é o modo de dano proeminente em que as fibras de uma grande região se curvam em uma direção comum, sendo a torção de fibra uma maneira de flambagem mais a nível macroscópico. A fratura de fibra devido ao cisalhamento raramente ocorre, pois isso requer um alinhamento perfeito das fibras e da ligação da matriz com as fibras, caso em que a tensão de cisalhamento que atua sobre as fibras causa a fratura em um plano de fratura inclinado. A falha da fibra impede a capacidade da lâmina de suportar carga e causa concentrações de cargas nas lâminas mais próximas que podem levar a falhas subsequentes.

A falha da fibra ocorre geralmente devido à tensão no sentido longitudinal das fibras. O critério de falha de Puck define o critério de tensão máxima como descrito na equação seguinte:

$$f_{E,FF} = \frac{\sigma_1}{\pm R_{\parallel}^{t,c}} \quad (46)$$

onde  $\sigma_1$  é a tensão de tração ao longo da direção da fibra e  $R_{\parallel}^{t,c}$  é a resistência a tração e a compressão do material.  $R_{\parallel}^t$  é utilizado para  $\sigma_1$  positivo (tração),  $-R_{\parallel}^c$  é utilizado para  $\sigma_1$  negativo (compressão) e o índice  $\parallel$  indica que os parâmetros estão relacionados a direção paralela à fibra. De forma análoga, quando houver o símbolo  $\perp$  indica que o parâmetro está relacionado a direção perpendicular a direção da fibra.

Entretanto, para uma análise mais precisa, os efeitos de  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  devem ser considerados. Devido aos diferentes módulos de Young para a fibra e matriz, ainda que a tensão seja parecida, as deformações micro-mecânicas,  $\varepsilon_{1f}$ , são diferentes. Portanto, um amplificador de tensões  $m_{\sigma f}$  é utilizado para a tensão transversal, levando esse efeito em consideração. Puck propôs valores de 1.3 para fibra de vidro e 1.1 para fibras de carbono.

$$\varepsilon_{1f} = \frac{\sigma_{1f}}{E_{\parallel f}} - \frac{\nu_{\parallel \perp f}}{E_{\perp f}} m_{\sigma f} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (47)$$

onde  $E_{\parallel f}$  e  $E_{\perp f}$  são respectivamente os módulos de elasticidades paralelo e perpendicular da fibra e  $\nu_{\parallel \perp f}$  é o coeficientes de Poisson das fibras, ressaltando que o índice  $f$  indica que o parâmetro são referente a fibra.

De acordo com Puck, a falha da fibra ocorre quando a tensão na fibra  $\sigma_{1f}$  chega na tensão de resistência da fibra. Portanto, o critério de Puck utiliza as tensões e resistências das fibras ao invés do material. As equações são semelhantes ao critério de tensão máxima, mas é estendido para fibras. Tendo que  $\varepsilon_{1f} = \varepsilon_1$  e utilizando a expressão  $\frac{\nu_{\parallel \perp f}}{E_{\perp f}} = \frac{\nu_{\parallel f}}{E_{\parallel f}}$ , a tensão na fibra pode ser escrita como:

$$\sigma_{1f} = E_{\parallel f} \varepsilon_1 + \nu_{\parallel f} m_{\sigma f} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (48)$$

Com base nas Equações (47) e (48), considerando que a tensão na fratura da fibra ocorre quando esta for igual à sua tensão de resistência, é possível determinar a relação entre a tensão de resistência da fibra e a do material:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\parallel \perp}}{E_{\perp}} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (49)$$

$$\sigma_{1f(\text{na fratura})} = \pm R_{\parallel f}^{t,c} = \pm \frac{E_{\parallel f}}{E_{\parallel}} R_{\parallel}^{t,c} \quad (50)$$

onde,  $\pm R_{\parallel}^{t,c}$  e  $\pm R_{\parallel f}^{t,c}$  são respectivamente as resistências na tração (índice t) e na compressão (índice c) do material e da fibra (índice f), e  $\nu_{\parallel \perp}$  é o coeficientes de Poisson da lâmina.

Substituindo as equações encontradas, é possível chegar na equação geral para o critério de Puck na FF:

$$f_{E,FF} = \frac{1}{\pm R_{\parallel}^{t,c}} \left[ \sigma_1 - \left( \nu_{\parallel \perp} - \nu_{\parallel \perp f} \cdot m_{\sigma f} \frac{E_{\parallel}}{E_{\parallel f}} \right) (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (51)$$

Estando sujeito a:

$$\begin{cases} +R_{\parallel}^t & \text{para } \sigma_1 > 0 \\ -R_{\parallel}^c & \text{para } \sigma_1 < 0 \end{cases} \quad (52)$$

onde  $f_{E,FF}$  é a exposição de tensão da fratura de fibra na lâmina.

Em comparação com a nomenclatura indicial, bastante utilizada, adotou-se  $\parallel$  correspondente ao 1 e  $\perp$  ao 2, conforme organizado na Tabela 1.

Tabela 1 – Nomenclatura dos parâmetros utilizados no critério FF de Puck.

Parâmetros	Nomenclatura Adaptada	Significado
$R_{\parallel}^t$	$X_t$	resistência a tração paralela às fibras
$R_{\parallel}^c$	$X_c$	resistência a compressão paralela às fibras
$\nu_{\parallel\perp}$	$\nu_{12}$	coeficiente de Poisson da lâmina
$\nu_{\parallel\perp f}$	$\nu_{12,f}$	coeficiente de Poisson da fibra
$m_{\sigma f}$	MSIG (UMAT)	fator amplificador para as tensões transversais às fibras
$E_{\parallel}$	$E_1$	módulos longitudinais da lâmina
$E_{\parallel f}$	$E_{1,f}$	módulos longitudinais da fibra

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, a Equação (51) pode ser reescrita como:

$$\text{para } \sigma_1 > 0 \Rightarrow f_{E,FF} = \frac{1}{X_t} \left[ \sigma_1 - \left( \nu_{12} - \nu_{12,f} \cdot m_{\sigma f} \frac{E_1}{E_{1,f}} \right) (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (53)$$

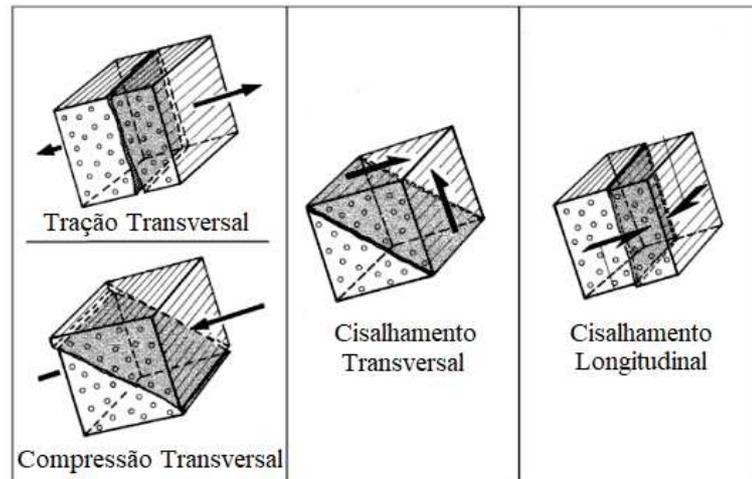
$$\text{para } \sigma_1 < 0 \Rightarrow f_{E,FF} = \frac{1}{-X_c} \left[ \sigma_1 - \left( \nu_{12} - \nu_{12,f} \cdot m_{\sigma f} \frac{E_1}{E_{1,f}} \right) (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (54)$$

#### 2.3.4.2 Fratura entre as Fibras (Inter Fiber Fracture - IFF)

Se o material estiver sujeito à tração ou compressão perpendicular às fibras e a qualquer tipo de cisalhamento, então a lâmina eventualmente pode falhar devido às fraturas entre as fibras (IFF). Esse termo define qualquer fratura presente na matriz ou na interface da matriz com a fibra, sendo gerado instantaneamente na matriz e propagado até a interface entre os materiais. Esse critério teve seu desenvolvimento motivado por evidências observadas experimentalmente. O IFF é utilizado para a previsão da resistência do material em um estado arbitário de tensões multiaxiais, o qual tem sua importância para a capacidade de carga de um laminado dependente da orientação do plano de fratura e da carga, como observado na Figura 8.

Sob tração transversal ou cisalhamento longitudinal, uma trinca reta é observada na orientação perpendicular a tensão, enquanto sob compressão transversal e cisalhamento transversal, uma trinca inclinada é observada. A presença do IFF leva a uma redistribuição de tensões no laminado, mas a lâmina ainda é capaz de suportar alguma carga. A presença do IFF leva a danos sucessivos devido à concentração das tensões e à delaminação, especialmente perto da ponta da fratura.

Figura 8 – Tipos de IFF.



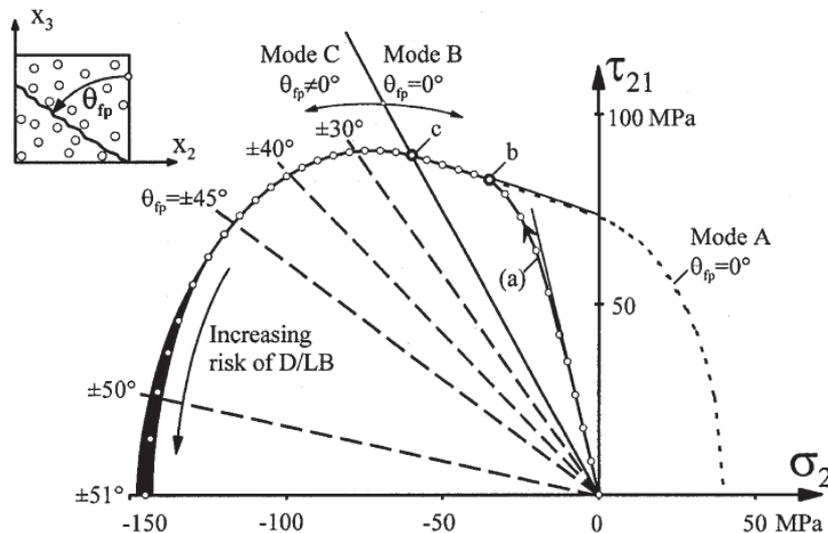
Fonte: Adaptado de Deuschle (2010).

As trincas retas formadas sob tração transversal ou cisalhamento longitudinal geralmente podem ser toleradas. O principal risco com esse tipo de dano é o crescimento da delaminação nas pontas das trincas e o acúmulo de danos devido a concentração de tensões ao redor da zona de fratura. Por outro lado, o ângulo de fratura inclinado gerado sob compressão transversal e cargas transversais de cisalhamento é geralmente destrutivo para o laminado. Isso leva a uma delaminação instantânea e até a uma divisão do laminado.

O critério de dano de Puck consegue diferenciar entre FF e IFF, assim como prever a orientação do plano do IFF e as tensões agindo no mesmo, baseado no critério de Mohr-Coulomb.

Tais questões ficam melhor explicadas a partir da divisão dos modos existentes no critério IFF, os quais estão apresentados na Figura 9.

Figura 9 – Modos de Fratura do IFF.



Fonte: Puck e Schurmann (2002).

O modo A é produzido por uma tensão de tração pura ( $\sigma_2$ ) ou por uma tensão de cisalhamento pura ( $\tau_2$ ) ou, na maioria dos casos, por uma combinação dessas duas. Nesse modo o ângulo de fratura  $\theta_{fp}$  é 0 e a tensão  $\sigma_2$  é perpendicular ao plano da fratura, sendo esta de tração. Seu critério de verificação se dá pela seguinte equação (PUCK; MANNIGEL, 2007):

$$f_{EFF-A} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^c} - p_{\perp\parallel}^t \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2} + p_{\perp\parallel}^t \sigma_2 \right], \text{ para } \sigma^2 \geq 0 \quad (55)$$

O desenvolvimento dos modos de IFF B e C são mais complexos do que o de A. O modo B apresenta  $\theta_{fp} = 0$  e assume que uma fratura de cisalhamento é produzida por  $\tau_{21}$ , sendo a sua equação de verificação como descrita a seguir:

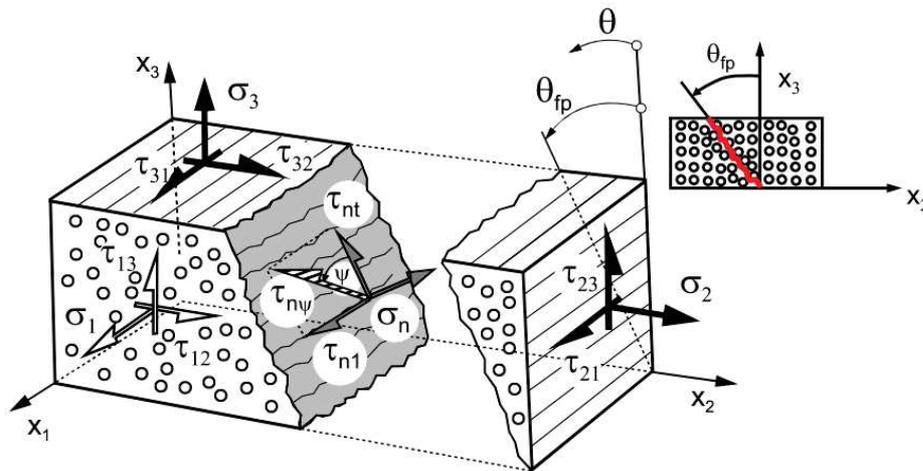
$$f_{EFF-B} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} \sigma_2 + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right], \text{ para } \sigma^2 < 0 \text{ e } 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{|\tau_{21c}|} \quad (56)$$

No modo C tem-se que  $\theta_{fp} \neq 0$ , ou seja, a fratura de cisalhamento se desenvolve num plano oblíquo e é decorrente da combinação das ações de  $\tau_{nt} = -\sigma_2 \sin(\theta_{fp}) \cos(\theta_{fp})$  e  $\tau_{nt} = \tau_{21} \cos(\theta_{fp})$ . Em ambos os casos a ação de  $\sigma_2$  é de compressão e impede a abertura da fratura de cisalhamento.

$$f_{EFF-C} = \frac{\tau_{21}^2}{4 \left( R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\perp}^A \right)} \cdot \frac{-R_{\perp}^c}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{-R_{\perp}^c}, \text{ para } \sigma^2 < 0 \text{ e } 0 \leq \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\perp}^A} \quad (57)$$

Quanto à orientação do plano de fratura, esta é feita paralela à direção das fibras e com um ângulo  $\theta$  na direção da espessura. As tensões atuantes no plano,  $\sigma_n$ ,  $\tau_{n1}$  e  $\tau_{nt}$ , são utilizadas para determinar o IFF.

Figura 10 – Tensões agindo no plano de fratura.



Fonte: Kodagali (2017).

De acordo com a Figura 10, essas tensões no plano de fratura podem ser obtidas transformando  $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21}, \tau_{31}$  e  $\tau_{23}$  da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{t1} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & -sc & sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (58)$$

onde  $c = \cos(\theta)$  e  $s = \sin(\theta)$ , obtendo:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \sigma_2 \cdot \cos^2 \theta + \sigma_3 \cdot \sin^2 \theta + \tau_{23} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{n1}(\theta) &= \tau_{12} \cdot \cos \theta + \tau_{13} \cdot \sin \theta \\ \tau_{nt}(\theta) &= -\sigma_2 \cdot \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \cdot \sin \theta \cos \theta + \tau_{23} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (59)$$

As tensões de cisalhamento  $\tau_{n1}$  e  $\tau_{nt}$  podem ser combinadas para formar a tensão de cisalhamento  $\tau_{n\psi}$  (Figura 10).

$$\tau_{n\psi} = \sqrt{(\tau_{nt})^2 + (\tau_{n1})^2} \quad (60)$$

O critério de Puck para IFF é dividido em duas equações. As quais estão disposta a seguir, respectivamente, para quando  $\sigma_n$  for positivo e  $\sigma_n$  for negativo:

$$f_{EIFF}(\theta) = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_{\perp}^A} - \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \right) \sigma_n(\theta) \right]^2 + \left( \frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n(\theta) \quad (61)$$

$$f_{EIFF}(\theta) = \sqrt{\left( \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n(\theta) \right)^2 + \left( \frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}(\theta)}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n(\theta) \quad (62)$$

Definimos as variáveis para auxiliar a implementação conforme às expressões a seguir:

$$\begin{aligned}
 PTR &= \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^t}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^t}{R_{\perp\parallel}^A} \sin^2 \psi ; \quad PCR = \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^c}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}^A} \sin^2 \psi \\
 \cos^2 \psi &= \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2} ; \quad \sin^2 \psi = \frac{\tau_{nl}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2} ; \quad R_{\perp\parallel} = S_{21} \text{ ou } \Rightarrow R_{\perp\parallel} = \frac{p_{\perp\perp}^c \cdot R_{\perp\perp}^A}{p_{\perp\perp}^c} \\
 R_{\perp\psi}^A &= \left[ \left( \frac{\cos \psi}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\sin \psi}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 \right] \Rightarrow R_{\perp\psi}^A = \left[ \frac{\tau_{nt}^2 (R_{\perp\parallel}^A)^2 + \tau_{nl}^2 (R_{\perp\perp}^A)^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 (\tau_{nt}^2 + \tau_{nl}^2) (R_{\perp\parallel}^A)^2} \right] \\
 RVVA &= R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)} ; \quad R_{\perp}^{At} = R_{\perp}^A = R_{\perp}^{(+)} = R_{\perp}^t = Y_T ; \quad R_{\perp}^{(-)} = R_{\perp}^c = Y_C
 \end{aligned} \tag{63}$$

onde  $R_{\perp}^{At}$  e  $R_{\perp\parallel}^A$  são as resistências a tração perpendicular às fibras e a resistência ao cisalhamento no plano respectivamente,  $R_{\perp\perp}^A$  é a resistência à fratura devido à tensão de cisalhamento transversal/transversal.  $\theta$  é o ângulo do plano analisado e  $f_{E_{IFF}}$  é a exposição às tensões da fratura entre as fibras da lâmina, o qual quando igual a 1 indica a fratura da lâmina.  $p_{\perp\parallel}^{t,c}$  e  $p_{\perp\perp}^{t,c}$  são parâmetros de inclinação, os quais são obtidas através das curvas de  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$ . Entretanto, são de difícil obtenção sem realizar uma série de experimentos, portanto Puck recomenda certos valores desses parâmetros de inclinação, no caso da fibra de carbono:  $p_{\perp\parallel}^c = 0.3$ ,  $p_{\perp\perp}^t = 0.35$  e  $p_{\perp\perp}^{t,c} = 0.3$  (KODAGALI, 2017).

É importante explicar que PTR, PCR e RVVA são nomenclaturas utilizadas neste trabalho para simplificar as expressões e a declaração de variáveis no código da UMAT. Assim como com  $Y_T$ ,  $Y_C$  e  $S_{21}$  inclusive já utilizadas em outros trabalhos semelhantes a este, como Wiegand *et al.* (2008). Adotando esses termos e a analogia indicial, os parâmetros do critério IFF podem ser representados conforme mostrado na Tabela 2

Tabela 2 – Nomenclatura dos parâmetros utilizados no critério IFF de Puck.

Parâmetros	Nomenclatura Adaptada	Significado
$R_{\perp}^{At}$	$Y_T$	resistência a tração perpendicular às fibras
$R_{\perp}^c$	$Y_C$	resistência a tração perpendicular às fibras
$R_{\perp\parallel}^A$	$S_{21}$	resistência ao cisalhamento no plano
$R_{\perp\perp}^A$	RVVA	resistência à fratura devido à tensão de cisalhamento transversal
$p_{\perp\parallel}^t$	P21T	parâmetro de inclinação paralelo/transversal na tração
$p_{\perp\parallel}^c$	P21C	parâmetro de inclinação paralelo/transversal na compressão
$p_{\perp\perp}^t$	P22T	parâmetro de inclinação transversal/transversal na tração
$p_{\perp\perp}^c$	P22C	parâmetro de inclinação transversal/transversal na compressão

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando as relações da Equação (63) e nomenclaturas expostas na Tabela 2, as Equações (61) e (62) podem ser simplificadas para:

$\sigma_n$  positivo:

$$f_{E_{IFF}}(\theta) = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{Y_T} - PTR\right) \sigma_n(\theta)\right]^2 + \left[\frac{\tau_{nt}(\theta)}{RVVA}\right]^2 + \left[\frac{\tau_{nl}(\theta)}{S_{21}}\right]^2} + PTR \cdot \sigma_n(\theta) \quad (64)$$

$\sigma_n$  negativo:

$$f_{E_{IFF}}(\theta) = \sqrt{[PCR \cdot \sigma_n(\theta)]^2 + \left[\frac{\tau_{nt}(\theta)}{RVVA}\right]^2 + \left[\frac{\tau_{nl}(\theta)}{S_{21}}\right]^2} + PCR \cdot \sigma_n(\theta) \quad (65)$$

Quando  $\sigma_n$  é uma tensão de tração, esta promove o IFF ajudando na tensão de cisalhamento, mas se  $\sigma_n$  for compressão, atrasa a ocorrência do IFF, pois aumenta a resistência da fratura contra fratura de cisalhamento, devido a isso, são necessárias equações separadas para ambos os casos.

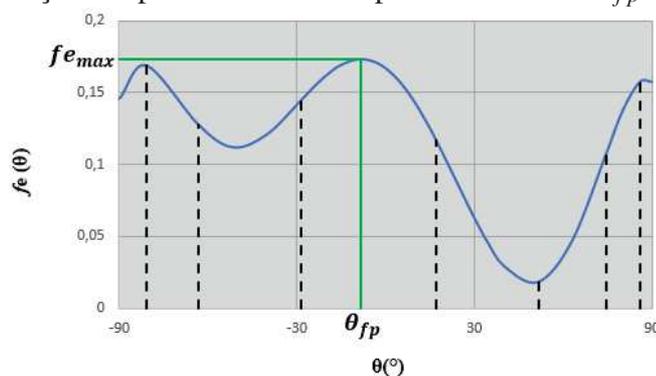
#### 2.3.4.3 Determinação do ângulo de fratura

Pode-se observar que as equações do critério de identificação da falha dependem de  $\theta$ , o qual pode variar entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ . Para verificar o critério é necessário saber o ângulo do plano onde ocorrerá a falha. Para isso, faz-se uma estimativa de que esse irá se formar onde há uma maior exposição à tensão. Deste modo é realizado uma busca calculando e comparando o fator de exposição utilizando incrementos de  $1^\circ$ :

$$[f_{E_{IFF}}(\theta)]_{\max} = f_{E_{IFF}}(\theta_{fp}) \quad (66)$$

onde  $\theta_{fp}$  é determinado como o ângulo do plano de fratura, pelo o maior risco de ocorrência de fratura devido a maior exposição a tensão.

Figura 11 – Demonstração simplificada da busca por varredura do  $\theta_{fp}$ .



Fonte: Adaptado de Thomson *et al.* (2017).

## 2.4 Análise do Comportamento Pós-Pico

Quando ocorre a falha de uma determinada lâmina, esta apresenta uma perda de rigidez e o laminado como um todo, também perde a rigidez, o que se verifica através da não linearidade da curva tensão x deformação. Esta não-linearidade física, muitas vezes promove também efeitos de não linearidade geométrica.

Para a aplicação dessa redução da rigidez nas lâminas que falharam podem ser utilizadas diversas abordagens. Além do critério de falha para a ativação da degradação é necessário definir também o comportamento residual da rigidez após o início da falha.

### 2.4.1 Modelos de degradação e de dano contínuo

Nas hipótese de projeto, quando a primeira lâmina falha é considerado que a estrutura falhou (*first-ply failure*), mesmo que esta seja composta por várias outras lâminas, que, inclusive, podem ter maior resistência. Esse é um raciocínio que preza pela segurança, entretanto pode tornar o projeto antieconômico. A abordagem dessa hipótese conduz a uma análise que busca o estado plano de tensões e assume que o laminado se comportaria da mesma maneira de uma lâmina isolada, o que é questionável pois as características de uma lâmina isolada e de um laminado são diferentes.

Além disso, experimentalmente, é observado que os laminados podem suportar cargas crescentes mesmo após a falha de uma ou mais lâminas. Portanto, a falha de uma lâmina não significa a perda total da capacidade de carga da estrutura. Como já mencionado, a lâmina perde rigidez e as tensões que eram suportadas por ela são distribuídas para as outras lâminas. Com a redistribuição, as lâminas "restantes" ficam mais carregadas, mas isso não significa que elas irão falhar na primeira redistribuição de tensão. Então a estrutura pode continuar a resistir, mas com uma rigidez menor. Deste modo, a análise pode continuar desde que sejam considerados os efeitos das perdas de rigidez e das redistribuições de tensão. Então, com base nisso, há uma interpretação de que a falha da estrutura se dá com a falha da última lâmina (*ultimate-ply failure*).

Com a utilização dos critérios de falha é possível estipular a carga de falha de uma lâmina a partir do estado de tensões ou deformações. Quando essa carga for atingida, será reduzida a rigidez dessa lâmina. A medida que cada lâmina vai falhando, o laminado vai gradualmente perdendo rigidez, caracterizando um processo de falha progressiva.

Para uma análise que forneça melhores resultados e possibilite um melhor aprovei-

tamento da estrutura, é necessário a escolha de um bom critério de falha. Entretanto, além do critério deve-se decidir o modelo constitutivo para simulação da perda de rigidez do material. Dentre esses modelos serão estudados nesse trabalho os modelos de degradação brusca, os modelos de degradação gradual e os modelos de dano contínuo.

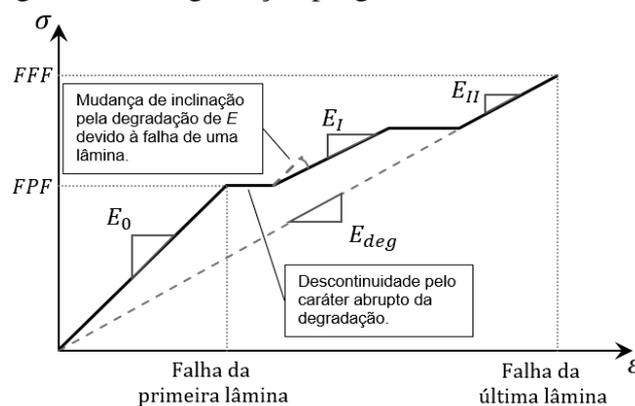
#### 2.4.1.1 Modelo de Degradação Brusca

Esse tipo de modelo consiste na redução abrupta das propriedades da lâmina quando o critério de falha é atendido. O modelos de degradação brusca mais comuns são:

- Degradação não interativa de propriedades: Aplica a degradação do módulo de elasticidade na direção da falha independente dos demais módulos. Por exemplo, se a falha ocorrida for na fibra, apenas  $E_1$  é degradado.
- Degradação interativa de propriedades: Aplica a degradação em todas as propriedades na direção da falha. Por exemplo, se a falha ocorrida for na fibra uma combinação entre  $E_1$ ,  $G_1$  e  $\nu_{12}$  será degradada.
- Degradação total das propriedades: Reduz a zero todas as propriedades da lâmina. Por exemplo, independente de onde a falha ocorreu a lâmina deixa de contribuir para a resistência do laminado. É um método mais conservador, fornecendo uma estimativa do limite inferior. É interessante para abordagem de projeto, mas é simplista para uma análise realista de falha.

A degradação da rigidez pode ser observada na mudança da inclinação dos trechos do gráfico mostrado na Figura 12. Quanto a característica brusca da degradação pode ser indentificada por meio das descontinuidades presentes no gráfico após a falha das lâminas. Vale comentar que FPF é referente a falha da primeira lâmina e UF/FFF a falha da última lâmina.

Figura 12 – Esquema gráfico de Degradação progressiva brusca.



Fonte: Adaptada de Rocha (2013).

$E_0$  é o módulo de elasticidade inicial, ou seja, elástico, sem degradação, representado como a inclinação da reta de relação entre tensão e deformação. Após a ocorrência da falha a inclinação muda, ou seja, o módulo de elasticidade diminui como pode-se observar no segundo trecho do gráfico representado por  $E_I$  que é o módulo após a ruptura da primeira lâmina. O processo continua de forma análoga como mostrado entre  $E_I$  e  $E_{II}$ .

#### 2.4.1.1.1 Método EWM

O Método de Enfraquecimento do Elemento (*Element Weaking Method* - EWM) é um exemplo de modelo de degradação brusca utilizado neste trabalho. Nele o modo de aplicação da degradação varia de acordo com o tipo de falha ocorrido. Em um caso de IFF apenas os módulos perpendiculares às fibras e o módulo de cisalhamento no plano são degradados, já em um caso de FF todas as propriedades elásticas são degradadas. A regra de degradação para EWM é aplicada nos coeficientes da matriz constitutiva conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned}
 d_f &= 1 - (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) \quad \text{e} \quad d_m = 1 - (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) ; \\
 C'_{11} &= (1 - d_f) C_{11} ; \\
 C'_{22} &= (1 - d_f) (1 - d_m) C_{22} ; \\
 C'_{33} &= (1 - d_f) (1 - d_m) C_{33} ; \\
 C'_{12} &= (1 - d_f) (1 - d_m) C_{12} \\
 C'_{13} &= (1 - d_f) (1 - d_m) C_{13} ; \\
 C'_{23} &= (1 - d_f) (1 - d_m) C_{23} ; \\
 C'_{44} &= (1 - d_f) (1 - d_{mc}s_{mc}) (1 - d_{mt}s_{mt}) G_{12} \\
 C'_{55} &= (1 - d_f) (1 - d_{mc}s_{mc}) (1 - d_{mt}s_{mt}) G_{13} \\
 C'_{66} &= (1 - d_f) (1 - d_{mc}s_{mc}) (1 - d_{mt}s_{mt}) G_{23}
 \end{aligned} \tag{67}$$

onde  $d_f$  e  $d_m$  são as variáveis totais de degradação para fibra e matriz respectivamente;  $d_{ft}$ ,  $d_{fc}$ ,  $d_{mt}$  e  $d_{mc}$  são as variáveis de dano das fibras e matriz em relação à tração e compressão;  $s_{mt}$  e  $s_{mc}$  são fatores de controle de perda para a rigidez ao cisalhamento causados pela falha da matriz por tração e compressão, respectivamente. Para um caso de FF sob tração faz-se  $d_{ft} = 1$  e sob compressão faz-se  $d_{fc} = 1$ . Já em um caso de IFF, se  $\sigma_n > 0$  faz-se  $d_{mt} = 1$  e se  $\sigma_n < 0$  então  $d_{mc} = 1$ . Utilizou-se  $s_{mt} = 0.9$  e  $s_{mc} = 0.5$  conforme adotado em Lee *et al.* (2015).

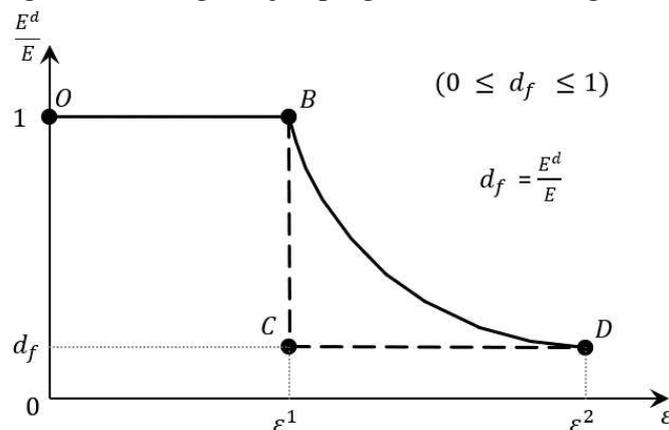
### 2.4.1.2 Modelo de Degradação Gradual

Na degradação brusca, seja em apenas um módulo ou em todos, só há duas situações: não danificado ou degradação total. No modelo gradual, buscando uma representação mais precisa, as propriedades são degradadas gradualmente, com uma abordagem mais baseada na natureza física. Esta abordagem pode ser encontrada de duas formas:

- Degradação de propriedades baseadas nas variáveis de campo: Quando pelo menos uma das propriedades está relacionada com um dos campos envolvidos. Por exemplo, a degradação das propriedades dos materiais é função do histórico tensão-deformação.
- Degradação de propriedades utilizando a mecânica do dano: Quando o valor do coeficiente de redução das propriedades é função do fator que representa o dano no material.

A Figura 13 exemplifica um processo de degradação gradual com um caso controlado pela deformação, onde  $d_f$  é o fator de degradação e  $E_d$  representa a propriedade degradada. A partir dessa figura ainda é possível analisar a diferença entre os modelos, visto que o caminho O-B-C representa uma degradação brusca e o caminho O-B-D uma degradação gradual.

Figura 13 – Esquema gráfico de Degradação progressiva brusca e gradual.



Fonte: Rocha (2013).

#### 2.4.1.2.1 Método CSE

O Método da Exposição Constante às Tensões (*Constant Stress Exposure Method* - CSE) é um modelo apresentado por Kodagali (2017) como sendo de degradação gradual. A evolução dos valores dos danos são iguais ao do método EWM. Entretanto, em um caso de IFF ocorre aplicação do fator  $k$  o qual suaviza a degradação a fim de conceder um caráter mais gradual. No elemento onde foi identificado a falha, a rigidez será apenas reduzida e ainda haverá

capacidade resistente mas de forma atenuada, havendo uma redistribuição de tensão entre os elementos.

Os módulos  $E_i$  e  $G_{ij}$  são degradados de forma desigual por conta do fator  $k$ , sendo os valores sugeridos de 0.77, para compósitos reforçados com fibras de carbono (CRFP), e 0.41, para compósitos reforçados com fibras de vidro (GRFP). Deste modo a lei de degradação para CSE é dada por (KODAGALI, 2017):

$$E_i^{red} = \begin{cases} E_i^{orig} \cdot (1 - d_{mt}) & \text{para } \sigma_n > 0 \\ E_i^{orig} & \text{para } \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (68)$$

$$G_{ij}^{red} = G_{ij}^{orig} \cdot (1 - k \cdot d_{mt})(1 - k \cdot d_{mc}) \quad (69)$$

#### 2.4.1.3 Modelo de Dano Contínuo

Os modelos de degradação utilizam-se, normalmente, de coeficientes obtidos empiricamente que são aplicado incrementalmente na redução da rigidez. Por outro lado, os modelos de Dano Contínuo incorporam considerações termomecânicas para determinar a energia dissipada ao longo do processo de dano (MAIMÍ *et al.*, 2007a; 2007b).

A maior parte dos modelos de dano para compósitos laminados é fundamentada nos princípios da Mecânica do Dano Contínuo (MDC) (FALZON; APRUZZESE, 2011; FRIZZELL *et al.*, 2011; MAIMÍ *et al.*, 2007a; MATZENMILLER *et al.*, 1995). Isso ocorre pois os modelos com esse embasamento apresentam uma maior eficácia na previsão da evolução do dano devido à fundamentação em termos da energia livre.

As vantagens proporcionadas por esses modelos, entretanto, são acompanhadas da necessidade de diversos parâmetros dos materiais, os quais são de difícil obtenção. Vale comentar sobre os ajustes dos parâmetros na aplicação ao modelo de redução de rigidez, visto que, com base na termodinâmica, as variáveis de estado não são mensuráveis (BARBERO, 2013).

Neste modelo é utilizado o conceito de tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ), a qual atua em uma área de resistência  $A_{nd}$ , parte da área original  $A$ , resultante do crescimento e da coalescência de microfissuras. A expressão que descreve a relação entre a tensão efetiva de Cauchy e a tensão real ( $\sigma$ ) diz:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} ; \sigma = \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{d}}) : \bar{\sigma} \quad (70)$$

A primeira relação da Equação (70) define um modelo de dano escalar isotrópico e a segunda relação uma representação tensorial anisotrópica de dano, sendo  $d$  um dano escalar,  $\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{d}})$  o tensor de dano da lâmina e  $\tilde{\mathbf{d}}$  o vetor com as variáveis de dano do modelo. Este vetor é definido como:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \sum_j d_j \text{ com } j = \{ft, fc, mt, mc, ms\} \quad (71)$$

onde  $f$  identifica a falha da fibra,  $m$  identifica a falha da matriz, sendo o subscrito  $t$  referente ao caso de tração, o subscrito  $c$  referente ao caso de compressão e o subscrito  $s$  referente ao cisalhamento.

O tensor de Cauchy é definido pela seguinte expressão (REINOSO *et al.*, 2017):

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{f,m} (1 - d_{it})(1 - d_{ic}) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi_i^e = \sum_{f,m} (1 - d_{it})(1 - d_{ic}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad (72)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$  é o tensor de tensão efetiva,  $d_{it}$  e  $d_{ic}$  ( $0 \leq d_{it}, d_{ic} \leq 1$ ) são variáveis de dano com valor escalar em tração (subscrito  $t$ ) e em compressão (subscrito  $c$ ) obtidas do vetor de dano ( $\tilde{\mathbf{d}}$ ) e  $\Psi_i^e$  representa as contribuições elásticas, sendo:

$$\Psi_i^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_i^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (73)$$

A fim de estabelecer uma formulação constitutiva termodinamicamente consistente, respondendo a danos anisotrópicos, utiliza-se a decomposição da função de energia livre de Helmholtz, proposta por Wagner e Balzani (2010), descrita como:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{d}}) = \sum_{f,m} (1 - d_{it})(1 - d_{ic}) \Psi_i^e \quad (74)$$

Deste modo derivada temporal da função de energia livre ( $\dot{\Psi}$ ) pode ser expressa por:

$$\dot{\Psi} = \sum_{f,m} (1 - d_{it})(1 - d_{ic}) \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_{f,m} (1 - d_{ic}) \Psi_i^e \dot{d}_{it} - \sum_{f,m} (1 - d_{it}) \Psi_i^e \dot{d}_{ic} \quad (75)$$

Os modelos de dano contínuo utilizam relações constitutivas onde são aplicados danos em função da dissipação de energia. A respeito da dissipação local, tem-se a desigualdade de Clausius-Planck para condições isotérmicas que pode ser expressa como (HOLZAPFEL, 2000):

$$D_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (76)$$

Substituindo as Equações (72) e (75) na Equação (76) a desigualdade de dissipação assume a seguinte forma:

$$D_{int} = \sum_{f,m} (1 - d_{ic}) \Psi_i^e \dot{d}_{it} + \sum_{f,m} (1 - d_{it}) \Psi_i^e \dot{d}_{ic} \geq 0 \quad (77)$$

As leis de evolução das variáveis de estado de dano devem ser definidas de modo que não assumam valores negativos e não decresçam ao longo do histórico de carregamento ( $\dot{d}_{it} \geq 0$  e  $\dot{d}_{ic} \geq 0$ ). O objetivo disso é garantir a irreversibilidade do processo de dano de forma a respeitar a 2a lei da Termodinâmica, assegurando consistência.

Supondo uma resposta transversalmente isotrópica no nível da lâmina, o operador constitutivo elástico  $\mathbb{C}^e$  assume a forma proposta por Coleman e Noll (1963) descrita a seguir:

$$\mathbb{C}^e = \partial_{\epsilon\epsilon} \Psi = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_T \mathbb{I} + \alpha (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1}) + 2(\mu_L - \mu_T) \mathbb{I}_A + \beta \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \quad (78)$$

onde  $\mathbf{1}$  e  $\mathbb{I}$  são os tensores de identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente,  $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  é o operador estrutural sendo  $\mathbf{a}$  coincidente com a direção da fibra e  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_T$ ,  $\mu_L$  são as constantes elásticas como coeficientes invariantes explicados em Vogler *et al.* (2013).

Na configuração local do material, a matriz de elasticidade única na notação de Voigt é definida por:

$$\mathbb{C}_f^e = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{C}_m^e = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_{12}^e & \mathbb{C}_{13}^e & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C}_{21}^e & \mathbb{C}_{22}^e & \mathbb{C}_{23}^e & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C}_{31}^e & \mathbb{C}_{32}^e & \mathbb{C}_{33}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{C}_{44}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{C}_{55}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{C}_{66}^e \end{bmatrix}; \quad (79)$$

onde a sub-matriz  $\mathbb{C}_f^e$  dissocia a contribuição normal associada com a direção da fibra. O termo associado a  $\mathbb{C}_m^e$ , por sua vez, incorpora a parte do tensor constitutivo elástico transversal à direção da fibra, o acoplamento entre as ações normais e transversais ao direção da fibra e os efeitos tangenciais transversais/transversais à fibra. Com exceção do  $\mathbb{C}_{44}^e$  e do  $\mathbb{C}_{55}^e$  que são responsáveis pelas contribuições do cisalhamento paralelo / transversal para a fibra.

A condução do dano termodinâmico das forças em condições de tração ( $Y_{it}$ ) e compressão ( $Y_{ic}$ ), conjugadas respectivamente por  $d_{it}$  e  $d_{ic}$ , é definida como:

$$Y_{it} = \frac{\partial \Psi}{\partial d_{it}}; \quad Y_{ic} = \frac{\partial \Psi}{\partial d_{ic}} \quad (80)$$

Para proporcionar uma interpretação física o dano da energia dissipada é postulada como dissipação da energia de fratura dividida pelo comprimento característico (*crack band theory* (BAZANT, 1998)):

$$\frac{G_j}{L_c} = \int_0^\infty Y_j \dot{d}_j dt \text{ com } j = \{ft, fc, mt, mc, ms\} \quad (81)$$

onde  $L_c$  é o tamanho do elemento característico da correspondente discretização espacial (malha de elementos finitos), o qual é introduzido para minimizar a dependência dos resultados computacionais com respeito à discretização,  $G_{ft}$  e  $G_{fc}$  são as energias de fratura das fibras em tração e compressão, respectivamente,  $G_{mt}$  e  $G_{mc}$  são as energias de fratura transversais a direção das fibras em tração e compressão, respectivamente, e  $G_{ms}$  é a energia de fratura de cisalhamento.

Essas energias de fratura podem ser determinadas por meio de ensaios baseados na mecânica da fratura (CATALANOTTI *et al.*, 2014; 2014; CATALANOTTI; XAVIER, 2015; PINHO *et al.*, 2006;). A energia de fratura  $G_{mt}$  pode ser estimada usando um teste de viga com balanço duplo (MOURA *et al.*, 2010). A energia de fratura  $G_{ms}$  é geralmente determinada usando o ensaio de flexão de 4 pontos com entalhe (MAIMÍ *et al.*, 2007a). Quanto as energias de compressão, a determinação dessas é notavelmente mais complicada, como discutido em Falzon e Apruzzese (2011) e Maimí *et al.* (2007a).

A relação constitutiva danificada pode ser expressa por (LINDE *et al.*, 2004):

$$\mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} (1-d_f)\mathbb{C}_{11}^e & (1-d_f)(1-d_m)\mathbb{C}_{12}^e & (1-d_f)\mathbb{C}_{13}^e & 0 & 0 & 0 \\ & (1-d_m)\mathbb{C}_{22}^e & (1-d_f)(1-d_m)\mathbb{C}_{23}^e & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbb{C}_{33}^e & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-d_f)(1-d_m)\mathbb{C}_{44}^e & 0 & 0 \\ & \text{Simétrico} & & & \mathbb{C}_{55}^e & 0 \\ & & & & & \mathbb{C}_{66}^e \end{bmatrix} \quad (82)$$

onde  $\mathbb{C}_{ij}^e$  são as componentes elásticas descritas na Equação (79), cujas degradações são feitas por

$$(1-d_f) = (1-d_{ft})(1-d_{fc}), \quad (1-d_m) = (1-d_{mt})(1-d_{mc}) \quad (83)$$

A taxa de evolução das variáveis de dano introduzidas anteriormente pode ser definida pelas seguintes equações:

$$\dot{d}_N = \dot{\zeta}_N \phi(f_{E,N}, d_N) ; \quad \dot{r}_N = \dot{\zeta}_N ; \quad N = \{FF+, FF-, IFF+, IFF-\} \quad (84)$$

onde  $\zeta_N$  é um parâmetro de consistência de dano e  $\phi(f_{E,N}, d_N)$  é a função de dissipação de energia.

O parâmetro de consistência do dano permite definir condições de carregamento / descarregamento por meio das condições de Kuhn – Tucker a serem executadas:

$$\dot{r}_N \geq 0; F_N \leq 0; \dot{r}_N F_N = 0 \quad (85)$$

As condições da Equação (85) afirmam que enquanto  $F_N \leq 0$  o critério de dano não é satisfeito. Além disso, visto que  $\dot{r}_N F_N = 0$  nenhuma evolução de dano ocorre para  $\dot{r}_N = 0$ . Por outro lado,  $\dot{r}_N > 0$  implica na progressão do dano, na qual deve ser respeitada a seguinte condição de consistência:

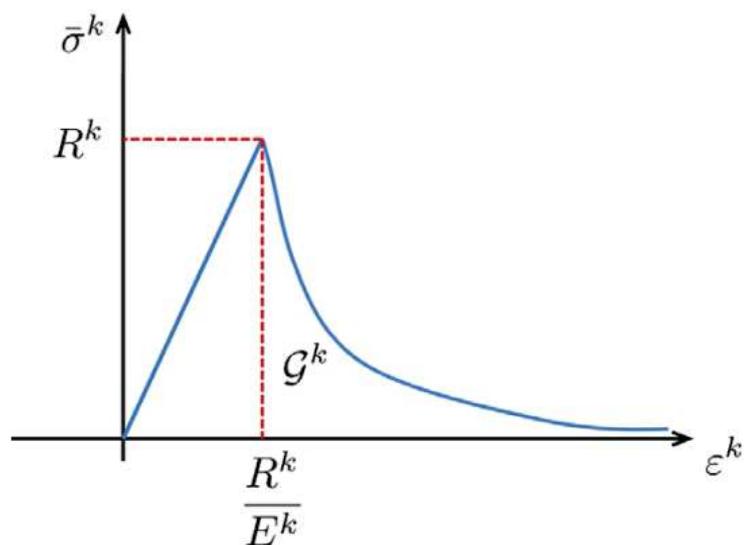
$$\dot{F}_N = \dot{f}_{E,N} - \dot{r}_N = 0 \quad (86)$$

A evolução do espaço elástico para cada mecanismo de falha considerado no presente modelo é dada pela expressão (SIMO; JU, 1987; MAIMÍ *et al.*, 2007a):

$$r_N = \max \left\{ 1, \max_{s=0, t} f_{E,N} \right\} \quad (87)$$

No presente modelo, as leis de evolução exponencial do dano, propostas em Falzon e Apruzzese (2011) e Lapczyk e Hurtado (2007), são utilizadas para representar a degradação progressiva da rigidez conforme mostrado na Figura 14.

Figura 14 – Lei de evolução do dano de acordo com o *softening* exponencial.



Fonte: Reinoso *et al.* (2017).

Neste trabalho foram adotadas as seguintes leis de evolução do dano (LINDE *et al.*, 2004):

$$\begin{aligned} d_{fj} &= 1 - \frac{1}{f_{E,FF}} \exp \left[ -\mathbb{C}_{11}^e \varepsilon_{11}^j \left( f_{E,FF} - \varepsilon_{11}^j \right) L_c / G_{\parallel}^j \right] \quad \text{onde } j = t, c ; \\ d_{mj} &= 1 - \frac{1}{f_{E,IFF}} \exp \left[ -\mathbb{C}_{22}^e \varepsilon_{22}^j \left( f_{E,IFF} - \varepsilon_{22}^j \right) L_c / G_{\perp}^j \right] \quad \text{onde } j = t, c ; \end{aligned} \quad (88)$$

onde  $G_{\parallel}^t$  e  $G_{\parallel}^c$  são as energias de fratura na direção da fibra sob tensão e sob compressão , respectivamente;  $G_{\perp}^t$  e  $G_{\perp}^c$  são as energias de fratura na direção transversal à fibra sob tensão e sob compressão , respectivamente;  $G_{\perp \parallel}$  é a energia de fratura de cisalhamento no plano.

A ocorrência do softening depende da total dissipação da energia de fratura, a qual pode ser representada por meio do comprimento crítico máximo  $L_{cr}$  (BAZANT, 1998):

$$L_{cr} = \frac{2E_i G_i^j}{\left( R_i^j \right)^2}, \quad \text{onde } j = t, c \text{ e } i = \parallel, \perp \quad (89)$$

Diante disso, tem-se que o comprimento característico deve ser menor que o comprimento crítico. Na prática utiliza-se  $L_c = L_{cr}/2$  (MATIAS, 2018) e, portanto, os valores mínimos para as diferentes energias de fratura são:

$$G_{\parallel}^j \geq \frac{2L_c \left( R_{\parallel}^j \right)^2}{2E_{\parallel}}; \quad G_{\perp}^j \geq \frac{2L_c \left( R_{\perp}^j \right)^2}{2E_{\perp}}; \quad G_{\perp \parallel} \geq \frac{2L_c \left( R_{\perp \parallel} \right)^2}{2E_{\perp \parallel}}, \quad \text{onde } j = t, c \quad (90)$$

Sendo os módulos de elasticidade e as resistências do material constantes, as condições dadas na Equação (90) determinam o menor valor das energias de fratura no início do dano em função do comprimento característico. Essa relação é utilizada para ajustar a energia de fratura, reduzindo a patologia de dependência da malha.

Para a obtenção de um boa convergência é necessário a utilização do operador tangente  $\left( \mathbb{C}^{tg} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)$ , o qual pode ser descrito por:

$$\mathbb{C}^{tg} = \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}}) + \frac{\partial \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}})}{\partial \epsilon} : \epsilon = \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}}) + \sum \left[ \left( \frac{\partial \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}})}{\partial d_m} : \epsilon \right) \left( \frac{\partial d_m^j}{\partial f_m^j} \frac{\partial f_m^j}{\partial \epsilon} \right) + \left( \frac{\partial \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}})}{\partial d_f} : \epsilon \right) \left( \frac{\partial d_f^j}{\partial f_f^j} \frac{\partial f_f^j}{\partial \epsilon} \right) \right] \quad (91)$$

$$\frac{\partial d_i^j}{\partial f_i^j} = \left( \frac{1}{f_i^j} + \frac{\mathbb{C}_k \cdot \left( \varepsilon_k^j \right)^2 \cdot L_c}{G_i^j} \right) \left( 1 - d_i^j \right) \quad (92)$$

$$\frac{\partial f_f^j}{\partial \varepsilon} = \left[ \frac{\varepsilon_{11}^t}{2 \cdot \varepsilon_{11}^c \cdot f_f^j \cdot (2 \cdot \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{11}^t)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (93)$$

$$\frac{\partial f_m^j}{\partial \varepsilon} = \left[ \frac{\varepsilon_{22}^t}{2 \cdot \varepsilon_{22}^c \cdot f_m^j \cdot (2 \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^c - \varepsilon_{22}^t)} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{f_m^j \cdot \varepsilon_{12} \cdot (\varepsilon_{12}^S)^2} \quad 0 \quad 0 \right] \quad (94)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}})}{\partial d_f} = \begin{bmatrix} -\mathbb{C}_{11}^e & -(1-d_f)(1-d_m)\mathbb{C}_{12}^e & -\mathbb{C}_{13}^e & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-d_m)(1-d_{ms})\mathbb{C}_{44}^e & 0 & 0 \\ \text{Simétrico} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{d}})}{\partial d_m} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-d_f)(1-d_m)\mathbb{C}_{12}^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\mathbb{C}_{22}^e & -\mathbb{C}_{23}^e & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-d_m)(1-d_{ms})\mathbb{C}_{44}^e & 0 & 0 \\ \text{Simétrico} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

onde  $i = f, m; j = t, c; k = 11 (i = f), 22 (i = m)$

### 3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conforme descrito na introdução do texto, o objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma subrotina de material (UMAT) que simule a não linearidade física, por meio da implementação de adaptações aos modelos de degradação escolhidos, oriunda da falha, identificada pelo critério de Puck, em estruturas constituídas de materiais compósitos reforçados por fibras no software ABAQUS®. Além disso, investigar modificações para o processo de busca do ângulo de fratura, utilizado no critério de Puck, a fim de diminuir o custo computacional das análises.

#### 3.1 Melhoria da Determinação do Ângulo de Fratura

No algoritmo original do critério de Puck, a busca do ângulo é realizado por meio do teste com todos os ângulos entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$  variando de 1 em 1 grau para saber em qual plano haverá uma maior tensão. Esse processo é executado em cada passo da análise e para cada ponto de integração, resultando em um grande número de verificações, o que provoca um alto custo computacional.

Com o intuito de diminuir o número de verificações na busca do ângulo de fratura e, conseqüentemente, o custo computacional de uma análise, foram realizadas algumas melhorias no processo de busca do ângulo de fratura.

A primeira adaptação aplicada neste trabalho foi a delimitação do espaço de busca do ângulo. Esta adaptação é uma implementação da proposta de Thomson *et al.* (2017).

Analisando as Equações (64) e (65) pode-se notar que os elementos ligados ao  $\theta$  são  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{nl}$ . Então buscou-se simplificar cada uma das expressões da Equação (59) em uma única função senoidal de  $\theta$ , permitindo que a função do ângulo de fratura no critério de falha pudesse ser estudada de forma mais clara.

Para isso foram utilizadas relações trigonométricas básicas e a sobreposição de ondas senoidais da mesma frequência, onde duas ondas senoidais de uma amplitude  $A$  e  $B$  e offset por fases  $\alpha$  e  $\beta$  são combinadas em um único cosseno:

$$A \cdot \cos(\theta + \alpha) + B \cdot \cos(\theta + \beta) = \sqrt{[A \cdot \cos(\alpha) + B \cdot \cos(\beta)]^2 + [A \cdot \sin(\alpha) + B \cdot \sin(\beta)]^2} \cdot \cos\left(\theta + \tan^{-1}\left[\frac{A \cdot \sin(\alpha) + B \cdot \sin(\beta)}{A \cdot \cos(\alpha) + B \cdot \cos(\beta)}\right]\right) \quad (97)$$

As expressões resultantes, dadas a seguir, separam o efeito das tensões do efeito do

ângulo de rotação, em certa medida. Isso permite uma interpretação mais clara das três tensões do plano de fratura que definem a probabilidade de falha no critério IFF de Puck:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau_{23})^2} \cdot \cos \left( 2\theta + \tan^{-1} \left[ \frac{-2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right] \right) \\
 \tau_{nl} &= \sqrt{(\tau_{12})^2 + (\tau_{13})^2} \cdot \cos \left( \theta + \tan^{-1} \left[ \frac{\tau_{13}}{\tau_{12}} \right] \right) \\
 \tau_{nt} &= \sqrt{\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau_{23})^2} \cdot \cos \left( 2\theta + \tan^{-1} \left[ \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2\tau_{23}} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{98}$$

Analisando essas expressões pode-se notar que  $\sigma_n$  e  $\tau_{nt}$  mostram-se como duas ondas senoidais de mesma amplitude e frequência com um deslocamento de fase de  $45^\circ$ , em que tanto a amplitude quanto o deslocamento são definidos por  $\tau_{23}$  e pela diferença absoluta entre  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Já  $\tau_{nl}$  apresenta uma frequência que é metade da frequência de  $\sigma_n$  e  $\tau_{nt}$ , e seu offset definido apenas por  $\tau_{12}$  e  $\tau_{13}$ .

Para uma onda senoidal do tipo  $A \cdot \cos(n\theta + \alpha) + C$ , o ponto de máximo é definido pelo seu deslocamento de fase  $-\alpha/n$ , e o seu valor neste ponto é a soma da amplitude com o deslocamento vertical,  $A + C$ . Aplicando essa solução às expressões da Equação (98) obtém-se as expressões das tensões máximas do plano de fratura e os respectivos ângulos em que elas acontecem:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \Rightarrow \sigma_n^{MAX} = \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau_{23})^2} \\
 \theta_{2,3} &= \theta_1 \mp \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tau_{nt}^{MAX} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau_{23})^2} \\
 \theta_4 &= -\tan^{-1} \left( \frac{\tau_{13}}{\tau_{12}} \right) \Rightarrow \tau_{nl}^{MAX} = \sqrt{(\tau_{12})^2 + (\tau_{13})^2}
 \end{aligned} \tag{99}$$

Os ângulos calculados pelas expressões da Equação (99) correspondem ao máximo somente para sua respectiva tensão. O ângulo do plano de fratura é o ângulo referente ao máximo global da Equação  $f_{E_{IFF}}(\theta)$ , a qual é uma interação das três tensões.

Deste modo, Thomson *et al.* (2017) propôs utilizar o ângulo com maior fator de exposição como ponto de partida para a busca, reduzindo o espaço de procura. Essa contribuição é bastante válida, entretando dividiria o espaço de busca em duas áreas e seria necessário analisar em qual área deveria fazer a busca. Além disso, o espaço de busca ainda seria consideravelmente grande.

No presente trabalho, portanto, é implementada uma adaptação desta metodologia na qual são utilizados os dois ângulos com os maiores fatores de exposição para definição de um novo intervalo. Além disso, na verificação dos ângulos com maiores fatores de exposição são acrescentados os ângulo de  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ , visto que são os limites do espaço de busca original do critério de Puck.

Delimitado o espaço de busca, parte-se para a segundo adaptação que consiste na aplicação de um método simplificado de cálculo de máximos e mínimos de uma função, semelhante ao utilizado por Schirmaier *et al.* (2014).

O método aplicado é uma combinação do método da Seção Áurea com o método da interpolação parabólica, apresentados em Press *et al.* (1992) e também utilizados por Wiegand *et al.* (2008). Essa combinação é interessante pois, depois de algumas iterações, quando os limites inferior e superior estão bem próximos, o método da Seção Áurea passa realizar muitas iterações para convergir para um ponto exato. Então, quando atinge uma determinada tolerância muda-se para o método da Interpolação Parabólica o qual converge bem mais rápido. Além disso, essa ordem é recomendada, pois necessita-se que os pontos estejam próximos da curva do pico para interpolar a parábola corretamente, pois se estiverem distantes podem descrever uma parábola incoerente.

O método da Seção Áurea é uma técnica na qual o extremo (máximo ou mínimo) é encontrado pelo estreitamento sucessivo do intervalo de pesquisa. Cada iteração ou "estreitamento" é feito pela análise de quatro pontos  $\theta_l$  (limite inferior),  $\theta_u$  (limite superior),  $\theta_{l+d}$  e  $\theta_{u-d}$ , onde:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad d = (\phi - 1)(x_u - x_l), \quad \theta_{l+d} = \theta_l + d \quad e \quad \theta_{u-d} = \theta_u - d \quad (100)$$

Calcula-se, então, o valor de  $f_{E_{IFF}}(\theta_{l+d})$  e  $f_{E_{IFF}}(\theta_{u-d})$  e analisa-os. Em um caso de maximização, como é neste trabalho, se  $f_{E_{IFF}}(\theta_{l+d}) > f_{E_{IFF}}(\theta_{u-d})$ , atualiza-se  $\theta_l = \theta_{u-d}$  e  $\theta_{opt} = \theta_{l+d}$  mantendo  $\theta_u$ , e se  $f_{E_{IFF}}(\theta_{u-d}) > f_{E_{IFF}}(\theta_{l+d})$ , atualiza-se  $\theta_u = \theta_{l+d}$  e  $\theta_{opt} = \theta_{u-d}$  mantendo  $\theta_l$ .  $\theta_{opt}$  é o valor ótimo de cada iteração, ou seja, o ponto de máximo de cada iteração e ele é utilizado para calcular o erro dado por:

$$erro_{GS} = (2 - \phi) \left| \frac{\theta_u - \theta_l}{\theta_{opt}} \right| \quad (101)$$

Ao atingir a tolerância proposta ao erro, passa-se para o método da Interpolação Parabólica Sucessiva, no qual utiliza-se os pontos  $\theta_l$ ,  $\theta_u$  e  $\theta_{opt}$  da última interação do método

da Seção Áurea e seus respectivos valores na função. Com esses dados é possível obter uma parábola utilizando a seguinte equação:

$$p(\theta) = f_{E_{IFF}}(\theta_l) \frac{(\theta - \theta_u)(\theta - \theta_{opt})}{(\theta_l - \theta_u)(\theta_l - \theta_{opt})} + f_{E_{IFF}}(\theta_u) \frac{(\theta - \theta_l)(\theta - \theta_{opt})}{(\theta_u - \theta_l)(\theta_u - \theta_{opt})} + f_{E_{IFF}}(\theta_{opt}) \frac{(\theta - \theta_l)(\theta - \theta_u)}{(\theta_{opt} - \theta_l)(\theta_{opt} - \theta_u)} \quad (102)$$

Como esse processo é posterior ao estreitamento do método da Seção Áurea o máximo de  $p(\theta)$  é, normalmente, suficientemente próximo do máximo de  $f_{E_{IFF}}(\theta)$ , então a seguinte aproximação pode ser adotada:

$$\theta_{max} = \theta_u - \frac{1}{2} \frac{(\theta_u - \theta_l)^2 (f_{E_{IFF}}(\theta_u) - f_{E_{IFF}}(\theta_{opt})) - (\theta_u - \theta_{opt})^2 (f_{E_{IFF}}(\theta_u) - f_{E_{IFF}}(\theta_l))}{(\theta_u - \theta_l)(f_{E_{IFF}}(\theta_u) - f_{E_{IFF}}(\theta_{opt})) - (\theta_u - \theta_{opt})(f_{E_{IFF}}(\theta_u) - f_{E_{IFF}}(\theta_l))} \quad (103)$$

Calculado o ponto de máximo da parábola atualiza-se o valor de  $\theta_{opt} = \theta_{max}$ . Se  $\theta_{opt} > \theta_{max}$ , faz-se  $\theta_u = \theta_{opt}$  e se  $\theta_{opt} < \theta_{max}$ , faz-se  $\theta_l = \theta_{opt}$ . Então repete-se o processo até que a tolerância seja atingida pelo erro, que se calcula da seguinte forma:

$$erro_{IP} = \left| \frac{\theta_{max} - \theta_{opt}}{\theta_{max}} \right| \quad (104)$$

A terceira adaptação que Thomson *et al.* (2017) propôs consiste no cálculo e na análise de um limite superior para evitar a busca desnecessária do ângulo de fratura em um estado de tensão que não provocaria falha. Normalmente as análises são feitas aplicando controle de carga ou de deslocamento, os quais consistem no acréscimo incremental de carga ou deslocamento a cada passo da análise. Nos primeiros passos as tensões serão baixas e como o critério de Puck utiliza-se das tensões, não haveria falha. Então um critério foi definido para ajudar a distinguir quando as tensões forem grandes o suficiente para justificar a avaliação completa do critério de falha, reduzindo o número de vezes que a pesquisa ângulo é realizada. Usando os máximos das três tensões do plano de fratura, descritos na Equação (99), pode-se adaptar a Equação (64) para descrever um cenário de caso limite superior:

$$f_{E_{Lim}} = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{Y_T} - PTR \right) \sigma_n^{MAX} \right]^2 + \left( \frac{\tau_{nt}^{MAX}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}^{MAX}}{S_{21}} \right)^2} + PTR \cdot \sigma_n \quad (105)$$

É importante notar que  $f_{E_{Lim}}$  não depende de  $\theta$  então pode ser calculado de maneira direta e imediata. Por definição  $f_E \leq f_{E_{Lim}}$ , logo se  $f_{E_{Lim}} < 1$  então  $f_E < 1$ , o que significa que a possibilidade de falha no dado estado tensão pode ser imediatamente descartada sem a necessidade de realizar a busca do ângulo. Desse modo, o custo computacional para realização do processo de busca do ângulo de fratura pode ser evitado em um grande número de passos.

Por fim, uma vez que a exposição,  $f_E$ , atingir 1, indicando o início da falha, assume-se que o plano de fratura se mantém constante, ou seja, o ângulo de fratura não muda e, portanto, a busca pelo ângulo não é mais realizada (THOMSON *et al.*, 2017).

Essa consideração feita para a última melhoria não gera incompatibilidade com o modelo de dano, pois é um plano fictício, uma previsão para identificação do início da falha. Uma vez detectada a falha utiliza-se o dano contínuo cuja a degradação das propriedades é baseado na energia de fratura, não apresentando influencia da direção do plano.

Deste modo o processo de busca do ângulo de fratura com as modificações aplicadas ficou estruturado conforme o Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo de busca do ângulo de fratura usado no critério de Puck.

---

Tendo os dados iniciais ( $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, R_{\perp}^t, R_{\perp}^t, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}^A, p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c, p_{\perp\perp}^t$  e  $p_{\perp\perp}^t$ ):

**início**

1. Calcula-se o limite superior [Eq.(105)]:  $\Rightarrow$  Melhoria 3

**if**  $f_{ELim} < 1$  **then**

    Não ocorrerá falha em nenhuma inclinação, então não precisa calcular o ângulo;

**else**

    2. Calcula-se os ângulos para as máximas tensões no plano de fratura [Eq.(99)];

    3. Determina-se os 2 ângulos com maior fator de exposição, utilizando as Equações (64) e (65);

    4. Destes ângulos, determina-se  $\theta_u$  e  $\theta_l$ , os quais são, respectivamente, o maior e o menor ângulo;

} Melhoria 1

    5. Aplica-se o método da Seção Áurea até que o erro [Eq.(101)] atinja a tolerância adotada;

    6. Passa para o método da Interpolação Parabólica, também até atingir a tolerância adotada, encontrando o provável ângulo do plano de fratura;

} Melhoria 2

**end**

**fim**

---

Como o processo de busca do ângulo é apenas uma parte da UMAT e independente de informações intrínsecas ao ABAQUS®), a investigação de suas modificações foi desenvolvida e previamente testada isolada da UMAT.

A primeira instância foi organizada a ideia do algoritmo no software MATLAB®, o qual possui diversas funções que proporcionam facilidade matemática. Para isso, foram pesquisados exemplos de campos de tensão com seus respectivos parâmetros materiais para testar o funcionamento do algoritmo.

Dentre os exemplos adotados serão escolhidos situações de cisalhamento puro, de tensão uniaxial (WIEGAND *et al.*, 2008) e de tensões arbitrárias tridimensionais (SCHIRMAIER *et al.*, 2014), buscando curva de comportamentos diferentes a fim de corrigir as falhas do algoritmo, prepará-lo para as possíveis situações que possam aparecer e verificar se a adaptação proposta para a delimitação é viável.

### 3.2 Adaptação do Modelo de Dano CSE

Kodagali (2017) descreveu o modelo de dano CSE utilizando as mesmas diretrizes expostas no item 2.4.1.2.1 deste trabalho. Entretanto, esse autor disponibilizou o código de uma UMAT em seu trabalho, no qual verificou-se uma modificação da lei de evolução do dano para  $d_{mt} = d_{mt} + (1/100)$  e  $d_{mc} = d_{mc} + (1/100)$ . Na literatura foram encontradas poucas informações sobre esse método, sendo elas semelhantes as expostas neste trabalho. Concluiu-se, portanto, que "1/100" é um valor arbitrário e que essa modificação foi uma adaptação do autor para obtenção de melhores resultados.

Sendo "1/100" uma taxa subjetiva, decidiu-se utilizar um valor com, no mínimo, um sentido lógico. Como a caracterização da falha se dá pelo crescimento do fator de exposição ( $F_E$ ) e seu início é indicado quando supera 1, então atribuiu o quanto o  $F_E$  excede de 1 ao valor do dano.

Deste modo, foi utilizado  $d_{ft} = (F_{E,FF+} - 1)$ ,  $d_{fc} = (F_{E,FF-} - 1)$ ,  $d_{mt} = (F_{E,IFF+} - 1)$  e  $d_{mc} = (F_{E,IFF-} - 1)$ . Inclusive, esse valor de excedente também é utilizado na lei de evolução do dano com base na mecânica do contínuo.

Pode-se observar nas Equações (68) e (69) que a degradação é aplicada diretamente nos parâmetros de rigidez, sendo os módulos  $E_i$  degradados apenas pelo dano  $d_{mt}$ . Porém, na UMAT descrita por Kodagali (2017) foi observado que  $E_1$ , que é na direção da fibra, é degradado apenas pelos danos da fibra,  $d_{ft}$  e  $d_{fc}$ , e os demais módulos sofrem efeito de todos os danos,  $d_{ft}$ ,  $d_{fc}$ ,  $d_{mt}$  e  $d_{mc}$ . Além disso, visto que esses parâmetros aparecem como produto no cálculo dos componentes da matriz constitutiva, sua aplicação pode ser feita análoga aos demais métodos.

Deste modo, portanto, a lei de degradação do dano CSE foi aplicada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= (1 - d_{fc}) (1 - d_{ft}) C_{11} ; \\
C'_{22} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{22} ; \\
C'_{33} &= C'_{22} ; \\
C'_{12} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{12} ; \\
C'_{13} &= C'_{12} ; \\
C'_{23} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{23} ; \\
C'_{44} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{44} ; \\
C'_{55} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{55} ; \\
C'_{66} &= (1 - d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - d_{mt}) (1 - d_{mc}) C_{66}
\end{aligned} \tag{106}$$

### 3.3 Análise Numérica

No início de cada passo a deformação é atualizada e, por meio da relação constitutiva, é calculado o estado de tensões. A partir deste o critério de falha adotado é avaliado. Se uma falha for detectada, ocorre uma degradação fictícia que vale apenas durante a iteração corrente. As tensões são então calculadas novamente com as propriedades degradadas e o critério é novamente checado. Tal processo se repete até que nenhuma falha seja detectada. As tensões são então usadas para avaliar se a estrutura está em equilíbrio, verificando se o resíduo  $\mathbf{r}$ , que é a diferença entre as forças internas  $\mathbf{g}$  e cargas externas  $\mathbf{f}$ , é menor que uma tolerância ( $TOL$ ) pré-estabelecida ( $\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{f} < TOL$ ). Se a estrutura não estiver em equilíbrio, são aplicadas correções iterativas na carga e nos deslocamentos obtidos na solução da equação de equilíbrio não linear e a matriz  $\mathbf{C}_T$  é recalculada. Antes das tensões serem novamente avaliadas, o estado do material retorna ao último ponto de equilíbrio da curva carga-deslocamento. A degradação das propriedades é realizada somente após a convergência das iterações de equilíbrio.

Este processo continua até que o número de passos estipulado seja executado ou até que a análise iterativa não atinja uma convergência por falta de rigidez do material. O Algoritmo 2 explica o procedimento explicado nos parágrafos anteriores com o algoritmo base para a elaboração das UMATs.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo de modelo de dano anisotrópico usando o critério de Puck.
 

---

Tendo os dados iniciais  $(\Delta\epsilon_{n+1}^{(k)}, \epsilon_n, \sigma_n, \tilde{d}_n, \mathbf{r}_n)$  na iteração entre o intervalo  $[t_n, t_{n+1}^{(K)}]$ :

**início**

1. Atualiza-se o tensor de deformação  $\Rightarrow \epsilon_{n+1}^{(k)} = \epsilon_n + \Delta\epsilon_{n+1}^{(k)}$ ;
2. Constroem-se os operadores  $\mathbb{C}_f^e$  e  $\mathbb{C}_m^e$ ;
3. Calcula-se o tensor de tensão efetiva  $\Rightarrow \bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \sum_i \mathbb{C}_i^e : \epsilon_{n+1}^{(k)}$  para  $i = f$  e  $m$ ;
4. Usando a tensão efetiva, calculam-se os fatores de exposição [Eq. (51), (64) e (65)]  $\Rightarrow f_{E,FF+,n+1}^{(k)}(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)})$ ,  $f_{E,FF-,n+1}^{(k)}(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)})$ ,  $f_{E,IFF+,n+1}^{(k)}(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)})$  e  $f_{E,IFF-,n+1}^{(k)}(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)})$ ;
5. Verifica-se o critério de falha das fibras (FF);
  - if**  $\bar{\sigma}_{11,n+1}^{(k)} \leq 0$  **then**
    - | Calcula-se  $r_{E,FF+,n+1}^{(k)}$  [Eq. (87)] e  $d_{ft,n+1}^{(k)}$  [Eq. (88)];
  - else**
    - | Calcula-se  $r_{E,FF-,n+1}^{(k)}$  [Eq. (87)] e  $d_{fc,n+1}^{(k)}$  [Eq. (88)];
  - end**
6. Verifica-se o critério de falha entre as fibras (IFF);
  - if**  $\bar{\sigma}_{n,n+1}^{(k)} \leq 0$  **then**
    - | Calcula-se  $r_{E,IFF+,n+1}^{(k)}$  [Eq. (87)] e  $d_{mt,n+1}^{(k)}$  [Eq. (88)];
  - else**
    - | Calcula-se  $r_{E,IFF-,n+1}^{(k)}$  [Eq. (87)] e  $d_{mc,n+1}^{(k)}$  [Eq. (88)];
  - end**
7. Atualizam-se as variáveis de estado  $r_{n+1}^{(k)}$  e  $\tilde{d}_{n+1}^{(k)}$ ;
8. Calcula-se o operador secante  $\mathbb{C}_{n+1}^{sec(k)}$  [Eq.(82)] e o tangente  $\mathbb{C}_{n+1}^{tg(k)}$  [Eq. (91)];
9. Com o operador secante calcula-se o tensor de tensão  $\sigma$  [Eq. (72)];

**fim**

---

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os exemplos utilizados no estudo proposto neste trabalho e seus respectivos resultados obtidos utilizando sub-rotinas (UMATs) implementadas no pacote computacional ABAQUS. O objetivo principal é validar a metodologia adotada para análises numéricas de compósitos laminados reforçados por fibras.

### 4.1 Busca do Ângulo de Fratura

Os primeiros exemplos são testes das modificações aplicadas ao processo de busca do ângulo do plano de fratura do critério de Puck. Estes exemplos foram realizados no software Matlab® aplicando diferentes estados de tensão e seus respectivos parâmetros materiais às curvas descritas pelas Equações (64) e (65).

Foram utilizados 7 casos dentre os quais os testes 1, 2 e 3 foram estudados por Schirmaier *et al.* (2014) utilizando o material AS4-epoxy, e os testes 4, 5, 6 e 7 foram estudados por Wiegand *et al.* (2008) utilizando um compósito carbono-epóxi não identificado. Os campos de tensões e os dados materiais utilizados nesses testes estão descritos na Tabela 3.

Tabela 3 – Exemplos utilizados nos testes da otimização da busca do ângulo de fratura.

Tensões e Parâmetros	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4	Teste 5	Teste 6	Teste 7
$\sigma_{22}$ (MPa)	-136	24	-164.9	0	0	-231.2	-10
$\sigma_{33}$ (MPa)	-204	0-61	-313.6	0	0	0	40
$\sigma_{12}$ (MPa)	0	15	-16.8	0	98.4	0	21
$\sigma_{13}$ (MPa)	68	32	34.9	0	0	0	43.3
$\sigma_{23}$ (MPa)	85	20	-59.9	59.1	0	0	24
$YT = R_{\perp}^t$	48	48	48	59.1	59.1	59.1	59.1
$YC = R_{\perp}^c$	200	200	200	231.2	231.2	231.2	231.2
$P21T = p_{\perp\parallel}^t$	0.30	0.30	0.30	0.33	0.33	0.33	0.33
$P21C = p_{\perp\parallel}^c$	0.35	0.35	0.35	0.30	0.30	0.30	0.30
$P22T = P22C = p_{\perp\perp}^{t,c}$	0.25	0.25	0.25	0.30	0.30	0.30	0.30
$RVVA = R_{\perp\perp}^A$	80	80	80	88.92	88.92	88.92	88.92
$S21 = R_{\perp\parallel}^A$	79	79	79	98.4	98.4	98.4	98.4

Fonte: Elaborada pelo Autor.

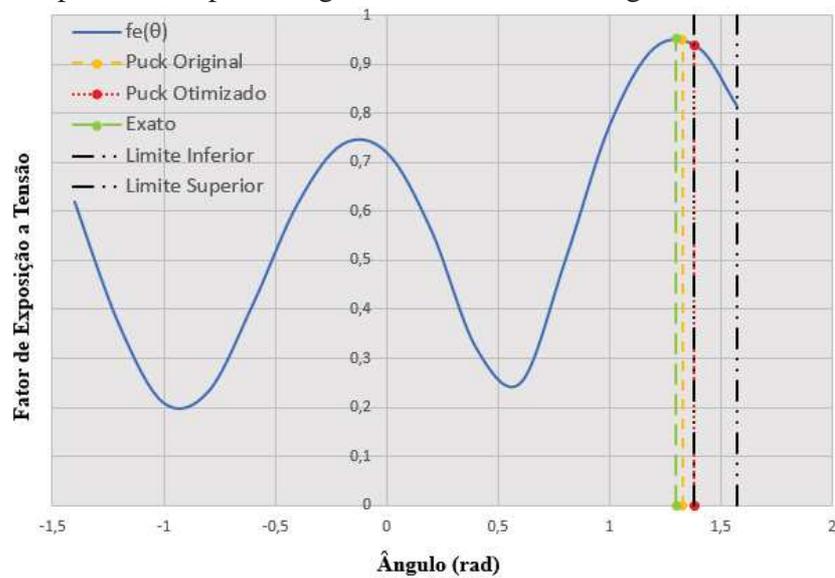
O ângulo foi calculado usando tanto o método modificado quanto a varredura original, comparando-os para verificar a confiabilidade das medidas propostas. Além disso, foram contabilizadas as iterações em cada busca a fim de analisar a eficiência. Os resultados estão apresentados nos gráficos a seguir e resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados dos testes do método de busca otimizada.

Teste	Iterações	Literatura		Puck Orig.		Puck Otim.		Erro Orig. [%]	Erro Otim. [%]
		$\theta_{max}$ (rad)	$y(\theta_{max})$	$\theta_{max}$ (rad)	$y(\theta_{max})$	$\theta_{max}$ (rad)	$y(\theta_{max})$		
1	08	1.2986	0.95209	1.3292	0.95030	1.3805	0.93890	0.1882	1.3855
2	12	0.8801	0.69074	0.8292	0.68890	0.4051	0.67980	0.2666	1.5840
3	13	-1.0478	0.73366	-1.0708	0.73260	-1.0497	0.73370	0.1442	0.0058
4	12	0.7854	1.00000	0.7854	0.99830	0.7854	1.00000	0.1700	0.0000
5	14	0.0000	1.00000	0.0000	0.99960	0.0000	1.00000	0.0400	0.0000
6	14	0.9022	1.00000	0.9024	0.99820	0.9024	1.00000	0.1800	0.0000
7	11	1.1768	0.99844	1.1292	0.99680	1.1755	0.99840	0.1642	0.0040

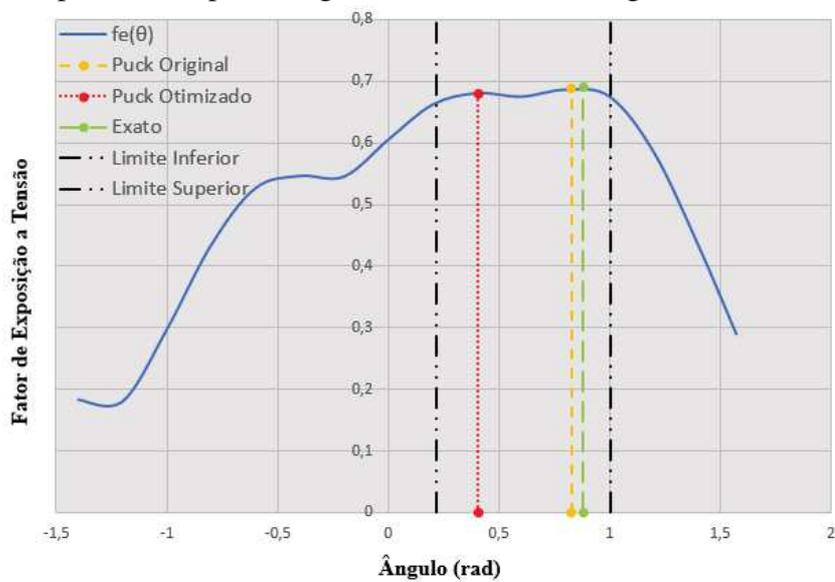
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 15 – Exemplo-Teste 1 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



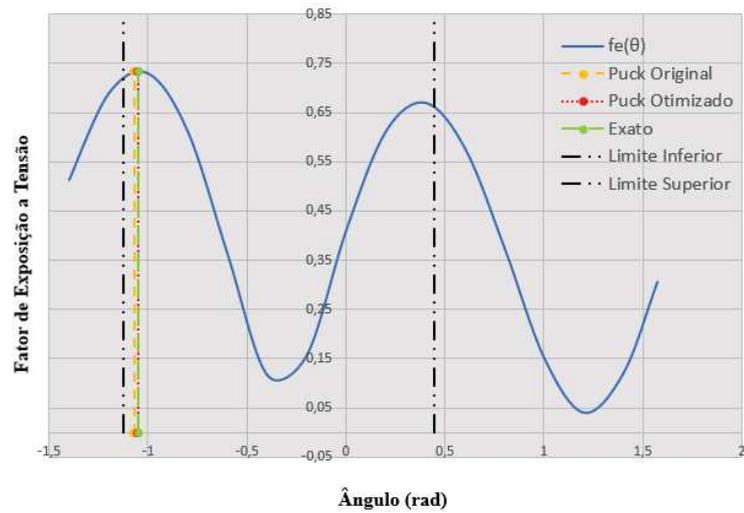
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 16 – Exemplo-Teste 2 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



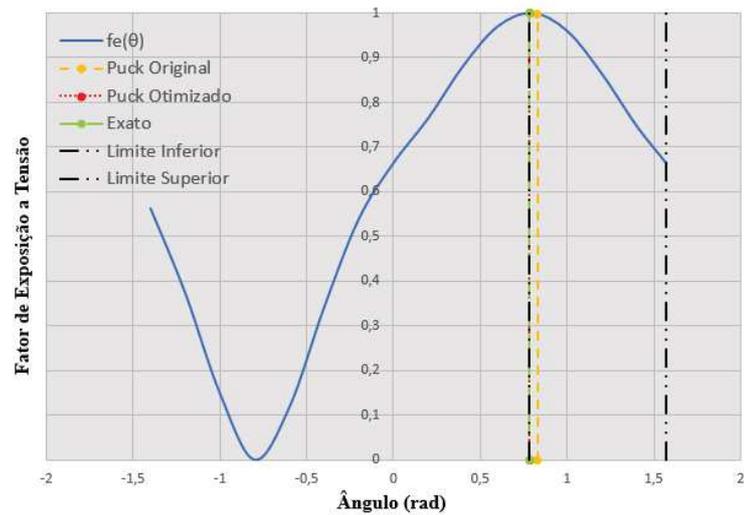
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 17 – Exemplo-Teste 3 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



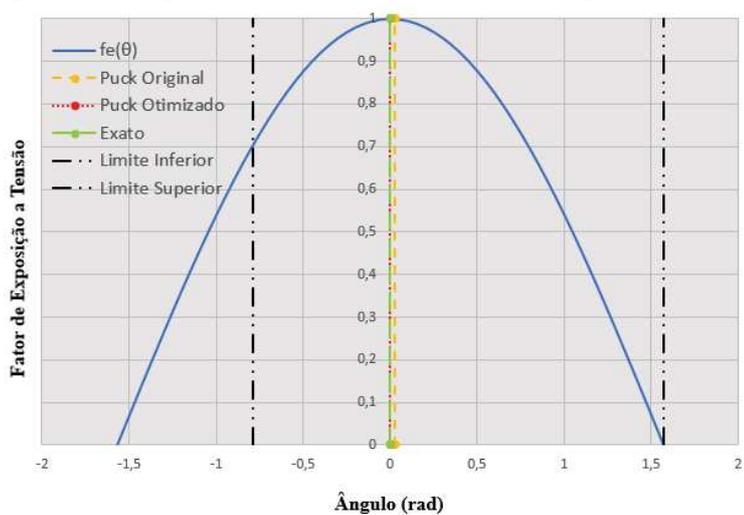
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 18 – Exemplo-Teste 4 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



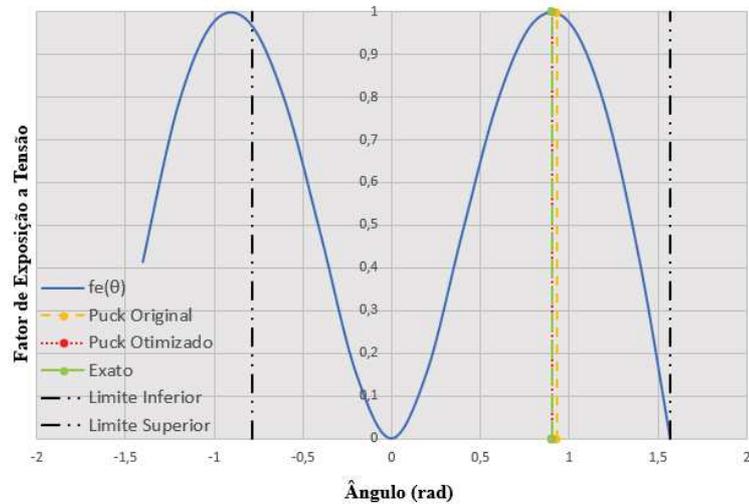
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 19 – Exemplo-Teste 5 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



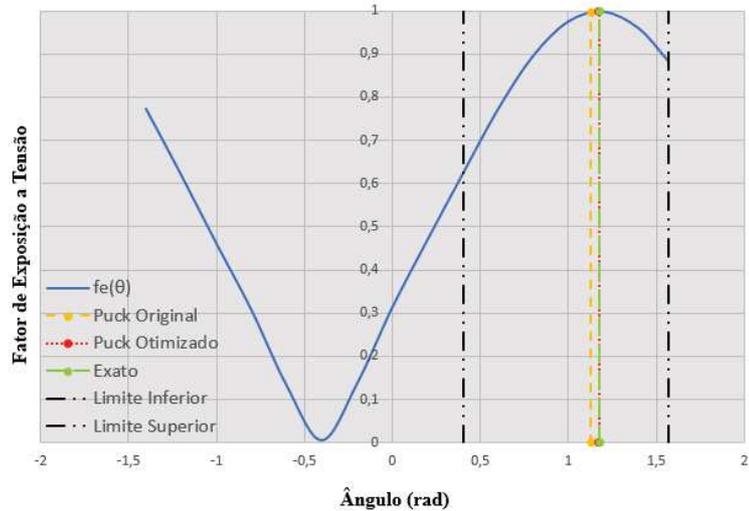
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 20 – Exemplo-Teste 6 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 21 – Exemplo-Teste 7 para o algoritmo de busca do ângulo de fratura.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Apesar de o método aplicado para a busca ser simples e indicado para curvas unimodais, o melhoramento de redução do espaço de busca e algumas funções condicionais incorporadas no código levaram a quase todos os casos convergirem para o máximo global, o que mostra que as adaptações funcionam.

Quanto à eficiência, desejava-se não ultrapassar um limite arbitrário de 20 iterações, considerando um máximo de 10 iterações para cada etapa de cada método acoplado. Em todos os exemplos testados o limite de iterações desejado não foi ultrapassado. Deste modo, todos os testes ficaram dentro do desejado. Além disso, quando comparado ao número de iterações exigidas pelo método convencional de Puck (180 verificações), mostrou excelente eficiência.

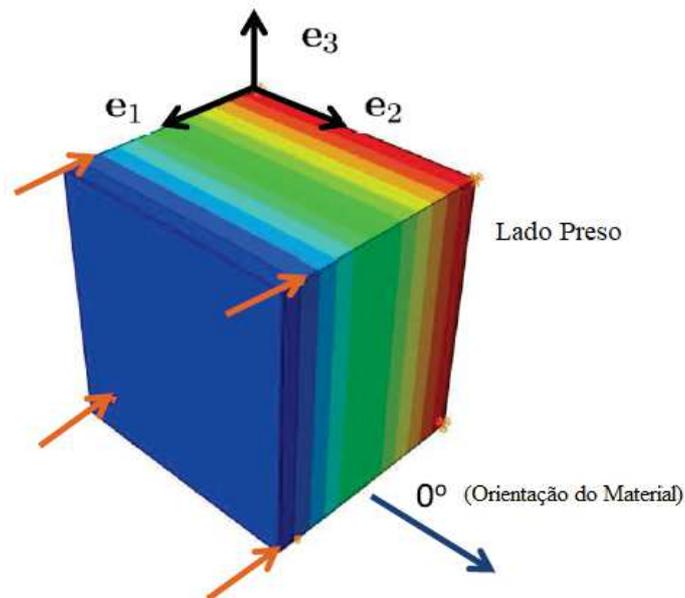
Depois de testado, o método de busca modificado foi incorporado à UMAT de degradação do material, a qual foi testada usando os modelos descritos a seguir.

## 4.2 Análise de Comportamento do Dano

Este exemplo consiste em um cubo simples submetido a carregamentos isolado e cíclico de tração e compressão com o intuito de avaliar o comportamento dos modelos de dano. Este modelo foi escolhido como teste inicial da UMAT, pois sua simplicidade e praticidade facilitam a verificação dos resultados. Além disso, engloba diversas situações de cargas para verificar a versatilidade da subrotina.

Reinoso *et al.* (2017) descreve o cubo com os nós  $e_1 = 0$  todos restringidos na direção  $e_1$  e os nós  $e_1 = L$  submetidos aos deslocamentos referentes a cada situação de carregamento, sendo  $L$  o comprimento da aresta do cubo igual a 1mm, conforme mostrado na Figura 22.

Figura 22 – Representação do modelo do Cubo.



Fonte: Adaptado de Reinoso *et al.* (2017)

Este exemplo é discretizado com apenas 1 elemento do tipo C3D8R (elemento cúbico, de primeira ordem e de integração reduzida) sendo todo o cubo o próprio elemento. Desta forma, pela simplicidade do modelo, os processamentos foram todos muito rápidos sempre entre 45 e 46 segundos tanto utilizando a busca original como utilizando a busca modificada. Quanto ao número de iterações no processo de busca obteve uma redução muito boa, contabilizando com a busca original 180 iterações e com a busca modificada entre 16 e 17 iterações. Isso mostra que referente ao número de iterações as modificações foram eficazes, entretanto o custo total do processamento é dominado pela solução de sistemas lineares, e não pela montagem das matrizes globais da estrutura.

As propriedades materiais do cubo, informadas por Falzon e Apruzzese (2011), estão especificadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades materiais do compósito de fibras de carbono T300 e resina 976.

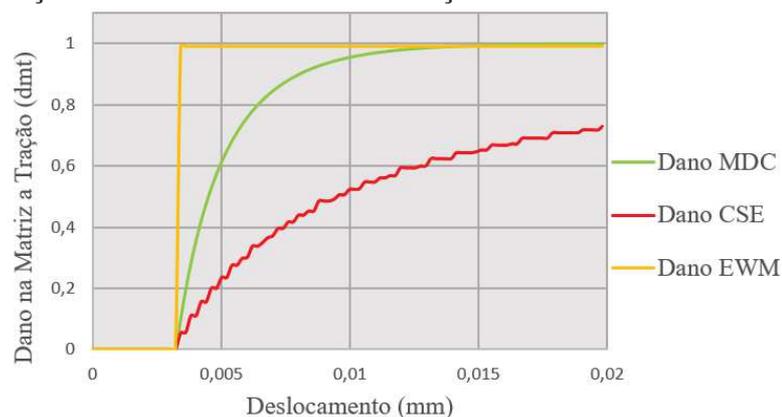
Property	T300/976
$E_{11}$ (MPa)	139.700
$E_{22}$ (MPa)	12.900
$G_{12}$ (MPa)	6900
$G_{23}$ (MPa)	5243.9
$\nu_{12} = \nu_{23}$	0.23
$E_{f1}$ (MPa)	230,000
$\nu_{f12}$	0.2
$\epsilon_{1T}$ (%)	1.807
$\epsilon_{1c}$ (%)	0.652
$X_T$ (MPa)	1516.8
$X_C$ (MPa)	1592.7
$Y_T$ (MPa)	44.54
$Y_C$ (MPa)	253.00
$S_{12}$ (MPa)	106.8
$G_{fFT}$ (MPa)	91.6
$G_{fFC}$ (MPa)	79.9
$G_{fMT}$ (MPa)	0.22
$G_{fMC}$ (MPa)	0.76
$G_{fS}$ (MPa)	0.46
viscosidade	0.0002

Fonte: Elaborada pelo Autor.

#### 4.2.1 Cubo submetido à Tração

A tração foi simulada por meio da aplicação de um deslocamento de 0.02 mm, obtendo as evoluções dos danos, Figura (23), e o comportamento Carga x Deslocamento, Figura (24).

Figura 23 – Evolução dos danos no cubo sobre tração.

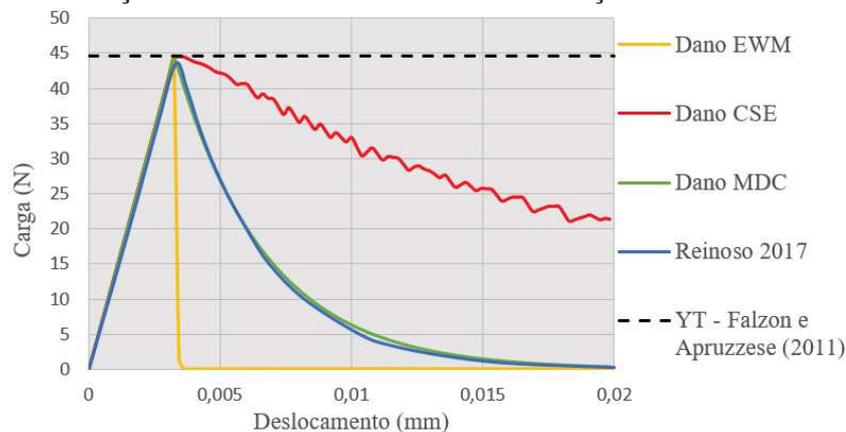


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como esperado, o modelo EWM apresentou um evolução brusca, na qual o dano sai de 0 diretamente para 1, ou seja considerando a ruptura da lâmina assim que identificado o início da falha. Já o modelo CSE conseguiu atribuir um caráter progressivo, entretanto bem suave, inclusive não atingindo o dano igual a um. Isso pode ter sido dado pela natureza da lei de evolução desse dano, visto que na lei do dano MDC também é usado o excedente do fator de exposição, mas dentro de uma função exponencial.

O dano baseado na mecânica do contínuo, por sua vez, apresentou um caráter progressivo, já descrito em teoria, e numa proporção abaixo do dano EWM e acima do dano CSE, atingindo o dano igual a 1.

Figura 24 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre tração.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

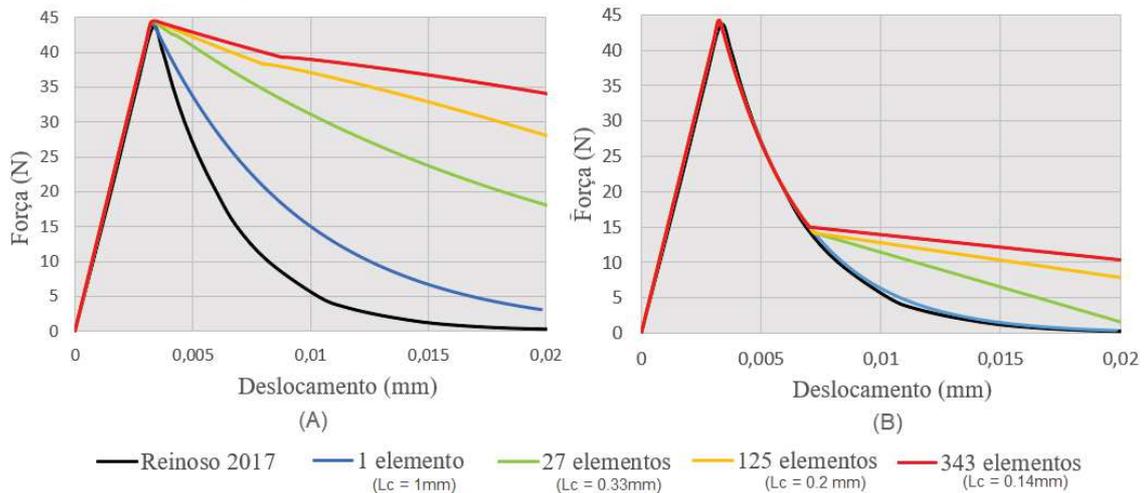
Pode-se observar que todos os modelos foram capazes de prever a resistência máxima de tração do compósito, o que era teoricamente esperado conforme mostrado na Figura (14). No comportamento pós-falha observa-se que o modelo EWM, sendo um *ply-discount*, apresenta uma degradação abrupta. Já modelo CSE apresenta um decréscimo que lembra um *softening* exponencial, entretanto com uma queda muito lenta. O modelo MDC, por sua vez, apresenta um *softening* exponencial bem distinto, que coincide com o comportamento obtido por Reinoso *et al.* (2017).

Neste exemplo, arbitrariamente, foi realizado um teste variando a discretização em 3, 5 e 7 elementos, em cada direção, a fim de verificar a implementação da teoria de *crack band*. Este teste foi realizado utilizando apenas o dano MDC, pois é o único modelo de dano neste trabalho que utiliza o comprimento característico ( $L_c$ ) na lei de evolução do dano.

Para cada discretização foram feitas modelagens com e sem a correção do comprimento efetivo proveniente da teoria de *crack band* a fim de analisar o seu efeito. A teoria de

*crack band* propõe a redução de dependência do resultado à discretização do modelo. A Figura 25 mostra que a implementação da teoria de *crack band* fez com que as curvas se aproximassem uma da outra, inclusive apresentando um considerável trecho de sobreposição dos traçados.

Figura 25 – Comparação dos resultados (A) sem crack band e (B) com crack band no cubo sobre tração.

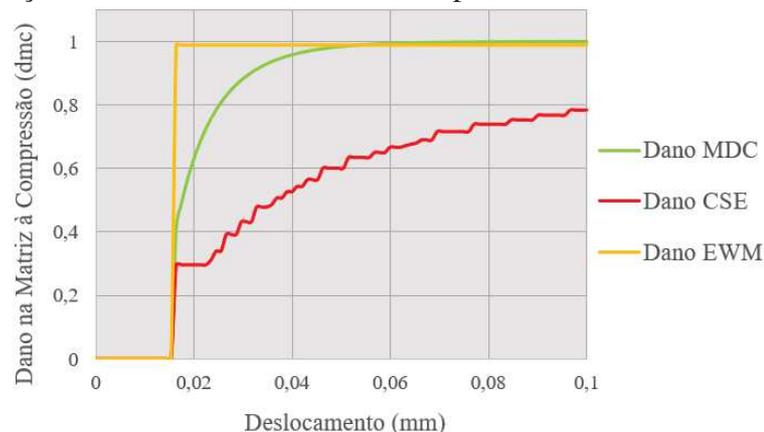


Fonte: Elaborada pelo Autor.

#### 4.2.2 *Cubo submetido à Compressão*

Para a simulação deste caso foi aplicado um deslocamento de  $-0.1$  mm, obtendo as evoluções dos danos mostradas na Figura 26 e o comportamento Carga x Deslocamento descrito na Figura 27.

Figura 26 – Evolução dos danos no cubo sobre compressão.

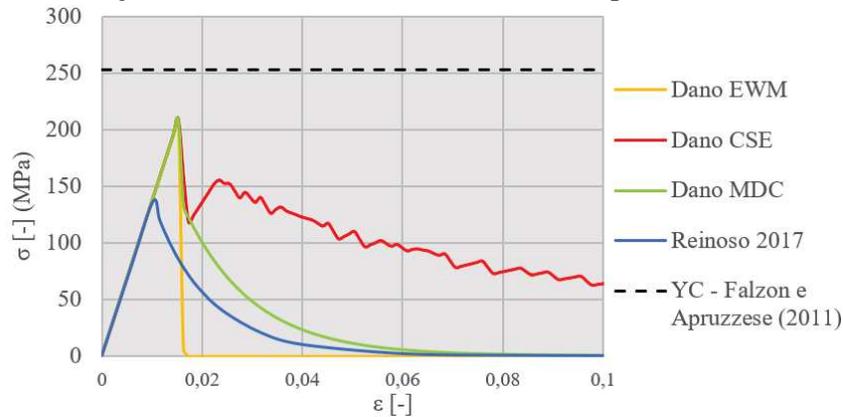


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Semelhante ao observado na situação sobre tração, o dano EWM apresenta uma evolução abrupta, o dano MDC descreve uma evolução exponencial bem delimitada e que alcança

o valor igual a 1, e o dano CSE demonstrou um caráter progressivo bem suave. Ainda sobre o dano CSE no exemplo de compressão ficou mais visível que apesar de um caráter global progressivo, ele é composto por vários pequenos patamares.

Figura 27 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre compressão.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Nota-se que as curvas identificaram a falha abaixo do valor da resistência à compressão ( $Y_C$ ). Contudo, vale ressaltar que os modelos deste trabalho falharam na carga de 209.29 MPa com um erro de 17.28 %, demonstrando melhoria em relação à curva de Reinoso *et al.* (2017).

Os modelos continuam desempenhando os comportamento previstos, onde o EWM apresenta um caimento brusco, o CSE demonstra uma resposta progressiva bem suave e o dano contínuo assume o comportamento proposto em teoria, assemelhando-se à curva de Reinoso *et al.* (2017).

### 4.2.3 Cubo submetido a carregamento cíclico

Neste exemplo o carregamento cíclico foi aplicado como uma sequência de deslocamentos descrita na Figura 28.

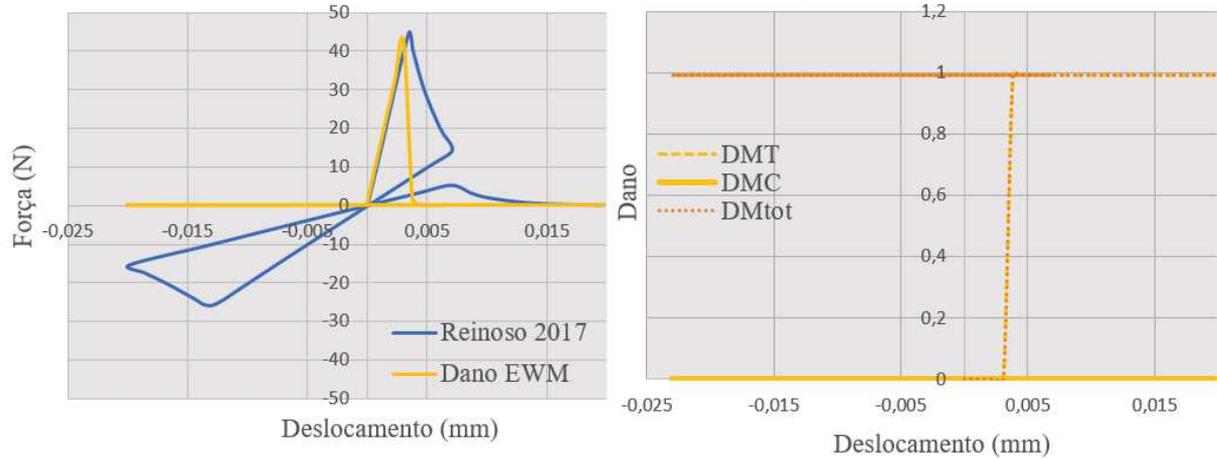
Figura 28 – Sequência de deslocamentos do caso cíclico.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Por ser um carregamento cíclico as curvas são mais complexas, então as curvas de cada dano foram dispostas em um gráfico isolado para melhor visualização.

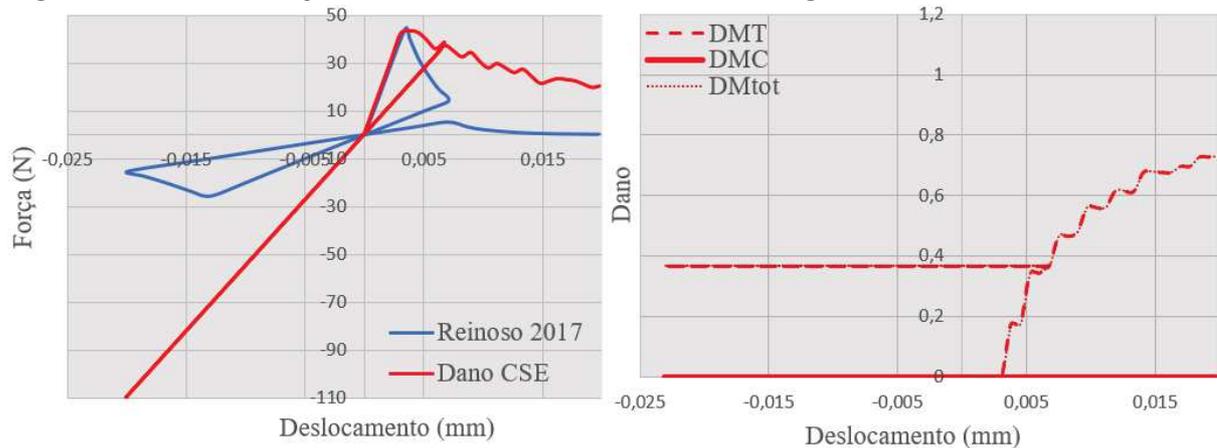
Figura 29 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano EWM.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode-se verificar que o dano EWM por propor uma degradação muito brusca anula o componente constitutivo logo que o dano inicia. Isso faz com que ao atingir o dano no primeiro carregamento o gráfico permaneça zerado. Deste modo, esse modelo de dano acaba não sendo viável para casos que envolvam carregamento cíclico, por exemplo um estudo de fadiga.

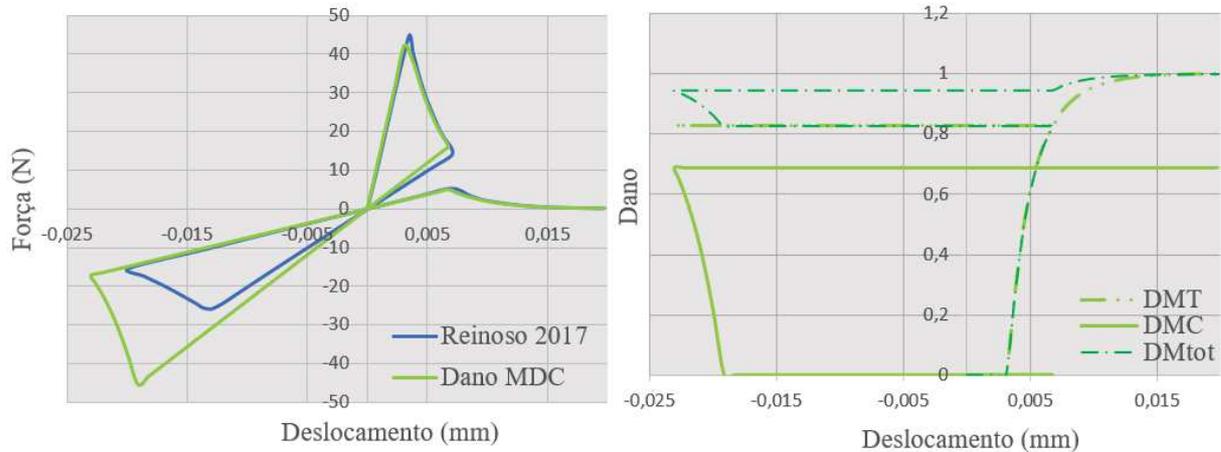
Figura 30 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano CSE.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O dano CSE com o seu caráter mais progressivo atribui um dano gradativo e os componentes constitutivos continuam atuando na outra etapa de carregamento. Entretanto, como comentado anteriormente, a sua degradação é muito suave divergindo do resultado esperado.

Figura 31 – Curva Força x Deslocamento do cubo sobre carregamento cíclico com dano MDC.



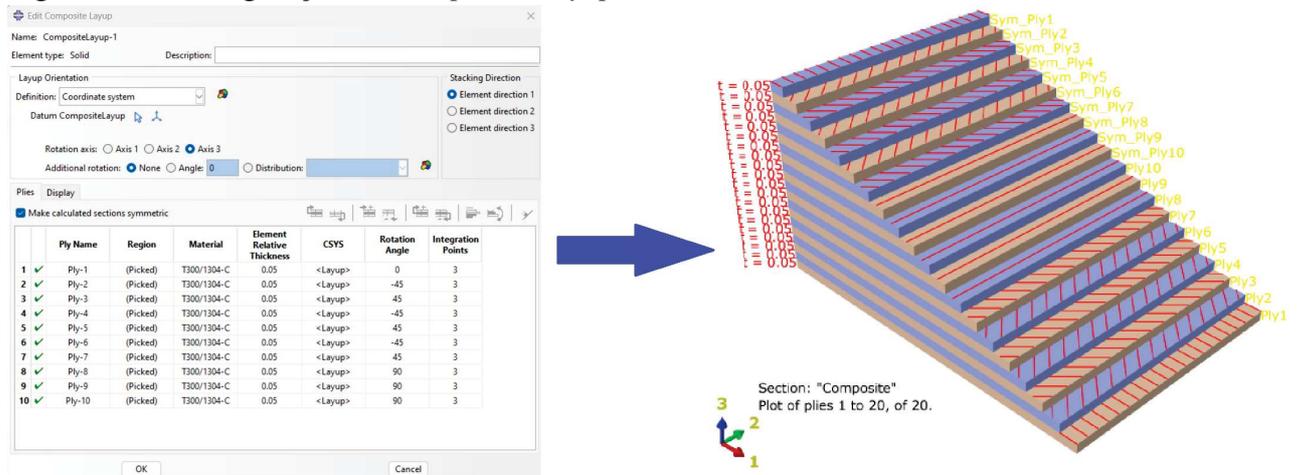
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Já o dano MDC, devido à definição explícita da lei exponencial de evolução do dano, proporciona uma degradação sob medida aproximando-se bastante do resultado da literatura. Vale ressaltar que na etapa do carregamento de compressão a falha ocorreu em uma carga mais alta que o resultado de Reinoso *et al.* (2017). Entretanto, isso era previsto uma vez que de acordo com o exemplo 4.2.2 o modelo com o qual se está comparando apresentou a falha na compressão bem abaixo da resistência do material.

### 4.3 Placa com furo sujeita à tração

Este exemplo consiste em uma placa longa com um furo circular centralizado e submetida a tração distribuída uniformemente nas duas faces laterais. Este exemplo foi retirado do trabalho de Kodagali (2017), mas também foi estudado por outros autores com destaque para Chen *et al.* (2012), do qual foi utilizada a curva carga-deslocamento para comparação dos modelos. A placa é composta por resina epóxi do tipo 1034-C e fibras de carbono do tipo T300 dispostas na laminação  $[0/(\pm 45)_3/90_3]_S$  onde cada lâmina tem 0.1308 mm. Esse layup foi definido no item *Composite Layup*, no qual descreve-se as lâminas que compõem a *Part* tridimensional criada, especificando a espessura, o material, a orientação da fibra e a quantidade de pontos de integração de Gauss das lâminas, Figura (32). Esse método de definição permite a visualização dos resultados lâmina por lâmina.

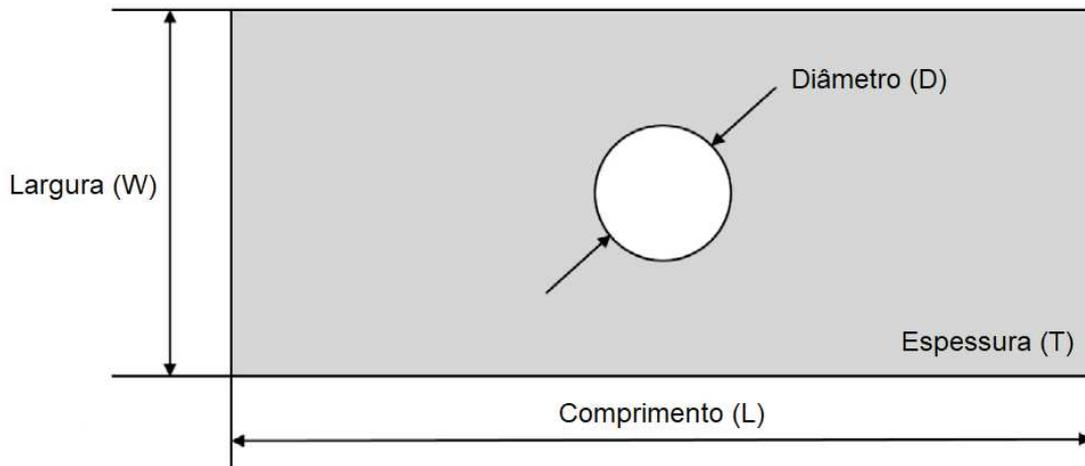
Figura 32 – Configuração do *Composite Layup*.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Quanto à geometria, a placa tem 203.2 mm de comprimento, 25.4 mm de largura, 2.616 mm de espessura e 6.35 mm de diâmetro do furo centralizado na placa, conforme a Figura 33.

Figura 33 – Características geométricas do modelo de placa tracionada.



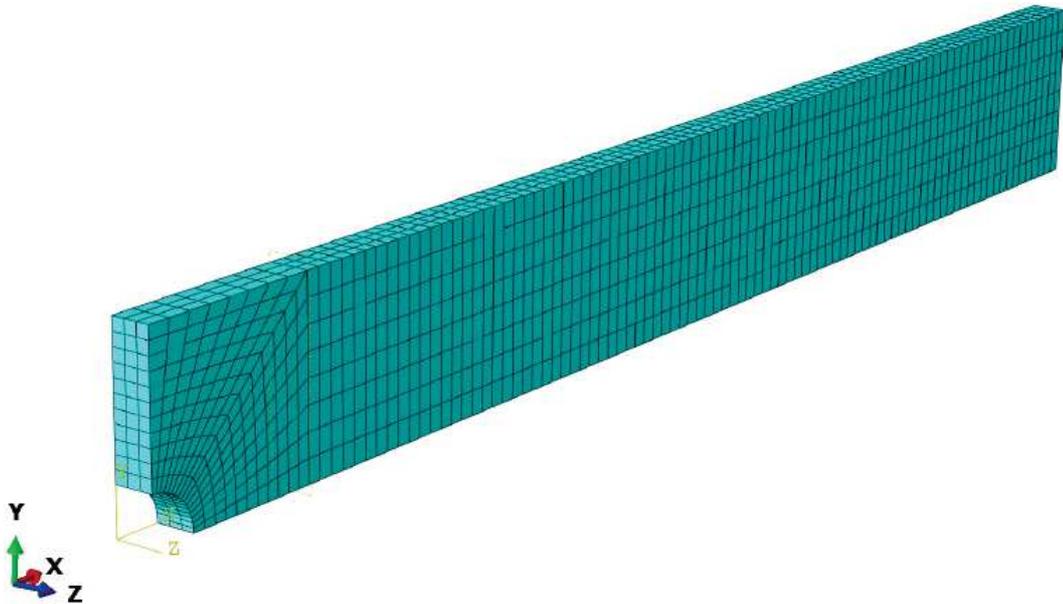
Dimensões e Orientações das lâminas da amostra do teste.

Laminação	$D$ (mm)	$W$ (mm)	$T$ (mm)	$L$ (mm)
$[0/(\pm 45)_3/(90)_3]_S$	6.35	25.4	2.616	203.2

Fonte: Adaptado de Kodagali (2017).

A placa foi modelada como sólido e discretizada utilizando o elemento tridimensional hexaédrico (C3D8R) que contém 8 nós, ou seja, interpolado com funções de forma lineares, e integração reduzida. A utilização da integração reduzida influencia bastante no resultado e no tempo de processamento. Quanto ao número de elementos, foi gerada uma malha com um total de 2664 elementos, tendo o tamanho de 1 mm cada elemento, conforme mostrado na Figura 34.

Figura 34 – Discretização da malha da placa tracionada.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para diminuir o custo computacional a placa foi modelada como 1/4 da estrutura aplicando condições de contorno de simetria nos planos  $xz$  e  $yz$ , conforme mostrado na Figura 35. Além disso, a tração a qual a placa é submetida foi aplicada na forma de deslocamento concentrado sobre um ponto de referência, que está interligado a todos os nós da malha da face de aplicação do deslocamento, usando a função *Constraint*. Este ponto foi aplicado na no centro da aresta inferior direta no sentido da espessura, que na estrutura completa seria o centróide da face.

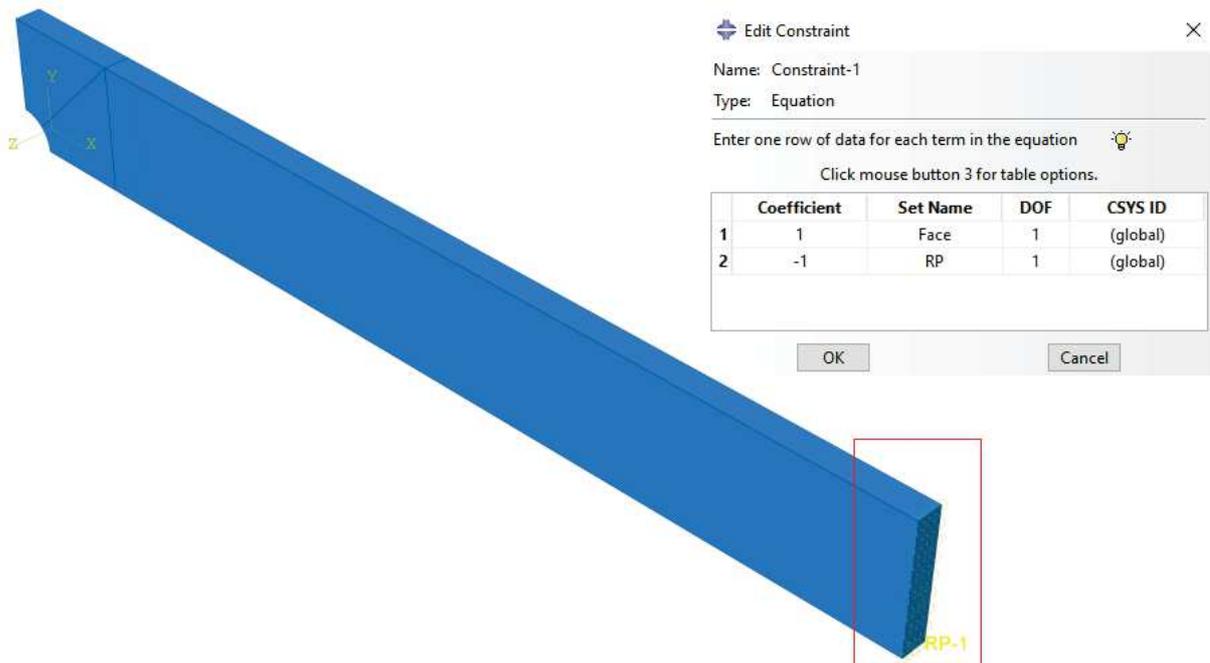
Figura 35 – Condições de contorno aplicadas na modelagem.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Para uniformizar esse deslocamento foi utilizado a função *Constraint* do tipo *equation* cujas configurações estão dispostas na Figura 36. A aplicação pontual foi apenas um artifício para obter a força de reação para o deslocamento aplicado e, conseqüentemente, a carga em que ocorre a falha.

Figura 36 – Constraint aplicado ao modelo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

As propriedades materiais estão disposta abaixo na Tabela 6.

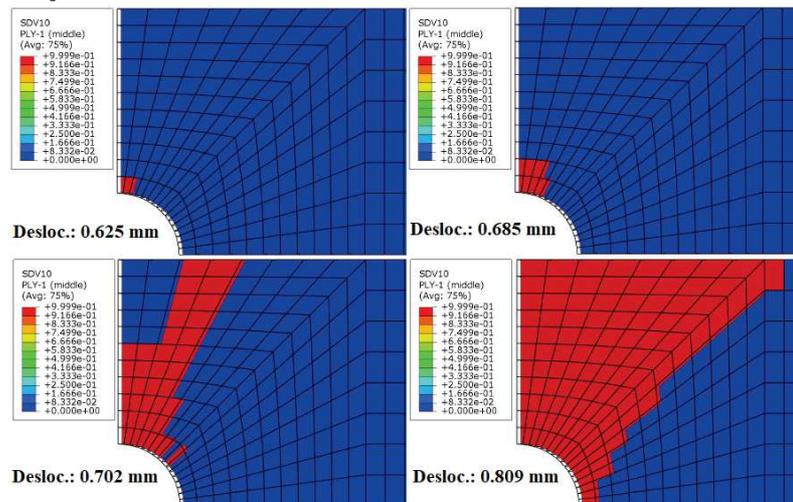
Tabela 6 – Propriedades materiais do compósito de fibras de carbono T300 e resina epóxi 1304-C.

Property	T300/1304-C
$E_{11}$ (MPa)	146.858
$E_{22}$ (MPa)	11.376
$G_{12}$ (MPa)	6185
$\nu_{12}$	0.3
$\nu_{23}$	0.28
$E_{f1}$ (MPa)	230,000
$\nu_{f12}$	0.2
$X_T$ (MPa)	1731
$X_C$ (MPa)	1379
$Y_T$ (MPa)	67
$Y_C$ (MPa)	268
$S_{12}$ (MPa)	58.7
$S_{12}$ (MPa)	58.7
$G_{F,t}$ (MPa)	89.83
$G_{F,c}$ (MPa)	78.27
$G_{M,t}$ (MPa)	0.76
$G_{M,c}$ (MPa)	0.46
$\nu$	0.0002

Fonte: Elaborada pelo Autor.

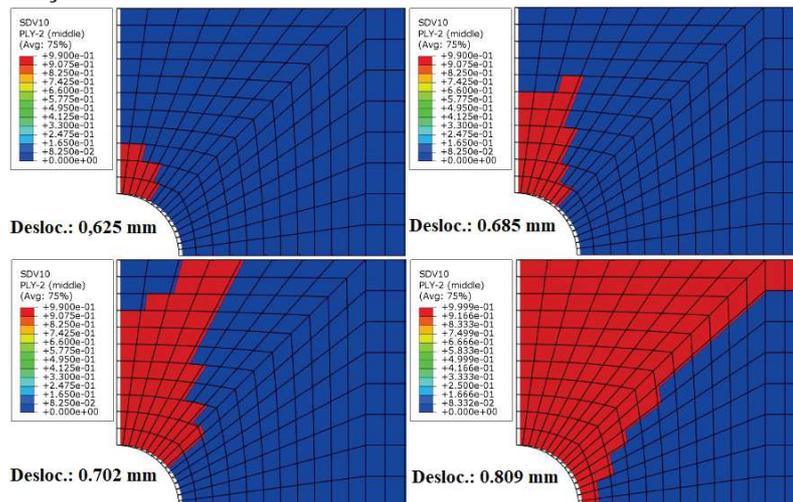
Utilizando o modelo de dano EWM foram obtidas as propagações do dano para cada orientação da fibra conforme mostrado nas Figuras 37, 38, 39 e 40.

Figura 37 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 0°.



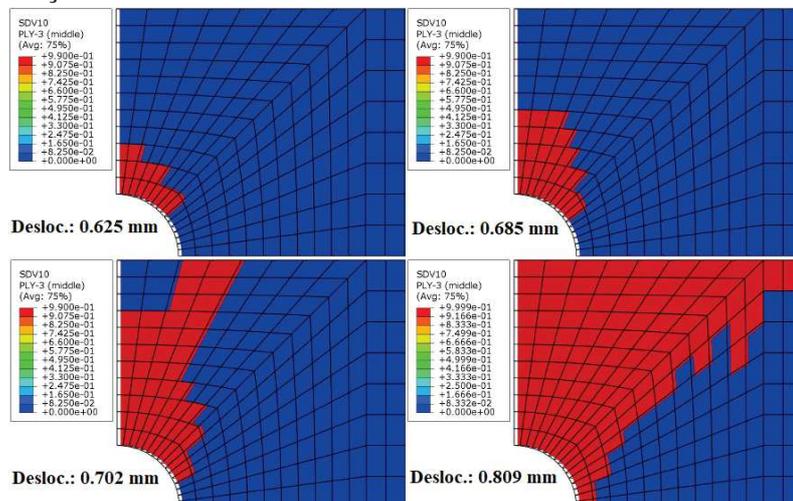
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 38 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra -45°.



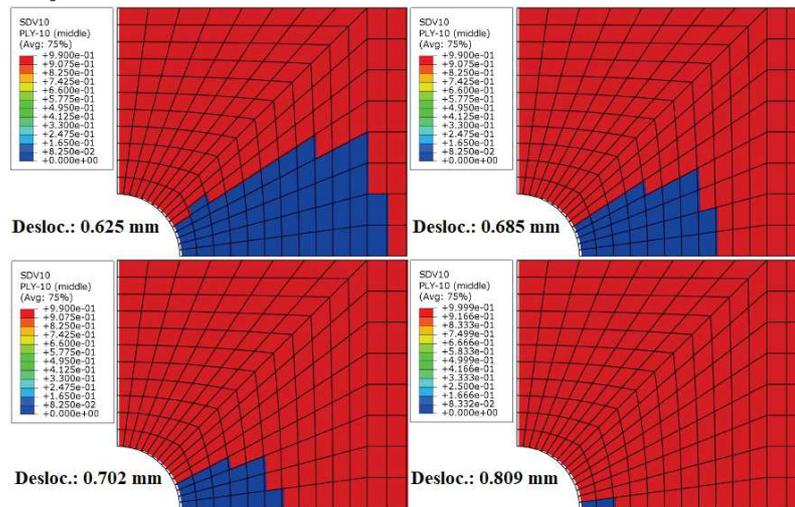
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 39 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 45°.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

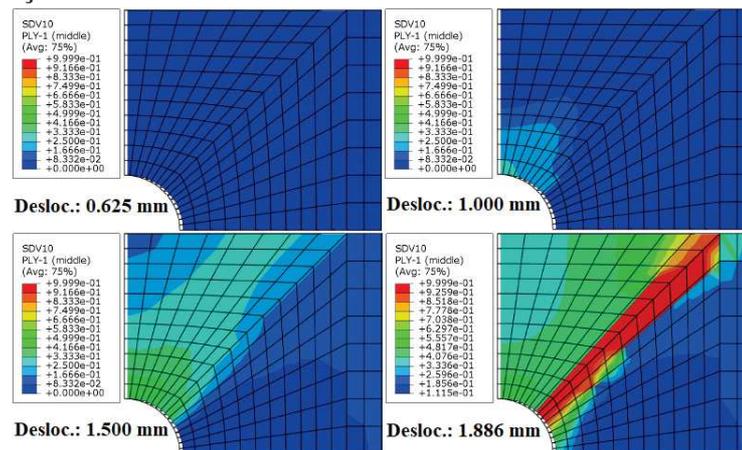
Figura 40 – Evolução do Dano EWM na lâmina com fibra 90°.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

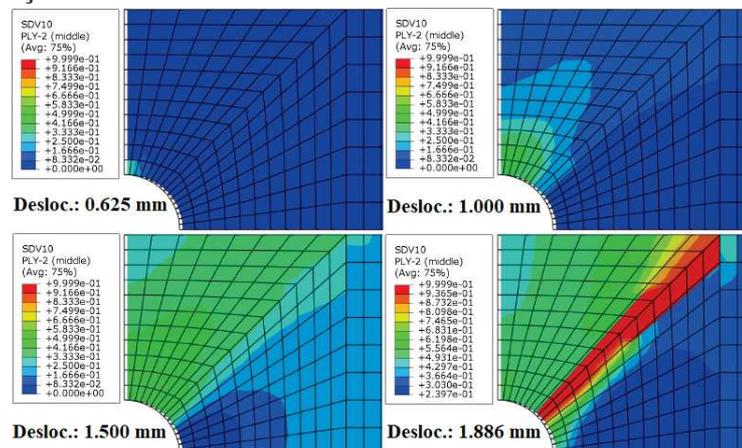
O Dano CSE se propagou nas lâminas conforme as Figuras 41, 42, 43 e 44.

Figura 41 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 0°.



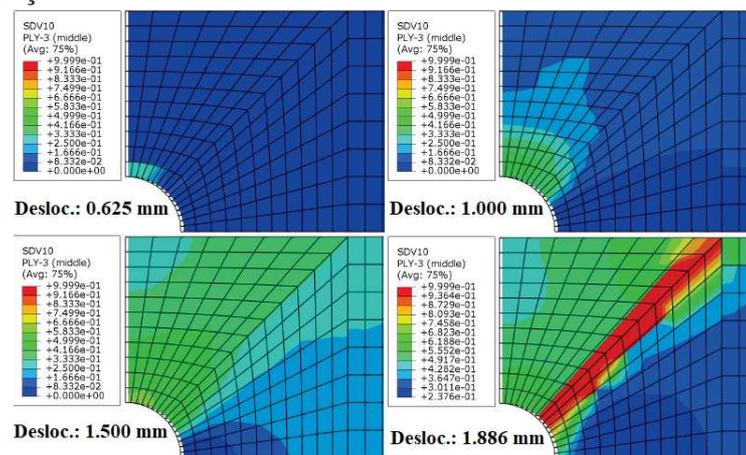
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 42 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra -45°.



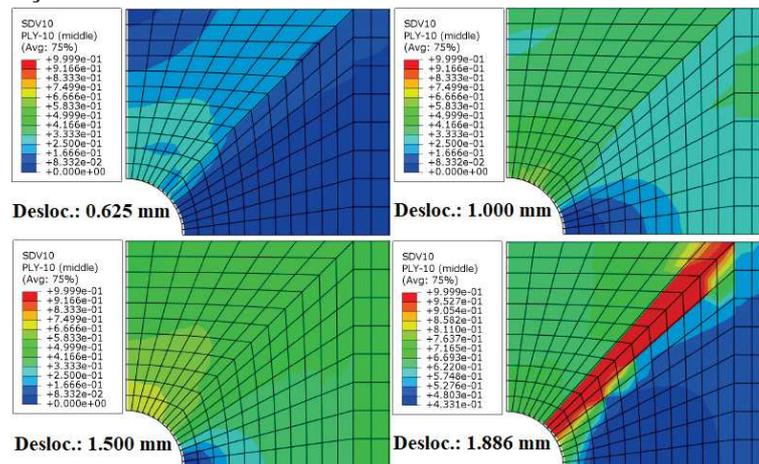
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 43 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 45°.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

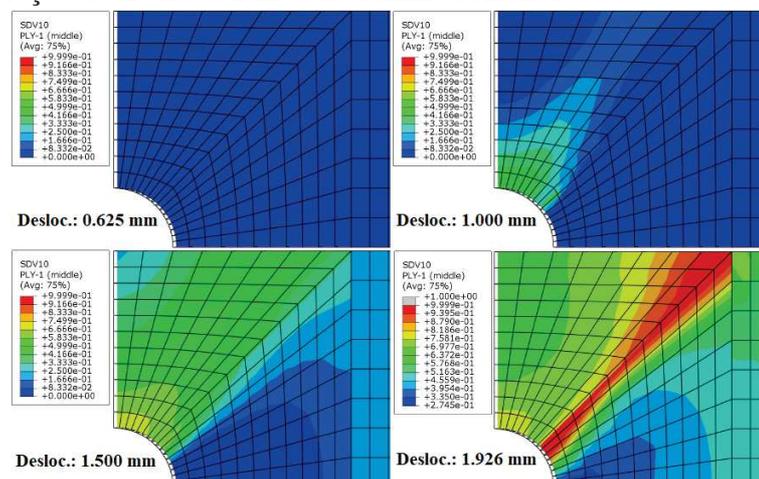
Figura 44 – Evolução do Dano CSE na lâmina com fibra 90°.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

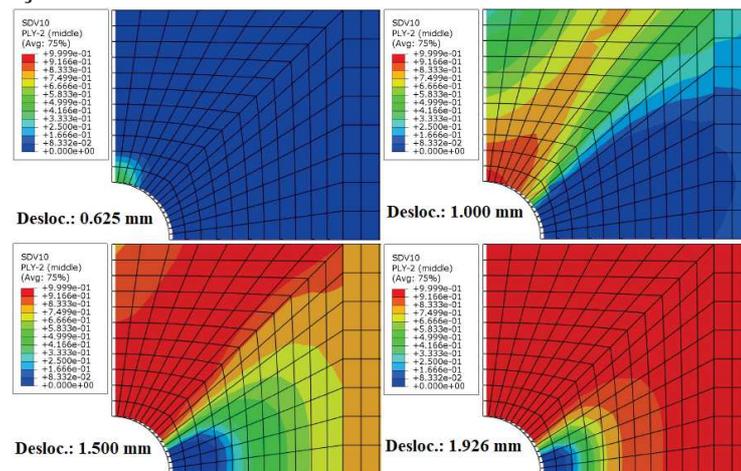
A propagação do dano contínuo deu-se como mostrado nas 45, 46, 47 e 48.

Figura 45 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra 0°.



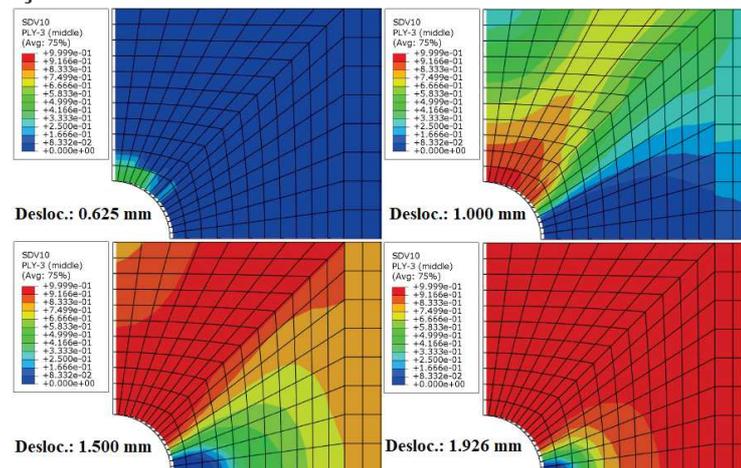
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 46 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra  $-45^\circ$ .



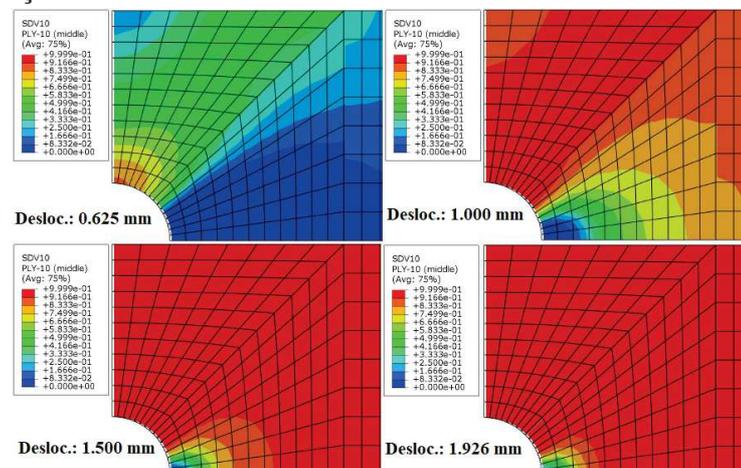
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 47 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra  $45^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 48 – Evolução do Dano contínuo na lâmina com fibra  $90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Chen *et al.* (2012) apresenta a evolução do dano do seu modelo, o qual se desenvolve diagonal ao furo da placa. Comparando com os comportamento descritos nas figuras anteriores pode-se concluir que os modelos aplicados neste trabalho são qualitativamente compatíveis. Vale ressaltar que a falha total de uma lâmina ocorre quando o dano (representado pela cor vermelha) tiver se propagado por toda a largura de cada uma das lâminas (KODAGALI, 2017).

O único dado experimental encontrado foi a tensão última de 235,8 MPa fornecida por Chang *et al.* (1984). Tendo que  $\sigma_u = P_u / (W \cdot T)$ , a carga última experimental é 15.668 kN. A partir desta foram calculados os erros das cargas últimas dos modelos deste trabalho, Tabela 7.

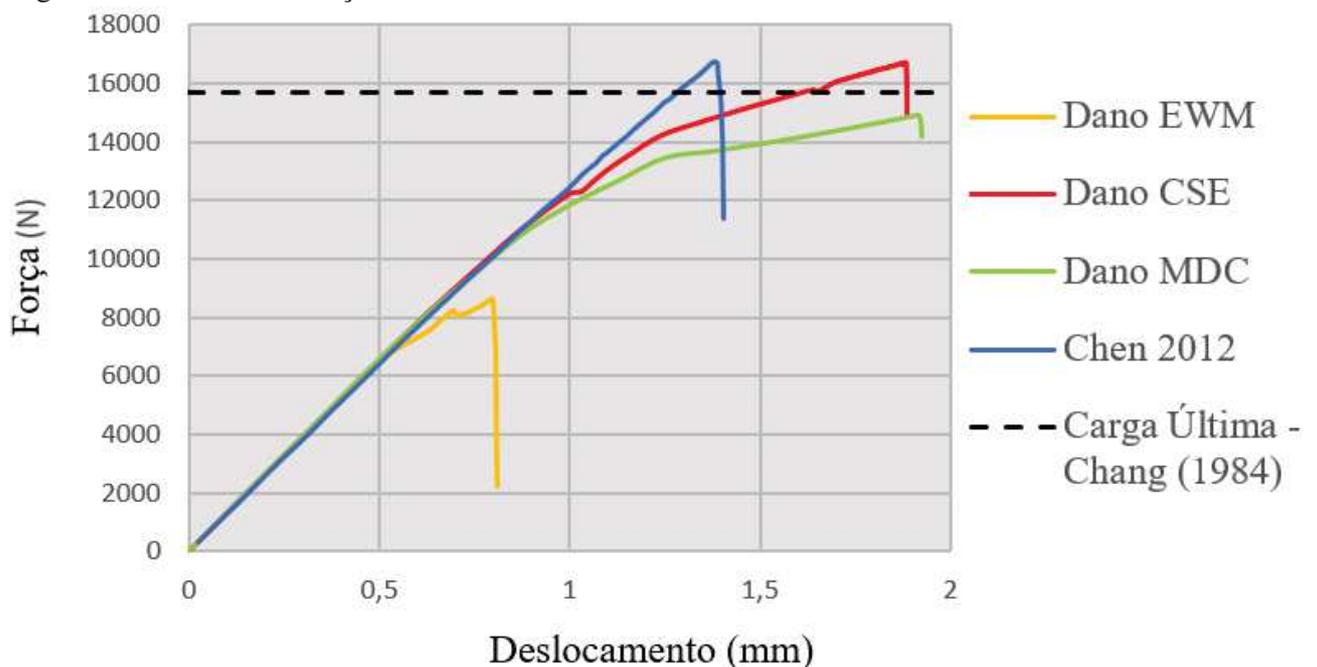
Tabela 7 – Comparativo entre as cargas últimas.

Modelo	Carga (kN)	Erro (%)
Experimental	15.668	-
EWM	8.633	-44.90
CSE	16.722	6.73
MDC	14.909	-4.84

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como não foi encontrado o traçado de Carga x Deslocamento do ensaio, então foram comparadas as curvas dos modelos propostos neste trabalho com a curva do modelo implementado por Chen *et al.* (2012), Figura 49.

Figura 49 – Curva de Força x Deslocamento.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Quanto a eficácia das modificações no processo de busca do ângulo, neste exemplo foi possível a observação dos seus efeitos por meio do monitoramento do tempo de processamento das modelagens, os quais estão listados na Tabela 8.

Tabela 8 – Análise dos tempos de processamento.

Dano	Iterações	Original	Modificado	Redução
EWM	14	01h08min28s	50min29s	26.26%
CSE	17-19	04h17min16s	03h19min47s	22.34%
MDC	17-18	01h46min02s	01h22min36s	22.09%

Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Tabela 8 mostra a redução do tempo de processamento utilizando as modificações aplicadas em conjunto. Para analisar o efeito de cada modificação foram realizados processamentos utilizando cada modificação isoladamente e cujo os tempos estão na Tabela 9.

Tabela 9 – Análise do efeito de cada modificação no tempo de processamento.

Modificação Dano	Plano de Fratura Constante	Limite Superior	Redução do Espaço de busca	Método de Busca
EWM	01h06min58s (2.2%)	54min28s (20.45%)	52min12s (23.76%)	51min57s (24.12%)
CSE	03h42min47s (13.4%)	04h17min11s (0%)	03h19min55s (22.29%)	03h09min54s (26.18%)
MDC	01h30min22s (14.77%)	01h45min57s (0%)	01h20min29s (24.10%)	01h24min24s (20.40%)
Redução média	10.12%	6.81%	23.38%	23.56%

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Pode-se observar que a redução do espaço de busca e a utilização do outro método de busca, cada uma por si só, promove uma economia computacional equivalente à obtida aplicando todas as modificações juntas. Tal fato encoraja a utilização de apenas uma dessas modificações. Inclusive, há uma leve vantagem quando utilizado uma dessas melhorias isoladas, em comparação com o uso de todas juntas, o que aponta para a possibilidade de que a implementação de muitas melhorias depois de um limite atrapalhe mais que ajude.

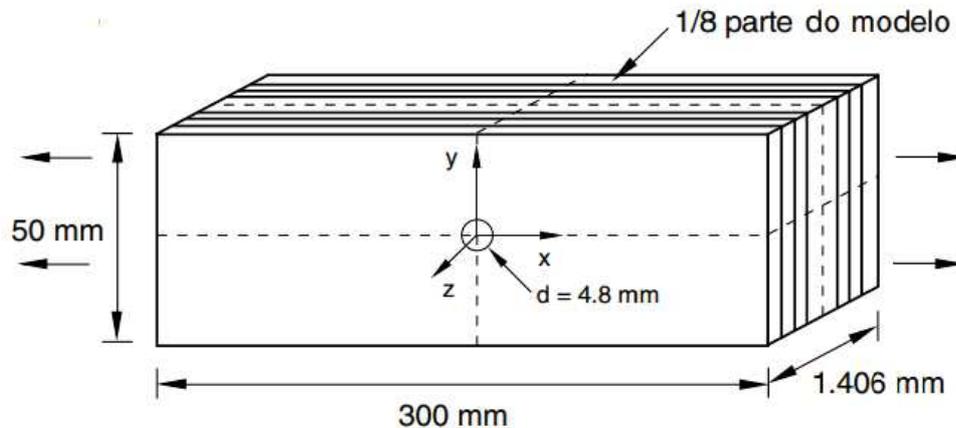
#### 4.4 Placa Composta de Metal-Fibra

Este exemplo é semelhante ao Exemplo 4.3. É uma placa com um furo central e submetida a tração, portanto, analogamente ao Exemplo 4.3 foi utilizado um *Constraint*.

Este exemplo foi estudado por Lapczyk e Hurtado (2007), cuja curva carga-deslocamento

foi usada para comparação dos resultados. Os dados geométricos estão detalhados na Figura 50.

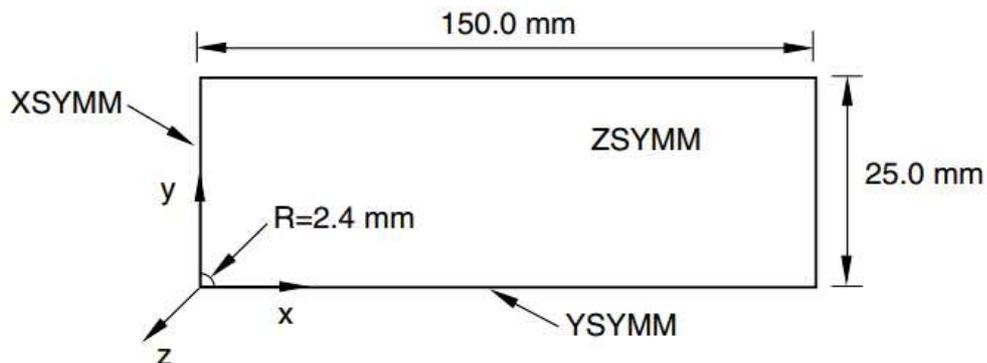
Figura 50 – Características geométricas do modelo de placa metal-fibra.



Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

Entretanto, para diminuir o custo computacional foi modelado 1/8 do modelo. Esta redução do modelo foi feita pela divisão da placa nos 3 planos centrais e portanto as condições de contorno foram aplicadas com propriedades de simetria conforme mostrado na Figura 51.

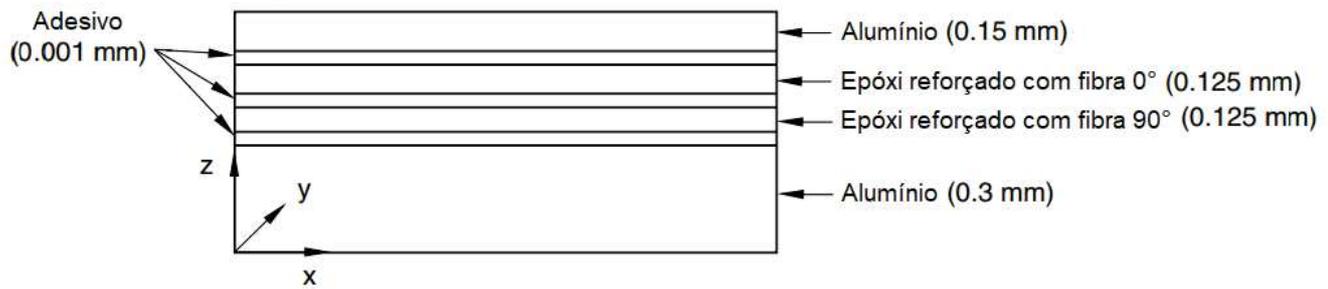
Figura 51 – Condições de contorno e características geométricas do modelo reduzido de placa metal-fibra.



Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

A placa é composta por 1 lâmina central de alumínio de 0.6 mm, 2 lâminas periféricas de alumínio de 0.15 mm e 2 lâminas intermediárias de compósito reforçado por fibra de vidro de 0.25 mm com laminação  $[0/90]$ . Este exemplo, portanto, foi modelado criando diferentes *Parts* para cada lâmina, diferente do modelo do Exemplo 4.3 no qual foi criado uma única *Part* e as diferenciações das lâminas foram especificadas utilizando *Composite Layup*. Deste modo foi modelado uma camada adesiva para simular a união entre as lâminas, apresentando a configuração mostrada na Figura 52.

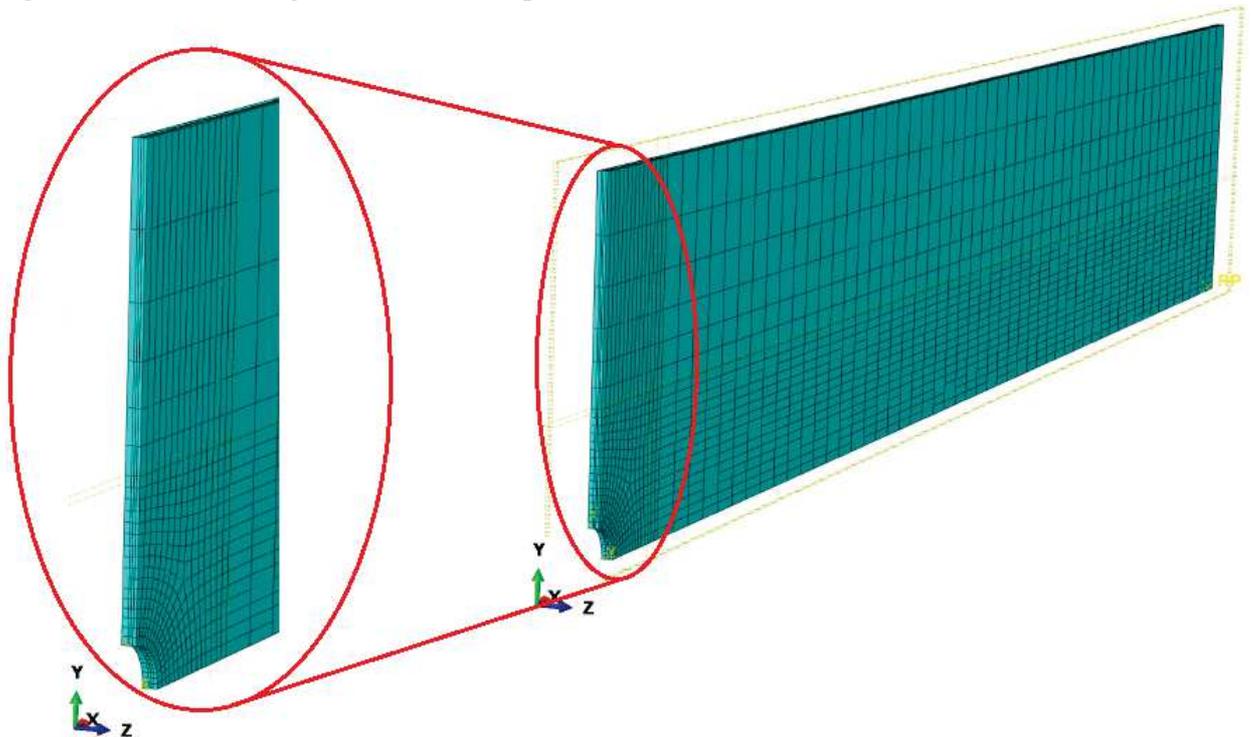
Figura 52 – Configuração de lâminas do modelo reduzido de placa metal-fibra.



Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

Devido à construção diferente do modelo deste exemplo, foram utilizados dois elementos diferentes dos usados nos demais exemplos. A malha de discretização totalizou 10297 elementos, sendo 2942 C3D8R nas regiões reforçadas por fibras, 2942 C3D8I nas lâminas de alumínio e 4413 COH3D8 nas áreas de coesão entre as seções, Figura 53. Vale ressaltar que como o modelo foi construído criando uma *Part* para cada lâmina, na geração da malha ficou automaticamente separado um elemento para cada lâmina na direção da espessura.

Figura 53 – Discretização do modelo de placa metal-fibra.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O elemento C3D8I é uma modificação do C3D8, ou seja, hexaédrico linear, na qual destaca-se a complementação das funções de forma com as funções de bolha, a fim de reduzir o *locking* volumétrico e de cisalhamento (Dassault Systèmes, 2011).

O elemento COH3D8 é um elemento hezaédrico entretanto do tipo coesivo e gera forças nodais baseadas na interpolação dos deslocamentos de separação. Esse elemento, portanto, consiste em uma ferramenta do Abaqus<sup>®</sup> para análise tridimensional da progressão da delaminação (RANKIN *et al.*, 2010). E por isso foi utilizado nas zonas de interação entre as diferentes partes do modelo.

As propriedades materiais do adesivo interlaminar estão disposta na Tabela 10.

Tabela 10 – Propriedades materiais do adesivo do compósito da placa de metal-fibra.

Propriedades Materiais	
$E$ (MPa)	2,000
$\nu$	0.33
$t_n^f$ (MPa)	50
$t_s^f$ (MPa)	50
$G_n$ (MPa)	4.0
$G_s$ (MPa)	4.0

Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

As propriedades das lâminas de compósito estão dispostas na Tabela 11.

Tabela 11 – Propriedades materiais das lâminas do compósito da placa de metal-fibra.

Propriedades Materiais	
$E_{11}$ (MPa)	55,000
$E_{22}$ (MPa)	9,500
$G_{12}$ (MPa)	5,500
$\nu_{12}$	0.33
$\nu_{23}$	0.45
$E_{f1}$ (MPa)	230,000
$\nu_{f12}$	0.2
$\epsilon_{1T}$ (%)	1.807
$\epsilon_{1c}$ (%)	0.652
$X_T$ (MPa)	2,500
$X_C$ (MPa)	2,000
$Y_T$ (MPa)	50
$Y_C$ (MPa)	150
$S_{12}$ (MPa)	50
$G_{F,t}$ (MPa)	12.5
$G_{F,c}$ (MPa)	12.5
$G_{M,t}$ (MPa)	1
$G_{M,c}$ (MPa)	1
$\nu$	0.0004

Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

Como a placa de alumínio não é um material compósito a sua falha se dá pela análise de sua propriedades plásticas, listadas na Tabela 12, junto das propriedades elásticas.

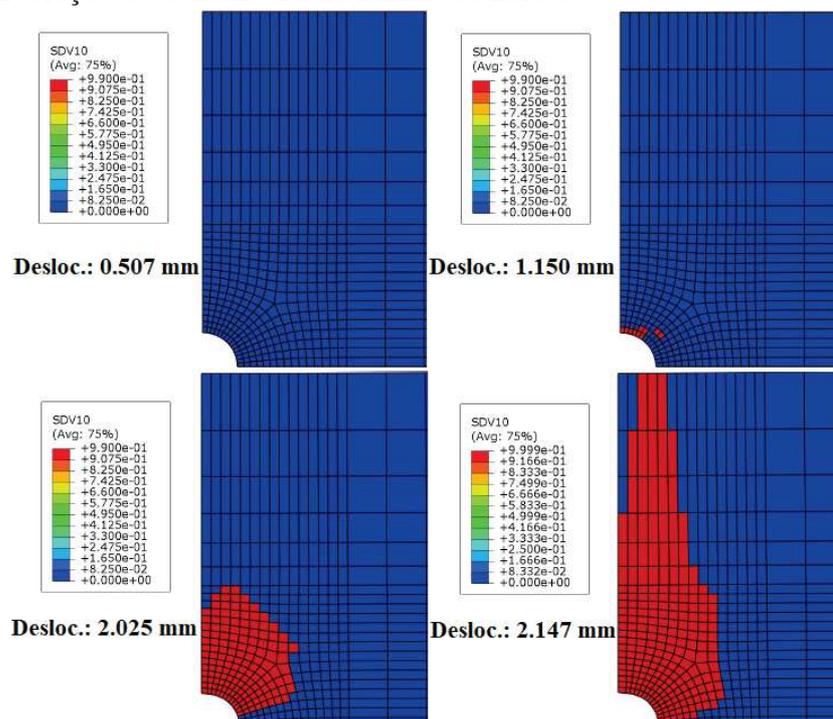
Tabela 12 – Propriedades materiais da placa de alumínio do modelo metal-fibra.

Propriedades Elásticas	
$E$ (MPa)	73,800
$\nu$	0.33
Propriedades Plásticas	
Yield Stress (MPa)	Plastic Strain
300	0.0000
320	0.00016
340	0.00047
355	0.00119
375	0.00449
390	0.01036
410	0.02130
430	0.03439
450	0.05130
470	0.08000
484	0.14710

Fonte: Adaptado de Lapczyk e Hurtado (2007).

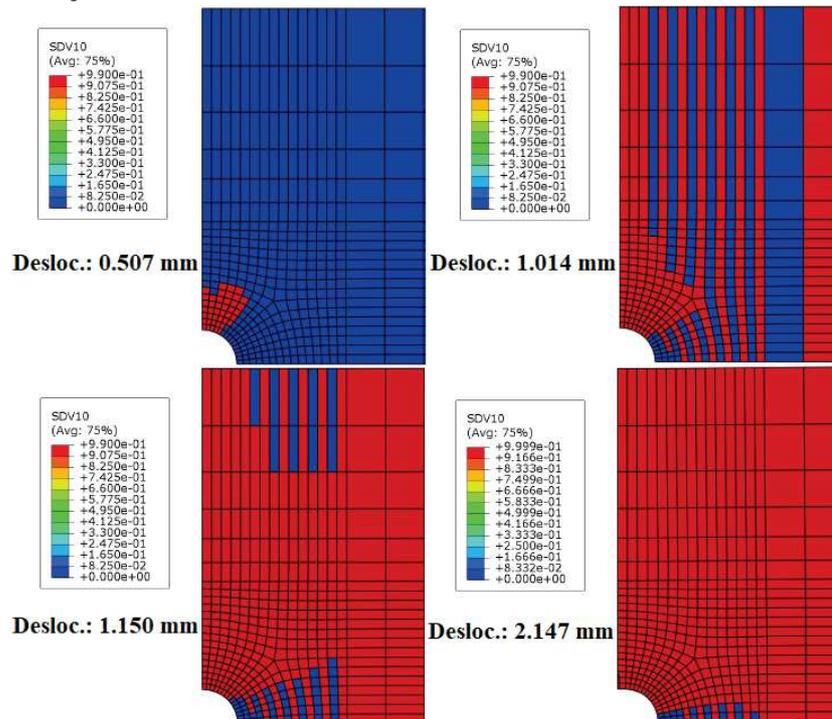
Vale lembrar que na aplicação do deslocamento foi usado o mesmo procedimento de *Constraint* explicado no Exemplo 4.3, detalhado na Figura 36. Por meio do modelo, então, foram obtidas as evoluções de dano EWM para cada orientação da fibra conforme expostas nas Figuras 54 e 55.

Figura 54 – Evolução do dano EWM na lâmina de fibra  $0^\circ$ .



Fonte: Elaborada pelo Autor.

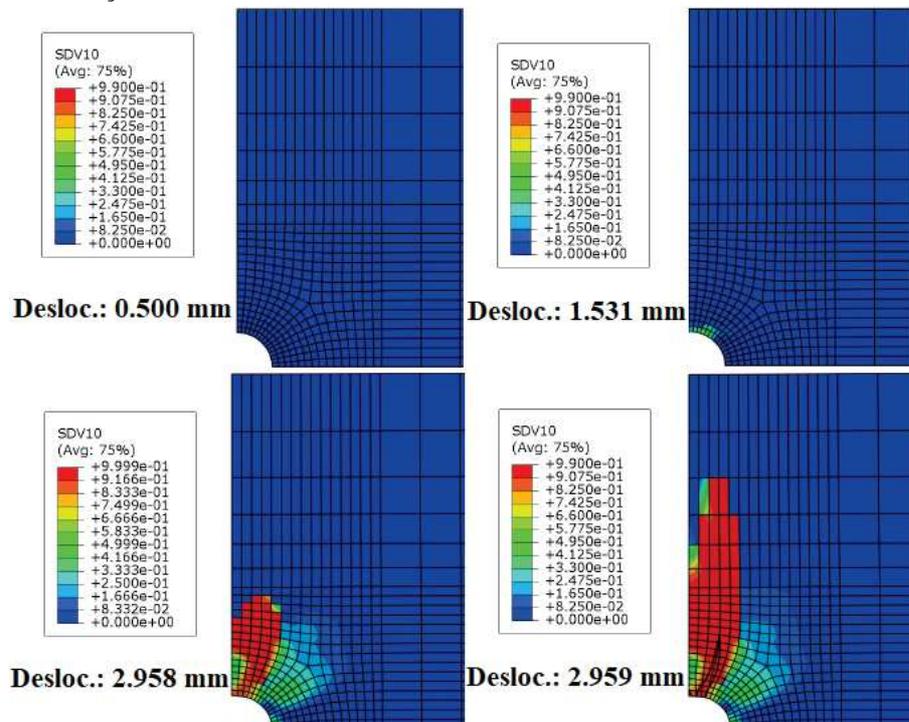
Figura 55 – Evolução do dano EWM na lâmina de fibra 90°.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

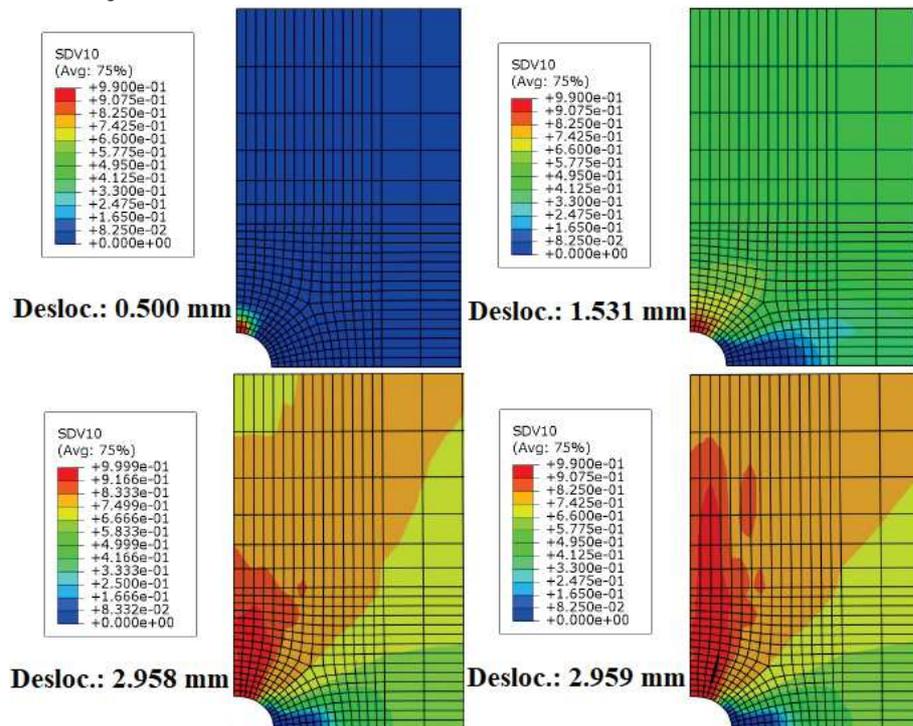
Utilizando o modelo de Dano CSE foram obtidos os seguintes comportamento de propagação do dano, Figuras 56 e 57.

Figura 56 – Evolução do dano CSE na lâmina de fibra 0°.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

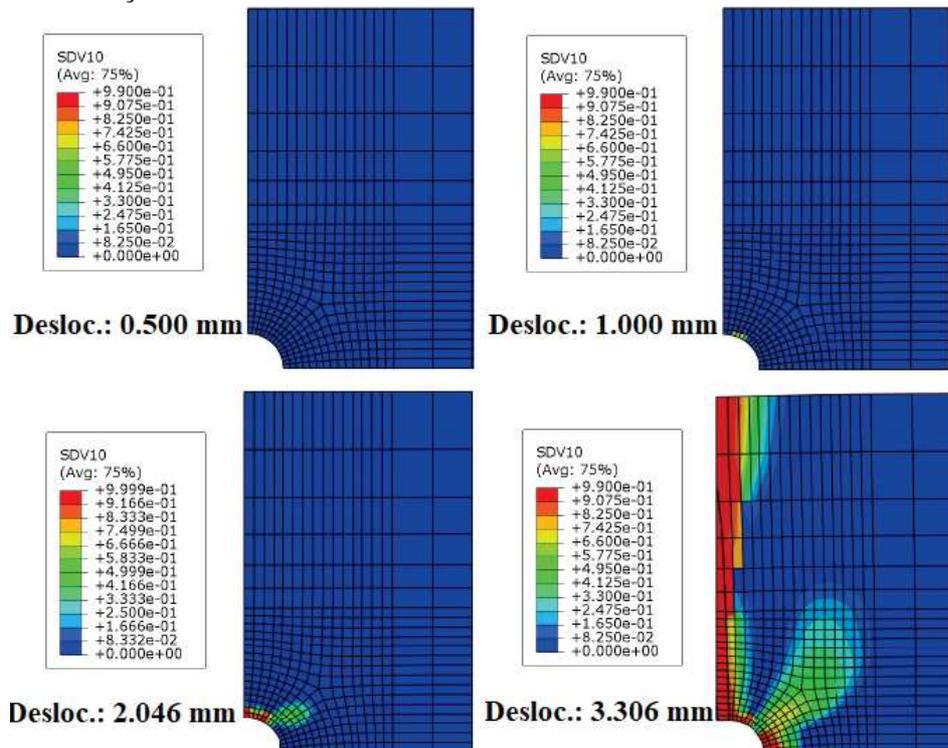
Figura 57 – Evolução do dano CSE na lâmina de fibra 90°.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

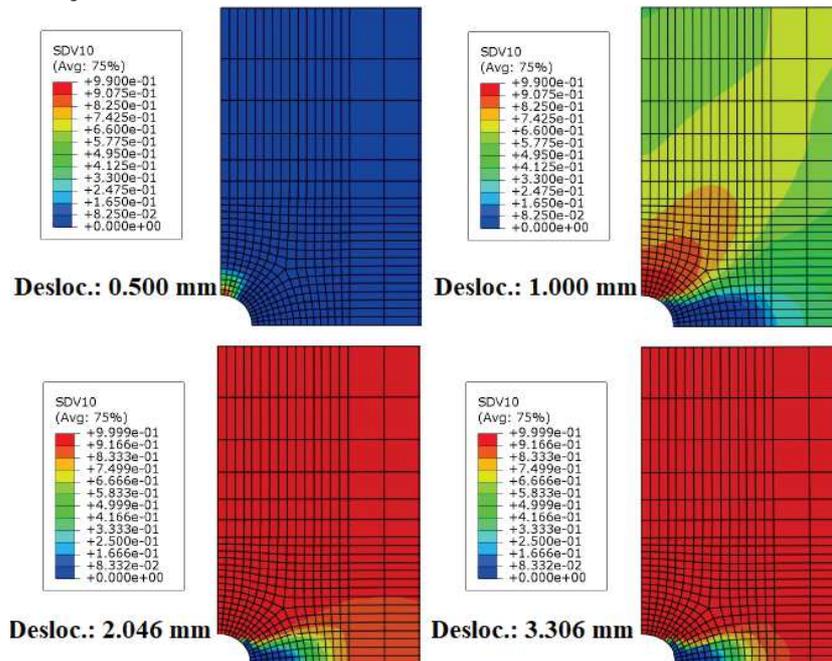
Com a aplicação do modelo de dano contínuo observou-se as propagações mostradas nas Figuras 58 e 59.

Figura 58 – Evolução do dano contínuo na lâmina de fibra 0°.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 59 – Evolução do dano contínuo na lâmina de fibra 90°.



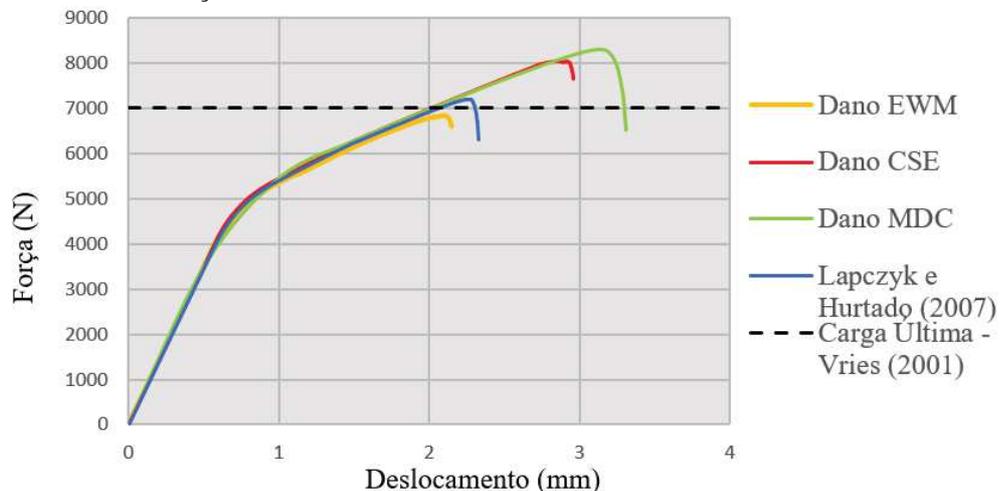
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Na literatura, só foi encontrado como dado experimental a tensão última de 446 MPa e algumas imagens da ruptura da peça no trabalho de Vries (2001), as quais mostram que a falha se propaga na direção vertical do furo.

Observando da Figura 54 à Figura 59, nota-se a mesma evolução do dano, verificando o comportamento obtido pelos modelos propostos neste trabalho.

Como não foi encontrado a curva de desenvolvimento do ensaio, foi utilizada a curva gerada pelo modelo de Lapczyk e Hurtado (2007) na comparação das curvas gerados neste trabalho, conforme a Figura 60.

Figura 60 – Curva Força x Deslocamento.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

A partir da tensão última foi calculada a carga última  $P_u = \sigma_u / (W \cdot T) = 7.01796$  kN. E por meio desta foram calculados os erros das cargas obtidas neste trabalhos, conforme a Tabela 13.

Tabela 13 – Comparativo das cargas últimas.

Modelo	Carga (kN)	Erro (%)
Experimental	7.01796	-
Lapczyk e Hurtado (2007)	7.205825	2.68
EWM	6.85311	-2.35
CSE	8.041902	14.59
MDC	8.296255	18.21

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Vries (2001) aponta fortemente nas suas considerações para falha por delaminação, assunto o qual não foi abordado neste trabalho. Deste modo, pode-se entender que os resultados nesse exemplo apresentaram um erro considerável devido à não captação dos efeitos de delaminação na UMAT.

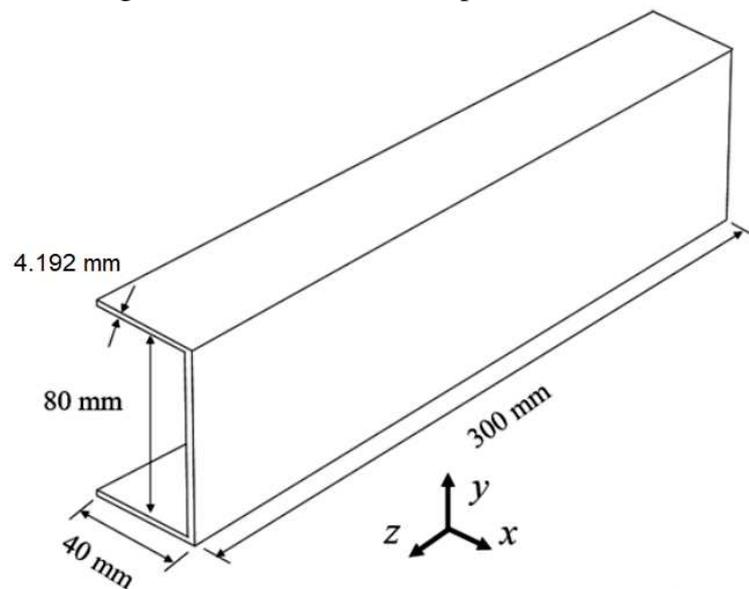
Em relação ao efeito das modificações no processo de busca do ângulo de fratura, houve um redução considerável do número de iterações, sendo 24 a quantidade máxima de iterações. Entretanto, esse modelo não apresentou redução de tempo de processamento. Isso ocorreu provavelmente pela constituição mais robusta do modelo, o que pode ter tornado a análise mais complexa, apontando mais uma vez para a ideia de que a robustez do modelo ou até a complexibilidade da UMAT se sobressaíam aos efeitos de custo do critério de falha.

#### 4.5 Coluna de perfil C laminado

Esse exemplo consiste em uma coluna laminada em perfil C comprimida axialmente, cuja laminação é  $[[0/(\pm 45)/90]_S]_4$ , com um total de 32 lâminas, as quais foram definidas pela função *Composite Layup* análogo ao exemplo 4.3. As dimensões estão ilustradas na Figura 61.

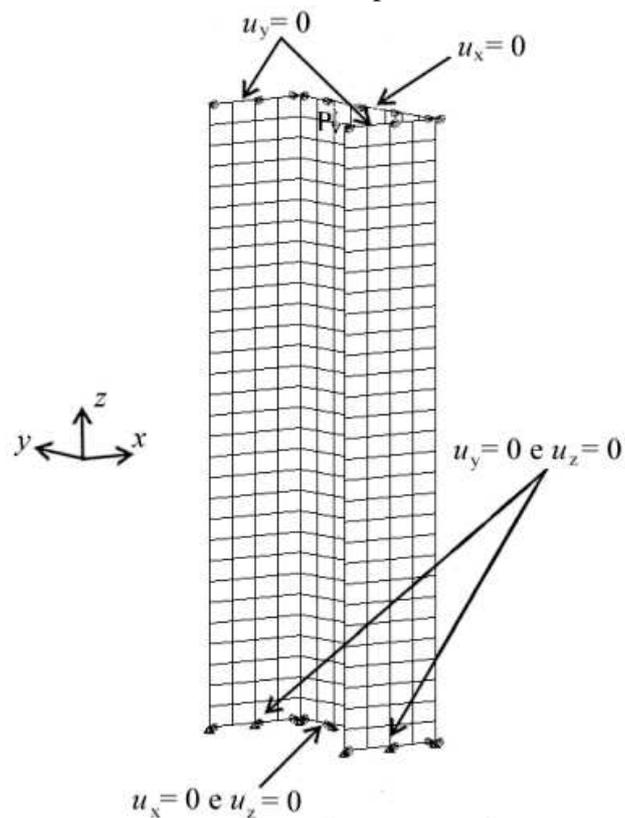
Esse modelo é constituído do material T300/1034-C, o mesmo utilizado no modelo do exemplo 4.3, cujas propriedades estão listadas na Tabela 6. Quanto as condições de contorno estão explicadas na Figura 62

Figura 61 – Propriedades geométricas da coluna em perfil C.



Fonte: Adaptada de Aguiar e Parente (2018).

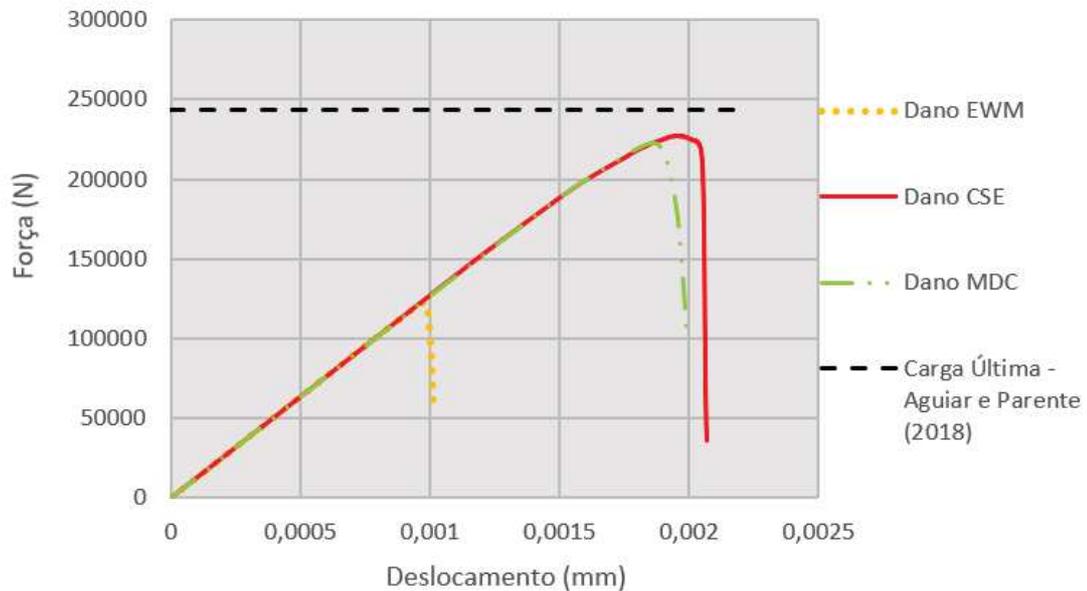
Figura 62 – Condições de contorno da coluna em perfil C.



Fonte: Adaptada de Aguiar e Parente (2018).

A partir desse modelo obtve-se os comportamentos descritos pelas curvas da Figura 63, na qual também esta respresentada a carga última de 243.70 kN obtida computacionalmente por Aguiar e Parente (2018), utilizando o modelo de dano do ABAQUS®.

Figura 63 – Carga x Deslocamento Coluna em perfil C.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como não foram encontrados dados experimentais na literatura, comparou-se os resultados deste trabalho com o dado da carga de Aguiar e Parente (2018). Essa comparação está representada por meio do cálculo das diferenças listados na Tabela 14.

Tabela 14 – Comparativo das cargas últimas modelo coluna.

Modelo	Carga (kN)	Diferença (%)
Aguiar e Parente (2018)	243.70	-
EWM	119.25	-51.07
CSE	223.60	8.24
MDC	222.69	8.62

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Este exemplo também não apresentou redução no tempo de processamento com o uso das modificações no processo de busca do ângulo de fratura. De forma análoga ao Exemplo 4.4, a complexibilidade do exemplo se sobrepõe aos efeitos das modificações. Este é um exemplo que tem quase o dobro de lâminas em relação aos demais exemplos, além disso a constituição do modelo é diferente, com integração de diferentes partes por contas dos diferentes materiais envolvidos. Por conta disso, foi necessário uso de diferentes tipos de elementos. Todos esses fatores influem no custo computacional.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscou-se a implementação de modelos tridimensionais de iniciação e propagação de falhas em compósitos que possibilitasse o estudo tridimensional de estruturas laminadas reforçadas por fibras, considerando o efeito da falha do material, o que é muito influente nesse tipo de estrutura.

Essa UMAT foi desenvolvida utilizando o critério de falha de Puck, ao qual foram aplicadas modificações para reduzir o custo computacional. Além disso, foram associados diferentes modelos de dano ao critério de falha.

Quanto às modificações aplicadas ao critério de Puck, obteve-se no exemplo 4.3 que em conjunto elas reduziram em média 23,56 % do tempo de processamento. De forma isolada: a ideia do plano de fratura constante reduziu em média 10.12%, a do limite superior reduziu em média 6.81%, a da redução do espaço de busca reduziu em média 23.38% e a da mudança do método de busca reduziu em média 23.56%.

Nos demais exemplos o tempo de processamento manteve-se basicamente o mesmo quando comparado com e sem a aplicação das modificações. Entretanto tal fato não anula o efeito observado no exemplo 4.3, pois analisando a natureza dos exemplos pode-se concluir que isso aconteceu devido à complexidade dos exemplos e à construção dos modelos, entre outros fatores.

O exemplo 4.4 é parecido com exemplo 4.3 mas a sua constituição é mais complexa e essa complexibilidade pode ter se sobreposto aos efeitos das modificações. De tal modo que mesmo no exemplo do cubo, que é mais simples e os processamentos foram mais rápidos, os efeitos das modificações também foram imperceptíveis. Ou seja, o efeito da constituição do modelo sobrepõe ao efeito das modificações.

A partir disso, pode-se concluir que o critério de Puck pode ter seu custo computacional diminuído e que as modificações propostas neste trabalho são eficazes, onde a modificação do método de busca e a redução do espaço de busca são as mais eficientes. Entretanto, evidencia que o tipo de exemplo e o modo de construção do modelo são predominantes ao critério de falha em relação ao custo computacional.

Tal observação, inclusive, remete à questão de que alguns exemplos possam apresentar o mesmo tempo de processamento utilizando tanto o critério de Puck como outros critérios que são considerados mais baratos computacionalmente.

No que diz respeito aos modelos de dano, tem-se que o modelo EWM apresenta

uma degradação muito brusca, chegando a ruptura em cargas muito inferiores que as cargas de referência. Isso implicaria em uma análise subestimada de uma estrutura, levando, por exemplo, a projetos mais caros.

Já o modelo CSE apresenta uma degradação mais progressiva, entretanto no exemplo do cubo apresentou um softening muito brando de modo que no caso de carregamento cíclico não atingiu a falha na compressão. Contudo nos outros exemplos apresentou um bom desempenho, com resultados semelhantes aos do modelo de dano contínuo.

Vale ressaltar que os resultados obtidos aplicando o dano CSE consideraram a lei de evolução do dano com a alteração apresentada no tópico 3.2. Ou seja, calculando o valor do dano igual ao quanto o fator de exposição ( $f_E$ ) excede de 1. Isso substituiu o somatório de uma taxa arbitrária, diminuindo a necessidade de parametrização para cada exemplo a ser estudado.

Visto que os resultados utilizando o dano CSE tendem a se aproximar dos resultados usando o dano MDC, pode surgir a dúvida de por quê utilizá-lo. Considerando apenas os resultados deste trabalho, o dano CSE é mais eficiente que um modelo EWM, *ply-discount*, e mais simples que um modelo de dano contínuo. Portanto, se destaca como uma alternativa para análises de projetos que ainda utilizam modelos *ply-discount* por conta da difícil implementação de modelos como os de dano contínuo.

O modelo MDC, por sua vez, apresentou um bom desempenho em quase todos os exemplos. Demonstrou um erro considerável apenas no exemplo do compósito de metal e fibra, mas pela não consideração da delaminação pela UMAT. Quanto a confiabilidade dele, é um modelo bastante citado atualmente na literatura e apresenta um robusto embasamento teórico na mecânica do contínuo.

De um modo geral, tem-se que a UMAT é eficaz, apresenta um desempenho admissível, mas também algumas questões a serem revisadas e incrementadas, as quais estão sugeridas no tópico para trabalhos futuros.

## 5.1 Sugestão para trabalho futuros

A partir dos resultados, das observações e do conhecimento adquirido neste trabalho, pode-se sugerir os seguintes pontos a serem abordados:

- Aplicar outras modificações ou combinações que possam reduzir o custo computacional das análises;
- Realizar um estudo comparativo entre o critério de falha de Puck e outros critérios tanto

em relação aos comportamentos como ao custo computacional;

- Testar o modelo de dano CSE, validando com uma maior diversidade e quantidade de exemplos e comparando com outros modelo de dano consolidados na literatura.
- Revisar a implementação referente às situações de compressão e aplicar ao estudo de estabilidade considerando os efeitos da não linearidade física;
- Aprofundar o estudo sobre a dependência da malha e aplicação da teoria de *crack band*, aprimorando a implementação desta.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, S. C. M. de; PARENTE, E. Local buckling and post-critical behavior of thin-walled composite channel section columns. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Scielo, v. 15, n. 7, 2018. ISSN 1679-7825.
- BARBERO, E. J. Introduction to composite materials design. **Boca Raton: CRC Press**, SAGEBoca Raton: CRC Press, v. 2nd, 2011.
- BARBERO, E. J. **Finite element analysis of composite materials using Abaqus<sup>TM</sup>**. [S.l.]: CRC Press, 2013.
- BAZANT, Z. P. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. Boca Raton: CRC Press, 1998. ISBN 978-0849382840.
- CATALANOTTI, G.; ARTEIRO, A.; HAYATI, M.; CAMANHO, P. P. Determination of the mode i crack resistance curve of polymer composites using the size-effect law. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 118, p. 49–65, 2014.
- CATALANOTTI, G.; XAVIER, J. Measurement of the mode ii intralaminar fracture toughness and r-curve of polymer composites using a modified iosipescu specimen and the size effect law. **Engineering Fracture Mechanics**, n. 138, p. 202–214, 2015.
- CATALANOTTI, G.; XAVIER, J.; CAMANHO, P. P. Measurement of the compressive crack resistance curve of composites using the size effect law. **Composites Part A Applied Science and Manufacturing**, Research Gate, n. 56, p. 300–307, 2014.
- CHANG, F. K.; SCOTT, R. A.; SPRINGER, G. S. Strength of bolted joints in laminated composites. **Technical Report AFWAL-TR-84-4029**, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 1984.
- CHEN, J. F.; MOROZOV, E. V.; SHANKAR, K. A combined elastoplastic damage model for progressive failure analysis of composite materials and structures. **Composite Structures**, Composite Structures, v. 94, p. 3478–3489, 2012.
- COLEMAN, B. D.; NOLL, W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Springer, n. 13, p. 167–178, 1963.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 4th.
- Dassault Systèmes. **Theory Manual (Version 6.11)**. [S.l.], 2011.
- DEUSCHLE, H. M. **3D Failure Analysis of UD Fibre Reinforced Composites: Puck's Theory within FEA**. Tese (Doctoral dissertation) — Universitat Stuttgart, set. 2010.
- DÁVILA, C. G.; CAMANHO, P. P. Failure criteria for frp laminates in plane stress. NTRS - NASA Technical Reports Server, NASA/TM-2003-212663, 2003.
- DÁVILA, C. G.; JAUNKY, N.; GOSWAMI, S. Failure criteria for frp laminates in plane stress. **Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Anais...**, n. 44, 2003.

FALZON, B. G.; APRUZZESE, P. Numerical analysis of intralaminar failure mechanisms in composite structures. part i: Fe implementation. **Composite Structures**, Research Gate, v. 93, p. 1039–1046, 2011.

FRIZZELL, R. M.; MCCARTHY, C. T.; MCCARTHY, M. A. Simulating damage and delamination in fibre metal laminate joints using a three-dimensional damage model with cohesive elements and damage regularisation. **Composites Science and Technology**, Elsevier, 2011.

GERMAN, R. M. **Particulate Composites Fundamentals and Applications**. [S.l.]: Springer, 2016. ISBN 978-3-319-29915-0.

HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**, v. 47, p. 329–334, 1980.

HASHIN, Z. Fatigue failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**, v. 48, p. 846–852, 1981.

HASHIN z.; ROTEM, A. A fatigue criterion for fiber-reinforced materials. **journal of Composites Materials**, v. 7, p. 448–464, 1973.

HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. Predicting failure in fibre composites: Lessons learned from the world-wide failure exercise. **Published with the permission of the Defence Evaluation and Research Agency on behalf of the Controller of HMSO**, British Crown Copyright, 2000.

HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. **Failure Criteria In Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise**. [S. l.]: Elsevier Science Ltd, 2004.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2000. ISBN 978-0-471-82319-3.

JONES, R. M. Mechanics of composite materials. **Taylor & Francis**, SAGE Taylor & Francis, v. 2nd, 1999.

KADDOUR, A.; HINTON, M. Benchmarking of triaxial failure criteria for composite laminates: Comparison between models of ‘Part (A)’ of ‘WWFE-II’. **Journal of Composite Materials**, SAGE Publications, v. 46, n. 19-20, p. 2595–2634, jun. 2012.

KADDOUR, A. S.; HINTON, M. J. Evaluation of theories for predicting failure in polymer composite laminates under 3-d states of stress: Part a of the second world-wide failure exercise (wwfe-ii). **Special issue of Journal of Composite Materials**, v. 46, n. 19-20, set. 2012.

KADDOUR, A. S.; HINTON, M. J. Evaluation of theories for predicting failure in polymer composite laminates under 3-d states of stress: Part b of the second world-wide failure exercise (wwfe-ii). **Special issue of Journal of Composite Materials**, v. 47, n. 6-7, mar. 2013.

KADDOUR, A. S.; HINTON, M. J.; LI, S.; SMITH, P. A. The world-wide failure exercises: How can composites design and manufacture communities build their strength. **16th European Conference on Composite Materials**, p. 22–26, jun. 2014.

KNOPS, M. **Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates - The Theory of Alfred Puck**. [S.l.]: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-75764-1.

KODAGALI, K. **Progressive Failure Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria**. Tese (Doctoral dissertation) — University of South Carolina, 2017.

KURAISHI, A.; TSAI, W. S.; LIU, K. K. S. A progressive quadratic failure criterion, part b. **Composites Science and Technology**, v. 62, p. 142–149, 2002.

LAPCZYK, I.; HURTADO, J. A. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 38, n. 11, p. 2333–2341, 2007. ISSN 1359-835X.

LEE, C.-S.; KIM, J.-H.; KIM, S. kee; RYU, D.-M.; LEE, J.-M. Initial and progressive failure analyses for composite laminates using puck failure criterion and damage-coupled finite element method. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 121, p. 406–419, mar. 2015.

LINDE, P.; PLEITNER, J.; BOER, H. de; CARMONE, C. Modelling and simulation of fibre metal laminates. **ABAQUS Users' Conference**, 2004.

MAIMÍ, P.; CAMANHO, P. P.; MAYUGO, J. A.; DÁVILA, C. G. A continuum damage model for composite laminates: part i – constitutive model. **Mechanics of Materials**, Mechanics of Materials, v. 39, p. 897–908, 2007.

MAIMÍ, P.; CAMANHO, P. P.; MAYUGO, J. A.; DÁVILA, C. G. A continuum damage model for composite laminates: part ii – computacional implementation and validation. **Mechanics of Materials**, Mechanics of Materials, v. 39, p. 909–919, 2007.

MARTINS, A. T. D. **Projeto e Fabricação de Tubos Compósitos em Fibras de Carbono/Epóxi para Próteses Transtibiais por Moldagem com Bladder**. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Mecânica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015.

MATIAS, B. d. S. **Modelos Constitutivos para Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado**. 2018. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

MATZENMILLER, A.; LUBLINER, J.; TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 20, n. 2, p. 125–152, 1995.

MOURA, M. de; CAMPILHO, R.; AMARO, A.; REIS, P. Interlaminar and intralaminar fracture characterization of composites under mode i loading. **Composites Structures**, Elsevier, n. 92, p. 144–149, 2010.

NALI, P.; CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. **Composites: Part B: Engineering**, v. 43, p. 280–289, 2012.

PINHO, S.; ROBINSON, P.; LANNUCCI, L. Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites. **Composites Science and Technology**, Research Gate, n. 66, p. 2069–2079, 2006.

PINHO, S. T.; DÁVILA, C. G.; CAMANHO, P. P.; IANNUCCI, L.; ROBINSON, P. Failure models and criteria for frp under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. NTRS - NASA Technical Reports Server, NASA/TM-2005-213530, 2005.

- PINHO, S. T.; DÁVILA, C. G.; CAMANHO, P. P.; IANNUCCI, L.; ROBINSON, P. Failure models and criteria for frp under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. **Tm-2005-213530; 2005:68**, 2005.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in C**. [S. l.]: Cambridge University Press, 1992. v. 3rd.
- PUCK, A.; MANNIGEL, M. Physically based non-linear stress–strain relations for the inter-fibre fracture analysis of frp laminates. **Composite Science and Technology**, Elsevier BV, v. 67, p. 1955–1964, nov. 2007.
- PUCK, A.; SCHURMANN, H. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. **Composites Science and Technology**, ScienceDirect, v. 58, p. 1045–1067, jul. 1998.
- PUCK, A.; SCHURMANN, H. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. **Composite Science and Technology**, Elsevier BV, p. 1633–1662, jan. 2002.
- RANKIN, C. C.; REGELBRUGGE, M.; HURLBUT, B. Advanced decohesion elements for the simulation of composite delamination. In Proceedings of the 2010 SIMULIA Customer Conference, p. 1–12, 2010.
- REDDY, J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. **CRC Press**, SAGE CRC Press, New York, v. 2nd, 2004.
- REDDY, Y. S.; MOORTHY, C. M. D.; REDDY, J. N. Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 30, n. 5, p. 629–649, 1995.
- REINOSO, J.; CATALANOTTI, G.; BLÁZQUEZ, A.; PAREIAS; CAMANHO, P. P.; PARÍS, F. A consistent anisotropic damage model for laminated fiber-reinforced composites using the 3d-version of the puck failure criterion. **International Journal of Solids and Structures**, Science Direct, p. 37–53, 2017.
- ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando análise não linear geométrica e falha progressiva**. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- ROSEN, B. W.; DOW, N. F. Mechanics of failure of fibrous composites. In: **Fracture of Nonmetals and Composites**. [S.l.]: Elsevier, 1972. p. 611–674.
- SCHIRMAIER, F. J.; WEILAND, J.; KÄRGER, L.; HENNING, F. A new efficient and reliable algorithm to determine the fracture angle for puck's 3d matrix failure criterion for ud composites. **Composites Science and Technology**, ScienceDirect, v. 100, p. 19–25, ago. 2014.
- SIMO, J. C.; JU, J.-W. W. Strain- and stress-based continuum damage models. i. formulation. **International Journal of Solids and Structures**, Research Gate, n. 23, p. 821–840, 1987.
- THOMSON, D. M.; CUI, H.; ERICE, B.; HOFFMANN, J.; WIEGAND, J.; PETRINIC, N. Experimental and numerical study of strain-rate effects on the iff fracture angle using a new efficient implementation of puck's criterion. **Composite Structures**, ScienceDirect, v. 181, p. 325–335, dez. 2017.

- TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, SAGE Journal, v. 5, n. 1, jan. 1971.
- VOGLER, M.; ROLFES, R.; CAMANHO, P. P. Modeling the inelastic deformation and fracture of polymer composites – part i: Plasticity model. **Mechanics of Materials**, Research Gate, n. 59, p. 50–64, 2013.
- VRIES, T. J. de. **Blunt and Sharp Notch Behaviour of Glare Laminates**. Tese (Doctoral dissertation) — Delft University Press, abr. 2001.
- WAGNER, W.; BALZANI, C. Prediction of the postbuckling response of composite airframe panels including ply failure. **Engineering Fracture Mechanics**, Research Gate, v. 77, n. 18, p. 125–152, 2010.
- WIEGAND, J.; PETRINIC, N.; ELLIOTT, B. An algorithm for determination of the fracture angle for the three-dimensional puck matrix failure criterion for ud composites. **Composites Science and Technology**, ScienceDirect, v. 68, p. 2511–2517, set. 2008.