



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA (CT)**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**RENAN MELO BARROS**

**ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE PLACAS COM GRADUAÇÃO FUNCIONAL**  
**UTILIZANDO UMA TEORIA DE ALTA ORDEM**

**FORTALEZA**

**2021**

RENAN MELO BARROS

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE PLACAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL  
UTILIZANDO UMA TEORIA DE ALTA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia (CT) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior

FORTALEZA  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- B282a Barros, Renan Melo.  
Análise Isométrica de Placas com Gradação Funcional utilizando uma Teoria de Alta Ordem /  
Renan Melo Barros. – 2021.  
94 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2021.  
Orientação: Profa. Dra. Evandro Parente Júnior.
1. Materiais com Gradação Funcional. 2. Modelos Micromecânicos. 3. Teoria de Alta Ordem. 4. Análise  
Isométrica. I. Título.

CDD 620

---

RENAN MELO BARROS

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE PLACAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL  
UTILIZANDO UMA TEORIA DE ALTA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia (CT) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 08/04/2021

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. João Batista Marques de Sousa Júnior  
Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Prof. Marcelo Silva Medeiros Júnior  
Universidade Federal do Ceará - UFC

Aos meus pais, Eduilton e Claudia, por tudo que sempre fizeram por mim.

## AGRADECIMENTOS

Não há no mundo exagero mais belo que a gratidão.

Aos meus pais, Eduilton e Cláudia, por sempre terem sido exemplos de ética, dedicação e perseverança. Muito obrigado por todos os acolhimentos, brigas, explicações e, principalmente, por todo o apoio. Toda a minha educação escolar e moral é graças ao esforço de vocês para prover o melhor para a nossa família.

Aos meus irmãos, Eduilton Filho e Melina, por todo o convívio diário e por todos os momentos de aprendizado que tivemos juntos ao longo dos anos. O meu carinho por vocês é enorme.

Aos meus avós, Edmilson, Rita e Lucimar, por sempre terem sido tão amáveis e atenciosos comigo. Se eu consegui aprender tanto com meus pais, é porque eles também tiveram a chance de se espelhar em pessoas tão boas.

Ao restante da minha família, que participou ativamente da minha vida durante o meu crescimento, fazendo parte de inúmeras boas memórias. Em especial, aos meus tios Edmilson Júnior, Edmilton, Érita, Glayson e Cleiton, à minha prima, Letícia, e à Dê.

À Lia Gomes, por estar trilhando essa jornada juntamente comigo quase que diariamente, dividindo todas as aflições e multiplicando todas as felicidades. Obrigado por todos os momentos que tivemos, também cresci muito me inspirando em você.

Ao melhor grupo de trabalhos possível, formado pelos grandes amigos Matheus Musy, Matheus Sabóia e Alexandre Feitosa. Obrigado por todo o esforço em cada detalhe, com certeza colecionaremos vários desses momentos para o resto da nossas vidas.

As outras duradouras amizades que fiz ao longo da graduação, Allyson Paullyneli, Carlos Mateus, Daniel Pereira, Felipe Moreira, Felipe Silveira, Gabriel Donnantuoni, Glauber Jansen, João Fábio, Tiago Plutarco e todos os outros com quem compartilhei bons momentos na Universidade Federal do Ceará.

Aos meus amigos meio-irmãos, Gabriel Gonçalves, Lucas Firmeza e André Ulisses, com quem dividi grande parte do meu tempo livre desde o fim do Ensino Médio. Obrigado por tudo.

Ao Programa de Educação Tutorial, por ter sido a minha maior e melhor experiência durante a Graduação. Serei eternamente grato por ter participado e por ter conhecido tanta gente sensacional. Agradeço, especialmente, ao Italo Matheus e a Bruna Alves por todo o companheirismo, mentoria e suporte durante esse período, são queridos amigos que só não

apareceram antes porque eu tinha que os colocar aqui.

Ao professor Evandro Parente Junior, por ter embarcado nesse desafiador tema juntamente comigo, auxiliando, ensinando e buscando o melhor trabalho possível. Minha admiração cresce a cada momento que partilhamos.

Aos colegas do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização da UFC, especialmente ao Leonardo Ribeiro, por ter me ajudado em diversos temas e oportunidades desde que ingressei no âmbito da pesquisa acadêmica, e ao Elias Barroso, por ter sido essencial na realização da etapa mais crítica do trabalho.

À Universidade Federal do Ceará, ao Corpo Docente do curso de Engenharia Civil e a todos os outros funcionários que garantem o bom funcionamento da UFC.

”Não tenhamos pressa, mas não percam  
tempo.”

(José Saramago)



## RESUMO

Os Materiais com Gradação Funcional são materiais compósitos com uma variação gradual e contínua da sua composição ao longo de determinada direção. Devido a essa característica apresentar uma vantagem mecânica em relação a outros materiais compósitos, os Materiais com Gradação Funcional já são amplamente utilizados em diversas outras indústrias, desde a balística até a aeroespacial. Dessa forma, a análise estrutural considerando os Materiais com Gradação Funcional é um tema de alta relevância atualmente no âmbito da pesquisa acadêmica no mundo. O presente trabalho propõe o processo de análise estática de estruturas unidimensionais e bidimensionais por meio da utilização de uma formulação isogeométrica baseada em NURBS. As equações governantes dos problemas serão obtidas a partir do emprego da Teoria de Terceira Ordem de Reddy, que representa os efeitos do cisalhamento transversal de forma exata ao longo da seção transversal, desconsiderando a utilização de quaisquer fatores de correção, diferentemente da Teoria de Primeira Ordem. A sua aplicação discutida em detalhe neste trabalho, já que não é um processo trivial. Além disso, outro ponto importante a ser considerado é a modelagem adequada do Material com Gradação Funcional. Uma vez que é um material compósito com gradação contínua, a definição dos componentes e a equação da variação da fração de seus respectivos volumes são necessárias. Entretanto, uma das variáveis mais relevantes a ser considerada é a forma de variação das suas propriedades efetivas ao longo da gradação, definida por modelos micromecânicos. Para auxiliar nessa discussão, serão utilizados os modelos de Voigt, Mori-Tanaka e Auto-consistente. A formulação utilizada foi validada pela literatura, fornecendo resultados consistentes para as múltiplas situações dos exemplos, embasando as discussões posteriores. Nos resultados, são analisados alguns pontos importantes da formulação e implementação da Teoria de Terceira Ordem, com discussões acerca do fenômeno do travamento, da diferença dos deslocamentos e das tensões ao longo da seção transversal em relação à Teoria de Primeira Ordem. além de apresentar uma importante discussão acerca da escolha correta do modelo micromecânico.

**Palavras-chave:** Materiais com Gradação Funcional. Modelos Micromecânicos. Teoria de Alta Ordem. Análise Isogeométrica

## ABSTRACT

Functionally Graded Materials are composite materials with a gradual and continuously varying composition through a desired direction. Due to this characteristic, they present a mechanical advantage when compared to other composite materials, culminating in its utilization across several industries, such as ballistics and aerospace. Thereby, the structural analysis considering the Functionally Graded Materials is a high relevance topic within the academic research ambit throughout the world nowadays. This document proposes the static analysis process of one-dimensional and two-dimensional structures by using a NURBS based isogeometric formulation. The governing equations of the problems are dictated by the employment of the Third-Order Reddy Theory, which can exactly present the transverse shear effects along the thickness, disregarding the utilization of any correction factors, unlike the First-Order Shear Deformation Theory. The application of this theory is thoroughly discussed in this document, once it is not a trivial procedure. Besides that, it is valid to highlight the importance of an adequate modelling of the Functionally Graded Material. As it is a composite material with a varying composition, it is necessary to determine beforehand its components and the volume fraction equation along the thickness direction. However, one of the most important variables to be considered is the variation profile of the effective properties throughout the gradation, that is determined by a micromechanical model. To support this discussion, the Voigt, Mori-Tanaka and Self-consistent models will be used. The formulation used was previously validated by comparison with the literature, returning consistent results to the many situations brought by the examples, serving as basement to the necessary discussions. In the results, some highlighted topics of the Third-Order Reddy Theory are discussed, such as the shear locking, the differences between the displacements given by it and by the First-Order Theory and the shear stress variation profile along the cross-section, besides presenting an important deliberation about the right choice of the micromechanical model.

**Keywords:** Functionally Graded Materials. Micromechanical Models. Third-Order Shear Deformation Theory. Isogeometric Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Implante dentário de FGM. . . . .	20
Figura 2 – Comparação de propriedades físicas entre FGMs e isotrópicos. . . . .	20
Figura 3 – Modelos de gradação de materiais com gradação funcional. . . . .	21
Figura 4 – Placa com Gradação Funcional. . . . .	22
Figura 5 – Perfis de gradação de volume de FGM. . . . .	22
Figura 6 – Processo de análise estrutural. . . . .	26
Figura 7 – Otimização de forma. . . . .	27
Figura 8 – Funções de base quadrática. . . . .	29
Figura 9 – Refinamento $h$ em uma barra. . . . .	30
Figura 10 – Refinamento $p$ em uma barra. . . . .	30
Figura 11 – Aumento do grau das funções de base. . . . .	31
Figura 12 – Refinamento $k$ em uma barra. . . . .	31
Figura 13 – Curva NURBS para diferentes pesos. . . . .	32
Figura 14 – Comparação entre bases racionais e polinomiais. . . . .	33
Figura 15 – Semi-circunferência modelada por diferentes curvas. . . . .	34
Figura 16 – Superfície <i>Non Uniform Rational B-Splines</i> (NURBS). . . . .	35
Figura 17 – Etapas da aplicação da Extração de Bézier em uma curva NURBS. . . . .	37
Figura 18 – Deformação de uma seção transversal normal à superfície nas diferentes teorias de vigas. . . . .	40
Figura 19 – Deformação de uma seção transversal normal à superfície nas diferentes teorias de placas. . . . .	51
Figura 20 – Forças e momentos em um elemento de placa. . . . .	54
Figura 21 – Pontos de Gauss para os dois métodos de integração numérica. . . . .	61
Figura 22 – Representação da estrutura de viga. . . . .	63
Figura 23 – Perfil de distribuição de tensão ao longo da seção ( $x = 0.3L$ ) . . . . .	64
Figura 24 – Propriedades efetivas ao longo da gradação para $N = 1$ . . . . .	66
Figura 25 – Propriedades efetivas ao longo da gradação para $N = 2$ . . . . .	67
Figura 26 – Deflexões normalizadas para diferentes esbeltezes e malhas. . . . .	69
Figura 27 – Relação entre os deslocamentos de cada modelo micromecânico e Voigt - FGM I. . . . .	71

Figura 28 – Relação entre os deslocamentos de cada modelo micromecânico e Voigt - FGM II. . . . .	72
Figura 29 – Razão entre os deslocamentos da <i>TSDT</i> / <i>FSDT</i> . . . . .	73
Figura 30 – Distribuição de tensões na seção transversal para a estrutura homogênea. . .	74
Figura 31 – Distribuição de tensões na seção transversal para a estrutura com gradação funcional. . . . .	74
Figura 32 – Condições de contorno de uma placa simplesmente apoiada. . . . .	75
Figura 33 – Malha Isogeométrica 32x32. . . . .	79
Figura 34 – Relação Mori-Tanaka/Voigt entre as deflexões. . . . .	80
Figura 35 – Relação das deflexões <i>Third-order Shear Deformation Theory</i> (TSDT)/ <i>First-order Shear Deformation Theory</i> (FSDT). . . . .	81
Figura 36 – Modo de deformação da placa com gradação funcional. . . . .	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Numéros de pontos de Gauss para vigas. . . . .	49
Tabela 2 –	Numéros de pontos de Gauss para placas. . . . .	61
Tabela 3 –	Tensões máximas em $x = 0.3L$ . . . . .	63
Tabela 4 –	Propriedades físicas dos componentes dos Material com Gradação Funcional (FGM, <i>Functionally Graded Material</i> ). . . . .	65
Tabela 5 –	Fatores de normalização para as deflexões. . . . .	67
Tabela 6 –	Deflexão normalizada da viga para diferentes espessuras. . . . .	68
Tabela 7 –	Deflexões normalizadas para diferentes malhas. . . . .	68
Tabela 8 –	Deflexões normalizadas para diferentes malhas. . . . .	70
Tabela 9 –	Deslocamentos normalizados para diferentes $N$ - FGM I. . . . .	71
Tabela 10 –	Deslocamentos normalizados para diferentes $N$ - FGM II. . . . .	71
Tabela 11 –	Razão entre os deslocamentos da $TSDT/FSDT$ - FGM I. . . . .	73
Tabela 12 –	Razão entre os deslocamentos da $TSDT/FSDT$ - FGM II. . . . .	73
Tabela 13 –	Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 4x4. . . . .	76
Tabela 14 –	Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 16x16. . . . .	76
Tabela 15 –	Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 32x32. . . . .	76
Tabela 16 –	Propriedades do FGM do exemplo de validação. . . . .	77
Tabela 17 –	Deflexões normalizadas para diferentes $N$ - Voigt. . . . .	77
Tabela 18 –	Deflexões normalizadas para diferentes $N$ - Mori-Tanaka. . . . .	77
Tabela 19 –	Deflexões normalizadas para diferentes $N$ - Mori-Tanaka. . . . .	78
Tabela 20 –	Deflexões normalizadas para diferentes $N$ - Mori-Tanaka. . . . .	78
Tabela 21 –	Comparação entre as teorias para o FGM I. . . . .	79
Tabela 22 –	Comparação entre as teorias para o FGM II. . . . .	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

B-rep	<i>Boundary representation</i> (Representação de Fronteira)
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CPT	<i>Classical Plate Theory</i> (Teoria Clássica de Placas)
CSG	<i>Constructive Solid Geometry</i> (Geometria Sólida Construtiva)
EBT	<i>Euler-Bernoulli Beam Theory</i> (Teoria de vigas de Euler-Bernoulli)
FAST	<i>Finite Element Analysis Tool</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i> (Método dos Elementos Finitos)
FGM	<i>Functionally Graded Material</i> (Material com Gradação Funcional)
FSDT	<i>First-order Shear Deformation Theory</i>
IGA	<i>Isogeometric Analysis</i> (Análise Isogeométrica)
NURBS	<i>Non Uniform Rational B-Splines</i>
RBT	<i>Reddy-Bickford Beam Theory</i> (Teoria de vigas Reddy-Bickford)
RMPT	<i>Reissner-Mindlin Plate Theory</i> (Teoria de placas de Reissner-Mindlin)
RoM	<i>Rule of Mixtures</i> (Lei das Misturas)
RPT	<i>Reddy Plate Theory</i> (Teoria de placas de Reddy)
SCM	<i>Self-consistent method</i> (Método Autoconsistente)
TBT	<i>Timoshenko Beam Theory</i> (Teoria de vigas Timoshenko)
TSDT	<i>Third-order Shear Deformation Theory</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>17</b>
<b>1.1.1</b>	<i>Objetivo Geral</i>	<b>17</b>
<b>1.1.2</b>	<i>Objetivos Específicos</i>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do Texto</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Variação da fração de volume</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Variação das propriedades efetivas</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM GEOMÉTRICA</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>B-Splines</b>	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>NURBS</b>	<b>32</b>
<b>3.2.1</b>	<i>Superfície NURBS</i>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Extração de Bézier</b>	<b>36</b>
<b>3.3.1</b>	<i>Operador da Extração de Bézier</i>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>VIGAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>Teoria de Vigas de Reddy-Bickford</b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Esforços Internos</b>	<b>43</b>
<b>4.3</b>	<b>Formulação Isogeométrica</b>	<b>45</b>
<b>4.4</b>	<b>Cálculo das funções de forma e suas derivadas</b>	<b>46</b>
<b>4.5</b>	<b>Integração Numérica</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>PLACAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL</b>	<b>50</b>
<b>5.1</b>	<b>Teoria de Placas de Reddy</b>	<b>51</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulação Isogeométrica</b>	<b>56</b>
<b>5.3</b>	<b>Cálculo das funções de forma e suas derivadas</b>	<b>58</b>
<b>5.4</b>	<b>Integração Numérica</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>62</b>
<b>6.1</b>	<b>Vigas com Gradação Funcional</b>	<b>62</b>
<b>6.1.1</b>	<i>Exemplo de Validação</i>	<b>62</b>
<b>6.1.2</b>	<i>Viga simplesmente apoiada</i>	<b>64</b>
<b>6.2</b>	<b>Placas com Gradação Funcional</b>	<b>75</b>

6.2.1	<i>Validação para materiais homogêneos</i> . . . . .	75
6.2.2	<i>Validação para materiais com gradação funcional</i> . . . . .	77
6.2.3	<i>Placa simplesmente apoiada</i> . . . . .	78
7	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	83
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	85
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	88
	<b>APÊNDICE A</b> – Implementação das Matrizes C e B para vigas no MATLAB	88
	<b>APÊNDICE B</b> – Implementação das Matrizes C e B para placas no C++ .	91



## 1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos, onde múltiplos materiais distintos atuam de forma conjunta e simultânea, buscam potencializar a performance estrutural a partir do aproveitamento das características positivas de cada componente. Dois dos exemplos mais usuais são o concreto armado e o concreto reforçado por fibras, unindo a propensão do concreto a resistir à esforços de compressão e a do aço à esforços de tração, garantindo a solidarização e, portanto, a transferência de carga entre eles.

Uma das classes mais utilizadas de compósitos para aplicações de alto desempenho são as estruturas laminadas, formadas a partir do empilhamento de camadas com propriedades físicas distintas. Contudo, este tipo de disposição discreta pode causar concentração de tensões na interface de transição entre lâminas consecutivas, podendo acarretar, por exemplo, em análises pouco otimizadas e em processos de delaminação (REDDY, 2004).

Os Materiais com Gradação Funcional (FGM, *Functionally Graded Materials*) também são considerados como uma classe avançada de materiais compósitos e apresentam uma variação gradual e contínua da sua composição, baseada nas fases que o compõem. O processo de fabricação dos FGM elimina os problemas causados pela variação discreta e se baseia nas escolhas dos materiais constituintes e da função matemática que controla as suas frações de volume ao longo da espessura (KOIZUMI, 1997). As propriedades efetivas da estrutura são calculadas com base nas frações de volume e seguem um modelo micromecânico apropriado para a situação (SHEN, 2009). Portanto, devido as características intrínsecas e à grande flexibilidade de projeto, os FGM são alvos de diversas robustas pesquisas recentes no meio da engenharia estrutural.

Apesar de serem identificados em diversos locais de forma natural, como nos dentes humanos, nos bambus e nos ossos, os FGM foram produzidos em laboratório pela primeira vez em 1984, durante a concepção de um projeto espacial japonês. A finalidade principal era a de produzir uma estrutura que suportasse um enorme gradiente térmico, mantendo as controladas dimensões de projeto e a capacidade de resistir aos esforços. Desde então, a sua utilização tem se espalhado por diversas áreas de atuação, como na engenharia aeroespacial, na confecção de próteses e de coletes à prova de balas, em conversores de energia, dentre outros.

Dessa forma, ao serem utilizados para a concepção estrutural, o processo de análise pode se complicar ao ponto de tornar inviável a determinação de alguma solução analítica. Para auxiliar nesse processo, são utilizados métodos computacionais para calcular soluções

aproximadas, como o Método dos Elementos Finitos (FEM, *Finite Element Method*) ou a Análise Isogeométrica (IGA, *Isogeometric Analysis*).

Os dois métodos previamente citados discretizam a estrutura em uma malha constituída de elementos de dimensão finita. Enquanto o FEM é o método computacional mais utilizado atualmente para a resolução de problemas de engenharia, a IGA é um método recente e ainda pouco disseminado no meio comercial, mas com crescente influência no meio acadêmico. A maior diferença qualitativa entre os métodos está na hipótese de que no FEM a geometria da estrutura é descrita a partir das funções interpoladoras dos deslocamentos nos elementos, enquanto na IGA os deslocamentos nos elementos são descritos a partir das funções que modelam a geometria (HUGHES T. J. R.; BAZILEVS, 2005). Devido a isso, a IGA consegue representar exatamente as geometrias dos modelos estruturais propostos, enquanto o FEM as representa de forma aproximada.

A IGA foi proposta inicialmente na década passada, sendo a primeira aplicação em problemas estruturais lineares. Diversos outros modelos de aplicações foram desenvolvidos ao longo do tempo, como a representação de elementos de vigas, de placas, de cascas, etc., tornando o assunto em um dos tópicos mais relevantes nesse âmbito de pesquisa ultimamente.

Toda estrutura pode ser modelada como um sólido, o que nem sempre é a melhor forma de se resolver um problema. Isso ocorre porque algumas estruturas, devido à sua geometria ou à carga solicitante, só apresentam esforços e deformações em algumas direções, tornando alguns dos graus de liberdade inerentes aos sólidos irrelevantes e, portanto, levando a uma análise mais complexa desnecessariamente. Para solucionar esse problema e facilitar tanto a modelagem quanto a solução, foram concebidas teorias matemáticas para determinados tipos de estrutura, reduzindo um problema 3D para menores dimensões a partir da adoção de hipóteses mecânicas específicas (WANG *et al.*, 2000).

As placas são consideradas estruturas 2D, sendo a Teoria de Kirchhoff-Love a mais antiga a ser aplicada para a simplificação a partir de uma modelagem de sólido. Essa teoria, por meio das suas hipóteses, considera apenas os efeitos dos esforços de flexão, desprezando completamente o cisalhamento transversal. Ela é indicada exclusivamente para implementação em placas finas, já que o efeito do cisalhamento é muito menor que o de flexão. Ao aumentar a espessura da placa, a Teoria de Kirchhoff-Love retorna erros maiores, necessitando, para essa situação, a adoção de uma outra teoria com diferentes hipóteses. A Teoria de Reissner-Mindlin considera tanto os efeitos de flexão quanto os de cisalhamento, sendo este último apenas de forma

aproximada. As deformações ao longo da espessura devido ao cisalhamento são constantes, implicando, assim, na denominação de Teoria de Placas de Primeira Ordem.

Para a representação correta de acordo com a Teoria da Elasticidade, que seria um efeito de deformação parabólico ao longo da espessura, foram concebidas as Teorias de Placa de Alta Ordem. A mudança nas hipóteses resulta em um campo de deformações e de deslocamentos mais consistentes. Entretanto, por apresentar uma implementação bem mais complexa do que as duas citadas anteriormente, já consagradas no âmbito da análise estrutural, é preciso estudar o grau de influência na qualidade e na velocidade de análise para indicar o seu real benefício.

Dessa forma, no presente trabalho, será desenvolvida uma formulação isogeométrica para a análise estática de vigas e placas com gradação funcional, a partir da utilização de uma Teoria de Alta Ordem para a aproximação dos campos de deslocamentos. Com base nos resultados obtidos, haverá também uma discussão acerca da comparação entre a teoria utilizada e a Teoria de Primeira Ordem.

## **1.1 Objetivos**

### ***1.1.1 Objetivo Geral***

O objetivo geral deste trabalho é formular e implementar uma Teoria de Cisalhamento Transversal de Terceira Ordem para analisar estruturas de vigas e de placas.

### ***1.1.2 Objetivos Específicos***

- (a) Apresentar a formulação das equações governantes dos problemas de vigas e de placas com a utilização da Teoria de Alta Ordem;
- (b) Realizar a análise de estruturas com gradação funcional;
- (c) Discutir o efeito do travamento por cisalhamento na Teoria de Alta Ordem;
- (d) Comparar os resultados obtidos por diferentes modelos micromecânicos;
- (e) Comparar os resultados obtidos pela TSDT e a pela FSDT com base no custo computacional requerido e na precisão das respostas obtidas.

## 1.2 Organização do Texto

O presente trabalho está dividido em 7 capítulos: No Capítulo 2, os FGM são conceituados, com suas principais características explicadas e ilustradas. As formas de representação da variação da sua composição e os modelos micromecânicos utilizados no cálculo das propriedades efetivas são apresentados e discutidos.

No Capítulo 3, é apresentado o processo de Modelagem Geométrica computacional, imprescindível na representação gráfica das estruturas de estudo. Além disso, são discutidas, com mais afinco, as informações sobre as B-Splines e as NURBS, devido a sua utilização posterior no trabalho.

No Capítulo 4, são apresentadas algumas das Teorias de Vigas relevantes na literatura atual. A teoria de terceira ordem de Reddy recebe um maior detalhamento, dada a sua utilização no processo de análise. Esse capítulo terá a finalidade de desenvolver a teoria para estruturas unidimensionais, facilitando o desenvolvimento futuro para a teoria de placas.

No Capítulo 5, são apresentadas algumas das Teorias de Placas relevantes na literatura atual. A Teoria de Terceira Ordem de Reddy recebe um maior detalhamento, dada a sua utilização no processo de análise. Também são discutidos o processo de integração numérica na superfície e a aplicação da formulação isogeométrica para essas equações governantes.

No Capítulo 6, serão apresentados os exemplos numéricos para vigas e placas tanto isotrópicas quanto com gradação funcional. Será feita a validação dos modelos a partir da comparação com resultados obtidos na literatura, e então serão discutidos os efeitos dos componentes do FGM, da variação dos modelos micromecânicos e das implicações da teoria utilizada.

No Capítulo 7, são listadas as conclusões dos objetivos determinados previamente, juntamente com os comentários finais acerca do trabalho.

## 2 MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Os materiais com gradação funcional são materiais compósitos que apresentam uma variação gradual e contínua da sua composição, a partir da mudança das frações relativas de volume dos seus componentes. Como não há uma alteração brusca das propriedades mecânicas no material, os FGMs mantêm uma distribuição regularizada de tensões no seu interior, evitando quaisquer pontos de concentração ou descontinuidade. Dessa forma, a utilização desse tipo de material impede a aparição de alguns problemas existentes em compósitos laminados, como a delaminação e o aparecimento precoce de fissuras (REDDY, 2004).

Os FGMs foram fabricados pela primeira vez em 1984 por um grupo de cientistas japoneses, cujo intuito era conceber um material que servisse de barreira térmica e que fornecesse uma alta resistência mecânica para aplicação em projetos espaciais (KOIZUMI, 1997). De acordo com Jha *et al.* (2013), apesar da recente possibilidade de fabricação, os FGMs podem ser encontrados espalhados pela natureza, como na pele humana, nos ossos e nas árvores de bambu. Atualmente, as suas utilizações são múltiplas, desde a indústria bélica, na produção de coletes à prova de balas, à medicina, na produção de próteses de alto-desempenho.

Naebe e Shirvanimoghaddam (2016) discutem diversos processos de fabricação dos materiais com gradação funcional, como os métodos gasosos, os com fase líquida e os com fase sólida. Além disso, como os FGMs podem possuir múltiplos componentes, diversos tipos de materiais utilizáveis são apresentados para a concepção do compósito, promovendo uma enorme gama de combinações. Entretanto, no âmbito da construção civil, os FGMs mais comumente utilizados são constituídos de uma fase cerâmica e uma fase metálica, com o intuito de desenvolver uma elevada resistência termomecânica. Na Figura 1, um implante dentário formado por um FGM é mostrado, onde à esquerda está ilustrada a sua aparência externa e à direita está a seção transversal com sua composição gradativa.

A direção em que ocorre a gradação da composição também é um fator de suma importância, já que possui grande influência no desempenho estrutural a depender do tipo de esforço empregado na análise. Apesar de poder ocorrer no sentido longitudinal (AKGOZ; CIVALEK, 2013; MURÍN *et al.*, 2015) e de forma simétrica (estrutura sanduíche) (YE *et al.*, 2020; PANDEY; PRADYUMNA, 2018), a forma mais difundida na literatura é a gradação ao longo da seção transversal da estrutura.

Koizumi (1997) demonstra suscintamente o comportamento das propriedades físicas dos FGMs ao longo da direção de gradação, comparando com um material isotrópico, como

ilustrado na Figura 2. É possível observar que a face metálica da estrutura possui uma elevada resistência mecânica, enquanto a face cerâmica possui uma elevada resistência térmica, sendo os seus valores críticos bem maiores que os retornados pelo material isotrópico.

Figura 1 – Implante dentário de FGM.



Fonte: Watari *et al.* (2004).

Figura 2 – Comparação de propriedades físicas entre FGMs e isotrópicos.

Function/ Property	① Mechanical Strength ② Thermal Conductivity		
Structure/ Texture	Constituent Elements: Ceramics (○) Metal (●) Fiber (◇+) Micropore (○)		
Materials	Example	FGM	non-FGM

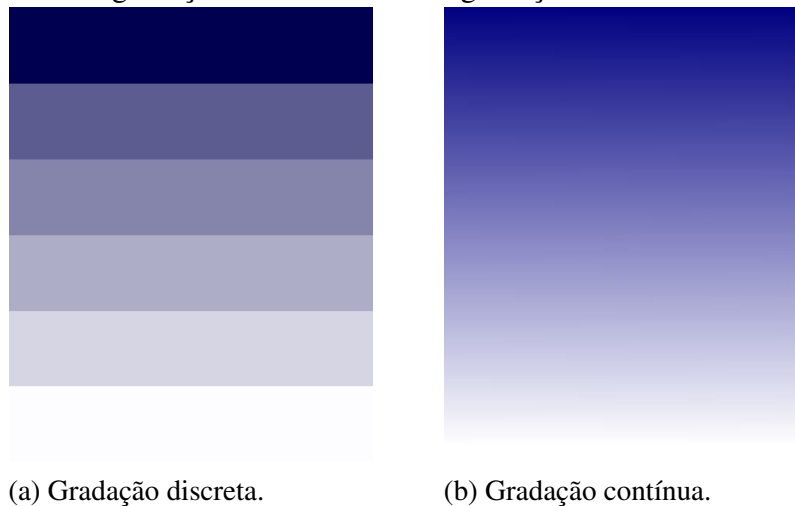
Fonte: Koizumi (1997).

Dessa forma, é possível encontrar na literatura diversos outros estudos que ratificam esse conceito. Udupa *et al.* (2014), por meio de uma visão geral acerca dos materiais com gradação funcional, relatam que os FGMs conseguem unir com excelência propriedades dos seus componentes, como a alta resistência mecânica e a baixa condutividade térmica. Choi e Cho (2008) realizaram processos de análise com cascas cilíndricas e concluíram que a utilização de FGM reduziu significativamente o acréscimo de esforços causados por um gradiente térmico. Zhao *et al.* (2008) realizaram análises dinâmicas de placas com gradação funcional com as propriedades dos constituintes variando de acordo com a temperatura, tornando a performance estrutural dependente das grandezas termomecânicas simultaneamente.

## 2.1 Variação da fração de volume

Os materiais com gradação funcional têm o seu comportamento regido pela variação da fração de volume dos seus constituintes, obedecendo à uma lei matemática. Os FGMs podem apresentar uma gradação discreta das suas propriedades, o que acarretaria em interfaces de transição entre os constituintes e, portanto, anularia algumas das vantagens previamente listadas desse tipo de compósito. A gradação discreta é mais utilizada no processo de modelagem, para facilitar a simulação do FGM durante o processo de análise, com um maior número de lâminas melhorando a precisão do resultado. No que tange à utilização e fabricação, geralmente o modelo de gradação adotado é o contínuo. A simulação do FGM a partir desse tipo de abordagem requer um procedimento mais refinado, mas retorna resultados mais precisos e possui maior velocidade de convergência. A diferença entre os dois modelos pode ser observada na Figura 3.

Figura 3 – Modelos de gradação de materiais com gradação funcional.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A gradação, no presente trabalho, ocorrerá de forma contínua e ao longo da espessura da placa, como ilustrado na Figura 4.

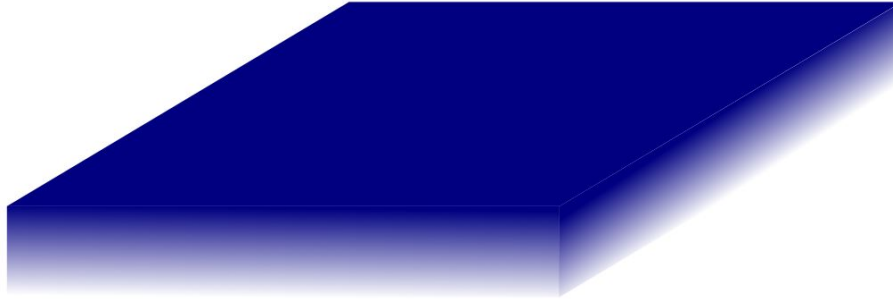
A gradação contínua pode seguir o comportamento ditado pela Lei de Potência (*Power-Law Function*, em inglês), que é a representação mais adotada pela literatura. De acordo com Shen (2009), os volumes relativos dos constituintes em qualquer ponto da gradação podem ser definidos por:

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N \quad (2.1a)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (2.1b)$$

onde  $V_c$  e  $V_m$  são, respectivamente, as frações de volume de cerâmica e de metal,  $z$  é a coordenada que varia ao longo da espessura  $h$  e  $N$  é o fator de não-homogeneidade, que é controlado pelo usuário e que modela o perfil de variação.

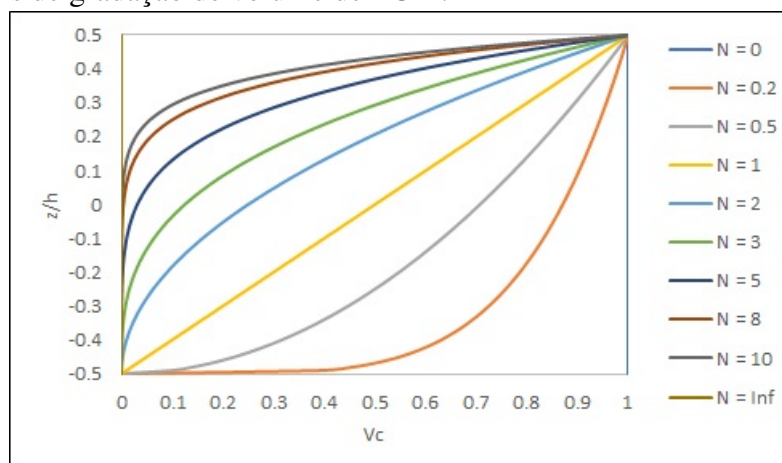
Figura 4 – Placa com Gradação Funcional.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A variação do fator de não-homogeneidade resulta em diferentes perfis de distribuição das frações de volume ao longo da espessura, podendo ser utilizado para o processo otimização de estruturas de FGM. É válido ressaltar que, para um valor nulo de  $N$ , o FGM é modelado como um material isotrópico cerâmico, enquanto que, para um valor de  $N$  tendendo ao infinito, o material se assemelha ao isotrópico metálico. Dessa forma, é benéfico simular análises com valores intermediários de índices de não-homogeneidade para se obter a performance de diferentes modelos de compósitos. O perfil de gradação da fração de volume cerâmico para variados expoentes está ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Perfis de gradação de volume de FGM.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Akbarzadeh *et al.* (2015) também citam dois outros modelos de gradação da fração



de volume, sendo eles o sigmoidal e o exponencial, demonstrados abaixo:

$$V_c = \begin{cases} V_b + (V_t - V_b) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h}\right)^N\right), & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_b + (V_t - V_b) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h}\right)^N\right), & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$V_c = V_t \exp \left( \ln \left( \frac{V_t}{V_b} \right) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^N \right) \quad (2.2b)$$

onde  $V_t$  e  $V_b$  são os valores das inclusões do constituinte cerâmico nas faces superior e inferior da estrutura, respectivamente.

Além dos modelos apresentados, já que o presente trabalho utilizará a Análise Isogeométrica como método computacional de análise, é válido ressaltar que autores como Wang *et al.* (2019) e Do *et al.* (2019) aproximaram a gradação do FGM por meio de funções B-splines, como mostrado abaixo:

$$V_c(\xi) = \sum_{i=1}^n B_i(\xi) V_{c,i}(z) \quad (2.3a)$$

$$V_m(\xi) = 1 - V_c(\xi) \quad (2.3b)$$

em que  $V_{c,i}$  é a fração de volume de cerâmica no  $i$ -ésimo ponto de controle,  $n$  é o número de pontos de controle e  $B_i(\xi)$  é a  $i$ -ésima função B-spline de base. Esse modelo calcula as frações de volume nos pontos de controle dispostos ao longo da espessura e então aproxima para o restante do domínio. Devido as características das B-splines, esse processo se torna simples e produz curvas suaves, prezando pela continuidade da gradação.

## 2.2 Variação das propriedades efetivas

Em conjunto com a variação da fração de volume dos constituintes ao longo da gradação, as propriedades efetivas da estrutura também se modificam. A partir das propriedades das fases do Material com Gradação Funcional, é possível estimar as grandezas físicas, como o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, por meio de um conjunto de equações matemáticas, cujo domínio é a espessura. Esses conjuntos podem ser classificados como modelos micromecânicos, uma vez que a sua interferência incide diretamente na microestrutura do FGM.

Caso a estrutura esteja sujeita apenas à cargas mecânicas, as propriedades dos constituintes geralmente podem ser empregadas em situação de temperatura ambiente, já tabeladas e utilizadas de forma usual. Entretanto, como os FGMs possuem um nicho de aplicabilidade para

problemas com cargas termomecânicas e, principalmente, com um elevado gradiente térmico, é possível estimar as propriedades dos constituintes em função da temperatura. De acordo com Touloukian (1967), as propriedades podem ser calculadas por:

$$P_j = P_0 (P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2.4)$$

onde  $P_j$  é a propriedade a ser estimada,  $T$  é a temperatura em Kelvin e os coeficientes  $P_i$  são tabelados e dependem tanto do material quanto do  $P_j$  em questão.

Dessa forma, com as propriedades das fases definidas, as propriedades efetivas ao longo da gradação, onde há presença concomitante de ambos os constituintes, podem ser calculadas a partir do processo de homogeneização do FGM. O Modelo Micromecânico mais empregado na literatura é a Lei das Misturas (RoM, *Rule of Mixtures*), ou Modelo de Voigt (SHEN, 2009; BATENI *et al.*, 2013). As propriedades podem ser estimadas a partir de uma simples média ponderada:

$$P_f = \sum_{j=1} P_j V_j \quad (2.5)$$

em que  $P_f$  é a propriedade efetiva,  $P_j$  é a propriedade do constituinte e  $V_j$  é a fração de volume.

Com efeito, outro Modelo Micromecânico comumente utilizado é o de Mori-Tanaka, cuja complexidade é mais elevada. Ele pode ser utilizado com maior precisão quando a microestrutura da região possui uma matriz bem definida e contínua, com inclusões particuladas. Dessa forma, o módulo volumétrico ( $K$ ) e de cisalhamento ( $G$ ) são definidos como:

$$K(z) = K_m + \frac{V_c}{\frac{1}{K_c - K_m} + \frac{V_m}{K_m + \frac{4G_m}{3}}} \quad (2.6a)$$

$$G(z) = G_m + \frac{V_c}{\frac{1}{G_c - G_m} + \frac{V_m}{G_m + f_m}} \quad (2.6b)$$

onde:

$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (2.7)$$

O módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) podem, então, ser estimados por:

$$E(z) = \frac{9K(z)G(z)}{3K(z) + G(z)} \quad (2.8a)$$

$$\nu(z) = \frac{3K(z) - 2G(z)}{2(3K(z) + G(z))} \quad (2.8b)$$

O último Modelo Micromecânico a ser abordado no presente trabalho é o Método Autoconsistente (SCM, *Self-consistent method*). Ele admite que todas as partículas de inclusões são derivadas de um único material contínuo cujas propriedades são as mesmas do compósito. Dessa forma, o Modelo não faz qualquer distinção entre as fases de matriz e de reforço, retornando resultados consistentes independentemente do modo de graduação da microestrutura, diferindo do Mori-Tanaka (SHEN, 2009; AKBARZADEH *et al.*, 2015). O SCM é mais complexo que as outras propostas supracitadas, sendo as suas propriedades calculadas de forma indireta, por meio de um método iterativo. O módulo volumétrico ( $K$ ) e de cisalhamento ( $G$ ) são estimados por:

$$V_c(z) = \frac{\frac{K_m}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_c}{G(z) - G_c} + 2}{\frac{K_m}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_c}{G(z) - G_c} - \frac{K_c}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} - \frac{5G_m}{G(z) - G_m}} \quad (2.9a)$$

$$K(z) = \frac{1}{\frac{VF(z)}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{1 - VF(z)}{K_m + \frac{4}{3}G(z)}} - \frac{4}{3}G(z) \quad (2.9b)$$

Logo após, o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) podem ser estimados pelas Equações 2.8a e 2.8b.

Na literatura, podem ser encontrados alguns estudos acerca da aplicabilidade e precisão dos modelos micromecânicos citados. Shen e Wang (2012) compararam os módulos de vibração de placas de FGM modelados com a RoM e Mori-Tanaka e concluíram que a diferença encontrada era irrisória, não justificando o uso de uma técnica mais avançada. Por outro lado, Medeiros Jr. *et al.* (2019) realizaram análises estáticas de cilindros espessos, obtendo resultados muito discrepantes para os dois Modelos. Barros (2020) também realizou um estudo de vigas com graduação funcional e concluiu que a utilização de diferentes modelos micromecânicos pode influenciar significativamente na performance mecânica, a depender, também, das propriedades dos constituintes.

Em relação ao SCM, Reiter *et al.* (1997) pontuaram que o Modelo se distanciava mais do Mori-Tanaka para FGMs que apresentassem uma estrutura esquelética, não apresentando regiões com matriz contínua. Reiter e Dvorak (1998) fizeram o mesmo estudo com cargas termomecânicas, replicando as conclusões apresentadas.

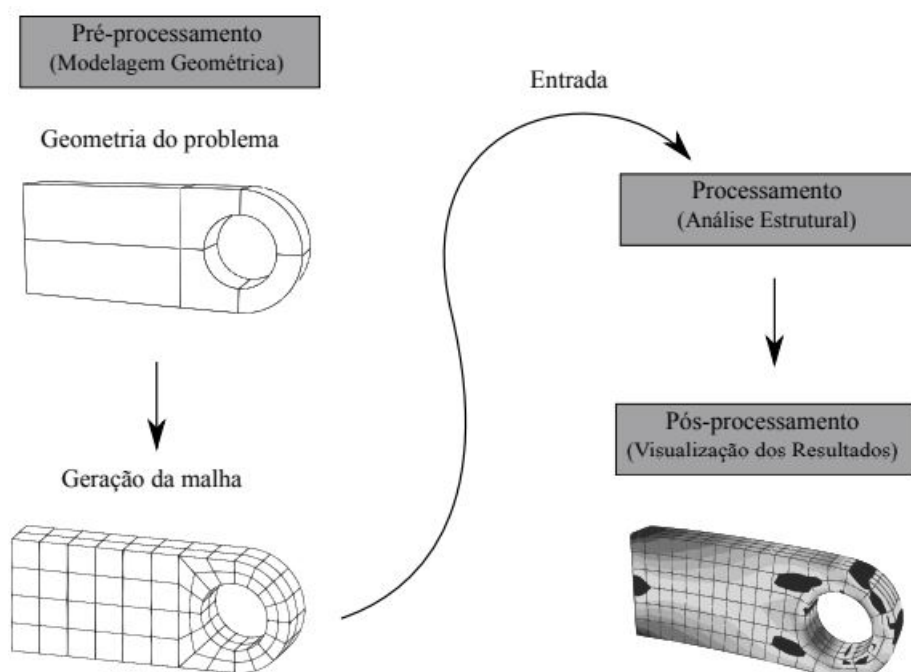
### 3 MODELAGEM GEOMÉTRICA

A Modelagem Geométrica é um âmbito da matemática que estuda, de forma aplicada, a descrição de formas geométricas de objetos, a partir da aplicação de modelos de equações e métodos computacionais. Dessa forma, a sua aplicação extrapola a área da engenharia estrutural, estando presente em diversos outros meios que utilizam a computação gráfica, como a indústria cinematográfica e a concepção de projetos.

A maioria dos programas atualmente utiliza uma base de sistemas *Computer Aided Design* (CAD), onde as designações dos modelos geométricos podem ocorrer a partir da Representação de Fronteira (B-rep, *Boundary representation*) ou da Geometria Sólida Construtiva (CSG, *Constructive Solid Geometry*). Na B-rep, o objeto é modelado com a inserção de delimitadores da sua região, como vértices e arestas, enquanto na CSG a modelagem ocorre por meio de combinações de objetos geométricos simples, como esferas e cubos. Perduta e Putanowicz (2019) dizem que, ao se utilizar a IGA, é preferível a adoção da metodologia B-rep.

Os sistemas CAD possuem uma notável importância contemporânea no ramo da engenharia estrutural. Isso ocorre porque a maioria dos *softwares* de análise estrutural utiliza ferramentas CAD para a modelagem do objeto na etapa de pré-processamento e para a aplicação de algoritmos de geração de malha, que discretizam a região do objeto com a finalidade de melhorar a etapa de Processamento pelo método computacional, como observado na Figura 6.

Figura 6 – Processo de análise estrutural.



Fonte: Barroso (2015).

Outrossim, após o estudo dos dados de pós-processamento, os modelos podem ser reaproveitados para um processo de otimização estrutural, alterando o seu formato, diminuindo a quantidade de material utilizada, e mantendo a performance mecânica, ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Otimização de forma.



Fonte: Li e Qian (2011).

### 3.1 B-Splines

As B-Splines representam curvas descritas em um espaço paramétrico. Uma das suas principais características é a capacidade de descrever diferentes segmentos em uma mesma representação paramétrica. Ou seja, limitando-se as atuações das suas funções de base a determinadas regiões, as curvas conseguem assumir comportamentos completamente distintos. Essas regiões delimitadoras são chamadas de *knot spans* e são definidas a partir de um vetor de *knots* com valores contidos no domínio do espaço paramétrico. É válido ressaltar que, apesar de a tradução do termo existir como "nós", a utilização de *knots* ocorrerá para não haver confusão com o conceito de "nós" adotado pelo FEM.

De acordo com Piegl e Tiller (1995), qualquer curva B-spline pode ser definida a partir da combinação linear entre os pontos de controle ( $\mathbf{p}_i$ ) e as funções de base ( $N_{i,p}(\xi)$ ):

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3.1)$$

onde  $n$  é o número de funções de base e  $p$  é o grau da curva.

As funções de base das B-splines são construídas a partir de um vetor de *knots*, conjunto formado por valores não-decrescentes, não-negativos e contidos no domínio  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$  do espaço paramétrico no qual a curva está inserida. Elas podem ser calculadas a partir da fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL; TILLER, 1995):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.3)$$

Além disso, é importante ressaltar que as duas primeiras derivadas das funções de base se tornam importantes ao se utilizar a Teoria de Alta Ordem de Reddy, já que elas são necessárias para a montagem da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Assim, ao se derivar a Equação (3.3) têm-se:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.4)$$

Dessa forma, como a derivada de uma curva B-spline é outra curva B-spline com um grau menor, o cálculo das derivadas de maior ordem se torna simples com a aplicação recursiva da Equação (3.4).

Um vetor de *knots* pode ser classificado como uniforme, caso os seus valores paramétricos variem conforme um fator constante, ou, caso contrário, como não-uniforme. Por exemplo, o vetor  $\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$  é uniforme, enquanto o vetor  $\Xi = [0, 0, 0, 0.4, 0.75, 1, 1, 1]$  é não-uniforme. O tamanho do vetor de *knots* influencia diretamente o número de funções de base, que é calculado por (PIEGL; TILLER, 1995):

$$n = ks - p - 1 \quad (3.5)$$

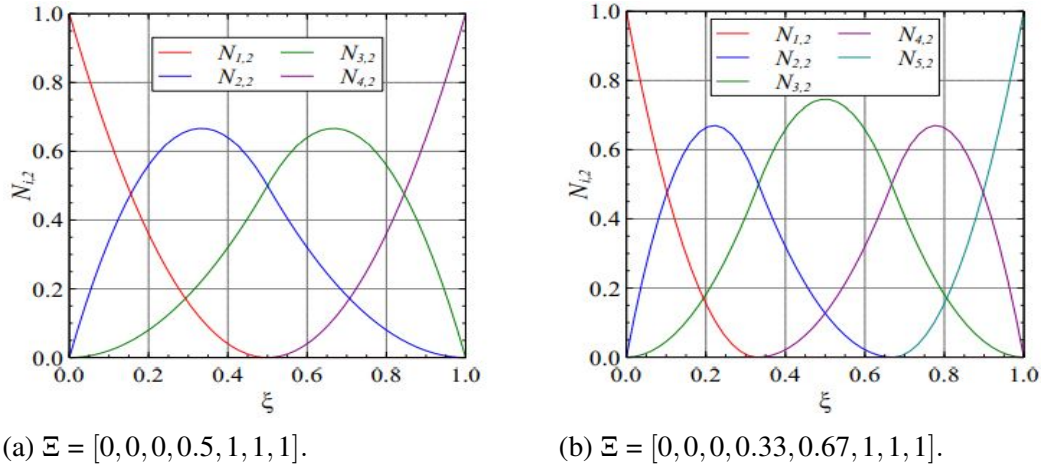
onde  $n$  é o número de funções de base e  $ks$  é o tamanho do vetor de *knots*. De acordo com a Equação (3.2) e (3.3), cada função de base é não-nula apenas no *knot span*  $[\xi_1, \xi_{n+i+1}]$ , sendo a sua influencia no comportamento da curva limitada a essa região. Dessa forma, pode-se ressaltar que o número de bases não-nulas em determinado *knot span* é sempre igual a  $p + 1$ , tornando a avaliação das curvas B-spline bastante eficientes e permitindo um maior controle do usuário.

Para exemplificar o comportamento e influencia das funções de base ao longo de um vetor de *knots*, a Figura 8a mostra uma base quadrática com  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ . Pode-se observar que a primeira função de base contribui apenas dentro do intervalo  $[\xi_1, \xi_{1+2+1}]$ , e assim por diante, dada a existência de  $n = 7 - 2 - 1$  bases. Ao discretizar o vetor de *knots* adicionando mais um valor paramétrico, e mantendo-o uniforme, a Figura 8b ilustra as novas bases quadráticas do vetor  $\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$ .

Além disso, é válido ressaltar que o número de vezes que um valor  $\xi_i$  aparece no vetor de *knots* é chamado de multiplicidade. As curvas B-splines possuem continuidade  $C^{p-1}$  de uma forma geral, mas se alguma coordenada paramétrica apresentar uma multiplicidade  $m > 1$ , a continuidade em  $\xi_i$  passa a ser  $C^{p-m}$ . Se um *knot* interno possuir multiplicidade  $m = p$ , então

ele será interpolado pela curva, enquanto que no caso do *knot* externo, a sua multiplicidade tem de ser  $m = p + 1$  para haver a interpolação. Devido a isso, é muito comum encontrar na literatura vetores de *knots* que apresentem essa característica, já que facilita a concepção do modelo.

Figura 8 – Funções de base quadrática.



Fonte: Barroso (2015).

Por fim, é de suma importância listar as principais características das bases B-splines (PIEGL; TILLER, 1995), repetindo, inclusive, algumas informações já citadas previamente:

- Suporte compacto:  $N_{i,p} = 0$  se  $\xi$  estiver fora do intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ ;
- Partição da unidade:  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ ;
- Não-negatividade:  $N_{i,p} \geq 0$ ;
- Qualquer *knot span*  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  possui exatamente  $p + 1$  funções de base não-nulas;
- Todas as derivadas das bases  $N_{i,p}$  existem no interior dos *knot spans*. Para cada *knot*, as bases são diferenciáveis  $p - m$  vezes, dado que  $m$  é a multiplicidade do *knot*.

A IGA permite três diferentes algoritmos para uma maior discretização da curva B-spline, o refinamento  $h$ ,  $p$  e  $k$ . O refinamento  $h$  consiste na diminuição do tamanho dos *knot spans* a partir da adição de um novo *knot* ao vetor, aumentando o número de *spans* existentes e gerando uma nova função de base e um novo ponto de controle. Ele é semelhante ao refinamento  $h$  no FEM, onde os elementos diminuem de tamanho e aumentam em quantidade. A Figura 9 e mostra o comportamento da malha em uma barra ao se realizar o refinamento  $h$ . Os asteriscos azuis (\*) são os pontos de controle e os círculos vermelhos (o) são os delimitadores dos *spans*.

É possível observar que na Figura 9a existem 3 *knot spans* e 5 pontos de controle e que na Figura 9b, com a adição de mais um *knot*, existem 4 *knot spans* e 6 pontos de controle. Além disso, para evitar que o refinamento  $h$  altere a geometria da curva, alguns pontos de controle

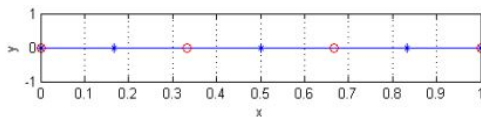
devem ser redistribuídos seguindo a fórmula (PIEGL; TILLER, 1995):

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & i = 1 \\ \alpha_i \mathbf{p}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{p}_{i-1}, & 1 < i < h \\ \mathbf{p}_{h-1}, & i = h \end{cases} \quad (3.6)$$

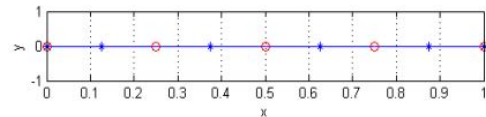
onde  $\bar{\mathbf{p}}_i$  são os novos pontos de controle,  $h$  é o tamanho do novo vetor de knots e  $\alpha_i$  pode ser calculado por:

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi}_i - \xi_i}{\xi_{i+p} - \bar{\xi}_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0, & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Figura 9 – Refinamento  $h$  em uma barra.



(a)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$ .

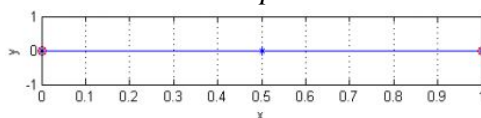


(b)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ .

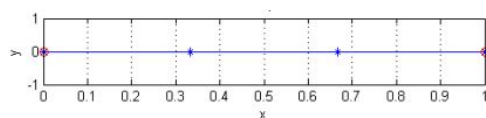
Fonte: Praciano (2018).

O refinamento  $p$  consiste na elevação do grau das curvas B-spline. Quando ele é realizado, o grau das funções de base e a multiplicidade de cada *knot* no vetor aumenta em 1, o que mantém a continuidade do *knots* inalterada. Esse processo não aumenta o número de *knot spans*, mas, dada a manutenção da continuidade, ocorre a inclusão de mais um ponto de controle e de uma função de base associada. O refinamento  $p$  de uma malha unidimensional está exemplificado na Figura 10, enquanto na Figura 11 está ilustrada a mudança no comportamento das funções de base considerando o aumento do grau. É importante citar que esse processo também está presente no FEM, com o aumento do grau dos polinômios utilizados como funções de forma.

Figura 10 – Refinamento  $p$  em uma barra.



(a)  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ .

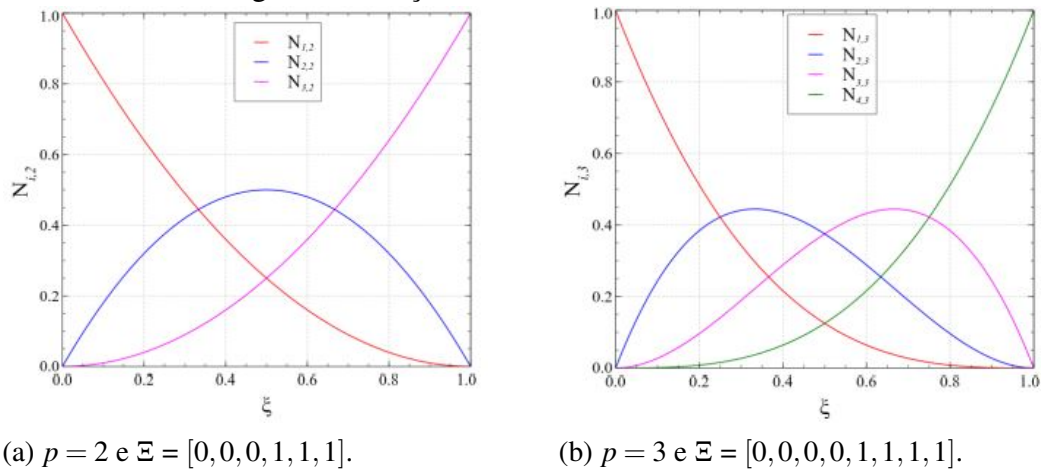


(b)  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ .

Fonte: Praciano (2018).



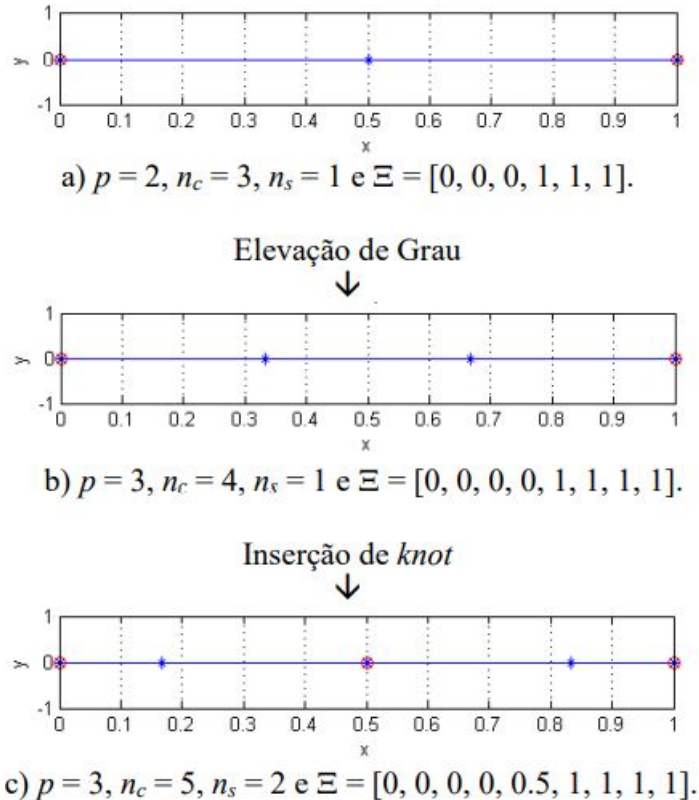
Figura 11 – Aumento do grau das funções de base.



Fonte: Praciano (2018).

O último processo de discretização de malha possível na IGA é o refinamento  $k$ . Esse processo é exclusivo desse método computacional, não existindo processo análogo no FEM. Ele consiste na combinação dos dois refinamento anteriores, aplicando primeiro o refinamento  $p$  e depois o refinamento  $h$ , resultando em funções de base com maior grau, maior número de *spans* e também maior continuidade entre os *spans*. A Figura 12 ilustra o refinamento  $k$  aplicado a uma barra, apresentando as etapas do processo.

Figura 12 – Refinamento  $k$  em uma barra.



Fonte: Praciano (2018).

### 3.2 NURBS

As funções de base das curvas B-splines são polinomiais. Dessa forma, mesmo apresentando uma alta discretização, as B-splines não possuem a capacidade de reproduzir exatamente geometrias que não seguem esse comportamento matemático, como círculos, elipses e cilindros. Para contornar essa limitação, podem ser utilizadas funções de base racionais, que são obtidas a partir da fração entre dois polinômios.

As NURBS utilizam bases racionais e um vetor de *knots* não-uniforme. Para se obter as bases racionais, são utilizados os pesos associados a cada ponto de controle e as funções de base B-splines, como mostrado abaixo (PIEGL; TILLER, 1995):

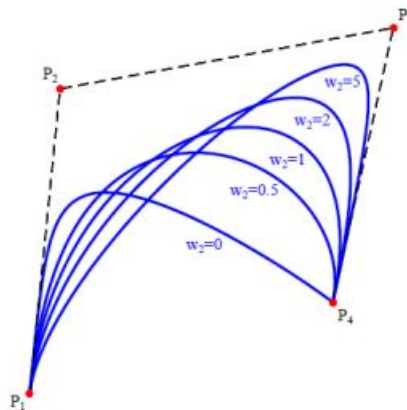
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.8)$$

onde  $R_{i,p}$  é a base racional e  $W(\xi)$  é a função peso. Dessa forma, para a descrição da curva NURBS é preciso realizar uma combinação linear entre as funções de base e os pontos de controle, análogo a Equação (3.1):

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3.9)$$

É válido ressaltar que a partir da variação de um peso associado a qualquer ponto de controle, pode-se alterar bastante o formato da curva, como ilustrado na Figura 13. Isso confere ao usuário um maior controle comportamental da NURBS.

Figura 13 – Curva NURBS para diferentes pesos.



Fonte: Barroso (2015).

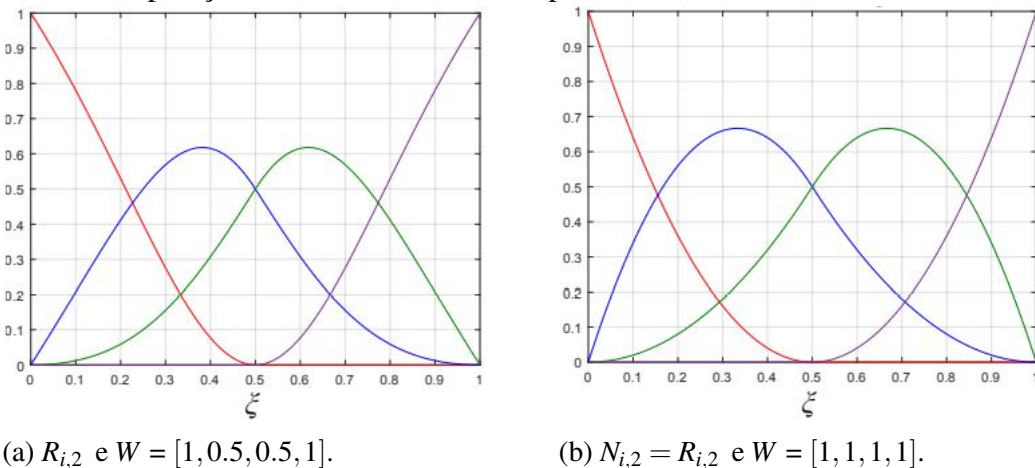
A utilização das bases racionais conferem as NURBS diversas vantagens em relação as B-splines, o que as tornam o modelo de curva mais utilizado pelos *softwares* que realizam a

modelagem geométrica atualmente. De acordo com Piegl e Tiller (1995), as vantagens podem ser listadas a seguir:

- Representação de formas matemáticas padrão e livres, utilizando a mesma base de dados para armazená-las;
- Por meio da associação entre pesos e pontos de controle, pode-se alterá-los com a capacidade de obtenção de diversos modelos de curva;
- Podem ser avaliadas de forma rápida e numericamente estável;
- Os pontos de controle das NURBS podem sofrer incidência direta de transformações afins, como translação, rotação e espelhamento;
- Podem recriar outras representações paramétricas importantes e mais simples, como as próprias B-splines.

Para replicar o comportamento das B-splines, as funções NURBS podem ignorar a influencia dos pesos nos pontos de controle, atribuindo a todos eles um valor unitário. Dado um mesmo vetor de *knots*  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ , a Figura 14 ilustra a diferença entre as bases racionais  $R_{i,p}$  e as polinomiais  $N_{i,p}$ . Além disso, a Figura 15 mostra uma mesma semi-circunferência modelada a partir das duas curvas, ratificando a melhor adequação da NURBS para esse tipo de forma geométrica.

Figura 14 – Comparação entre bases racionais e polinomiais.

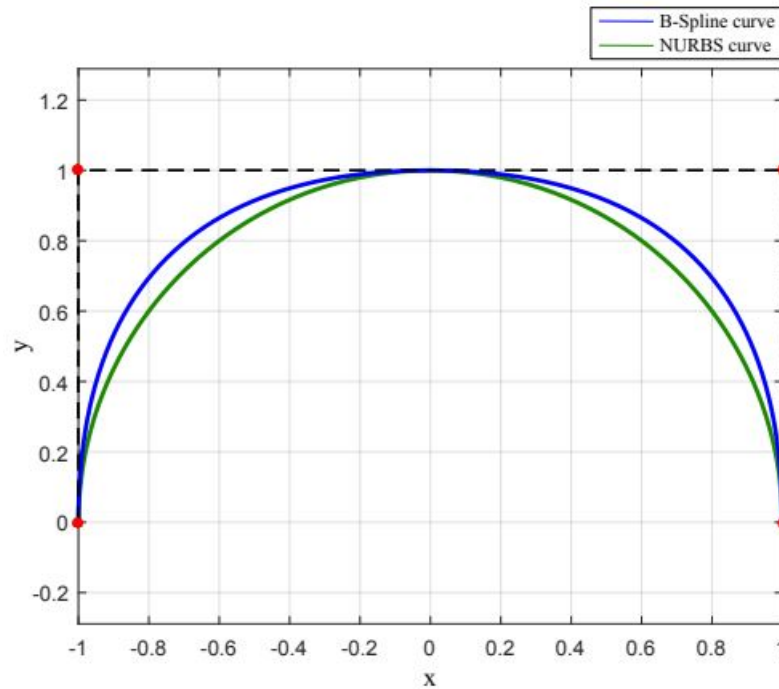


Fonte: Barroso (2015).

Por fim, de forma análoga as B-splines, as derivadas das funções de base NURBS são importantes para a aferição da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Como há a presença de dois polinômios, a primeira derivada pode ser calculada a partir da regra da cadeia (PIEGL; TILLER, 1995).

$$R'_{i,p}(\xi) = \frac{W(\xi)A'(\xi) - W'(\xi)A(\xi)}{W(\xi)^2} = \frac{A'(\xi) - W'(\xi)R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.10)$$

Figura 15 – Semi-circunferência modelada por diferentes curvas.



Fonte: Barroso (2015).

Após isso, caso se faça necessário o cálculo de derivadas de maior grau, pode-se usar a regra de Leibnitz, onde a  $k$ -ésima derivada é definida por:

$$R_{i,p}^{(k)}(\xi) = \frac{A^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) R_{i,p}^{(k-j)}(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Superfície NURBS

O presente trabalho utilizará as placas como estrutura de análise. Dessa forma, como elas são estruturas bidimensionais, é preciso unir curvas NURBS com o intuito de formar um espaço vetorial capaz de descrever superfícies com propriedades análogas.

Uma superfície definida por funções de base NURBS é formada pelo produto tensorial de duas bases univariantes, ou seja, ela está contida no espaço vetorial que apresenta o menor número de restrições formado pelos dois conjuntos de funções NURBS. Conseqüentemente, dadas uma matriz de pontos de controle  $\mathbf{p}$  ( $dim\ n \times m$ ), uma NURBS de grau  $p$  na direção  $\xi$  com vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e outra NURBS de grau  $q$  na direção  $\eta$  com vetor de *knots*  $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+p+1}]$ , uma superfície NURBS  $\mathbf{S}$  pode ser calculada por (PIEGL; TILLER, 1995):

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{p}_{ij} \quad (3.12)$$

onde  $R_{ij}$  é uma função de base racional bivalente definida por:

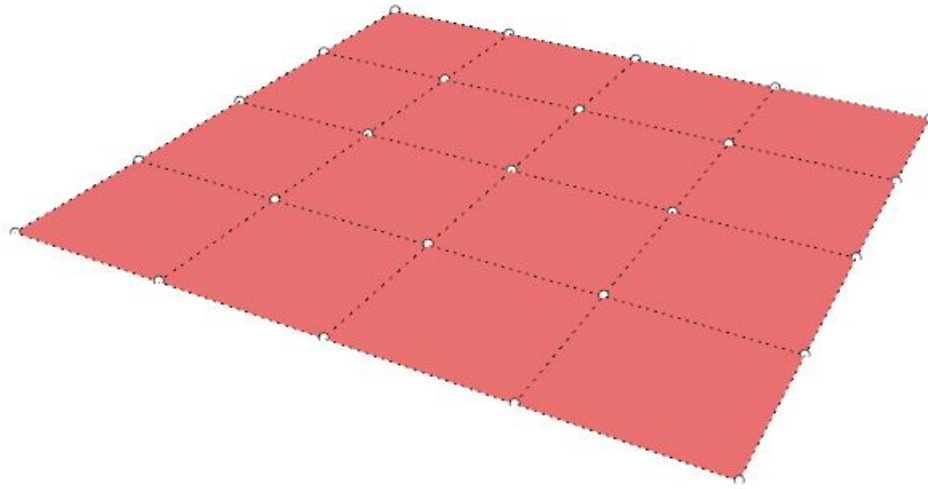
$$R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{w_{ij}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)}{W(\xi, \eta)} = \frac{\mathbf{A}(\xi, \eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (3.13)$$

em que  $W(\xi, \eta)$  é a função peso bivalente:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}}N_{\hat{i},p}(\xi)N_{\hat{j},q}(\eta) \quad (3.14)$$

A Figura 16 ilustra uma superfície de placa NURBS e os seus pontos de controle.

Figura 16 – Superfície NURBS.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como, para o caso das superfícies, a função de base é bivalente, é preciso calcular as derivadas parciais. Para isso, primeiro se define as derivadas parciais da função peso como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) &= \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}} N'_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) &= \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}} N_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dessa forma, as derivadas parciais das bases podem ser obtidas a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(\xi, \eta) &= w_{ij} \frac{N'_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta)N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\xi, \eta) &= w_{ij} \frac{N_{i,p}(\xi)N'_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta)N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

As derivadas parciais são posteriormente utilizadas para a formação dos elementos geométricos bidimensionais. Caso seja necessário calcular as derivadas de segunda ordem da

superfície NURBS, Piegl e Tiller (1995) definem como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uv} &= \frac{\mathbf{A}_{uv} - w_{uv}\mathbf{S} - w_u\mathbf{S}_v - w_v\mathbf{S}_u}{w} \\ \mathbf{S}_{uu} &= \frac{\mathbf{A}_{uu} - 2w_u\mathbf{S}_u - w_{uu}\mathbf{S}}{w} \\ \mathbf{S}_{vv} &= \frac{\mathbf{A}_{vv} - 2w_v\mathbf{S}_v - w_{vv}\mathbf{S}}{w} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{A}$  é definido na Equação 3.13 e  $\mathbf{S}$  é a própria superfície NURBS, definida na Equação 3.12.

É válido ressaltar que, devido a complexidade e extensão das equações auxiliares e das etapas de desenvolvimento da sentença matemática descrita, elas não serão transcritas nesse trabalho.

### 3.3 Extração de Bézier

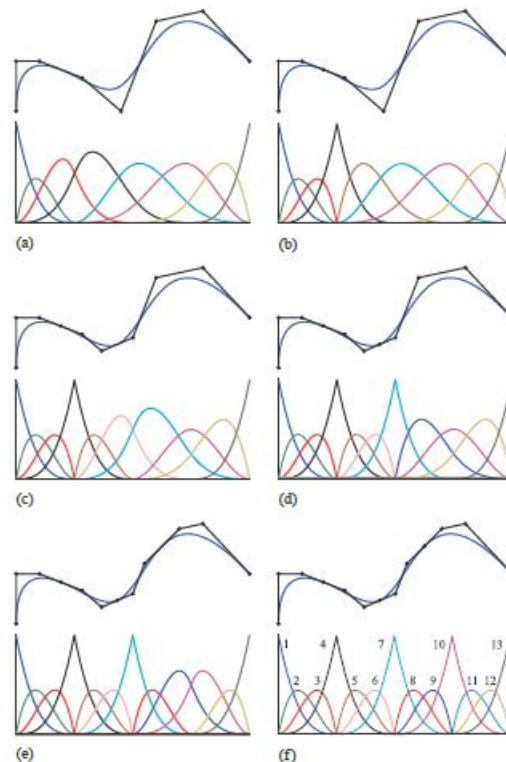
A utilização das NURBS na IGA pode complicar as etapas posteriores de integração, devido a complexidade das funções de base adotadas. Para auxiliar nesse processo, geralmente é utilizada a integração numérica, fornecendo uma solução suficientemente aproximada da real a partir de uma representação bem mais simples que a analítica. Entretanto, esses métodos de integração numérica geralmente utilizam um espaço paramétrico para fazer os cálculos necessários.

Primeiramente descrita por Borden *et al.* (2011), a Extração de Bézier consegue simular o comportamento de curvas NURBS a partir do emprego de diversas representações de Bézier seguidas, sendo o cálculo feito por meio de uma combinação linear de polinômios de Bernstein (PIEGL; TILLER, 1995). Dessa forma, esse procedimento permite que todos elementos isogeométricos sejam representados por um mesmo conjunto de funções de base, independente da discretização utilizada no vetor de *knots* original.

Para realizar a Extração de Bézier, entretanto, é preciso obter a matriz de extração  $\bar{\mathbf{C}}^e$  de cada elemento isogeométrico, cuja dimensão é  $(p+1) \times (p+1)$ . Isso ocorre devido a implementação desse procedimento ser baseada no algoritmo de Decomposição de Bézier discutido por Piegl e Tiller (1995), onde a multiplicidade de todos os *knots* é aumentada até chegar ao grau  $p+1$ , não importando o vetor inicial. Esse processo geralmente é feito por meio da aplicação seguida do algoritmo de inserção de *knots*. Para se ter o mesmo efeito com um custo computacional menor, o grau final pode ser apenas igual a  $p$ , com o contraponto sendo o compartilhamento das funções de base nas fronteiras dos elementos.

Para demonstrar como funciona esse processo, Borden *et al.* (2011) utilizaram uma curva NURBS definida pelo vetor de *knots* igual a  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$ . Assim, os *knots* inseridos são  $\bar{\Xi} = [1, 1, 2, 2, 3, 3]$ , aumentando o grau de cada um dos *knots* interiores até  $p$ . A Figura 17 mostra as etapas seguidas pela Extração de Bézier, modificando os pontos de controle e as funções de base NURBS, mantendo a geometria da curva intacta. Ao fim do processo, é possível observar que as funções de base são idênticas aos polinômios de Bernstein.

Figura 17 – Etapas da aplicação da Extração de Bézier em uma curva NURBS.



Fonte: Borden *et al.* (2011).

A aplicação desse procedimento faz com que a aplicação computacional da IGA se torne basicamente igual a do Método dos Elementos Finitos, com cada elemento isogeométrico sendo correspondente a um *knot span* da NURBS, apenas diferindo na etapa do cálculo das funções de forma. Além disso, a Extração de Bézier já tem as suas dimensões definidas no intervalo  $[-1, 1]$ , também de forma semelhante a formulação paramétrica do FEM, facilitando o processo de integração numérica.

### 3.3.1 Operador da Extração de Bézier

O Operador da Extração de Bézier, já citado anteriormente na discussão como  $\bar{\mathbf{C}}^e$ , é um operador linear que realiza a transformação dos pontos de controle após a inserção de novos

*knots* na curva, a fim de não modificar a geometria a partir desse processo de refinamento. A fim de ilustrar o processo de obtenção dessa grandeza, (BARROSO, 2015) considerou uma NURBS com o vetor de *knots* igual a  $\Xi = [\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , onde se deseja inserir os knots  $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m]$ , os pontos de controle antes do processo de inserção de *knots*  $\mathbf{p}^n$  podem ser relacionados com os posteriores ao processo  $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$  por meio de:

$$\bar{\mathbf{p}}^{n+1} = (\bar{\mathbf{C}}^n)^T \mathbf{p}^n \quad (3.18)$$

onde  $\bar{\mathbf{C}}^n$  é a matriz de dimensão  $(n \times n + 1)$  obtida dos coeficientes  $\alpha$  definidos na Equação (3.7), calculada por:

$$\bar{\mathbf{C}}^n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & 1 - \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Dado que essa matriz é necessária para cada etapa de inserção de *knots*, se o processo for realizado  $m$  vezes, a matriz de extração resultante pode ser definida como  $\bar{\mathbf{C}}^T = (\bar{\mathbf{C}}^{n+m})^T \cdot (\bar{\mathbf{C}}^{n+m-1})^T \dots (\bar{\mathbf{C}}^n)^T$ . Assim, os pontos de controle finais podem ser relacionados com os iniciais como:

$$\bar{\mathbf{p}}^{n+m} = \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{p} \quad (3.20)$$

Após finalizado o processo da aplicação do procedimento da Extração de Bézier, as funções NURBS  $R_{i,p}(\xi)$  serão iguais aos polinômios de Bernstein  $B_{i,p}(\xi)$  definidas no seu próprio intervalo. Mantendo a geometria da curva constante, ela pode ser definida pelo vetor  $\mathbf{r}(\xi)$  das funções de base NURBS e pelo vetor  $\mathbf{b}(\xi)$  das funções de base de Bernsteins como:

$$C(\xi) = (\bar{\mathbf{p}}^{n+m})^T \mathbf{b}(\xi) = (\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{p})^T \mathbf{b}(\xi) = \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{b}(\xi) = \mathbf{p}^T \mathbf{r}(\xi) \Rightarrow \mathbf{r}(\xi) = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{b}(\xi) \quad (3.21)$$

onde  $\bar{\mathbf{C}}$  é o operador de Extração de Bézier necessário para cada elemento isogeométrico. É válido ressaltar que, para o seu cálculo, é preciso apenas ter conhecimento do vetor de *knots* inicial da curva.



## 4 VIGAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

As vigas são consideradas estruturas unidimensionais, tendo o seu comprimento uma ordem de grandeza maior que as outras duas dimensões, a largura e a espessura. De forma geral, as vigas podem ser conceituadas como estruturas capazes de resistir a cargas axiais e transversais (COOK *et al.*, 2002).

Dentre as várias teorias possíveis para representar a cinemática de deformação de uma viga, duas das mais utilizadas atualmente no processo de análise estrutural são a Teoria de vigas de Euler-Bernoulli (EBT, *Euler-Bernoulli Beam Theory*) e a Teoria de vigas Timoshenko (TBT, *Timoshenko Beam Theory*).

A EBT é a mais antiga e a mais simples, recebendo o nome de Teoria Clássica de Vigas. Devido as suas hipóteses, todas as seções planas e normais à superfície antes da aplicação das cargas permanecem dessa mesma maneira após ocorrer a deformação. Dessa forma, essa teoria desconsidera completamente os efeitos da deformação por cisalhamento transversal (WANG *et al.*, 2000). A importância dessa deformação aumenta com a diminuição da esbeltez da viga, retornando, assim, resultados cada vez menos precisos. Portanto, essa teoria só é aconselhada para utilização em vigas finas. Além disso, a EBT requer que o campo de deslocamentos tenha continuidade  $C^1$ , o que pode complicar o processo de aplicação do Método dos Elementos Finitos, por exemplo.

Por outro lado, na TBT as seções planas e normais ao eixo da viga na situação indeformada permanecem planas após a deformação, mas não necessariamente normais. Dessa forma, é possível considerar o efeito do cisalhamento transversal de forma aproximada, com valor constante ao longo da seção transversal. Devido a essa característica, a TBT também pode ser referenciada na literatura como FSDT. Como a Teoria da Elasticidade define a tensão de cisalhamento com uma variação parabólica ao longo da seção, é preciso aplicar um fator de correção para melhorar a aproximação dos resultados da TBT. Esse fator depende da forma geométrica da seção, do material empregado e das condições de contorno (COOK *et al.*, 2002).

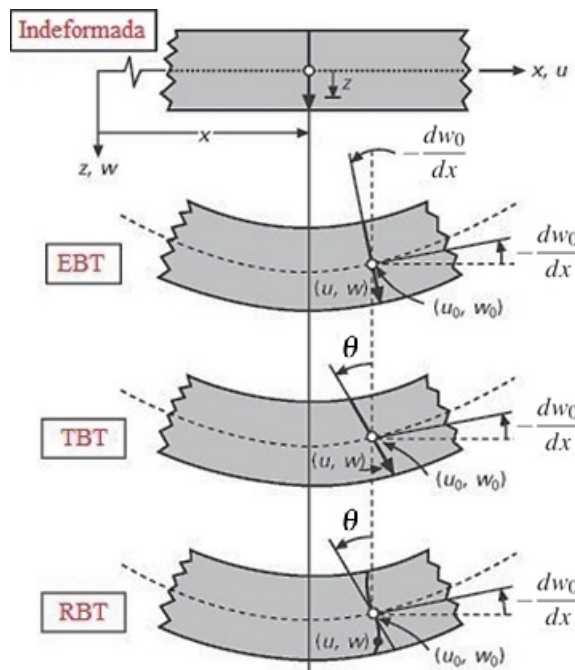
Além disso, é válido ressaltar que, devido ao campo de deslocamentos da FSDT, só é necessária a continuidade  $C^0$  (COOK *et al.*, 2002). Entretanto, devido à sua formulação, é preciso ter cuidado ao utilizar métodos computacionais para a sua resolução, já que pode ocorrer o fenômeno do travamento por cisalhamento. A sua origem remete à existência de uma parcela de cisalhamento espúrio na energia de deformação, que aumenta juntamente com a esbeltez da viga. Como não possui sentido físico, o cisalhamento espúrio absorve parte da energia e acaba

por simular uma estrutura mais rígida que a real, prejudicando o processo de análise (COOK *et al.*, 2002).

Diversas teorias de ordem mais alta foram criadas para relaxar a hipótese apresentada pela TBT. Entretanto, de acordo com Wang *et al.* (2000), a utilização de teorias com ordem maior que três apresentam um ganho tão pequeno em precisão que não se justifica a sua complexa aplicação.

A Teoria de vigas Reddy-Bickford (RBT, *Reddy-Bickford Beam Theory*) considera que as seções retas e normais à superfície na situação indeformada não permanecem necessariamente retas ou normais à superfície após a deformação. Dessa forma, ela é capaz de considerar a variação do cisalhamento transversal de forma parabólica ao longo da espessura, conforme a Teoria da Elasticidade, dispensando a utilização de quaisquer fatores de correção. O campo de deslocamentos da RBT é de terceira ordem, e devido a isso, ela também é conhecida na literatura como TSDT.

Figura 18 – Deformação de uma seção transversal normal à superfície nas diferentes teorias de vigas.



Fonte: Modificado de Wang *et al.* (2000).

#### 4.1 Teoria de Vigas de Reddy-Bickford

De acordo com Wang *et al.* (2000), o campo de deslocamentos da viga pode ser definido como:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0 + z\theta + \alpha z^3(\theta + w_{,x}) \\ w(x, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $u_0(x)$  e  $w_0(x)$  são, respectivamente, os deslocamentos horizontal e vertical do eixo da viga,  $\alpha = -4/3h^2$  e  $\theta(x)$  é a rotação da seção transversal em torno do eixo  $y$ . A partir da Equação (4.1), as relações deformação-deslocamento podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = u_{,x} &= u_{0,x} + z\theta_{,x} + z^3\alpha(\theta_{,x} + w_{,xx}) \\ \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} &= (\theta + w_{,x}) + 3\alpha z^2(\theta + w_{,x}) = (1 + 3\alpha z^2)(\theta + w_{,x}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir do campo de deformações definido pela Equação (4.2), pode-se observar que a deformação por cisalhamento  $\gamma_{xz}$  é definida por uma função quadrática, podendo descrever um comportamento parabólico ao longo da seção. Além disso, apesar de ser uma função cúbica, a deformação normal consegue descrever um comportamento simétrico na espessura, como também definido pela Teoria da Elasticidade. Na EBT, o campo de deformação por cisalhamento é inexistente, enquanto que na TBT ele não varia na direção  $z$ , tornando-o constante para a seção. Caso  $\alpha = 0$ , o campo de deslocamentos simula o da TBT, e, somado a isso, caso  $\theta = -w_{,x}$ , o campo de deslocamentos simula o da EBT.

O trabalho virtual interno de uma viga é definido como:

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (4.3)$$

Substituindo a Equação (4.2) na Equação (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A \{ \sigma_{xx} [\delta u_{0,x} + z\delta\theta_{,x} + z^3\alpha(\delta\theta_{,x} + \delta w_{,xx})] \\ &\quad + \tau_{xz} [(1 + 3\alpha z^2)(\delta\theta + \delta w_{,x})] \} dA dx \\ &= \int_0^L [N_{xx} \delta u_{0,x} + (M_{xx} + \alpha P_{xx}) \delta\theta_{,x} + \alpha P_{xx} \delta w_{,xx} + (Q_x + 3\alpha R_x) (\delta\theta + \delta w_{,x})] dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $N_{xx}$ ,  $M_{xx}$  e  $Q_x$  são, respectivamente, o esforço normal, o momento fletor e o esforço cortante usuais:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_A \sigma_{xx} dA \\ M_{xx} &= \int_A z \sigma_{xx} dA \\ Q_x &= \int_A \tau_{xz} dA \end{aligned} \quad (4.5)$$

e  $P_{xx}$  e  $R_x$  são os esforços provenientes da formulação de alta ordem:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \int_A z^3 \sigma_{xx} dA \\ R_x &= \int_A z^2 \tau_{xz} dA \end{aligned} \quad (4.6)$$

O trabalho virtual da carga transversal distribuída  $q(x)$  é dada por:

$$\delta W = \int_0^L q \delta w dx \quad (4.7)$$

Aplicando, então, o princípio do trabalho virtual,  $\delta U = \delta W$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[ N_{xx} \delta u_{0,x} + (M_{xx} + \alpha P_{xx}) \delta \theta_{,x} + \alpha P_{xx} \delta w_{,xx} + (Q_x + 3\alpha R_x) (\delta \theta + \delta w_{,x}) \right] dx \\ &= \int_0^L q \delta w dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

Realizando a integração por partes de cada parcela da Equação (4.8) e rearranjando os termos com coeficiente comum:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[ -\frac{dN_{xx}}{dx} \delta u_0 + \left( \hat{Q}_x - \frac{d\hat{M}_{xx}}{dx} \right) \delta \theta + \left( \alpha \frac{d^2 P_{xx}}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} - q \right) \delta w \right] dx + \\ &\left[ N_{xx} \delta u_0 + \hat{M}_{xx} \delta \theta + \left( -\alpha \frac{dP_{xx}}{dx} + \hat{Q}_x \right) \delta w + \alpha P_{xx} \delta w_{,x} \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{M}_{xx} &= M_{xx} + \alpha P_{xx} \\ \hat{Q}_x &= Q_x + 3\alpha R_x \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como a Equação (4.9) tem de ser válida para quaisquer valores possíveis de deslocamentos virtuais, são obtidas as seguintes equações de equilíbrio para as vigas de Reddy-Bickford:

$$\begin{cases} \frac{dN_{xx}}{dx} = 0 \\ \hat{Q}_x - \frac{d\hat{M}_{xx}}{dx} = 0 \\ \alpha \frac{d^2 P_{xx}}{dx^2} - \frac{d\hat{Q}_x}{dx} = q \end{cases} \quad (4.11)$$

Adicionalmente, as condições de contorno para a teoria de Reddy-Bickford são:

$$\text{Especifique : } \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ w \\ w_{,x} \\ \theta \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} N_{xx} \\ -\alpha \frac{dP_{xx}}{dx} + \hat{Q}_x \equiv \hat{V}_x \\ \alpha P_{xx} \\ \hat{M}_{xx} \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

onde  $\hat{V}_x$  é o esforço cortante efetivo. As condições de contorno essenciais estão listadas à esquerda e as condições de contorno naturais estão listadas à direita. As condições de contorno para cada tipo de extremidade são discorridas na lista abaixo:

- Simplesmente apoiada: O deslocamento vertical  $w$  é prescrito e o esforço cortante  $\hat{V}_x$  é desconhecido. Concomitantemente, o deslocamento horizontal  $u_0$ , a rotação  $\theta$  e a declividade  $w_{,x}$  são desconhecidos, enquanto o esforço normal  $N_{xx}$ , momento fletor  $\hat{M}_{xx}$  e o esforço de alta ordem  $P_{xx}$  devem ser especificados.
- Engastada: Todas as condições de contorno essenciais são prescritas, enquanto todas as condições de contorno naturais são desconhecidas.
- Livre: Todas as condições de contorno naturais são prescritas, enquanto os deslocamentos são desconhecidos.

É válido ressaltar que deslocamento horizontal  $u_0$  geralmente é desprezado, dado que é incomum a aplicação de carga horizontal em uma viga. Entretanto, para os FGM, mesmo com a ausência desse tipo de carga, o esforço normal é gerado na estrutura devido ao eixo neutro da seção transversal não coincidir com o centróide, resultando no efeito de acoplamento de membrana. Portanto, o  $u_0$  é de imprescindível consideração para o sucesso da análise quando se está estudando esse tipo de material. O efeito de acoplamento não ocorre em estruturas de materiais isotrópicos, uma vez que a seção transversal é homogênea, pois, nesse caso, o eixo neutro passa pelo centroide da seção transversal.

## 4.2 Esforços Internos

Uma vez determinados os deslocamentos, as deformações e as tensões podem ser avaliadas em qualquer ponto da viga por meio da Lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \tag{4.13}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

A partir da Equação (4.2), as relações deformação-deslocamento podem ser reescritas em função de deformações generalizadas:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 + z\kappa_1 + z^3\kappa_2 \tag{4.14}$$

$$\gamma_{xz} = \varepsilon_s + z^2\kappa_3$$

onde

$$\varepsilon_0 = u_{0,x}$$

$$\kappa_1 = \theta_{,x}$$

$$\kappa_2 = \alpha(\theta_{,x} + w_{,xx}) \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_s = \theta + w_{,x}$$

$$\kappa_3 = 3\alpha(\theta + w_{,x})$$

Dessa forma, substituindo a Equação (4.14) na Equação (4.5) e na Equação (4.6), os esforços internos podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A E \varepsilon_{xx} dA = \int_A E (\varepsilon_0 + z\kappa_1 + z^3\kappa_2) dA \\ M_{xx} &= \int_A z \sigma_{xx} dA = \int_A z E \varepsilon_{xx} dA = \int_A z E (\varepsilon_0 + z\kappa_1 + z^3\kappa_2) dA \\ Q_x &= \int_A \tau_{xz} dA = \int_A G \gamma_{xz} dA = \int_A G (\varepsilon_s + z^2\kappa_3) dA \\ P_{xx} &= \int_A z^3 \sigma_{xx} dA = \int_A z^3 \sigma_{xx} dA = \int_A z^3 (\varepsilon_0 + z\kappa_1 + z^3\kappa_2) dA \\ R_x &= \int_A z^2 \tau_{xz} dA = \int_A z^2 \gamma_{xz} dA = \int_A z^2 (\varepsilon_s + z^2\kappa_3) dA \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desenvolvendo os termos relacionados à deformação por flexão, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{bmatrix} = \int_A E(z) \begin{bmatrix} 1 & z & z^3 \\ z & z^2 & z^4 \\ z^3 & z^4 & z^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & B_{xx} & E_{xx} \\ B_{xx} & D_{xx} & F_{xx} \\ E_{xx} & F_{xx} & H_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (4.17)$$

onde

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & B_{xx} & D_{xx} & E_{xx} & F_{xx} & H_{xx} \end{bmatrix} = \int_A E(z) \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & z^6 \end{bmatrix} dA \quad (4.18)$$

De forma análoga, desenvolvendo os termos relacionados à deformação por cisalhamento:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ R_x \end{bmatrix} = \int_A G(z) \begin{bmatrix} 1 & z^2 \\ z^2 & z^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ B_s & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma}_s \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{bmatrix} A_s & B_s & D_s \end{bmatrix} = \int_A G(z) \begin{bmatrix} 1 & z^2 & z^4 \end{bmatrix} dA \quad (4.20)$$

É válido ressaltar que as propriedades  $E$  e  $G$  devem ser reconhecidas como funções de  $z$  devido à gradação dos componentes ao longo da espessura no caso de vigas de Material

com Gradação Funcional, como discutido no Capítulo 2. No caso de um material homogêneo, as duas propriedades são constantes em quaisquer pontos da seção.

Dessa forma, a energia interna de deformação da viga é calculada pela soma das parcelas de flexão e de cisalhamento. A energia referente à flexão pode ser definida por:

$$\begin{aligned}
 U_b &= \frac{1}{2} \int_L \int_A \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dA dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_A \epsilon_{xx}^T (E \epsilon_{xx}) dA dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \epsilon_b^T \mathbf{C}_b \epsilon_b dx
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Finalmente, a energia referente ao cisalhamento é calculada por:

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} \int_L \int_A \tau_{xz} \gamma_{xz} dA dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_A \gamma_{xz}^T (G \gamma_{xz}) dA dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \gamma_s^T \mathbf{C}_s \gamma_s dx
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

### 4.3 Formulação Isogeométrica

Segundo Hughes T. J. R. e Bazilevs (2005), o deslocamento generalizado  $\mathbf{u}$  em uma análise isogeométrica baseada em NURBS pode ser calculado por:

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \mathbf{u}_e \tag{4.23}$$

onde  $N_i(\xi)$  é a função de base NURBS e  $\mathbf{u}_e = \{u_0 \ w \ \theta\}^T$  é o vetor de graus de liberdade. Os deslocamentos também podem ser escritos de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_n \\ \theta_n \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \tag{4.24}$$

É possível observar pela Equação (4.14) que, devido ao campo de deformações da RBT, é preciso que as funções de interpolação  $N_i$  possuam continuidade  $C^1$  dentro do *patch*.

Dessa forma, substituindo a Equação (4.23) na Equação (4.15), é possível descrever as deformações generalizadas do elemento geométrico em função do deslocamento generalizado. Para o caso das deformações referentes à flexão, têm-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_{b1} \\ \mathbf{B}_{b2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & \alpha N_{i,xx} & \alpha N_{i,x} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e \quad (4.25)$$

Já para o caso das deformações referentes ao cisalhamento:

$$\boldsymbol{\gamma}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s1} \\ \mathbf{B}_{s2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & N_i \\ 0 & 3\alpha N_{i,x} & 3\alpha N_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_s \mathbf{u}_e \quad (4.26)$$

Portanto, ao reescrever a Equação (4.21) nos novos termos, obtém-se a matriz de rigidez à flexão dos elementos isogeométricos no espaço cartesiano:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_L \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b dx = \frac{1}{2} \int_L (\mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_b^T) \mathbf{C}_b (\mathbf{B}_b \mathbf{u}_e) dx \rightarrow \mathbf{K}_b = \int_L \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dx \quad (4.27)$$

De forma análoga, para se calcular a matriz de rigidez ao cisalhamento, é preciso reescrever a Equação (4.22):

$$U_s = \frac{1}{2} \int_L \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma}_s dx = \frac{1}{2} \int_L (\mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_s^T) \mathbf{C}_s (\mathbf{B}_s \mathbf{u}_e) dx \rightarrow \mathbf{K}_s = \int_L \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s dx \quad (4.28)$$

Adicionalmente, o carregamento nodal equivalente pode ser calculado a partir do potencial das cargas externas:

$$V = \int_0^L q w dx = \int_0^L w^T q dx = \mathbf{u}_e^T \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \rightarrow \mathbf{f}_e = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \quad (4.29)$$

#### 4.4 Cálculo das funções de forma e suas derivadas

Como dito anteriormente, as funções de base NURBS, que modelam a geometria da peça, são definidas no espaço paramétrico descrito pelo vetor de *knots* adotado, enquanto a Equação (4.27) e a Equação (4.28) são definidas no espaço cartesiano real. O Jacobiano pode ser utilizado para realizar a transformação do espaço paramétrico do *knot vector* para o espaço cartesiano:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum N_{i,\xi} x_i \quad (4.30)$$

A partir disso, o Jacobiano pode ser introduzido na integral da matriz de rigidez a fim de mapear os limites do espaço paramétrico das NURBS no espaço cartesiano, transformando a matriz de



rigidez do elemento em:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_e &= \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) dx \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) J d\xi\end{aligned}\quad (4.31)$$

Além disso, devido à complexidade da solução, é preciso calcular a integral de forma numérica, a partir do emprego da Quadratura de Gauss. Esse método requer o mapeamento dos elementos da estrutura em um novo espaço paramétrico contido no intervalo  $[-1, 1]$ . Então, é preciso calcular outro Jacobiano para transformar a estrutura presente no *knot span*  $[\xi_1, \xi_2]$ :

$$\xi = \left(\frac{1-r}{2}\right) \xi_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \xi_2 \rightarrow J_r = \frac{d\xi}{dr} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}\quad (4.32)$$

Dessa forma, a Equação (4.31) pode ser integrada pela quadratura de Gauss a partir da seguinte fórmula:

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) W_i J J_r\quad (4.33)$$

onde  $npg$  é o número de pontos de Gauss a ser utilizado e  $W_i$  é o peso atribuído a cada ponto. Como o  $npg$  requerido pode ser diferente para a integração das duas parcelas, é válido separar a matriz de rigidez de flexão e a de cisalhamento:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{be} &= \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b W_i J J_r \\ \mathbf{K}_{se} &= \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s W_i J J_r\end{aligned}\quad (4.34)$$

Dado que as derivadas das funções de base são calculadas sempre no espaço paramétrico dos *knot spans*, elas também precisam ser mapeadas no espaço cartesiano para serem utilizadas na formulação descrita na Equação (4.25) e na Equação (4.26). Assim, faz-se necessária também a aplicação do Jacobiano. Para a derivada de primeira ordem, utiliza-se a Equação (4.30):

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN}{d\xi} \frac{1}{J}\quad (4.35)$$

Outrossim, como é necessária a utilização da derivada de segunda ordem, é preciso aplicar a regra do produto:

$$\frac{d^2N}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dN}{d\xi} \frac{1}{J} \right) = \frac{d}{dx} \frac{dN}{d\xi} \frac{1}{J} + \frac{dN}{d\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d^2N}{d\xi^2} \frac{1}{J^2} + \frac{dN}{d\xi} \frac{1}{J}\quad (4.36)$$

onde  $J' = \frac{dJ}{d\xi}$ .

O mesmo procedimento utilizado para a integração da matriz de rigidez pode ser utilizado para o cálculo do vetor de forças de externas:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{N}^T q J d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{N}^T q W_i J J_r \end{aligned} \quad (4.37)$$

Depois disso, tanto a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  quanto o vetor de forças externas  $\mathbf{f}$  da estrutura podem ser montados a partir do emprego do Método da Rigidez Direta, ordenando e somando a contribuição de cada elemento isogeométrico no sistema global.

Adicionalmente, a energia potencial total da viga é definida como:

$$\Pi = U + V = (U_b + U_s) + V = \mathbf{u}_e^T \int_L \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u}_e + \mathbf{N}^T q \right) dx \quad (4.38)$$

Dessa forma, extremizando o funcional da equação, os deslocamentos podem ser calculados a partir da solução do sistema resultante:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.39)$$

Por fim, é válido ressaltar que o emprego do Método da Rigidez Direta só considera os efeitos dos graus de liberdade que são interpolados pelo vetor  $\mathbf{u}_e$ . Entretanto, como visto na Equação (4.12), a condição de contorno essencial  $w_{,x}$  existe, mas não é interpolada pelo vetor isogeométrico. Dessa forma, caso haja a necessidade da sua prescrição, é preciso empregar o método da penalidade, aplicando a sua contribuição diretamente na matriz de rigidez. Dessa forma, a resolução de problemas com extremidades engastadas se torna mais complicada que os de simplesmente apoiadas.

#### 4.5 Integração Numérica

De acordo com Cook *et al.* (2002),  $n$  pontos de Gauss integram exatamente um polinômio de grau  $2n - 1$ . Dessa forma, dado que os elementos isogeométricos são não-distorcidos, para a integração completa dos termos da Equação (4.34),  $npg \geq (p + 1)/2$ , em que  $p$  é o grau da função de base. O uso da integração completa causa uma convergência monotônica superior, ou seja, ela retorna estruturas mais rígidas que as reais, reduzindo a velocidade de convergência do modelo.

Além disso, devido as diferentes ordens de integração nas duas parcelas da matriz de rigidez, a integração completa pode ocasionar o fenômeno do travamento. Os números de pontos de Gauss necessários para integrar a parcela de flexão ( $n_{pb}$ ) e a de cisalhamento ( $n_{ps}$ ) estão apresentados na Tabela 2. No presente trabalho, entretanto, o  $n_{pg}$  utilizado foi o mesmo para ambas a parcelas, portanto, sendo igual ao maior valor requerido.

Tabela 1 – Numéros de pontos de Gauss para vigas.

Grau	Integração Completa		Integração Reduzida	
	$n_{pb}$	$n_{ps}$	$n_{pb}$	$n_{ps}$
Quadrático	3	2	2	1
Cúbico	4	3	3	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Uma outra metodologia que pode ser utilizada na resolução da integração numérica é a integração reduzida. No presente trabalho, o processo consiste em diminuir o  $n_{pg}$  em um, aumentando a velocidade de convergência. Dessa forma, o travamento por cisalhamento pode ser mitigado (ADAM *et al.*, 2015b), para o caso da FSDT. Os contrapontos dessa metodologia são a perda da garantia da convergência monotônica superior, o que pode dificultar a análise da consistência do modelo, e a possibilidade de retorno de modos espúrios de deformação, cuja energia é nula, prejudicando a análise estrutural. Esse fenômeno será investigado mais a fundo por meio de exemplos.

## 5 PLACAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

As placas são estruturas planas, cuja espessura é bem menor do que as outras duas dimensões. Dessa forma, as placas podem ser modeladas como corpos bidimensionais (COOK *et al.*, 2002).

As teorias mais utilizadas na literatura para simular a cinemática de deformação das placas são a Teoria Clássica de Placas (CPT, *Classical Plate Theory*), ou de Kirchoff-Love, e a Teoria de placas de Reissner-Mindlin (RMPT, *Reissner-Mindlin Plate Theory*).

A CPT é a teoria mais antiga e a que apresenta as hipóteses mais simples. As considerações feitas acerca do comportamento mecânico das estruturas são análogas às apresentadas pela EBT no Capítulo 4, só que agora considerando as seções e os eixos de placas. Portanto, a CPT também desconsidera o efeito do cisalhamento transversal, sendo adequada apenas para a análise de placas finas (WANG *et al.*, 2000).

A RMPT, por outro lado, adota hipóteses menos restritivas, se assemelhando à TBT no que tange à cinemática das seções em relação ao eixo médio da estruturas. Dessa forma, a RMPT consegue considerar os efeitos do cisalhamento transversal de forma aproximada, com deformações cisalhantes constantes ao longo da seção (WANG *et al.*, 2000). Devido a essa característica, essa teoria é conhecida como a FSDT para na análise de placas, sendo de utilização adequada para placas tanto espessas quanto finas.

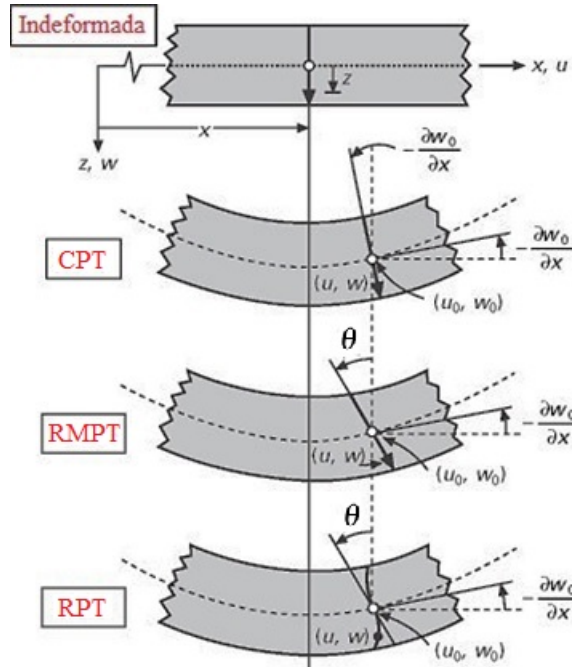
Além das diferenças consideráveis em relação as hipóteses das teorias apresentadas, outro fator de alta relevância é o grau de continuidade requerido entre os elementos. A CPT requer uma continuidade  $C^1$  das funções de forma, o que é complicado de se obter pelo Método dos Elementos Finitos. Por outro lado, a FSDT requer apenas continuidade  $C^0$ , facilitando a sua aplicação em alguns métodos computacionais.

Apesar de existirem diversas teorias de alta ordem que também consideram os efeitos do cisalhamento transversal, no presente trabalho será utilizado a Teoria de placas de Reddy (RPT, *Reddy Plate Theory*). Dentre as hipóteses adotadas para a simulação de uma estrutura bidimensional, as mais relevantes são as que ditam a cinemática que descreve a deformação da placa.

Dessa forma, as considerações feitas pela Teoria de placas de Reddy são análogas às discutidas no Capítulo 4 para a RBT. Portanto, a partir da adoção dessa Teoria, o campo de deslocamentos ao longo da espessura é cúbico, permitindo uma representação exata tanto da deformação normal quanto da deformação por cisalhamento ao longo das seções transversais,

obedecendo ao comportamento definido pela Teoria da Elasticidade. Assim, é importante ressaltar que a RPT também pode ser encontrada na literatura como a TSDT para placas.

Figura 19 – Deformação de uma seção transversal normal à superfície nas diferentes teorias de placas.



Fonte: Modificado de Wang *et al.* (2000).

## 5.1 Teoria de Placas de Reddy

De acordo com esta teoria (WANG *et al.*, 2000), os deslocamentos de qualquer ponto da placa podem ser definidos por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\theta_x + \alpha z^3(\theta_x + w_{,x}) \\ v(x, y, z) &= v_0 + z\theta_y + \alpha z^3(\theta_y + w_{,y}) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $\alpha = -4/3h^2$  e as variáveis  $\mathbf{u}_0 = \{u_0 \ v_0\}^T$ ,  $w_0$  e  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_x \ \theta_y\}^T$  são os deslocamentos de membrana, a deflexão do plano médio e as rotações em torno dos planos  $x-z$  e  $y-z$ , respectivamente. Além disso, é válido ressaltar que os deslocamentos  $\mathbf{u}_0$  e  $w_0$  estão em função apenas de  $x$  e  $y$ , variando apenas ao longo da superfície do plano médio da placa.

Dessa forma, é possível definir também as relações deformação-deslocamento:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{,x} = u_{0,x} + z\theta_{x,x} + \alpha z^3(\theta_{x,x} + w_{,xx}) \\
\varepsilon_{yy} &= v_{,y} = v_{0,y} + z\theta_{y,y} + \alpha z^3(\theta_{y,y} + w_{,yy}) \\
\gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = u_{0,y} + v_{0,x} + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + \alpha z^3(\theta_{x,y} + \theta_{y,x} + 2w_{,xy}) \\
\gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = (1 + 3\alpha z^2)(\theta_x + w_{,x}) \\
\gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} = (1 + 3\alpha z^2)(\theta_y + w_{,y})
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A partir da Equação (5.2), é possível observar que as deformações por cisalhamento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  possuem comportamento quadrático ao longo da direção  $z$ , podendo descrever o comportamento parabólico definido pela Teoria da Elasticidade. Com efeito, na FSDT essas deformações não variam com a espessura, tendo seu valor constante ao longo da seção transversal, com o seu campo de deformações definido quando  $\alpha = 0$ . Adicionalmente, na CPT elas sequer são consideradas, podendo o seu campo de deformações ser obtido a partir da FSDT com as novas considerações de  $\theta_x = -w_{,x}$  e  $\theta_y = -w_{,y}$ .

Devido a complexidade das relações deformação-deslocamento e ao elevado número de variáveis, é benéfico utilizar a notação matricial para a definição do campo de deformações da placa (TRAN *et al.*, 2013), separando as parcelas referentes a membrana e flexão e ao cisalhamento:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \varepsilon_0 + z\kappa_1 + z^3\kappa_2 \\
\gamma &= \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T = \varepsilon_s + z^2\kappa_s
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 &= \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix} \\
 \kappa_1 &= \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} \\
 \kappa_2 &= \alpha \begin{bmatrix} \theta_{x,x} + w_{,xx} \\ \theta_{y,y} + w_{,yy} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} + 2w_{,xy} \end{bmatrix} \\
 \varepsilon_s &= \begin{bmatrix} \theta_x + w_{,x} \\ \theta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \\
 \kappa_s &= 3\alpha \begin{bmatrix} \theta_x + w_{,x} \\ \theta_y + w_{,y} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

O trabalho virtual interno de uma placa é definido como:

$$\delta U = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) + (\tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz})] dz dA \tag{5.5}$$

onde  $dA$  é o elemento diferencial de área no plano médio da placa. A divisão das parcelas é válida devido à cada uma se referir a diferentes tipos de esforços. A primeira parcela compreende o trabalho dos esforços de membrana e flexão, enquanto a segunda parcela compreende o trabalho dos esforços de cisalhamento.

Na utilização da TSDT, devido a formulação, aparecem duas naturezas de esforços. Os esforços normais ( $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  e  $N_{xy}$ ), de flexão ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  e  $M_{xy}$ ) e de cisalhamento ( $V_x$  e  $V_y$ ) são usuais de placas, estão identificados na Figura 20 e podem ser calculados por:

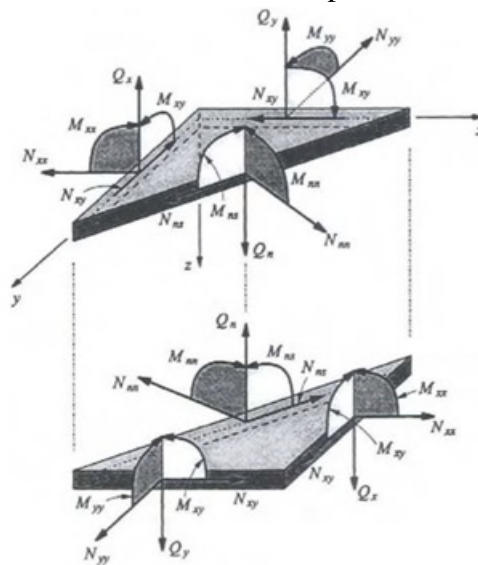
$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \\
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \\
 \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Por outro lado, as grandezas  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{xy}$ ,  $R_x$  e  $R_y$  não possuem sentido físico e são denominadas como esforços de alta ordem. O seu cálculo é feito a partir de:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z^3 dz \quad (5.7)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} z^2 dz$$

Figura 20 – Forças e momentos em um elemento de placa.



Fonte: Wang *et al.* (2000).

Considerando um comportamento linearmente elástico, as relações constitutivas do material com gradação funcional podem ser definidas como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_s\boldsymbol{\gamma} \quad (5.9)$$

onde

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}$$

$$Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu^2(z)} \quad (5.10)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$



em que  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material com gradação funcional. Estes parâmetros estão em função de  $z$  devido à gradação das suas propriedades efetivas nessa direção. Caso seja um material homogêneo, essas propriedades podem ser consideradas constantes. Substituindo as Equações (5.8) e (5.9) nas Equações (5.6) e (5.7), os esforços podem ser definidos como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dz \\
 \mathbf{M} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} z dz \\
 \mathbf{V} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\kappa} dz \\
 \mathbf{P} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z^3 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} z^3 dz \\
 \mathbf{R} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} z^2 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\kappa} z^2 dz
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Com a finalidade de reescrever os esforços em função das deformações generalizadas, é necessário substituir a Equação (5.3) na Equação (5.11). Dessa forma, desenvolvendo os termos relacionados aos esforços de membrana e flexão:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{5.12}$$

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & z^6 \end{bmatrix} dz \tag{5.13}$$

De forma análoga, desenvolvendo os termos relacionados ao cisalhamento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\kappa}_s \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{D}_s \hat{\boldsymbol{\gamma}} \tag{5.14}$$

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q}_s \begin{bmatrix} 1 & z^2 & z^4 \end{bmatrix} dz \quad (5.15)$$

Portanto, redefinindo a Equação (5.5) com as tensões em termos das deformações generalizadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dz dA \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}) + \delta \boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma})] dz dA \\ &= \int_A \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA + \int_A \delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{D}_s \hat{\boldsymbol{\gamma}} dA \end{aligned} \quad (5.16)$$

O trabalho virtual de uma carga transversal  $q(x,y)$  distribuída ao longo da área da placa pode ser definido como:

$$\delta W = \int_A w_0 q dA \quad (5.17)$$

Dessa forma, a formulação fraca para o modelo estático de uma placa sujeita a carga transversal pode ser expressada a partir do Princípio do Trabalho Virtual:

$$\delta U = \delta W \Rightarrow \int_A \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA + \int_A \delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{D}_s \hat{\boldsymbol{\gamma}} dA = \int_A w_0 q dA \quad (5.18)$$

## 5.2 Formulação Isogeométrica

De acordo com (PIEGL; TILLER, 1995), como já definido anteriormente no Capítulo 3, uma superfície NURBS pode ser definida como um produto tensorial entre duas bases racionais univariantes. Dessa forma, a superfície  $\mathbf{S}$  possui um grau  $p \times q$  e uma matriz de pontos de controle  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n \times m} N_i(\xi, \eta) \mathbf{p}_i \quad (5.19)$$

onde  $N_i$  está definido na Equação (3.12). Dessa forma, o campo de deslocamentos na estrutura bidimensional modelada pode ser aproximado por:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n \times m} N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_e \quad (5.20)$$

em que  $\mathbf{u}_e = \{u_0 \ v_0 \ w \ \theta_x \ \theta_y\}^T$  é o vetor de graus de liberdade associado ao ponto de controle de índice  $i$ . Escrevendo de forma matricial, têm-se:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{nxm} N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_e = \mathbf{N} \mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^{nxm} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (5.21)$$

Com a finalidade de calcular as deformações generalizadas em função dos deslocamentos isogeométricos, é preciso substituir a Equação (5.21) na Equação (5.4). Portanto, para o caso das deformações referentes a membrana e a flexão:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{nxm} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_{b1} \\ \mathbf{B}_{b2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{b1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{b2} &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,xx} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,yy} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 2N_{i,xy} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

De forma análoga, para as deformações referentes ao cisalhamento:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\kappa}_s \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{nxm} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s1} \\ \mathbf{B}_{s2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_s \mathbf{u}_e \quad (5.24)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{s1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{s2} &= 3\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dessa forma, ao substituir as Equações (5.22) e (5.24) na Equação (5.18), a formulação fraca da placa pode ser reescrita em função dos novos termos, resultando na matriz de rigidez da estrutura. A matriz de rigidez a flexão pode ser definida por:

$$\int_A \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA = \int_A (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_b^T) \mathbf{D}_b (\mathbf{B}_b \delta \mathbf{u}_e) dA \Rightarrow \mathbf{K}_b = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA \quad (5.26)$$

Com efeito, se utilizando do mesmo processo de manipulação de variáveis, a matriz de rigidez ao cisalhamento é definida como:

$$\int_A \delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{D}_s \hat{\boldsymbol{\gamma}} dA = \int_A (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_s^T) \mathbf{D}_s (\mathbf{B}_s \delta \mathbf{u}_e) dA \Rightarrow \mathbf{K}_s = \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA \quad (5.27)$$

Adicionalmente, o vetor de forças externas pode ser calculado por:

$$\int_A \bar{\mathbf{u}} \mathbf{q} dA = \int_A \bar{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{N}_q^T \mathbf{q} dA \Rightarrow \mathbf{f}_e = \int_A \mathbf{N}_q^T \mathbf{q} dA \quad (5.28)$$

onde

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_q = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x & 0 & 0 \\ 0 & q_y & 0 \\ 0 & 0 & q_z \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Após a calculadas essas grandezas para cada elemento isogeométrico, é utilizado o Método da Rigidez Direta, a fim de alocar corretamente a contribuição de cada termo na matriz de rigidez e na matriz de forças externas globais. Assim, é possível prosseguir para o cálculo dos deslocamentos globais a partir da resolução do sistema:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.30)$$

### 5.3 Cálculo das funções de forma e suas derivadas

Para a determinação dos deslocamentos das placas, as matrizes de rigidez e o vetor de forças externas precisam ser calculados no espaço cartesiano. Na Análise Isogeométrica, toda a manipulação algébrica que utiliza as superfícies de base NURBS é feita na superfície definida pelo produto tensorial dos vetores de *knots* em cada direção.

Para realizar essa transformação do espaço paramétrico para o espaço cartesiano, primeiramente deve ser calculada a matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

A partir disso, o Jacobiano a ser utilizado nas equações seguintes para a transformação entre espaços vetoriais é definido como o determinante da matriz Jacobiana:

$$J = |\mathbf{J}| = \mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{12}\mathbf{J}_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (5.32)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez dos elementos pode ser reescrita a partir da soma entre as duas parcelas detalhadas nas Equações (5.26) e (5.27), além de ser definida na superfície paramétrica ( $\Omega$ ) a partir da utilização do Jacobiano:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s = \int_A (\mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s) dA = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s) J d\Omega \quad (5.33)$$

De forma análoga as vigas, como visto no Capítulo 4, as integrais podem se tornar bastante complicadas para serem resolvidas de forma analítica. Dessa maneira, a integração numérica pode ser utilizada como um método de solução alternativo. Para o presente trabalho, a integração para os elementos de placa foi feita a partir da Quadratura de Gauss.

Para essa metodologia, a estrutura é novamente redefinida em uma superfície paramétrica, com cada direção do espaço ( $r, s$ ) contida no intervalo  $[-1, 1]$ . Isso é feito, diferentemente das estruturas unidimensionais apresentadas neste trabalho, a partir da Extração de Bézier, processo discutido no Item 3.3.1. A utilização desse procedimento é feita de modo a simplificar a transformação vetorial necessária para o cálculo das matrizes de Rigidez e de Forças Externas, dado que as estruturas bidimensionais apresentam funções de base de superfície isogeométrica com comportamento complexo.

Além disso, dado que as derivadas são todas calculadas também no espaço paramétrico dos vetores de *knots*, elas precisam ser mapeadas no espaço cartesiano tradicional, a fim de serem utilizadas nas Equações (5.23) e (5.25). Devido a essa necessidade de cálculo, o Jacobiano deve ser utilizado nessa transformação. Dessa maneira, utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana definida na Equação (5.31). Como é preciso isolar as derivadas em relação a  $x$  e  $y$  para calculá-las, a relação é invertida:

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

em que

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} \\ -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Adicionalmente, como é necessária a utilização das derivadas parciais de segunda ordem, é utilizada a regra do produto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} &= \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right] + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right] \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} &= \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right] \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} &= \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right] + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi\xi} \\ N_{i,\eta\eta} \\ N_{i,\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi}^2 & y_{,\xi}^2 & 2x_{,\xi}y_{,\xi} \\ x_{,\eta}^2 & y_{,\eta}^2 & 2x_{,\eta}y_{,\eta} \\ x_{,\xi}x_{,\eta} & y_{,\xi}y_{,\eta} & x_{,\xi}y_{,\eta} + x_{,\eta}y_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,xx} \\ N_{i,yy} \\ N_{i,xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{,\xi\xi} & y_{,\xi\xi} \\ x_{,\eta\eta} & y_{,\eta\eta} \\ x_{,\xi\eta} & y_{,\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Isolando as segundas derivadas em relação a  $x$  e a  $y$ :

$$\begin{bmatrix} N_{i,xx} \\ N_{i,yy} \\ N_{i,xy} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_s^{-1} \left( \begin{bmatrix} N_{i,\xi\xi} \\ N_{i,\eta\eta} \\ N_{i,\xi\eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{,\xi\xi} & y_{,\xi\xi} \\ x_{,\eta\eta} & y_{,\eta\eta} \\ x_{,\xi\eta} & y_{,\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \right) \quad (5.39)$$

onde

$$\mathbf{J}_s^{-1} = \begin{bmatrix} x_{,\xi}^2 & y_{,\xi}^2 & 2x_{,\xi}y_{,\xi} \\ x_{,\eta}^2 & y_{,\eta}^2 & 2x_{,\eta}y_{,\eta} \\ x_{,\xi}x_{,\eta} & y_{,\xi}y_{,\eta} & x_{,\xi}y_{,\eta} + x_{,\eta}y_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

## 5.4 Integração Numérica

O processo de integração numérica é muito semelhante ao apresentado no Capítulo 4, com as mesmas regras sendo válidas para direção da superfície NURBS, já que agora a estrutura é bidimensional. Dessa forma, o número de pontos de Gauss ( $npg$ ) necessários para integrar um elemento de placa é o produto do número de pontos de Gauss necessários em cada direção.

Para a integração completa, o  $npg$  adotado será sempre  $p + 1$  em cada direção. Entretanto, devido aos diferentes graus dos polinômios apresentados pelas parcelas da matriz de rigidez, há o aparecimento do travamento por cisalhamento, já que a sua parcela necessita de menos pontos de Gauss para ser integrada.

Para contornar esse problema, aliado a uma maior discretização da malha, é utilizado o processo de integração reduzida, em que a estrutura é integrada com  $npg = p$  em cada direção, sendo subtraído um ponto de Gauss em relação a integração completa, deixando o elemento menos rígido. A integração reduzida consegue diminuir a influência do travamento por cisalhamento e de membrana nas placas.

Como o maior grau da derivada pertence à matriz de rigidez a flexão, ela é a referência. Os números de pontos de Gauss mínimos para a integração da parcela de flexão ( $n_{pb}$ ) e de cisalhamento ( $n_{ps}$ ) estão apresentados na Tabela 2.

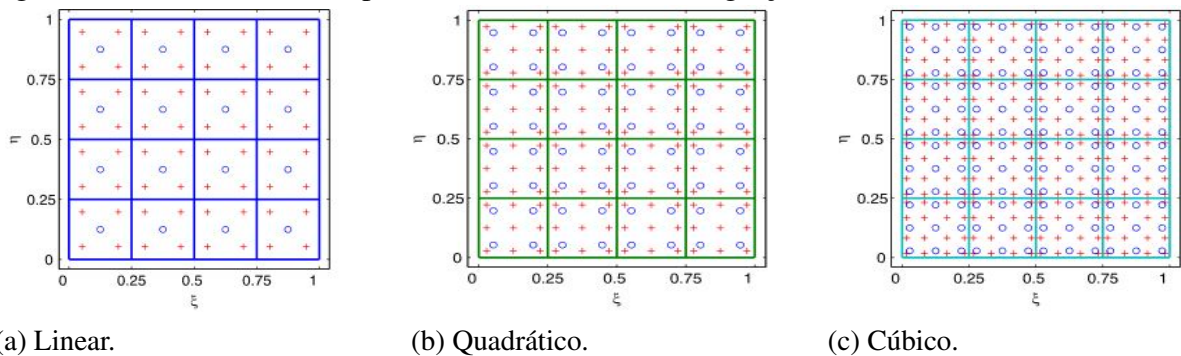
Tabela 2 – Numéros de pontos de Gauss para placas.

Grau	Integração Completa		Integração Reduzida	
	$n_{pb}$	$n_{ps}$	$n_{pb}$	$n_{ps}$
Quadrático	9	4	4	1
Cúbico	16	9	9	4

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Além disso, a Figura 21 demonstra a diferença entre os dois métodos de integração, ilustrando a distribuição dos pontos de Gauss nos elementos isogeométricos, onde os círculos azuis (o) são os pontos de Gauss na integração reduzida e as cruzes vermelhas (+) são os pontos de Gauss na integração completa.

Figura 21 – Pontos de Gauss para os dois métodos de integração numérica.



Fonte: Adaptado de Adam *et al.* (2015a).

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, estão apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação da formulação isogeométrica na análise de vigas e placas, sendo a sua disposição dividida em duas partes. Inicialmente, será feita a análise estática de vigas com gradação funcional, comparando a teoria de alta ordem com a de primeira ordem, onde serão aplicados diferentes modelos micromecânicos e esbeltezes, com a finalidade de estudar o processo de modelagem do FGM e o efeito do travamento por cisalhamento. Logo após, serão analisadas estaticamente placas com gradação funcional, de forma similar ao realizado para as vigas.

Para as estruturas unidimensionais, foi utilizada uma rotina em MATLAB adaptada pelo autor para a consideração da Teoria de Deformação por Cisalhamento de Terceira Ordem. Todas as etapas da análise foram contempladas no código. Por outro lado, para as estruturas bidimensionais, a etapa de pré-processamento da análise foi feita no Rhino, com a modelagem geométrica das estruturas e discretização da malha. Depois, os arquivos foram exportados para o FAST, onde foram realizadas as etapas de aplicação das condições de contorno, das forças e dos materiais, além do processamento da análise. Adicionalmente, na etapa de pós-processamento, os dados foram obtidos do próprio FAST. Por fim, para a visualização da estrutura em diferentes etapas da análise, foram utilizados o FASTModDef e o NIPos.

### 6.1 Vigas com Gradação Funcional

De forma a realizar uma análise com uma maior garantia de retorno de resultados representativos, a rotina no MATLAB foi validada a partir da simulação de um exemplo da literatura. Somente após a checagem da consistência dos resultados o modelo foi utilizado para analisar vigas com outras características. Dessa forma, nessa seção estão apresentados tanto os resultados do exemplo de validação quanto os resultados dos estudos desenvolvidos nesse trabalho.

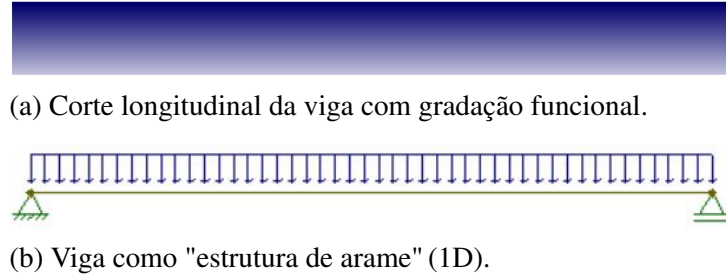
#### 6.1.1 Exemplo de Validação

Este exemplo foi retirado de Li *et al.* (2013) e trata de uma viga isotrópica, simplesmente apoiada nas duas extremidades e sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída, como mostrado na Figura 22. A viga possui comprimento  $L = 1$  m, relação comprimento-espessura  $L/h = 10$  e relação comprimento-largura  $L/b = 16$ . O módulo de elasticidade do



material é  $E = 10^4$  MPa e o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0.3$ . A carga imposta na viga é de  $F = -1$  kN/m.

Figura 22 – Representação da estrutura de viga.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A viga foi discretizada em uma malha de 10 elementos isogeométricos, com funções de base cúbicas. O método de integração numérica empregado foi a completa. As condições de contorno utilizadas para representar uma extremidade simplesmente apoiada foram:

$$w(0) = u_0(0) = 0, w(L) = 0 \quad (6.1)$$

Além disso, é válido lembrar que essas condições de contorno são impostas no problema a partir do emprego do Método da Rigidez Direta. Apenas a situação de extremidade simplesmente apoiada foi considerada para esse exemplo de validação e para o seguinte, devido a dificuldade em considerar a prescrição do grau de liberdade  $\partial w_0 / \partial x$  por meio desse método.

Para fazer o estudo de distribuição de tensões, é preciso escolher uma seção da viga. Dessa forma, para a seção  $x = 0.3 L$ , as tensões críticas calculadas tanto pela formulação adotada quanto pela referência estão apresentadas na Tabela 3.

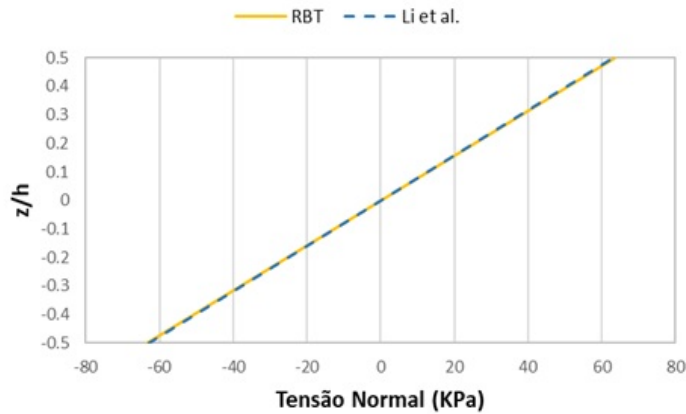
Adicionalmente, como um dos pontos de maior relevância da utilização da RBT é a distribuição quadrática da deformação por cisalhamento ao longo da seção, obedecendo o comportamento ditado pela Teoria da Elasticidade, é essencial mostrar a distribuição das tensões na espessura, como ilustrado na Figura 23.

Tabela 3 – Tensões máximas em  $x = 0.3 L$ .

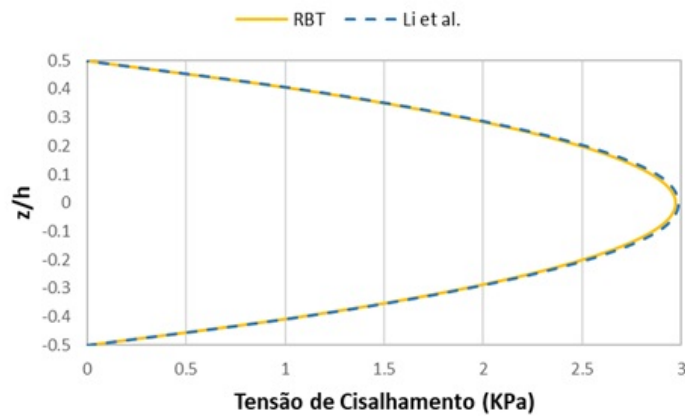
Tensão (kPa)	Normal	Cisalhamento
RBT	63.400	2.970
Li et al.	63.027	2.985
Diferença	0.59%	-0.50%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 23 – Perfil de distribuição de tensão ao longo da seção ( $x = 0.3L$ )



(a) Tensão Normal.



(b) Tensão de Cisalhamento.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Dessa forma, é possível observar que os valores de tensões críticas na seção determinada estão bastante próximos aos fornecidos pela referência, retornando erros relativos menores que 1%. Além disso, os perfis de distribuição de ambas as tensões ao longo da espessura são praticamente idênticos. Portanto, é possível afirmar que a formulação de vigas adotada pelo presente trabalho é consistente, possibilitando a análise posterior de vigas com outras características.

### 6.1.2 *Viga simplesmente apoiada*

Este exemplo trata de uma viga com gradação funcional, biapoiada e sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída. As disposições das condições de contorno e da modelagem geométrica utilizadas seguem as ilustradas na Figura 22. Os resultados embasam discussões acerca dos efeitos do travamento por cisalhamento, das diferenças entre os modelos

micromecânicos empregados e dos resultados fornecidos pela TSDT e pela FSDT.

Com a finalidade de realizar um estudo mais completo, são utilizadas duas duplas distintas de componentes para a modelagem dos materiais com gradação funcional. As denominações de cada uma e as propriedades físicas dos componentes estão apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedades físicas dos componentes dos FGM.

FGM I			FGM II		
Material	E (GPa)	$\nu$	Material	E (GPa)	$\nu$
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> [c]	322.76	0.3	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> [c]	380	0.3
SUS304 [m]	207.89	0.3	Al [m]	70	0.3

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Ao se comparar os dois grupos de componentes, é evidente que o FGM I possui uma maior proximidade entre os módulos de elasticidade dos componentes, enquanto que no FGM II essa diferença é bem mais significativa. Em termos numéricos, as proporções entre o maior e menor  $E$  para os dois modelos de FGM são 1.55 e 5.43, respectivamente.

Aplicando a Lei de Potência para o cálculo da gradação da fração de volume ao longo da espessura da viga, pode-se estimar as propriedades efetivas na direção da gradação a partir do emprego dos modelos micromecânicos, como já discutido anteriormente. Dessa forma, considerando dois perfis de variação da fração de volume, com  $N = 1$  e  $N = 2$ , e os modelos de Voigt, Mori-Tanaka e SCM, as propriedades efetivas dos FGM estão apresentadas nas Figuras 24 e 25.

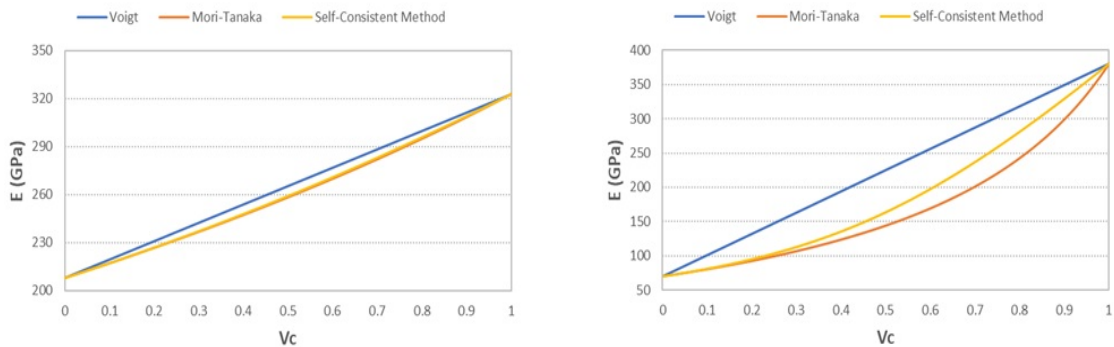
Como observado nas Figuras 24 e 25, o modelo de Voigt sempre simula estruturas mais rígidas que os outros modelos apresentados, dado que, ao longo de toda a gradação e para ambos os  $N$ , as estimativas do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson por Voigt são sempre maiores que os demais.

Além disso, é importante ressaltar que, apesar de o comportamento ser semelhante para os dois modelos de FGM, a ordem de grandeza da discrepância entre as propriedades físicas dos componentes influencia de forma contundente na estimativa das propriedades efetivas ao longo da gradação. Novamente, comparando em termos numéricos, para  $N = 1$ , os módulos de elasticidade calculados por Voigt chegam a ser apenas 2.7% maiores que os calculados por Mori-Tanaka para o FGM I, enquanto que para o FGM II essa diferença pode chegar a 57.19%.

Adicionalmente, pode-se observar que, para ambos os valores de  $N$ , os valores dos módulos de elasticidade calculados pelo SCM são intermediários quando comparados aos outros

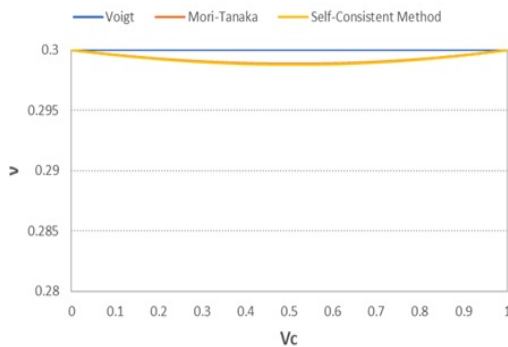
dois modelos.

Figura 24 – Propriedades efetivas ao longo da gradação para  $N = 1$ .

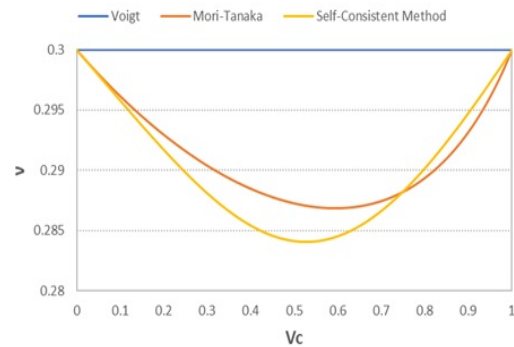


(a) Módulo de elasticidade - FGM I.

(b) Módulo de elasticidade - FGM II.



(c) Coeficiente de Poisson - FGM I.



(d) Coeficiente de Poisson - FGM II.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

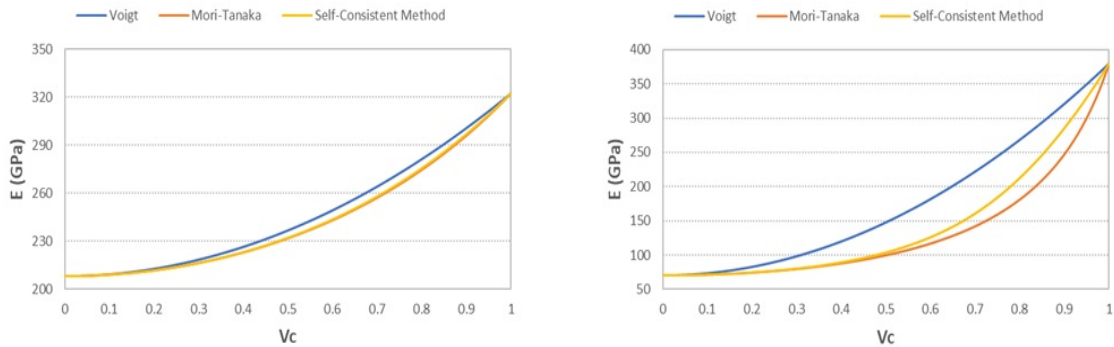
Ao se tratar do coeficiente de Poisson, entretanto, as diferenças entre as maiores e menores estimativas são bem menos expressivas. Isso se dá ao fato de que todos os componentes possuem o mesmo valor numérico dessa grandeza. Portanto, mesmo presente no cálculo das estimativas do coeficiente de Poisson, os módulos de elasticidade dos componentes possuem uma menor influência.

O modelo de Voigt, dado que o coeficiente de Poisson é constante entre as duas fases, falha em estimar a sua variação ao longo da gradação. No mais, pelo que foi observado para ambos os  $N$ , o modelo SCM é o limite inferior da referida propriedade física, com os valores calculados pelo Mori-Tanaka se tornando os intermediários.

Em seguida, para estudar os efeitos do cisalhamento transversal devido a integração numérica na formulação da TSDT, foi adotada uma viga isotrópica, modelada com a fase cerâmica do FGM II, e com a relação comprimento-largura  $L/b = 16$ . Foi utilizada a integração completa para o cálculo das matrizes, variando o número de elementos isogeométricos cúbicos

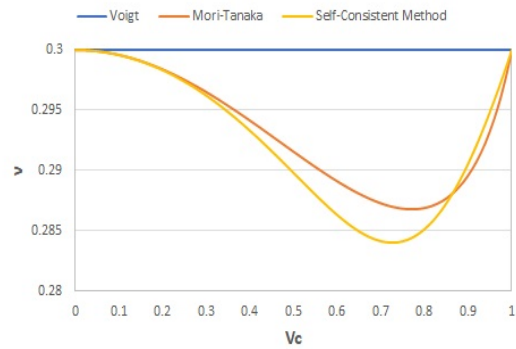
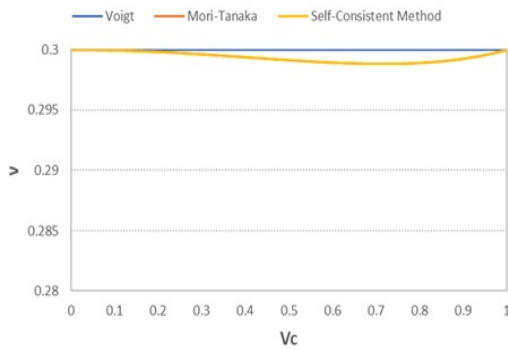
da malha e também a espessura da viga.

Figura 25 – Propriedades efetivas ao longo da gradação para  $N = 2$ .



(a) Módulo de elasticidade - FGM I.

(b) Módulo de elasticidade - FGM II.



(c) Coeficiente de Poisson - FGM I.

(d) Coeficiente de Poisson - FGM II.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Foi calculada a deflexão máxima da viga quando sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída de  $F = -1$  kN/m. Os valores foram normalizados a partir dos deslocamentos obtidos com uma malha suficientemente discretizada, de 50 elementos, da forma  $\bar{w} = w_{max}/w_{50}$ . Os fatores de normalização estão na Tabela 5, enquanto os resultados estão apresentados na Tabela 6 e na Figura 26.

Tabela 5 – Fatores de normalização para as deflexões.

$h/L$	$w_{50} (m)$
1/10	6.747E-06
1/10 <sup>3</sup>	6.583E+00
1/10 <sup>5</sup>	6.556E+06

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

De acordo com a Figura 26, é possível observar que, para a menor esbelteza, praticamente não há travamento por cisalhamento, com uma malha de 20 elementos já sendo o suficiente para diminuir o erro relativo a menos de 1%.

Tabela 6 – Deflexão normalizada da viga para diferentes espessuras.

Deslocamento	$h/L$	Número de elementos					
		4	8	16	20	24	48
$\bar{w}$	1/10	1.1032	1.0245	1.0056	1.0034	1.0021	1.0001
	1/10 <sup>3</sup>	0.8851	0.9955	1.0053	1.0033	1.0021	1.0001
	1/10 <sup>5</sup>	0.8698	0.8197	0.8149	0.8327	0.8690	0.9989

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Entretanto, ao se aumentar a esbelteza da viga, é possível observar que, para malhas menos discretizadas, os deslocamentos diminuem bastante, o que implica na simulação de uma estrutura mais rígida do que a esperada. Na esbelteza intermediária, por exemplo, logo os resultados convergem, mas a malha mais grosseira apresenta o travamento por cisalhamento. Adicionalmente, para a maior esbelteza, o travamento é tão intenso que nem com 24 elementos a malha é capaz de simular uma estrutura com a rigidez próxima a esperada, superestimando a rigidez da viga ao ponto da deflexão diferir mais do que 10% do valor esperado.

Além disso, foi realizada também a integração reduzida para a maior esbelteza apresentada, com o intuito de observar a influência desse processo na redução do travamento por cisalhamento observado na situação. Foram utilizados três pontos de Gauss, diminuindo em 1 o número adotado para a integração completa. Os resultados da comparação entre as duas metodologias estão apresentados na Tabela 7, simulando as mesmas condições de contorno em cada situação. A partir dela, é possível observar que a integração reduzida, apesar de apresentar deslocamentos maiores para as malhas mais refinadas - o que indica uma redução do travamento -, retorna diferenças muito pequenas quando comparada com a integração completa para a análise de materiais homogêneos na TSDT.

Tabela 7 – Deflexões normalizadas para diferentes malhas.

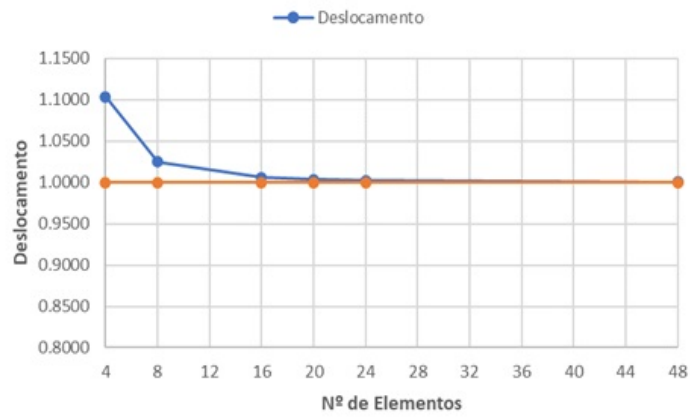
$\bar{w}$	$h/L$	Número de elementos					
		4	8	16	20	24	48
Completa	1/10 <sup>5</sup>	0.8698	0.8197	0.8149	0.8327	0.8690	0.9989
Reduzida	1/10 <sup>5</sup>	0.8686	0.8187	0.8168	0.8409	0.8842	0.9992
Diferença		-0.13%	-0.12%	0.24%	0.97%	1.71%	0.04%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

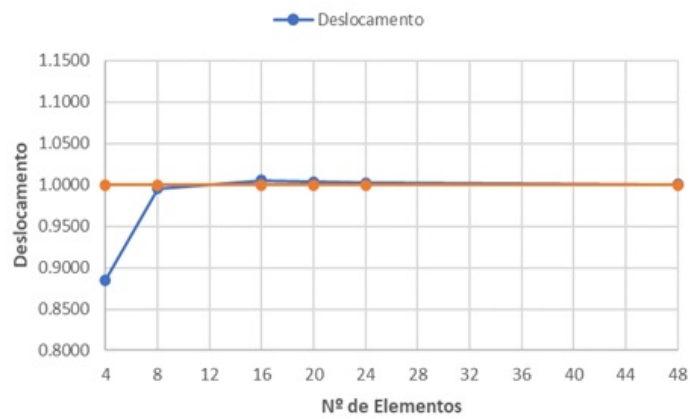
Aplicando novamente a integração reduzida, agora utilizando apenas 2 pontos de Gauss para integrar as matrizes de rigidez, a discussão é alterada. Com os resultados mostrados na Tabela 8, é possível observar que, para as malhas mais grosseiras, a integração com  $npg = 2$  retorna resultados bem próximos aos de referência, implicando uma mitigação considerável do travamento por cisalhamento dessa integração quando comparada à completa. Na medida em

que a malha é refinada, os resultados convergem para um mesmo valor.

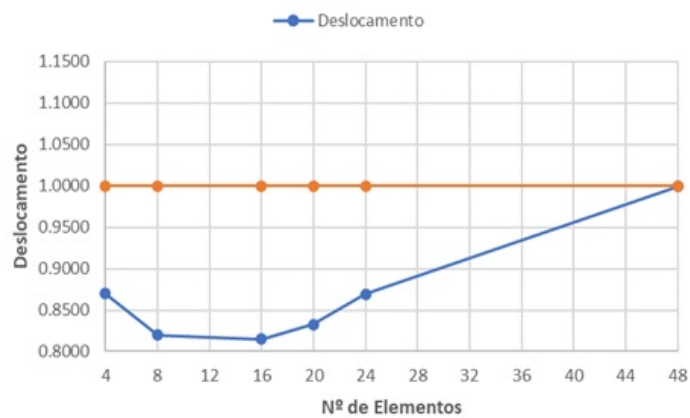
Figura 26 – Deflexões normalizadas para diferentes esbeltezes e malhas.



(a) Deslocamento normalizado para  $h = L/10$ .



(b) Deslocamento normalizado para  $h = L/10^3$ .



(c) Deslocamento normalizado para  $h = L/10^5$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Os dois últimos exemplos de esbeltez são utilizados puramente para a análise teórica

do fenômeno, dado que não são aplicáveis em situações práticas. No dimensionamento de vigas, levando em consideração a utilização de materiais compósitos, a esbelteza geralmente se encontra no intervalo  $h/L = 1/5$  e  $h/L = 1/25$ .

Tabela 8 – Deflexões normalizadas para diferentes malhas.

$\bar{w}$	$h/L$	Número de Elementos					
		4	8	16	20	24	48
Completa	$1/10^5$	0.8698	0.8197	0.8149	0.8327	0.8690	0.9989
Reduzida	$1/10^5$	1.0705	0.9437	0.8796	0.8724	0.8807	0.9939
Diferença		18.75%	13.14%	7.36%	4.56%	1.33%	-0.49%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

É válido ressaltar que, neste trabalho, apenas o refinamento  $k$  foi utilizado para o processo de discretização da malha, mantendo o grau cúbico das funções de base constante, como já especificado anteriormente.

Dessa forma, para analisar estaticamente as estruturas de vigas com gradação funcional, será adotada a Análise Isogeométrica baseada em NURBS de grau cúbico. As matrizes utilizadas na obtenção dos deslocamentos serão calculadas pela Quadratura de Gauss, com a adoção da integração completa. A malha unidimensional da viga será discretizada em 20 elementos isogeométricos, com a finalidade de mitigar o travamento por cisalhamento, dado que a esbelteza é  $h/L = 10$ . A relação largura-comprimento é  $b/L = 1/16$  e a estrutura está sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída de  $-1$  kN/m.

Os resultados são calculados de forma adimensional, a fim de facilitar a reprodução futura do modelo para quaisquer comparações. Isso ocorre a partir da proporção entre os deslocamentos obtidos pela TSDT e os deslocamentos obtidos pela EBT para o isotrópico cerâmico do FGM em questão, cujas relações são  $\bar{w}_{max} = w/w_{EBT}$  e  $\bar{\theta}_{max} = \theta/\theta_{EBT}$ . Para o cálculo do deslocamento horizontal normalizado, como ele não existe nas estruturas isotrópicas, a relação adotada foi  $\bar{u}_{0max} = u_0/w_{EBT}$ . Os valores estão apresentados nas Tabelas 9 e 10 e nas Figuras 27 e 28.

A partir da análise dos resultados das Tabelas 9 e 10, antes de discutir acerca dos modelos micromecânicos, é importante ressaltar alguns pontos. Na situação de  $N = 0$ , em que o material é o próprio isotrópico cerâmico, os deslocamentos normalizados para todos os modelos são iguais, mas diferem da EBT devido a consideração das deformações causadas pelo cisalhamento transversal. Essa diferença pode aumentar ou diminuir conforme o valor da esbelteza, já que, na medida em que a espessura diminui, o efeito dessas deformações também



diminui. Além disso, nas duas situações homogêneas, com  $N = 0$  e  $N \rightarrow \infty$ , os deslocamentos horizontais de membrana são nulos devido ao eixo neutro e o centroide serem coincidentes nas seções transversais.

Tabela 9 – Deslocamentos normalizados para diferentes  $N$  - FGM I.

N		0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_{0max}$	Voigt	0	0.029	0.032	0.026	0.018	0
	MT	0	0.029	0.031	0.024	0.016	0
	SCM	0	0.029	0.031	0.024	0.017	0
$\bar{w}_{max}$	Voigt	1.029	1.277	1.338	1.399	1.451	1.598
	MT	1.029	1.291	1.349	1.411	1.463	1.598
	SCM	1.029	1.290	1.347	1.409	1.462	1.598
$\bar{\theta}_{max}$	Voigt	0.992	1.224	1.283	1.343	1.395	1.541
	MT	0.992	1.238	1.293	1.355	1.407	1.541
	SCM	0.992	1.237	1.292	1.353	1.406	1.541

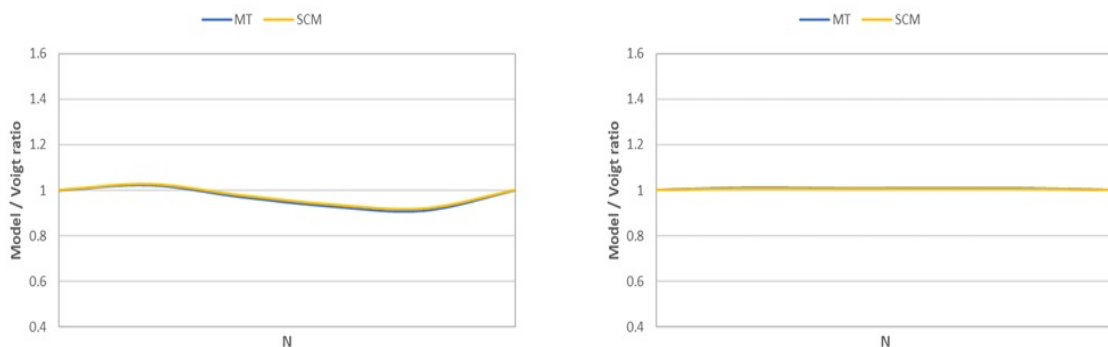
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 10 – Deslocamentos normalizados para diferentes  $N$  - FGM II.

N		0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_{0max}$	Voigt	0	0.147	0.245	0.295	0.256	0
	MT	0	0.216	0.268	0.248	0.192	0
	SCM	0	0.213	0.279	0.267	0.106	0
$\bar{w}_{max}$	Voigt	1.029	2.104	2.704	3.181	3.479	5.586
	MT	1.029	2.630	3.094	3.550	3.960	5.586
	SCM	1.029	2.513	2.978	3.398	4.835	5.586
$\bar{\theta}_{max}$	Voigt	0.992	1.979	2.531	2.996	3.293	5.388
	MT	0.992	2.471	2.912	3.363	3.773	5.388
	SCM	0.992	2.357	2.798	3.212	4.639	5.388

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 27 – Relação entre os deslocamentos de cada modelo micromecânico e Voigt - FGM I.

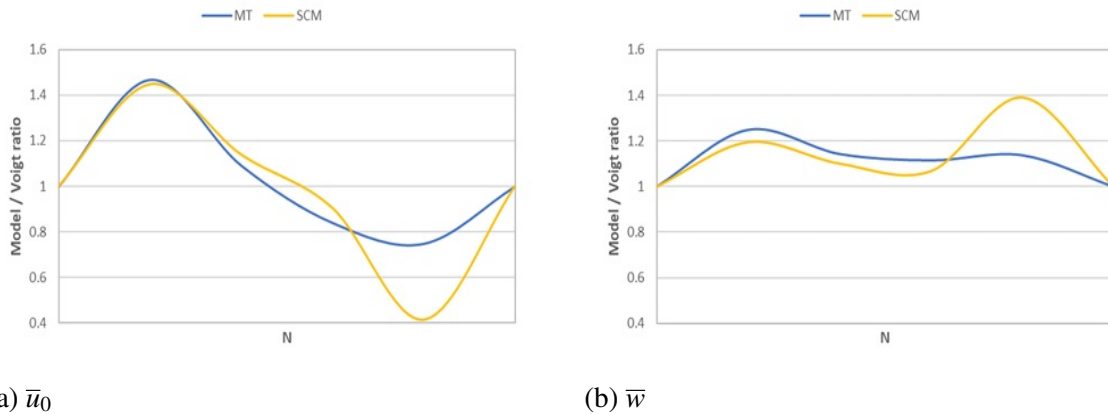


(a)  $\bar{u}_0$

(b)  $\bar{w}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 28 – Relação entre os deslocamentos de cada modelo micromecânico e Voigt - FGM II.



(a)  $\bar{u}_0$

(b)  $\bar{w}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

No que diz respeito aos efeitos das diferentes modelagens dos FGM, é possível observar que o modelo de Voigt retornou os sempre os menores deslocamentos, o que corrobora a observação anterior de que ele superestima a rigidez estrutural. Além disso, para valores baixos de  $N$ , o modelo de Mori-Tanaka calcula os deslocamentos de limite inferior, com o modelo SCM resultando em valores intermediários.

Analisando a Figura 27, pode-se afirmar que as diferenças apresentadas são mínimas para quaisquer valores de  $N$ , inclusive dos efeitos de acoplamento, o que já era esperado devido as propriedades dos componentes serem muito similares, resultando na baixa variação das propriedades efetivas ao longo da espessura.

Entretanto, no comportamento do FGM II, na Figura 28, é possível observar que as diferenças entre as performances dos modelos micromecânicos são bem mais relevantes, devido ao aparecimento de discrepâncias entre os deslocamentos. Com as distintas ordens de grandeza entre as propriedades dos componentes, as diferenças entre dois modelos no FGM II podem chegar a ser 30 vezes maiores do que as observadas no FGM I para um mesmo  $N$ . No mais, isso também implica em uma maior influência do efeito de acoplamento do FGM, já que a variação do eixo neutro se torna bem mais sensível, aumentando os deslocamentos horizontais.

É importante também ressaltar que o SCM possui seu comportamento alterado para materiais não-isotrópicos com altos  $N$ . Isso pode acontecer devido a natureza do cálculo das propriedades efetivas, em que o processo iterativo pode ter sido prejudicado com o aumento dessa grandeza, diminuindo a qualidade da estimativa.

Adicionalmente, com o intuito de discutir mais detalhadamente os benefícios da TSDT em estruturas de viga, os resultados obtidos por Voigt foram comparados com os calculados

pela FSDT a partir da utilização do mesmo modelo e para ambas as configurações de FGM. Os resultados mostrados nas Tabelas 11 e 12 são as razões entre os dois deslocamentos. As diferenças relativas são ilustradas na Figura 29.

Tabela 11 – Razão entre os deslocamentos da  $TSDT/FSDT$  - FGM I.

$N$	0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_{0max}$	0	1.000	1.000	1.001	1.010	0
$\bar{w}_{max}$	1.000	1.005	1.004	1.002	0.998	1.000
$\bar{\theta}_{max}$	0.992	0.991	0.991	0.991	0.989	0.992

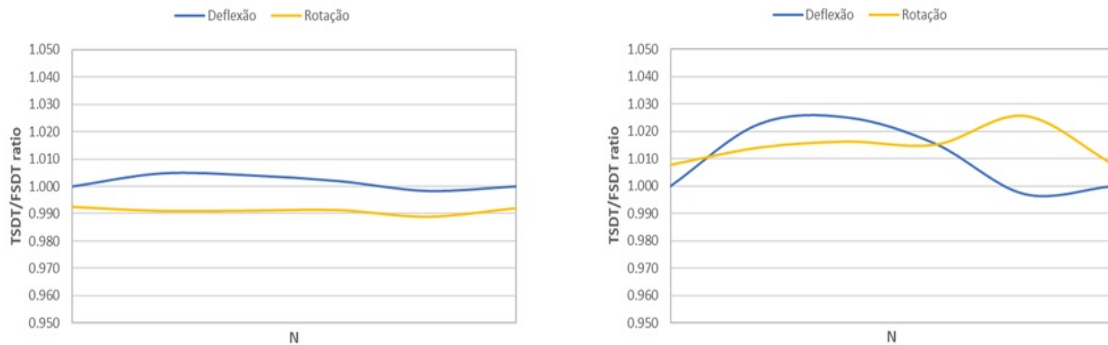
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 12 – Razão entre os deslocamentos da  $TSDT/FSDT$  - FGM II.

$N$	0	1	2	5	10	$\infty$
$\bar{u}_{0max}$	0	1.000	0.999	1.000	1.000	0
$\bar{w}_{max}$	1.000	1.023	1.025	1.015	0.997	1.000
$\bar{\theta}_{max}$	1.008	1.014	1.016	1.015	1.026	1.008

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 29 – Razão entre os deslocamentos da  $TSDT/FSDT$ .



(a) FGM I.

(b) FGM II.

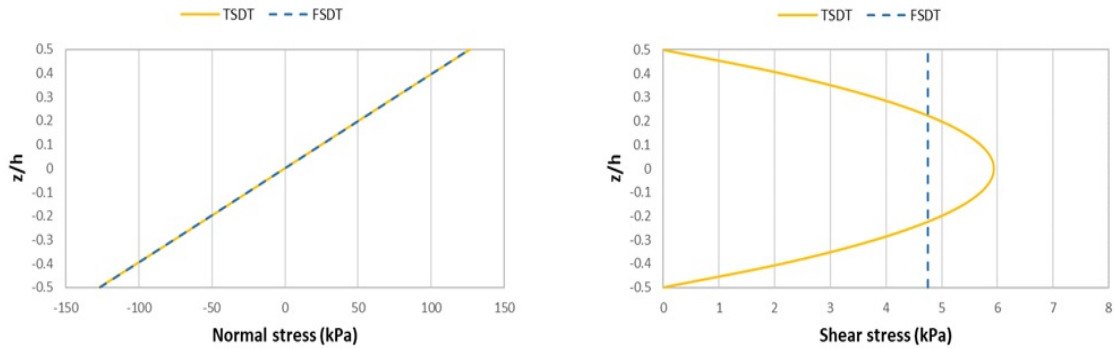
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Dessa forma, a partir da Figura 29, é possível observar que as diferenças entre os modelos se acentuam para o FGM II, chegando a um máximo de 2.5% dentre os  $N$  analisados. Para o FGM I, que apresenta uma graduação mais suave devido as propriedades dos seus componentes, as teorias retornam deslocamentos muito próximos, não diferindo sequer 1%. É possível observar também que há diferenças inerentes às formulações que resultam em distintas rotações mesmo para os isotrópicos cerâmicos e metálicos, ainda que de uma pequena ordem de grandeza.

Além disso, é válido observar o perfil de distribuição de tensões ao longo da seção transversal, uma vez que essa é uma relevante diferença entre as teorias. Portanto, na Figura 30

estão ilustradas a tensão normal e a de cisalhamento para o componente cerâmico do FGM I, enquanto que na Figura 31 estão ilustradas as mesmas grandezas, mas para  $N = 1$ , modelado por Voigt.

Figura 30 – Distribuição de tensões na seção transversal para a estrutura homogênea.

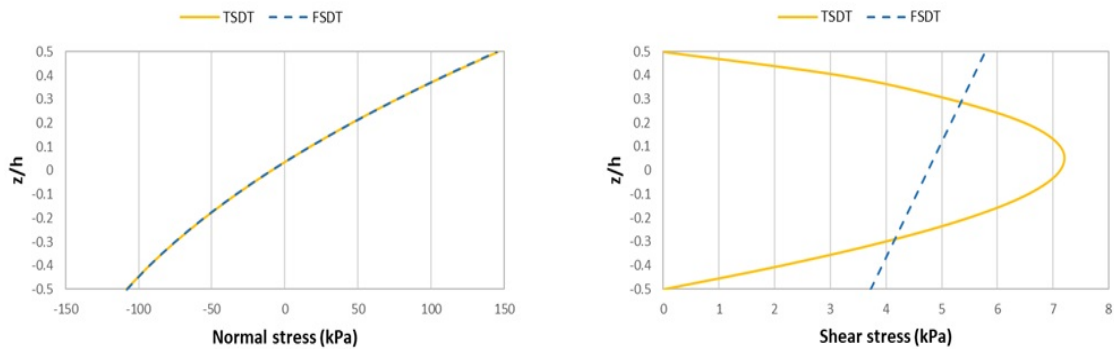


(a) Tensão normal.

(b) Tensão de cisalhamento.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 31 – Distribuição de tensões na seção transversal para a estrutura com gradação funcional.



(a) Tensão normal.

(b) Tensão de cisalhamento.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Primeiramente, é importante lembrar que as teorias de vigas apenas definem as deformações por membrana e flexão e por cisalhamento, enquanto as tensões são calculadas por meio da relação constitutiva para materiais em regime elástico. Devido a isso, pode-se observar que na Figura 31 a distribuição das tensões tem seu comportamento alterado devido a variação das propriedades efetivas do material ao longo da espessura.

Por outro lado, para o caso homogêneo mostrado na Figura 30 onde as propriedades são constantes, é possível ver que, enquanto a TSDT estima uma distribuição parabólica da tensão por cisalhamento, a FSDT falha em simular quaisquer variações, apresentando valor

constante, influenciado por um coeficiente de correção. Dessa forma, os resultados corroboram o esperado pelas discussões apresentadas durante a introdução destas teorias neste trabalho.

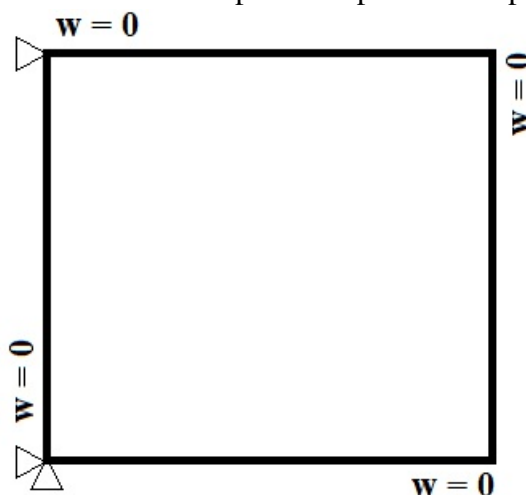
## 6.2 Placas com Gradação Funcional

Diferentemente das vigas, as placas são estruturas bem mais complexas, suscitando de um maior cuidado no desenvolvimento das equações governantes, como já observado no Capítulo 5. Dessa forma, as validações para materiais homogêneos e com gradação funcional foram feitas separadamente. No decorrer dessa seção, serão apresentados tanto os resultados obtidos nos processos de validação quanto os provenientes dos estudos propostos por esse trabalho.

### 6.2.1 Validação para materiais homogêneos

Para a validação da teoria utilizada para estruturas compostas por materiais homogêneos, foram realizadas várias análises de uma placa quadrada, com todos os bordos simplesmente apoiados, considerando diferentes espessuras e discretizações de malha. Foi aplicada uma carga uniformemente distribuída  $q = -1 \text{ kN/m}^2$  e as condições de contorno utilizadas foram ilustradas na Figura 32.

Figura 32 – Condições de contorno de uma placa simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

As máximas deflexões na placa, que ocorrem no ponto médio, calculadas pela TSDT foram comparadas com os valores obtidos a partir da RMPT. Isso foi feito com o auxílio dos softwares *Finite Element Analysis Tool* (FAST) e ABAQUS. O material isotrópico utilizado é o

$Al_2O_3$ , componente cerâmico do FGM II, cujas propriedades estão definidas na Tabela 4. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 13, 14 e 15.

Tabela 13 – Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 4x4.

$h/L$	1/5	1/10	1/50	1/100
TSDT	1.97E-08	1.31E-07	1.49E-05	1.19E-04
FSDT	1.99E-08	1.33E-07	1.49E-05	1.19E-04
Diferença	-1.26%	-1.05%	-0.12%	-0.03%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 14 – Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 16x16.

$h/L$	1/5	1/10	1/50	1/100
TSDT	1.94E-08	1.31E-07	1.48E-05	1.17E-04
FSDT	1.99E-08	1.33E-07	1.48E-05	1.17E-04
Diferença	-2.52%	-1.21%	-0.20%	-0.07%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 15 – Deflexões máximas para uma malha isogeométrica 32x32.

$h/L$	1/5	1/10	1/50	1/100
TSDT	1.94E-08	1.31E-07	1.48E-05	1.17E-04
FSDT	1.99E-08	1.33E-07	1.49E-05	1.18E-04
Diferença	-2.52%	-1.21%	-0.19%	-0.09%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como pode ser observado a partir dos resultados, independentemente da malha utilizada, os valores se aproximam na medida em que se aumenta a esbeltez da placa. Como as teorias comparadas definem de forma diferente os efeitos do cisalhamento transversal ao longo da seção transversal, as diferenças entre elas ficam mais evidentes em estruturas mais espessas, retornando deflexões com maiores diferenças percentuais. Na medida em que a espessura diminui, os efeitos do cisalhamento transversal diminuem sua parcela quando comparado aos de membrana e de flexão, o que justifica a similaridade dos valores.

Além disso, na Tabela 14, quando comparada a uma malha mais grosseira, vide Tabela 13, é visto que há uma acentuação das diferenças entre as teorias para maiores espessuras. Por outro lado, o refinamento da malha para 32 elementos em cada direção não retornou nenhuma diferença significativa, como visto na Tabela 15, o que demonstra que essas diferenças percentuais entre os resultados, até mesmo para as maiores esbeltezes, são intrínsecas as diferentes hipóteses adotadas, de forma independente a discretização da estrutura.

### 6.2.2 Validação para materiais com gradação funcional

Para a validação da formulação e da implementação computacional da teoria para estruturas compostas por materiais com gradação funcional, foi utilizado o exemplo discutido por Ferreira *et al.* (2004).

Dessa forma, foi modelada uma placa quadrada com relação  $h/L = 1/20$ . Os componentes do material com gradação funcional e suas respectivas propriedades estão apresentados na Tabela 16. A placa está sujeita a uma carga uniformemente distribuída e normalizada de  $q = E_c h^4 \text{ kN/m}^2$ , com as condições de contorno apresentadas na Figura 32. As deflexões calculadas também são apresentadas de forma normalizada, com  $\bar{w} = w/h$ . Ambos os modelos micromecânicos utilizados foram validados com o auxílio de uma malha isogeométrica cúbica  $32 \times 32$ , com os resultados e as comparações feitas apresentados nas Tabelas 17 e 18.

Tabela 16 – Propriedades do FGM do exemplo de validação.

FGM - Validação		
Material	E (GPa)	$\nu$
ZrO <sub>2</sub> [c]	151	0.3
Al [m]	70	0.3

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 17 – Deflexões normalizadas para diferentes  $N$  - Voigt.

$N$	0	0.50	1.00
FAST	0.0216	0.0276	0.0309
Ferreira <i>et al.</i> (2004)	0.0208	0.0265	0.0297
Diferença	3.85%	4.06%	3.91%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 18 – Deflexões normalizadas para diferentes  $N$  - Mori-Tanaka.

$N$	0	0.50	1.00
FAST	0.0216	0.0289	0.0321
Ferreira <i>et al.</i> (2004)	0.0208	0.0279	0.0309
Diferença	3.85%	3.72%	3.72%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na comparação de resultados, é importante ressaltar que Ferreira *et al.* (2004) fazem a análise por meio de um método de análise sem malha, diferindo do modelo isogeométrico utilizado para o presente estudo, mesmo adotando a mesma teoria cinemática. Portanto, como o erro é basicamente constante com o aumento do  $N$ , é possível afirmar que ele é inerente aos

distintos métodos computacionais utilizados por ambos os trabalhos, já que a situação do FGM é semelhante ao homogêneo.

Para confirmar a discussão do parágrafo anterior, os resultados da TSDT são agora comparados com os da FSDT para ambos os modelos micromecânicos utilizando a mesma malha isogeométrica. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 19 e 20 .

Como a placa é fina, as estimativas feitas pelas teorias se aproximam, retornando deslocamentos próximos. Dessa forma, pode-se atestar a consistência da formulação adotada para o presente trabalho referente ao uso de estruturas com FGM, permitindo o estudo posterior acerca dos diferentes modelos micromecânicos e da aplicabilidade da TSDT.

Tabela 19 – Deflexões normalizadas para diferentes  $N$  - Mori-Tanaka.

$N$	0	0.50	1.00
TSDT	0.0216	0.0276	0.0309
FSDT	0.0217	0.0275	0.0306
Diferença	-0.52%	0.15%	0.78%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 20 – Deflexões normalizadas para diferentes  $N$  - Mori-Tanaka.

$N$	0	0.50	1.00
TSDT	0.0216	0.0289	0.0321
FSDT	0.0217	0.0288	0.0318
Diferença	-0.52%	0.36%	0.84%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

### 6.2.3 Placa simplesmente apoiada

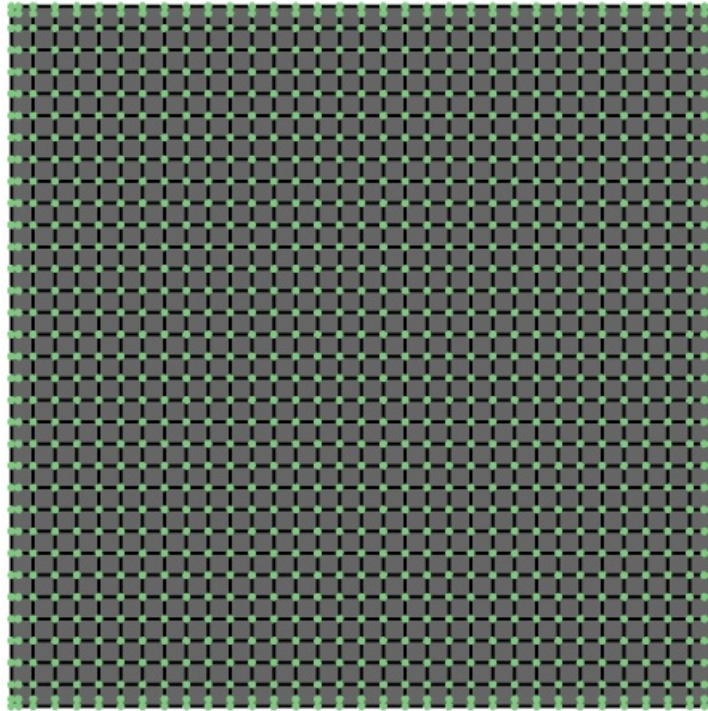
Nesta seção, serão analisadas placas quadradas com gradação funcional, com as condições de contorno aplicadas conforme Figura 32 e discretizadas por uma malha isogeométrica 32x32, ilustrada na Figura 33. Elas serão submetidas a uma carga uniformemente distribuída  $q = -1 \text{ kN/m}^2$ , com relação  $h/L = 1/10$  e, para fornecer um estudo mais detalhado, serão modeladas por dois FGM distintos, cujas propriedades estão definidas na Tabela 4. As deflexões são normalizadas a partir da relação com a espessura  $\bar{w} = w/h$ .

Adicionalmente, é importante estudar a diferença entre os resultados fornecidos pela TSDT e pela FSDT, uma vez que ambas as teorias são atualmente relevantes no âmbito da pesquisa científica. Dessa forma, novamente para ambos os FGM, a placa foi analisada por meio da utilização da teoria de Reissner-Mindlin com o auxílio de outra rotina do FAST. A



comparação entre os resultados está disposta nas Tabelas 21 e 22.

Figura 33 – Malha Isogeométrica 32x32.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 21 – Comparação entre as teorias para o FGM I.

$N$		0	0.5	1	2	5	10	$\infty$
Voigt	TSDT	1.54E-06	1.79E-06	1.91E-06	2.00E-06	2.10E-06	2.18E-06	2.40E-06
	FSDT	1.56E-06	1.81E-06	1.92E-06	2.01E-06	2.12E-06	2.20E-06	2.43E-06
Diferença		-1.19%	-0.96%	-0.79%	-0.75%	-0.96%	-1.10%	-1.19%
MT	TSDT	1.54E-06	1.82E-06	1.93E-06	2.02E-06	2.12E-06	2.20E-06	2.40E-06
	FSDT	1.56E-06	1.83E-06	1.94E-06	2.03E-06	2.14E-06	2.22E-06	2.43E-06
Diferença		-1.19%	-0.93%	-0.79%	-0.79%	-1.00%	-1.12%	-1.19%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 22 – Comparação entre as teorias para o FGM II.

$N$		0	0.5	1	2	5	10	$\infty$
Voigt	TSDT	1.31E-06	2.00E-06	2.60E-06	3.33E-06	4.00E-06	4.43E-06	7.12E-06
	FSDT	1.33E-06	1.99E-06	2.51E-06	3.13E-06	3.80E-06	4.33E-06	7.20E-06
Diferença		-1.19%	0.75%	3.59%	6.60%	5.32%	2.34%	-1.19%
Mori	TSDT	1.31E-06	2.63E-06	3.28E-06	3.88E-06	4.53E-06	5.08E-06	7.12E-06
	FSDT	1.33E-06	2.55E-06	3.13E-06	3.71E-06	4.43E-06	5.07E-06	7.20E-06
Diferença		-1.19%	2.99%	4.85%	4.79%	2.08%	0.27%	-1.19%

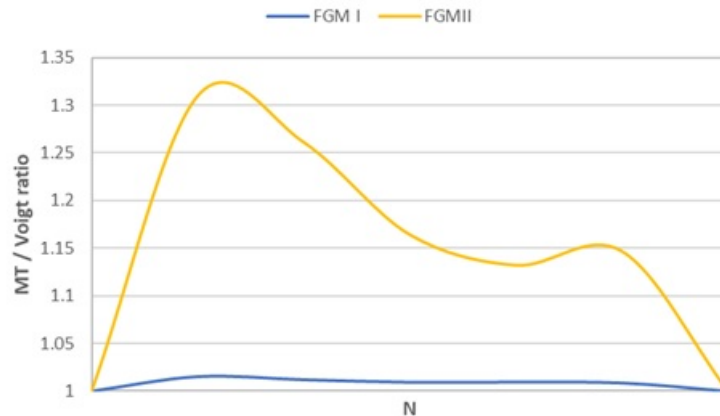
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Ao se observar os resultados fornecidos pelas Tabelas 21 e 22, percebe-se um

comportamento semelhante ao discutido para vigas, onde o FGM II, em que os componentes apresentam maior distinção entre as propriedades, retorna uma diferença considerável no que tange a escolha do modelo micromecânico, enquanto o FGM I apresenta diferenças bem mais discretas. Essa distinção pode ser melhor observada a partir da Figura 34, onde as deflexões normalizadas pelo Mori-Tanaka são divididas pelas calculadas por Voigt.

Na Figura 35 estão apresentadas as comparações da utilização da TSDT e da FSDT para ambos os modelos micromecânicos utilizados. Dessa forma, pode-se afirmar que as teorias apresentam maior distinção dos resultados para valores de  $N$  intermediários, principalmente para o FGM II. A diferença entre os isotrópicos pode ser explicada devido as hipóteses cinemáticas das teorias, até porque a placa não é tão fina, o que aumenta os efeitos do cisalhamento transversal.

Figura 34 – Relação Mori-Tanaka/Voigt entre as deflexões.



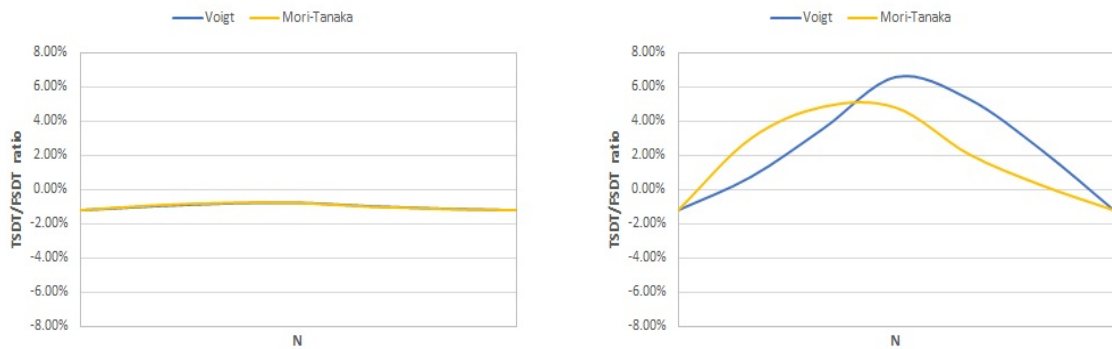
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na medida em que a gradação se acentua, a TSDT apresenta uma maior diminuição da rigidez em relação a FSDT, aumentando comparativamente os seus deslocamentos. Para o FGM II, inclusive, a diferença entre os resultados passou dos 6%, valor relevante ao se tratar apenas de considerações cinemáticas diferentes. Adicionalmente, no que tange aos diferentes modelos micromecânicos utilizados, para o FGM II a diferença entre as teorias foi um pouco menor ao se utilizar o Mori-Tanaka, mostrando que a estimativa das propriedades por Voigt varia mais a depender das hipóteses cinemáticas adotadas.

Além disso, é interessante observar que, devido a simetria da placa em relação ao deslocamento  $w$ , a deflexão calculada no centro da placa é a máxima para a estrutura, aumentando a relevância do estudo, já que essa flecha é uma grandeza necessária para o processo de dimensionamento. O modo de deformação da placa é ilustrado na Figura 36, onde o gradiente de cores simula a distribuição da deflexão na seção longitudinal da placa, com o máximo sendo

no centro e o mínimo nas extremidades.

Figura 35 – Relação das deflexões TSDT/FSDT.

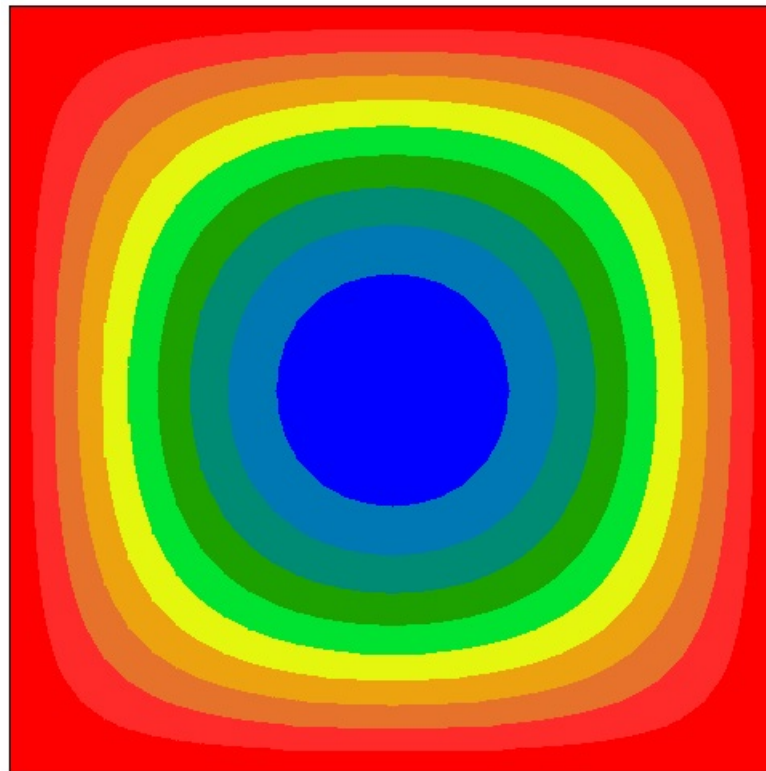


(a) FGM I.

(b) FGM II.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 36 – Modo de deformação da placa com gradação funcional.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Por fim, ao se tratar do custo computacional, devido a maior complexidade da implementação da TSDT, o tempo consumido para a análise estrutural completa de placas é, em média, 40% maior quando comparado com o tempo consumido pela FSDT. Ou seja, para o caso de consecutivas análises, como o presente trabalho, a utilização da teoria de mais alta ordem pode resultar em tempos bem mais elevados de simulação computacional. Para simplificar

essa discussão, para os casos homogêneos, foram utilizadas as implementações de FGM com expoente  $N$  nulo.

## 7 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma formulação isogeométrica baseada em NURBS para a implementação de uma TSDT para a análise linear de vigas e de placas com gradação funcional. A utilização dessa teoria permite a consideração exata dos efeitos do cisalhamento transversal ao longo da seção transversal da estrutura, conforme ditado pela Teoria da Elasticidade, o que elimina a necessidade de quaisquer fatores de correção, como necessitado pela FSDT.

A formulação proposta foi discutida, implementada e utilizada com êxito, a partir da validação de sua consistência em comparações com exemplos da literatura. A partir disso, foi feita uma comparação com a FSDT por meio da consideração de diversos parâmetros, como o ganho de precisão, o custo computacional devido a implementação mais robusta de equações governantes e a consistência do comportamento estimado pelas hipóteses cinemáticas em estruturas homogêneas e com gradação funcional.

Além disso, também foi proposta uma discussão acerca da importância da escolha do modelo micromecânico no processo de concepção do FGM a partir da comparação da performance de dois materiais distintos.

Dessa forma, constatou-se que, ao se tratar de estruturas unidimensionais, os efeitos do cisalhamento transversal não foram mitigados pela utilização da integração reduzida mais simples, apenas diminuindo em 1 o número de pontos de Gauss. Entretanto, ao se reduzir ainda mais o número de pontos de integração, a integração reduzida se mostrou eficiente em combater os efeitos do cisalhamento transversal, principalmente ao considerar malhas grosseiras, uma vez que a discretização implica na convergência para um mesmo valor independentemente da metodologia de integração adotada.

Além disso, o ganho de precisão para os deslocamentos obtidos pela utilização da TSDT foi quase insignificante, apesar de haver uma grande melhora na distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da espessura, evitando a necessidade de utilização do  $k_s$ . No que tange ao custo computacional, mesmo a implementação sendo mais complexa que a FSDT, o aumento é irrisório, resultando praticamente no mesmo tempo de análise.

Por outro lado, para as placas, os resultados mostraram que, enquanto o ganho de precisão para estruturas homogêneas é baixo, esse valor pode aumentar muito a depender da configuração adotada na modelagem do FGM. Caso as propriedades dos componentes sejam relativamente grandes, os deslocamentos calculados pela TSDT e pela FSDT podem ser significativamente diferentes. Adicionalmente, o custo computacional para placas é uma

variável a ser considerada para a escolha da teoria abordada. A implementação pra estruturas bidimensionais é muito complexa, com grandes matrizes e derivadas aninhadas, o que resultou em um tempo médio de análise 40% maior quando comparado ao da FSDT. Portanto, dependendo do objetivo da análise, há de se ponderar se o ganho de precisão compensa o aumento do custo computacional.

No mais, é válido ressaltar que todas as análises utilizando a TSDT foram utilizando bordos simplesmente apoiados e estruturas simples, sem a necessidade de partição da malha em múltiplos patches. Isso ainda facilitou bastante a implementação, dado que não é necessária nem a prescrição do grau de liberdade  $\partial w / \partial n$  nem a imposição da continuidade  $C^1$  entre patches isogeométricos, o que aumentaria ainda mais o custo computacional para a implementação da teoria.

Por fim, ao se analisar os resultados, é perceptível que a escolha do modelo micromecânico é uma decisão com grau de importância variável, que é muito influenciado pelas propriedades dos componentes. Caso os componentes tenham uma performance física similar, os deslocamentos são bem próximos, não apresentando diferença significativa. Entretanto, na medida em que esses valores se distinguem, é necessário ter uma maior cautela no processo de modelagem do FGM, dado que os modelos estimam estruturas com rigidezes discrepantes. Além disso, é válido pontuar que, apesar do modelo de Voigt ser o modelo micromecânico mais utilizado pela literatura, ele sempre superestima a rigidez estrutural, o que é contra a segurança pregada pelo âmbito da construção civil.

## REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H.; MAITOURNAM, H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. part ii: Plates and shells. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 106–137, 2015.
- ADAM, C.; HUGHES, T. J. R.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Selective and reduced numerical integrations for nurbs-based isogeometric analysis. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 732–761, 2015.
- AKBARZADEH, A. H.; ABEDINI, A.; CHEN, Z. T. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 119, p. 598–609, 2015.
- AKGOZ, B.; CIVALEK, O. Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (fgm). **Composites Part B: Engineering**, v. 55, p. 263–268, 2013.
- BARROS, R. M. Isogeometric analysis of functionally graded beams. Apresentado no XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. 2020.
- BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isométrica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2015.
- BATANI, M.; KIANI, Y.; ESLAMI, M. R. A comprehensive study on stability of fgm plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2013.
- BORDEN, M. J.; SCOTT, M. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2011.
- CHOI, J. H.; CHO, J. R. Optimum material design of metal-ceramic hybrid functionally graded composite. **Materials Science Forum**, v. 569, p. 121–124, 2008.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. [S.l.]: John Wiley Sons, inc., 2002.
- DO, D.; LEE, D.; LEE, J. Material optimization of functionally graded plates using deep neural network and modified symbiotic organisms search for eigenvalue problems. **Composites Part B: Engineering**, v. 159, p. 300–326, 2019.
- FERREIRA, A. J. M.; BATRA, R. C.; ROQUE, C. M. C.; QIAN, L. F.; MARTINS, P. A. L. S. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. **Composite Structures**, 2004.
- HUGHES T. J. R., C. J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135–4195, 2005.
- JHA, D.; KANT, T.; SINGH, R. A critical review of recent research on functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 96, p. 833–849, 2013.

- KOIZUMI, M. Fgm activities in japan. **Composites Part B**, p. 1–4, 1997.
- LI, K.; QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. **Computer-Aided Design**, v. 43, p. 1427–1437, 2011.
- LI, X.; ZHANG, J.; ZHENG, Y. Nurbs-based isogeometric analysis of beams and plates using high order shear deformation theory. **Mathematical Problems in Engineering**, 2013.
- MEDEIROS JR., M. S.; JR., E. P.; MELO, A. M. C. D. Influence of the micromechanics models and volume fraction distribution on the overall behavior of sic/al functionally graded pressurized cylinders. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 4, 2019.
- MURÍN, J.; AMIMBAGHAI, M.; HRABOVSKÝ, J. Elastostatic analysis of the spatial fgm structures. **Journal of MECHANICAL ENGINEERING**, v. 65, p. 27–56, 2015.
- NAEBE, M.; SHIRVANIMOGHADDAM, K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. **Applied Materials Today**, v. 5, p. 223–245, 2016.
- PANDEY, S.; PRADYUMNA, S. Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. **Composites Part B: Engineering**, v. 153, p. 325–336, 2018.
- PERDUTA, A.; PUTANOWICZ, R. Tools and techniques for building models for isogeometric analysis. **Advances in Engineering Software**, v. 127, p. 70–81, 2019.
- PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. [S.l.]: Springer, 1995. (Monographs in Visual Communication).
- PRACIANO, J. S. C. **ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS LAMINADAS E DE MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO ISOGEOMÉTRICA**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2018.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S.l.]: CRC Press, 2004.
- REITER, T.; DVORAK, G. J. Micromechanical models for graded composite materials: Ii. thermomechanical loading. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 46, n. 9, 1998.
- REITER, T.; DVORAK, G. J.; TVERGAARD, V. Micromechanical models for graded composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 45, n. 8, 1997.
- SHEN, H. S. **Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells**. [S.l.]: CRC Press, 2009.
- SHEN, H.-S.; WANG, Z.-X. Assessment of voigt and mori–tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 94, n. 7, p. 2197–2208, 2012.
- TOULOUKIAN, Y. S. **Thermophysical Properties Research Literature Retrieval Guide**. [S.l.: s.n.], 1967.
- TRAN, L. V.; FERREIRA, A. J. M.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. **Composites: Part B**, v. 51, p. 368–383, 2013.



UDUPA, G.; RAO, S. S.; GANGADHARAN, K. Functionally graded composite materials: An overview. **Procedia Materials Science**, v. 5, p. 1291–1299, 2014.

WANG, C.; YU, T.; CURIEL-SOSA, J. L.; XIE, N.; BUI, T. Q. Adaptive chaotic particle swarm algorithm for isogeometric multi-objective size optimization of fg plates. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 2, p. 757–778, 2019.

WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K. H. **Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions**. [S.l.]: Elsevier Science Ltd., 2000.

WATARI, F.; YOKOYAMA, A.; OMORI, M.; HIRAI, T.; KONDO, H.; UO, M.; KAWASAKI, T. Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. **Composites Science and Technology**, v. 64, p. 893–908, 2004.

YE, R.; ZHAO, N.; YANG, D. Bending and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded soft core, using the new refined higher-order analysis model. **Journal of Sandwich Structures Materials**, 2020.

ZHAO, X.; LEE, Y. Y.; LIEW, K. M. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-ritz method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 319, p. 918–939, 2008.

## APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DAS MATRIZES C E B PARA VIGAS NO MATLAB

```

1 % ===== CalcMatBb =====
2 %
3 % Evaluate the [B] matrix of a Reddy beam element.
4 %
5 % m - number of control points (in)
6 % N - vector with the shape functions (in)
7 % dNx - vector with dNi/dx (in)
8 % B - strain-displacement matrix (out)
9 %
10 function [Bb] = CalcMatBb(m, N, dNx, dN2x, h)
11
12 Bb = zeros(3, 3*m);
13 for i = 1:m
14     Bb(1, 3*i-2) = dNx(i); % Bending - u0
15     Bb(1, 3*i-1) = 0; % Bending - v
16     Bb(1, 3*i) = 0; % Bending - theta
17     Bb(2, 3*i-2) = 0; % Bending - u0
18     Bb(2, 3*i-1) = 0; % Bending - v
19     Bb(2, 3*i) = dNx(i); % Bending - theta
20     Bb(3, 3*i-2) = 0; % Bending - u0
21     Bb(3, 3*i-1) = -4/(3*h^2)*dN2x(i); % Bending - v
22     Bb(3, 3*i) = -4/(3*h^2)*dNx(i); % Bending - theta
23
24 end
25 end

```

```

1 % ===== CalcMatBs =====
2 %
3 % Evaluate the [B] matrix of a Reddy beam element.
4 %
5 % m - number of control points (in)
6 % N - vector with the shape functions (in)
7 % dNx - vector with dNi/dx (in)
8 % B - strain-displacement matrix (out)
9 %
10 function [Bs] = CalcMatBs(m, N, dNx, h)
11
12 Bs = zeros(2, 3*m);
13 for i = 1:m
14     Bs(1, 3*i-2) = 0; % Shear - u0
15     Bs(1, 3*i-1) = dNx(i); % Shear - v
16     Bs(1, 3*i ) = N(i); % Shear - theta
17     Bs(2, 3*i-2) = 0; % Shear - u0
18     Bs(2, 3*i-1) = -4/(h^2)*dNx(i); % Shear - v
19     Bs(2, 3*i ) = -4/(h^2)*N(i); % Shear - theta
20 end
21 end

```

```

1 % ===== CalcMatCbCs =====
2 %
3 % Evaluate the [B] matrix of a Reddy beam element.
4 %
5 % m - number of control points (in)
6 % N - vector with the shape functions (in)
7 % dNx - vector with dNi/dx (in)
8 % B - strain-displacement matrix (out)
9 %
10 function [Cb, Cs] = CalcCbCs(E, G, npg, h)
11 % Evaluate the ABDG matrices using Gaussian quadrature.
12 [r, w] = GaussPts1D(npg);
13 Ab = 0;
14 Bb = 0;
15 Db = 0;
16 Eb = 0;
17 Fb = 0;
18 Hb = 0;
19 As = 0;
20 Bs = 0;
21 Ds = 0;
22 Jac = h/2; % Jacobian
23
24 for i = 1:npg
25     z = r(i)*Jac;
26     Ab = Ab + Jac*w(i)*E(i);
27     Bb = Bb + Jac*w(i)*z*E(i);
28     Db = Db + Jac*w(i)*(z^2)*E(i);
29     Eb = Eb + Jac*w(i)*(z^3)*E(i);
30     Fb = Fb + Jac*w(i)*(z^4)*E(i);
31     Hb = Hb + Jac*w(i)*(z^6)*E(i);
32     As = As + Jac*w(i)*G(i);
33     Bs = Bs + Jac*w(i)*(z^2)*G(i);
34     Ds = Ds + Jac*w(i)*(z^4)*G(i);
35 end
36
37 % Mount the Cb matrix.
38 Cb = [Ab, Bb, Eb;
39       Bb, Db, Fb;
40       Eb, Fb, Hb];
41
42 % Mount the Cs matrix.
43 Cs = [As, Bs;
44       Bs, Ds];
45
46 Cb;
47 Cs;
48 end

```

## APÊNDICE B – IMPLEMENTAÇÃO DAS MATRIZES C E B PARA PLACAS NO C++

```

1 // ===== BMatrix =====
2
3 void cTSDTPlate :: BMatrix(double thk, int nn, double *shpfunc, double *mapfunc, sNodeCoord
4     *coord, sNodeCoord *drvshp, sNodeDrv *drvshp2, cMatrix &B)
5 {
6     // Compute the derivatives z,x and z,y.
7
8     int i;
9     double coef = -4.0/(3.0*thk);
10
11     // Assembly [B].
12
13     for (i = 0; i < nn; i++)
14     {
15         B[0][5*i] = drvshp[i].x;
16         B[0][5*i+1] = 0.0;
17         B[0][5*i+2] = 0.0;
18         B[0][5*i+3] = 0.0;
19         B[0][5*i+4] = 0.0;
20
21         B[1][5*i] = 0.0;
22         B[1][5*i+1] = drvshp[i].y;
23         B[1][5*i+2] = 0.0;
24         B[1][5*i+3] = 0.0;
25         B[1][5*i+4] = 0.0;
26
27         B[2][5*i] = drvshp[i].y;
28         B[2][5*i+1] = drvshp[i].x;
29         B[2][5*i+2] = 0.0;
30         B[2][5*i+3] = 0.0;
31         B[2][5*i+4] = 0.0;
32
33         B[3][5*i] = 0.0;
34         B[3][5*i+1] = 0.0;
35         B[3][5*i+2] = 0.0;
36         B[3][5*i+3] = drvshp[i].x;
37         B[3][5*i+4] = 0.0;
38
39         B[4][5*i] = 0.0;
40         B[4][5*i+1] = 0.0;
41         B[4][5*i+2] = 0.0;
42         B[4][5*i+3] = 0.0;
43         B[4][5*i+4] = drvshp[i].y;
44
45         B[5][5*i] = 0.0;
46         B[5][5*i+1] = 0.0;
47         B[5][5*i+2] = 0.0;

```

```

47     B[5][5*i+3] = drvshp[i].y;
48     B[5][5*i+4] = drvshp[i].x;
49
50     B[6][5*i ] = 0.0;
51     B[6][5*i+1] = 0.0;
52     B[6][5*i+2] = coef*drvshp2[i].xx; // drv2shp.x
53     B[6][5*i+3] = coef*drvshp[i].x;
54     B[6][5*i+4] = 0.0;
55
56     B[7][5*i ] = 0.0;
57     B[7][5*i+1] = 0.0;
58     B[7][5*i+2] = coef*drvshp2[i].yy; // drv2shp.y
59     B[7][5*i+3] = 0.0;
60     B[7][5*i+4] = coef*drvshp[i].y;
61
62     B[8][5*i ] = 0.0;
63     B[8][5*i+1] = 0.0;
64     B[8][5*i+2] = coef*2.0*drvshp2[i].xy; // drv2shp.xy
65     B[8][5*i+3] = coef*drvshp[i].y;
66     B[8][5*i+4] = coef*drvshp[i].x;
67
68     B[9][5*i ] = 0.0;
69     B[9][5*i+1] = 0.0;
70     B[9][5*i+2] = drvshp[i].x;
71     B[9][5*i+3] = shpfunc[i];
72     B[9][5*i+4] = 0.0;
73
74     B[10][5*i ] = 0.0;
75     B[10][5*i+1] = 0.0;
76     B[10][5*i+2] = drvshp[i].y;
77     B[10][5*i+3] = 0.0;
78     B[10][5*i+4] = shpfunc[i];
79
80     B[11][5*i ] = 0.0;
81     B[11][5*i+1] = 0.0;
82     B[11][5*i+2] = 3.0*coef*drvshp[i].x;
83     B[11][5*i+3] = 3.0*coef*shpfunc[i];
84     B[11][5*i+4] = 0.0;
85
86     B[12][5*i ] = 0.0;
87     B[12][5*i+1] = 0.0;
88     B[12][5*i+2] = 3*coef*drvshp[i].y;
89     B[12][5*i+3] = 0.0;
90     B[12][5*i+4] = 3*coef*shpfunc[i];
91 }
92 }

```

```
1 // ===== CMatrix =====
2
3 void cTSDTPlate :: CMatrix(double *param, cMatrix &C)
4 {
5     double E = param[0];
6     double nu = param[1];
7     double G = 0.5*E/(1.0 + nu);
8     double d = 1.0/(1.0 - nu*nu);
9
10    C.Zero( );
11
12    // Plane-stress terms.
13
14    C[0][0] = d*E;
15    C[1][1] = d*E;
16    C[0][1] = C[1][0] = d*nu*E;
17    C[2][2] = G;
18
19    // Transverse shear terms.
20
21    C[3][3] = G;
22    C[4][4] = G;
23 }
```

```

1 // ===== CalcCz =====
2
3 void cSecAnTSDTFGMPlate :: CalcCz(double z, cMatrix &Ch, cMatrix &Cz)
4 {
5     Cz.Zero( );
6
7     // Membrane and bending terms.
8
9     for (int i = 0; i < 3; i++)
10        for (int j = 0; j < 3; j++)
11            {
12                Cz[i][j] = Ch[i][j]; // [A]
13                Cz[3+i][j] = Cz[i][3+j] = z*Ch[i][j]; // [B]
14                Cz[3+i][3+j] = z*z*Ch[i][j]; // [D]
15                Cz[6+i][j] = Cz[i][6+j] = z*z*z*Ch[i][j] // [E]
16                Cz[3+i][6+j] = Cz[6+i][3+j] = z*z*z*z*Ch[i][j]; // [F]
17                Cz[6+i][6+j] = z*z*z*z*z*Ch[i][j]; // [H]
18            }
19
20    // Transverse shear terms.
21
22    Cz[9][9] = Cz[10][10] = Ch[4][4]; // As
23    Cz[9][11] = Cz[11][9] = Cz[10][12] = Cz[12][10] = z*z*Ch[4][4]; // Bs
24    Cz[11][11] = Cz[12][12] = z*z*z*z*Ch[4][4]; // Ds
25 }
26
27 // ===== CMatrix =====
28
29 void cSecAnTSDTFGMPlate :: CMatrix(cMatrix &C)
30 {
31     // Get necessary data.
32     int nsc = Anm->GetNumStrCmp( );
33     double Thk = Sec->GetThickness( );
34     cMatrix Ch(nsc, nsc);
35     cMatrix Cz(nsc, nsc);
36
37     // Evaluate the constitutive matrix through numeric integration.
38     C.Zero( );
39     for (int i = 0; i < NumSecPnt; i++)
40     {
41         double z = IntSecPnt[i].GetCoord( ).r*Thk/2.0;
42         Cmod[i]->CMatrix(Ch);
43         CalcCz(z, Ch, Cz);
44
45         double coeff = IntSecPnt[i].GetWeight( )*Thk/2.0;
46         C += coeff*Cz;
47     }
48 }

```